



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



29/10/1

47-A31c v.8
1741 (1736)

W. G. FARLOW

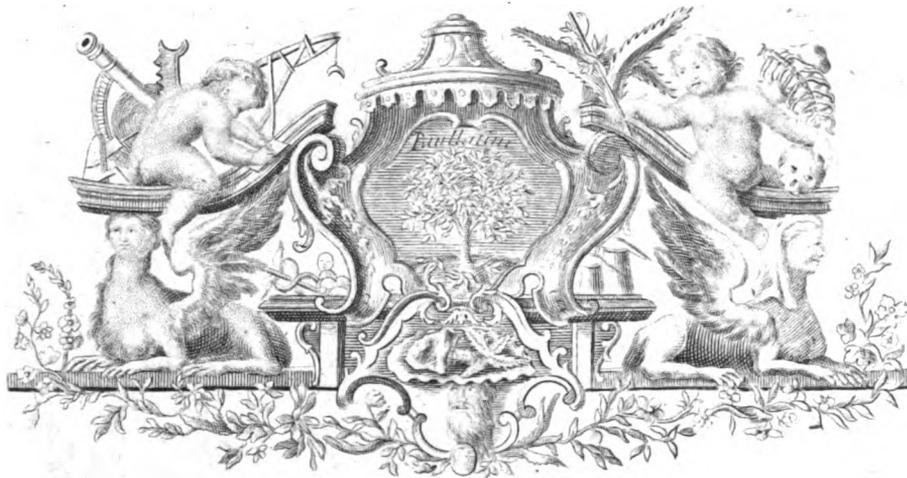
27/12

47-A31c v.8
1741 (1136)

W. G. FARLOW

COMMENTARII
ACADEMIAE
SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE.

TOMVS VIII.
AD ANNUM MDCXXXVI.



PETROPOLI,
TYPIS ACADEMIAE cbb&xli.

47
A31c
v. 8
1741 (1750)

IOANNI III.

RUSSORVM

IMPERATORI

IN publico acerbissimoque luctu quem
Annae, Materterae Tuae magnae dis-
cessus e vita Imperio Rutheno attu-
lit, haec praesertim Academia ingenti
cura

cura atque sollicitudine premeretur, nisi nos iustissima spes de Tua, *Auguste*, benignitate et clementia sustentaret; iis enim ortus Parentibus qui ipsi ad incrementum huius Imperii et aeternitatem Rutheni nominis nati sunt, fieri non potest quin tantarum, quibus eminent, virtutum exemplis quotidie excitatus Antecessorum Tuorum famam non adaeques modo, sed aliquando superes. Atque hoc immensum beneficium Russia providentiae *Annae, Magnae Ducis, Matris Tuae*, in primis debet, quae dum turbido nuper ac difficili tempore ad gubernaculum huius Imperii diuino consilio accessit, ita omnium sibi deuinxit animos, ut non magis iure suo, quam Populi vniuersi voluntate Tuas vices gerere videatur; ex quo Regimine quum et nos ob singularem *Eius Imperatoriae Celsitudinis* in Academicos beneuolentiam, plus vno documento nobis perspectam, prosperos collegio nostro successus per omne Imperii Tui tempus auguremur, non dubitauimus

tauimus, immo et partem officii nostri credidimus, octauum commentariorum volumen, quod primo hoc aetatis atque Imperii Tui anno in lucem prodit, *Maiestati Tuae* consecrare, Deum immortalem precati, vt Imperium quod *Tibi* belli ac pacis artibus insigne tradidit, nouis in dies pietatis, fortitudinis et benignitatis Tuae testimoniis monumentisque augeat, ita non modo rerum gestarum magnitudine Russiam Tuam olim in admirationem trahes, sed exterae etiam nationes tantarum rerum nouitate ac miraculo attonitae regni Tui gloriam praedicabunt.

Petropoli Kal. Decembr.

A. eb b cc xxxx.

Academicorum nomine

Christianus Goldbach.

IN-

INDEX COMMENTARIORVM.

IN CLASSE MATHEMATICA.

Leonh. Euleri Methodus Vniuersalis Serierum Conuergentium summas quam proxime inueniendi. pag. 3.

Eiusdem Inuentio summae cuiusque Seriei ex dato termino generali. p. 9.

Eiusdem Inuestigatio binarum curuarum, quarum arcus eisdem abscissae respondentes summam Algebraicam constituent. p. 23.

Eiusdem de Oscillationibus filii flexilis quotcunque pondusculis onusti. p. 30.

Eiusdem Methodus computandi Aequationem meridiei. p. 48.

Eiusdem de Constructione Aequationum ope motus tractorii, aliisque ad methodum tangentium inuersam pertinentibus. p. 66.

Eiusdem Solutio Problematum rectificationem Ellipsis requirentium. p. 86.

Dan.

Dan. Bernoulli de legibus quibusdam Mechanicis, quas natura constanter affectat, nondum descriptis, earumque vsu Hydrodynamico, pro determinanda vi venae aqueae contra planum incurrentis ab auctoribus, fallaci inductis experimento, falso aestimata. Pars I. p. 99.

Eiusdem Dissertationis de legibus Mechanicis nondum descriptis Pars altera, in qua legum istarum in prima parte expositarum vsus hydrodynamicus ostenditur. p. 113.

Leonb. Euleri Solutio Problematis ad Geometriam Situs pertinentis. p. 128.

Eiusdem Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium Demonstratio. p. 141.

Eiusdem Methodus vniuersalis series summandi vterius promota. p. 147.

Eiusdem Curuarum maximi minimiue proprietate gaudentium inuentio noua et facilis. p. 159.

IN CLASSE
PHYSICA.

Ioan. Amman de Ficibus e Trunco arboris enatis. p. 193.

Christ. Wolfii de Pomo ex Trunco arboris enato Dissertatio, in qua varia traduntur ad theoriam vegetacionis plantarum apprime facientia. p. 197.

Ioan.

Ioan. Amman de Meliloto filiqua Membranacea compressa.
p. 209.

Eiusdem quinque noua Plantarum genera. p. 211.

Georg. Wolffg. Krafft de Figura Terrae, Dissertatio prima. p. 220.

Eiusdem de vi venae aquaeae contra planum incurrentis experimenta. p. 253.

Ios. Weitbrecht Tentamen Theoriae, qua ascensus aquae in tubis capillaribus explicatur. p. 261.

Eiusdem de Thermometris concordantibus. p. 310.

Eiusdem Cogitationum Physiologicarum de Circulatione sanguinis Caput III. de quantitate motus sanguinis.
p. 334.

IN CLASSE
HISTORICA.

T. S. Bayeri de Numo Musei Imperatorii Amideno.
p. 343.

Eiusdem de duobus Diadematis in Museo Imperatorio.
p. 378.

Eiusdem Origines Russicae. p. 388.

* * *

* * *

* * *

OB-

OBSERVATIONES
ASTRONOMICAE
ET
METEOROLOGICAE.

Ioan. Poleni ad nobilissimum Virum Comitem Alexandrum de Pompeiis Patricium Veronensem Epistola, qua nonnullae Observationes Astronomicae et Meteorologicae continentur. p. 439.

Eiusdem I. Observatio Aurorae Borealis, visae nocte insequente diem 29. Martii 1739. habita Patauii. p. 440.

Eiusdem II. Observatio Eclipsis Solis, (sive, ut nonnulli loqui amant, Eclipsis telluris) quae contigit 4. Kal. Ian. 1740. habita Patauii. p. 442.

Eiusdem III. Observatio Lunaris Eclipsis, quae contigit nocte insequente Idus Ianuarii 1740. habita Patauii. p. 443.

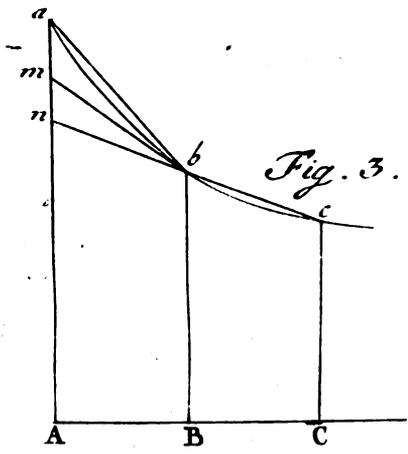
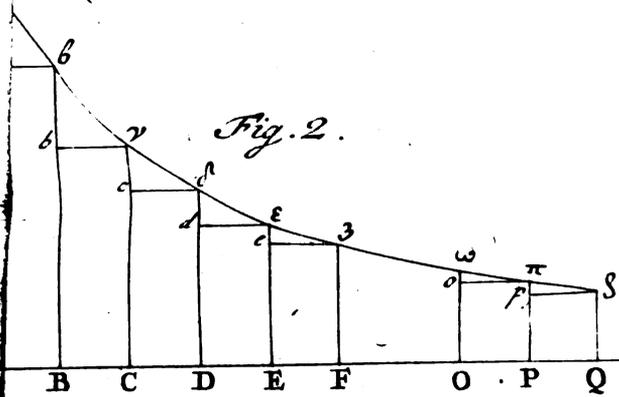
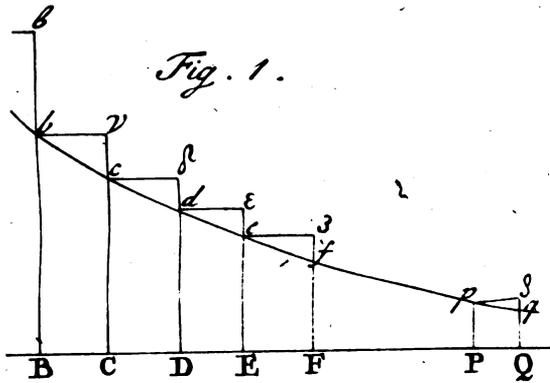
Eiusdem IV. Observatio. p. 446.

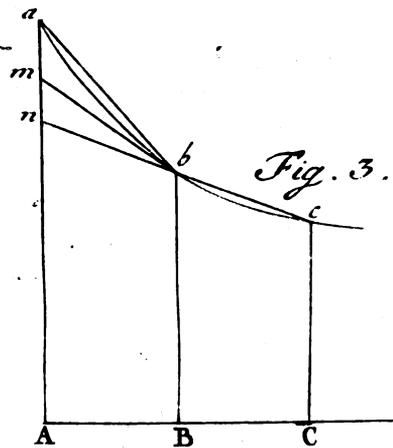
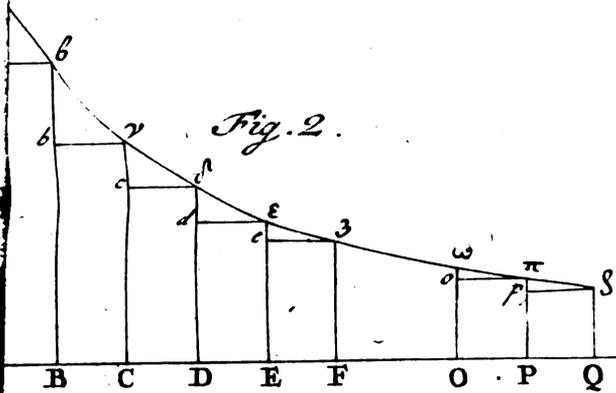
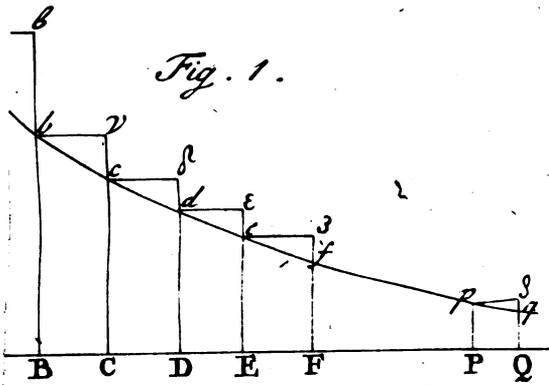
CLAS-

CLASSIS PRIMA
CONTINENS
MATHEMATICA.

Tom. VIII.

A







METHODVS VNIVERSALIS
SERIERVM CONVERGENTIVM
SVMMAS

QVAM PROXIME INVENIENDI.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. I.

Incidi iam pridem in peculiarem serierum summas ^{Tabula I.}
proxime inueniendi modum, qui integratione per-
ficietur, et admodum facile cuiusvis seriei propo-
sitae conuergentis summam exhibebat. Dedi etiam
huius methodi specimina iam aliquoties, in disser-
tatione de seriebus harmonicis; eam autem fusius expo-
nere magisque perficere tum temporis non vacabat;
etiamsi perspicerem ex ea multa praeclara subsidia ad
summationem serierum posse deriuari. Hac autem ra-
tione serierum summationem ad integrationem reduce-
bam. Posito numero terminorum n , eorumque summa s ,
si crescat n vnitatem, summae s augmentum erit termi-
nus seriei sequens, qui per n dabitur. Sit is x , eritque

A 2

x

x quantitas valde exigua, si n fuerit numerus satis magnus. Consideratis nunc x et n instar incrementorum momentaneorum quantitatum n et s erit $dn:ds = 1:x$ ideoque $ds = xdn$ et $s = \int xdn$. In qua integratione quidem constantem incognitam addi oportet, quae autem si summa s a summa seriei in infinitum continuatae, quae ex eadem integratione innotescit, subtrahatur, rursus exit ex calculo. Hoc itaque modo obtinetur terminorum ab x vsque in infinitum summa, quae ad summam s ipso actu inueniendam addita, dabit seriei propositae in infinitum continuatae summam.

§. 2. Obseruauit autem hoc modo semper summam seriei nimis paruam prodire, id quod mihi occasionem praebuit cogitandi, an alio simili tamen modo summa nimis magna possit produci, quo limites habeantur, intra quos vera seriei summa sit constituta. In quo negotio maximam afferri lucem animaduerti, si, quae ante per solum calculum praestiteram, ad considerationem linearum curuarum reducatur. Hoc enim modo inspectio figurae non solum imaginationis vim adauget, sed etiam ad iudicandum et inueniendum ingens affert subsidium. Traduxi autem sequenti modo seriei summationem ad figuram geometricam, cuius quadratura ipsam summam exhibet.

Figura 1.

§. 3. Sit series, cuius summa inuestigatur, $a + b + c + d + c +$ etc. in qua terminus cuius index est n sit x quantitas scilicet ex n vtcunque composita. Sumantur in axe AP partes AB, BC, CD, DE etc. inter se aequales et vnitatem denotentur. In punctis A, B, D, etc.

SERIERVM CONVERGENTIVM SVMMAS INV. 5

etc. erigantur applicatae Aa, Bb, Cc, Dd etc. respective aequales terminis seriei propositae a, b, c, d , etc. Atque sumpta $AP = n - 1$ fiat applicata $Pp = x$. Ad has applicatas et portiones axis $= 1$ compleantur parallelogramma $A\xi, B\gamma, C\delta, D\varepsilon$, etc. usque ad $P\zeta$. Horum igitur parallelogrammorum summa exprimet seriei $a + b + c + d + \text{etc.} + x$ summam. Quare ad huius seriei summam inveniendam methodo opus est commoda, qua horum parallelogrammorum aggregatum quam proxime possit definiri.

§. 4. Per puncta $a, b, c, d, e, f, \dots, p$ intelligatur ducta linea curua $abcdef \dots p$, cuius haec erit natura, ut posita abscissa $AP = n - 1 = t$ sit applicata $Pp = x$. Quia autem x est quantitas ex n et constantibus composita, si loco n ponatur $t + 1$, habebitur aequatio inter coordinatas t et x pro ista curua. Vel si terminus seriei ultimus x sequens ponatur y , cuius ergo index erit $n + 1$, aequatio inter n seu AQ et y seu Qq exprimet quoque naturam curuae $abc \dots pq$. Data autem hac serie dabitur etiam y per n , unde oritur aequatio inter n et y curuae naturam exprimens.

§. 5. Facta iam hac linea curua perspicuum est aream curuae inter abscissam AQ et applicatas Aa ac Qq contentam minorem esse quam aggregatum omnium rectangulorum $A\xi + B\gamma$ etc. $+ P\zeta$; quippe differentia est summa omnium triangulorum $ab\xi, bc\gamma, \dots, pq\zeta$. Cum autem aggregatum illorum rectangulorum exhibeat summam seriei $a + b + c + \dots + x$, erit haec summa maior quam area $AaqQ$. Quae ve-

ro area cum sit $= \int y dn$, hoc integrali ita accepto vt euaneſcat poſito $n=0$; erit $a + b + c + \dots + x > \int y dn$.

Figura 2. §. 6. Inuento ergo vno limite, quo ſumma ſeriei eſt maior, alterum ſimilem ſequenti modo inueſtigo. Sumtis iterum in axe AP partibus aequalibus AB, BC, CD, ----- PQ, quae ſingulae vnitare exprimentur; applicatae ita conſtituantur vt ſit Bε = a, Cγ = b, Dδ = c, ſumtoque AP = n ſit Pπ = x, et Qρ = y. Quemadmodum autem eſt y terminus vltimum x ſequens; ita ſit A terminus primum a antecedens; cui aequalis capiatur Aα. Quo facto aggregatum reſtangularum Ba + Cb + Dc ----- Po erit aequale ſummae ſeriei $a + b + c + d + \dots + x$.

§. 7. Nunc ſimili modo per puncta α, ε, γ ----- π concipiatur ducta linea curua αεγπ, cuius haec erit natura, vt ſumta abſciſſa AP = n ſit applicata Pπ = x. Area ergo, quae inter hanc curuam et abſciſſam AP comprehenditur, erit $= \int x dn$ integrali hoc ita accepto vt euaneſcat poſito $n=0$. Area vero iſta maior eſt quam reſtangularum Ba, Cb ----- Po aggregatum, quocirca erit $a + b + c + d + \dots + x < \int x dn$. Sunt ergo huius ſeriei limites $\int x dn$ et $\int y dn$.

§. 8. Obtinebimus autem adhuc propiores ſummae huius ſeriei determinationes, conſideratis triangulis paruis, in vtraque figura neglectis. Addi autem oportet in prima figura haec triangula ad arcum curuae $\int y dn$, vt ſumma ſeriei obtineatur. Haec vero triangula ſunt curui-

SERIERVM CONVERGENTIVM SVMMAS INV. 7

curvilinea, atque maiora quam si essent rectilinea, quia curva conuexitatem obuertit. Summa autem horum triangulorum rectilineorum est aequalis $(Aa - Qq)AB:2$ seu $\frac{a-y}{2}$. Quare si ad $\int y dn$ addatur $\frac{a-y}{2}$ non satis addatur; ideoque erit $a + b + c + \dots + x > \int y dn + \frac{a-y}{2}$.

§ 9. In secunda figura ab area $Aa\pi P$, quae est $\int x dn$, subtrahi deberent omnia triangula $aa\epsilon$, $\epsilon b\gamma$ $\dots \omega o\pi$, ad veram rectangulorum summam inueniendam. Sumatur autem loco trianguli curvilinei $aa\epsilon$ minus rectilineum triangulum, quod oritur producta recta per γ et ϵ donec occurrat rectae Aa , quod erit $= \frac{a-b}{2}$ horumque triangulorum omnium summa erit $\frac{a-y}{2}$. Quia vero $\frac{a-y}{2}$ minus est quam summa omnium curvilineorum triangulorum, si $\frac{a-y}{2}$ subtrahatur a $\int x dn$, erit $a + b + c + \dots + x < \int x dn - \frac{a-y}{2}$.

Figura 2.

§. 10. Horum duorum nouorum limitum prior vero valori multo est propior quam posterior. Ille autem $\int y dn + \frac{a-y}{2}$ aliquantulum minor est quam summa $a + b + c + \dots + x$ differentia enim est aggregatum omnium segmentorum arcibus ab, bc etc. et chordis ab, bc comprehensorum. Ad haec segmenta vero proxime aestimanda producat chorda sequens cb in n vsque et an in m bifariam secetur recta lm , quae proxime pro tangente curuae in b haberi poterit. Hinc erit de nouo quam proxime segmentum aba , pars tertia trianguli abm , et consequenter pars sexta trianguli abn .

Figura 3.

§. 11.

§. 11. Si ergo fuerit $Aa = a$, $Bb = b$ et $Cc = c$, erit $an = a - 2b + c$, et ob $AB = 1$, triangulum $abn = \frac{a-2b+c}{2}$. Huius igitur pars sexta $\frac{a-2b+c}{12}$ aequalis est segmento primo aba , similiter ergo erit secundum segmentum $= \frac{b-2c+d}{12}$ et vltimum $= \frac{x-2y+z}{12}$, denotante z terminum indicis $n+2$. Fiet ergo summa omnium segmentorum $= \frac{a-b}{12} - \frac{y+z}{12}$, quae addita ad superiorem summam dat $a + b + c - - - - - + x = \int y dn + \frac{a}{2} - \frac{y}{2} + \frac{(a-b)}{12} - \frac{(y-z)}{12}$.

§. 12. Valor hic inuentus valde prope accedit ad veram seriei assumtae summam, quia in eo ne segmenta quidem negleximus. Proposita autem serie conuergente effici potest, vt haec formula quantumuis prope ad veram summam accedat; hocque fieri potest, dum aliquot terminorum initialium summa reipsa computetur, et sequentes demum loco a, b, c etc. substituuntur. Quo enim plures termini initiales reipsa addantur, eo exactior proueniet seriei summa. Atque si seriei in infinitum continuatae summa desideretur, euanescent y et z ; atque in $\int y dn$ posito $n = \infty$ erit summa seriei infinitae $= \int y dn + \frac{a}{12} - \frac{b}{12}$.

§. 13. Vt si quaeratur summa millies mille terminorum huius seriei $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ etc. addantur decem termini initiales actu prodibitque $1, 928968$. Reliquorum autem terminorum $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13}$ etc. - - - - - $\frac{1}{1000000}$ summa inuenietur hoc modo: est $a = \frac{1}{11}$, $b = \frac{1}{12}$, $x = \frac{1}{n+10}$ et $y = \frac{1}{n+11}$ et $z = \frac{1}{n+12}$ atque $\int y dn = l \frac{n+11}{11}$. Posito nunc $n = 999990$; erit summa desiderata $= l \frac{1000001}{11} +$

SERIERVM CONVERGENTIVM SVMMAS INV. 9

$+ \frac{1}{22} + \frac{1}{172} - \frac{1}{124} - \frac{1}{1000000} - \frac{1}{12800000} + \frac{1}{128000000} + 2,928968$
 seu = 14,392669. q. pr.

§. 14. Propofita fit nunc haec series $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ etc., cuius fumma in infinitum defideretur. Si primo decem termini initiales addantur habebitur 1,549768. Pro reliquis vero erit $a = \frac{1}{11}$, $b = \frac{1}{14}$; $x = \frac{1}{(n+10)^2}$ et $y = \frac{1}{(n+11)^2}$. Ex his fit $\int y dn = \frac{1}{11} - \frac{1}{n+11}$; atque pofito $n = \infty$ erit $\int y dn = \frac{1}{11}$. Seriei ergo propofitae in infinitum continuatae fumma erit $\frac{1}{11} + \frac{7}{12 \cdot 121} - \frac{1}{12 \cdot 144} + 1,549678$. Quae expreffio in partibus decimalibus dat 1,644920.

INVENTIO SVMMAE CVIVSQUE SERIEI

EX

DATO TERMINO GENERALI.

AVCTORE

Leonb. Eulero.

§. 1.

CVm, quae superiore differtatione de fummatione ferierum methodo geometrica expofui, diligentius confideraffem, eandemque fummandi rationem analytice inueftigaffem; perfexi, id, quod geometricae elicui, deduci poffe ex peculiari quadam fummandi methodo, cuius iam ante triennium in *Differ- Tom. VIII.* **B** *tatio-*

10 INVENTIO SUMMAE CUIUSQUE SERIEI

tatione de summatione serierum mentionem feceram; postmodum vero de ea non amplius cogitaueram. Vim igitur analyticae methodi penitius perscrutatus, deprehendi non solum formulam geometricè inuentam in ea contineri; sed etiam eius ope adhuc pluribus terminis adiciendis magis perfici posse, ita vt tandem veram summam absolute exhibeat. Geometrica autem via eosdem terminos inuenire summe difficile videtur.

§. 2. In illa autem dissertatione de summatione serierum, si fuerit terminus generalis cuiuspiam seriei x , eiusque index n , vniuersali modo pro termino summatorio exhibui sequentem formam $\int x dn + \frac{x}{2} + \frac{dx}{12 dn} - \frac{d^3x}{720 dn^3} + \text{etc.}$ ex qua differentialia ipsius x , quia x per n dari ponitur, a differentialis dn , quod constans assumitur, potestatibus, destruentur; ita vt summa algebraica obtineatur, si quidem $x dn$ integrationem admittat. In integratione vero ipsius $x dn$ tanta adici debet constans, vt tota expressio euanescat posito $n = 0$.

§. 3. Quia igitur hanc formulam eiusque vsum accuratius in ista dissertatione persequi constitui; ante omnia modum, quo eam formulam sum consecutus exponam: Singularis enim est analysis, qua in hac re sum vsus, et complura satis praeclara in Analytica suppeditat, partim noua partim iam cognita, quae autem nusquam quantum recorder, satis euidenter sunt demonstrata.

§. 4. Ex natura calculi infinitesimalis sequitur, si fuerit y quomodocumque per x et constantes datum, atque loco x ponatur $x + dx$ tum abiturum y in $y + dy$.
Si

EX DATO TERMINO GENERALI. 11

Si iam porro x elemento dx augeatur, vel x abeat in $x + 2 dx$; tum loco y habebitur $y + 2 dy + ddy$. Atque si x denuo elemento dx crescat, y transibit in $y + 3 dy + 3 ddy + d^3 y$, vbi coefficientes sunt iidem qui in potestatibus binomii. Ex his sequitur si loco x ponatur $x + m dx$ tum y abire in hanc formam: $y + \frac{m}{1} dy + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} ddy + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 y + \text{etc.}$

§. 5. Sit iam ad nostrum institutum m numerus infinite magnus, quo $m dx$ quantitatem finitam significare queat; erit valor, quem y , posito $x + m dx$ loco x , habebit, iste: $y + \frac{m dy}{1} + \frac{m^2 d^2 y}{1 \cdot 2} + \frac{m^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m^4 d^4 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$ Si nunc fiat $m dx = a$ seu $m = \frac{a}{dx}$, induet y , si pro x ponatur $x + a$, hanc formam $y + \frac{a dy}{1 dx} + \frac{a^2 d^2 y}{1 \cdot 2 dx^2} + \frac{a^3 d^3 y}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^3} + \text{etc.}$ in qua omnes termini sunt finitae magnitudinis.

§. 6. Hanc ipsam seriem, quae valorem ipsius y transmutatum exhibet, si loco x ponatur $x + a$, primus produxit *Cl. Taylor* in *Methodo Increm. inu.* eamque ad multos egregios vsus accommodavit. Sequitur scilicet primum eleuatio binomii ad quamcunque dignitatem. Vt si quaeratur valor ipsius $(x + a)^m$ pono $y = x^m$; eritque $(x + a)^m$ valor ipsius y , si loco x ponatur $x + a$. Cum igitur sit $dy = m x^{m-1} dx$; $d^2 y = m(m-1) x^{m-2} dx^2$ et ita porro erit $(x + a)^m = x^m + \frac{m a x^{m-1}}{1} + \frac{m(m-1) a^2 x^{m-2}}{1 \cdot 2} + \text{etc.}$

B 2

§. 7.

12 INVENTIO SUMMAE CUIUSQUE SERIEI

§. 7. Hanc porro seriem *Taylorus* ad radicem ex quacunque aequatione proxime inueniendam, id quod hoc pacto perficit. Sit aequatio quaecunque incognitam z inuoluens, nempe $Z=0$, ubi Z est quantitas ex incognita z et cognitis utcunque composita. Deinde sumit x pro valore ipsi z prope aequali, et quantitatem ipsius Z , quae prodit si loco z ponatur x ponit $=y$, ita ut foret $y=0$, si x esset verus ipse z valor.

§. 8. At cum x a vero ipsius z valore aliquantum discrepet, ponit verum ipsius z valorem esse $x+a$. Quare perspicuum est si in y loco x ponatur $x+a$, tum euanturum y . At loco x si ponatur $x+a$ tum abibit y in $y + \frac{a dy}{1. dx} + \frac{a^2 d^2 y}{1.2. dx^2} + \frac{a^3 d^3 y}{1.2.3. dx^3} + \text{etc.}$ Hanc obrem ergo erit $0=y + \frac{a dy}{1. dx} + \frac{a^2 d^2 y}{1.2. dx^2} + \text{etc.}$ Ex qua aequatione valor ipsius a erutus dabit complementum a ad x addendum requisitum, quo obtineatur incognita z .

§. 9. Quia autem x ad z prope accedere ponitur, erit a quantitas valde parua, ita ut prae duobus terminis initialibus sequentes omnes eualescere queant. Hocque pacto oritur $a = -\frac{y dx}{dy}$ atque $z = x - \frac{y dx}{dy}$ qui est valor ipsius z multo magis propinquus quam x tantum. Ut pro hac aequatione $z^3 - 3z - 20 = 0$ erit $y = x^3 - 3x - 20$ et $dy = 3x^2 - 3$ ideoque $z = x - \frac{x^3 + 3x - 20}{3x^2 - 3} = \frac{2x^3 + 20}{3xx - 3}$. Sumto nunc primo $x = 3$ erit $z = 3\frac{1}{2}$, hocque valore denuo pro x posito proxime z inuenietur.

§. 10. Si porro detur conditio quaecunque functionis y , quae certo ipsius x casu locum habeat, formula superior abibit

14 INVENTIO SUMMAE CUIUSQUE SERIEI.

X imminuta. Hac igitur substitutione abibit S in S - X. Comparentur ergo haec cum superiore formula; erit S = y et a = -1; quamobrem valor ipsius S transmūtatus seu S - X erit = S - $\frac{dS}{1 \cdot dx} + \frac{d^2 S}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} - \frac{d^3 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} + \text{etc.}$ Ex quo oritur ista aequatio X = $\frac{dS}{1 \cdot dx} - \frac{d^2 S}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} - \frac{d^4 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^4} + \text{etc.}$

§. 14. Ope huius ergo aequationis ex dato termino summatorio seriei cuiusque inuenitur terminus generalis. Quod autem, cum alias sit facillimum, superfluum foret hac methodo ad terminum generalem ex summatorio inueniendum vti. Id autem maxime commodi huic aequationi accidit, vt singuli termini sint euoluti, eaque idcirco ad singulares vsus possit accommodari. Methodo enim cognita haec series X = $\frac{dS}{1 \cdot dx} - \frac{d^2 S}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{d^3 S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} - \text{etc.}$ potest inuerti vt ex termino generali X determinetur summatorius S; quod ipsum maxime desideratur.

§. 15. Ponamus igitur $\frac{dS}{dx} = aX + \frac{\epsilon d^2 X}{dx^2} + \frac{\gamma d^3 X}{dx^3} + \frac{\delta d^4 X}{dx^4} + \text{etc.}$ ita vt sit S = $\alpha \int X dx + \epsilon X + \frac{\gamma dX}{dx} + \frac{\delta d^2 X}{dx^2} + \text{etc.}$ Erit ergo $\frac{d^2 S}{dx^2} = \frac{\alpha dX}{dx} + \frac{\epsilon d^2 X}{dx^2} + \frac{\gamma d^3 X}{dx^3} + \frac{\delta d^4 X}{dx^4} + \text{etc.}$ et $\frac{d^3 S}{dx^3} = \frac{\alpha d^2 X}{dx^2} + \frac{\epsilon d^3 X}{dx^3} + \frac{\gamma d^4 X}{dx^4} + \text{etc.}$ et $\frac{d^4 S}{dx^4} = \frac{\alpha d^3 X}{dx^3} + \frac{\epsilon d^4 X}{dx^4} + \text{etc.}$ atque $\frac{d^5 S}{dx^5} = \frac{\alpha d^4 X}{dx^4} + \text{etc.}$

§. 16. Substituantur ergo istae series loco cuiusque termini superioris seriei; et termini similes inter se comparentur nihiloque aequales ponantur. Quo facto coëfficientes a, ε, γ etc. ita determinabuntur, vt sit, vti sequitur:

α = 1

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \beta &= \frac{\alpha}{2} \\ \gamma &= \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{8} \\ \delta &= \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{8} + \frac{\alpha}{24} \\ \varepsilon &= \frac{\delta}{2} - \frac{\gamma}{8} + \frac{\beta}{24} - \frac{\alpha}{120} \\ \zeta &= \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\delta}{8} + \frac{\gamma}{24} - \frac{\beta}{120} + \frac{\alpha}{720} \text{ etc.} \end{aligned}$$

§. 17. Coëfficientes ergo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. seriem constituunt huius indolis, vt quisque tēminus ex omnibus antecedentibus determinetur; existente termino primo = 1. Numeri autem per quos singuli terminorum antecedentium diuidi debent, constituunt progressionem a Wallisio hypergeometricam dictam; 2, 6, 24, 120, 720, 5040, etc. Ipsa autem series coëfficientium α, β, γ etc. ita est comparata, vt vix credam pro ea terminum generalem posse exhiberi.

§. 18. Pro instituto ergo nostro contenti esse debemus seriem coëfficientium quousque libuerit continuasse, id quod ex lege progressionis facile perfici potest. Inueni autem hanc seriem, vt sequitur:

$$\begin{aligned} &+ 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} + 0 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - 0 \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6} + 0 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} \\ &- 0 + \frac{5}{1 \cdot \dots \cdot 11 \cdot 6} + 0 - \frac{691}{1 \cdot \dots \cdot 13 \cdot 210} \\ &- 0 + \frac{35}{1 \cdot \dots \cdot 15 \cdot 2} + 0 - \frac{3617}{1 \cdot \dots \cdot 17 \cdot 30} \end{aligned}$$

in qua serie notabile est, quod omnes termini pares praeter secundum euanescant.

§. 19.

ita se habebunt vt sit $\frac{d^2X}{dx^2} = nx^{n-1}$; $\frac{d^3X}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$; $\frac{d^4X}{dx^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-4}$; etc. His igitur valoribus substitutis erit terminus summatorius seriei propositae

$$S = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{2} + \frac{nx^{n-1}}{2 \cdot 6} - \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 30} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 42} - \frac{n(n-1) \dots (n-6)x^{n-7}}{2 \cdot 3 \dots 8 \cdot 30} + \frac{n(n-1) \dots (n-8)5x^{n-9}}{2 \cdot 3 \dots 10 \cdot 66} - \frac{n(n-1) \dots (n-10)691x^{n-11}}{2 \cdot 3 \dots 13 \cdot 2730} + \frac{n(n-1) \dots (n-12)7x^{n-13}}{2 \cdot 3 \dots 14 \cdot 6} - \frac{n(n-1) \dots (n-14)3617x^{n-15}}{2 \cdot 3 \dots 16 \cdot 510} + \text{etc. Ad}$$

quam seriem, quousque opus est continuandam, oportet, vt superior illa series α, β, γ , etc. eousque continuetur.

§. 23. Ex hac igitur generali summatione seriei cuius terminus generalis est x^n confici possunt summae specialium serierum potestatum vt sequitur:

$$\begin{aligned} \int x^1 &= \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \\ \int x^2 &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} \\ \int x^3 &= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4} \\ \int x^4 &= \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{8} - \frac{x}{30} \\ \int x^5 &= \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{2} + \frac{5x^4}{12} - \frac{x^3}{12} \\ \int x^6 &= \frac{x^7}{7} + \frac{x^6}{2} + \frac{x^5}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x}{42} \end{aligned}$$

Tom. VIII.

C

$\int x^7 =$

18 INVENTIO SUMMAE CVIVSQUE SERIEI

$$\begin{aligned} \int x^7 &= \frac{x^8}{8} + \frac{x^7}{2} + \frac{7x^6}{12} - \frac{7x^4}{24} + \frac{x^2}{12} \\ \int x^8 &= \frac{x^9}{9} + \frac{x^8}{2} + \frac{2x^7}{3} - \frac{7x^6}{15} + \frac{2x^5}{9} - \frac{3x}{30} \\ \int x^9 &= \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^9}{2} + \frac{3x^8}{4} - \frac{7x^6}{10} + \frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{20} \\ \int x^{10} &= \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{10}}{2} + \frac{5x^9}{6} - x^7 + x^5 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x}{66} \\ \int x^{11} &= \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{11}}{2} + \frac{11x^{10}}{12} - \frac{11x^8}{8} + \frac{11x^6}{6} - \frac{11x^4}{8} + \frac{5x^2}{12} \\ \int x^{12} &= \frac{x^{13}}{13} + \frac{x^{12}}{2} + x^{11} - \frac{11x^9}{6} + \frac{22x^7}{7} - \frac{33x^5}{10} + \frac{5x^3}{3} - \frac{691x}{2730} \\ \int x^{13} &= \frac{x^{14}}{14} + \frac{x^{13}}{2} + \frac{11x^{12}}{12} - \frac{14x^{10}}{6} + \frac{143x^8}{28} - \frac{141x^6}{20} + \frac{65x^4}{12} - \frac{691x^2}{420} \\ \int x^{14} &= \frac{x^{15}}{15} + \frac{x^{14}}{2} + \frac{7x^{13}}{6} - \frac{91x^{11}}{30} + \frac{143x^9}{18} - \frac{14x^7}{10} + \frac{91x^5}{6} - \frac{691x^3}{90} + \frac{7x}{6} \\ \int x^{15} &= \frac{x^{16}}{16} + \frac{x^{15}}{2} + \frac{5x^{14}}{4} - \frac{91x^{12}}{24} + \frac{143x^{10}}{12} - \frac{49x^8}{16} + \frac{455x^6}{12} - \frac{691x^4}{24} + \frac{35x^2}{4} \\ \int x^{16} &= \frac{x^{17}}{17} + \frac{x^{16}}{2} + \frac{4x^{15}}{3} - \frac{14x^{13}}{3} + \frac{52x^{11}}{3} - \frac{141x^9}{3} + \frac{260x^7}{3} - \frac{1392x^5}{15} + \frac{140x^3}{3} - \frac{3617x}{510} \end{aligned}$$

§. 24. Sin autem x non ubique habuerit exponentes affirmatiuos in termino generali seriei, tum quoque expressio summae infinitis constat terminis; quia huiusmodi series generalem summationem non admittunt, sed quasque quadraturas inuoluunt. Interim tamen obseruauit ope huius methodi eiusmodi series facile admodum proxime summari posse, quod insignem habet utilitatem in seriebus, quae parum conuergunt, et alias difficulter summantur. Quod quomodo efficiendum sit, exemplis docebo.

§. 25. Considerabo igitur primum series harmonicas, et prae ceteris quidem hanc $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ etc. cuius terminus generalis est $\frac{1}{x}$; summatorius uero, sit S , quaeritur. Est ergo $X = \frac{1}{x}$ et $\int X dx = \text{Const.} + \ln x$. Atque porro $\frac{dX}{dx} = -\frac{1}{x^2}$; $\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$; $\frac{d^3X}{dx^3} = -\frac{6}{x^4}$; $\frac{d^4X}{dx^4} = \frac{24}{x^5}$; etc. His substitutis prodit $S = \text{Const.}$

+

$+ \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^3} - \frac{1}{252x^5} + \frac{1}{240x^7} - \frac{1}{132x^{10}}$
 $+ \frac{691}{32760x^{12}} - \frac{1}{12x^{14}} + \text{etc.}$ Vbi constans addenda ita debet esse comparata vt posito $x=0$ fiat $S=0$; Ex hoc vero ob omnes terminos infinite magnos constans determinari non potest.

§. 26. Ad constantem vero determinandam alium casum assumi oportet, quo summa seriei est cognita; qui ergo habebitur, si certus terminorum numerus in vnam summam colligatur. Addantur ergo 10 termini initiales $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - - - \frac{1}{10}$; reperieturque eorum summa $= 2,9289682539682539$; cui aequalis esse debet summa eorundem terminorum ex formula nempe, Const. $+ \frac{1}{10} + \frac{1}{20} - \frac{1}{1200} + \frac{1}{120000} - \frac{1}{35200000} + \frac{1}{2400000000} - \frac{1}{132000000000}$ etc. Quo facto reperietur propter $\frac{1}{10} = 2,302585092994045684$ constans illa addita $= 0,5772156649015329$; hacque semel determinata summa quotcunque terminorum huius seriei reperietur.

§. 27. Hac igitur ratione inuestigavi summam 100, 1000, 10000 etc. terminorum seriei $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ etc. inuenique vt sequitur:

| | | |
|----------------|-----|---------------------|
| $\int 10$ | $=$ | 2,9289682539682539 |
| $\int 100$ | $=$ | 5,1873775176396203 |
| $\int 1000$ | $=$ | 7,4854708605503449 |
| $\int 10000$ | $=$ | 9,7876060360443823 |
| $\int 100000$ | $=$ | 12,0901461298634280 |
| $\int 1000000$ | $=$ | 14,3927267228657236 |

C 2

§. 28.

20 *INVENTIO SUMMAE CUIUSQUE SERIEI*

§. 28. Si primus tantum terminus seriei 1 capia-
tur; erit $S=1$, et $x=1$ ideoque $lx=0$. Habebi-
tur ergo ex aequatione $0,4227843350984670 = \frac{1}{2}$
 $-\frac{1}{12} + \frac{1}{120} - \frac{1}{252} + \frac{1}{240} - \frac{1}{132} + \frac{691}{32760} - \frac{1}{12} +$ etc. Huius
ergo seriei admodum irregularis et ne conuergentis qui-
dem inuenta est summa quam proxime. Seriei autem
in infinitum continuatae summa erit $=l\infty + 0,577-$
 2156649015329 , quae prodit posito $x=\infty$.

§. 29. Progrediamur nunc ad hanc seriem $1 +$
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ etc. considerandam, in qua est $X = \frac{1}{2x-1}$
et $\int X dx = \text{Const.} + \frac{1}{2}l(2x-1)$ atque $\frac{dX}{dx} = \frac{-2}{(2x-1)^2}$;
 $\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{-2 \cdot 4 \cdot 6}{(2x-1)^3}$; $\frac{d^3X}{dx^3} = \frac{-2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}{(2x-1)^4}$ etc. His igitur inuentis
erit seriei propositae summa $S = \text{Const.} + \frac{1}{2}l(2x-1)$
 $+\frac{1}{2(2x-1)} - \frac{1}{6(2x-1)^2} + \frac{1}{15(2x-1)^3} - \frac{1}{63(2x-1)^4} + \frac{1}{15(2x-1)^5} -$
 $\frac{128}{33(2x-1)^6} + \frac{256 \cdot 691}{4095(2x-1)^7} - \frac{2048}{3(2x-1)^8} + \frac{1024 \cdot 3617}{255(2x-1)^9} -$ etc.

§. 30. Constans autem quantitas in hoc casu actu
addendis aliquot terminis non tam expedite potest de-
terminari quam in casu praecedenti. Hoc vero casu
subsidium aliquod vsu venit, quo haec constans ex prae-
cedente determinari potest. Scilicet seriei $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
 $+\frac{1}{4}$ etc. in infinitum continuatae summa est $= \text{Const.}$
 $+\frac{1}{2}l\infty$. Subtrahatur ab huius seriei duplo prior series
harmonica; habebitur $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ etc. cuius summa vt
constat est $l2$. Erit ergo $l2 = \text{const.} + l\infty - l\infty - 0,$
 577215 etc. ideoque haec constans quaesita $= 0,$
 6351814227307392 .

§. 31.

§. 31. Pergo ad series magis compositas, et considero hanc $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$ reciprocam quadratorum, cuius terminus generalis est $\frac{1}{x^2} = X$. Erit ergo $\int X dx = \text{Const.} - \frac{1}{x}$, atque $\frac{dX}{dx} = -\frac{2}{x^3}$; $\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}$; $\frac{d^3X}{dx^3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{x^7}$ etc. His substitutis erit $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$
 $\frac{1}{x^2} = S = \text{Const.} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{30x^5} - \frac{1}{42x^7} + \frac{1}{30x^9} - \dots$
 $\frac{5}{96x^{11}} + \frac{691}{2730x^{13}} - \frac{7}{6x^{15}} + \text{etc.}$ Vbi constantis quantitas ex casu speciali debet determinari.

§. 32. Ipso ergo actu addidi decem terminos initiales seriei istius, quorum summam inveni 1, 549767731166540. Ad hanc ergo cum sit hoc casu $x = 10$, si addatur $\frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{8000} - \frac{1}{300000} + \frac{1}{42000000} - \dots$
 $\frac{1}{700000000} + \frac{1}{132000500000} - \frac{691}{2730000000000} + \frac{7}{80000000000000} - \dots$
 etc. Ex hoc ergo prodit constans illa addenda = 1, 64493406684822643647. Huicque constanti aequalis est seriei in infinitum continuatae summa; posito enim $x = \infty$ fit $S = \text{Const.}$ evanescentibus omnibus terminis.

§. 33. Simili modo pro serie reciproca cuborum $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \text{etc.}$ si addantur decem termini initiales habebitur eorum summa haec 1, 197531985674193. Vnde inuenitur constans, quae in summatione huius seriei addi debet = 1, 202056903159594. Atque huic numero aequalis est seriei $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64}$ in infinitum continuatae summa. Atque pro biquadratis $1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \text{etc.}$ et summa = 1, 0823232337110824.

22 *INVENTIO SUMMAE CUIUSQUE SERIEI*

34 Consideremus nunc hac methodo feriem, qua area circuli, cuius diameter est $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.}$ vel $\frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{9.11} + \frac{2}{13.15} \text{ etc.}$ cuius terminus generalis est $\frac{2}{(4x-3)(4x-1)}$ vel resoluendo in factores $\frac{1}{4x-3} - \frac{1}{4x-1}$. Ad summam ergo huius seriei quam proxime inueniendam est $X = \frac{1}{4x-3} - \frac{1}{4x-1}$ atque $\int X dx = \text{Const.} - \frac{1}{4} \log \frac{4x-1}{4x-3}$; et $\frac{dX}{dx} = \frac{-4}{(4x-3)^2} + \frac{4}{(4x-1)^2}$; $\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 12}{(4x-3)^3} + \frac{4 \cdot 8 \cdot 12}{(4x-1)^3} \text{ etc.}$ Ex his erit seriei $\frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} - - - - + \frac{2}{(4x-3)(4x-1)}$ summa $S = \text{Const.} - \frac{1}{4} \log \frac{4x-1}{4x-3} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4x-3} - \frac{1}{4x-1} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{(4x-3)^2} - \frac{1}{(4x-1)^2} \right) + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{(4x-3)^3} - \frac{1}{(4x-1)^3} \right) - \frac{256}{63} \left(\frac{1}{(4x-3)^6} - \frac{1}{(4x-1)^6} \right) + \frac{1024}{15} \left(\frac{1}{(4x-3)^9} - \frac{1}{(4x-1)^9} \right) - \frac{4^8}{3^8} \left(\frac{1}{(4x-3)^{10}} - \frac{1}{(4x-1)^{10}} \right) + \text{etc.}$ Haec vero series etiamsi decem termini addantur non satis conuergit, quo valor constantis commode possit exhiberi. Constantis autem quater sumpta exhibet peripheriam circuli existente diametro $= 1$.

INVE-

INVESTIGATIO
 BINARVM CURVARVM,
 QVARVM
 ARCVS EIDEM ABSCISSAE
 RESPONDENTES
 SVMMAM ALGEBRAICAM
 CONSTITVANT.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. I.

Problema, cuius solutionem hac dissertatione exponere constitui, sequentes continet conditiones. Requiruntur in eo I. duae curvae algebraicae, quarum II. neutra sit rectificabilis, quae tamen ita debent esse comparatae, ut duo arcus III. eidem abscissae respondententes IV. summam constituent algebraicam. Harum quatuor conditionum quacunque omissa problema fit solutu admodum facile, omnibus autem satisfacere maxime videtur difficile. Prima quidem conditione omissa, si admittantur curvae transcendentes, reliquis conditionibus facile satisfiet. Si secunda omittatur, quaelibet duae curvae algebraicae et rectificabiles problemati satisficient. Tertia quidem neglecta difficilior est solutio, sed tamen ex iis quae *Celeb. Viri Hermanus et Bernoullius* de reductione quadraturarum ad rectificationes

CUR-

curvarum algebraicarum dederunt, solutio facile deducitur. Quarta autem conditio, si omittatur, ne quidem problema erit, cum omnes curvae algebraicae non rectificabiles reliquis conditionibus satisfaciant.

§. 2. Ad generalem huius problematis solutionem utor formulis, quas citati Viri Celeb. dederunt pro curvis vel rectificabilibus, vel quarum rectificatio a data quadratura pendet. His enim formulis effici potest, ut curvae sint algebraicae, ut sint non rectificabiles, atque ut arcuum summa sit rectificabilis. Monstrabo vero etiam, quomodo abscissae aequales reddi possint. Quo facto omnibus conditionibus erit satisfactum, atque problema generaliter solutum. Tam late enim istae formulae patent, ut, nisi praeter necessitatem restrictio adhibeatur, omnes omnino curvas problemati satisfacientes exhibere debeant.

§. 3. Designatis igitur curvis quaesitis per litteras A et B, erit ex illis formulis

| in Curva A | | in Curva B | |
|---------------|---|---------------|---|
| abscissa | $\frac{(dP^2 - dQ^2)^{\frac{3}{2}}}{dQddP - dPddQ}$ | abscissa | $\frac{(dp^2 - dq^2)^{\frac{3}{2}}}{dqddp - dpddq}$ |
| applicata P + | $\frac{dQ(dP^2 - dQ^2)}{dQddP - dPddQ}$ | applicata p + | $\frac{dq(dp^2 - dq^2)}{dqddp - dpddq}$ |
| arcus Q + | $\frac{dP(dP^2 - dQ^2)}{dQddP - dPddQ}$ | arcus q + | $\frac{dp(dp^2 - dq^2)}{dqddp - dpddq}$ |

His formulis iam obtinetur, quod alias maximam pareret difficultatem, ut ambae curvae sint algebraicae, si modo

si modo P ponatur quantitas algebraica. Deinde rectificabiles non erunt, si Q et q quantitates transcendentes inuoluunt. Tertio arcuum summa erit rectificabilis si Q+q fuerit quantitas algebraica, etiamsi Q et q seorsim tales non sint. Cum autem his conditionibus fuerit satisfactum, abscissae inter se aequales sunt efficiendae.

§. 4. Efficiamus primo abscissas inter se aequales

eritque $\frac{(dP^2 - dQ^2)^{\frac{3}{2}}}{dQ d d P - d P d d Q} = \frac{(dp^2 - dq^2)^{\frac{3}{2}}}{dq d d p - d p d d q}$. Fiat ad

hoc praestandum $dQ = R dP$ et $dq = r dp$. Quo po-

sito habebitur $\frac{(1-R^2)^{\frac{3}{2}} dP}{-dR} = \frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}} dp}{-dr}$, hincque $dP =$

$\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}} dR dp}{(1-R^2)^{\frac{3}{2}} dr}$; quod differentiale, quia P debet esse

quantitas algebraica, est integrabile reddendum. Sunt autem R et r quantitates algebraicae, ob curuas A et

B algebraicas, quare et $\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}} dR}{(1-R^2)^{\frac{3}{2}} dr}$ erit quantitas al-

gebraica. Posito igitur breuitatis gratia $\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}} dR}{(1-R^2)^{\frac{3}{2}} dr}$

$= T$, erit $dP = T dp$, seu $P = Tp - sp dT$. Quo ergo P sit quantitas algebraica, facio $sp dT = N$, eritque $p = \frac{dN}{dT}$ et $P = \frac{T dN}{dT} - N$.

Tom. VIII.

D

§. 5.

§. 5. Hac igitur ratione iam affecuti sumus valores algebraicos pro P et p , quibus substitutis vtriusque curvae abscissae fiunt aequales. Praeterea curvae ipsae erunt algebraicae, si modo R , r et N fuerint tales. Sed quo arcuum summa fiat quoque algebraica, Q et q ita determinari debent, vt $Q + q$ sit quantitas algebraica. Est vero $Q + q = \int R dP + \int r dp = RP + rp - \int P dR - \int p dr$. Ponatur igitur $\int P dR + \int p dr = M$, eritque $P = \frac{dM - p dr}{dR}$. Atque $Q + q = RP + rp - M$.

§. 6. Cum autem iam supra inuentum sit $p = \frac{dN}{dT}$ et $P = \frac{T dN}{dT} - N$, substituuntur hi valores in aequatione $P dR + p dr = dM$. Quo facto prodibit $\frac{T dN dR}{dT} - N dR + \frac{dN dr}{dT} = dM$. Quia vero M est quantitas algebraica, oportet vt hic ipsius dM valor possit integrari. Integratione autem instituta prodit $M = \frac{T N dR}{dT} + \frac{N dr}{dT} - \int N (dR + d \cdot \frac{T dR}{dT} + d \cdot \frac{dr}{dT})$. Sit itaque hoc integrale $= u$, ideoque debet esse $N = \frac{du}{dR + d \cdot \frac{T dR}{dT} + d \cdot \frac{dr}{dT}}$; vbi pro R , r et u quantitates quaecunque algebraicae accipi poterunt.

§. 7. Sumtis igitur pro R , r et u functionibus quibuscunque indeterminatae z , dabitur quoque T in z

cum sit $T = \frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}} dR}{(1-R^2)^{\frac{3}{2}} dr}$. Atque ex postrema aequatione reperietur quoque N in z . Inuenta autem N

habebitur $M = \frac{T N dr}{dT} + \frac{N dR}{dT} - u$. Similique modo dantur

buntur P et p per z ex aequationibus $P = \frac{TdN}{dT} - N$ et $p = \frac{dN}{dT}$. Denique habebitur $Q + q = RP + rp - M$.

§. 8. His igitur determinationibus consecuti sumus primo; vt curuarum A et B abscissae sint aequales, secundo vt vtraque curua sit algebraica, et tertio vt arcuum summa sit rectificabilis. Quare videamus, an quoque conditioni reliquae, qua vtraque curua per se debet esse irrectificabilis, sit satisfactum. Hoc quidem iam factum esse videtur, cum nusquam neque Q neque q seorsim integrabiles fecerimus. Attamen ne forte algebraici valores pro Q et q proueniant, cauendum tantum est ne $\frac{drdN}{dT}$ fiat integrabile. Nam cum sit $dq = ndp$ erit $q = rp - \int pdr = rp - \int \frac{drdN}{dT}$. Atque $Q = RP - M + \int \frac{drdN}{dT}$.

§. 9. Quo autem appareat, quomodo euitari possit integrabilitas ipsius $\frac{drdN}{dT}$, problema etiam quinta adiecta conditione soluiam, qua postuletur vt curua vtraque non solum sit irrectificabilis, sed etiam vt vtriusque rectificatio a data pendeat quadratura, puta a $\int Z dz$. Ad hoc igitur efficiendum debet $\int \frac{drdN}{dT}$ ad $\int Z dz$ reduci.

Est vero $\int \frac{drdN}{dT} = \frac{Ndr}{dT} - \int Nd \frac{dr}{dT} = \frac{Ndr}{dT} - \int \frac{dud \cdot \frac{dr}{dT}}{dR + d \cdot \frac{TdR}{dT} + d \cdot \frac{dr}{dT}}$ posito loco N eius valore §. 6. inuento.

§. 10. Ponatur breuitatis gratia $\frac{d \cdot \frac{dr}{dT}}{dR + d \cdot \frac{TdR}{dT} + d \cdot \frac{dr}{dT}} = S$, quae ergo quantitas ex solis r et R est composita.

posita. Quare erit $\int \frac{dr dN}{dT} = \frac{N dr}{dT} - \int S du = \frac{N dr}{dT} - Su + \int u dS$. Fiat igitur $\int u dS = \int Z dz$, unde reperitur $u = \frac{Z dz}{ds}$. Hoc igitur pro u valore accepto, vtriusque curvae inuentae rectificatio a quadratura $\int Z dz$ pendeat. Erit enim $\int \frac{dr dN}{dT} = \frac{N dr}{dT} - \frac{SZ dz}{ds} + \int Z dz$. Deinde cum eadem quadratura infinitis modis possit exhiberi, non solum per arbitrarios ipsarum R et r valores varietas infinita obtinetur, sed etiam per innumeros ipsius u valores; quibus tamen omnibus efficitur, vt curvarum inuentarum omnium rectificatio a quadratura proposita $\int Z dz$ pendeat.

§. 11. Hac igitur ratione innumerabilibus modis solui problema non solum, vt initio proposueram, sed adiecta insuper conditione pendetiae rectificationis curvarum inueniendarum a data quadratura. Problema igitur haecenus solutum ita est proponendum. Duas inuenire curuas algebraicas, quarum vtriusque rectificatio a data pendeat quadratura, duorum autem arcuum eidem abscissae respondentium summa sit rectificabilis.

§. 12. Ipsae autem curvae quaesitae determinabuntur ex assumtis pro literis R et r valoribus algebraicis atque ex u propositam quadraturam introducente. Ex his enim reperiuntur P et p , quibus inuentis erit curvae A abscissa

$$fa = \frac{(1-R^2)^{\frac{5}{2}} dP}{-dR} \text{ et applicata } = P + \frac{R dP (1-R^2)}{-dR}. \text{ Al-}$$

$$\text{terius vero curvae } B \text{ abscissa } = \frac{(1-r^2)^{\frac{5}{2}} dp}{-dr}, \text{ quae aequa-}$$

lis

his erit illius abscissae; at applicata erit $= p + \frac{rdp(1-r^2)}{-dr}$
 Arcus autem curvae A exprimetur formula $\frac{dP(1-R^2)}{-dR} + \int R dP$, et curvae B arcus eidem abscissae respondens erit $\frac{dp(1-r^2)}{-dr} + \int r dp$. Pendebit autem tam $\int R dP$ quam $\int r dp$ a $\int Z dz$: nihilo tamen minus $\int R dP + \int r dp$ algebraice poterit exhiberi.

§. 13. Denique ex ipsa solutione satis intelligitur me non monente eadem opera solui posse problema, si non arcuum summa, sed differentia eorum debeat esse algebraica, vel etiam summa seu differentia quorumcunque multorum horum arcuum. Quamobrem superfluum foret, hos quoque casus attingere. Ad institutum quidem plenius persequendum requireretur, ut exempla quaedam euoluerentur, sed cum ad prolixissimos calculos esset perueniendum, ea potius omitto, aliisque inuestiganda relinquo.

DE
 OSCILLATIONIBVS
 FILI FLEXILIS QVOTCVNQVE PONDVSCVLIS
 ONVSTI.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. I.

Tabb. II. III.

IAm ante complures annos, cum *Cl. Bernoullius* hinc commoraretur, quaestio inter nos incidebat, de curuatura catenae circa alterum terminum fixum oscillantis. Experientia autem nos docebat curuas maxime irregulares easque diuersissimas satisfacere, ex quo problema non solum difficillimum, sed etiam vires humanas, nisi restrictio adhibeatur, exsuperans iudicauimus. Hanc ob rem nostras cogitationes ad oscillationes infinite paruas tantum aduertimus, quo casu solutionem multo minus laboris requirere facile praeuideramus. Neque vero has infinite paruas oscillationes omnes persequi idoneum visum est, sed eas duntaxat, in quibus singulae catenae partes simul ad lineam verticalem tanquam ad statum naturalem perueniunt. Obseruauimus enim saepius accidere, vt catena oscillans nunquam tota in directum extendatur, neque eius partes omnes simul per lineam verticalem transeant; facile autem praeuidebamus oscillationes initio ita temperari posse, vt singulae partes simul ad lineam verticalem sint peruenturae. Ex quibus sequens formauimus problema; Inuenire

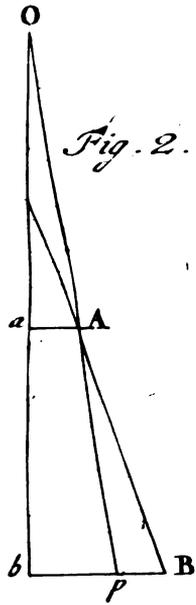


Fig. 2.

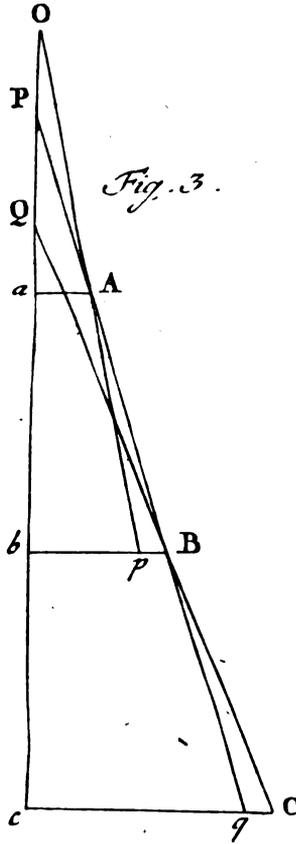


Fig. 3.

Fig. 4.

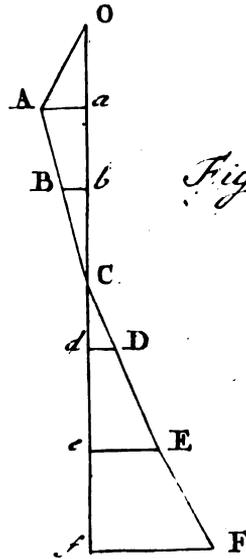
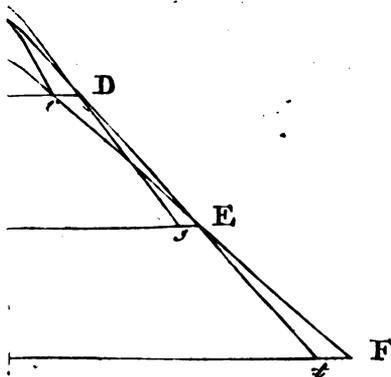
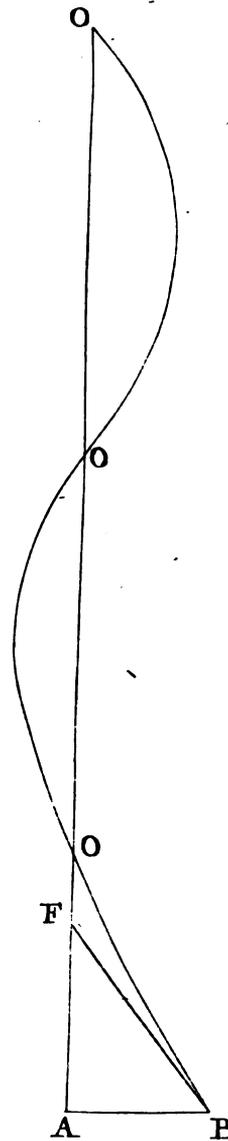
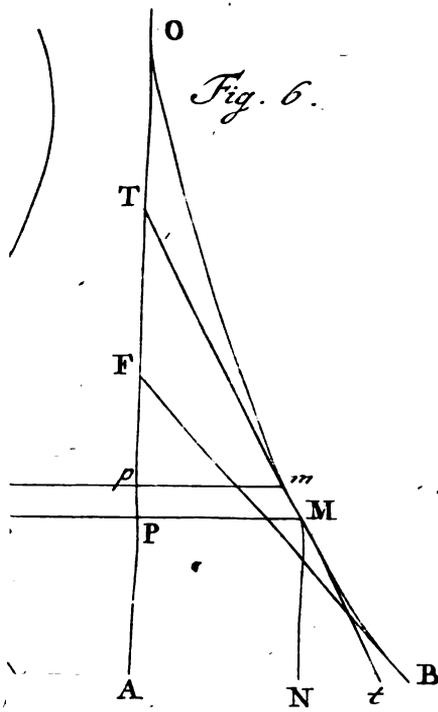


Fig. 5.



nire curvaturam catenae ita oscillantis, ut eius singulae partes simul ad lineam verticalem perveniant, atque longitudinem penduli simplicis eodem tempore suas oscillationes absolventis.

§. 2. Ad hoc autem problema soluendum catena consideranda est tanquam filum perfecte flexile et grauitatis expers, infinitis pondusculis oneratum. Eodem enim modo catena considerari solet, quando catenae in utroque termino suspensae figura seu curua catenaria inquiritur. Quo igitur ad solutionem huius problematis via debito modo sternatur filum flexile et grauitatis expers est considerandum, quod primum vnico tum duobus, deinceps tribus, quatuor, etc. pondusculis sit oneratum, quo ex his conclusio ad casum infinitorum pondusculorum fieri queat. Hinc sequentes natae sunt quaestiones praeliminares: si filum perfecte flexile duobus, tribus, et deinde quotcunque pondusculis in datis distantis a se inuicem dispositis, fuerit oneratum, inuenire positionem pondusculorum extra statum naturalem ut singula sibi permiffa ad lineam verticalem seu in statum naturalem simul perveniant; atque hoc inuento determinare longitudinem penduli simplicis isochromi. In his vero semper oscillationes infinitae parvae tantum considerantur, quippe quae omnes, ut patebit, inter se sunt isochronae; quamobrem illa pondusculorum positio infinite parum a linea verticali discrepabit.

§. 3. Atque hae sunt quaestiones, quas *Cl. Bernoullius* ante abitum solutas dedit sine demonstrationibus,
 nunc

32 DE OSCILLATIONIBVS FILI FLEXILIS

nunc vero simul demonstratas huc misit. Cum vero iam illo tempore hae quaestiones Illum inter eiusque Patrem et me agitentur, ipse quoque earum solutiones dedi cum hisce *Bernoulli* solutionibus egregie conspirantes. At cum nunc perspiciam eius methodum a mea prorsus differentem, ad augmentum scientiae non parum vtile fore iudicavi, si et meam methodum hac dissertatione exposuero. Cum enim huius modi quaestiones sint nouae et ad mechanicae partem adhuc nouam, et a nemine pertractatam pertineant, nihil magis ad excolendam hanc mechanicae partem est exoptandum, quam plures methodi, quibus idem problema solui queat.

Figura 1. §. 4. Quo igitur a simplicissimis exordiar, sit filum grauitatis expers OA vnico pondusculo A oneratum, quod cum linea verticali Oa angulum infinite paruum AOa constituat. Hoc igitur pendulum sibi permixtum oscillationes faciet eundo in situm Oa , tantumque vltra illum transiendo. Hoc nobis erit pendulum simplex, cum quo sequentia pendula composita comparabimus; Dum vero hoc pendulum ad Oa mouetur corpori A describenda est via Aa , reipsa quidem arcus circularis centro O descriptus, sed qui cum horizontali Aa propter angulum AOa infinite paruum congruet. Inuestigandum ergo est, quanta vi acceleratrice corpus A per Aa propellatur. Corpus vero A vi grauitatis, quae aequalis est ponderi corporis A , deorsum secundum directionem AM trahitur; haec ergo vis si resoluitur in duas laterales Am , et Mm , altera in directione

tione Am tota ad tendendum filum infumetur, altera vero in directione Mm corpus per Aa vrgebit. At ob triangula $O A a$, $A M m$ similia erit vis filum AO tendens $= \frac{A \cdot Oa}{AO} = A$, et vis corpus per Aa trahens $= \frac{A \cdot Aa}{AO}$; vis vero accelerans habebitur, diuisa vi absoluta $\frac{A \cdot Aa}{AO}$ per massam A mouendam, vnde vis accelerans est $\frac{Aa}{AO}$. Perspicitur ex hoc si spatium percurrendum Aa diuidatur per vim accelerantem, proditura esse longitudinem penduli AO , isochroni cum motu per Aa . Quare si in sequentibus casibus determinauerimus vim acceleratricem, qua quodque corpus ad verticalem sollicitatur, habebimus simul longitudinem penduli simplicis isochroni. Atque cum in casu plurium corporum, singula simul peruenire debeant ad verticalem, cuiusque vis acceleratrix proportionalis esse debet distantiae a linea verticali Oa , ex quo positio corporum determinabitur.

§. 5. Sint filo OAB in O fixo duo annexa *Figura 2.* ponduscula A et B , et situs fili infinite parum a verticali Ob differens. Demittantur ex A et B in verticalem Ob perpendicula Aa , Bb , quae vt viae considerari poterunt a corpusculis absoluendae. Fili pars BA producatnr vsque ad lineam verticalem in P , et OA in p vsque. Ex praecedentibus iam liquet vim grauitatis corporis B duplicem exerere effectum, alterum quo corpus B per Bb vrgetur, quae vis erit $= \frac{B \cdot Bb}{BP}$, alterum vero, quo tenditur filum BA , quae vis est $= B$, ob ang. BPb infinite paruum. Hac vero vi

Tom. VIII. E cor-

34 DE OSCILLATIONIBVS FILI FLEXILIS

corpus A afficietur secundum directionem AB, ad cuius effectum inueniendum resoluatur ac in duas, alteram in directione Ap = $\frac{B \cdot Ap}{AB} = B$, quae filum OA tendit: alteram in directione horizontali, quae erit = $\frac{B \cdot Bp}{AB}$, atque pro negatiua est habenda, quia motum per Aa retardat. Atque in hoc consistit effectus ponderis B. Ponderus A vero ut ante urgebit per Aa vi = $\frac{A \cdot Aa}{AO}$, et filum OA tendet vi = A. Sollicitabitur ergo corpus A vi acceleratrice $\frac{Aa}{AO} - \frac{B \cdot Bp}{A \cdot AB}$, et corpus B vi acceleratrice $\frac{Bb}{BP}$. Quo igitur corpora A et B simul ad lineam verticalem perueniant, hae vires acceleratrices proportionales esse debent viis describendis scilicet $\frac{Aa}{AO} - \frac{B \cdot Bp}{A \cdot AB} : Aa = \frac{Bb}{BP} : Bb$. Et longitudo penduli isochroni erit $BP = \frac{A \cdot AO \cdot AB \cdot Aa}{A \cdot AB \cdot Aa - B \cdot AO \cdot Bp}$.

§. 6. Est vero BP = bP propter ang. bPB infinite paruum, atque ob Bb - Aa : ab = Bb : bP erit BP = $\frac{Bb \cdot ab}{Bb - Aa}$. Atque cum sit bp = $\frac{Aa \cdot Ob}{Oa}$, erit Bp = Bb - $\frac{Aa \cdot Ob}{Oa}$. Deinde propter OA = Oa et AB = ab habebitur haec analogia A. Aa. Ob - B. Bb. Oa + B. Aa. Ob : A. Aa. Oa = Bb - Aa : Bb. Sit longitudo penduli isochroni = f, habebuntur hae duae aequationes $\frac{Bb \cdot ab}{f} = Bb - Aa$ atque $\frac{A \cdot Aa \cdot Oa \cdot ab}{f} = A \cdot Aa \cdot ab - B \cdot Bb \cdot Oa + B \cdot Aa \cdot Ob$. Vel eliminata f prodibit ista aequatio A. Aa. Bb. Oa - A. Aa². Oa = A. Aa. Bb. ab - B. Bb². Oa + B. Aa. Bb. Ob. Quae aequatio cum duas habeat radices, duplicem dabit situm pondusculorum A et B,

et B, in quorum vtroque simul ad verticalem pertinent. Motus vero erit huiusmodi, vt inter mouendum OA et AB maneant eiusdem longitudinis et punctum P in eodem loco restet.

§. 7. Si fili partes OA et AB fuerint inter se aequales, erit $Oa = ab$ et $Ob = 2Oa$, vnde sequentes duae oriuntur aequationes $\frac{Bb \cdot Oa}{f} = Bb - Aa$ et $\frac{Aa \cdot Oa}{f} = Aa - \frac{B \cdot Bb}{A} + \frac{B \cdot Aa}{A}$; vel haec vnica $A \cdot Aa^2 = B \cdot Bb^2 - 2B \cdot Aa \cdot Bb$, vnde oritur $\frac{Bb}{Aa} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{A}{B}}$, pro duplici pondusculorum situ.

§. 8. Si praeterea ponduscula A et B fuerint inter se aequalia, erit $\frac{Bb \cdot Oa}{f} = Bb - Aa$ et $\frac{Aa \cdot Oa}{f} = 3Aa - Bb$. atque $\frac{Bb}{Aa} = 1 \pm \sqrt{2}$. Altero ergo situ Aa et Bb in eandem partem verticalis Ob cadunt, altero in diuersas.

§. 9. Sint nunc filo in O fixo tria ponduscula, **Figura 3.** A, B et C annexa infinite parum a verticali Oc diffita. Ducantur horizontales Aa, Bb, Cc, seu viae a corporibus simul describendae; et producantur BA in P; CB in Q; item OA in p et AB in q. His positis pondus C efficiet, vt partim corpus C secundum Cc vrgeatur vi $= \frac{C \cdot Cc}{CQ} = \frac{C \cdot Cc}{CQ}$, partim vero filum BC tendatur vi $= \frac{C \cdot CQ}{BC} = C$. Hac autem vi corpus B sollicitabitur in directione BC. Resoluatur haec vis in duas, quarum altera est horizontalis et corpus B a verticali Oc retrahat $= \frac{C \cdot Cq}{BC} = \frac{C \cdot Cq}{bc}$; altero vero tendat filum BA quae est $= \frac{C \cdot Bq}{BC} = C$. Nunc sumatur pondus B, quo partim
E 2 vrge-

36 DE OSCILLATIONIBVS FILI FLEXILIS.

vrgebitur B versus Bb vi = $\frac{B \cdot Bb}{BQ} = \frac{B \cdot Bb}{bQ}$ partim vero tenditur filum BA vi = B. Tota ergo vis qua filum BA tenditur est B+C, hac vi corpus A sollicitabitur horizontaliter ab verticali Oc vi = $\frac{(B+C)Bp}{BA} = \frac{(B+C)Bp}{ab}$, atque filum AO tendetur vi = B+C. Ponderis demique A efficit ut corpus A secundum Aa sollicitetur vi = $\frac{A \cdot Aa}{AO} = \frac{A \cdot Aa}{aO}$, simulque tendatur filum AO vi = A; ita ut tota vis, quae filum AO tenditur, sit = A+B+C.

§. 10. His igitur colligendis corpus C per Cc vrgebitur vi = $\frac{C \cdot Cc}{cQ}$; at corpus B per Bb vrgebitur vi = $\frac{B \cdot Bb}{bP} - \frac{C \cdot Cc}{bc}$, atque corpus A per Aa trahetur vi = $\frac{A \cdot Aa}{aO} - \frac{(B+C)Bp}{ab}$. Cum igitur singula corpora simul ad lineam verticalem peruenire debeant, si ponatur longitudo penduli isochroni = f, erit $\frac{C \cdot Cc}{f} = \frac{C \cdot Cc}{cQ}$ seu $f = cQ$, atque $\frac{B \cdot Bb}{f} = \frac{B \cdot Bb}{bP} - \frac{C \cdot Cc}{bc}$; ac $\frac{A \cdot Aa}{f} = \frac{A \cdot Aa}{aO} - \frac{(B+C)Bp}{ab}$. Ex quibus tribus aequationibus dato situ corpusculi A, determinabitur situs pondusculorum B et C, quo omnia tria corpora simul ad verticalem perueniant. Prodit autem triplex situs propter aequationem cubicam resoluendam. Motus vero ad verticalem ita fiet, ut fila OA, AB et BC eandem seruent longitudinem et puncta P et Q invariata maneant.

§. 11. Si et corpora A, B et C fuerint inter se aequalia et distantiae aequales, erit ob $cQ = \frac{C \cdot Cc}{Cc - Bb}$, $bP = \frac{Bb \cdot ob}{Bb - Aa}$ et $Cq = Cc - \frac{1}{2} Bb - Aa$ et $Bp = Bb - \frac{1}{2} Aa$;

$2 A a$; $\frac{O a}{f} = \frac{C c - B b}{C c}$ et $\frac{O a}{f} = -\frac{C c + 3 B b - 3 A a}{B c}$ atque $\frac{O a}{f} = \frac{3 A a - 3 B b}{A a}$. Hinc elicitur $C c = \frac{A a \cdot B b}{2 B b - 4 A a}$ et $B b$ inveni-
tur ex hac aequatione:

$$4 B b^2 = 12 A a \cdot B b^2 - 3 A a^2 \cdot B b - 8 A a^3.$$

Hinc fit quam proxime:

$$B b = 2,295 A a \text{ vel}$$

$$B b = 1,348 A a \text{ vel}$$

$$B b = -0,643 A a.$$

§. 12. Sit nunc filum quotcunque pondusculis oneratum in punctis A, B, C, D etc. quorum ultimum fit F; ducantur per haec singula puncta horizontales Aa, Bb, Cc, etc. et singulae fili partes vtrique producantur ut ante factum est. Consideretur corpus quodcunque C, quod duplici vi sollicitatur, vi propriae grauitatis scilicet, et vi tendente fili portionem CD, tenditur vero hoc filum a vi, quae aequalis est summae omnium sequentium pondusculorum D + E + F, ut in praecedentibus vidimus. Propria vero corporis C grauitas efficit, ut corpus per Cc vrgeatur vi $= \frac{c \cdot Cc}{c \cdot Q}$. At vis tendens filum CD, resoluta retrahet corpus C a verticali vi $= \frac{(D + E + F) D r}{c d}$. Quare tota vis, qua C secundum Cc vrgetur erit $= \frac{c \cdot Cc}{c \cdot Q} - \frac{(D + E + F) D r}{c d}$. Si ergo tempus per Cc aequale esse debeat tempori, quo pendulum simplex longitudinis f descensum absoluit, erit $\frac{c \cdot Cc}{f} = \frac{c \cdot Cc}{c \cdot Q} - \frac{(D + E + F) D r}{c d}$. Similis aequatio inuenitur pro singulis corpusculis, ita ut prodeant tot aequationes, quot sunt

38 DE OSCILLATIONIBVS FILI FLEXILIS

sunt corpuscula. Ex quibus aequationibus situs corpusculorum determinabitur, qui pro numero eorum variari poterit.

§. 13. Longitudo penduli isochroni f semper aequalis est vltimae fili parti $E F$ ad lineam verticalem $O f$ vsque productae, nempe rectae FT . Atque figura $OABC$ etc. in descensu ita immutabitur vt puncta P, Q, R, S, T maneant inuariata. Ex quo perspicitur distantias Aa, Bb , etc. in eadem ratione diminutum iri, id quod etiam ex hoc intelligitur, quod hae distantiae Aa, Bb, Cc etc. simul debeant confici; atque similiter, quia vires acceleratrices his distantis sunt proportionales. Praeterea ex his elucet, si figura fili fuerit huiusmodi, vt alicubi transeat per lineam verticalem vt in C , in oscillationibus huius fili punctum C perpetuo in eodem loco esse permanfurum. Pars igitur penduli $CDEF$ circa punctum fixum C oscillationes eodem tempore absoluet, quo totum pendulum $OABCDEF$, simili modo intelligitur etiam supra O filum cum corpusculis continuari posse manente tempore oscillationum. Ex parte ergo infima fili EF superiores partes omnes in infinitum vsque poterunt determinari, vt totum filum perpetuo in oscillando ad lineam verticalem peueniat.

Figura 5.

§. 14. Sint nunc tam omnia corpuscula quam eorum inter se interualla aequalia, erunt EF, DE, CD etc. nec non ef, de, cd etc. inter se aequalia. Ponatur longitudo penduli simplicis isochroni FT seu $fT = f$, et $Ff = a$, et distantia duorum corpusculorum proximorum

moram = b ; ex his determinari poterit situs cuiusque corporis. Nam vis sollicitans corpus E per Ee aequalis est $\frac{E.Ee}{eS} - \frac{F.Ft}{ef}$, quae aequalis esse debet $\frac{E.Ee}{f}$, unde ob aequalia corpora erit $\frac{Ee}{f} = \frac{Ee}{eS} - \frac{Ft}{ef}$. Est vero $Ff - Ee:ef = a:f$ unde $Ee = \frac{a(f-b)}{f}$. Porro est $Ee - Dd: b = Ee:eS$. et $Ft = Ff - 2Ee + Dd$. Unde inuenitur $Dd = \frac{a(2ff - 4bf + b^2)}{2ff}$. Quia porro est $\frac{Dd}{f} = \frac{Dd}{dR} - \frac{2Es}{ed}$ et $\frac{Dd - Cc}{b} = \frac{Dd}{dR}$ et $Es = Ee - 2Dd + Cc$ prodibit $Cc = \frac{a(6f^2 - 10bf^2 + 9bbf - b^3)}{6f^2}$. Simili modo ob $\frac{Cc}{f} = \frac{Cc}{cQ} - \frac{sDr}{b}$ et $\frac{Cc}{cQ} = \frac{Cc - Bb}{b}$ et $Dr = Dd - 2Cc + Bb$ obtinebitur $Bb = \frac{a(24f^4 - 96bf^2 + 72b^2ff - 16b^2f + b^4)}{24f^4}$. Quae est distantia quinti corpusculi a linea verticali. Hinc concluditur distantia corpusculi $(n+1)$ indicis a linea verticali = $a(1 - \frac{nb}{1f} + \frac{n(n-1)b^2}{2 \cdot 4 \cdot f^2} - \frac{n(n-1)(n-2)b^3}{6 \cdot 4 \cdot f^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)b^4}{24 \cdot 4 \cdot f^4} - \text{etc.})$

§. 15. Si interualla OA, AB, BC etc. fuerint infinite parua, vt tanquam elementa curuae OABCD etc. considerari queant, innotescet hinc natura huius lineae curuae, quae oscillans tota eodem momento ad lineam verticalem pertingit. Nam cum in quouis loco sit $\frac{C.Ce}{f} = \frac{C.Cc}{cQ} - \frac{(D+E+F)Dr}{ed}$, si fc sumatur pro abscissa et Cc pro applicata, erit CQ subtangens curuae in C, $(D+E+F)$ erit pondus omnium pondusculorum, quibus pars fili infra C est onerata, ed est elementum abscissae et Dr per differentiale secundi gradus applicatae dabitur. Symbola ergo loco horum substituta expriment naturam curuae

40 DE OSCILLATIONIBVS FILI FLEXILIS

curuae quaesitae. Atque haec curua erit ipsa figura catenae oscillantis, quae in lineam rectam mutatur, quoties ad lineam verticalem peruenit. At siue catena vbique sit eiusdem crassitiei, siue secus, elementa curuae OA, AB, BC etc. nihilominus aequalia accipi possunt, dummodo ponduscula pro natura catenae recte assumantur. Sumtis autem elementis curuae aequalibus, elementa abscissae quoque erunt aequalia, atque Dr erit differentiale secundi gradus applicatae.

Figura 6.

§. 16. Sit igitur OMB catena seu funis vtunque crassus ex O suspensus, atque talem figuram habens OMB , vt figuram rectilineam OA induat, cum in situm verticalem peruenierit. Exprimat curua DQ crassitiam funis in singulis punctis, ita vt pondus portionis BM exponatur area $APQD$, et pondus elementi Mm areola $Ppqq$. Nunc ad naturam curuae OMB inueniendam ponatur $Op = t$, $pM = y$; et $AP = x$ atque $PQ = p$, erit $t + x$ quantitas constans, et $dt = -dx$. Pondus igitur funis BM erit $= \int p dx$, quod respondet in superiori aequatione ipsi $(D + E + F)$, atque quod ibi erat C hic nobis erit $p dx$, vel $p dt$ si ab O computamus; Cc vero erit y , et cQ subtangens $PT = \frac{y dt}{dy} = \frac{-y dx}{dy}$, atque $cd = dt$. Posito autem elemento dt constante huius respectu, quia y crescit, erit Dr in superiore casu $= ddy$. His ergo in aequatione superiore $\frac{C.Cc}{f} = \frac{C.Cc}{cQ} - \frac{(D+E+F)Dr}{cd}$ substitutis prodibit ista aequatio $\frac{y p dt}{f} = \frac{p dt dy}{dt} - \frac{dx \int p dx}{dt}$, quae loco dt posito $-dx$ abit in hanc $\frac{y p dx^2}{f} = - ddy$ $\int p dx - p dx dy$, vbi f denotat subtangentem AF in infimo

QUOTCVNQVE PONDVSCVLIS ONVSTI. 42

fimo catenae puncto B. Quare si fit $x=0$ debet esse $\frac{y dx}{dy} = f$, id quod aequatio iam indicat, facto enim $\int p dx = 0$ fit $\frac{y dx}{f} = -dy$.

§. 17. Ad hanc aequationem ad differentialem primi gradus reducendam pono $y = e^{\int z dx}$, erit $dy = e^{\int z dx} z dx$ et $ddy = e^{\int z dx} (dz dx + z^2 dx^2)$ existente e numero, cuius log. est $= 1$. His substitutis prodit $\frac{p dx}{f} = -dz \int p dx - z^2 dx \int p dx - p z dx$, quae posito $z = \frac{u}{\int p dx}$ transit in hanc $\frac{p dx}{f} = -du - \frac{u^2 dx}{\int p dx}$, quae si construi poterit, simul habebitur curua quaesita. At per series commodius definietur ex data abscissa x applicata y . Hac quidem aequatione magnitudo ipsius applicatae y non determinatur, sed applicatarum inter se relationes. Quare si curua fuerit constructa pro finito ipsius y valore, postea applicatae n eadem ratione in infinitum diminuantur, quo prodeat curua quaesita.

§. 18. Si catena vbique fuerit eiusdem crassitie ita vt p sit quantitas constans; habebitur pro curuatura huius catenae quaesita haec aequatio $\frac{y dx^2}{f} = -x ddy - dx dy$, seu $\int y dx = -\frac{f x dy}{dx}$. Vnde sequens elegans huius curuae proprietas consequitur: aream APMB aequari facto ex constante AF et portione Nt, quam tangens TM ad AB producta et verticalis MN abscindunt, seu Nt semper proportionas est areae APMB. Facta vero in hac aequatione substitutione $y = e^{\int z dx}$ prodibit $\frac{dx}{f} = -x dz - z^2 x dx - z dx$; atque facto $zx = u$ erit $\frac{dx}{f} = -du - \frac{u^2 dx}{x}$. Quae aequatio, cum integrationem non

Tom. VIII. F admit-

42 DE OSCILLATIONIBVS FILI FLEXILIS

admittat, ad series est confugiendum. Dat autem aequatio $y dx^2 + f x ddy + f dx dy = 0$ sequentem seriem, posito a pro prima applicata AB; $y = a(1 - \frac{x}{1 \cdot f} + \frac{x^2}{1 \cdot 4 \cdot f^2} - \frac{x^3}{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot f^3} + \frac{x^4}{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot f^4} - \text{etc.})$ eritque $dy = -\frac{a dx}{f} (1 - \frac{x}{1 \cdot 2 \cdot f} + \frac{x^2}{1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot f^2} - \frac{x^3}{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 4 \cdot f^3} + \text{etc.})$. Ex quibus aequationibus omnia, quae de curua quaesita requiri possunt, inuenire licet.

§. 19. Ex aequatione pro curua inuenta apparet facta x negatiua curuam infra B in infinitum quoque progredi, quae autem pars ad catenam repraesentandam est inepta. Radius osculi vero curuae in M est $\frac{dx^2}{-ddy}$ ob elementum curuae aequale elemento abscissae, est ve-

$$\text{ro. } \frac{dx^2}{ddy} = \frac{ff}{a(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot f} + \frac{x^2}{1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot f^2} - \frac{x^3}{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 5 \cdot f^3} + \frac{x^4}{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 5 \cdot 6 \cdot f^4} - \text{etc.})}$$

Quare vbi haec series in denominatore fit $= 0$, fit $ddy = 0$, ibique curua habebit punctum flexus contrarii.

§. 20. Tota autem curuae pars supra B, quae in infinitum ascendit, ad catenam repraesentandam erit accommodata; quare inuestigari conuenit figuram portio- nis curuae supra B. Et quidem si $x = f$ seu AP = AF fiet $y = 0$, 223892a, si $x = 2f$ sit $y = -0$, 19654a curua ergo in hac altitudine in alteram partem rectae OA vergit. Loca in quibus curua per verticalem OA transit inueniri debent ex hac aequatione $1 = \frac{x}{1 \cdot f} - \frac{x^2}{1 \cdot 4 \cdot f^2} + \frac{x^3}{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot f^3} - \frac{x^4}{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot f^4} + \text{etc.}$ quae dabit infinitos valores loco x , seu pro distantiiis intersectionum curuae et verticalis ab imo puncto A. Primae autem interfectio- nis

axis O inuenitur distantia $OA = 1,44f$, ita vt FO ipsius FA sit fere dimidium. Reliqua puncta intersectionum magis distant. Simili modo curua in infinitis punctis habebit tangentem verticalem, atque etiam infinita puncta flexus contrarii; Figuram curuae exhibui in fig. 7. in qua tria intersectionum puncta O, O, O Figura 7. repraesentantur.

§. 21. Consideremus etiam catenas non aequaliter crassas, quarum tamen figura facilius possit determinari.

Ad hoc igitur ponamus $p = x^n$ et $\int p dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$,

ex quibus conficitur haec aequatio; $\frac{y dx^2}{f} + \frac{x ddy}{n+1} + dx dy = 0$, quae reductione in §. 17 adhibita transit in hanc

$\frac{x^n dx}{f} = -du - (n+1)u^2 x^{-n-1} dx$. Haec vero aequatio,

quia conuenit cum ea, quam *Com. Riccati* proposuit, separationem admittit quoties $2n$ est numerus integer impar, siue affirmatiuus siue negatiuus. Sit $2n = -1$,

seu $p = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ita vt crassities catenae sit reciproce vt radix quadrata ex longitudine catenae a puncto infimo B sumpta;

aequatio differentio-differentialis adeo integrationem admittet, erit nimirum $\frac{y^2 dx^2}{2f} + 2x ddy + dx dy = 0$,

quae in dy ducta et integrata dat $\frac{y^2 dx^2}{2f} + x dy^2 = \frac{a^2 dx^2}{2f}$ posita $AB = a$, seu $\frac{dx}{\sqrt{2fx}} = \frac{-dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$,

cuius integralis est $\sqrt{\frac{2x}{f}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} =$ arcui circuli, cuius sinus est $\frac{y}{a}$, existente radio $= a$.

42 DE OSCILLATIONIBVS FILI FLEXILIS

admittat, ad series est confugiendum. Dat autem aequatio $y dx^2 + f x ddy + f dx dy = 0$ sequentem seriem, posito a pro prima applicata AB; $y = a(1 - \frac{x}{1.f} + \frac{x^2}{1.4.f^2} - \frac{x^3}{1.4.9.f^3} + \frac{x^4}{1.4.9.16.f^4} - \text{etc.})$ eritque $dy = -\frac{a dx}{f} (1 - \frac{x}{1.2.f} + \frac{x^2}{1.4.3.f^2} - \frac{x^3}{1.4.9.4.f^3} + \text{etc.})$. Ex quibus aequationibus omnia, quae de curua quaesita requiri possunt, inuenire licet.

§. 19. Ex aequatione pro curua inuenta apparet facta x negatiua curuam infra B in infinitum quoque progredi, quae autem pars ad catenam repraesentandam est inepta. Radius osculi vero curuae in M est $\frac{dx^2}{ddy}$ ob elementum curuae aequale elemento abscissae, est ve-

$$\text{ro } \frac{dx^2}{ddy} = \frac{ff}{a(\frac{1}{1.2} - \frac{x}{1.2.3.f} + \frac{x^2}{1.4.3.4.f^2} - \frac{x^3}{1.4.9.4.5.f^3} + \frac{x^4}{1.4.9.16.5.6.f^4} - \text{etc.})}$$

Quare vbi haec series in denominatore fit $= 0$, fit $ddy = 0$, ibique curua habebit punctum flexus contrarii.

§. 20. Tota autem curuae pars supra B, quae in infinitum ascendit, ad catenam repraesentandam erit accommodata; quare inuestigari conuenit figuram portio- nis curuae supra B. Et quidem si $x = f$ seu AP = AF fiet $y = 0$, 223892a, si $x = 2f$ sit $y = -0$, 19654a curua ergo in hac altitudine in alteram partem rectae OA vergit. Loca in quibus curua per verticalem OA transit inueniri debent ex hac aequatione $1 = \frac{x}{1.f} - \frac{x^2}{1.4.f^2} + \frac{x^3}{1.4.9.f^3} - \frac{x^4}{1.4.9.16.f^4} + \text{etc.}$ quae dabit infinitos valores loco x , seu pro distantis intersectionum curuae et verticalis ab imo puncto A. Primae autem interseccio- nis

ais O inuenitur distantia $OA = 1,44f$, ita vt FO ipsius FA sit fere dimidium. Reliqua puncta intersectionum magis distant. Simili modo curua in infinitis punctis habebit tangentem verticalem, atque etiam infinita puncta flexus contrarii; Figuram curuae exhibui in fig. 7. in qua tria intersectionum puncta O, O, O Figura 7. repraesentantur.

§. 21. Consideremus etiam catenas non aequaliter crassas, quarum tamen figura facilius possit determinari.

Ad hoc igitur ponamus $p = x^n$ et $\int p dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, ex quibus conficitur haec aequatio; $\frac{y dx^2}{f} + \frac{x ddy}{n+1} + dx dy = 0$, quae reductione in §. 17 adhibita transit in hanc $\frac{x^n dx}{f} = -du - (n+1)u^2 x^{-n-1} dx$. Haec vero aequatio,

quia conuenit cum ea, quam *Com. Riccati* proposuit, separationem admittit quoties $2n$ est numerus integer impar, siue affirmatiuus siue negatiuus. Sit $2n = -1$, seu $p = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ita vt crassities catenae sit reciproce vt radix quadrata ex longitudine catenae a puncto infimo B sumta; aequatio differentio-differentialis adeo integrationem admittet, erit nimirum $\frac{y^2 dx^2}{2f} + 2x ddy + dx dy = 0$, quae in dy ducta et integrata dat $\frac{y^2 dx^2}{2f} + x dy^2 = \frac{a^2 dx^2}{2f}$ posita $AB = a$, seu $\frac{dx}{\sqrt{2fx}} = \frac{-dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$, cuius integralis est $\sqrt{\frac{2x}{f}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} =$ arcui circuli, cuius sinus est $\frac{y}{a}$, existente radio $= a$.

44. DE OSCILLATIONIBVS FILI FLEXILIS

§. 22. In hac igitur curuatura puncta O, O, O, etc. in quibus curua verticalem AO secat, habentur ponendo $y=0$. Posita autem ratione diametri ad peripheriam $1:\pi$, erit $-\int \frac{dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$ posito $y=0$ terminus ex hac serie $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ etc. horum enim arcuum cosinus sunt $=0$. Quare erit AO terminus quilibet ex hac serie $\frac{f\pi^2}{32}, \frac{9f\pi^2}{32}, \frac{25f\pi^2}{32}, \frac{49f\pi^2}{32}$, etc. Inter quosuis binos nodos applicata maxima est $=a$, vbi etiam tangens est verticalis. Facto autem $y=+a$ erit $\int \frac{dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$ terminus ex hac serie $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}$, etc. Distantiae ergo horum punctorum ab infimo A constituent hanc feriem $\frac{f\pi^2}{8}, \frac{f\pi^2}{2}, \frac{9f\pi^2}{8}, 2f\pi^2, \frac{25f\pi^2}{8}$ etc. vbi terminis primo, tertio, quinto etc. respondet $=-a$, reliquis $y=a$. Puncta flexus contrarii huius curuae habebuntur faciendo $ddy=0$. Est vero $ddy = \frac{-ydx^2}{2fx} - \frac{dx dy}{2x} = \frac{-ydx^2}{2fx} + \frac{dx^2 \sqrt{(a^2-y^2)}}{2x \sqrt{2fx}}$. Quare puncta flexus contrarii ibi erunt, vbi est $\frac{y}{\sqrt{(a^2-y^2)}} = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{2x}}$, seu vbi est $\frac{\sqrt{(a^2-y^2)}}{y} = -\int \frac{dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$. Ad ea igitur inuenienda quaerantur arcus, qui aequales sint suis cotangentibus; sint hae cotangentes $=t$ erit $\sqrt{\frac{2x}{f}} = t$ seu $x = \frac{ft^2}{2}$. Hoc vero cum infinitis casibus accidere possit, prodibunt infinita puncta flexus contrarii.

§. 23. Quicumque autem fuerit numerus n aequatio differentio-differentialis $\frac{ydx^2}{f} + \frac{xddy}{n+1} + dx dy = 0$ in seriem conversa dabit $y = a \left(1 - \frac{x}{f} + \frac{(n+1)x^2}{1.2.(n+2)f^2} - \frac{(n+1)^2 x^3}{1.2.3.(n+2)(n+3)f^3} + \frac{(n+1)^3 x^4}{1.2.3.4.(n+2)(n+3)(n+4)f^4} - \text{etc.} \right)$. Ponatur $\frac{-(n+1)x}{f} = q$ erit $\frac{y}{a} = 1 + \frac{q}{1.(n+1)} + \frac{q^2}{1.2.(n+1)(n+2)} + \frac{q^3}{1.2.3.(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots$

$\frac{q^s}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n+1)(n+2)(n+3)} + \text{etc.}$ Ad huius seriei summam metho-
 do mea construendam pono eius summam esse $\int R z^m dz (1-z^b)^k$. H hoc integrali ita accepto vt euanescat
 posito $z=0$, et postmodum posito $z=1$. H vero est
 $= \int z^m dz (1-z^b)^k$ si post integrationem ponatur $z=1$:
 at $m+1$ et $k+1$ et b debent esse numeri affirma-
 tiui. Sit $R = 1 + Ag(1-z^b) + Bg^2(1-z^b)^2 + Cg^3$
 $(1-z)^3 + \text{etc.}$ quae series talis debet accipi vt sum-
 mationem admittat. His positis $\frac{\int R z^m dz (1-z^b)^k}{H}$, ita
 acceptum vt euanescat posito $z=0$, aequabitur huic se-
 riei $1 + \frac{A(k+1)}{(m+b(k+1)+1)} hg + \frac{B(k+1)(k+2)}{(m+b(k+1)+1)(m+b(k+2)+1)}$
 $h^2g^2 + \text{etc.}$ Cui ergo seriei illa inuenta pro $\frac{y}{x}$ est aequalis
 ponenda.

§. 24. Pono autem $A = \frac{r}{\pi(\pi+\rho)}$, $B = \frac{\kappa}{(\pi+\rho)(\pi+\rho)}$
 $C = \frac{B}{(\pi+\rho)(\pi+\rho)}$ etc. et scripto s^2 loco $g(1-z^b)$ erit
 $R = 1 + \frac{s}{\rho^2} e^{\frac{s}{\rho}} s^{\frac{\rho-\pi}{\rho}} \int e^{-\frac{2s}{\rho}} ds e^{\frac{s}{\rho}} s^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} ds$. Quae duplex in-
 tegratio ita est accipienda vt facto $s=0$, fiat $R=1$,
 et $dR=0$. Fiat nunc in hac serie $hg=q$, vt quisque
 terminus huius seriei in terminum respondentem illius
 transmutetur. Quo igitur termini indicis η fiant aequa-
 les, habebitur ista aequatio $\eta(\eta+n)(\eta+k) = (2\eta\rho$
 $+ \pi - 2\rho)(2\eta\rho + \pi - \rho)(\eta k + m + 1 + bk)$, ex qua
 erit $1 = 4hg^2$; $k+n = 4\rho^2(m+1+bk) + 2\rho b(2\pi$
 $- 3\rho)$; $nk = b(\pi - 2\rho)(\pi - \rho) + 2\rho(2\pi - 3\rho)(m+1$
 $+ bk)$, atque $0 = (\pi - 2\rho)(\pi - \rho)(m+1+bk)$.
 Vnde tres sequuntur solutiones. Prima est $\pi = 2\rho$; hinc
 F 3; erit

46 DE OSCILLATIONIBUS FILII FLEXILIS

erit $k+n=4g^2(m+1+bk)+2g^2b$; $kn=2g^2(m+1+bk)$ et $1=4g^2b$, ex quibus prodit $k=\frac{1}{2}$; $b=2$, $m=2n-2$, $g=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\pi=\frac{1}{\sqrt{2}}$, quae solutio semper locum habet, si modo $2n > 1$. Secunda solutio habetur ponendo $\pi=g$, tumque erit $g^2=\frac{1}{4b}$; $k+n=2g^2(2m+2+2bk-b)$ et $nk=-2g^2(m+1+bk)$, unde sequitur $k=-\frac{1}{2}$; $b=2$; $m=2n$; $g=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\pi=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ haec solutio valet si modo $2n+1$ est numerus affirmatiuus. Tertia solutio dat $m+1+bk=0$, quae quia $m+1$, b et $k+1$ debent esse numeri affirmatiui, k erit inter 0 et -1 interceptum, fit $k=-x$, erit $m+1=bx$; $g^2=\frac{1}{4b}$; $n-x=2gb(2\pi-3g)$ et $-nx=b(\pi-2g)(\pi-g)$, atque ex his duae nascuntur solutiones, quarum altera est $g=1$; $\pi=2n+1$; $k=+n-\frac{1}{2}$; $b=\frac{1}{4}$; et $m+1=\frac{1}{2}-\frac{n}{4}=\frac{1-2n}{4}$. Altera solutio est $g=1$; $\pi=2n+2$, $k=n+\frac{1}{2}$; $b=\frac{1}{4}$ et $m+1=-\frac{1-2n}{4}$; debet ergo n esse numerus negatiuus atque $-n < \frac{3}{2}$, et $-n > \frac{1}{2}$.

§. 25. Locum habet secunda solutio vt maxime generalis, erit $s=V\frac{q}{2}(1-z^2)$ et $R=1+8e^{2s\sqrt{2}}\int e^{-4s\sqrt{2}}e^{2s\sqrt{2}}+e^{-2s\sqrt{2}}e^{2\sqrt{q}(1-zz)}+e^{-2\sqrt{q}(1-zz)}$
 $ds\int e^{2s\sqrt{2}}ds=\frac{e^{2s\sqrt{2}}+e^{-2s\sqrt{2}}}{2}=\frac{e^{2\sqrt{q}(1-zz)}+e^{-2\sqrt{q}(1-zz)}}{2}$.

Deinde inuenitur H si in $\int z^{2n}dz(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ita integrato, vt euanescat posito $z=0$, ponatur $z=1$. Hoc inuento erit $\int \frac{z^{2n}dz(e^{2\sqrt{q}(1-zz)}+e^{-2\sqrt{q}(1-zz)})}{2HV(1-zz)}$, si post integrationem ponatur $z=1$, aequale ipsi $\frac{y}{a}$. Exhibet enim z ex calculo et remanebit tantum q , cuius loco si

si substituatur $\frac{-(n+1)x}{f}$ habebitur aequatio pro curua
 quaesita in qua indeterminatae x et y sunt a se inuicem
 separatae. Ponatur $\sqrt{(1-zz)}=t$, erit $z=\sqrt{(1-tt)}$
 et $dz = \frac{-tdt}{\sqrt{(1-tt)}}$, quibus substitutis erit $\frac{y}{a} = +$
 $\int \frac{(1-tt)^{\frac{2n-1}{2}} dt}{2H} (e^{2t\sqrt{a}} + e^{-2t\sqrt{a}})$ si ita integretur, vt
 euanescat posito $t=0$, et postmodum ponatur $t=1$.
 Quoties igitur $\frac{2n-1}{2}$ est numerus integer affirmatiuus seu
 $2n$ numerus integer affirmatiuus impar, hoc integrale
 re ipsa potest exhiberi. Hinc igitur quoque fuit con-
 structio aequationis Riccatianae cum ea, quam ante
 aliquot annos dedi, congruens.

ME.

METHODVS COMPVTANDI AEQVATIONEM MERIDIEM

AVCTORE

Leonb. Eulero.

§. 1.

Tabula IV.

AD verum meridiei tempus inueniendum inter alia Astronomi vti solent binis obseruationibus aequalium solis altitudinum, quarum altera ante altera post meridiem sunt factae. Ex huiusmodi obseruationibus facile quidem videtur verum meridiei tempus cognosci sumendo tempus medium inter tempora, quibus illae obseruationes sint factae; quemadmodum hoc modo tempus culminationis stellae fixae ex binis obseruationibus aequalium altitudinum recte concluditur. Sed id, quod in stella fixa hanc conclusionem legitimam reddit, in sole locum non habet, quippe qui perpetuo declinationem mutat. Si enim sol, vti stella fixa, semper in eodem circulo parallelo versaretur, tempus medium inter duas illas obseruationes verum esset tempus meridiei, neque vlla correctione opus haberemus.

§. 2. Cum autem sol continuo ex alio parallelo in alium progrediatur, facile perspicitur tempus medium inter duo tempora, quibus aequales solis altitudines sunt obser-

Fig. 2.

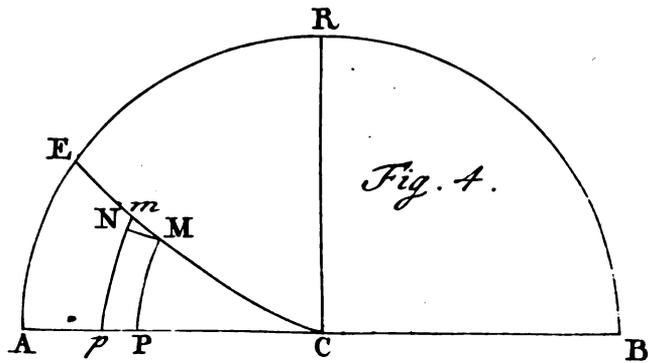
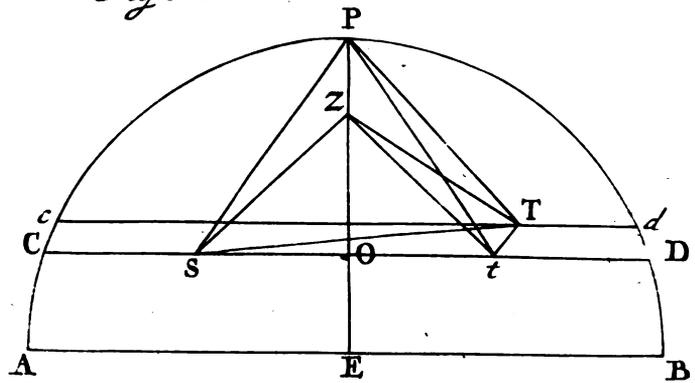
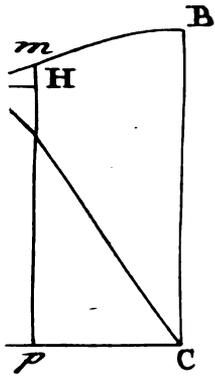


Fig. 4.

observatae, a vero meridiei tempore discrepare debere. Si enim exempli gratia sole ab ariete ad cancrum ascendente hora nona antemeridiana altitudo solis fuerit 30° ; hora tertia pomeridiana, inter quae tempora meridies in medio interiacet, altitudo solis maior erit, quam 30° ; quia interea sol propius ad polum et idcirco in nostris regionibus propius quoque ad Zenith accessit. Quamobrem demum post horam tertiam sol ad altitudinem 30° perueniet; ex quo perspicitur, errorem commissum iri, si tempus medium inter tempora, quibus solis altitudo 30° est observata, pro vero meridie haberetur. Tempus enim medium hoc casu post meridiem incidet; et hanc ob rem, quo verum meridiei tempus obtineatur, oportet a tempore medio aliquid subtrahere; quod est id ipsum, quod hac dissertazione determinare constitui.

§. 3. Simili modo intelligitur, si sol a Borea ad Austrum descendat, contrarium accidere, et ad tempus aliquid addi debere. Atque haec temporis particula, quae ad tempus medium inter observationum tempora vel adici vel ob ipso demi debet, vocatur aequatio meridiei. Tabula vero aequationis meridiei continet has aequationes pro singulis declinationis solis gradibus, et pro variis intervallis temporis inter observationes ambas intercepti ad datam poli elevationem computatas. Huiusmodi igitur tabula astronomo valde est necessaria, quo ex ea verum meridiei tempus hac methodo, quae est facilis et a refractionibus non turbatur, cognoscere, atque horologia corrigere queat.

§. 4. Pendet autem haec meridiei aequatio primo ab eleuatione poli eius loci, in quo est obseruator; tum etiam a differentia temporum, quibus obseruationes sunt factae; et denique a motu solis, quo variatio declinationis definitur. Pro variis igitur poli eleuationibus peculiare requiruntur tabulae aequationis meridiei; neque tabula pro hoc loco computata in aliis locis vsum habere potest, nisi quae sub eodem parallelo sunt sita. Praeterea eadem tabula ad datam poli eleuationem computata non perpetuo valere potest; quia motus solis versus ratione declinationis quotannis paululum variatur. Tam parum autem haec mutatio efficere valet, vt incrementum vel decrementum aequationis hinc ortum vix vnquam ad vnum minutum secundum saltem in locis, quae ab aequatore non ultra 60° distant, ascendere queat. Varietas autem eleuationis poli magnum discrimen aequationi meridiei inducit; cum aequationes ad hunc locum accommodatae, sint fere duplo maiores iis, quae pro Parisiis valent. Adhuc maiores fiunt in locis polis propioribus, et sub ipsis polis fiunt infinite magnae; eo quod ibi merides non datur. Quo igitur propior polo alterutri est locus obseruatoris, eo magis haec correctio est necessaria; et pro Petropoli quidem sine hac correctione error in determinatione meridiei ad 50 minuta secunda ascendere posset.

§. 5. Huius correctionis mentio est facta in Edit. II. Tabularum Astronomicarum *Philippi de la Hire*, in quibus etiam methodus est tradita hanc meridiei aequationem inueniendi. Inserta est etiam eidem libro tabula
 aequa-

aequationis meridiei pro latitudine Lutetiae Parisiorum, quae vsque ad minuta tertia est computata: id quod necessarium est, nisi in minutis secundis errare velimus; etiamsi minuta tertia dignoscere non valeamus. Tabula ista pro singulis gradibus declinationis solis est computata: sed tantum ab interuallo inter obseruationes quatuor horarum vsque ad decem extenditur. Praeterea illa tabula hoc vitio laborat, quod eadem aequationes pro signis ascendentibus et descendentibus valeant; cum tamen motus solis per signa ascendentia et descendentia non sit idem; id quod quidem in minutis tertiis tantum discrimen parit; sed ex eo differentia in minutis secundis oriri potest. Nam horum numerorum $20''$, $35'''$ et $20''$, $25'''$ differentia tantum est $10'''$; interim tamen pro priore astronomi accipere solent $21''$, pro posteriore autem tantum $20''$, quod est discrimen vnius integri minuti secundi.

§. 6. Methodus autem Lahiriana computandi aequationem meridiei valde est prolixa et multum temporis requirit ad aequationem pro vnico casu inueniendam; ad completam autem tabulam aequationis meridiei conficiendam expeditissimus calculator pluribus mensibus opus haberet. Praeterea cum hae aequationes in minutis tertiis desiderentur, tabulae nostrae sinuum et tangentium non sufficiunt; sed perpetuo opus est interpolatione, quod incredibilem laborem parit. Cogitavi ergo, cum nuper huiusmodi tabula pro nostro obseruatorio desideraretur, de alia methodo aequationem meridiei inueniendi, quae breuis esset, et ad quam tabulae sinuum

G 2

et

et tangentium sufficerent. Perpexi autem statim, ad hoc obtinendum methodum ita comparatam esse oportere, vt aequatio non ex differentia angulorum, quorum sinus vel tangentes calculum ingrediuntur, sit determinanda, sed ex certo quodam angulo vel arcu; cuius sinus non in considerationem veniat. Angulorum seu arcuum enim, quorum differentia minuta temporis tertia producat, sinus in tabulis consuetis non reperiuntur, sed interpolatione inueniri deberent, id quod euitare statui.

§. 7. Ad huiusmodi methodum inueniendam coniunxi cum trigonometria sphaerica calculum infinitesimalem, cuius beneficio statim desideratae indolis methodum sum adeptus. Hoc autem modo calculum infinitesimalem ad vtilitatem meam conuerti: declinationis solis variationem diurnam tanquam infinite paruam quantitatem sum contemplantus; cum, quando maxima est 24" non excedat; et quemadmodum arcus 24" minutorum pro lineola recta haberi potest, ita eodem iure pro elemento infinite paruo haberi potest, respectu scilicet arcuum finitae magnitudinis seu potius totius peripheriae. Hoc pacto, dum calculum iuxta praecepta calculi infinitesimalis sum persecutus, obtinui, vt plures termini, qui tanquam differentia secundi gradus considerari potuerunt, ex calculo excesserint, et tandem breuis et facilis formula aequationem meridiei exhibens prodierit. Ex hac igitur formula non solum facile erat tabulam pro hoc loco computare; sed etiam quoties
vbique

ubique locorum duae obseruationes aequalium solis altitudinum capiuntur, facili labore sine tabula correctio meridiei computari potest.

§. 8. Ad operationes iam meas exponendas necesse mihi est sequentia praemittere. Si anguli vel arcus cuiuspiam AM sinus PM fuerit $= A$, et cosinus $CP = a = \sqrt{1 - A^2}$, posita pro sinu toto AC unitate; arcus vero AM augeatur elemento quam minimo Mm : erit arcus aucti sinus $= A + a \cdot Mm$, et cosinus $= a - A \cdot Mm$. Est enim arcus AMm sinus $= pm = PM(A) + mN$; et propter triangula similia CPM, mNM est $CM(1) : CP(a) = Mm : Nm$, vnde fit $Nm = a \cdot Mm$, ideoque $pm = A + a \cdot Mm$. Simili modo reperitur $MN = Pp = A \cdot Mm$; cum igitur arcus AMm cosinus fit $= Cp = CP(a) - Pp$, erit cosinus arcus aucti $AMm = a - A \cdot Mm$. Perspicuum autem est haec tantum locum habere, quando arcus Mm tam est exiguus, vt sine errore pro lineola recta possit haberi. Cum igitur in sequentibus declinatio solis interuallo duarum obseruationum nequidem dimidio gradu augeri queat, arcusque dimidii gradus a lineola recta non multum discrepet, hoc lemmate ad definiendos sinus et cosinus declinationis solis auctae vel minutae tuto vti poterimus. Error saltem, qui ex curuatura tam parui arcus oriri posset, vix ad minuta tertia ascendere potest; tantillum vero errorem, qui minuta secunda afficere nequit, merito non curamus.

Figura 1.

§. 9. His praemissis concipiatur hemisphaerium $\triangle PBE$, in quo punctum P representet polum terrae

Figura 2.

G 3

et

et Z zenith loci, pro quo aequatio meridiei desideratur. Erit itaque recta AEB aequator et CD , cd circuli paralleli; PZE vero meridianus loci propositi. Porro PZ est complementum eleuationis poli, et hanc ob rem arcus meridiani ZE aequabitur ipsi poli eleuationi. Obseruetur iam sol ante meridiem in S , dabitur arcus ZS complementum scilicet altitudinis solis; PS vero est complementum declinationis solis, quod autem non datur, cum solis declinationes pro puncto meridiei inueniantur, in obseruatione autem distantia a meridie incognita ponatur. Ascendat sol ab aequatore versus boream; dum igitur perpetuo eius declinatio crescit, non in circulo parallelo CD mouebitur, sed oblique incedet via per lineam SOT repraesentatam. Post meridiem ergo, cum solis eadem altitudo obseruatur, sol non amplius erit in parallelo CD , sed in alio superiore proximo cd , et quidem in puncto T , cuius a zenith distantia ZT aequalis est distantiae ZS , quia altitudines solis in S et T sunt aequales positae, et ZS atque ZT harum altitudinum sunt complementa.

§. 10. Quando haec aequales solis altitudines obseruantur, momenta obseruationum ope boni horologii oscillatorii diligentissime notari debent. Vocatur autem bonum horologium, quod aequabiliter mouetur, et periodum in duodecim seu viginti quatuor horis absoluit, etiamsi eius hora duodecima cum vero meridie non congruat; per has enim ipsas obseruationes indagatur discrimen inter horam duodecimam horologii et verum meridiem, quo pacto horologium perfecte corrigitur,
et

et ad solis motum accommodatur. Ope horologii igitur boni licet non correcti cognoscitur intervallum temporis inter momenta duarum illarum observationum, quod tempus in gradus aequatoris conuersum dat angulum SPT . Quaeritur autem angulus SPZ ; hic enim in tempus conuersus dat intervallum inter tempus observationis antemeridianae et verum meridiem; ex quo correctio horologii sponte sequitur. Datur vero porro arcus meridiani PO , qui est complementum declinationis solis in ipso meridiei momento, ex ephemeridibus; at arcus PS et PT propter angulos SPZ et TPZ incognitos non dantur.

§. IV. Si sol declinationem non mutaret, sed perpetuo in eodem parallelo CD permaneret, observatio pomeridiana incidere sole existente in t , cuius puncti a Z distantia Zt aequalis foret distantiae SZ . Hoc igitur casu cum quoque sit $PS = Pt$, bifecabit meridianus PZE angulum SPt ; atque cum hic angulus in tempus conuersus sit intervallum inter momenta observationum, manifestum est, si hoc intervallum in duas partes aequales diuidatur verum meridiei tempus esse proditurum. Contra vero ex his intelligitur solis declinatione immutata tempus medium inter momenta observationum in ipsum meridiem incidere non posse, cum angulus TPZ maior sit angulo SPZ , differentia existente angulo TPZ . A tempore itaque medio inter duas observationes quicquam subtrahi debet ad verum meridiei tempus inueniendum; atque ea temporis particula, quae subtrahi debet, in arcum aequatoris conuersa aequalis erit dimidio angulo

angulo TPt . In id igitur nobis erit incumbendum, vt quantitatem anguli TPt eliciamus; quo factō habebimus meridiei aequationem. Huius enim anguli dimidium in tempus conuersum dat tempusculum a medio inter obseruationes tempore subtrahendum nostro casu, quo solem in signis ascendentibus ponimus. In signis vero descendentibus tempusculum eodem modo inuentum, addi debet ad tempus inter obseruationes medium.

§. 12. Quo igitur rem ad calculum deducam, sit sinus arcus $PZ = A$, eiusque cosinus $= a$, posito radio $= 1$, sinus complementi declinationis solis seu sinus arcus $PO = B$, eiusque cosinus $= b$, ita vt sit $B^2 + b^2 = 1$. Porro sit angulus $SPT = 2N$ grad. erit dimidium anguli $SPT = N$ grad.; ponatur huius dimidii anguli sinus $= C$, eiusque cosinus $= c$, erit quoque $C^2 + c^2 = 1$. Denique sit incrementum declinationis solis diurnum $= dt$; in signis descendentibus idem dt decrementum declinationis denotabit. Incrementum vero hoc vel decrementum in minutis secundis exactissime requiritur, siquidem aequatio meridiei in minutis tertiis temporis desideratur. Cum autem ephemerides declinationem solis in minutis primis tantum continere soleant, dabo deinceps modum ex motu solis diurno vero, qui potissimum in minutis secundis habetur variationem declinationis diurnam in minutis secundis quoque computandi, ita vt non opus sit vlla interpolatione in consuetis sinuum et tangentium tabulis. Anguli vero quaesiti TPt dimidium vocabo dx ; dabit ergo dx in tempus conuersum aequationem meridiei quaesitam. Assumo autem

autem pro variatione declinationis diurna et dimidio angulo TPt denominationes differentiales dt et dx , quia sunt quantitates tam paruae, vt respectu reliquorum arcuum pro infinite paruis haberi queant, et quia arcus ipsis dt et dx in aequatore respondentes a lineolis rectis non discrepant.

§. 13. Cum sol interuallo vnus diei declinationem aequabiliter mutare censendus sit, ex variatione declinationis solis diurna inuenitur variatio declinationis interuallo temporis inter momenta duarum obseruationum. Quemadmodum igitur se habet interuallum 24 horarum ad interuallum inter duas obseruationes, ita se habent 360 gradus ad ang. SPT qui est $2N$; quamobrem fiat vt 360 ad $2N$ ita dt ad $\frac{Ndt}{180}$, quod erit incrementum declinationis, dum sol angulum SPT circa polum conficit. Huic ergo quantitati $\frac{Ndt}{180}$ aequalis est differentia inter PS seu Pt et PT ; quare erit $PS - PT = Pt - PT = \frac{Ndt}{180}$. Cum deinde angulus TPt positus sit $= 2dx$; erit angulus $SPT = 2N - 2dx$, et hinc huius dimidium angulus SPO seu $tPO = N - dx$; atque angulus $TPO = N + dx$. Superiore ergo modo variatio declinationis, dum sol angulum SPO absoluit, inuenitur ex analogia $360 : N - dx = dt : \frac{Ndt}{360} - \frac{dtdx}{360}$, vbi terminus $\frac{dtdx}{360}$, quia ad differentialia secundi gradus pertinet, tuto reiici potest; ita vt tam pro $PS - PO$, quam pro $PO - PT$ accipi possit $\frac{Ndt}{360}$. Nihilo vero difficilior euadet formula, imo ne quidem immutabitur, si quis pro $PS - PO$ voluerit sumere $\frac{Ndt - dtdx}{360}$ et pro $PO - PT$ hunc valorem $\frac{Ndt + dtdx}{360}$.

Tom. VIII.

H

§. 14.

§. 14. Cum iam sit arcus PO sinus = B et cosinus = b, erit per lemma praemissum arcus PS seu PO + $\frac{Ndt - tdx}{360}$ sinus = B + $\frac{bNdt - btdx}{360}$ et cosinus = b - $\frac{bNdt + Bdt dx}{360}$; qui sunt simul sinus et cosinus arcus Pt. Arcus vero PT seu PÖ - $\frac{Ndt - dtdx}{360}$ sinus erit = B - $\frac{bNdt - btdx}{360}$ et cosinus = b + $\frac{bNdt + Bdt dx}{360}$. Praeterea cum sit angulus SPO seu tPO = N - dx, anguli N vero sinus sit C cosinusque c, erit anguli SPO seu tPO sinus = C - cdx et cos. = c + Cdx; similique modo erit anguli TPO sin. = C + cdx et cosin. = c - Cdx. Quantitate ergo dx tanquam data considerata, in triangulo sphaerico tPZ data sunt latera PZ et Pt vna cum angulo ZPt; similiterque in triangulo sphaerico TPZ data sunt latera PZ et PT vna cum angulo TPZ. Ex his igitur triangulis, quia tria sunt data, inueniri poterunt latera Zt et ZT. Qui arcus cum sint aequales, dabunt aequationem, ex qua dx poterit determinari.

§. 15. Habemus ergo duo triangula sphaerica resoluenda; in quorum utroque dantur duo latera cum angulo intercepto et tertium latus quaeritur. Ex his igitur datis, quomodo tertium latus sit inueniendum antea regulam exhibebo, in qua demissione perpendiculari non est opus. Si fuerint in triangulo sphaerico ZPT data latera ZP et TP vna cum angulo ZPT erit cos. ZT = cos. ZPT. /ZP. /PT + cos. ZP. cos. PT; cuius regulae demonstratio ex trigonometricis ab hic defuncto Prof. Maiero Tom. II. Comment. insertis facile deriuatur. Per hanc regulam igitur orietur cos. Zt = ABc + ab

Figura 3.

$$+ ab + ABC dx + \frac{AbcNdt - aBndt + aBdtdx - Abcdtdx + AbcNdt dx}{360}$$

atque ex altero triangulo erit $\cos. ZT = ABC + ab -$
 $ABC dx - \frac{AbcNdt + aBndt + aBdtdx - Abcdtdx + AbcNdt dx}{360}$.

Cum autem sit $Zt = ZT$ erunt et cosinus aequales; quamobrem sequens habebitur aequatio: $ABC dx + \frac{AbcNdt - aBndt}{360} = 0$, ex qua prodit $dx = \frac{Ndt}{360} (\frac{a}{AC} - \frac{bc}{BC})$, in qua si arcus dt conuertatur in minuta tertia temporis habebitur statim dx in minutis tertiis temporis expressum; ideoque ipsa meridiei aequatio.

§. 16. Quo haec formula clarius perspiciatur loco symbolorum restituamus litteras figurae prodibitque aequatio meridiei = $\frac{\text{ang. SPT} \cdot dt}{720^\circ} \left(\frac{1}{\text{tang. PZ}, \int \frac{1}{SPT}} - \right.$

$\left. \frac{1}{\text{tang. PO} \cdot \text{tang. } \frac{1}{SPT}} \right)$. Ad calculum autem ex hac regula instruendum notari oportet sinum totum hic esse positum = 1, qui vero in tabulis sinuum et tangentium poni solet = 10000000. Quare quo vniformitas conseruetur, loco numeratoris 1, in formula inuenta poni debet quadratum sinus totius. Ne autem hac cautela sit opus formulam immuto, ita vt in numeratore et denominatore idem habeatur dimensionum numerus. Existente enim sinu toto = 1 est $\frac{1}{\text{tang. PZ}} = \cot. PZ = \text{tang. ZE}$ seu est tangens eleuationis poli; atque $\frac{1}{\text{tang. PO}} = \cot. PO = \text{tang. OE}$ seu est tangens declinationis solis.

His igitur substitutis erit aequatio meridiei = $\frac{\text{ang. SPT} \cdot dt}{720^\circ}$

H 2 (tang.

$$\left(\frac{\text{tang. ZE}}{\text{fin. } \frac{1}{2} \text{SPT}} - \frac{\text{tang. OE}}{\text{tang. } \frac{1}{2} \text{SPT}} \right).$$

Ex hac formula statim apparet sub polo aequationem hanc fieri infinite magnam: fit enim ZE arcus 90°, cuius tangens est infinite magna. Sub ipso aequatore autem euanescit tang. ZE, ideoque aequatio meridiei fit negatiua; seu addi debet, cum alias subtrahi deberet, nisi OE fiat negatiuum, seu sol versus Austrum declinet. Formula tandem inuenta ad declinationem solis borealem est accommodata;

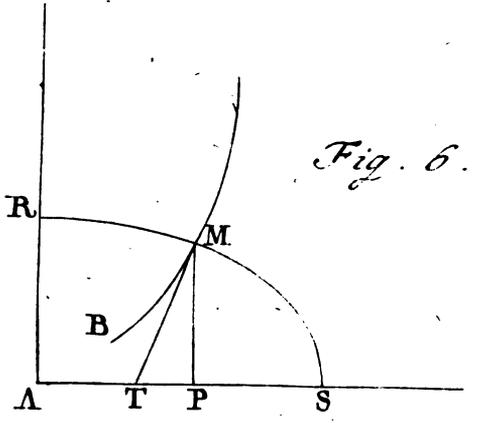
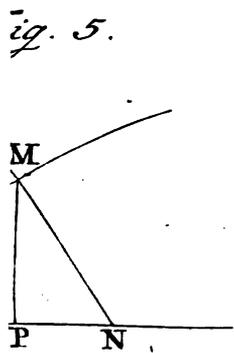
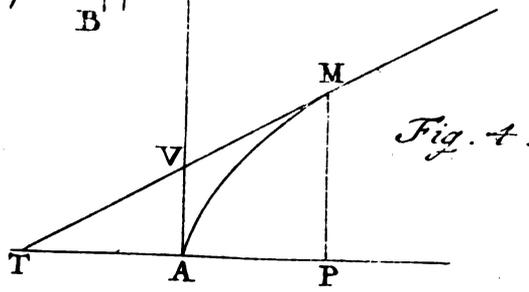
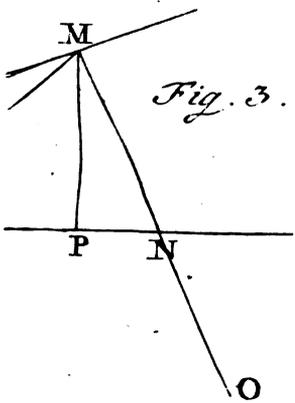
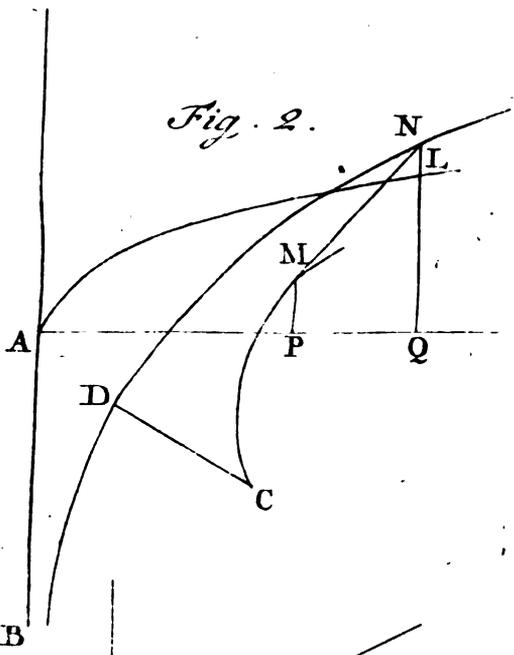
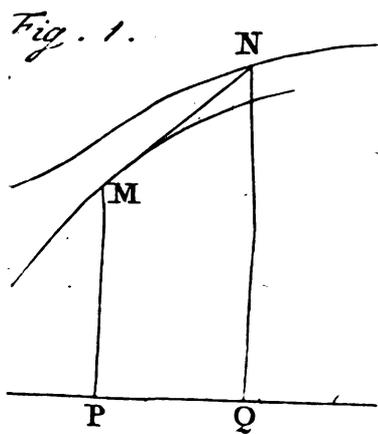
at si fuerit australis ob OE negatiuum, erit aequatio meridiei

$$= \frac{\text{ang. SPT. } dt}{720^\circ} \left(\frac{\text{tang. ZE}}{\text{fin. } \frac{1}{2} \text{SPT}} + \frac{\text{tang. OE}}{\text{tang. } \frac{1}{2} \text{SPT}} \right)$$

quae exigua discrepantia calculum admodum contrahit.

§. 17. Ipse autem calculus ex hac formula sequenti modo commodissime instituitur. Multiplicetur horarum inter obseruationes elapsarum numerus per 15, quo habeatur numerus graduum anguli SPT, huiusque numeri sumatur logarithmus. Deinde quaeratur modo post describendo variatio declinationis diurna in minutis secundis, horumque numeri per 4 multiplicati logarithmus addatur ad priorem logarithmum et a summa subtrahatur logarithmus numeri 720; quo facto habebitur logarithmus ipsius $\frac{\text{ang. SPT. } dt}{720}$. Deinde a logarithmo tangentis eleuationis poli subtrahatur logarithmus sinus dimidii anguli SPT et ex tabula logarithmorum numerorum naturalium quaeratur numerus residuo respondens, qui erit $= \frac{\text{tang. ZE}}{\text{fin. } \frac{1}{2} \text{SPT}}$. Simili modo a logarithmo

mo



mo tangētis declinationis solis subtrahatur logarithmus tangētis dimidii anguli SPT, et ex tabula logarithmorum residuo quaeratur numerus respondens, qui erit

$$= \frac{\text{tang. } OE}{\text{tang. } \frac{1}{2} SPT}.$$

Tum in casu declinationis borealis hic

numerus ab illo subtrahatur, in casu australis vero declinationis hi numeri ad se inuicem addantur; numerique qui prodiit sumatur iterum logarithmus, isque addatur

ad logarithmum $\frac{\text{ang. } SPT \cdot dt}{720^\circ}$ ante inuentum. Quo fa-

cto numerus aggregato illorum logarithmorum respondens erit numerus minorum tertiorum aequationem meridiei constituentium.

§. 18. Videtur quidem haec regula satis prolixa, et multum temporis requirere ad tabulam aequationis meridiei computandam; sed qui paulisper in calculando est exercitatus, statim videbit non opus esse pro singulis aequationibus totam operationem repetere; sed plures numeros vnius operationis in reliquis retineri. De me saltem asseuerare possum, me haud quatuor dies integros ad totam tabulam huic loco inseruientem impendisse; quae tamen tabula plusquam sexies amplior est, quam ea quae pro latitudine Lutetiae in Tabulis Lahirianis extat. Peculiares enim tabulas confeci pro signis ascendentibus et descendentibus, quo instituto labor fere erat duplicatus. Praeterea tabulam ab vnius horae interuallo inter obseruationes successiue vsque ad octodecim horas continuauit, cum Parisiensis tantum a quatuor horis vsque ad decem procedat.

H 3

§. 19.

Figura 4.

§. 19. Antequam regulam hanc exemplo illustrem necesse esse iudico methodum tradere, qua ex motu solis diurno in ecliptica incrementum vel decrementum diurnum declinationis inueniri queat; idque in minutis secundis; ad quod requiritur motus solis in ecliptica in minutis secundis quoque. Sit igitur in hemisphaerio ARBA, R polus, AB aequator et EC ecliptica cum aequatore angulum ACE $23^{\circ}, 29'$ constituens. Sit sol in M eiusque declinatio arcus PM; progrediatur sol vno die in ecliptica per arcum Mm quem vocemus dk ; erit incrementum declinationis $= mp - MP = mN = dt$. Sit vt ante iam posuimus sinus arcus $PM = b$ et cosinus $= B$ erit sinus arcus $mp = b + Bdt$. Vocetur sinus anguli ACE $= e$ fiatque vt $e : 1 = fPM(b) : fCM$. erit ergo sin. $CM = \frac{b}{e}$. Sit cosinus arcus $CM = f$ erit sin. $Cm = \frac{b}{e} + fdk$. Est vero $fACE(e) : \text{sin. tot. } (1) = f.p m(b + Bdt) : f.Cm (= \frac{b}{e} + fdk)$ siue $efdk = Bdt$. Ex quo inuenitur $dt = \frac{efdk}{B}$. Cum igitur sit $e = \text{sin. } 23^{\circ}, 29'$, $f = \text{cos. distant. Solis ab aequinoctio}$ et $B = \text{cos. declin. solis}$; definitur dt per dk ; et quia dk in minutis secundis ex ephemeridibus habetur, dt quoque in minutis secundis exprimetur.

§. 20. Hoc exposito praescriptas operationes in sequente exemplo absoluemus. Sub-elevatione Poli $52^{\circ}, 27'$ obseruatur solis altitudo ante meridiem hora 8. min. 21. eademque solis altitudo post meridiem redibat hora 3. min. 49; quae momenta ope horologii boni etiamsi non correcti sunt notata. Ostendebant autem illo die
ephe-

ephemerides Solem in γ , $16^{\circ}, 35', 6''$, eiusque declinationem $16^{\circ}, 49'$. Quaestio est vero, in quod tempus a horologio indicatum verus meridies inciderit. Reperitur autem motus solis diurnus verus ex ephemeridibus $= 57', 4'' = 3424''$; quare est $dk = 3424''$. Distantia porro solis ab aequinoctio proximo est $46^{\circ}, 35'$, cuius anguli cosinui aequatur f , atque est $e = \sin. 23^{\circ}, 29'$ et $B = \cos. 16^{\circ}, 49'$. Ex quibus iuuenitur dt , vt sequitur:

$$\begin{array}{r}
 l e = l \sin. 23^{\circ}, 29' = 9,6004090 \\
 l f = l \cos. 46^{\circ}, 35' = 9,8371456 \\
 l dk = l 3424 = 3,5345338 \\
 \hline
 l e f d k = 22,9720884 \\
 l B = l \cos. 16^{\circ}, 49' = 9,9810187 \\
 \hline
 12,9910697
 \end{array}$$

Hic autem ob vniformitatem, quia in numeratore duo sunt sinus, vnicus vero in denominatore, log. sinus totius 10 subtrahi debet, eritque residuum

$$2,9910697 = ldt.$$

§. 21. Non opus est vt huius logarithmi numerus respondens quaeratur, cum in altera formula logarithmus ipse dt sit adhibitus, interim tamen ex tabulis eruitur $dt = 979'' = 16', 19''$, quae est variatio declinationis diurna. Si $979''$ per 4 multiplicetur, habebitur numerus minorum temporis tertiorum ipsi dt respondens. Cum igitur ex hac formula dt prodeat in minut. secundis, multiplicetur altera formula per 4 eritque
 aqua-

Figura 2. aequatio meridiei = $\frac{\text{ang. SPT} \cdot dt}{180} \left(\frac{\text{tang. ZE}}{\text{fin. } \frac{1}{2} \text{SPT}} - \frac{\text{tang. OE}}{\text{t. } \frac{1}{2} \text{SPT}} \right)$
 min. tert. temporis. Nunc pro formula est $\text{ZE} = 52^\circ, 27'$ et $\text{OE} = 16^\circ, 49'$; atque cum interuallum duarum obseruationum fit 7 hor. 28' erit angulus $\text{SPT} = 112^\circ$; et $\frac{1}{2} \text{SPT} = 56^\circ$. His praeparatis instituitur operatio vt sequitur:

$$1. \text{ang. SPT} = 112 = 2, 0492180$$

$$1. dt - - - - = 2, 9910697$$

$$5, 0402877$$

$$1. 180 - - - - = 2, 2552725$$

$$1. \frac{\text{ang. SPT} \cdot dt}{180} = 2, 7850152$$

Alterum membrum hoc modo inuenietur:

$$1. \text{tang. ZE} = 1. \text{tang. } 52^\circ, 27' = 10, 1142350$$

$$1. \text{f. } \frac{1}{2} \text{SPT} = 1. \text{f. } 56^\circ = 9, 9185742$$

$$1. \frac{\text{tang. ZE}}{\text{f. } \frac{1}{2} \text{SPT}} = 0, 1956608$$

Erit ergo

$$\frac{\text{tang. ZE}}{\text{fin. } \frac{1}{2} \text{SPT}} = 1, 569.$$

Porro est

$$1. \text{tang. OE} = 1. \text{t. } 16^\circ, 49' = 9, 4803451$$

$$1. \text{tang. } \frac{1}{2} \text{SPT} = 1. \text{t. } 56^\circ = 10, 1210126$$

$$1. \frac{\text{tang. OE}}{\text{tang. } \frac{1}{2} \text{SPT}} = - 1, 3593325$$

vbi

vbi notandum est signum — characteristicam 1 tantum, non vero reliquos numeros afficere. Erit ergo

$$\frac{\text{tang. OE}}{\text{tang. } \frac{1}{2} \text{ SPT}} = 0, 229;$$

ideoque

$$\frac{\text{tang. ZE}}{\text{fin. } \frac{1}{2} \text{ SPT}} - \frac{\text{tang. OE}}{\text{tang. } \frac{1}{2} \text{ SPT}} = 1, 340,$$

cuius numeri logarithmus est = 0, 1271048

$$\text{qui additus ad } 1. \frac{\text{ang. SPT. dt}}{110} = 2, 7850152$$

dat log. aequationis meridiei = 2, 9121200.

Quare ipsa aequatio erit 817 minut. tert. seu aequatio meridiei huic casui respondens est 13", 37", quae minuta secunda et tertia tempus denotant.

§. 22. Quia in hac obseruatione sol in tauro ver-
fatur, eius declinatio crescit, et hanc ob rem aequatio
inuenta a tempore medio inter tempora obseruationum
subtrahi debet, quo momentum meridiei proueniat. In-
uenitur autem tempus medium addendis temporibus ob-
seruationum

$$\begin{array}{r} 8^b. 21' \\ 3^b. 49' \\ \text{vna cum 12 horis } 12^b. \\ \hline 24^b. 10' \\ \hline \text{sumendoque huius dimidium } 12^b. 5' \end{array}$$

a quo tempore si subtrahatur 13", 37", habebitur ve-
rum meridiei tempus hora 12, cum 4', 46'', 23";
vnde horologium exactissime corrigi potest.

Tom. VIII.

I

DE

DE
CONSTRUCTIONE AEQVATIONVM
OPE MOTVS TRACTORII, ALIISQVE AD ME-
THODVM TANGENTIVM INVERSAM
PERTINENTIBVS.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Tab. V.
Fig. 1.

Motu tractorio curvae lineae describuntur, dum: filum datae longitudinis altero termino pondus annexum habens, altero termino in data linea siue recta siue curva protrahitur; atque ea linea curva, quam pondus motu suo describit, tractoria vocatur. Vt si filum BA in A pondere onustum, termino B in linea data BN protrahatur, linea AM, in qua alter terminus A mouebitur, erit curva tractoria. Huius curvae ista nota est proprietas, quod filum perpetuo positum sit in tangente curvae tractoriae; scilicet quando filum est in situ NM, et hoc modo punctum M curvae tractoriae generat, erit recta MN tangens curvae in puncto M; ex qua proprietate solius calculi ope ex data curva BN pro tractoria AM aequatio potest inueniri.

§. 2. Ratio autem huius descriptionis ex mechanica est petenda, quia a motus natura pendet. Mouetur enim corpus semper in ea directione in qua protrahitur, si quidem quiescit; atque hoc casu directio filii, quo corpus trahitur, est tangens curvae a corpore descriptae.

scriptae. At si corpus iam habeat motum, eius directio a directione fili discrepabit. Quare quo motus directio perpetuo in positionem fili incidat, oportet ut motus corpori iam impressus quouis momento pereat. Ad hoc ergo obtinendum requiritur, ut haec descriptio perficiatur super plano horizontali et satis aspero, illud quidem, ne vis grauitatis directionem immutet, hoc vero ut frictione omnis motus iam acquisitus pereat. Praeterea filum tardissime protrahi debet, quo effectus frictionis sit eo maior, et corpus nihil de pristino motu retineat.

§. 3. Si igitur hoc modo curua tractoria AM describatur, ea hanc habebit proprietatem, ut ex quouis puncto M ducta tangens MN vsque ad datam curuam BN sit datae magnitudinis. Ex quo perfacilis oritur modus ex data curua tractoria AM inueniendi curuam BN cuius illa est tractoria pro data fili longitudine. At ex data curua PN innumerabiles oriri possunt tractoriae longitudine fili immutata, prout initio positio fili BA ad curuam BN fuerit inclinata. Longe autem difficilius est per calculum ex data curua BN inuenire tractoriam AM quam ex tractoria AM data curuam BN .

§. 4. Obseruavi autem geometricam constructionem tractoriae AM semper pendere a resolutione aequationis $ds + s dz = Z dz$, denotante Z functionem quamcunque ipsius z . Quare cum haec aequatio constructu sit valde difficilis, quippe multo generalior quam haec $ds + s dz = z^m dz$, quae a *Com. Riccati* quondam erat proposita, eius constructio ope tractorii motus attentionem meretur. Quae constructio cum sit praeterea ad

modum simplex et facilis, operae pretium erit aequationis tam difficilis constructionem ad motum tractorium reduxisse.

§. 5. Pono igitur in curua data BN abscissam AQ $=t$, et applicatam QN $=u$; dabiturque u per t et constantes. Pro curua autem quaesita pono AP $=x$ et PM $=y$; sitque $dy = p dx$; longitudinem fili vero AB vel MN pono $=b$. His positis erit $\sqrt{(1+pp)}:1 = MN(b):PQ(t-x)$, et $\sqrt{(1+pp)}:p = MN(b):QN-PM(u-y)$. Hinc igitur fit $\frac{b}{\sqrt{(1+pp)}} = t-x$ et $\frac{b p}{\sqrt{(1+pp)}} = u-y$, atque ex his porro $pt - px = u-y$. Hanc postremam aequationem differentio ponendo $p dx$ loco dy , quo facto prodit $p dt + t dp - x dp = du$. atque $x = t + \frac{p dt}{dp} - \frac{du}{dp}$. Est vero ex prima aequatione $x = t - \frac{b}{\sqrt{(1+pp)}}$, unde obtinetur ista aequatio $du = p dt + \frac{b dp}{\sqrt{(1+pp)}}$, in qua duae tantum insunt variables p et t , quia u per t datur.

§. 6. Est autem p cotangens anguli MNQ posito sinu toto $=1$, quare haec aequatio ope motus tractorii resoluitur, per illum enim innotescet angulus MNQ, eiusque consequenter cotangens cui aequalis est p . Ad irrationalitatem autem tollendam pono $\sqrt{(1+pp)} = p+q$ seu $q = \sqrt{(1+pp)} - p$; quia autem $\sqrt{(1+pp)}$ est cosecans anguli MNQ et p eius cotangens, erit per elementa trigonometrica q tangens semissis anguli MNQ. Per hanc vero substitutionem est $p = \frac{1-q^2}{2q}$ et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{1+q^2}{2q}$ atque $dp = -\frac{dq(1+q^2)}{2q^2}$. Hinc ergo erit $\frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}} = -\frac{dq}{q}$, atque superior aequatio transibit in hanc $2q du = dt - q q dt - 2bdq$.

§. 7.

DE CONSTRUCTIONE AEQVATIONVM. 69

§. 7. Ad hanc aequationem ulterius reducendam, pono $du = \frac{bdr}{r}$, eritque $2bqdr + 2brdq = rdt - rqqdt$; in qua t et r a se mutuo pendent, qui t est $= AQ$, et $blr = QN$. Porro fiat $qr = s$ seu $q = \frac{s}{r}$ erit $2bds = rdt - \frac{ssdt}{r}$. Sit nunc $\frac{dt}{r} = 2bdz$ et $rdt = 2bZdz$, erit $rr = Z$ et $r = \sqrt{Z}$. Praeterea est $dt^2 = 4b^2Zdz^2$ et $t = 2b\sqrt{Z}dz$. Per z igitur curua BN ita determinatur, vt sit $AQ = 2b\sqrt{Z}dz$ et $QN = \frac{b}{2}\sqrt{Z}$. Quia ergo curua BN datur, dabitur simul Z per z . Factis autem his substitutionibus habebitur $ds + ssdz = Zdz$.

§. 8. Proposita ergo aequatione $ds + ssdz = Zdz$ valor ipsius s per z sequenti modo poterit definiri. Construat curua BN huiusmodi vt sumta abscissa $AQ = 2b\sqrt{Z}dz$, sit applicata $QN = \frac{b}{2}\sqrt{Z}$. Tum filo longitudinis b secundum curuam BN protracto describatur tractoria AM. Deinde ducatur tangens MN, quae etiam ipso filo exhibebitur, innotescetque angulus MNQ, cuius dimidiū tangens sit $= q$. Hoc facto erit $s = qr = q\sqrt{Z}$.

§. 9. Coordinatae autem AP et PM curuae tractoriae ita se habebunt: erit $AP = x = t - \frac{b}{\sqrt{(1+pq)}} = t - \frac{2bq}{1+qq}$, et $y = u - \frac{bp}{\sqrt{(1+pp)}} = u - \frac{b(1-qq)}{1+qq}$. Quia autem est $t = 2b\sqrt{Z}dz$ et $u = \frac{b}{2}\sqrt{Z}$, atque $q = \frac{s}{r} = \frac{s}{\sqrt{Z}}$; erit $x = 2b\sqrt{Z}dz - \frac{2bs\sqrt{Z}}{s+Z}$ et $y = \frac{b}{2}\sqrt{Z} + \frac{bs-bZ}{s+Z}$. Ex his iam aliae nascuntur constructiones aequationis $ds + ssdz = Zdz$. Per motum enim tractorium innotescunt

70 DE CONSTRUCTIONE AEQUATIONVM.

coordinatae x et y curvae AM, atque ex his erit vel $s = \frac{Z(t-x)}{2b\sqrt{Z-t+x}}$, vel $s = \frac{Z(b-u+y)}{b+u-y}$.

§. 10. Aequatio vero inter x et y ex data aequatione inter t et u facile inuenitur. Est enim ex aequationibus supra inuentis $t = x - \frac{b}{\sqrt{(1+pp)}} = x + \frac{bdx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ et $u = y + \frac{bp}{\sqrt{(1+pp)}} = y + \frac{bdy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$. Quare si in aequatione data inter t et u loco t et u isti valores substituantur prodibit aequatio inter x et y pro tractoria AM quaesita, quae erit differentialis primi gradus si aequatio inter t et u fuerit algebraica. Ex hac vero aequatione, quae plerumque fit maxime intricata, nihil, quod ad cognitionem curuae AM attinet, poterit concludi. Omnium autem huiusmodi aequationum resolutio pendeat a resolutione huius $ds + s dz = Z dz$.

§. 11. Si ergo proponatur haec aequatio $ds + s dz = a^2 z^n dz$, quae est ea ipsa quam Com. Riccati resoluedam proposuit, erit $Z = a^2 z^n$ et $\int dz \sqrt{Z} = \frac{a z^{n+1}}{n+1}$

atque $lZ = 2la + 2nlz$. Hinc erit $t = \frac{2abz^{n+1}}{n+1}$, et

$u = bla + nblz$. Quia autem est $t = \frac{2abz^{n+1}}{n+1}$, erit

$z = l \frac{2ab}{n+1} + (n+1)lz$ seu $lz = \frac{lt - l2ab + l(n+1)}{n+1}$

Quo valore in aequatione altera $u = bla + nblz$ substituto, et applicatis u pro lubitu auctis vel diminutis habebitur ista aequatio $u = \frac{nb}{n+1}lt$, seu $t du = \frac{nb dt}{(n+1)}$; quae est aequatio inter t et u , et indicat curuam BN esse

DE CONSTRUCTIONE AEQVATIONVM. 72

esse logarithmicam, cuius subtangens constans est = $\frac{nb}{n+1}$.

§. 12. Pro hoc ergo casu construatur logarithmica Figura 2.
 DN ad asymptoton AB, cuius subtangens sit = $\frac{nb}{n+1}$.
 Producatur quaecunque applicata AE, quae pro axe habeatur, et motu tractorio filum longitudinis b altero termino in logarithmica protrahatur, describatque alter terminus tractoriam CMN. Demittantur ex punctis M et N perpendiculara MP et NQ erit $s = \frac{z \cdot PQ}{b \sqrt{z - PQ}} = \frac{a^2 z^{2n} \cdot PQ}{2abz^n - PQ}$ sumto $z = \sqrt[n+1]{2(n+1)AQ}$ Vnica ergo logarithmica omnes casus aequationis $ds + s s dz = a^2 z^{2n} dz$ possunt construi, dummodo sit tangens MN seu filum ad subtangentem logarithmicae vt $n+1$ ad n .

§. 13. Sequenter praeterea modo aequatio $ds + s s dz = a^2 z^{2n} dz$ potest construi. Super axe construatur curva paraboloides, dictis $AQ = t$ et $QL = z$, hac aequatione expressa $z^{n+1} = \frac{2(n+1)t}{ab}$. Deinde filo longitudinis b super logarithmica DN, vt ante est praecipuum describatur tractoria CM. Tum in paraboloides fumatur applicata $QL = z$, eaque producatur, donec logarithmicam secet in N. Ex N ducatur recta NM longitudinis b ad tractoriam, et ex M demittatur perpendicularum MP. Quibus factis erit $s = \frac{4(n+1)^2 AQ^2 \cdot PQ}{b^2 (n+1) AQ \cdot QL - PQ \cdot QL^2}$ Vel etiam posita tangente dimidii anguli $MNQ = q$, erit $s = \frac{2(n+1)AQ \cdot q}{b \cdot QL}$.

§. 14-

§. 14. Cum methodus, qua in reductione aequationis constructae ad descriptionem tractoriae sum vsus, maximam habeat vtilitatem in resolutione problematum generalium, quae ad methodum tangentium inuersam referuntur, hic nonnulla huiusmodi problemata adiungam, eorumque resoluendorum modum ostendam. Cuius rei ratio quo facilius percipiatur, ante exponendum est, quam variis modis natura cuiusque curuae possit determinari, et quinam sint illi modi, ex quibus facillime diiudicari possit, an curua proposita sit algebraica, an transcendens.

§. 15. Vsu iam maxime receptum est, vt natura cuiusque curuae exprimat aequatione inter duas coordinatas orthogonales abscissam scilicet et applicatam, quippe ex qua quaelibet curuae puncta facillime possunt inueniri. Ex huiusmodi aequatione sponte sequitur, vtrum curua sit algebraica an secus; nam si aequatio est algebraica curua quoque talis censetur, sin vero aequatio fuerit transcendens, curua quoque transcendens habetur. Eadem vero conclusio deduci potest ex aequatione inter alias rectas lineas, quae curuae naturam exprimat, si modo positio earum rectarum non ab ipsa curua pendeat, sed vel ad datum punctum vel datam lineam referatur.

§. 16. At si positio earum linearum, inter quas aequatio curuae naturam exprimit, sine curuae ipsius cognitione definiri non potest, ex ea aequatione etiam singula curuae puncta immediate inueniri non possunt. Ex huiusmodi quoque aequatione, etsi est algebraica, tamen

tamen non sequitur curuam esse algebraicam, sed saepe maxime erit transcendens. Quamobrem tum ad constructionem tum ad cognitionem curuae huiusmodi aequatio in aliam est transmutanda, quae sit inter lineas, quarum positio a curua non pendeat.

§. 17. Optimum igitur ad cognoscendam et construendam curuam remedium erit, aequationem, si fuerit inter lineas, quarum positio ab ipsa curua pendeat, transmutare in aequationem consuetam inter abscissam et applicatam. In hoc autem negotio summa cura est adhibenda, ne in prolixissimos calculos et resolutu difficillimas aequationes incidamus. Facillima enim videtur illa transmutatio in aequationem inter abscissam et applicatam, sed hoc modo plerumque in inextricabiles tricas delabimur; Id quod unico exemplo ostendere sufficiet.

§. 18. Exprimatur curuae AM natura aequatione Figure 3. inter normalem in curuam MN et portionem axis AN; quarum MN vocetur u et AN, t ; sitque aequatio curuae naturam exprimens haec simplex admodum $u^2 = at$. Si nunc ponatur abscissa AP = x et applicata PM = y , atque curuae elementum quod est $\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$, erit $MN = u = \frac{y ds}{dx}$ et $AN = t = x + \frac{y dy}{dx}$. Quare si hi valores in aequatione substituantur, habebitur quidem haec aequatio $y^2 ds^2 = ax dx^2 + ay dx dy$, inter x et y , ex qua neque constructio curuae apparet, neque etiam an sit algebraica an secus.

74 DE CONSTRUCTIONE AEQUATIONVM

§. 19. In hoc quidem casu aequatio inuenta $y^2 ds^2 = ax dx^2 + ay dx dy$, quia differentia duo tantum habent dimensiones, in aequationem vnus dimensionis mutari potest, prodibit enim posito $dx^2 + dy^2$ loco ds^2 et extracta radice quadrata haec aequatio $2y dy = a dx + dx \sqrt{a^2 + 4ax - 4y^2}$ ex qua autem non tam facile natura curuae cognoscitur. Ex quo intelligitur, si magis compositam aequationem inter t et u assumissemus, tum nequidem ad aequationem differentialem vnus dimensionis perueniri potuisset. Interim tamen a Celo *Bernoullio* in Act. Lips. ostensum est, quoties detur aequatio algebraica inter t et u , toties quoque aequationem inter x et y fore algebraicam.

§. 20. Hanc ob rem alia via est procedendum, si ex aequatione inter t et u aequationem inter x et y eruere velimus, atque hoc obseruari commodissime effici posse eadem methodo, qua ante constructionem aequationis $ds + ss dz = Z dz$ ad motum tractorium reduxi. Hac enim methodo statim apparebit, quibus casibus aequatio inter t et u quaecunq; proposita ad aequationem algebraicam inter x et y deducatur, vel si curua fuerit transcendens quadraturam dabit simplicissimam, a qua curuae constructio pendet.

§. 21. Retineamus igitur eundem casum, sitque aequatio inter $AN = t$ et $MN = u$ quaecunq; maneat etiam $AP = x$, $PM = y$ et $\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$; erit $t = x + \frac{y dy}{dx}$ et $a = \frac{y ds}{dx}$. Ponatur $dy = p dx$; erit $t = x + py$ et $u = y \sqrt{1 + pp}$ seu $y = \frac{u}{\sqrt{1 + pp}}$. Differen-

DE CONSTRUCTIONE AEQUATIONVM. 75

ferentietur haec aequatio, habebitur $dy = p dx = \frac{du}{\sqrt{(1+pp)}}$
 $-\frac{up dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$, illa aequatio autem differentiata dat dt
 $= dx + p dx + y dp$ posito $p dx$ loco dy , ex qua ob-
 tinetur $dx = \frac{dt}{1+pp} - \frac{y dp}{1+pp}$; quae per p multiplicata lo-
 coque y eius valore substituto dat $p dx = \frac{p dt}{1+pp} -$
 $\frac{pudp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$; qua cum illa coniuncta prodit $\frac{p dt}{\sqrt{(1+pp)}}$
 $= du$.

§. 22. Ex hac aequatione inuenta statim obtine-
 tur $p = \frac{du}{\sqrt{(dt^2 - du^2)}}$ et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{dt}{\sqrt{(dt^2 - du^2)}}$. Ex qui-
 bus erit $y = \frac{u\sqrt{(dt^2 - du^2)}}{dt}$ atque $x = t - p y = t - \frac{u du}{dt}$.
 Quamobrem si aequatio inter t et u fuerit algebraica,
 aequatio inter x et y quoque erit algebraica, ex eaque
 constructio curvae quaesitae facile fluit. Atque a qua
 quadratura pendet aequatio inter t et u ab eadem qua-
 dratura pendeat aequatio inter x et y , et conse-
 quenter quoque constructio ipsius curvae.

§. 23. In casu speciali quem ante considerabamus
 erat $u^2 = at$, ideoque $t = \frac{u^2}{a}$ et $dt = \frac{2u du}{a}$ atque $\sqrt{(dt^2 - du^2)} = \frac{du}{a} \sqrt{(4u^2 - a^2)}$. His igitur substitutis prou-
 niet $y = \frac{1}{2} \sqrt{(4u^2 - a^2)}$ atque $x = \frac{u^2}{a} - \frac{a}{2}$. Haec autem
 dat $4u^2 = ax + 2a^2$; qui ipsius $4u^2$ valor in illa ae-
 quatione substitutus dat hanc inter x et y aequationem
 algebraicam $2y = \sqrt{(4ax + aa)}$ hoc est $y^2 = ax + \frac{a^2}{4}$,
 quae est aequatio pro parabola abscissis in axe ex foco
 sumtis.

K 2

§. 24.

Figura 4.

§. 24. Si curuae AM tangens MT ad axem PA vsque producat, atque ex A ad axem perpendicularis AV erigatur, detur aequatio inter TA et AV, qua curuae natura exprimitur; oporteatque inuenire aequationem inter abscissam AP et applicatam PM, seu construere curuam, quae omnes rectas per puncta T et V ductas tangat. Pofitis $AT = t$, $AV = u$, et $AP = x$, $PM = y$; erit $AT = \frac{y dx}{dy} - x = t$ et $AV = u = y - \frac{x dy}{dx}$; dataque ponitur relatio inter t et u ; quae sit quaecunque.

§. 25. Sit nunc $dy = p dx$ erit $t = \frac{y}{p} - x$ et $u = y - px$. Haec vero posterior aequatio differentiatâ posito $p dx$ loco dy dat $du = -x dp$ et $x = -\frac{du}{dp}$. Hi valores vero in priore aequatione loco x et y substituti dant $t = \frac{u}{p}$ seu $p = \frac{u}{t}$. Erit ergo $dp = \frac{t du - u dt}{t^2}$ ideoque $x = \frac{t du}{u dt - t du}$ et $y = u + \frac{t du}{u dt - t du}$. Vnde iterum patet quoties aequatio inter t et u fuerit algebraica, toties curuam AM quoque fore algebraicam, propter aequationem inter x et y algebraicam.

§. 26. Manente aequatione inter AT, t et AV, u quacunque, si loco rectarum super axe AT verticibus T infinitae parabolae TVM describantur per puncta V transeuntes, inuenienda proponitur curua AM, quae ab his parabolis omnibus tangatur. Pofitis $AP = x$ et $PM = y$ et $dy = p dx$, erit ex natura parabolae TVM, $t u^2 = t + x y^2$, vnde habetur $y^2 = u^2 + \frac{u^2 x}{t}$. Quia porro parabola TVM tangere debet curuam AM, communem habebunt tangentem in puncto M atque ideoquoque sub-

subtangente communem. Est vero subtangens parabolae in $M = 2PT = 2t + 2x$, quae aequalis esse debet $\frac{y dx}{dx} = \frac{y}{p}$ subtangenti curvae quaesitae AM , unde oritur $y = 2pt + 2px$.

§. 27. Harum duarum aequationum si prior per posteriorem diuidatur, prodit $y = \frac{u^2}{2pt}$, quo valore in altera aequatione substituto prodit $x = \frac{u^2}{4p^2t} - t$. Differentietur nunc vtraque aequatio; erit $dy = p dx = \frac{u du}{pt} - \frac{u^2 dt}{2p^2t} - \frac{u^2 dp}{2p^2t}$ et $dx = \frac{u du}{2p^2t} - \frac{u^2 dt}{4p^2t} - \frac{u^2 dp}{2p^2t} - dt$. Ex quibus aequationibus dx eliminato prodit $\frac{u du}{2pt} + p dt = \frac{u^2 dt}{4p^2t}$ seu $pp = \frac{u^2}{4tt} - \frac{u du}{2t dt}$. Hinc ergo erit $x = \frac{2t du}{u dt - 2t du}$ et $y = \frac{u^2 \sqrt{dt}}{\sqrt{(u^2 dt - 2t u du)}}$. Ex quo perspicitur curuam AM toties esse algebraicam, quoties aequatio inter t et u talis fuerit.

§. 28. Duo haec posteriora problemata alio quidem modo facilius resolui possunt quaerendo punctum quo duae curuae proximae concurrunt, in eo enim erit contactus curuae quaesitae AM . Semper autem punctum concursus M algebraice potest determinari, si tam curuae TVM , quam aequatio inter t et u algebraicae fuerint. Ideo autem haec problemata hic adieci, quo appareat, quomodo ad aequationem algebraicam inter x et y per plures differentiales aequationes perueniri queat.

§. 29. Si infinitae rectae RN intra angulum rectum A quomodocunque fuerint dispositae, ita vt earum positio exprimat aequatione quacunque inter AN , t et AR , u ; inuenienda proponatur curua BM , quae omnes

78 DE CONSTRUCTIONE AEQUATIONVM.

has rectas ad angulos rectos traiciat. Pofitis $AP=x$, $PM=y$ et $dy=pdx$ erit $PN=\frac{ydy}{dx}=py$, quia RN in curuam est normalis; ideoque $t=x+py$; deinde est $dy:dx=p:1=t:u$, vnde erit $t=pu$ feu $p=\frac{t}{u}$, et $dy=\frac{t dx}{u}$. Per illam vero aequationem est $y=u-\frac{ux}{t}$; quare differentiando $dy=\frac{t dx}{u}=du-\frac{u dx}{t}-\frac{x du}{t}+\frac{ux dt}{t^2}$, in qua aequatione duae infunt variables x et t , quia u per t datur.

§. 30. Aequatio poftrema reducta in hanc abit $dx+x\left(\frac{t dt+u du}{tt+uu}-\frac{dt}{t}\right)=\frac{t u du}{tt+uu}$, quae per $\frac{\sqrt{tt+uu}}{t}$ multiplicata fit integrabilis; erit autem integrale $x=\frac{t}{\sqrt{tt+uu}}\int\frac{u du}{\sqrt{tt+uu}}$; quo cognito habebitur fimul $y=u-\frac{u}{\sqrt{tt+uu}}\int\frac{u du}{\sqrt{tt+uu}}$. Quoties ergo $\frac{u du}{\sqrt{tt+uu}}$ integrationem admittit, toties curua BM erit algebraica. Ceterum autem constructio pendet a quadratura $\int\frac{u du}{\sqrt{tt+uu}}$.

§. 31. Consideremus huius problematis cafum, quo RN perpetuo eiusdem magnitudinis manet; feu quo $\sqrt{tt+uu}=a$, vel $u=\sqrt{a^2-t^2}$. Erit ergo $\int\frac{u du}{\sqrt{tt+uu}}=\frac{-tt}{2a}$; vbi constantem non adiicio, ne ad maxime compositas aequationes deducar. Hoc inuento erit $x=\frac{-t^2}{2a^2}$ atque $t=-\sqrt[3]{2a^2x}$, et propterea $u=(a^2-\sqrt[3]{4a^2x^2})$ Quia vero est $y=\frac{u(t-x)}{t}$ erit $x=\frac{+(x+\sqrt[3]{2a^2x})\sqrt{(a^2-\sqrt[3]{4a^2x^2})}}{\sqrt[3]{4a^2x^2}}$ quae fumendis quadratis transit in hanc $\frac{3ax^2}{\sqrt[3]{4a^2x^2}}$
 $\ll a^2-x^2-y^2$, haec fumendis cubis in fequentem:
 $(a^2-x^2$

$(a^2 - x^2 - y^2)^2 = \frac{7}{4} a^2 x^4$, quae est pro linea sexti ordinis.

§. 32. Dantur autem praeter hanc curuam infinitae aliae quaestioni aequae satisficientes, quae inuenientur, si ad integrale ipsius $\frac{x du}{\sqrt{(tt+uu)}}$ quantitas quaecunque constans addatur. Maxime autem aequatio inter x et y erit composita, propterea quod ex aequationibus indeterminata t eliminari debet, quae ad quatuor dimensiones ascendit. Interim tamen constructio erit facilis.

§. 33. Simili modo problema solui potest, si loco rectorum puncta R et N iungentium, curuae quaecunque per haec puncta ducantur, quae a quaesita ad angulos rectos secari debeant. Ad hoc ostendendum Figura 6. data sit quaecunque aequatio inter $AS = t$ et $AR = u$, ductaque sit quarta ellypseos pars SMR per puncta R et S, cuius igitur centrum erit in A et semiaxes coniugati AS ac AR. Infinitas vero has ellipses ad angulos rectos traiciat curua BM, quae quaeritur. Ponantur $AP = x$ et $PM = y$ atque $dy = p dx$, erit ex natura ellipsis $y = \frac{u}{t} \sqrt{(tt - xx)}$, seu $y^2 = u^2 - \frac{u^2 x^2}{t^2}$.

§. 34. Ad ellipsin in puncto M ducatur normalis MT; erit haec per conditionem problematis simul tangens curuae quaesitae BN. Quatenus autem MT est tangens curuae BM, erit $PT = \frac{u^2 x}{t^2}$. At quatenus MT est tangens curuae BM erit $PT = \frac{y dx}{dy} = \frac{y}{p}$. Quocirca habebitur ista aequatio $y = \frac{p u^2 x}{t^2}$; cuius differentialis est $dy = p dx = \frac{p u^2 dx}{t^2} + \frac{2 p u x du}{t^2} + \frac{u^2 x dp}{dt} - \frac{2 p u^2 x dt}{t^3}$, ex qua
fit

80 DE CONSTRUCTIONE AEQUATIONVM.

fit $p dx = \frac{2ptuxdu + tu^2xdp - 2pu^2xdt}{t(t^2 - u^2)}$. Prior vero aequatio differententiata dat $y dy = \frac{p^2 u^2 x dx}{tt} = u du - \frac{u^2 x dx}{t^2} - \frac{ux^2 du}{tt} + \frac{u^2 x^2 dt}{t^3}$ seu $ux dx = \frac{t^3 du - tx^2 du + ux^2 dt}{t(pp + 1)}$.

§. 35. Si ex duabus aequationibus differentialibus dx eliminetur, habebitur $u^2 x^2 = \frac{p(tt - uu)(t^3 du - tx^2 du + ux^2 dt)}{(pp + 1)(2ptdu + tudp - 2pudt)}$. Integrales vero aequationes coniunctae y eliminata dant $x^2 = \frac{t^4}{tt + ppuu}$. Hic ipsius x^2 valor si in illa aequatione substituitur, proueniet $tu(pp + 1)(2ptdu + tudp - 2pudt) = p(tt - uu)(p^2 u du - t dt)$. Ponatur $p = \frac{qt}{uu}$ orietur ista aequatio $\frac{t u dq}{q} = \frac{(tt - uu)(q^2 t^3 du + u^3 dt)}{q^2 t^4 + u^4}$ a cuius aequationis constructione vel separatione ipsius q ab u et t , pendet constructio curuae quaesitae.

§. 36. Habeat exempli causa AR ad AS rationem datam, seu sint omnes ellipses inter se similes erit $u = nt$; atque generalis aequatio abibit in hanc $\frac{dq}{q} = \frac{(1 - nn)(q^2 dt + n^2 dt)}{q^2 t + n^4 t}$, in qua variables t et q separari possunt, prodibit namque $\frac{(1 - nn)dt}{t} = \frac{(q^2 + n^4)dq}{q(q^2 + n^2)} = \frac{n^2 dq}{q} + \frac{(1 - n^2)q dq}{q^2 + n^2}$, quae integrata dat $(\frac{t}{q^2 + n^2})^{1 - nn} = Cq^{n^2}$ seu $t = aq^{\frac{n^2}{1 - n^2}} V(q^2 + n^2)$. Fiet ergo $u = naq^{\frac{n^2}{1 - n^2}} V(q^2 + n^2)$ et $x = naq^{\frac{n^2}{1 - n^2}}$ et $y = qx$. Inter x et y ergo elicitur ista aequatio $x = b^{1 - n^2} y^{n^2}$ pro curuis parabolicis; quod congruit cum iis, quae de traiectionibus orthogonalibus iam pridem sunt detecta.

§. 37. Quando in astronomia physica ex data vi centripeta curua determinatur, quam corpus proiectum descri-

DE CONSTRUCTIONE AEQUATIONVM. 81

scribit, peruenitur statim ad aequationem inter distantiam corporis a centro virium et perpendicularum ex centro in tangentem curuae demissum. Difficiliter autem ex tali aequatione cognosci potest, vtrum curua descripta sit algebraica an transcendens; difficilius vero est aequationem inter coordinatas orthogonales simplicissimam inuenire. Methodo vero nostra haecenus vsitata haec quaestio facile expeditur.

§. 38. Sit centrum virium A et curua a corpore Figura 3. projecto descripta BM; ponatur distantia AM = t et in tangentem MT ex A demissum perpendicularum AT = u, sitque curuae natura aequatione inter t et u expressa. In axe per A prohibito ducto sit abscissa AP = x, applicata PM = y, et dy = p dx; erit t = √(x² + y²) et u = $\frac{y - px}{\sqrt{1 + pp}}$. Haec posterior aequatio vero differentiatia dat $du\sqrt{1 + pp} + \frac{u p dp}{\sqrt{1 + pp}} = -x dp$, vnde erit $x = \frac{-du\sqrt{1 + pp}}{dp} - \frac{pu}{\sqrt{1 + pp}}$ et $y = \frac{-pdu\sqrt{1 + pp}}{dp} + \frac{u}{\sqrt{1 + pp}}$.

§. 39. Substituantur hi ipsorum x et y valores in aequatione tt = x² + y², quo facto habebitur tt = u² + $\frac{du^2(1 + pp)^2}{dp^2}$, vnde oritur $\frac{dp}{1 + pp} + \frac{du}{\sqrt{tt - uu}} = 0$.

Denotet $\int \frac{du}{\sqrt{tt - uu}}$ arcum cuius tangens est q existente sinu toto = 1; erit Ap + Aq = Ab denotante A arcum cuius tangens est quantitas adiuncta.

Quocirca erit $p = \frac{b - q}{1 + bq}$, et $\sqrt{1 + pp} = \frac{\sqrt{(1 + bb)(1 + qq)}}{1 + bq}$.

Cum autem sit $\frac{du}{dp} = \frac{-\sqrt{tt - uu}}{1 + pp} = \frac{-(1 + bq)^2 \sqrt{tt - uu}}{(1 + bb)(1 + qq)}$ erit $x = \frac{(1 + bq)\sqrt{tt - uu} - (b - q)u}{\sqrt{(1 + bb)(1 + qq)}}$ atque $y = \frac{(b - q)\sqrt{tt - uu} + (1 + bq)u}{\sqrt{(1 + bb)(1 + qq)}}$.

Tom. VIII.

L

§. 40.

§2 DE CONSTRUCTIONE AEQUATIONVM.

§. 40. Quoties ergo aequatio inter t et u est algebraica simulque ita comparata, vt $\int \frac{du}{\sqrt{(t-u)}}$ denotet arcum circuli, cuius tangens algebraice potest exhiberi; toties curua a corpore descripta erit algebraica, eiusque aequatio inter coordinatas orthogonales algebraica per inuentas formulas inuenitur.

§. 41. Si detur relatio inter radium osculi MO et partem eius MN seu normalem aequatione quacunque, aequatio inter coordinatas AP , PM hac ratione poterit inueniri, ex qua statim appareat quibus casibus curua fiat algebraica. Sit nempe $MN = t$ et $MO = u$ dataque sit aequatio quaecunque inter t et u ; Ponatur $AP = x$, $PM = y$ atque $dy = p dx$. Erit ergo elementum curuae $= dx \sqrt{(1+p^2)}$ et $ddy = dp dx$ posito dx constante. Ex his igitur erit $MN = t = y \sqrt{(1+pp)}$ et

$$MO = u = \frac{-dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}. \quad \text{Ex quarum aequationum po-}$$

steriore fit $dx = \frac{-u dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$; prior differentiatu dat dy

$$= p dx = \frac{dt + pp dt - pt dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}. \quad \text{His ergo aequationibus}$$

coniunctis habebitur $pu dp = pt dp - dt - pp dt$.

§. 42. Aequatio haec inuenta, quia u per t dari ponitur, admittit variarum separationem, ab it enim in hanc $\frac{p dp}{1+pp} = \frac{dt}{t-u}$, cuius integralis est $\int \sqrt{(1+pp)} = \int \frac{dt}{t-u}$. Sit $\int \frac{dt}{t-u} = lq$ erit $\sqrt{(1+pp)} = q$ et $y = \frac{t}{q}$. Hinc ergo porro est $dy = \frac{q dt - t dq}{qq} = p dx = dx \sqrt{(qq-1)}$; ideoque

ideoque $x = \int \frac{qdt - t dq}{qq\sqrt{qq-1}}$. Ex quo perspicitur, vt curua AM fiat algebraica, duo requiri, primo scilicet vt $\int \frac{dt}{t}$ logarithmis possit exhiberi, atque tum, vt $\frac{qdt - t dq}{qq\sqrt{qq-1}}$ integrationem admittat.

§. 43. Sit MO multiplum ipsius MN seu $u = mt$, erit $q = a^{m-1}t^{1-m}$ atque $y = \frac{t^m}{a^{m-1}}$. Erit autem porro

$$dy = \frac{mt^{m-1} dt}{a^{m-1}} = p dx = dx \sqrt{(a^{2m-2}t^{2-2m} - 1)}, \text{ vnde fit}$$

$$dx = \frac{mt^{2m-2} dt}{a^{m-1} \sqrt{(a^{2m-2}t^{2m-2} - 1)}} \text{ atque } x = \int \frac{mt^{2m-2} dt}{a^{m-1} \sqrt{(a^{2m-2}t^{2m-2} - 1)}}$$

Ex quo perspicitur curuam fore algebraicam si haec formula fuerit integrabilis; hoc autem euenit, quoties vel $\frac{m}{m-1}$ fuerit numerus impar affirmatiuus seu $m = \frac{2i+1}{2i}$, vel $\frac{m}{m-1}$ numerus par affirmatiuus seu $m = \frac{2i+1}{2i+2}$ denotante i numerum integrum affirmatiuum. Casus autem quo $m = 1$ dat $t = u$ atque $dt = 0$ seu $t = u =$ constanti, ex quo cognoscitur curuam esse circulum.

§. 44. Data sit nunc aequatio quaecunque inter arcum AM et radium osculi MO, ex qua determinari debeat aequatio inter coordinatas AP et PM. Quod antequam quomodo inueniendum sit ostendam, obseruari conuenit hanc curuas exprimendi rationem per aequationem inter arcum et radium osculi maxime ad curuas cognoscendas esse accommodatam. Aequatio enim inter coordinatas orthogonales, vel inter radium et perpendicularum in tangentem tam varias et diuersas formas

§4 DE CONSTRUCTIONE AEQUATIONVM.

sumendis aliis axibus aliisque abscissarum initiis induere potest, vt, ad quamnam curuam pertineat, quamuis curua sit notissima, saepe difficulter perspici possit. Aequatio vero quae inter curuam et radium osculi exhibetur pro diuersis tantum punctis, in quibus curuae initium ponitur, variari potest, quae tamen varietas facillime cognoscitur. Si igitur consuetum esset naturam curuarum per huiusmodi aequationes indicare, difficultas commemorata quidem tolleretur, at vtrum curua esset algebraica an transcendens non tam facile appareret. Huic vero incommodo sequenti modo occurreretur.

§. 45. Sit arcus $AM = s$ et radius osculi $MO = r$ dataque sit aequatio quaecunque inter s et r . Ponantur $AP = x$, $PM = y$ sitque $dy = p dx$; hisque positis erit $ds = dx \sqrt{pp + 1}$ et $r = \frac{-dx(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}$. Ex illa vero aequatione est $\dot{dx} = \frac{ds}{\sqrt{pp+1}}$, ex hac autem $dx = \frac{-r dp}{(pp+1)^{\frac{3}{2}}}$. Quamobrem proueniet haec aequatio $ds(pp+1) = -r dp$ seu $\frac{ds}{r} = \frac{dp}{1+pp}$. Denotet $\int \frac{ds}{r}$ arcum circuli cuius tangens sit q posito radio 1; eritque $At. b - At. q = At. p$; vnde fit $p = \frac{b-q}{1+bq}$ et $\sqrt{pp+1} = \frac{\sqrt{(1+bb)(1+qq)}}{1+bq}$. Ex his oritur $dx = \frac{(1+bq)ds}{\sqrt{(1+bb)(1+qq)}}$ et $dy = \frac{(b-q)ds}{\sqrt{(1+bb)(1+qq)}}$. Vnde intelligitur si primo $\int \frac{ds}{r}$ denotet arcum circuli cuius tangens algebraice per q posuit exhiberi; atque deinde tam $\frac{ds}{\sqrt{(1+qq)}}$ quam $\frac{q ds}{\sqrt{(1+qq)}}$ integrationem admittat fore curuam algebraicam.

§. 46.

§. 46. Sin autem $\frac{ds}{r}$ absolute potest integrari, fieri quoque potest vt curua sit algebraica: vt fit $\int \frac{ds}{r} = v$, erit At. $p = b - v$ et $p = t. A(b - v)$. Ex his fit $x = \int ds \cos. A(b - v)$ et $y = \int ds \sin. A(b - v)$. Quoties ergo haec integralia ita possunt exhiberi vt non nisi $\sin. A(b - v)$ et $\cosin. A(b - v)$ contineant, toties ob $1 = \square \sin. A(b - v) + \square \cos. A(b - v)$ aequatio algebraica inter x et y obtinetur. Vt si fuerit $r = a$ erit $x = a \sin. A(b - v)$ et $y = a \cos. A(b - v)$ ideoque $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ seu $y^2 = a^2 - x^2$, aequatio pro circulo cuius radius est $= a$.

SOLVTIO PROBLEMATVM RECTIFICATIONEM ELLIPSIS

REQVIRENTIVM.

AVCTORE

Leonb. Eulero.

§. I.

Tabula VI.

Agitata iam superiori seculo inter Geometras sunt huiusmodi problemata, in quibus linea curua requirebatur, quae ab infinitis positione datis curuis arcus aequales abscinderet. Communicaerunt etiam illo tempore Cl. Cl. Geometrae elegantes solutiones pro casu, quo curuae positione datae inter se sunt similes, vti cum ab infinitis circulis, vel parabolis arcus aequales abscindendi essent. Nemo autem, quantum constat, vltius est progressus, neque quisquam pro curuis dissimilibus problemati satisfecit, etiamsi iam tum quaestio de infinitis ellipsis proponeretur. Atque etiamnum, cum Insigni Geometrae per litteras significassem, meaequationem pro curua, quae ab infinitis ellipsis dissimilibus arcus aequales abscinderet, inuenisse; ille mihi respondit huius problematis solutionem in sua non esse potestate, meque simul rogauit, vt meam solutionem in non contemnendum analyseos augmentum communicarem.

§. 2. Huius autem quaestionis summa difficultas in hoc consistit, quod diuersarum et dissimilium ellipsium rectificationes a se mutuo non pendeant. Hanc enim
ob

Fig. 1.

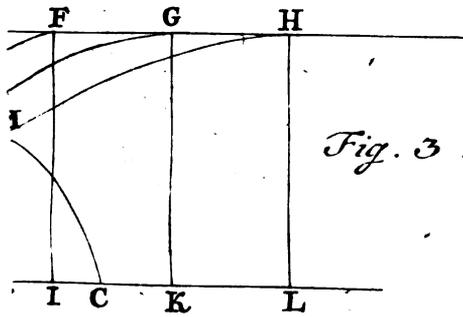
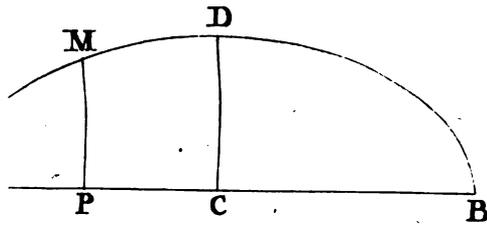


Fig. 3.

Fig. 2.

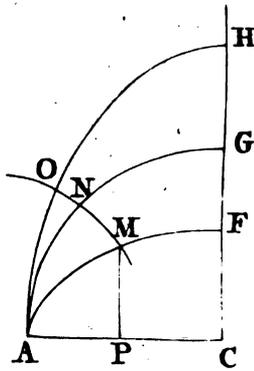
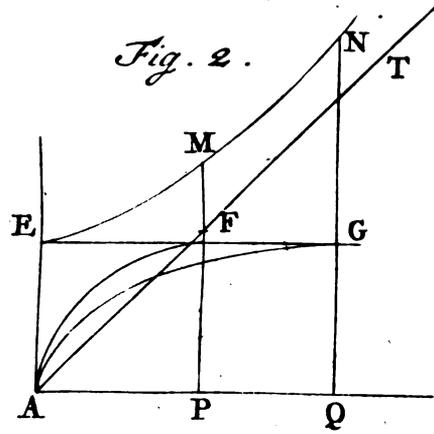


Fig. 4.

ob causam curvae ab infinitis ellipsis arcus aequales abscindendis aequationem inuentu maxime difficilem esse oportet, eo quod etiam concessa vnus ellipsis rectificatione, reliquarum tamen omnium rectificatio ab ista non pendeat. Deinde methodus, qua in huiusmodi problematis vti solent, ita est comparata, vt tantum ad curuas similes accommodari possit; pro curuis dissimilibus autem nullam afferat vtilitatem.

§. 3. Quod autem mihi primum viam ad huiusmodi difficilia problemata patefecit, est praecipue vniuersalis mea series summandi methodus. Hac enim inuenta statim aequationem differentialem, in qua indeterminatae nullo pacto a se inuicem separari possunt, ope rectificationis ellipsium dissimilium construxi; atque paulo post maxime agitatae aequationis Riccatianae constructionem et resolutionem communicavi.

§. 4. Postmodum autem, cum haec per series operandi methodus nimis operosa et non satis genuina videretur; in aliam magis naturalem methodum, et huiusmodi quaestionibus magis accommodatam inquisui; atque tandem ex voto obtinui, ita vt eius beneficio non solum priora problemata, quae serierum ope resolveram, sed etiam innumera alia, ad quae tractanda series non sufficiunt, perficere potuerim. Methodum etiam hanc fuse exposui in dissertatione de infinitis curuis eiusdem generis anno praecedente proposita; quia vero ne nimis essem prolixus, nulla adieci exempla, non satis apparet, quam late ea pateat, quamque amplum in re analytica aperiat campum.

§. 5.

§. 5. Quo igitur huius methodi vis et vtilitas melius percipiatur, hac dissertatione eam ad infinitas ellipses accommodabo, atque non solum monstrabo, quomodo ab infinitis ellipsis arcus aequales abscindi debeant, sed etiam innumerabilium tam primi quam secundi gradus aequationum differentialium resolutionem ope rectificationis ellipsium perficere docebo.

§. 6. Quod enim ad curuam, quae ab infinitis ellipsis arcus aequales abscindat, attinet, eius constructio eo ipso est facilis, quod ope rectificationis curuarum quae facillime describi possunt, perfici queat. Atque hanc ipsam constructionem longe anteferendam esse censeo aliis per quadraturas curuarum peractis constructionibus. Non igitur tam illius curuae constructio requiritur, quam eius aequatio, quo quales aequationes tam facile construi queant cognoscatur. Hanc ob rem analysis non parum augmenti accipiet, si illae aequationes proferantur, quae ope rectificationis ellipsium constructionem admittunt.

Figura 1.

§. 7. Considero igitur primum infinitas ellipses $AMDB$, quae omnes alterum axem, cuius semissis est CD , habeant eundem, axes vero transuersos AB diuersos. Si nunc vel ab his omnibus ellipsis vel arcus aequales sint abscindendi, vel in data ratione inaequales, vel curua sit inuenienda, cuius constructio ope harum ellipsium quomodocunque praescribitur; ad talia problemata omnia soluenda opus est, vt aequatio habeatur inter arcum AM , abscissam AP et axem AB , in qua hae tres quantitates insint tanquam variables.

§. 8.

RECTIFICATIONEM ELLIPSIS REQVIR. 89

§. 8. Huiusmodi ergo problematum solutio perficietur, si quaeratur aequatio modularis, quemadmodum in citata dissertatione de curvis infinitis eiusdem generis docui, inter arcum AM , et abscissam AP et axem AB quoque variabilem. Quo igitur ad huiusmodi aequationem modularem perueniam pono abscissam $AP = t$; applicatam $PM = u$; arcum $AM = z$; semiaxem variabilem $AC = a$; semiaxem constantem $CD = c$. His vero positis erit $u = \frac{c}{a} \sqrt{(2at - tt)}$ seu posito $t = ax$ erit $u = c \sqrt{(2x - xx)}$; atque $dt = a dx$ et $du = \frac{c dx - cx dx}{\sqrt{(2x - xx)}}$. Ex his igitur fiet $dz = \frac{dx \sqrt{(2a^2x - a^2x^2 + c^2 - 2c^2x + c^2x^2)}}{\sqrt{(2x - xx)}}$, positoque $a^2 - c^2 = b^2$ erit $z = \int \frac{dx \sqrt{[c^2 + b^2(2x - xx)]}}{\sqrt{(2x - xx)}}$.

§. 9. Integrali huic inuento aequatur ergo z , si integratio fiat posito tantum x variabili, b vero et c constantibus. Praeterea in integratione talis addi debet constans, vt euanescat z posito $x = 0$. At quia aequatio desideratur in qua a seu eius loco b aequae tanquam variabilis insit ac x et z ; quaeritur aequatio differentialis quae proditura esset, si $\int \frac{dx \sqrt{[c^2 + b^2(2x - xx)]}}{\sqrt{(2x - xx)}}$ denuo differentietur, posito praeter x etiam b variabili.

§. 10. Ponatur nunc secundum methodum anno praeterito traditam x constans et differentietur quantitas $\frac{\sqrt{[cc + bb(2x - xx)]}}{\sqrt{(2x - xx)}}$ prodibit $\frac{b db \sqrt{(2x - xx)}}{\sqrt{[cc + bb(2x - xx)]}}$. Quamobrem posito quoque b variabili erit $dz = \frac{dx \sqrt{[cc + bb(2x - xx)]}}{\sqrt{(2x - xx)}}$ + $db \int \frac{b dx \sqrt{(2x - xx)}}{\sqrt{[cc + bb(2x - xx)]}}$, quod postremum integrale ita debet accipi vt euanescat posito $x = 0$; in eo vero ite-

Tom. VIII. M rum

rum b tanquam constans inest. Ponatur breuitatis gratia $R = \frac{dz}{db} - \frac{dx\sqrt{cc+bb(2x-xx)}}{db\sqrt{(2x-xx)}}$, erit $R = \int \frac{bdx\sqrt{(2x-xx)}}{\sqrt{cc+bb(2x-xx)}}$.

§. 11. Si nunc integrale, cui R aequatur reduci posset ad integrationem formulae, cui z aequalis est, pro R inueniri posset valor finitus per z ; qui substitutus in altera aequatione daret aequationem modularem quaesitam. Sed hae duae integrationes a se inuicem non pendent, vt facile tentanti animaduertetur. Quamobrem vltius progredi oportet, et vltimam aequationem de nouo differentiari, vti primam, ponendo quoque b variabilem. Inuenietur autem hoc modo $dR = \frac{bdx\sqrt{(2x-xx)}}{\sqrt{cc+bb(2x-xx)}} + db \int \frac{ccdx\sqrt{(2x-xx)}}{[cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}}$, quod integrale iterum ita accipi debet vt euanescat posito $x=0$.

§. 12. Ponatur iterum $S = \frac{dR}{db} - \frac{bdx\sqrt{(2x-xx)}}{db\sqrt{cc+bb(2x-xx)}}$ erit $S = \int \frac{ccdx\sqrt{(2x-xx)}}{[cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}}$; quae formula cum non sit integrabilis, videndum est, num eius integratio ab alterutra praecedentium vel ab vtraque pendeat. Quod quo appareat ponatur $S + \alpha R + \xi z = Q$, vbi α et ξ ab x et z sint quantitates liberae; Q vero vtcunque ex x et b et constantibus composita; debet autem Q talis esse quantitas vt euanescat posito $x=0$. Posito ergo b constante debet esse $dQ = dS + \alpha dR + \xi dz$; vbi in differentiali ipsius Q b tanquam constans considerari debet.

§. 13. At posito b constante est $dS = \frac{ccdx\sqrt{(2x-xx)}}{[cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}}}$

et

RECTIFICATIONEM ELLIPSIS REQUIR. 91

$$\text{et } dR = \frac{b dx \sqrt{(2x-xx)}}{\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}} \text{ et } dz = \frac{dx \sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}{\sqrt{(2x-xx)}}$$

$$\text{Hanc ob rem erit } \frac{dQ}{dx} = [cc(2x-xx) + abcc(2x-xx) + ab^2(2x-xx)^2 + \mathfrak{E}c^4 + 2\mathfrak{E}b^2c^2(2x-xx) + \mathfrak{E}b^4$$

$$(2x-xx)^2] : [cc+bb(2x-xx)]^{\frac{3}{2}} \sqrt{(2x-xx)}. \text{ Po-}$$

$$\text{natur ad similem formam obtinendam } Q = \frac{(\gamma x + \delta) \sqrt{(2x-xx)}}{\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}$$

qui valor per se euanescit posito $x=0$.

§. 14. Differentietur nunc Q posito tantum x variabili erit $\frac{dQ}{dx} = [\gamma cc(2x-xx) + \gamma bb(2x-xx)^2 + \gamma ccx + \delta cc - \gamma ccx^2 - \delta ccx] : (cc+bb(cc+bb(2x-xx)))^{\frac{3}{2}} \sqrt{(2x-xx)}$. Quia ergo denominatores iam sunt inter se aequales, fiant numeratores quoque aequales, aequandis terminis in quibus ipsius x similes sunt dimensiones; erit

I. $\gamma bb = ab^2 + \mathfrak{E}b^4;$

II. $\gamma b^2 = ab^2 + \mathfrak{E}b^4;$

III. $4\gamma bb - 2\gamma cc = 4ab^2 + 4\mathfrak{E}b^4 - cc - abcc - 2\mathfrak{E}b^2c^2;$

IV. $3\gamma cc - \delta cc = 2cc + 2abcc + 4\mathfrak{E}b^2c^2;$ et

V. $\delta cc = \mathfrak{E}c^4.$

Hinc inuenitur $\alpha = \frac{1}{b}; \mathfrak{E} = \frac{-1}{b^2+c^2}; \gamma = \frac{cc}{bb+cc}$ et $\delta = \frac{cc}{bb+cc}$.

§. 15. His ergo valoribus substitutis prodibit $\frac{cc(x-1)\sqrt{(2x-xx)}}{(bb+cc)\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}} = S + \frac{R}{b} - \frac{z}{b^2+c^2}$. Quia autem est $R = \frac{dz}{db} - \frac{dx\sqrt{[cc+bb(2x+xx)]}}{db\sqrt{(2x-xx)}}$ et $S = \frac{dR}{db} - \frac{bdx\sqrt{(2x-xx)}}{db\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}$ M 2 atque

atque $x = \frac{t}{a}$ et $bb = a^2 - c^2$; atque ideo $bb + cc = a^2$;
 $dx = \frac{adt - tda}{a^2}$, et $db = \frac{ada}{b}$, erit $Q = \frac{cc(t-a)\sqrt{(2at-tt)}}{a^2\sqrt{[a^2c^2 + (a^2-c^2)(2at-tt)]}}$,
 et $\frac{R}{b} = \frac{dz}{ada} - \frac{(aditda)\sqrt{[a^2-c^2 + (a^2-c^2)(2at-tt)]}}{a^2da\sqrt{(2at-tt)}}$ atque $S = \frac{c^2dz}{a^2da}$
 $+ \frac{(a^2-c^2)d\frac{dz}{da} - (a^2-c^2)d\frac{dt}{da}\sqrt{a^2c^2 + (a^2-c^2)(2at-tt)}}{a^2da} + \frac{(2a^2-3c^2)(adt-tda)}{a^3da}$
 $\sqrt{\frac{a^2c^2 + (a^2-c^2)(2at-tt)}{2at-tt}} - \frac{(2aa-2cc)(adt-tda)}{a^2da} \sqrt{\frac{2at-tt}{a^2c^2 + (a^2-c^2)(2at-tt)}}$
 $+ \frac{cc(a-t)(a^2-c^2)(adt-tda)^2}{a^3da^2(2at-tt)^{\frac{3}{2}}\sqrt{[a^2c^2 + (a^2-c^2)(2at-tt)]}}$.

§. 16. Ne autem in nimis prolixos calculos inci-
 damus, retineamus literas b, x , et z , erit $S = \frac{1}{db} d. \frac{dz}{db} -$
 $\frac{1}{db} d. \frac{dx}{db} \sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}} - \frac{2b dx}{db} \sqrt{\frac{cx-xx}{cc+bb(2x-xx)}} +$
 $\frac{cc dx^2 (1-x)}{db^2 (2x-xx)^{\frac{3}{2}} \sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}}$. His ergo loco S et R
 substitutis habebitur aequatio modularis ista, $\frac{z}{bb+cc} =$
 $\frac{cc(1-x)\sqrt{(2x-xx)}}{(bb+cc)\sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}} - \frac{dx}{bdb} \sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}} - \frac{2b dx}{db} \sqrt{\frac{cx-xx}{cc+bb(2x-xx)}}$
 $+ \frac{cc dx^2 (1-x)}{db^2 (2x-xx)^{\frac{3}{2}} \sqrt{[cc+bb(2x-xx)]}} + \frac{dz}{bdb} + \frac{1}{db} d. \frac{dx}{db}$
 $- \frac{1}{db} d. \frac{dx}{db} \sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}}$. Atque haec est ae-
 quatio differentialis secundi gradus, in qua z, x et b aequae
 variables sunt positae. Ex hac autem aequatione se-
 quentia problemata soluantur.

Problema I.

Figura 2.

§. 17. Si curua EMN ad axem APQ ita con-
 struatur, ut eius applicata quaeque PM aequalis sit qua-
 dranti AF ellipsis, cuius semiaxium coniugatorum alter sit
 ipsa

RECTIFICATIONEM ELLIPSIS REQVIR. 93

ipsa abscissa AP alter vero constans AE seu PF: inuenire aequationem inter abscissam AP et applicatam PM naturam huius curuae exprimentem.

Solutio.

Perpicuum est curuam EMN transire per punctum E, quoniam euanescente semiaxe ellipsis AP, quadrans ellipsis abit in alterum semiaxem constantem AE. Recta porro AT ad angulum semirectum cum AP inclinata erit asymptotos curuae EMN, quia posito semiaxe AP infinite magno quadrans ellipticus huic ipsi semiaxi fit aequalis. Ad aequationem autem inueniendam fit $AE = c$; $AP = t$ et $PM = AF = z$; atque cum abscissa AP respectu ellipsis AF fit aequalis semiaxi eius, erit haec quaestio casus specialis aequationis inuentae, quo est $t = a$, seu $x = 1$. Posito ergo $x = 1$, abibit superior aequatio in hanc: $\frac{z}{bb+cc} = \frac{dz}{bdb} + \frac{1}{db} d. \frac{dx}{db}$. At quia est $bb = a^2 - c^2 = t^2 - c^2$ erit $bdb = tdt$, et $db = \frac{tdt}{\sqrt{(t^2 - c^2)}}$. Atque posito dt constante erit $ddb = \frac{ccdt^2}{(tt - cc)^{\frac{3}{2}}}$. Hinc ergo fit $d. \frac{dz}{db} = \frac{ddz\sqrt{(tt - cc)}}{tdt} + \frac{ccdz}{tt\sqrt{(tt - cc)}}$, vnde oritur haec aequatio $\frac{z}{tt} = \frac{dz}{tdt} + \frac{ddz(tt - cc)}{ttdt} + \frac{ccdz}{t^2 dt}$, seu $tzdt^2 = (tt + cc)dt dz + tddz(tt - cc)$, quae est aequatio quaesita pro curua proposita. Q. E. I.

§. 18. Aequationem hanc sequenti modo ad differentialia primi gradus reduco ponendo $z = e^{sdt}$ existente $le = 1$; erit ergo $dz = e^{sdt} s dt$ et $ddz = e^{sdt} (ds dt + s s dt^2)$. Quibus valoribus substituendis oritur sequens aequatio $t dt = (t^2 + c^2) s dt + t (tt - cc) ds + t s^2 (t^2 - c^2) dt$; quae ita est comparata, vt nullis adhuc cognitis artificiis indeterminatae a se inuicem separari possint. Interim vero constructio huius aequationis ope rectificationis ellipsis constat.

§. 19. Ne vero cuiquam dubium oriatur quod posito $t = 0$ fieri debeat $z = c$; cum tamen superiores integrationes ita accipi debeant, vt posito $x = 0$ fiat quoque $z = 0$. Monendum est quod quidem in hoc casu quo $z = c$ fit $t = 0$, non vero est quoque $x = 0$; quia est $x = \frac{t}{a}$ et $t = a$, ideoque $x = 1$, ita vt in hoc casu nusquam sit $x = 0$, propterea z ypsiam euanescere debeat.

§. 20. Quemadmodum in hoc problemate posuimus $t = a$; ita quoque quaecunque aequatio inter t et a et constantes potest accipi, et curua EMN definiri ita vt quaeuis applicata PM aequalis sit respondenti arcui elliptico AF. Habebitur enim loco superioris aequationis haec aequatio $\frac{z}{tt} = \frac{(tt+cc)dz}{t^2 dt} + \frac{(t-cc)ddz}{tt dt^2} + T$, denotante T eam ipsius t functionem, quae ex terminis aequationis generalis, in quibus non inest z oritur, si loco x ponatur $\frac{t}{a}$ et loco b eius valor $\sqrt{a^2 - c^2}$ atque loco a eius valor in t ex aequatione inter a et t assumpta substituatur. Neque vero haec aequatio tractatu est difficilior

facillior quam præcedens, in qua terminus T deest; reduci enim potest hæc æquatio ad illam, vti iam alibi ostendi.

Problema 2.

Figura 3.

§. 21. Datis infinitis ellipsis AOF, ANG, AMH, quarum alter semiaxis AE sit constans, alter vero variabilis ut AI, AK, et AL; inuenire æquationem pro curua BONMC, quæ ab his omnibus ellipsis arcus æquales AO, AN, AM abscindat.

Solutio.

Ducta ad axem AC quacunq̃ applicata MP curuæ quaesitæ; sit AP = r, PM = u et AE = c; Ellipsis vero AMH semiaxis variabilis AI sit = a; et arcus abscissus AM qui est constantis quantitatis sit = f.

Positis nunc $x = \frac{r}{a}$; et $b = \sqrt{a^2 + c^2}$ erit $z = f$; et $u = c\sqrt{2x - xx}$. His igitur substitutis generalis æquatio

$$\frac{f}{bb+cc} = \frac{cc(i-x)\sqrt{(2x-xx)}}{(bb+cc)\sqrt{cc+bb(2x-xx)}}$$

$$-\frac{dx}{bdb} \sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}} = \frac{zbdx}{db} \sqrt{\frac{2x-xx}{cc+b(2x-xx)}}$$

$$+\frac{ccdx(i-x)}{db^2(2x-xx)^{\frac{3}{2}}\sqrt{cc+bb(2x-xx)}} = \frac{1}{db} d \frac{dx}{db}$$

$$\sqrt{\frac{cc+bb(2x-xx)}{2x-xx}}. \text{ Quia vero est } 2x-xx = \frac{a^2}{c^2}$$

multiplicetur vbique per $\sqrt{cc+bb(2x-xx)}$ et prodibit $\frac{f\sqrt{cc+bb(2x-xx)}}{a^2c} = \frac{cc(i-x)}{a^2} - \frac{b^2dx}{budd} - \frac{\sqrt{3}bud}{odb}$

$$+\frac{c^3dx^2(i-x)}{u^3db^2} - \frac{(c^4+bbuu)}{cudb} d \frac{dx}{db}$$

In hac æquatione si loco b substi-

substituatur $\frac{\sqrt{(t-ccxz)}}{x}$ et propter $x = \frac{c-\sqrt{(cc-uz)}}{c}$ prodibit tandem aequatio differentialis secundi gradus inter t et u , nempe coordinatas curuae quaesitae. Q. E. I.

Figura 4

§. 22. At si infinitae ellipfes AMF, ANG et AOH omnes habeant axem horizontalem communem ita vt C sit centrum omnium, pro hoc casu peculiarem aequationem modularem erui oportet, antequam curuam MNO definire licet, quae ab omnibus arcus aequales AM, AN, AO abscindat. Sit igitur AC=c, CF=a, AP=t, PM=u et arcus AM=z. His positis erit $u = \frac{c}{c}$ $\sqrt{(2ct-tt)}$ et $du = \frac{acdt-ctdt}{c\sqrt{(2ct-tt)}}$ ideoque fiet $z = \int \frac{dt}{c} \sqrt{\frac{a^2z^2+(cc-aa)(cct-tt)}{2ct-tt}} = \int \frac{du}{da} \sqrt{\frac{aa-uu}{a^2-a^2u^2+ccuu}}$, atque posito $u = ay$ erit $z = \int dy \sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1-yy})}$, quod integrale ita debet accipi vt z euanescat posito $y = 0$.

§. 23. Si haec demum differentietur posito praeter y et a variabili habebitur $dz = dy \sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1-yy})} + da \int \frac{ady}{\sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1-yy})}}$ atque posito $\frac{dz}{da} - \frac{dy}{da} \sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1-yy})} = R$ erit $R = \int \frac{ady}{\sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1-yy})}}$. Hinc eodem modo fiet $\frac{dR}{da} = \frac{ady}{\sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1-yy})}} + da \int \frac{ccyydy}{(1-yy)(a^2 + \frac{ccyy}{1-yy})^{\frac{3}{2}}}$ seu $\frac{dR}{da} - \frac{ady}{\sqrt{(a^2 + \frac{ccyy}{1-yy})}} = \int \frac{ccyydy}{(1-yy)(a^2 + \frac{ccyy}{1-yy})^{\frac{3}{2}}} = S$ breuitatis gratia. Ponatur nunc $S + aR + \mathcal{E}z = Q$; vbi a et \mathcal{E} sunt quantitates ab y liberae; Q vero functio ipsarum

ipfarum a et y quae euanescat posito $y=0$. Nunc ad α et β et Q inuenienda differentietur haec aequatio po-

$$\begin{aligned} \text{futo } a \text{ constante, erit } & \frac{ccyydy\sqrt{(1-yy)}}{[aa(1-yy)+ccyy]^{\frac{3}{2}}} + \\ & \frac{aady\sqrt{(1-yy)}}{\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}} + \frac{\beta dy\sqrt{[a^2(1-yy)+ccyy]}}{\sqrt{(1-yy)}} \\ = & (ccyy - ccy^4 + aa^3 - 2aa^2y^2 + aa^2y^4 + aaccyy - aaccy^4 + \\ & \beta a^3 - 2\beta a^2y^2 + \beta a^2y^4 + \beta a^2c^2y^2 - 2\beta a^2c^2y^4 + \beta c^4y^4) \\ dy : & (a^2(1-yy) + ccyy)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(1-yy)} = dQ. \end{aligned}$$

§. 24. Sit $Q = \frac{yy\sqrt{(1-yy)}}{\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}}$; sumtoque huius differentiali posito a constante, et aequatis terminis homologis erit $\alpha a + \beta a^2 = \gamma$; $\beta cc = -\gamma$; et $1 + \alpha a + 2\beta a^2 = 0$. Ex his fit $\alpha = \frac{a^2+c^2}{a(a^2-cc)}$; $\beta = \frac{-1}{a^2-c^2}$ et $\gamma = \frac{cc}{aa-cc}$. Hisque valoribus substitutis peruenietur tandem ad hanc aequationem modularem: $\frac{z}{aa-cc} - \frac{(a^2+c^2)dz}{ada(a^2-c^2)}$ $+ \frac{1}{da} d. \frac{dz}{da} - \frac{ccyy\sqrt{(1-yy)}}{(a^2-c^2)\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}} - \frac{(a^2+c^2)dy\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}}{a(a^2-c^2)da\sqrt{(1-yy)}}$ $\frac{2ady\sqrt{(1-yy)}}{da\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}} - \frac{ccydy^2}{da^2(1-yy)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(a^2(1-yy)+ccyy)}}$ $- \frac{1}{da} d. \frac{dy}{da} \sqrt{\frac{a^2(1-yy)+ccyy}{1-yy}}$, in qua a aequae sumtum est variabile ac y et z , estque $y = \frac{u}{a}$.

§. 25. Si nunc ex infinitis ellipsis, quarum omnium Figura 2. alter axis est constans $2c$; alter variabilis $2a$; construat-
 tur curua EMN hac lege vt cuicumque abscissae AP= a
 respondeat applicata PM, quae aequalis est quadranti el-
 liptico sub semiaxibus a et c . Hoc ergo casu erit $u=a$
 et $y=1$, atque PM= z . Quare posito da constanti
 Tom. VIII. N ha-

98 SOLVT. PROBLEM. RECTIF. ELLIPS. REQVR.

habebitur pro curua EMN haec aequatio: $azda^2 = (a^2 + c^2)dadz + a(aa - cc)ddz$. Quae aequatio est ea ipsa quam in solutione problematis I. (§. 17.) inuenimus; congruit enim hic casus cum illo problemate: atque quod ibi erat t hic est a .

Problema 3.

Figura 4. §. 26. *Descriptis infinitis ellipsis AMF, ANG, AOH commune centrum C communemque verticem A habentibus; inuenire curuam MNO quae ab his omnibus ellipsis arcus aequales AM, AN, AO abscindat.*

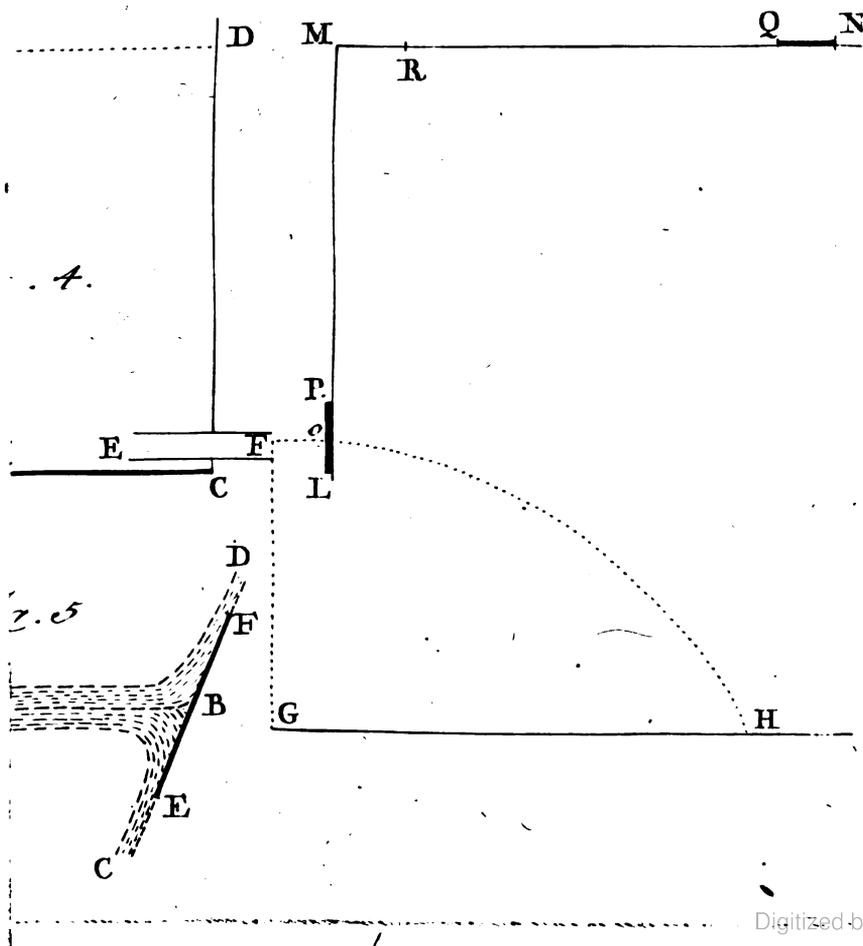
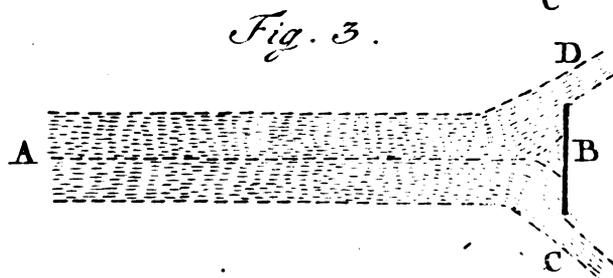
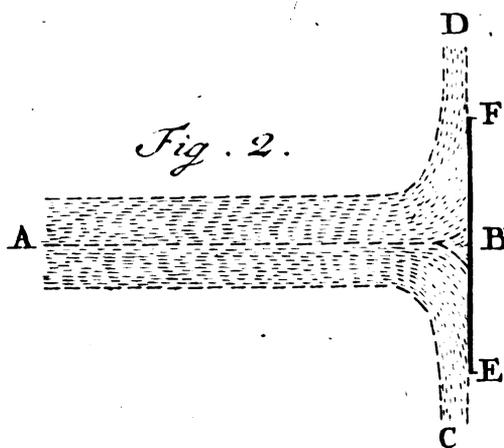
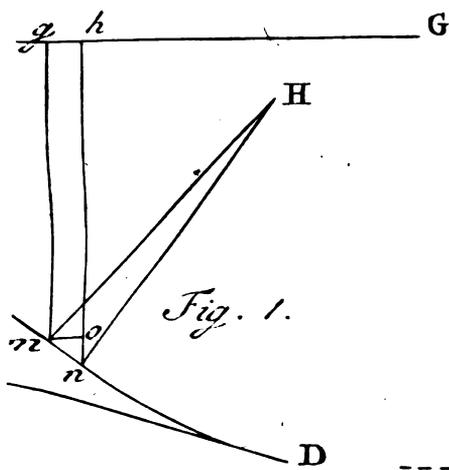
Solutio.

Posito omnium harum ellipsium semiaxe constante $AC = c$; ellipsisque cuiusuis AMF semiaxe altero variabili $CF = a$; atque curuae MNO abscissa $AP = t$; et applicata $PM = u$. Fiat $\frac{u}{a} = y$; sitque longitudo $= f$ cui omnes arcus AM, AN, aequales sumantur. His positis et cum antecedentibus collatis erit $z = f$; ideoque

$$\frac{f}{a^2 - c^2} + \frac{ccyy\sqrt{(1-yy)}}{(a^2 - c^2)\sqrt{(a^2(1-yy) + ccyy)}} + \frac{(a^2 + c^2)dy\sqrt{(a^2(1-yy) + ccyy)}}{a(a^2 - c^2)da\sqrt{(1-yy)}} + \frac{2ady\sqrt{(1-yy)}}{da\sqrt{(a^2(1-yy) + ccyy)}} + \frac{ccydy^2}{da^2(1-yy)^{\frac{3}{2}}\sqrt{(a^2(1-yy) + ccyy)}} + \frac{1}{da}d.\frac{dy}{da}\sqrt{\frac{a^2(1-yy) + ccyy}{1-yy}} = 0$$

feu. $\frac{f\sqrt{(1-yy)}}{(a^2 - c^2)\sqrt{(a^2(1-yy) + ccyy)}} + \frac{ccyy(1-yy)}{(a^2 - c^2)(a^2(1-yy) + ccyy)} + \frac{(a^2 + c^2)dy}{a(a^2 - c^2)da} + \frac{2ady(1-yy)}{da(a^2(1-yy) + ccyy)} + \frac{ccdy^2}{da^2(1-yy)(a^2(1-yy) + ccyy)} + \frac{1}{da}d.\frac{dy}{da} = 0$. In qua aequatione si loco a ponatur $\frac{u}{y}$ et deinde loco y hic valor $\frac{\sqrt{(2ct - tt')}}{c}$; prodibit aequatio inter coordinatas t et u curuae quaesitae. Q. E. I.

DE



DE
 LEGIBVS QVIBVSDAM MECHANI-
 CIS, QVAS NATVRA CONSTAN-
 TER AFFECTAT, NONDV-
 M DESCRIPTIS, EARVMQVE VSV HY-
 DRODYNAMICO, PRO DETERMINANDA VI
 VENAE AQVEAE CONTRA PLANVM IN-
 CVRRENTIS.

Ab Auctoribus, fallaci inductis experimento, falso aestimata.

AUCTORE
Daniele Bernoulli.

PARS PRIMA.

§. I.

Corpus statum quietis amittit motumque acquirit Tabula VII.
 a pressionibus idem in antecedentia vrgentibus;
 et e contrario a motu ad quietem reducitur a
 pressionibus contranitentibus. Possunt quidem hae pres-
 siones infinitis modis inter se variare, idque quouis tem-
 poris puncto; at nemo est qui non videat, quo maio-
 res sint, eo minori tempore datum velocitatis gradum
 illas in corpore dato generare aut destruere: pression-
 es autem siue vrgentes siue resistentes hic tantum considero
 directas.

Finge iam corpus, cuius massa sit $=m$, quod a
 quiete tempore t obtinuerit velocitatem v , idemque puta
 ulterius directe vrgeri pressione p : nosti fore $mdv = pdt$
 et $mv = \int pdt$: igitur si pro v assumatur praescriptus ali-
 quis velocitatis gradus, definietur inde $\int pdt$: Hac de re

fufius egi in *Comm. Tom. I. pag. 131. et feqq.*, vbi quantitatem *elementarem p dt*, quae productum eft ex preffione in elementum temporis, voce fimplici *preffionis momentanae* indicaui: Eadem hic quoque vtemur atque fic affirmabimus *summam omnium preffionum momentanearum, vtcunque variantium, quae definito corpori definitam velocitatem imprefferint a quiete, femper eandem efle*, ita etiam eadem femper erit nec a priori diuerfa *summa omnium preffionum momentanearum*, quae idem corpus, fimili velocitate motum, contranifu fuo ad quietem reducere poffint.

§. 2. Igitur haud inepte de corpore moto affirmabitur, inefle illi definitam aliquam *preffionum momentanearum* collectarum quantitatem, fuae motus quantitatem, idque eodem iure, quo dicitur, quod corpori moto inefle definita *virium viuorum* quantitas: et funt reuera ambo principia inter fe admodum fimilia; fcis enim quantitatem *virium viuorum* corpori inftarum designari per $\frac{1}{2}mvv$ et efle $\frac{1}{2}mvv = \int p dx$ (designato per dx elemento spatii, quod tempusculo dt percurritur), id eft, = *summae productorum ex spatiolo et preffione*: fi igitur iftud productum voce fimplici *preffionis fpatialis* designemus, mutatis verbis nunc dicemus, *summam omnium preffionum fpatialium vtcunque variantium, quae definito corpori definitam velocitatem imprefferint a quiete, femper eandem efle*: Et hanc proppofitionem, quae proprie ipfam *virium viuorum* conferuationem exprimit, alteri §. 1. expreffae, fimillimam efle fic vides: prima pro fubiecto habet productum ex massa in velocitatem, fecunda productum ex massa in quadratum velocitatis. §. 3.

§. 3. Haec vero ita se habent in corpore simplici: eum plura sunt corpora, vario nexu inter se cohaerentia motuque diuerso agitata, tunc pari ratione, omnibus nunc nota, in illis conseruatur *virium viuarum* in summam collectarum quantitas: sed et aliqua conseruatur ratione, vtut minus generali magisque intricata atque perplexa, motus quantitas: Verum haec nunc missa facio, quia ad institutum nostrum non pertinent: hac enim disertatione ea tantum, quae corpori simplici accidunt, constitui prosequi.

§. 4. Praeter variationes velocitatum, quarum ratione praefatae leges innotuerunt, aliud est mutationum genus, in quo natura pariter leges praescriptas habet generales, quarum cognitio in soluendis problematibus mechanicis haud parum erit utilis: pertinent autem ad mutatas in corpore moto directiones. Nondum pertractatum fuit, quod sciam, ab aliis argumentum, quod adeoque paullo accuratiori explanabo atque commentabor oratione, quamuis sua natura non admodum difficile.

§. 5. Sicuti motus in corpore generatur, non in instanti, sed tempore et continuata pressione, ita quoque directio in corpore moto a pressionibus, sub alia directione applicatis, aliquo temporis interuallo ad datum angulum mutatur. Igitur directionis in corpore moto mutatio aliquid est, quod cum noua in eodem corpore generata velocitate comparari debet: neque certe mutationes, quas a percussione in directione corporis prouenire videmus, considerandae sunt, tanquam quae fiant in instanti, sicuti nec mutationes, quas velocitates sub-

eunt a percussione: notum enim nunc est omnibus, percussionem aliud non esse, quam ingentem pressionem admodum parum durantem. Cum itaque directionis mutatio analoga sit cum motus generatione, e re erit vnus mensuram ad alteram reducere, quo ipso videbimus leges, quas natura post mutatas vtcunque in corpore moto directiones constantissime sequatur.

Directio autem in corpore mutatur vel seruata eadem semper velocitate vel eadem vtcunque mutata. Incipiam a casu priori et quamuis infinitae omnino sint causae mechanicae, quae corpus a via recta continue deflectere possint, non interrupta motus vniuniformitate, attamen vna nobis erit instar omnium, modo data et praescripta via corporis adhibeatur.

§. 6. Igitur fingemus super tabula horizontali canalem data lege incuruatum BD, ad cuius latera corpus moueatur. Sic vtrique satisfiet conditioni; corpus nempe velocitatem seruabit vniuniformem, simulque praescriptam nunquam deseret viam. Hic sunt latera canalis, quae corpus a via recta perpetuo deflectunt, nisi ad curuam perpendiculari, tantusque est nisus iste, quanta corpori inest vis centrifuga, et tanta quoque censa est potentia, quae corpus perpendiculariter ad directionem motus propellat.

Opportunus hic monendi locus est, non sine circumspeditione, potentiam corpus a via recta declinantem, aestimandam esse, proptereaue recte distinguendas ab inuicem esse potentias ad propositum finem vtilis ab inutilibus: In praesenti autem casu, rem recte a nobis deci-

Figura 1.

decisam esse, patet ex eo, quod posito corpore in m sumtaque pro radio osculi linea mH vel nH , possimus latusculo mn substituere filum mH vel nH puncto H affixum, vbi manifestum est, potentiam corpori perpendiculariter ad curuam applicatam idemque a via recta detorquentem, esse aequalem corporis vi centrifugae: haec alio inferius exponendo magis explicabuntur exemplo.

Ducantur porro B et D tangentes BF et CD : hae denotabunt motus directiones pro iisdem punctis B et D , angulus vero DCF is est, quem voco *angulum mutatae directionis*. Sit velocitas corporis ea, quae generatur lapsu libero per altitudinem A : haec autem velocitas erit exprimenda per $\sqrt{2}A$, si tempusculum indicetur a spatiolo diuiso per velocitatem: Denique si potentiam ad curuam perpendicularem multiplicemus per tempusculum, habebimus *potentiam momentaneam* curuae perpendicularem, atque si eadem potentia resoluatur in duas alias coordinatis parallelas et vna quaeuis multiplicetur per tempusculum, obtinebitur *potentia momentanea* in directione axis aut in directione ad axem perpendiculari. His praemissis facilius nunc erit intelligere sequentes propositiones.

Theorema.

§. 7. *Quaecumque sit via corporis, erit semper pro eadem velocitate eodemque angulo mutatae directionis, eadem summa omnium potentialiarum momentanearum ad curuam perpendicularem.*

De-

Demonstratio.

Assumatur pro axe linea BG ad tangentem BF perpendicularis: Sit $Bg = x$; $gb = dx$; $gm = y$; $on = dy$; $Bm = s$; $mn = ds$; massa corporis $= m$: tempus per $Bm = t$ et per $mn = dt$; Radius osculi $mH = R =$ (sumtis elementis curuae inter se aequalibus) $\frac{dx ds}{dy}$ vel $\frac{dy ds}{dx}$: Sic erit *potentia momentanea* ad curuam perpendicularis $= \frac{2A}{R} m dt = \frac{2A}{R} \times m \times \frac{ds}{\sqrt{2A}} = \frac{ds}{R} \times m \sqrt{2A}$: Quia porro $m \sqrt{2A}$ est quantitas vbique eadem, erit summa omnium praedictarum potentiarum $= m \sqrt{2A} \times \int \frac{ds}{R}$. Notum autem est, exprimere $\int \frac{ds}{R}$ *angulum mutatae directionis* DCF: Est ergo tandem summa omnium *potentiarum momentanearum* ad curuam perpendicularium aequalis angulo DCF multiplicato per $m \sqrt{2A}$, id est, per massam corporis eiusdemque velocitatem, aut, vt alias loquuntur, per quantitatem motus, qui omnes factores sunt per hypothesin constantes. Q. E. D.

Corollarium.

§. 8. Cum summa *potentiarum momentanearum* directarum, qua corpus massam habens m a quiete acquirat velocitatem $\sqrt{2A}$, sit $m \sqrt{2A}$ (per §. 1.) erit haec summa (quae etiam quantitatem motus corpori insitam exprimit) ad summam potentiarum in paragrapho proximo definitarum, vt radius ad arcum, qui *angulum* mutatae directionis subtendit, et vt radius ad quadrantem circuli, quando angulus iste est rectus.

Theo-

Theorema.

§. 9. *Servatis iisdem hypotbesibus, erit quoque summa potentiarum momentanearum axi parallelarum constans, nominatimque talis, quae se habeat ad quantitatem motus corpori insitam, ut sinus anguli mutatae directionis ad sinum totum.*

Demonstratio.

Potentia momentanea ad curvam perpendicularis est $= \frac{ds}{R} \times mV \perp A$ (per §. 7.): inde deducitur potentia momentanea axi BG parallela $\frac{dy}{R} \times mV \perp A =$ (posito pro R valore $\frac{dy ds}{dx}$) $\frac{ddx}{ds} \times mV \perp A$, cuius integrale est $\frac{dx}{ds} \times mV \perp A$ (constantem non addo quia in puncto B, ob situm axis BG ad BF perpendiculararem, est $\frac{dx}{ds} = 0$); Est autem in puncto D, $\frac{dx}{ds}$ sinus anguli mutatae directionis, designato sinu toto per unitatem: Igitur summa potentiarum momentanearum axi parallelarum se habet ad quantitatem motus $mV \perp A$, ut sinus anguli mutatae directionis ad sinum totum. Q. E. D.

Theorema.

§. 10. *Iisdem positis erit etiam summa potentiarum momentanearum ad axem perpendicularium siue directioni motus initiali oppositarum constans; et ea quidem se habet ad quantitatem motus corpori insitam, ut differentia inter sinum totum et cosinum anguli mutatae directionis ad sinum totum.*

Demonstratio.

Potentia momentanea in directione FB est $= \frac{dx}{R} \times mV \sqrt{2A} = (\text{posito pro } R \text{ valore } \frac{-dx ds}{dy}) \frac{-dy}{ds} \times mV \sqrt{2A}$, cuius integrale, debita addita constante, fit $(1 - \frac{dy}{ds}) \times mV \sqrt{2A}$: sed in puncto D est $\frac{dy}{ds}$ cosinus anguli mutatae directionis: Inde igitur patet, summam potentiarum momentanearum directioni motus initiali oppositarum se habere ad quantitatem motus $mV \sqrt{2A}$, vt differentia inter sinum totum et cosinum anguli mutatae directionis ad sinum totum. Q. E. D.

§. II. Similia forent theoremata, quamuis paullo minus concinna, si loco potentiarum momentanearum axi parallelarum eidemue perpendicularium alias sub quacunque directione constante considerassemus.

Caeterum theoremata nunc exposita motum in corpore ponunt vniformem: iam vero rem explorabimus cum corpora et velocitatem et directionem pro lubitu mutant. Isti satisficiemus desiderato generalissime, si praeter hypotheses §. 6. expositas insuper ponamus corpus in singulis punctis potentia vtcunque variabili in directione tangentiali versus antecedentia vrgeri: ita enim corpus et praescriptam viam describet et vbiuis velocitatem habere poterit qualemcunque. Equidem potuissent loco praefatarum potentiarum tangentialium aliae quaeuis fingi: adhibebo autem primo loco tangentiales, ne dubium esse possit circa aestimationem potentiae directionem mutantis; deinde aliis vtar, vt appareat earum

rum exemplo, quam circumspicione potentia directionem mutans inquirenda sit, qua de re, animum Lectoris in antecessum occupavi paragrapho sexto.

In istis quidem hypothesibus legem ratione potentiarum momentanearum ad viam corporis vbiq̄ue perpendicularium summae non obseruavi, quae aliquam cum lege paragraphi septimi affinitatem haberet: verum respectu potentiarum momentanearum axi parallelarum eidemue perpendicularium, theoremata se rursus mihi obtulerunt, attentione ob vtilitatem suam digna et generaliora iis, quae §§ 9. et 10. fuerunt definita, in reliquis autem non dissimilia, quae nunc adiungam.

Theorema.

§. 12. *Quaecunque sit via corporis et qualescunque velocitatum mutationes, erit semper pro eadem velocitate finali eodemque angulo mutatae directionis eadem summa potentiarum momentanearum ad directionem initialem BF perpendicularium et ea quidem talis, quae se habeat ad quantitatem motus corpori in D insitam, ut sinus anguli mutatae directionis ad situm totum.*

Demonstratio.

Sit velocitas corporis in puncto quouis $m = V 2 v$; in $D = V 2 b$; potentia tangentialis in $m = p$ vtcunque variabilis: reliquae hypotheses et denominationes retineantur, quas antea adhibuimus. Iam vero potentiae corpus in directione BG vrgentes, de quibus in hac propositione sermo est, duplicis sunt ordinis: prima classis-

O 2

com-

comprehendit potentias ab actione canalıs, corpus vbiq̄ue a via recta detorquentis; altera potentias tangentiales: potentia in m ad curuam perpendicularis est $= \frac{2mv}{R}$, quae resoluta in duas alias secundum BG et FB agentes (quarum solam priorem hic considerandam habemus) dat $\frac{dy}{ds} \times \frac{2mv}{R}$; haecque multiplicata per dt siue per $\frac{ds}{\sqrt{2}v}$ facit potentiam momentaneam in directione BG $= \frac{m dy \sqrt{2} v}{R}$: similiter potentia tangentialis p dat pro potentia, directionem desideratam BG habente, $\frac{p dx}{ds}$, haecque multiplicata per dt , facit potentiam momentaneam alteram in directione BG $= \frac{p dx dt}{ds}$. Igitur ambae praefatae potentiae momentanae simul sumtae sunt $\frac{m dy \sqrt{2} v}{R} + \frac{p dx dt}{ds}$ quarum nunc quaeritur integrale: ad hoc determinandum considero, ob directionem tangentialem potentiae p , esse $p dt = \frac{m dv}{\sqrt{2} v}$, simulque pro R substituo $\frac{dy ds}{dx}$, atque sic pro quantitate integranda obtineo $\frac{m dx \sqrt{2} v}{ds} + \frac{m dv dx}{ds \sqrt{2} v}$: huius autem integrale, vbi nulla requiritur quantitas constans addenda, est $= \frac{m dx \sqrt{2} v}{ds}$, quae igitur exprimit summam omnium potentiarum momentanearum, quas corpus suscipit, dum ex B in m transfertur: si loco puncti m accipiatur punctum vltimum D, fit $\frac{dx}{ds}$ sinus anguli mutatae directionis DCF, et $\sqrt{2}v$ tunc exprimit velocitatem finalem corporis in D seu $\sqrt{2}b$: vnde tandem sequitur, summam potentiarum momentanearum in directione BG se habere ad quantitatem motus, corpori in D insitam, vt sinus anguli mutatae directionis ad sinum totum. Q. E. D.

Co-

Corollarium.

§. 13. Hic ergo nec velocitas initialis nec velocitatum inter mediarum mutationes qualescunque quicquam conferunt, modo eadem sit velocitas finalis, atque sic ultimum hoc theorema in conelusione non differt ab illo, quod §. 9. fuit exhibitum, quamuis multo specialius magisque restrictum.

Theorema.

§. 14. Quaecunque sit via corporis et qualescunque velocitatum mutationes, erit semper pro data velocitate in B et pro data quoque finali in D ut et pro dato angulo mutatae directionis eadem summa potentiarum momentanearum directioni initiali BF parallelarum, et quidem aequalis differentiae inter quantitatem motus, quam corpus in fine habet, multiplicatam per cosinum anguli mutatae directionis, et inter quantitatem motus corpori ab initio motus insertam.

Demonstratio.

Procedit ut in §. 12. mutando dx in dy atque ddx in $-ddy$ et vicissim, simulque considerando potentias utriusque classis ad directionem BF reductas non conspirare sed in diversa abire; atque sic intelligitur, esse potentiam momentaneam in directione BF ab actione canalıs ortam $= -\frac{m dx v \cdot v}{R}$ (signum hic pono negativum, quia potentia agit ab F versus B) alteram vero potentiam momentaneam in eadem directione BF, potentiae tangentiali debitam, esse $= \frac{p dy dt}{ds}$. Igitur ambae

O 3

istae

istae potentiae momentanae simul sumtae nunc sunt $-\frac{m dx \sqrt{2v}}{R} + \frac{p dy dt}{ds}$, quas vt in §. 12. integrationis causa muto in $\frac{m ddy \sqrt{2v}}{ds} + \frac{m dv dy}{ds \sqrt{2v}}$. Huius quantitatis integrale ita debet esse constitutum, vt in B sit $= 0$, vnde illud faciendum est $= \frac{m dy \sqrt{2v}}{ds} - m \sqrt{2a}$, intelligendo per $\sqrt{2a}$ velocitatem initialem. Ista igitur quantitas exprimit summam omnium potentiarum momentanearum directioni initiali BF parallelarum cum eademque conspirantium, dum corpus ex B in m transfertur, et eadem quantitas negatiue sumta, nempe $m \sqrt{2a} - \frac{m dy \sqrt{2v}}{ds}$, designat summam potentiarum momentanearum, directioni BF oppositarum: si iam loco puncti m accipiatur punctum D, fiet $\frac{dy}{ds}$ cosinus anguli mutatae directionis atque $\sqrt{2v} = \sqrt{2b}$: vnde si cosinus iste dicatur c , erit tandem integrale quaesitum $mc \sqrt{2b} - m \sqrt{2a}$ aut $m \sqrt{2a} - mc \sqrt{2b}$, vt habet propositio. Q. E. D.

Corollarium 1.

§. 15. Si angulus mutatae directionis est rectus, fit $c = 0$, et summa praedictarum potentiarum momentanearum $= m \sqrt{2a}$, ita vt quaecunque fuerit velocitas in fine D, tunc fit semper ista summa aequalis quantitati motus, corpori ab initio motus, insitae.

Corollarium 2.

§. 16. Posita velocitate initiali in B aequali velocitati finali in D, oritur theorema §. 10. quaecunque interim fuerit lex variationum in velocitatibus intermediis.

diis. Hisce corollariis utemur in parte huius dissertationis altera ad problemata hydrodynamica soluenda.

Scholium.

§. 17. Demonstrationes nostrae ostendunt, propositiones has esse generalissime veras, easque omnino se extendere ad causas mechanicas, quibus directio et velocitas in corpore vbiuis mutantur, qualescunque; siue sint elastra, siue fila corpus trahentia, siue impulsus aut quicquid libuerit aliud, quod idem iam monui §. 11. vbi simul promisi, me alias quoque quam tangentiales adhibiturum esse potentias, corporis velocitatem mutantem; tum vt propositionum vniuersalitas magis pateat, tum etiam vt appareat, quomodo in hoc negotio potentiae momentaneae sint accipiendae.

Ponamus itaque loco potentiarum tangentialium §§. 11. 12. et seqq. consideratarum, nunc potentias alias vtcunque variables π corpus vbique in directione applicatis parallela sollicitantes, reliquas vero denominationes et hypotheses retineamus omnes rursusque theoremata paragraphi duodecimi demonstrandum accipiamus.

Erit hic iterum potentia momentanea ab actione curuae orta in directione $BG = \frac{m dy \sqrt{v} v}{R}$; sed potentia π , quamuis per se indifferens sit ad corpus in directione BG vrgendum, attamen vnita cum actione curuae aliquid confert, proptereaue resoluenda est in duas alias, alteram tangentialem $\frac{dy}{ds} \pi$, alteram ad curuam perpendicularem

112 DE LEGIBVS QVIBVSDAM MECHANICIS

rem $\frac{dx}{ds} \pi$; illa est tractanda vt factum fuit cum potentia tangentiali §. 12. atque sic quod ibi fuit p , hic est $\frac{dy}{ds} \pi$; haec vero, nempe $\frac{dx}{ds} \pi$, plane est reiicienda, quia destruitur a contrario et aequali actione curvae: substituto igitur pro p valore $\frac{dy}{ds} \pi$, reliqua fient vt citato §. 12. eademque orietur conclusio, quando ibi littera p in fine ratiocinii plane ex calculo euauit.

Ita quoque theorema paragraphi 14. in praesenti hypothesei potentialium applicatis parallelarum, vt ibi, demonstrabitur, postquam potentia π resoluta fuerit in perpendicularem ad curuam eamque reiiciendam et in tangentialem rursus resoluendam in duas alias secundum directiones BG et BF, quarum sola posterior consideranda erit. Denique perspicuum est, idem futurum fuisse conclusum, si sub quacunque directione variabili potentiae corpus accelerantes vel retardantes adhibitae fuissent. Partem dissertationis alteram proxime.

DIS-

DISSERTATIONIS
DE
LEGIBVS MECHANICIS
NONDVM DESCRIPTIS
PARS ALTERA,

*in qua Legum istarum in prima parte expofitarum
vfus hydrodynamicus oftenditur.*

§. 1.

PRima, quae sciam, experimenta pro determinanda vi venae aquae in planum incurrentis instituta fuerunt sub auspiciis Academiae Scientiar. Paris. A. 1679, eaque videre est in historia praefatae Academiae a *D. Du Hamel* conscripta *Seët. III. Cap. V.* Post haec secuta sunt innumera alia: sumta autem fuerunt cum aquis ex cylindro amplissimo per lumen uniformiter effluentibus; et quamvis successus nunquam praeconceptae Auctorum ideae ex assè responderit, statuerunt tamen omnes, vim venae a plano mox prae foramine exceptae aequalem esse ponderi cylindri aquei supra foramen ad altitudinem aquae exstructi. Veram hanc esse naturae legem vsque adeo non dubitarunt, vt quicquid experimenta superabundarent, id omne circumstantiis tribuerent alienis nec in rei natura positis, non satis profecto perpendentes, minui inde potius quam augeri vim aquae.

§. 2. Vt vero aliquo appareat exemplo, quantum fictam illam naturae legem experientia probet improbetue, vnum referam fide dignum: altitudo aquae in vase erat duorum pedum Paris. foramen circulare in fundo horizontali factum diametrum habebat quatuor linearum, et vis venae aquae obseruata fuit aequalis ponderi vnus vnciae cum tribus quartis. At vero pondus cylindri aquei foramini incumbentis subducto calculo vix ac ne vix quidem aequat vnciam vnā cum tribus octauis: differentia igitur est minimum trium octauarum vnus vnciae partium, quae omnino tres vndecimas praememorati cylindri aquei ponderis efficiunt, ita vt mirer fuisse discrimen ab Academicis, quorum cura teste *D. Du Hamel* sumpta fuerunt experimenta, neglectum fere aut vnice tributum ei, quod lamina aquas excipiens a foramine aliquantum remouere necesse fuerit: fac enim remotam fuisse vel duobus pollicibus, non aliud inde incrementum orietur, quam vigesima quarta propemodum pars totius vis, quae nondum decimam sextam partem vnus vnciae efficit. Patet igitur opinionem autorum experimento isto non solum non confirmari, sed potius improbari: idem vero plane fiet perspicuum ex sequentibus: interim tamen ita inualuit, vt quisque sibi religioni duxerit de ea vel minimum dubitare.

§. 3. Iam vero hic libenter quaeram, quare comparatio instituat inter pondus cylindri aquei foramini effluxus incumbentis et vim venae? nempe altitudinem istius cylindri considerant, tanquam altitudinem ex qua
corpus

CORPUS libere cadendo acquirat ipsam aquarum effluentium velocitatem: Verum enim vero aquae effluentes istum velocitatis gradum nunquam attingunt, quia omnia tolli nequeunt impedimenta: igitur non tam altitudo cylindri aquei hic consideranda venit, quam altitudo velocitati aquarum reali respondens: nec enim quaeritur, quanta velocitate aquae in planum incurrerent sublatis omnibus obstaculis, sed quanta reuera incurrant.

Porro foramen effluxus consideratur tanquam amplitudo venae; sed et hoc non satis apte: vena enim prae foramine plerumque contractionem aliquam patitur, quae antequam a *Newtono* obseruata esset, multorum errorum origo fuit: quis autem non videt loco foraminis effluxus considerandam ab Auctoribus fuisse amplitudinem venae contractae, aut potius experimenta ita instituenda fuisse (quod fieri posse notum est) vt contractio venae nulla oriretur. Comparetur nunc animo vis aquae experimento superioris paragraphi inuenta cum pondere cylindri aquei formati non a foramine effluxus sed a vena contracta, nec ab altitudine aquae in in vase contentae, sed ab altitudine, quae velocitati ipsi respondere potuit, et facile erit colligere discrimen longe maius sic oriri, quam quod §. 2. definitum fuit. Atque id est, quo sibi illudi passi sunt experimentorum aestimatores.

§. 4. Existimaui animum Lectoris praeparandum esse, vt perspecta experimentorum adhuc in hac re summorum dubia facie nolit nimium illis fidere, atque si aliqua non male conuenire videat cum recepta regula, id me-

ro tribuat casui: possunt enim duae in proximo parographo annotatae rationes rem ita mutare, vt vis aquarum oriatur modo maior, modo minor pondere cylindri aquei illius, quem adhiberi solent. Haec de experimentis: videamus nunc, quid in theoria profecerint: hic vero rem ita considerabimus, vt appareat, quid futurum sit, si nulla suboriatur venae contractio, et aquae simul omni velocitate, quam in theoria habere possint (ea nempe quae debeatur toti aquarum altitudini supra foramen) exiliant, ita vt nunc *cylindrus aqueus correctus* non differat a *non-correcto* communiter adhibito: intelligo autem per *cylindrum aqueum correctum* illum, cuius basis est aequalis amplitudini venae contractae et cuius altitudo est eadem illa altitudo, quae generare potest velocitatem aquarum, qualis est in loco venae contractae: *cylindrus vero aqueus simpliciter ita dictus aut non correctus* mihi cum aliis est ille, qui foramini ad altitudinem aquae in vase contentae imminet.

§. 5. Primus, quod sciam, qui aquarum vim aliter quam experientia inquisiuerit, fuit *Newtonus*: neque tamen vim venae fluidae, qualis ex vase effluit, sed potius resistentiam fluidi corpus, cui resistit, vndiquaque circumdantis inquisiuit: hasque fluidi actiones a se inuicem diuersas censendas esse animaduertit, quod idem etiam inferius ostendam. Quae habet *Newtonus* eo redeunt, vt si particulae fluidi omnes immediate et directe in planum incidant, totaque sua velocitate instar corpusculorum perfecte elasticorum resiliant, tunc vis aquarum quadrupla sit ponderis cylindri aquei supra definiti, atque si particulae quidem omnes immediate directeque

recteque in planum incidant, sed plane non reflectantur tanquam corpuscula mollia, tunc vis aquarum prioris sit dimidia, *vid. Princ. Math. Phil. Nat. pag. 301. edit. 2.* vbi tamen res longe aliis verbis profertur. Atque cum his exacte conueniunt, quae ego ex legibus motuum a percussione deducta atque demonstrata dedi in *Comm. Tom. II. p. 305. et seqq.* Verum haec hypothesis. qua nempe ponuntur particulae omnes immediate et directe in planum incidere nequaquam admitti potest; nemo enim concipiet quomodo aliter id fieri possit, quam si particulae post impulsu suum statim annihilentur. Ea igitur relicta refugi ad experimentum *p. 307. Comm. Tom. cit.* descriptum, cuius euentus is fuit, qui plerumque esse solet: nam mihi videre visus sum, vim aquarum esse exacte aequalem ponderi *cylindri aquei non correcti*, qua in re plus quam par est auctoritatem secutus sum praedecessorum meorum: debebam utique experimentum repetere sub diuersis facibus, quod si fecissem, fieri non potuisset, quin diuersa reperissem relata ad pondera *cylindrorum aqueorum non correctorum*: conformitas enim in experimentorum successibus expectanda non est, nisi *cylindri aquei* considerentur *correcti*, quae res ex se nimium manifesta est, quam ut possit vnus pro altero perinde haberi, quod animo perpendens ausus fui sententiam, ab omnibus a plusquam 65 annis receptam, rursus deserere tumque argumentum de nouo ruminari. Cogitata mea hic afferam, primum quidem dicturus de vena aquea, quae in planum directe, tum etiam de ea, quae oblique in-

currit, hisque aliqua subiuncturus de resistentia quam corpora fluidis tota submersa patiuntur.

- §. 6. Quoties venam aqueam in planum perpendiculariter incurrentem obseruavi, aliquid vidi ipsi accidere, quo vis illius accurate determinatur, ita vt posito phaenomeno, nullus amplius errori locus detur. Id vero, de quo loquor, phaenomenon in eo consistit, quod particulae aqueae omnes planum deserunt secundum ipsius plani directionem. Res clarius intelligetur ex figura secunda, in qua, denotante AB axem venae fluidae in planum EE impingentis, filamenta venam componentia haud procul a plano maxime inflecti conspiciuntur, ita vt tandem in D et C, vbi planum deserunt, directionem habeant ipsi plano parallelam siue ad axem AB perpendiculararem, orbem formantia instar crystalli egregie pellucidum. Ad id vero requiritur, vt planum EF sit notabiliter maius amplitudine siue crassitie venae: alias enim continget, si recte iudico, quod videmus in figura tertia, vbi particulae in D et C in directione mouentur obliqua, dicam tantum de casu priore: eo enim referuntur omnia experimenta ab Auctoribus instituta.
- Figura 2.
- Figura 3.

- §. 7. Puta iam particulas aqueas omnes ad angulum rectum vsque inflecti ab obstaculo plano EF, quod fieri autopsia docet: aquam autem venam formare cylindricam ponimus eamque perpetuo velocitate affluere vniformi: facile sic est intelligere omnem pressionem, quam planum FE sustinet in directione AB, sua reactione in particulas aqueas redundare, et esse hanc reactionem a B versus A agentem, quae easdem particulas
- Figura 2.
- las

las ad angulum rectum deflectat, id est, vt terminis in priori huius dissertationis parte adhibitis vtar, quae in particulis *angulum mutatae directionis* rectum producat. Igitur si vim inquiramus sub directione BA, quae continua sua actione possit omnes particulas aqueas in directione contraria affluentes ad angulum rectum ab hac via detorquere, habebimus eo ipso vim, quam planum FE sustinet, desideratam. Id vero obtinebimus ope §. 15. Part. I. vbi demonstrauius ex paragrapho eum praecedente: *quod si massa m mota primum velocitate $\sqrt{2a}$ (id est, velocitate debita altitudini a) a potentiis directioni initiali oppositis, directionem suam mutauerit vsque ad angulum rectum, esse summam omnium potentiarum momentanearum aequalem $m\sqrt{2a}$. His praemonitis rem sic aggredior.*

§. 8. Sit velocitas aquarum in $A = \sqrt{2a}$: assumatur adlibitum tempus aliquod t , ponaturque eo tempore affluere quantitatem seu massam aut pondus aquae m , sit potentia quaesita, quam planum FE sustinet et quae particulas aqueas perpetuo a via deflectit, $= p$: hanc si multiplicaueris per tempus t , habebis summam omnium potentiarum momentanearum directioni AB oppositarum, quae singulas particulas massae aquae m durante tempore t affluentis a directione initiali ad angulum rectum vsque deflectere fecit, quae summa proinde est pt : est vero vi theorematis in proximo paragrapho citati $pt = m\sqrt{2a}$: vnde habetur $p = \frac{m\sqrt{2a}}{t}$. Atque sic veram pressionem, quam planum FE sustinet, accurate determinauimus: superest tantum, vt quantitatem inuen-

tam

tam $\frac{m\sqrt{2a}}{t}$ reducamus ad mensuram ab Auctoribus adhiberi solitam, nempe ad rationem quam habet cum *cylindro aqueo*, sed eo *correcto*, cuius scilicet basis sit aequalis amplitudini venae in A et cuius altitudo sit $=a$, quae altitudo respondet verae velocitati aquae in A. Sit igitur amplitudo venae in A $=1$, et tunc erit m spatium, quod aqua tempore t percurrit, quia nempe m exprimit quantitatem seu pondus aquae tempore t affluentis, et quantitas est aequalis producto ex amplitudine venae 1 eiusque longitudine m tempore t percurfa: est porro tempus exprimendum spatio m diuiso per velocitatem $\sqrt{2a}$, vnde $t = \frac{m}{\sqrt{2a}}$: substituto hoc valore in formula $p = \frac{m\sqrt{2a}}{t}$, prodit $p = 2a$, id est, aequalis massae seu ponderi cylindri aequi, cuius basis $=1$, et cuius altitudo $=2a$, siue tandem aequalis duplo ponderi *cylindri aequi correcti*.

§. 9. Dupliciter differt ista vis venae aquaeae determinatio a vulgari: nostra nempe duplum indicat cylindrum loco simplicis et eum *correctum* loco cylindri *non-correcti*. In theoria non curatur nisi primum discrimen, quando aquae ex vase exilire censentur velocitate, quae toti aquarum altitudini supra foramen respondent et vena aequa vbique foraminis amplitudinem conseruare ponitur, sic vt *cylindrus aequus correctus* non differat theoretice a *non-correcto*: neque haec vt aliter sint ipsa rei natura postulat, sed casu contingit. Verum in experimentis sumendis atque ad calculum reuocandis, alterius illius discriminis maxime est ratio habenda, cum differant plerumque notabiliter ambo praefati

ſati cylindri nullique ſint diuerſitatis limites: poſſunt enim ex vaſe pleno eoque quantumuis alto aquae velocitate emanare minima, ſi per ſtrictiorem et longiorem canalem effluant: quis autem tunc dicat vim aquarum eiectionum altitudini reſpondere fluidi interni. Interim cylindri aquei quorum mentionem modo fecimus, non raro differunt in ratione praeter propter ſubdupla, quo factum eſt, vt vno errore alterum fere compenſante, falſitatem opinionis ab omnibus a tam longo tempore receptae, nemo quidem ſuſpicatus fuerit.

§. 10. In hac noſtra diſquiſitione non vſi ſumus alia hypotheſi phyſica, quam quod particulae aqueae ſingulae directionem mutant ad angulum vsque rectum ab illiſione in planum: reliqua omnia ſunt tam certa, quam mechanica puriſſima. Allatam vero hypotheſin phyſicam et experientia docet et mente facile eſt concipere. Caeterum commode hic accidit, quod expreſſe monendum exiſtimo, vſumque theorematis §. 15. Part. I. valde pro hoc negotio commendat; quascunque nempe in praefenti caſu finxeris velocitatis variationes in particulis aqueis, dum ab A vsque ad D perueniunt, ſemper tamen eundem eſſe calculum eandemque prodire vim venae aqueae; quod niſi ita eſſet, vis iſta determinari non poſſet. Quamuis enim in theoria velocitates particularum in A et D aequales cenſeri poſſint ex conſeruatione virium viuarum, dubitandum tamen non eſt quin actu aliquam patiantur velocitatis diminutionem particulae aqueae dum a via continue deſlectuntur: Hinc fieri exiſtimo, vt vires venarum oblique incidentium

Tom. VIII. Q ac-

accurate determinari nequeant, qua de re in sequenti-
bus plura afferam.

§. 11. Theoriam hanc nouam multis quidem de-
claravi amicis, priusquam de illa aliqua experimenta
sumssem, certus de eius bonitate: Postquam vero eam
publice exponere constituisssem, sensi e re mea fore,
vt experimenta experimentis auctoritatesque auctoritati-
bus opponerem, ne inauditus fortasse reiicerer. Igitur
praeparatis omnibus ad experimentum conuenerunt in
aedibus meis D. Emanuel König, Pater meus, Patruelisque
Nicolaus Bernoulli, quibus primo causam totam expo-
si, caetera deinde aggressus vt sequitur.

Mensura vsus sum pedis Parisini in 400 particulas
aequales diuisi, atque vt ante omnia pondus cylindri
aquei dati determinare liceret experimento a memet fa-
cto, adhibui vas cylindricum ex lamina ferrea factum,
cuius cavitatis diameter erat 92 part. eoque repleto aquis
ad altitudinem 131 part. atque explorato ad bilancem
tum pondere vasis vacui, tum pleni, vidi pondus cylin-
dri istius aquei esse 122 drachmarum: Inde cognouimus
pondus cylindri aquei alterius (cuius diameter esset 19.
part.) esse 8, 937 drachmarum: talis autem cylindrus
nobis mox veniet considerandus. Vas porro aderat am-
plissimum ABCD aquis plenum vsque in AD cum
adaptato tubo EF perfecte cylindrico et horizontaliter
posito: Per hunc cum aquae effluebant, nullam pati
poterat vena contractionem, secus ac fit cum per sim-
plex foramen fluunt: velocitas etiam aquarum ab initio
haberi potest pro vniiformi ob earum directionem ho-
rizon-

horizontalis, quod idem minime fit, cum aquae verticaliter effluunt. Denique hoc modo aquae dum praeforamine F in planum incurrunt eidem non adhaerent, atque si adhaerent in nostro experimento nullius momenti forent, quae alias suo pondere experimentum accurate sumendum turbant. Haec in causa sunt quod potius iactu horizontali quam verticali usus sum. Tum etiam ad experimentum requirebatur, ut cognoscerem velocitatem realem aquarum in F altitudinemque eidem debitam: hanc vero obtinui ex observatis prius altitudine verticali FG et amplitudine iactus horizontali GH: notum enim est, altitudinem velocitati aquarum in F debitam esse aequalem $\frac{GH^2}{FG}$. Erat autem FG = 900 part. ut et GH = 900 part. unde altitudo pro velocitate aquarum effluentium generanda deducitur 225 part. diametrum autem tubi EF inuenimus = 19 part. Igitur *cylindrus aqueus correctus* hic diametrum basis habet 19. part. et altitudinem 225. part. atque supra vidimus pondus talis cylindri esse 8, 937. drachmarum. Porro vectem adhibuimus rectangulum LMN satis leuem atque liberrime mobilem circa axem in R perpendiculariter ad planum vectis transfixum: punctum autem R tale assumptum fuerat, ut situs alterius cruris esset in vecte sibi relicto horizontalis, alterius verticalis: PL diameter est orbiculi plani venam in centro suo perpendiculariter excipientis: in QN autem alius erat orbiculus horizontaliter positus, cui ponduscula superimponi possent, quanta requirerentur in experimento, ut situs vectis naturali similis esset dum venam exciperet: cen-

Q 2

trum

trum autem inferioris orbiculi tantum distabat a puncto M, quantum superioris orbiculi a puncto R.

Hisce omnibus ad experimentum sufficienti accurate praeparatis, iamque effluentibus aquis per tubum EF, vidimus pondus orbiculo QN superimponi potuisse, quantum theoria nostra requirebat, nempe 17. drachmarum et parum quod excurrerat. Idem vero experimentum solus sub aliis circumstantiis repeti simili cum successu, ita vt de veritate theorematis nostri §. 8. dubitari non possit.

§. 12. Ab impetu aquarum directo veniamus ad obliquum: dico autem hunc recte aestimari non posse tum ob velocitatum intermediarum mutationes, quae ad rem faciunt, secus atque in casu priori, tum etiam ob inaequalem in particulis directionis mutationem: dicemus tamen de hoc etiam casu aliqua, vt appareat, quaenam hypotheses physicae ad rectam rei aestimationem requirantur.

Fingatur itaque vena aquea AB in planum EF oblique incurrens: Hic quidem plures erunt particulae ad partem D deflectentes quam ad partem oppositam C: priores autem minorem subeunt directionis mutationem quam posteriores, et propterea etiam minorem ad planum EF exerunt pressionem: Non liquet autem, quam proportionem particulae aqueae ad diuersa latera deuoluantur, nec quaenam velocitates ipsis supersint in D et C, ideoque nec earum impressio in planum EF determinari potest. Ponantur interim omnia cognita, quae ad proble-

problematis solutionem requiruntur, maiorisque facilitatis causa vena non cylindrica sed prismatica, ita ut de tota vena intelligi possint, quae nunc de lamina fluida CAD dicentur: Sit amplitudo venae in A = 1; quantitates aquae in D et C eodem tempore praeterfluentes rationem habeant ut p ad π; velocitas aquarum in A sit = V 2a; in D = V 2b et in C = V 2c. Notetur hic *angulum mutatae directionis* in particulis D esse angulum ABE atque in particulis C angulum ABF, unde si sinus totus vocetur 1; cosinus anguli ABE = c, atque adeo cosinus anguli ABF = -c, sique idem instituat ratiocinium, quod fecimus paragr. 8. atque si tandem recte adhibeatur theorema §. 14. P. I. inuenietur pressio rami aquei ABD in planum EF secundum directionem AB = $\frac{p}{p+\pi} \times (2a - 2cb)$ et pressio alterius rami ABC secundum eandem directionem AB = $\frac{\pi}{p+\pi} \times (2a + 2c)$: atque pressio utraque coniuncta secundum praefatam directionem AB = $\frac{p(2a-2cb)+\pi(2a+2c)}{p+\pi}$: haecque si multiplicetur per sinum anguli ABE seu per V(1-cc), obtinetur pressio aquae ad planum EF perpendicularis, quae sic erit = $\frac{p(2a-2cb)+\pi(2a+2c)}{p+\pi} \times V(1-cc)$.

Ista vero pressio non sola est consideranda; est enim alia insuper pressio ad planum EF perpendicularis derivanda a pressionibus ad directionem venae AB perpendicularibus. De his notandum est, quod ea quae oriuntur a particulis in D praeterfluentibus contrariae sint illis quae a particulis in C praeterfluentibus producuntur: quod si notatum fuerit, reperietur per methodum §. 8.

Q 3

huius

huius Partis, et per theorema §. 12. Part. I. esse pressionem coniunctam vtriusque rami in directione ad AB perpendiculari $\frac{p-\pi}{p+\pi} \times 2a\sqrt{(1-cc)}$, haecque multiplicata per cosinum anguli ABE dat alteram pressionem aquae ad planum EF perpendicularem $= \frac{p-\pi}{p+\pi} \times 2ac\sqrt{(1-cc)}$.

Ambae vero pressiones ad planum EF perpendiculares simul sumtae dant pressionem venae quaesitam $= \frac{p \times (2a-2cb) + \pi(2a+2cb)}{p+\pi} \times \sqrt{(1-cc)} + \frac{p-\pi}{p+\pi} \times 2ac\sqrt{(1-cc)}$.

§. 13. Apparet ex hac ipsa, quam nunc dedi, expressione pro vi venae aqueae oblique in planum incidentis, tam incertam atque vagam esse istius vis determinationem, quam incerta et accurata est, cum directe vena planum ferit. Parum accurate certe dicitur ab Auctoribus, si res ipsa consideretur, vires venae aqueae sub diuersis directionibus contra planum fluentis se habere vt sinus angulorum incidentiae, quamuis forte id recte dicatur *in abstracto*. In theoria quidem velocitas aquarum tam in C quam in D non differre poni potest a velocitate in A, eoque posito fit $b = c = a$, et sic tota pressio $= 2a\sqrt{(1-cc)}$, vt vulgo statuitur. Videtur autem, istas positiones non omnino ipsi rei naturae satisfacere. Ego quidem coniicio pressionem obliquam rationem habere ad pressionem directam paullo maiorem, quam putatur, qua de re aliquando experimenta sumam.

Si statuatur omnem aquam ad eandem partem fluere, nempe ad D, (quod in directione non parum obliqua satis apte poni posse puto) erit $\pi = 0$, ipsaque pressio
=

$= (2a + 2ac - 2bc)\sqrt{1 - cc}$. Ista vero attentione eo magis digna puto, quod simul inferuiant ad leges motuum in corporibus non elasticis a percussione obliqua recte definiendas.

Denique fieri etiam posse puto, praesertim quando aquae magna velocitate et obliqua in planum irruunt, ut aquarum magna pars instar corporis elastici resiliat, quod si fit, vis earum contra planum necessario crescit.

§. 14. Prouti vis venae oblique incidentis accurate defini nequit, ita vim fluidi infiniti in plana submersa, licet directe incidentis aut resistentiam corporum, ut dicitur, a fluidis praecisione geometrica determinari posse nego: cuius rei ratio ut appareat, recordandum hic erit, quod dixi §. 6. requiri ad rectam aestimationem vis venae aquae, ut planum consideretur amplitudine venae veluti infinite maius: ita enim quivis perspiciet, aliquid hic esse isti hypothese e diametro oppositum: flumen enim in planum sibi submersum incurrens, vena quasi est, ipso plano infinites maior, unde fit ut particulae aquae obiectum planum praeterfluentes ratione longe alia directionem mutant, quam quae figura secunda repraesentatur, neque apparet quonam numero particulae in flumine directionem mutant. Vtrumque facit, ne vis fluminis contra planum accurate habeatur: atque sic nec resistentia, quam corpora in fluido infinito mota patiuntur, defini potest, nisi ad experimenta recurratur.

SO.

SOLVTIO PROBLEMATIS

AD

GEOMETRIAM SITVS

PERTINENTIS.

AVCTORE

Leonb. Eulero.

§. I.

Tabula VIII.

PRaeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates versatur, et omni tempore summo studio est excolta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam Geometriam situs vocauit. Ista pars ab ipso in solo situ determinando, situsque proprietatibus eruendis occupata esse statuitur; in quo negotio neque ad quantitates respiciendum, neque calculo quantitatum vtendum sit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc situs Geometriam pertineant, et quali methodo in iis resoluendis vti oporteat, non satis est definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio esset facta, quod quidem ad geometriam pertinere videbatur, at ita erat comparatum, vt neque determinationem quantitatum requireret, neque solutionem calculi quantitatum ope admitteret, id ad geometriam situs referre haud dubitavi: praesertim quod in eius solutione solus situs in considerationem veniat, calculus vero nullius prorsus sit vsus. Methodum ergo meam quam ad huius generis problemata

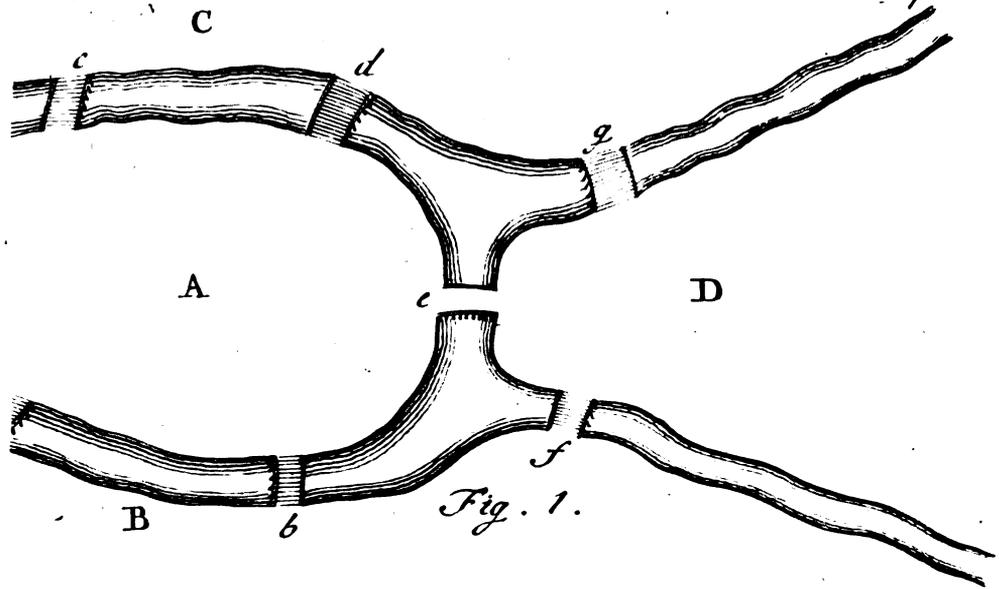


Fig. 1.

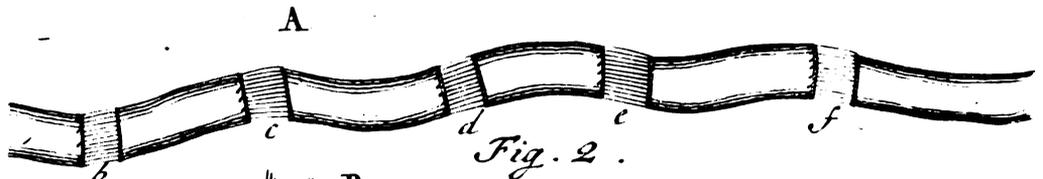


Fig. 2.

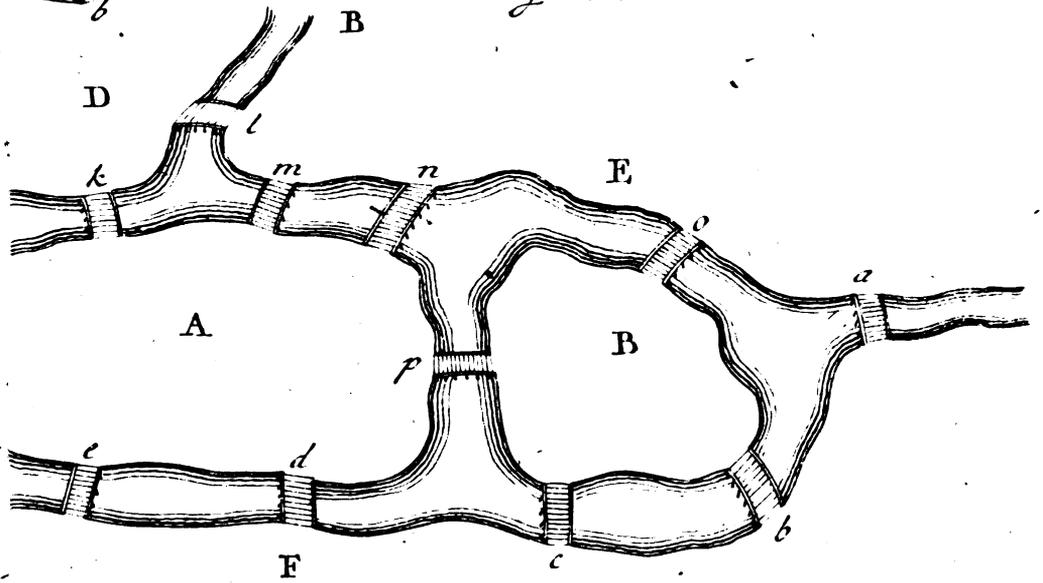


Fig. 3.

mata soluenda inueni, tanquam Specimen Geometriae: situs hic exponere constitui.

§. 2. Problema autem hoc, quod mihi satis notum esse perhibebatur, erat sequens: Regiomonti in Borussia esse insulam *A der Aneiphof* dictam, fluiumque eam cingentem in duos diuidi ramos, quemadmodum ex figura videre licet: ramos vero huius fluii septem instructos esse pontibus, *a, b, c, d, e, f, et g.* Circa hos pontes iam ista proponebatur quaestio, num quis cursum ita instituere queat, ut per singulos pontes semel et non plus quam semel transeat. Hocque fieri posse, mihi dictum est, alios negare alios dubitare; neminem vero affirmare. Ego ex hoc mihi sequens maxime generale formauit problema; quaecumque sit fluii figura et distributio in ramos, atque quicumque fuerit numerus pontium, inuenire, utrum per singulos pontes semel tantum transiri queat, an vero secus?

Figura 1.

§. 3. Quod quidem ad problema Regiomontanum de septem pontibus attinet, id resolui posset facienda perfecta enumeratione omnium cursum, qui institui possunt; ex his enim innotesceret, num quis cursus satisficeret, an vero nullus. Hic vero soluendi modus propter tantum combinationum numerum et nimis esset difficilis atque operosus, et in aliis quaestionibus de multo pluribus pontibus ne quidem adhiberi posset. Hoc porro modo si operatio ad finem perducatur multa inueniuntur, quae non erant in quaestione; in quo procul dubio tantae difficultatis causa consistit. Quamobremi missa hac methodo, in aliam inquisui, quae plus non

Tom. VIII. R lar-

largiatur, quam ostendat, vtrum talis cursus institui queat, an secus; talem enim methodum multo simpliciore fore sum suspicatus.

§. 4. Innititur autem tota mea methodus idoneo modo singulos pontium transitus designandi, in quo vtor litteris maiusculis A, B, C, D, singulis regionibus adscriptis, quae flumine sunt separatae. Ita si quis ex regione A in regionem B transmigrat per pontem *a* siue *b*, hunc transitum denoto litteris AB, quarum prior praebet regionem ex qua exierat viator, posterior vero dat regionem in quam pontem transgressus peruenit. Si deinceps viator ex regione B abeat in regionem D per pontem *f*, hic transitus repraesentabitur litteris BD; duos autem hos transitus successiue institutos AB et BD denoto tantum tribus litteris ABD, quia media B designat tam regionem, in quam primo transitu peruenit, quam regionem ex qua altero transitu exit.

§. 5. Simili modo si viator ex regione D progrediatur in regionem C per pontem *g*, hos tres transitus successiue factos quatuor litteris ABDC denotabo. Ex his enim quatuor litteris ABDG intelligetur viatorem primo in regione A existentem transisse in regionem B, hinc esse progressum in regionem D, ex hacque ultra esse profectum in C: cum vero hae regiones fluuiis sint a se inuicem separatae, necesse est ut viator tres pontes transierit. Sic transitus per quatuor pontes successiue instituti quinque litteris denotabuntur; et si viator trans quotcunque pontes eat, eius migratio per litterarum numerum, qui unitate est maior

ior quam numerus pontium, denotabitur. Quare transitus per septem pontes ad designandum octo requirit litteras.

§. 6. In hoc designando modo non respicio, per quos pontes transitus fit factus, sed si idem transitus ex vna regione in aliam per plures pontes fieri potest, perinde est per quemnam transeat, modo in designatam regionem perueniat. Ex quo intelligitur, si cursus per septem figurae pontes ita institui posset, vt per singulos semel ideoque per nullum bis transeat; hunc cursum octo litteris repraesentari posse, easque litteras ita esse debere dispositas, vt immediata litterarum A et B successio bis occurrat, quia sunt duo pontes *a* et *b* has regiones A et B iungentes, simili modo successio litterarum A et C quoque debet bis occurrere in illa octo litterarum serie; deinde successio litterarum A et D semel occurreret; similiterque successio litterarum B et D, itemque C et D semel occurrat necesse est.

§. 7. Quaestio ergo huc reducitur, vt ex quatuor litteris A, B, C et D series octo litterarum formetur, in qua omnes illae successiones toties occurrant quoties est praeceptum. Antequam autem ad talem dispositionem opera adhibeatur, ostendi conuenit, vtrum tali modo hae litterae disponi queant an non. Si enim demonstrari poterit talem dispositionem omnino fieri non posse, inutilis erit omnis labor, qui ad hoc efficiendum locaretur. Quamobrem regulam inuestigauimus, cuius ope tam pro hac quaestione, quam pro

omnibus similibus, facile discerni queat, num talis litterarum dispositio locum habere queat.

Figura 2.

§. 8. Considero ad huiusmodi regulam inueniendam vnicam regionem A, in quam quocumque pontes a, b, c, d etc. conducant. Horum pontium contemplor primo vnicum a , qui ad regionem A ducat; si nunc viator per hunc pontem transeat vel ante transitum esse debuit in regione A vel post transitum in A perueniet; quare in supra stabilito transitus designandi modo oportet vt littera A semel occurrat. Si tres pontes puta a, b, c in regionem A conducant, et viator per omnes tres transeat, tum in designatione eius migrationis littera A bis occurret, siue ex A initio cursum instituerit siue minus. Simili modo si quinque pontes in A conducant, in designatione transitus per eos omnes littera A ter occurrere debet. Atque si numerus pontium fuerit quicumque numerus impar, tum si is vnitatem augeatur, eius dimidium dabit, quot vicibus littera A occurrere debeat.

Figura 1.

§. 9. In casu igitur pontium transeundorum Regionum, quia in insulam A quinque pontes deducunt a, b, c, d, e , necesse est, vt in designatione transitus per hos pontes littera A ter occurrat. Deinde littera B, quia in regionem B tres pontes conducunt, bis debet occurrere, similique modo littera D bis debet occurrere, atque etiam littera C bis. In serie ergo octo litterarum, quibus transitus per septem pontes deberet designari, littera A ter adesse deberet, litterarum vero
B, C,

B, C, et D vnaquaeque bis; id quod in serie octo litterarum omnino fieri nequit. Ex quo perspicuum est, per septem pontes Regiomontanos talem transitum institui non posse.

§. 10. Simili modo de omni alio casu pontium si quidem numerus pontium, qui in quamque regionem conducit fuerit impar, iudicari potest, an per singulos pontes transitus semel fieri queat. Si enim euenit, vt summa omnium vicium, quibus singulae litterae occurrere debent, aequalis sit numero omnium pontium vnitae aucto, tum talis transitus fieri potest; sin autem vt in nostro exemplo accidit, summa omnium vicium maior fuerit numero pontium vnitae aucto, tum talis transitus nequaquam institui potest. Regula autem quam dedi pro numero vicium A ex numero pontium in regionem A deducentium inueniendo aequae valet; siue omnes pontes ex vna regione B, vt in figura repraesentatur, ducant, siue ex diuersis; tantum enim regionem A considero, et inquiri quot vicibus littera A occurrere debeat.

Figura 2.

§. 11. Si autem numerus pontium, qui in regionem A conducunt, fuerit par, tum circa transitum per singulos notandum est, vtrum initio viator cursum suum ex regione A instituerit an non. Si enim duo pontes in A conducant, et viator ex A cursum inceperit, cum littera A bis occurrere debet, semel enim adesse debet ad designandum exitum ex A per alterum pontem, et semel quoque ad designandum reditum

R 3

in

in A per alterum pontem. Sin autem viator ex alia regione cursum inceperit, tum semel tantum littera A occurret, semel enim posita tam aduentum in A quam exitum inde denotabit, vt huiusmodi cursus designare statui.

§. 12. Conducant iam quatuor pontes in regionem A, et viator ex A cursum incipiat, tum in designatione totius cursus littera A ter adesse debet, si quidem per singulos semel transierit. At si ex alia regione ambulare inceperit, tum bis tantum littera A occurret. Si sex pontes ad regionem A conducant, tum littera A, si ex A initium eundi est sumtum, quater occurret, at si non ex A initio exierit viator, tum ter tantum occurrere debet. Quare generaliter si numerus pontium fuerit par, tum eius dimidium dat numerum vicium, quibus littera A occurrere debet, si initium non est in regione A sumtum; dimidium vero vnitae auctum dabit numerum vicium, quoties littera A occurrere debet, initio cursus in ipsa regione A sumto.

§. 13. Quia autem in tali cursu nonnisi ex vna regione initium fieri potest, ideo ex numero pontium, qui in quamvis regionem deducunt, ita numerum vicium, quoties littera quamque regionem denotans occurrere debet, definitio, vt sumam numeri pontium vnitae aucti dimidium, si numerus pontium fuerit impar; ipsius vero numeri pontium medietatem, si fuerit par. Deinde si numerus omnium vicium adaequet numerum pontium vnitae auctum, tum transitus desideratus succedit, at initium ex regione, in quam impar pontium
nume-

numerus ducit, capi debet. Sin autem numerus omnium vicium fuerit vnitare minor, quam pontium numerus vnitare auctus, tum transitus succedet incipiendo ex regione, in quam par pontium numerus ducit, quia hoc modo vicium numerus vnitare est augendus.

§. 14. Proposita ergo quacunq; aquae pontiumque figura, ad iuuestigandum, num quis per singulos semel transire queat, sequenti modo operationem instituo. Primo singulas regiones aqua a se inuicem diremtas litteris A, B, C etc. designo. Secundo sumo omnium pontium numerum, eumque vnitare augeo, atque sequenti operationi praefigo. Tertio singulis litteris A, B, C etc. sibi subscriptis, cuilibet adscribo numerum pontium ad eam regionem deducentium. Quarto eas litteras, quae pares adscriptos habent numeros signo asterisco. Quinto singulorum horum numerorum parium dimidia adiicio, imparium vero vnitare auctorum dimidia ipsis adscribo. Sexto hos numeros vltimo scriptos in vnam summam coniicio, quae summa, si vel vnitare minor fuerit vel aequalis numero supra praefixo, qui est numerus pontium vnitare auctus, tum concludo transitum desideratum perfici posset. Hoc vero est tenendum, si summa inuenta fuerit vnitare minor, quam numerus supra positus, tum initium ambulationis ex regione asteristico notata fieri debere, contra vero ex regione non signata si summa fuerit aequalis numero praescripto. Ita ergo pro casu Regiomontano operationem instituo, vt sequitur:

Nume-

Numerus pontium 7, habetur ergo 8

| <i>Pontes</i> | | |
|---------------|---|---|
| A, | 5 | 3 |
| B, | 3 | 2 |
| C, | 3 | 2 |
| D, | 3 | 2 |

Quia ergo plus prodiit quam 8, huiusmodi transitus nequaquam fieri potest.

Figura 3. §. 15. Sint duae insulae A et B aqua circumdatae, quacum aqua communicent quatuor fluuii, quemadmodum figura repraesentat. Traiecto porro sint super aquam insulas circumdantem et fluuios quindecim pontes *a, b, c, d*, etc. et quaeritur, num quis cursum ita instituere queat, vt per omnes pontes transeat, per nullum autem plus quam semel. Designo ergo primum omnes regiones, quae aqua a se inuicem sunt separatae litteris A, B, C, D, E, F cuiusmodi ergo sunt sex regiones. Dein numerum pontium 15 unitate augeo, et summam 16 sequenti operationi praefigo.

| | |
|------|----|
| A*—8 | 4 |
| B*—4 | 2 |
| C*—4 | 2 |
| D—3 | 2 |
| E—5 | 3 |
| F*—6 | 3 |
| | 16 |

Tertio

Tertio litteras A, B, C etc. sibi inuicem subscribo, et ad quamque numerum pontium, qui in eam regionem ducunt pono, vt ad A octo ducunt pontes, ad B quatuor etc. Quarto litteras, quae pares adiunctos habent numeros asterisco noto. Quinto in tertiam columnam scribo parium numerorum dimidia, impares vero vni-
tate augeo, et semisses appono. Sexto tertiae columnae numeros inuicem addo, et obtineo summam 16. quae cum aequalis sit numero supra posito 16, sequitur transitum desiderato modo fieri posse, si modo cursus vel ex regione D vel E incipiatur, quippe quae non sunt asterisco notatae. Cursus autem ita fieri poterit $EaFbBcFdAeFfCgAbCiDkAmEnApBoE/D$ vbi inter litteras maiusculas pontes simul collocaui, per quos fit transitus.

§. 16. Hac igitur ratione facile erit in casu quam maxime composito iudicare, vtrum transitus per omnes pontes semel tantum fieri queat, an non. Hoc tamen adhuc multo faciliorem tradam modum idem dignoscendi, qui ex hoc ipso modo non difficulter eruatur, postquam sequentes obseruationes in medium protulero. Primo autem obseruo omnes numeros pontium singulis litteris A, B, C adscriptos simul sumtos duplo maiores esse toto pontium numero. Huius rei ratio est, quod in hoc computo, quo pontes omnes in datam regionem ducentes numerantur, quilibet pons bis numeretur; refertur enim quisque pons ad vtramque regionem, quas iungit.

§. 17. Sequitur ergo ex hac obseruatione summam omnium pontium, qui in singulas regiones conducunt, esse numerum parem, quia eius dimidium pontium numero aequatur. Fieri ergo non potest, vt inter numeros pontium in quamlibet regionem ducentium vnus sit impar; neque etiam vt tres sint impares, neque quinque, etc. Quare si qui pontium numeri litteris A, B, C, etc, adscripti sunt impares, necesse est vt eorum numerus sit par, ita in exemplo Regiomontano quatuor erant pontium numeri impares litteris regionum A, B, C, D adscripti, vti ex §. 14. videre licet; atque in exemplo praecedente §. 15, duo tantum sunt numeri impares, litteris D et E adscripti.

§. 18. Cum summa omnium numerorum litteris A, B, C etc. adiunctorum aequet duplum pontium numerum, manifestum est illam summam binario auctam, et per 2 diuisam dare numerum operationi praefixum. Si igitur omnes numeri litteris A, B, C, D etc. adscripti fuerint pares, et eorum singulorum medietates capiantur ad numeros tertiae columnae obtinendos, erit horum numerorum summa veritate minor, quam numerus praefixus. Quamobrem his casibus semper transitus per omnes pontes fieri potest. In quacunque enim regione cursus incipiat, ea habebit pontes numero pares ad se conducentes, vti requiritur. Sic in exemplo Regiomontano fieri potest, vt quis per omnes pontes bis transgrediatur, quilibet enim pons, quasi in duos erit diuisus, numerusque pontium in quamuis regionem ducentium erit par.

§. 19.

§. 19. Praeterea si duo tantum numeri litteris **A**, **B**, **C** etc. adscripti fuerint impares, reliqui vero omnes pares, tum semper desideratus transitus succedet, si modo cursus ex regione ad quam pontium impar numerus tendit iacipiatur. Si enim pares numeri bisecentur atque etiam impares unitate aucti, vti praeceptum est, summa harum medietatum unitate erit maior quam numerus pontium, ideoque aequalis ipsi numero praefixo. Ex hocque porro perspicitur, si quatuor vel sex vel octo etc. fuerint numeri impares in secunda columna, tum summam numerorum tertiae columnae maiorem fore numero praefixo, eumque excedere vel unitate, vel binario vel ternario etc. et idcirco transitus fieri nequit.

§. 20. Casu ergo quocunque proposito statim facillime poterit cognosci, vtrum transitus per omnes pontes semel institui queat an non, ope huius regulae. Si fuerint plures duabus regiones, ad quas ducentium pontium numerus est impar, tum certo affirmari potest, talem transitum non dari. Si autem ad duas tantum regiones ducentium pontium numerus est impar, tunc transitus fieri poterit, si modo cursus in altera harum regionum incipiatur. Si denique nulla omnino fuerit regio, ad quam pontes numero impares conducant, tum transitus desiderato modo institui poterit, in quacunque regione ambulandi initium ponatur. Hac igitur data regula problemati proposito plenissime satisfit.

§. 21. Quando autem inuentum fuerit talem transitum institui posse, quaestio superest quomodo cursus sit dirigendus. Pro hoc sequenti vtor regula; tollantur cogitatione quoties fieri potest, bini pontes, qui ex vna regione in aliam ducunt, quo pacto pontium numerus vehementer plerumque diminuetur, tum quaeratur, quod facile fiet, cursus desideratus per pontes reliquos, quo inuento pontes cogitatione sublati hunc ipsum cursum non multum turbabunt, id quod paululum attendenti statim patebit; neque opus esse iudico plura ad cursum reipsa formandos praecipere.

THEO-

THEOREMATVM

QVORVNDAM

AD

NUMEROS PRIMOS SPECTANTIVM

DEMONSTRATIO.

AVCTORE
Leonb. Eulero.

§. I.

PLurima quondam a *Fermatio* theoremata arithmetica sed sine demonstrationibus in medium sunt prolata, in quibus, si vera essent, non solum eximiae numerorum proprietates continerentur, verum etiam ipsa numerorum scientia, quae plerumque analyseos limites excedere videtur, vehementer esset promota. Quamvis autem iste insignis Geometra de pluribus, quae proposuit, theorematis asseruerit se ea vel demonstrare posse, vel saltem de eorum veritate esse certum: tamen nusquam, quantum mihi constat, demonstrationes exposuit. Quin potius *Fermatius* videtur maximam theorematum suorum numericorum partem per inductionem esse assecutus, quippe quae via fere vnica ad huiusmodi proprietates eruendas patere videatur. At vero quam parum inductionibus in hoc negotio tribui possit pluribus exemplis possem declarare; ex quibus autem vnicum ab ipso *Fermatio* desumptum attulisse sufficiat. Lo-

S 3

quor

quor nimirum de illo theoremate, cuius falsitatem iam aliquot ab hinc annis ostendi, quo *Fermatius* asserit omnes numeros hac forma $2^{n^2} + 1$ comprehensos esse numeros primos. Ad veritatem autem huius propositionis euincendam inductio omnino sufficere videatur. Nam praeterquam quod omnes isti numeri minores quam 100000 sint reuera primi, demonstrari etiam facile potest nullum numerum primum, 600 non excedentem hanc formulam $2^{n^2} + 1$, quantumuis magnus etiam numerus pro n substituatur, metiri. Cum tamen nihilominus constet hanc propositionem veritati non esse consentaneam, facile intelligitur, quantum inductio in huiusmodi speculationibus valeat.

§. 2. Hanc ob rationem omnes huiusmodi numerorum proprietates, quae sola inductione nituntur, tam diu pro incertis habendas esse arbitror, donec illae vel apodicticis demonstrationibus muniantur vel omnino refellantur. Non plus etiam illis theorematis, quae ego ipse illi schediasmati, in quo de memorato theoremate *Fermatiano* numerisque perfectis tractavi, subieci, fidentem esse censerem, si tantum inductionibus, qua via quidem sola tum temporis ad eorum cognitionem perueni, niterentur. Nunc vero, postquam peculiari methodo demonstrationes horum theorematum firmissimas sum adeptus, de veritate eorum non amplius est dubitandum. Quocirca tam ad veritatem illorum theorematum ostendendam, quam ad methodum ipsam, quae forte etiam in aliis numerorum inuestigationibus utilitatem

litatem afferre poterit, in hac dissertatione meas demonstrationes explicare constitui.

§. 3. Propositio autem, quam hic demonstrandum suscepi, est sequens:

Significante p numerum primum, formula $a^{p-1} - 1$ semper per p diuidi poterit, nisi a per p diuidi queat.

Ex hac enim propositione demonstrata sponte reliquorum theorematum veritas fuit. Casum quidem formulae propositae, quo est $a=2$, iam ab aliquo tempore demonstratum dedi; attamen tum demonstrationem ad generalem formulam extendere non licuit. Quamobrem primo huius casus probationem afferre conueniet, quo transitus ad generaliora eo facilius reddatur. Demonstranda igitur erit sequens propositio:

Significante p numerum primum imparem quemcunque, formula $2^{p-1} - 1$ semper per p diuidi poterit.

Demonstratio.

Loco 2 ponatur $1 + 1$, eritque $(1 + 1)^{p-1} = 1 + \frac{p-1}{1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} + \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ etc. cuius seriei terminorum numerus est $= p$ et proinde impar. Praeterea quilibet terminus, quamuis habeat fractionis speciem dabit numerum integrum; quisque enim numerator, vti satis constat, per suum denominatorem diuidi potest. Demto igitur seriei termino primo 1 erit $(1 + 1)^{p-1} - 1 = 2^{p-1} - 1 = \frac{p-1}{1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} + \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} +$ etc. quorum

quorum numerus est $= p - 1$ et propterea par. Col-
ligantur igitur bini quique termini in vnam summam,
quo terminorum numerus fiat duplo minor; erit 2^{p-1}
 $- 1 = \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$
 $+ \text{etc.}$ cuius seriei vltimus terminus ob p numerum
imparem erit $\frac{p(p-1)(p-2) \dots (p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (p-1)} = p$. Ap-
paret autem singulos terminos per p esse diuisibiles,
nam, cum p sit numerus primus et maior quam vllus deno-
minatorum factor, nusquam diuisione tolli poterit. Quam-
obrem si fuerit p numerus primus impar, per illum
semper $2^{p-1} - 1$ diuidi poterit. Q. E. D.

Aliter

Si $2^{p-1} - 1$ per numerum primum p diuidi pot-
est, diuidi quoque poterit eius duplum $2^p - 2$ et vicif-
sim. At est $2^p = (1 + 1)^p = 1 + p + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} +$
 $\frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \dots + p + 1$. Quae series terminis
primo et vltimo truncata dat $p + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
 $+ \dots + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} + p = 2^p - 2$. Perspicuum autem
est istius seriei quemuis terminum per p esse diuisibi-
lem, si quidem p fuerit numerus primus. Quamobrem
etiã semper $2^p - 2$ per p et propterea quoque 2^{p-1}
 $- 1$ per p diuidi poterit, nisi sit $p = 2$. Q. E. D.

§. 5. Cum igitur $2^{p-1} - 1$ per numerum primum
imparem p diuidi queat; facile intelligitur per p quoque
diuidi posse hanc formulam $2^{m(p-1)} - 1$ denotante m nu-
merum quemcunque integrum. Quare sequentes for-
mulae quoque omnes $4^{p-1} - 1, 8^{p-1} - 1, 16^{p-1} - 1$
etc.

etc. per numerum primum p diuidi poterunt. Demonstrata igitur est veritas theorematis generalis pro omnibus casibus, quibus a est quaeuis binarii potestas, et p quicumque numerus primus praeter binarium.

§. 5. Demonstrato nunc hoc theoremate eius ope sequens quoque demonstrabimus.

Theorema.

Denotante p numerum primum quemcunque praeter 3, per illum semper haec formula $3^{p-1} - 1$ diuidi poterit.

Demonstratio.

Si $3^{p-1} - 1$ per numerum primum p excepto 3 diuidi potest, tum $3^p - 3$ per p diuidi poterit, quoties p fuerit numerus primus quicumque, et vicissim. Est vero $3^p = (1 + 2)^p = 1 + p \cdot 2 + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} 4 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 8 \dots + p \cdot 2^{p-1} + 2^p$, cuius seriei singuli termini praeter primum et vltimum per p diuidi poterunt, si quidem p fuerit numerus primus. Per p igitur diuidi potest ista formula $3^p - 2^p - 1$, quae aequalis est huic $3^p - 3 - 2^p + 2$. At $2^p - 2$ semper per p numerum primum diuidi potest; ergo etiam $3^p - 3$. Quare $3^{p-1} - 1$ semper per p diuidi potest, quoties p fuerit numerus primus excepto 3. Q. E. I.

§. 6. Eodem modo vltius progredi liceret ab hoc ipsius a valore ad sequentem vnitatem maiorem. Sed quo demonstrationem generalis theorematis magis concinnam magisque genuinam efficiam, sequens praemitto

Tom. VIII.

T

Theo-

Theorema.

Denotante p numerum primum, si $a^p - a$ per p diuidi potest; tum per idem p quoque formula $(a + 1)^p - a - 1$ diuidi poterit.

Demonstratio.

Resoluatur $(1 + a)^p$ consueto more in seriem, erit $(1 + a)^p = 1 + p a + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} a^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 + \dots + p a^{p-1} + a^p$; cuius seriei singuli termini per p diuidi possunt præter primum et vltimum; si quidem p fuerit numerus primus. Quamobrem $(1 + a)^p - a^p - 1$ diuisionem per p admittet; hæc autem formula congruit cum hac $(1 + a)^p - a - 1 - a^p + a$. At $a^p - a$ per hypothesin per p diuidi potest, ergo et $(1 + a)^p - a - 1$. Q. E. D.

§. 7. Cum igitur, posito quod $a^p - a$ per p numerum primum diuidi queat, per p quoque hæc formula $(a + 1)^p - a - 1$ diuisionem admittat; sequitur etiam $(a + 2)^p - a - 2$, item $(a + 3)^p - a - 3$ et generaliter $(a + b)^p - a - b$ per p diuidi posse. Posito autem $a = 2$, quia $2^p - 2$, vti iam demonstrauius, per p diuidi potest, perspicuum est formulam $(b + 2)^p - b - 2$ diuisionem per p admittere debere, quicumque integer numerus loco b substituatur. Metietur ergo p formulam $a^{p-1} - 1$, nisi fuerit $a = p$ vel multiplo ipsius p . Atque hæc est demonstratio generalis theorematis, quam tradere suscepi.

ME-

METHODVS VNIVERSALIS SERIES SVMMANDI

VLTERIVS PROMOTA.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Methodus vniuersalis series summandi, quam ex-
eunte praeterito anno exposui, latissime quidem
patet, cum ex solo termino generali seriei da-
to exhibeat formulam summae seriei aequalem; interim
tamen difficulter ad eiusmodi series, quarum termini ge-
nerales algebraice exprimi non possunt, sed vel expo-
nenciales quantitates inuoluunt vel etiam transcendentis,
accommodatur. Cum enim posito termino X , cuius in-
dex est x , sit summa seriei a primo termino vsque ad X
aequalis $\int X dx + \frac{X}{1.2} + \frac{dX}{1.2.3.2 dx} - \frac{d^2 X}{1.2.3.4.5.6 dx^2} +$ etc.
facile apparet si X saltem huiusmodi quantitates a^x in-
uoluat, tam expressionem $\int X dx$ quam differentialia
ipsius X ad logarithmos deduci, vnde maxima oritur
molestia in summa quaesita saltem proxime assignanda.

§. 2. Praeterea etsi X fuerit quantitas algebraica,
tamen saepius eius differentialia, quae ad summam ob-
tinendam sumi debent, tam sunt complicata, vt non
solum difficulter exhiberi queant, sed etiam seriem non
multum conuergentem praebent, vti id euenit in se-
rie $\frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}$ etc. circuli quadraturam continente,
Cuius difficultatis ratio in eo potissimum versatur, quod

T 2

indi-

indices terminorum vnitare crescentes assumi, quas si alio numero crescentes sumissem, terminus generalis X forte tractabilior prodisset. Denique si terminus generalis X ne quidem exhiberi potest, vt id in plurimis seriebus accidit, tum data formula summam exhibens ne vsum quidem habere potest.

§. 3. His difficultatibus quomodo occurrere possem diu sum meditatus, tandemque obseruavi ex eodem principio, cuius ope illam formulam inuenissem, alias quoque formulas elici posse ad quasque series summandas idoneas; quibus exhibitis pro quantis oblata serie, ea formula sit eligenda, quae esset commodissima. Ex quouis autem huiusmodi formularum genere conueniens visum est, vt binae formulae tradantur, quarum altera apta sit ad series a termino primo ad datum vsque terminum summandas, cuiusmodi erat formula iam ante a me communicata, altera vero ad series a dato termino in infinitum vsque summandas. Quamuis enim haec posterior summatio ex priore fluat, tamen expediet pro hoc casu peculiarem formulam praebuisse.

§. 4. Incipiam igitur a seriebus, quarum terminus generalis algebraice potest exhiberi, pro quibus etiam methodus in praecedente schediasmate data inseruit; sed indices in progressionem quacunque arithmetica progredientes assumam, quo formula inuenta latius pateat faciliusque commodiorem calculum suppeditet. Sit igitur series ab initio ad datum vsque terminum summanda cum indicibus sequens:

A

SERIES SUMMANDI ULTERIVS PROMOTA. 149

$$A + B + C + \dots + X = S$$

vbi indices quantitate b crescunt, primique termini A index est a . Ponatur huius seriei summa $= S$, in qua expressione si loco x substituatur $x-b$, perspicuum est eam exhibituram summam eandem demto X seu fore aequalem ipsi $S-X$. At si in S loco x ponatur $x-b$ tum prodibit $S - \frac{bdS}{1dx} + \frac{b^2 d^2 S}{1.2 dx^2} - \frac{b^3 d^3 S}{1.2.3 dx^3} + \dots$ etc. vnde habetur sequens aequatio $X = \frac{bdS}{1dx} - \frac{b^2 d^2 S}{1.2 dx^2} + \frac{b^3 d^3 S}{1.2.3 dx^3} - \frac{b^4 d^4 S}{1.2.3.4 dx^4} + \dots$ etc. Ex hac vero aequatione elicitur ista formula

$$S = \int \frac{X dx}{b} + \frac{X}{1.2} + \frac{bdX}{1.2.3.2 dx} - \frac{b^3 d^3 X}{1.2.3.4.5.6 dx^3} + \frac{b^5 d^5 X}{1.2.3.4.5.6.7 dx^5} - \frac{b^7 d^7 X}{1.2.3.4.5.6.7.8 dx^7} + \frac{b^9 d^9 X}{1.2.3.4.5.6.7.8.9 dx^9} - \frac{b^{11} d^{11} X}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 dx^{11}} + \frac{b^{13} d^{13} X}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11 dx^{13}} - \frac{b^{15} d^{15} X}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12 dx^{15}} + \frac{b^{17} d^{17} X}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13 dx^{17}} - \dots$$

etc. cui expressioni tanta quantitas constans est addenda vt posito $x=a$ fiat $S=A$, vel posito $x=a-b$ fiat $S=0$.

§. 5. Si ponatur $X=x^n$, seu si invenienda fit summa huius seriei $a^n + (a+b)^n + (a+2b)^n + \dots + x^n$, erit $\int X dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$; $\frac{dX}{dx} = nx^{n-1}$, $\frac{d^2 X}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$ etc. Hinc ergo erit summa quaefita $S = \frac{x^{n+1}}{(n+1)b} + \frac{x^n}{1.2} + \frac{nbx^{n-1}}{1.2.3.2} - \frac{n(n-1)(n-2)b^3 x^{n-3}}{1.2.3.4.5.6} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)b^5 x^{n-5}}{1.2.3.4.5.6.7.6} - \dots - \frac{a^{n+1}}{(n+1)b} + \frac{a^n}{1.2} - \frac{nb a^{n-1}}{1.2.3.2} + \frac{n(n-1)(n-2)b^3 a^{n-3}}{1.2.3.4.5.6} - \dots$

T 3 n(n-1)

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)b^5 a^{n-5}}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc. adiecta debita}$$

constante. Summa ergo seriei $a + (a+b) + (a+2b) + \dots + x$ erit $= \frac{x^2}{2b} + \frac{x}{3} + \frac{b}{12} - \frac{a^2}{2b} + \frac{a}{3} - \frac{b}{12} = \frac{x^2 - a^2 + bx + ab}{2b}$,
 atque summa seriei $a^2 + (a+b)^2 + (a+2b)^2 + \dots + x^2 = \frac{x^3}{3b} + \frac{x^2}{2} + \frac{bx}{6} - \frac{a^3}{3b} + \frac{a^2}{2} - \frac{ab}{6} = \frac{2x^3 - 2a^3 + 3bx^2 + 3a^2b + b^2x - ab^2}{6b}$

Quae expressiones similes sunt eis, quas pro summis potestatum numerorum naturalium in superiori dissertatione dedi, atque ex iis quoque facile formantur.

§. 6. Sit nunc ad alteram huius generis formulam inueniendam series a dato termino X, cuius index sit x in infinitum vsque summanda, haec scilicet

$$X + Y + Z + \text{etc. infinitum} = S.$$

In summa ergo S si pro x scribatur $x + b$ prodibit $S - X$, erit adeo $X = \frac{b d S}{1. dx} - \frac{b^2 d d S}{1.2 dx^2} - \frac{b^3 d^2 S}{1.2.3 dx^3} - \text{etc.}$ vnde vt supra reperietur $S = - \int \frac{X dx}{b} + \frac{X}{1.2} - \frac{b d X}{1.2.3.2 dx} + \frac{b^2 d^2 X}{1.2.3.4.5.6 dx^5}$

$$= \frac{b^5 d^5 X}{691 b^{11} d^{11} X} + \frac{b^4 d^4 X}{35 b^{13} d^{13} X} - \frac{b^3 d^3 X}{3617 b^{15} d^{15} X} + \dots$$

— $\frac{2427279 b^{17} d^{17} X}{1.2.3 \dots 19.1890 d x^{17}} + \text{etc.}$ Cui formulae tanta constans est adicienda vt fiat $S = 0$, si ponatur $x = \infty$; si enim terminus X iam fuerit infinitesimus seu vltimus in serie, summa debet esse euanesceus, si quidem series finitam habeat summam, pro quo casu haec formula est accommodata.

§. 7. Quo vsus huius formulae appareat, fit $X = \frac{1}{x^2}$ seu ista series $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+b)^2} + \frac{1}{(x+2b)^2} + \text{etc.}$ in infinitum sum-

SERIES SYMMANDI VLTERIVS PROMOTA. 151

summanda erit ob $\int X dx = -\frac{x}{2}, \frac{dX}{dx} = -\frac{2}{x^2}, \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{2 \cdot 3}{x^3}$
 etc. $S = \frac{1}{bx} + \frac{1}{2x^2} + \frac{b}{6x^3} - \frac{b^3}{30x^5} + \frac{b^5}{42x^7} - \frac{b^7}{30x^9} + \frac{b^9}{66x^{11}}$
 $- \frac{691b^{11}}{2730x^{13}} + \frac{7b^{13}}{6x^{15}} - \frac{3617b^{15}}{510x^{17}} + \frac{242279b^{17}}{35910x^{19}} - \text{etc.}$ quae expref-
 fio constantem non requirit, cum per se euanescat po-
 fito $x = \infty$. Eo magis autem conuergit haec series,
 quo maior fuerit x respectu ipsius b . Quare si datae
 seriei aliquot termini initiales addantur actu, reliquorum
 hac methodo summa inuenta illi aggregato addita dabit
 summam propositae seriei in infinitum continuatae.

§. 8. Sed missis his, quae priorem regulam tan-
 tum commodiorem reddunt, progredior ad series sum-
 mandas, ad quas illa formula non sufficit. Sit nimi-
 rum series summanda, in qua signa terminorum alter-
 nantur, uti

$$A - B + C - D + \dots + X - Y = S$$

in qua serie cum sit Y talis functio ipsius $x+b$ qualis
 X est ipsius x , erit $Y = X + \frac{bdx}{1dx} + \frac{b^2ddx}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} + \frac{b^3d^2x}{1 \cdot 2 \cdot dx^3}$
 $+ \text{etc.}$ Deinde si in S loco x ponatur $x-2b$ pro-
 dicit $S-X+Y$; erit ergo $-Y+X = \frac{2bdS}{1dx} - \frac{4b^2dds}{1 \cdot 2 \cdot dx^2} +$
 $+\frac{8b^3d^2S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} - \frac{16b^4d^4S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} + \frac{32b^5d^5S}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot dx^5} - \text{etc.} = -\frac{bdX}{1 \cdot dx} - \frac{b^2d^2X}{1 \cdot 2 \cdot dx^2}$
 $-\frac{b^3d^3X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dx^3} - \frac{b^4d^4X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^4} - \text{etc.}$ Ponatur $\frac{dS}{dx} = \frac{a dX}{dx} + \frac{c d^2X}{dx^2}$
 $+\frac{y d^3X}{dx^3} + \frac{\delta d^4X}{dx^4} \text{ etc.}$ et comparandis terminis homologis
 prodicit $S = C - \frac{X}{2} - \frac{3bdX}{4dx} - \frac{b^2ddX}{2dx^2} - \frac{3b^2d^2X}{16dx^3} - \frac{b^4d^4X}{24dx^4} - \frac{9b^5d^5X}{1440dx^5}$
 $- \text{etc.}$ et introducendo Y erit $S = C + Y + \frac{X}{2} + \frac{bdX}{1 \cdot 2 \cdot dx}$
 $-\frac{b^2d^2X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dx^2} + \frac{3b^3d^3X}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot dx^3} \text{ etc.}$ Atque ideo erit $A - B$
 $+ C$

+ C - D + E - F - - - - + X = Const. + $\frac{x}{2}$ + $\frac{bdx}{1.2.2dx}$
 $\frac{b^2 d^3 x}{1.2.3.4.2 dx^3}$ + $\frac{3b^5 d^5 x}{1.2.3.4.5.6.2 dx^5}$ etc. vbi constans vt ante
 ita debet esse comparata, vt fiat haec summa = A po-
 fito $x = a$.

§. 9. Vterius autem huius formulae terminis con-
 tinuatis prodibit posita summa huius feriei

$$A - B + C - D - - - - + X = S$$

$S = \text{Const.} + \frac{x}{1.2} + \frac{bdx}{1.2.2dx} - \frac{b^2 d^3 x}{1.2.3.4.2 dx^3} + \frac{3b^5 d^5 x}{1.2.3.4.5.6.2 dx^5} -$
 $\frac{17b^7 d^7 x}{1.2.3.4.5.6.7.8.2 dx^7} + \frac{155b^9 d^9 x}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.2 dx^9} - \frac{2073b^{11} d^{11} x}{1.2.3. - - - - 12.2 dx^{11}}$
 $+ \frac{382276b^{13} d^{13} x}{1.2.3. - - - - 14.2 dx^{13}} - \text{etc.}$ Si ergo quaerendus sit
 valor huius progressionis $a^2 - (a + b)^2 + (a + 2b)^2 -$
 $(a + 3b)^2 + \text{etc.} - - - - + x^2$, qui fit S: erit ob $\frac{dx}{dx}$
 $= 2x$, $S = \text{Const.} + \frac{x^2}{2} + \frac{bx}{2}$. Constans vero C in-
 uenietur ponendo $x = a$ eritque $S = \frac{a^2 - ab + x^2 + bx}{2}$. Exempli
 gratia erit $1 - 4 + 9 - 16 + 25 - - - - + 121 = 66$.

§. 10. Consideremus nunc huiusmodi feriem in in-
 finitum productam, scilicet

$$S = X - Y + Z - \text{etc. in infinitum.}$$

Erit ergo $S + \frac{2bdS}{1.d x} + \frac{4b^2 d^2 S}{1.2 dx^2} + \frac{8b^3 d^3 S}{1.2.3 dx^3} + \text{etcet.}$
 $= S - X + Y$, seu $X - Y = -\frac{bdS}{1.d x} - \frac{4b^2 d^2 S}{1.2 dx^2}$ etc. vnde
 cum fit $Y = X + \frac{bdx}{1.d x} + \frac{b^2 d d x}{1.2 dx^2} + \frac{b^3 d^2 x}{1.2.3 dx^3} + \text{etc.}$ in-
 uenietur $S = \frac{x}{1.2} - \frac{bdx}{1.2.2 dx} + \frac{b^2 d^3 x}{1.2.3.4.2 dx^3} - \frac{3b^5 d^5 x}{1.2.3.4.5.6.2 dx^5} +$
 $\frac{17b^7 d^7 x}{1.2.3. - - - - 8.2 dx^7} - \frac{155b^9 d^9 x}{1.2.3. - - - 10.2 dx^9} + \frac{2073b^{11} d^{11} x}{1.2.3. - - - 12.2 dx^{11}} - \frac{382276b^{13} d^{13} x}{1.2.3. - 14.2 dx^{13}}$
 $+ \text{etc.}$

SERIES SYMMANDI VLTERIVS PROMOTA. 153

$\frac{1}{x}$ etc. + Const. Quae constans ita debet esse comparata vt fiat $S=0$ posito $x=\infty$. Huius igitur formulae ope plurimae series lente conuergentes, in quibus terminorum signa alternantur, valde prope summari poterunt.

§. 11. Sit $X = \frac{1}{x}$, ita vt inueniri debeat summa huius seriei $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+2b} - \frac{1}{x+3b} +$ etc. in infinitum. Cum ergo sit $X = \frac{1}{x}$ erit $\frac{dX}{dx} = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$, $\frac{d^3X}{dx^3} = -\frac{6}{x^4}$, $\frac{d^4X}{dx^4} = \frac{24}{x^5}$ hincque fiet $S = \frac{1}{2x} + \frac{b}{2 \cdot 2x^2} - \frac{b^2}{4 \cdot 2x^3} + \frac{3b^3}{6 \cdot 2x^4} - \frac{17b^4}{8 \cdot 2x^5} + \frac{155b^5}{10 \cdot 2x^6} - \frac{2073b^6}{12 \cdot 2x^7} + \frac{38227b^7}{14 \cdot 2x^8}$ etc. vbi constantis additione non est opus. Vt fit $b=2$ atque $x=25$, erit seriei $\frac{1}{25} - \frac{1}{27} + \frac{1}{29} - \frac{1}{31} + \frac{1}{33} -$ etc. summa $= \frac{2}{100} + \frac{8}{100^2} - \frac{256}{100^3} + \frac{8 \cdot 4^6}{100^4} - \frac{17 \cdot 4^8}{100^5} + \frac{21 \cdot 128 \cdot 4^{10}}{100^6} - \frac{691 \cdot 256 \cdot 4^{12}}{100^7} + \frac{5461 \cdot 2048 \cdot 4^{14}}{100^8}$ etc. $= 0,020797471918$ q. pr. ad quam si praecedentium terminorum $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ etc. - - - - $-\frac{1}{23}$ actu inuenta summa addatur, prodibit quarta peripheriae pars radio existente $= 1$.

§. 12. Hae iam formulae hactenus traditae, quo facile expediri queant calculo, requirunt, vt X sit functio algebraica ipsius x , cuius differentialia cuiusque gradus commode exhiberi queant. Vix enim vel ne vix quidem istae formulae in vsum vocari possent, si huiusmodi quantitas exponentialis n^x in termino generali progressionis inesset. Pro huiusmodi ergo progressionibus, hoc termino generali $X n^x$, vbi X vt ante denotat functionem algebraicam ipsius x , contentis peculiaribus

Tom. VIII. V res

res formulas summatrices erui conueniet. Sit itaque ista Series

$$A n^a + B n^{a+b} + C n^{a+2b} + \dots + X n^x$$

ad summandum proposita; ponaturque summa = $S n^x$. Haec formula autem posito $x-b$ loco x abibit in hanc $n^{x-b} (S - \frac{b d S}{1 dx} + \frac{b^2 d^2 S}{1.2 dx^2} - \frac{b^3 d^3 S}{1.2.3 dx^3} + \text{etc.})$ quae aequalis esse debet priori summae $S n^x$ demto ultimo termino $X n^x$. Habebitur ergo ista aequatio $S n^b - X n^b = S - \frac{b d S}{1 dx} + \frac{b^2 d^2 S}{1.2 dx^2} - \frac{b^3 d^3 S}{1.2.3 dx^3} + \frac{b^4 d^4 S}{1.2.3.4 dx^4} - \text{etc.}$ Ex qua aequatione valor ipsius S erui debet.

§. 13. Ponatur igitur $n^b = m$, eritque $S = \frac{m X}{m-1} - \frac{\alpha b d X}{\alpha(m-1)^2 dx} + \frac{\beta b^2 d d X}{1.2(m-1)^3 dx^2} - \frac{\gamma b^3 d^3 X}{1.2.3(m-1)^4 dx^3} + \frac{\delta b^4 d^4 X}{1.2.3.4(m-1)^5 dx^4} - \frac{\epsilon b^5 d^5 X}{1.2.3.4.5(m-1)^6 dx^5} + \text{etc.}$ Hinc terminis homologis comparandis posito breuitatis ergo $m-1 = p$ vt sequitur

$$\begin{aligned} \alpha &= m \\ \beta &= 2\alpha + mp \\ \gamma &= 3\beta + 3\alpha p + mp^2 \\ \delta &= 4\gamma + 6\beta p + 4\alpha p^2 + mp^3 \\ \epsilon &= 5\delta + 10\gamma p + 10\beta p^2 + 5\alpha p^3 + mp^4 \text{ etc.} \end{aligned}$$

vnde pro litteris $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. sequentes obtinentur valores:

$$\begin{aligned} \alpha &= m \\ \beta &= 2m + mp \\ \gamma &= 6m + 6mp + mp^2 \\ \delta &= 24m + 36mp + 14mp^2 + mp^3 \\ \epsilon &= 120m + 240mp + 150mp^2 + 30mp^3 + mp^4 \text{ etc.} \end{aligned}$$

hic

SERIES SVMMANDI VLTERIVS PROMOTA. 155

hic quilibet numerus est multipulum superscripti cum praecedente iuncti, vti

$$\begin{aligned} 30 &= 2(1 + 14) \\ 150 &= 3(14 + 36) \\ 240 &= 4(36 + 24) \\ 120 &= 5(24 + 0) \end{aligned}$$

vel restituto $m-1$ loco p , vti sequitur:

1. $\alpha = m$
2. $\beta = m + m^2$
3. $\gamma = m + 4m^2 + m^3$
4. $\delta = m + 11m^2 + 11m^3 + m^4$
5. $\epsilon = m + 26m^2 + 66m^3 + 26m^4 + m^5$
6. $\zeta = m + 57m^2 + 302m^3 + 302m^4 + 57m^5 + m^6$ etc.

qui valores ita progrediuntur, vt sit coefficiens ψ , cuius index est k , $= m + (2^k - \frac{(k+1)}{1})m^2 + (3^k - \frac{(k+1)}{1})2^k + \frac{(k+1)k}{1.2}m^3 + (4^k - \frac{(k+1)}{1})3^k + \frac{(k+1)k}{1.2}2^k - \frac{(k+1)k(k-1)}{1.2.3}m^4 + \dots + m^k$.

§. 14. Ex his ergo colligitur seriei propositae

$$A n^a + B n^{a+b} + C n^{a+2b} + \dots + X n^x$$

$$\begin{aligned} \text{summa} &= n^x \left(\frac{n^b X}{n^b - 1} - \frac{n^b b dX}{1(n^b - 1)^2 dx} + \frac{(n^{2b} + n^b) b^2 ddX}{1.2(n^b - 1)^3 dx^2} - \right. \\ &\left. \frac{(n^{3b} + 4n^{2b} + n^b) b^3 d^3 X}{1.2.3(n^b - 1)^4 dx^3} + \frac{(n^{4b} + 11n^{3b} + 11n^{2b} + n^b) b^4 d^4 X}{1.2.3.4(n^b - 1)^5 dx^4} - \text{etc.} \right) \\ &\qquad \qquad \qquad V \ 2 \qquad \qquad \qquad + \text{Const.} \end{aligned}$$

+ Const. quae ita debet esse comparata vt posito $x = a$ fiat summa $= An^a$. Si ponatur $n^b = -1$, abibit series in pure algebraicam, in qua signa terminorum alternantur; hincque eadem formula ponendo -1 loco n^b , resultat, quam pro eodem casu iam supra §. 9. inuenimus. Seriei vero in infinitum excurrentis

$$X n^x + Y n^{x+b} + Z n^{x+2b} + \text{etc.}$$

in infinitum summa est

$$= n^x \left(\frac{-X}{n^b - 1} + \frac{n^b b d X}{1 (n^b - 1)^2 dx} - \frac{(n^{2b} + n^b) b^2 d d X}{1. 2 (n^b - 1)^2 dx^2} + \right. \\ \left. \frac{(n^{3b} + 4n^{2b} + n^b) b^3 d^3 X}{1. 2. 3 (n^b - 1)^3 dx^3} - \frac{(n^{4b} + 11n^{3b} + 11n^{2b} + n^b) b^4 d^4 X}{1. 2. 3. 4 (n^b - 1)^4 dx^4} \right. \\ \left. + \text{etc.} \right) + \text{Const.}$$

quae constans ita debet esse comparata vt posito $x = \infty$ summa fiat $= 0$: quod quidem semper accidere solet per se, ita vt constante non sit opus, si quidem series conuergit, summamque habet finitam.

§. 15. Ex priore formula pro huiusmodi seriebus ad datum vsque terminum summandis intelligitur, si X fuerit functio algebraica talis ipsius x , vt tandem altiora eius differentialia euanescant, tum terminum summatorum reuera exhiberi posse. Quamobrem si series cuius terminus generalis est X fuerit summabilis, tum quoque series, cuius terminus generalis est $X n^x$, erit summabilis. Sic proposita serie $a^2 n^a + (a+b)^2 n^{a+b} + (a+2b)^2 n^{a+2b} + \dots + x^2 n^x$ erit eius summa $\frac{x^2}{(n^b - 1)^2}$

ponatur summa = S. ABC - - - - - V X. Abibit ergo haec summa posito $x - b$ loco x in hanc ABC - - V ($S - \frac{b d s}{1. d x} + \frac{b^2 d d s}{1.2. d x^2} - \frac{b^3 d^3 s}{1.2.3. d x^3}$ etc.) quae aequalis esse debet priori summae demto termino vltimo, id est huic quantitati AB - - - - V (S X - X). Hanc ob rem habebitur ista aequatio $S X - X = S - \frac{b d s}{1. d x} + \frac{b^2 d d s}{1.2. d x^2} - \frac{b^3 d^3 s}{1.2.3. d x^3} + \frac{b^4 d^4 s}{1.2.3.4. d x^4} - \text{etc.}$

Ex hac aequatione valor ipsius S erutus erit iste $S = \frac{X}{X-1} + E + F + G + \text{etc.}$ qui termini ita progrediuntur, vt posito $\frac{X}{X-1} = D$ fit $E = \frac{-b d D}{(X-1) d x}$; $F = \frac{-b d E}{1(X-1) d x} + \frac{b^2 d d D}{1.2(X-1) d x^2}$; $G = \frac{-b d F}{1(X-1) d x} + \frac{b^2 d d E}{1.2(X-1) d x^2} - \frac{b^3 d^3 D}{1.2.3(X-1) d x^3}$; atque ita porro. Adeo vt summa feriei propositae sit = ABC - - - - - V X (D + E + F + G - - - - - etc.). Seriei vero in infinitum continuatae

$\overset{x}{A} B C - - - V X + \overset{x+b}{A} B C D - - - - V X Y + \text{etc.}$
 summa erit = ABC - - - - - V X (1 - D - E - F - G - - - - - etc.) + Const. Vt si quaeratur summa huius feriei $\frac{1}{1.2.3 \dots x} + \frac{1}{1.2.3 \dots x(x+1)} + \text{etc.}$ in infinitum erit $b = 1$, $X = \frac{1}{x}$, atque $D = \frac{1}{1-x}$. Tum vero $E = \frac{-x}{(1-x)^2}$; $F = \frac{x(2+x)}{(1-x)^3}$ etc. summa ergo seriei propositae ob constantem euanescentem erit = $\frac{1}{1.2.3 \dots x} (1 + \frac{1}{x-1} - \frac{x}{(x-1)^2} + \frac{x(x+2)}{(x-1)^3}$ etc.). Ex his vero traditis facile intelligitur, cuiusmodi summae formam assumere oporteat in quouis casu oblato, quo summa minimo labore inueniatur.

CYR-

CVRVARVM
MAXIMI MINIMIVE
PROPRIETATE GAUDENTIVM
INVENTIO. NOVA ET FACILIS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Q Vanquam hoc problema, quod sub initio huius Tabb. IX. X. seculi ab acutissimo Geometra *Iac. Bernoulli* cum erat propositum tum solutum, iam a pluribus eximiis viris tractatum atque diuersas solutiones nactum, a me vero demum ante aliquot annos in latiore sensu prolatum est; atque methodo tam facili solutum, vt nihil amplius desiderari posse videatur: tamen nuper in eiusmodi huius generis quaestiones incidi, ad quas soluendas formulae tum temporis a me exhibitae, non erant sufficientes, adeo vt coactus fuerim nouas formulas latius patentes contemplari, atque pro iis ad problema soluendum idoneos valores inuestigare. In hoc autem negotio occupatus non solum faciliorem quam ante detexi viam ad solutiones huiusmodi problematum perueniendi, sed etiam omnes 24 formulas, quas ante tractaueram, in vnicam sum complexus, atque praeterea ad alias adhuc latius patientes calculum accommodare licuit.

§. 2.

§. 2. Quo autem calculum, qui pro formulis tantopere compositis modo designandi consueto nimis fieret prolixus et taediosus, tractabiliorem redderem, visum est a recepto signandi modo aliquantum recedere, atque alia signa adhibere, quibus cum breuitati tum potissimum distinctioni consulere. Sic quantitatem variabilem y in situm proximum promotam ita designabo ^I, hancque si denuo in situm proximum transferatur ita ^{II} y ; et si ulterius in situm proximum promoueat ^{III}ur mihi indicabitur per y et ita porro, adeo ut mihi sit

$$\overset{\text{I}}{y} = y + dy$$

$$\overset{\text{II}}{y} = y + 2 dy + ddy$$

$$\overset{\text{III}}{y} = y + 3 dy + 3 ddy + d^3 y \text{ etc.}$$

Simili igitur modo in sequentibus erit

$$\overset{\text{I}}{dy} = dy + ddy$$

$$\overset{\text{II}}{dy} = dy + 2 ddy + d^3 y$$

$$\overset{\text{III}}{dy} = dy + 3 ddy + 3 d^3 y + d^4 y$$

atque similiter porro

$$\overset{\text{I}}{ddy} = ddy + d^3 y$$

$$\overset{\text{II}}{ddy} = ddy + 2 d^3 y + d^4 y$$

$$\overset{\text{III}}{ddy} = ddy + 3 d^3 y + 3 d^4 y + d^5 y \text{ etc.}$$

§. 3.

§. 3. His praemonitis problemata primae classis Figura 1.
 aggredior, in quibus quaeritur curua, quae inter omnes
 omnino curuas inter eosdem terminos fitas maximi vel
 minimi cuiusdam proprietate gaudeat. Sit igitur oa
 curua quaesita ad axem OA relata, ponaturque $OA = x$,
 $Aa = y$, et arcus $oa = s$. Tum sumtis duobus abscissae
 elementis aequalibus $AB = BC = dx$, ducantur applica-
 tae Bb et Cc . Deinde concipiantur duo alia elementa
 curuae proxima $a\mathcal{E}$, $\mathcal{E}c$ puncta a et c iungentia. Qui-
 bus factis manifestum est ex natura maximorum vel mi-
 nimorum quantitatem, quae pro curua oa maxima vel
 minima esse debet, eam siue ad elementa abc siue
 ad elementa $a\mathcal{E}c$ referatur in vtroque casu eundem
 valorem producere debere. Quamobrem differentia
 inter valores, qui prodeunt ex consideratione tum ele-
 mentorum abc tum $a\mathcal{E}c$, si nihilo aequalis ponatur,
 dabit aequationem, qua natura curuae exprimetur. Ista
 autem differentia semper ad huiusmodi formam reduci
 potest $P.b\mathcal{E}$, in qua P per solas quantitates x, y, s ,
 earumque differentialia vna cum constantibus determina-
 tur. Quocirca ista aequatio $P = 0$, exprimet naturam
 curuae quaesitae.

§. 4. Proposito ergo quocunque problemate, quod
 inter omnes omnino curuas intra eosdem terminos con-
 stitutas determinare iubet eam, quae maximi vel mini-
 mi proprietate gaudeat, ex formula, quae maximum
 vel minimum esse debet, elici oportet valorem ipsius P ,
 qui nihilo aequalis positus dabit aequationem pro curua
 quaesita. Totum ergo hoc negotium absoluetur; si re-
 gula tradatur, cuius ope ex data expressione, quae ma-
 Tom. VIII. X xi-

ximum minimumue esse debet, inueniri queat valor P. Ad huiusmodi autem regulam inueniendam exprimat $\int Q dx$ eam quantitatem, quae in curua quaesita maxima esse debeat vel minima, sitque Q quantitas vtcunque composita ex x, y , et s , horumque differentialibus dx , dy , et ds . Seu posito $dy = p dx$, vt sit $ds = dx \sqrt{x + pp}$, sit quantitas vtcunque composita ex x, y, s et p ; ita vt eius differentiale huiusmodi sit habiturum formam $dQ = L ds + M dy + N dx + V dp$. Quae formula vtiq; multo latius patet, quam omnes 16 priores formulae, quas in praecedente dissertatione exhibui.

§. 5. Considerentur ab et bc tanquam curuae inueniendae elementa genuina, dum altera $a\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}c$ tantum ad conceptum maximi minimiue formandum sint in subsidium vocata. Cum igitur $\int Q dx$ debeat esse maximum vel minimum in curua oa , ea expressio pro elemento ab dabit $Q dx$ et elemento bc vero $Q dx$, adeo vt elemento ab respondeat expressio $Q dx$ et elemento bc haec $Q dx$, vtrique autem elemento coniunctim $ab + bc$ ista formula $(Q + Q) dx$. Iam quaerantur expressiones, quae elementis assumptiis $a\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}c$ respondeant; hae enim coniunctae et a $(Q + Q) dx$ subtractae dabunt residuum ipsi $P.b\mathcal{E}$ aequale et propterea determinabunt valorem ipsius P, ex quo aequatio pro curua obtinebitur. Expressio autem $Q dx$, quae respondet elemento ab transibit in expressionem respondentem elemento $a\mathcal{E}$, si loco p seu $\frac{bM}{aM}$ scribatur $p + \frac{b\mathcal{E}}{ax}$ seu $\frac{\mathcal{E}M}{aM}$; quanti-

quantitates enim x, y et s a puncto a , quod vtrique elemento ab et $a\mathcal{E}$ commune est, pendent tantum, ideoque inuariatae manent.

§. 6. Differentia ergo inter expressiones, quae elementis ab et $a\mathcal{E}$ respondent, obtinebitur si Qdx differentietur, et loco ds, dy et dx scribatur o , loco dp vero $\frac{b\mathcal{E}}{dx}$. Cum autem sit differentiale ipsius $Qdx = dQdx = (Lds + Mdy + Ndx + Vdp)dx$, erit illa differentia $= V.b\mathcal{E}$. Porro ex expressione Qdx elemento bc respondente, vbi Q est talis functio ipsarum s, y, x , et p qualis ante erat Q ipsarum s, y, x et p , inuenietur expressio respondens elemento $\mathcal{E}c$, si loco $y = Bb$, scribatur $y + b\mathcal{E}$, loco $s = oa + ab$ vero $s + \mathcal{E}m = s + \frac{dy.b\mathcal{E}}{ds}$ atque loco $p = \frac{cN}{bN}$ ponatur $p - \frac{b\mathcal{E}}{dx}$. Quamobrem differentia inter expressiones elementis bc et $\mathcal{E}c$ habebitur, si Qdx differentietur et loco dy scribatur $b\mathcal{E}$, loco ds vero $\frac{dy.b\mathcal{E}}{ds}$ atque loco dp ponatur $-\frac{b\mathcal{E}}{dx}$. Cum igitur sit $dQdx = (Lds + Mdy + Ndx + Vdp)dx$, erit haec differentia $= \frac{Ldx dy.b\mathcal{E}}{ds} + Mdx.b\mathcal{E} - V.b\mathcal{E}$. Differentia ergo inter expressiones elementis $ab + bc$ et elementis $a\mathcal{E} + \mathcal{E}c$ respondentes erit $(V + \frac{Ldx dy}{ds} + Mdx - V)b\mathcal{E} = (\frac{Ldx dy}{ds} + Mdx - dV)b\mathcal{E} = P.b\mathcal{E}$. Aequatio

tio ergo pro curua quaesita erit haec $P = \frac{L dx dy}{ds} + M dx - dV = 0$, seu $L dx dy + M dx ds = ds dV$.

§. 7. Si ergo quaerenda sit curua oa , in qua $\int Q dx$ vel maius sit vel minus, quam inter omnes alias curuas intra eosdem terminos fitas, atque Q fuerit functio quaecunque ipsarum x, y, s et p posito $p = \frac{dy}{dx}$ sequens habebitur regula ad valorem ipsius P inueniendum. Differentietur primo Q et in differentiali ponatur $ds = 0$, $dy = 0$, $dx = 0$ atque $dp = 1$; deinde differentietur Q et in differentiali ponatur $ds = \frac{dx dy}{ds}$, $dy = dx$, $dx = 0$, atque $dp = -1$. His factis haec differentia duo coniuncta dabunt valorem ipsius P . Ita casu quo posuimus $dQ = L ds + M dy + N dx + V ds$ prodibit per hanc regulam vt ante $P = \frac{L dx dy}{ds} + M dx - dV$. Sit exempli gratia propositum curuam inuenire, in qua $\int \frac{ds^2}{u dy + \sqrt{(c^2 ds^2 - u^2 dx^2)}}$ denotante u functionem quamcunque ipsius x , sit minimum. Posito ergo $dy = p dx$ erit $\int Q dx = \int \frac{(1+pp) dx}{pu + \sqrt{(c^2(1+pp) - u^2)}}$ et $Q = \frac{1+pp}{pu + \sqrt{(c^2(1+pp) - u^2)}}$. Erit ergo $L = 0$, $M = 0$, et $V = \frac{c^2(1+pp)p - pu^2 + u(pp-1)\sqrt{(c^2(1+pp) - u^2)}}{(pu + \sqrt{(c^2(1+pp) - u^2)})^2 (c^2(1+pp) - u^2)}$. Cum autem sit $dV = P = 0$, erit $V = \text{const.}$ atque $(au - u^2)(p^2 - 1) - c^2(p^2 + 1) = \frac{(2u-a)(1+pp)c^2 p + pu(au-u^2)}{\sqrt{(c^2+c^2 p^2 - u^2)}}$ quae reducitur ad hanc $dy = \frac{(u^2 - au - cc) dx}{c \sqrt{(u-a)^2 - c^2}}$.

§. 8. Ope huius regulae etiam facile erit pro aliis expressionibus valorem ipsius P inuenire, id quod exemplo

emplo formularum posteriorum dissertationis meae declarabo. Sit expressio, quae maximum minimumue esse debet, $\int Q dx \int R dx$, atque $dQ = L ds + M dy + N dx + V dp$ et $dR = E ds + F dy + G dx + I dp$ posito $dy = p dx$. Quod ergo ante erat Q nunc nobis est $Q \int R dx$, et quod erat Q nunc erit $Q \int R dx + \overset{I}{Q} R dx$. Prioris autem formulae differentiale est $(L ds + M dy + N dx + V dp) \int R dx + \overset{I}{Q} R dx$; vnde positis $ds = 0, dy = 0, dx = 0$ et $dp = 1$ resultat valor $V \int R dx$. Posterioris autem formulae differentiale est $(L ds + M dy + N dx + V dp) (\int R dx + R dx) + \overset{I}{Q} R dx + \overset{I}{Q} dx (E ds + F dy + G dx + I dp)$, quod iuxta praecepta posito $ds = 0, dy = 0, dx = 0, dp = 1, ds = \frac{dx dy}{ds}, dy = dx$ et $dp = -1$, dabit hunc valorem $(\frac{L dx dy}{ds} + M dx - V) (\int R dx + R dx) + \overset{I}{Q} I dx$. His coniunctis et neglectis negligendis fit $P = (\frac{L dx dy}{ds} + M dx) \int R dx - dV \int R dx - R V dx + Q I dx = -d.V \int R dx + dx (\frac{L dy}{ds} + M) \int R dx + Q I dx = 0$. Quae est aequatio pro curua quaesita.

§. 9. Si aliae etiam expressiones in his non contentae fuerint propositae, quae maximum minimumue esse debeant, semper per regulam datam, qua poni debet $ds = 0, dy = 0, dx = 0, dp = 1, ds = \frac{dx dy}{ds}, dy = dx$, et $dp = -1$, valor ipsius P, et inde simul aequatio

166 INVENTIO CURVARVM MAXIMI MINIM.

quatio pro curua inuenta reperietur. Vt inuenienda fit curua, in qua $\frac{fsdx}{jydx}$ debeat esse maximum vel minimum,

erit $Q = \frac{s}{jydx} - \frac{yfsdx}{(jydx)^2}$, atque $Q = \frac{s}{jydx} - \frac{sydx}{(jydx)^2} - \frac{yfsdx}{(jydx)^2} - \frac{yfsdx}{(jydx)^2} + \frac{2yydxfsdx}{(jydx)^3}$. Hinc differentiando ex Q oritur

0, atque ex Q oritur $\frac{dx dy}{ds j y dx} - \frac{y dx^2 dy}{ds (j y dx)^2} - \frac{dx fs dx}{(j y dx)^2} - \frac{2 dx^2}{(j y dx)^2} + \frac{2 y dx^2 fs dx}{(j y dx)^3} = P$. Neglectis ergo negligendis fiet

$P = \frac{dx dy fs dx - ds dx fs dx}{ds (j y dx)^2}$. Posito itaque hoc pro P inuento valore = 0 prodibit aequatio pro curua quaesita $dy fs dx = ds fs dx$. Ponatur $dy = q ds$, erit $dq fs dx = s dx$ seu $fs dx = \frac{s dx - q y dx}{dq}$. Quae denuo differentiata posito dx constante dat $y dq^2 = ds dq - y dq^2 - q dy dq - s ddq + q y ddq$ seu $2 y dq^2 + q dy dq - q y ddq = ds dq - s ddq$ vel restituto $q s ds^2 dds^2 + 2 s dy^2 dds^2 = 3 y ds dy dds^2 + s ds dy^2 d^3 s - y dy^3 d^3 s$.

§. 10. Ex his praeceptis iam satis intelligitur, si expressio, quae maximum vel minimum esse debeat, sit non solum ipsarum x, y, s et p functio quaecunque, sed etiam praeter ea integrales formulas contineat; quemadmodum eam tractari, atque tandem ad aequationem naturam curuae exprimentem perueniri oporteat. Valet itaque ista methodus pro omnibus expressionibus, quae partim ex integralibus, partim denique ex harum differentialibus sunt conflatae; adeo ut ad omnes omnino quaestiones soluendas sufficere videatur. Interim tamen incidi nuper in quaestionem quae ad hanc methodum referri non poterat, sed peculiarem solutionem requirebat.

bat. Ita autem illa quaestio erat comparata, vt in formula $\int Q dx$, quae maximum minimumue esse debet, praeter x, y, s eorumque differentialia etiam differentialia secundi gradus essent contenta. Facile autem intelligitur, quoties differentialia secundi gradus occurrant, tum haec tradita praecepta non valere, sed nouam omnino methodum requiri.

§. 11. Cum autem differentialia secundi gradus bina elementa afficiant, ita vt translatio puncti b in ϵ , differentialia secundi gradus elementi ante ab siti immutent, non difficulter perspicietur, ad huiusmodi quaestiones soluendas praeter elementa ab et bc insuper praecedens et sequens in computum duci debere. Sint igitur $abcde$ quatuor elementa curuae inueniendae, quorum bina tantum media bcd , vt ante fecimus, in situm proximum $b\gamma d$ transferantur. Ponatur $OA = x$, $Aa = y$, et $oa = s$, atque elementis abscissae x aequalibus sumtis, erit $Bb = y$, $Cc = y$, $Dd = y$ et $Ee = y$,
 Posito praeterea $dy = p dx$, erit $\frac{cM}{dx} = p$, $\frac{cN}{dx} = p$, $\frac{dP}{dx} = p$
 atque $\frac{eQ}{dx} = p$. Quia denique differentialia secundi gradus in formula proposita inesse ponuntur fiat $dp = r dx$ ita vt sit $ddy = r dx^2$, et $dds = \frac{p r dx^2}{\sqrt{(1 + p p)}}$. His positis erit $r = \frac{ddy}{dx^2} = \frac{cN - bM}{dx^2}$ atque $r = \frac{dP - cN}{dx^2}$ et $r = \frac{eQ - dP}{dx^2}$.

Figura 2.

§. 12. Si iam elementa $abcde$ in elementa $ab\gamma de$ transire concipiantur, valores ante inuenti incrementa vel decrementa accipient. Fient autem incrementa haec

vt

vt ex inspectione figurae apparet, sequentia: $ds=0$, $dy=0$, $dx=0$, $dp=0$; denotant enim ds , dy , dx , dp , incrementa ipsarum s , y , x , et p , dum punctum c in γ transfertur, haec vero mutatio has quantitates non afficit, sed translato c in γ abibit r in $\frac{\gamma N - bM}{dx^2}$, erit itaque incrementum quod r interea capit seu $dr = \frac{c\gamma}{dx^2}$. Porro erit $ds=0$, $dy=0$, $dp = \frac{c\gamma}{dx}$ et $dr = \frac{dp - \gamma N}{dx^2} = \frac{dp + cN}{dx^2} = \frac{-ac\gamma}{dx^2}$. Deinceps autem fiet $ds = \gamma n = \frac{cN \cdot \gamma s}{bc} = \frac{dy \cdot c\gamma}{ds}$; $dy = c\gamma$; $dp = \frac{-c\gamma}{dx} = dr = \frac{c\gamma}{dx^2}$. Denique erit $ds = \frac{dy \cdot c\gamma}{ds} - \frac{dy \cdot c\gamma}{ds} = -c\gamma d. \frac{dy}{ds}$; atque $dy=0$, $dp=0$, $dr=0$; haec enim elementa non amplius a mutatione puncti c afficiuntur.

§. 13. Sit nunc curua inuenienda, in qua debeat esse maximum vel minimum $\int Q dx$, in qua expressio-
ne Q fit compositum quomodocumque ex x, y, s , harumque quantitatuum differentialibus tam primi quam secundi gradus; ita vt Q futura sit functio quaecumque ipsarum x, y, s, p et r . Iam quia $\int Q dx$ pro omni curuae portione ab o incipiente debet esse maximum vel minimum, necesse est, vt tale quoque sit pro elementis $abcde$. Quare $\int Q dx$ eundem valorem habere debeat tam in elementis $abcde$ quam in $ab\gamma de$. Pro elementis autem $abcde$ dat ista formula hunc valorem $Qdx + Qdx + Qdx + Qdx$, huius ergo differentiale

ex

ex translatione puncti c in γ ortum debet esse $= 0$, vel dabit valorem ipsius $P.c\gamma$. Posito autem $dQ = Lds + Mdy + Ndx + Vdp + Wdr$, erit pro differentialibus valoribus exhibitis substituendis ut sequitur:

$$\begin{aligned} \text{d. } Qdx &= \frac{w.c\gamma}{dx} \\ \text{d. } Qdx &= \overset{\text{I}}{V}.c\gamma - \frac{\overset{\text{I}}{w}.c\gamma}{dx} \\ \text{d. } Qdx &= \frac{\overset{\text{II}}{L}dx\overset{\text{I}}{dy}.c\gamma}{ds} + \overset{\text{II}}{M}dx.c\gamma - \overset{\text{II}}{V}.c\gamma + \frac{\overset{\text{II}}{w}.c\gamma}{dx} \\ \text{d. } Qdx &= -\overset{\text{III}}{L}dx.d.\overset{\text{I}}{\frac{dy}{ds}}.c\gamma \end{aligned}$$

Quorum valorum summa dabit hanc expressionem $P = \frac{d d w}{dx} - dV + \frac{L dx dy}{ds} + M dx$ neglectis negligendis. Pro curua quaesita ergo habebitur ista aequatio

$$d d W - dV dx + \frac{L dx^2 dy}{ds} + M dx^2 = 0.$$

posito perpetuo dx constante.

§. 14. Quo hanc regulam exemplo illustremus sit **Figura 3.** nobis propositum inter omnes curuas per puncta A et M transeuntes eam determinare, quae cum sua euoluta AO minimum spatium AOM comprehendat. Positis ergo $AP = x$, $PM = y$, $AM = s$, erit radius osculi $MO = -\frac{ds^2}{dx dy}$ posito dx constante. Facto ergo $dy = p dx$ erit $ds = dx \sqrt{(1 + pp)}$ et $ddy = dp dx$, unde fiet

$$\text{radius osculi } MO = \frac{-dx(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}. \text{ Atque posito } dp$$

Tom. VIII. Y = r dx

$= r dx$ erit is $= -\frac{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}{r}$. Hinc area AMO erit
 $= -\frac{1}{2} \int \frac{(1+pp)^{\frac{5}{2}} ds}{r} = -\frac{1}{2} \int \frac{(1+pp)^2 dx}{r}$; oportet er-
 go ut sit $\int \frac{(1+pp)^2 dx}{r}$ minimumum; quare habebimus $Q =$
 $\frac{(1+pp)^2}{r}$ et $dQ = \frac{2pdp(1+pp)}{r} - \frac{(1+pp)^2 dr}{r^2}$. Erit itaque $L = 0$,
 $M = 0$, $N = 0$, $V = \frac{2p(1+pp)}{r}$ et $W = -\frac{(1+pp)}{r^2}$. Quocirca
 cum sit $ddW = dV dx$; erit $dW = V dx + A dx$. Erit autem W
 $= \frac{-ds^4}{dx^2 dp^2} = \frac{-ds^4}{ddy^2}$ et $V = \frac{4dy ds^2}{dx^2 dp} = \frac{4dy ds^2}{dx ddy}$. Hanc ob rem
 erit $-\frac{4ds^2 dy}{ddy} + \frac{2ds^4 d^3y}{ddy^3} = \frac{4dy ds^2}{ddy} + A dx$ seu $\frac{ds^4 d^3y}{ddy^3} =$
 $\frac{4dy ds^2}{ddy} + A dx$ siue $(1+pp)^2 dx ddp = 4p(1+pp)$
 $dx dp^2 + A dp^3$. Ponatur $dx = \frac{dp}{r}$ ut sit $ddp = \frac{dp dr}{r}$,
 erit $\frac{(1+pp)^2 dp^2 dr}{r^2} = \frac{4p(1+pp) dp^3}{r} + A dp^3$, seu
 $\frac{(1+pp)^2 dr - 4(1+pp) r dp}{r^2} = A dp$, cuius integrale est $B -$
 $A p = \frac{(1+pp)^2}{r}$ seu $\frac{Bdp - 4pdp}{(1+pp)^2} = dx$. Si ponatur $B = 0$, fiet
 $x = \frac{a}{1+pp} = \frac{a dx^2}{ds^2}$ at ue $x dx^2 + x dy^2 = a dx^2$, unde
 erit $dy = dx \sqrt{\frac{a-x}{x}}$, quae est aequatio pro cycloide in A
 maximum radium osculi habente. At si $A = 0$ erit
 $\frac{Bdp}{(1+pp)^2} = dx$ seu $\frac{Bdp}{(1+pp)^2} = dy$ erit ergo $y = \frac{a}{1+pp}$ seu
 $y = \frac{a dx^2}{ds^2}$ unde fit $x = \int \frac{dy \sqrt{y}}{\sqrt{(a-y)}}$, quae est pro cycloide in
 A cuspidem habente. Generatim vero erit $ds =$
 $\frac{Bdp - A p dp}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$, cuius integralis est $s = \frac{ap + b}{\sqrt{(1+pp)}}$ seu $s ds$
 $= a dy + b dx$, quae integrata dat $s^2 = 2ay + 2bx$, et
 $\sqrt{2ay}$

$s = \sqrt{(2ay + 2bx)}$, quae itidem est pro cycloide ad ad axem oblique ductum. Ex quibus perspicitur quaestioni propositae aliam curuam non satisfacere praeter cycloidem; ita vt inter omnes curuas per puncta A et M transeuntes nulla sit nisi cyclois, quae cum sua euoluta tam exiguum spatium comprehendat.

§. 15. Sit nunc propositum inter omnes curuas AM determinare eam in qua $\int \frac{dy}{ds}$ sit maximum vel minimum. Ponatur ergo $dy = p dx$ et $dp = r dx$ erit $\int \frac{dy}{ds} = \int \frac{r dx}{\sqrt{(1+pp)}}$ ideoque $Q = \frac{r}{\sqrt{(1+pp)}}$ et $dQ = \frac{dr}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{r p dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$. Quare erit $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, $V = -\frac{r p}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ et $W = \frac{1}{\sqrt{(1+pp)}}$. Cum igitur sit $dW = dV dx$ erit $dW = V dx + A dx$, hoc est $\frac{-p dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-r p dx}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + A dx = \frac{-p dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + \frac{A dp}{r}$. Erit itaque $dp = 0$ et $y = ax$ seu linea quaesita recta; quae terminorum destructio inde oritur, quod sit $\int Q dx = \int \frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}}$ integrabile. At si quaeratur curua in qua $\int \frac{dy}{y ds}$ sit maximum vel minimum, fiet $Q = \frac{r}{y \sqrt{(1+pp)}}$ et $dQ = \frac{dr}{y \sqrt{(1+pp)}} - \frac{r p dp}{y (1+pp)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r dy}{y^2 \sqrt{(1+pp)}}$, ita vt sit $L = 0$, $M = \frac{-r}{y^2 \sqrt{(1+pp)}}$, $V = \frac{-r p}{y (1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ et $W = \frac{1}{y \sqrt{(1+pp)}}$

$\frac{1}{y\sqrt{1+pp}}$. Hinc erit $ddW - dV dx + M dx^2 = 0$;
 quae euoluta dat hanc aequationem $\frac{2dp+ppdp}{p+p^3} = \frac{2dy}{y}$ cuius
 integralis est $y^2 = \frac{a^2 p^2}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{a^2 dy^2}{dx ds}$; quae reducta dat
 $dx \sqrt{2} = \frac{dy}{y} \sqrt{[-y^2 \pm \sqrt{y^4 + 4a^4}]}$ cuius integratio a
 circuli et hyperbolae quadraturis pendet.

§. 16. Quamquam in his exemplis posuimus quan-
 titatem Q absolute dari, tamen regula data aequae lo-
 cum habet, eodemque modo potest usurpari, si Q tan-
 tum per aequationem differentialem detur, ita ut valor
 ipsius Q per integrationem assignari nequeat. Hu-
 iusmodi casum quidem iam tractavi, cum curvam bra-
 chystochromam in quocunque medio resistente determi-
 narem. Eundem igitur casum ad usum regulae §. 6.
 datae plenius ostendendum hic evolueri conueniet. Pro-
 positum ergo sit curuam AM inuestigare, super qua
 corpus a quibuscunque potentiis sollicitatum in medio
 quocunque resistente celerrime descendat. Ad hoc pro-
 blema soluendum ponatur AP=x, PM=y et AM=s;
 trahaturque corpus in M a vi P in directione applica-
 tae MP, et ab alia vi Q in directione MQ parallela
 axi AP; constat enim ad has duas vires potentias quas-
 cunque reduci posse. Posito ergo dy = p dx et ds =
 $dx \sqrt{1+pp}$, erit vis tangentialis accelerans ex iis orta

$$= \frac{Q - Pp}{\sqrt{1+pp}} = \frac{Q dx - P dy}{ds}$$
 vis normalis vero erit $= \frac{Qp + P}{\sqrt{1+pp}}$

$$= \frac{Q dy + P dx}{ds}$$

§. 17. Sit nunc celeritas in M debita altitudini v
 et resistentia aequalis sit R functioni cuicunque ipsius v.
 His

His positis erit $dv = Qdx - Pdy - Rds$. Tempus vero, quo corpus arcum $[AM]$ absolvit, erit $= \int \frac{ds}{\sqrt{v}} = \int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$, quod debet esse minimum. Quae formula

cum superiore $\int Qdx$ comparata dat $Q = \frac{v(1+pp)}{\sqrt{v}}$, ex qua erit $dQ = \frac{pdp}{\sqrt{v}(1+pp)} - \frac{dv\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$ et loco dv valore substituto erit $dQ = \frac{Rds\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} + \frac{Pdy\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} - \frac{Qdx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} + \frac{pdp}{\sqrt{v}(1+pp)}$. Fit igitur $L = \frac{R\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$, $M = \frac{P\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$, $N = -\frac{Q\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$ atque $V = \frac{p}{\sqrt{v}(1+pp)}$. Cum autem sit per regulam datam $Ldx dy + Mdx ds = dV$

ds seu $Lpdx + Mdx\sqrt{(1+pp)} = dV\sqrt{(1+pp)}$ erit substitutis valoribus inuentis et per $\sqrt{(1+pp)}$ diuisione

$$\text{facta } \frac{Rpdx + Pdx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}} = d \frac{p}{\sqrt{v}(1+pp)} - \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v}} - \frac{p dv}{2v\sqrt{v}(1+pp)} - \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v}} - \frac{Qpdx + Pp^2 dx + Rpdx\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}(1+pp)}$$

substitutis loco dv et in eius expressione loco dy et ds valoribus assumtis.

§. 18. Si nunc haec aequatio reducatur prodibit

$$\text{sequens } \frac{Pdx + Qpdx}{2v\sqrt{(1+pp)}} = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}; \text{ in qua ergo aequatione non amplius inest resistantia } R.$$

Ad indolem igitur huius aequationis inuestigandam dabo curuae radium osculi MO quem pono z , exprimet $\frac{2v}{z}$ vim centrifugam, qua corpus curuam iuxta normalem MS premit. Erit autem ob dx constans assumtum $z = \frac{ds^2}{dx dd^2y}$

$$= \frac{dx(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}, \text{ ita vt fit } \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{z}. \text{ Hoc}$$

ergo valore substituto et per dx diuiso fiet $\frac{z}{z} = \frac{P+Qp}{2v\sqrt{(1+pp)}}$ seu $\frac{z^2}{z} = \frac{P+Qp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Exprimit autem vt modo meminimus $\frac{z^2}{z}$ vim centrifugam, cuius directio est normalis MS, atque vt ante notauimus $\frac{P+Qp}{\sqrt{(1+pp)}}$ exhibet vim normalem ex resolutione potentiarum sollicitantium P et Q ortam et in directione MS curuam prementem. Quocirca in hypothesi potentiarum quarumcunque sollicitantium et resistentiae cuiuscunque ea curua est brachystochrona, quae premitur a corpore super ea moto vi duplo maiore, quam a sola vi centrifuga.

§. 19. His igitur sufficienter expositis, quae tum ad methodum hanc inter omnes curuas eam determinandi, quae maximi minimiue cuiusdam proprietate gaudeat, intelligendam, tum etiam ad eius usum in quibusque huius generis problematis declarandum necessaria visa sunt; progredior ad sequentem huius generis quaestionum classem, quae proprie sub problematis isoperimetrici nomine est nota, in qua non ex omnibus curuis intra datos terminos sitis, sed iis tantum, quae vel aequae sunt longae vel aliam quamcunque proprietatem communem habent, inueniri debet ea curua, quae maximi vel minimi cuiusdam proprietate gaudeat. Hocque est problema tanti in re analytica usus, tantaque dignitatis, in quo enodando acutissimi Viri *Bernoullii*, *Taylorus* atque *Hermannus* ingentem collocauerunt operam; cuiusque ego etiam in dissertatione ante aliquot annos de prob-

problemate isoperimetrico solutionem satis breuem atque facilem tradidi, ope formularum, quibus cuiusque generis quaestiones admodum expedite resolui possunt.

§. 20. Quod hae duae proprietates, quarum altera omnium curuarum communis esse debet, altera vero in quaesita maximum minimumue, inter se commutari et altera in alterius locum collocari queant, iam satis constat; atque ego etiam pro plurimis huiusmodi proprietatibus exhibui formulas sub littera P consignatas, quae nulla facta distinctione inter binas proprietates propositas vsurpari atque statim ad aequationem pro curua quaesita deduci possunt. Hic quidem eodem vtar modo, et per huiusmodi formulas P totum negotium absolvam; sed triplici ratione illam priorem methodum ad maiorem perfectionis gradum sum euecturus. Primum enim exponam methodum magis genuinam, cuius ope eiusmodi formulae multo facilius elici possunt. Deinde ingentem formularum ibi traditarum numerum contraham, ita vt omnes illae coniunctae in vnica vel duabus contineantur. Tertio etiam eiusmodi proprietates, quae vel curuis communes vel in quaesita maximum minimumue esse debent, euoluam et ad formulas deducam, ad quas inueniendas prior mea methodus vel nimis difficulter vel omnino non sufficebat.

§. 21. Sit igitur $\int Q dx$ quantitas seu proprietas quae vel omnibus curuis puncta o et a iungentibus communis vel in quaesita maxima minimaue esse debeat; constat eam in vtroque casu in elementa $abcd$ aequae competere debere ac in elementa $a\epsilon\gamma c$. Quare si illa quantitas $\int Q dx$ ad elementa $abcd$ applicetur, et
tum

Tabula X.
Figura 1.

175 INVENTIO CURVARVM MAXIMI MINIMI.

tum eius valor quaeratur translatis punctis b et c in proxima ξ et γ , oportebit vt differentia inter hos duos valores sit $=0$. Differentia autem ista statim habebitur, si valor ipsius $\int Q dx$, qui respondet elementis $ab cd$ ita differentietur, vt puncta tantum b et c variari ponantur; quare et hoc ipsum differentiale debebit esse $=0$. Hoc autem differentiale huiusmodi habebit formam $A.b\xi - B.c\gamma = 0$, quae cum forma in priori disputatione stabilita $P.b\xi - (P + dP).c\gamma = 0$ comparata dabit $\frac{dP}{P} = \frac{B-A}{A}$ ex qua aequatione valor ipsius P respondens quantitati $\int Q dx$ inuenietur. Hoc autem facto problema quodque propositum facile resoluetur per hanc regulam: si inter omnes curuas, in quibus $\int S dx$ eundem habeat valorem, quaeratur ea, in qua $\int T dx$ sit maximum vel minimum; tum quaeratur valor ipsius P respondens vtrique formulae $\int S dx$ et $\int T dx$, atque alter alteri per constantem quamcunque multiplicato aequalis ponatur, ac resultans aequatio exprimet naturam curuae quaesitae.

§. 22. Quemadmodum autem, si proposita fuerit quaecunque formula $\int Q dx$, differentiam inter valores huius formulae elementis $abcd$ et $a\xi\gamma d$ inueniri oporteat, sequenti modo patebit. Positis vt ante $OA = x$, $Aa = y$, $oa = s$ et elemento dx constante, itemque $dy = p dx$; erit $Bb = y$, $Cc = y$ et $Dd = y$, item $oab = s$, $oabc = s$, $oabcd = s$, denique $\frac{bM}{dx} = p$, $\frac{cN}{dx} = p$, et $\frac{dP}{d\xi} = p$. Translatis nunc punctis b et c in ξ et γ quanti-

quantitates istae accipient sequentia incrementa, posito breuitatis gratia $q = \frac{dy}{ds}$.

$$\begin{array}{l}
 ds = 0 \\
 dy = 0 \\
 dx = 0 \\
 dp = \frac{b\epsilon}{dx}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{I} \\
 \text{I} \\
 \text{I} \\
 \text{I}
 \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 ds = q \cdot b\epsilon \\
 dy = b\epsilon \\
 dx = 0 \\
 dp = \frac{-b\epsilon - c\gamma}{dx}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{II} \\
 \text{II} \\
 \text{II} \\
 \text{II}
 \end{array} \right\}
 \begin{array}{l}
 ds = -dq \cdot b\epsilon - q \cdot c\gamma \\
 dy = -c\gamma \\
 dx = 0 \\
 dp = \frac{c\gamma}{dx}
 \end{array}
 \end{array}$$

§. 23. Sit iam proposita formula $\int Q dx$, quae vel communis vel maxima minimaue esse debeat, ideoque aequaliter expressa tam pro elementis $abcd$ quam $a\epsilon\gamma d$; sit autem Q functio quaecunque ipsarum x, y, s et p posito $dy = p dx$; ita vt dQ habiturum sit huiusmodi formam $L ds + M dy + N dx + V dp$. Elementis au-

tem $abcd$ respondebit iste valor $Q dx + \overset{\text{I}}{Q} dx + \overset{\text{II}}{Q} dx$, qui secundum translationem punctorum b et c in ϵ et γ differentiatu differentialibus ipsarum $s, y, p, s, y, p, s, y, p$ sumtis uti est praeceptum, dabit sequens differentiale.

$$dQ dx = V \cdot b\epsilon$$

$$\overset{\text{I}}{dQ} dx = \overset{\text{I}}{L} q dx \cdot b\epsilon + \overset{\text{I}}{M} dx \cdot b\epsilon - \overset{\text{I}}{V} \cdot b\epsilon - \overset{\text{I}}{V} \cdot c\gamma$$

$$\overset{\text{II}}{dQ} dx = -\overset{\text{II}}{L} dx dq \cdot b\epsilon - \overset{\text{II}}{L} q dx \cdot c\gamma - \overset{\text{II}}{M} dx \cdot c\gamma + \overset{\text{II}}{V} \cdot c\gamma$$

quod positum = 0 dat

$$(-\overset{\text{I}}{dV} + \overset{\text{I}}{L} q dx + \overset{\text{I}}{M} dx - \overset{\text{II}}{L} dx dq) b\epsilon = (-\overset{\text{I}}{dV} + \overset{\text{II}}{L} q dx + \overset{\text{II}}{M} dx) c\gamma$$

Tom. VIII.

Z

Erit

Erit ergo

$$\frac{dP}{P} = \frac{-dV + L dx dq + dx d(Lq + M)}{-dV + dx(Lq + M)}$$

Ex qua aequatione integrata prodibit valor

$$P = e^{\int \frac{L dx dq}{-dV + dx(Lq + M)}} (-dV + dx(Lq + M))$$

denotante e numerum cuius log. est 1.

§. 24. Pro quaestionibus autem ad primam classem pertinentibus eidem formulae $\int Q dx$ respondere inuenimus supra §. 6. hunc valorem $P = -dV + dx(LQ + M)$, qui valor a nunc inuento pro quaestionibus secundae classis tantum differt quantitate exponentiali. Quare si L evanescat, quod accidit quando Q non ab s , sed tantum ab x, y et p pendet, tum utraque formula in eandem recidit $P = -dV + M dx$, quae ergo pro quaestionibus secundae classis aequae valet ac pro quaestionibus primae classis. Ex praecedente autem mea dissertatione aequae ac ex ista intelligitur eandem formulam $P = -dV + M dx$, quae respondet quantitati $\int Q dx$ existente $dQ = M dy + N dx + V dp$, quoque ad quaestiones classis tertiae atque omnium sequentium sufficere; in quibus quaeri solet inter omnes curvas duas pluresue proprietates communes habentes ea curva, quae maximi minimae proprietate gaudeat; ita ut his casibus pro sequentibus classibus novos pro P valores eruere non sit opus.

§. 25.

§. 25. Valor autem ipsius $P = e^{\int \frac{Ldx + dq}{-dV + (Lq + M)dx}}$ $[-dV + dx(Lq + M)]$, quem pro quantitate $\int Qdx$ existente Q functione quacunque ipsarum x, y, s harumque differentialibus, ita ut sit $dQ = Lds + Mdy + Ndx + Vdp$, tam late patet, ut non solum 16 priores formulas omnes in praecedente mea dissertatione exhibita complectatur, sed insuper innumerabilibus aliis quaestionibus soluendis inseruiat; ad quas illae formulae sunt insufficientes; quorum utrumque exemplo declarari conueniet. Propositum igitur sit inter omnes curuas AM , quae ad axem AB aequales constituunt areas AMQ , eam determinare, quae in fluido secundum axis AB directionem mota minimam patiatur resistantiam. Sumt's abscissis AP in recta AC ad axem AB normali, ponaturque $AP = x = QM$, $PM = y = AQ$, et $AM = s$, erit area $AQM = \int xdy$, quae omnibus curuis per A et M transeuntibus communis esse debet. Deinde resistantia, quam elementum Mm in fluido motum patitur, est ut Mm ductum in quadratum sinus ang. incidentiae Mmn hoc est ut $\frac{dx^2}{ds^2}$, impedit ergo motum vi $\frac{dx^2}{ds^2}$, ita ut tota resistantia, quae minima esse debet, futura sit $= \int \frac{dx^2}{ds^2}$.

Tabula X.
Figura 2.

§. 26. Formulae igitur, pro quibus valores ipsius P quaerere debemus, sunt $\int xdy$ et $\int \frac{dx^2}{ds^2}$. Consideremus primo hanc $\int xdy$, quae posito $dy = pdx$, abit in $\int xpdx$, haecque cum $\int Qdx$ comparata dat $Q = xp$ et $dQ = pdx + xdp$. Erit itaque $L = 0$, $M = 0$, $N = p$ et

$$Z = 2$$

$$V = x$$

$V = x$, vnde fiet $P = -dx$. Altera forma $\int \frac{dx^2}{dx^2}$ transit in hanc $\int \frac{dx}{1+pp}$, ita vt fit $Q = \frac{1}{1+pp}$ et $dQ = \frac{-2pdp}{(1+pp)^2}$. Fiet ergo pro hac formula $L = 0, M = 0, N = 0$ atque $V = \frac{-p}{(1+pp)^2}$, cui respondebit consequenter $P = \frac{dp}{(1+pp)^2} - \frac{2p^2 dp}{(1+pp)^3} = \frac{dp - 2ppdp}{(1+pp)^3}$. His inuentis ponatur alter ipsius P valor aequalis multiplo alterius, et prodibit $dx = \frac{adp - 2ap^2 dp}{(1+pp)^3}$ atque $x = \frac{ap}{(1+pp)^2}$. Cum autem fit $dy = p dx$, erit $y = px - \int x dp = \frac{ap^2}{(1+pp)^2} - \int \frac{apdp}{(1+pp)^2} = \frac{a+3app}{2(1+pp)^2}$. Curua ergo quaesita erit algebraica, atque eliminata p inuenietur sequens inter x et y pro curua aequatio

$$y^4 - 2y^2x^2 + x^4 = 18cx^2y + 2cy^3 - 27c^2x^2$$

mutato pro arbitrio constantis a valore.

Tabula IX.
Figura 4

§. 27. Nunc ad exemplum proferendum, ad quod formulae prius datae non sufficiunt, fit in hypothese potentiarum corpus sollicitantium et resistentia quacunque inter omnes curuas AM super quibus corpus ex A descendens in M eandem acquirit velocitatem, inuenienda ea curua AM , super qua corpus ex A in M citissime perueniat. Posito ergo vt ante §. 16. 17. $AP = x, PM = y, AM = s$, et potentia corpus secundum MP sollicitante $= P$, potentia corpus secundum MQ trahente $= Q$, celeritate in M debita altitudini v et resistentia $= R$, erit $dv = Q dx - P dy - R ds$. Duae igitur formulae, quae sunt propositae, erunt $\int dv = \int [Q - Pp - R \sqrt{1+pp}] dx$ atque $\int \frac{ds}{v} = \int \frac{dx \sqrt{1+pp}}{v}$. Pro prima igitur formula erit $Q = Q - Pp - R \sqrt{1+pp}$; ponatur $dQ = S dy + X dx$ et $dP = T dy + Y dx$ (ab x enim et y tantum pendent Q et P) atque $dR = Z dv = ZQ$

$= ZQdx - ZPdy - ZRds$; erit itaque nostrum $dQ = Sdy + Xdx - Pdp - Tpdy - Ypdx - \frac{Rpdp}{\sqrt{(1+pp)}} - ZQdx \sqrt{(1+pp)} + ZPdy \sqrt{(1+pp)} + ZRds \sqrt{(1+pp)}$. Hanc ob rem fiet $L = ZR \sqrt{(1+pp)}$, $M = S - Tp + ZP \sqrt{(1+pp)}$ $V = -P - \frac{Rp}{\sqrt{(1+pp)}}$. Ex his ob $q = \frac{dy}{ds} = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$ atque $dq = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ sequens eruetur valor ipsius $P =$

$$e \int \frac{ZRdxdp}{(S+Y)dx(1+pp) + Z(Pdx+Qdy)\sqrt{(1+pp)}} + \frac{Rdp}{\sqrt{(1+pp)}} [(S+Y)dx(1+pp) + Z(Pdx+Qdy)\sqrt{(1+pp)} + \frac{Rdp}{\sqrt{(1+pp)}}]$$

Altera vero formula $\int \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{\sqrt{v}}$ modo vt supra tractata dabit $L = \frac{R\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$, $M = \frac{P\sqrt{(1+pp)}}{2v\sqrt{v}}$ et $V = \frac{p}{\sqrt{v(1+pp)}}$ atque

$$dV = \frac{dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}\sqrt{v}} - \frac{p dv}{2v\sqrt{v(1+pp)}} \text{ adeo vt fiat } P =$$

$$e \int \frac{Rdxdp}{(Pdx+Qdy)\sqrt{(1+pp)} - \frac{2vd p}{\sqrt{(1+pp)}}} [(Pdx+Qdy)\sqrt{(1+pp)} - \frac{2vd p}{\sqrt{(1+pp)}}]$$

Duorum horum valorum ipsius P multipla quaecunque sibi aequalia posita dabunt aequationem pro curua quaesita, quam autem vltcrius persequi calculi prolixitas non permittit.

§. 28. Sit nunc formula, quae vel omnibus curuis communis esse debet vel in quaesita curua maximum minimumue, haec $\int Qdx \int Rdx$; fit autem $dQ = Lds + Mdy + Ndx + Vdp$ et $dR = Eds + Fdy + Gdx + Idp$. Dabit ergo haec formula pro elementis $abcd$ hanc expressionem $Qdx \int Rdx + Qdx \int Rdx + Qdx \int Rdx$. Huius differentiale secundum data praecepta dabit vt sequitur:

Tabula IX.
Figura 2.

Z 3

d. Qdx

$$d. Q dx f R dx = V. b \epsilon f R dx$$

$$d. Q dx f R dx = L q dx. b \epsilon f R dx + M dx. b \epsilon f R dx - V (b \epsilon + c \gamma) f R dx + Q I dx. b \epsilon$$

$$d. Q dx f R dx = -L dx dq. b \epsilon f R dx - L q dx. c \gamma f R dx - M dx. c \gamma f R dx + V. c \gamma f R dx + Q I dx. b \epsilon + Q (E q + F) dx. b \epsilon - Q I dx (b \epsilon + c \gamma)$$

Haec differentialia si ponantur = 0 prodibit $b \epsilon (-d. V f R dx + (L q + M) dx f R dx - L dx dq f R dx + Q I dx + Q (E q + F) dx - d. Q I dx) = c \gamma (-d. V f R dx + (L q + M) dx f R dx + Q I dx$. Ex hac aequatione oriatur $\frac{dP}{P} = \frac{-d. V f R dx + dx d. (L q + M) f R dx - Q (E q + F) dx}{-d. V f R dx + (L q + M) dx f R dx + L dx dq f R dx + Q d I dx + d. Q I dx}$. Hincque erit

$P = e^{\int \frac{Q d I dx + L dx dq f R dx - Q (E q + F) dx}{-d. V f R dx + (L q + M) dx f R dx + Q I dx}} (-d. V f R dx + (L q + M) dx f R dx + Q I dx)$; qui ergo valor ipsius P respondet quantitati $\int Q dx f R dx$, quae non solum omnes formulas 24 ante a me prolatae comprehendit, sed etiam longe latius patet.

§. 29. Ex his intelligitur methodo exposita etiam alias formulas $\int Q dx$, in quibus Q non solum per x, y, s et p ,

s et p , sed praeterea a quibuscunque integrationibus quin etiam a constructione aequationum quarumcunque differentialium pendet, ad valorem ipsius P inveniendum reduci posse. Tantum autem peculiari modo est opus, si in Q differentialia secundi altiorumue graduum contineantur, pro quibus casibus plura quam tria elementa considerari debent. Contineat igitur Q in $\int Q dx$ praeter x, y et s , eorumque differentialia etiam differentialia secundi gradus in se, ita vt posito $dy = p dx$ et $dp = r dx$ futurum sit $dQ = L ds + M dy + N dx + V dp + W dr$. Ex qua expressione vt valor ipsius P eruatur, necesse est quinque elementa $abcdef$ considerare, quorum quidem duo duntaxat puncta c et d in loca proxima γ et δ transferantur. Hac igitur translatione per differentiationem representata fiet

Tabula X.
Figura 3.

$$\begin{array}{l}
 ds = 0 \\
 dy = 0 \\
 dx = 0 \\
 dp = 0 \\
 dr = \frac{c\gamma}{dx^2}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{I} \\
 \text{I} \\
 \text{I} \\
 \text{I} \\
 \text{I}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 ds = 0 \\
 dy = 0 \\
 dx = 0 \\
 dp = \frac{c\gamma}{dx} \\
 dr = \frac{-2c\gamma - d\delta}{dx^2}
 \end{array} \right.
 \begin{array}{l}
 \text{II} \\
 \text{II} \\
 \text{II} \\
 \text{II} \\
 \text{II}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 ds = q.c\gamma \\
 dy = c\gamma \\
 dx = 0 \\
 dp = \frac{-c\gamma - d\delta}{dx} \\
 dr = \frac{c\gamma + 2d\delta}{dx^2}
 \end{array} \right.
 \begin{array}{l}
 \text{III} \\
 \text{III} \\
 \text{III} \\
 \text{II} \\
 \text{III}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 ds = -dq.c\gamma - q.d\delta \\
 dy = -d\delta \\
 dx = 0 \\
 dp = \frac{d\delta}{dx} \\
 dr = \frac{-d\delta}{dx^2}
 \end{array} \right.$$

IV
 $ds = -dq.c\gamma + dq.d\delta$, reliqua evanescent. Quocirca si valor elementis $abcdef$ respondens differentietur, et loco differentialium valores assignati substituantur, prodibit differentia inter illum valorem et eundem elementis $ab\gamma\delta ef$ respondentem.

§. 30.

§. 30. Quo igitur hanc differentiam pro valore qui ex $\int Q dx$ oritur et elementis $abcdef$ respondet, inueniamus, differentiari oportet hanc formulam $Q dx + Q dx + Q dx + Q dx$ secundum regulam datam prodibitque

$$dQ dx = \frac{w.c\gamma}{dx}$$

$$dQ dx = V.c\gamma - \frac{w.c\gamma}{dx} - \frac{w.d\delta}{dx}$$

$$dQ dx = Lq dx.c\gamma + M dx.c\gamma - V.c\gamma - V.d\delta + \frac{w.c\gamma}{dx} + \frac{w.d\delta}{dx}$$

$$dQ dx = -L dx dq.c\gamma - Lq dx d\delta - M dx.d\delta + V.d\delta - \frac{w.d\delta}{dx}$$

$$dQ dx = -L dx dq.c\gamma + L dx dq.d\delta.$$

Haec differentia nihilo aequalis posita dabit $c\gamma \left(\frac{dw}{dx} - dV + (Lq + M) dx - (L + L) dx dq \right) = d\delta \left(\frac{dw}{dx} - dV + (Lq + M) dx - L dx dq \right)$, quae aequatio comparata cum canonica $P.c\gamma = (P + dP)d\delta$ dat

$$\frac{dP}{P} = \frac{d^2W - ddV dx + dx^2.d(Lq + M) - dx^2.d.Ldq + L dx^2 dq}{ddW - dx dV + dx^2(Lq + M) - (L + L) dx^2 dq}$$

Hinc ergo integrando prodibit sequens valor ipsius

$$P = e^{\int \frac{L dx^2 dq}{ddW - dV dx + dx^2(Lq + M)}} [ddW - dV dx + dx^2(Lq + M)]$$

posito vt haecenus $q = \frac{dy}{ds}$.

§. 31. Perspicuum igitur est hunc valorem ipsius P facto $L = 0$ fore $ddW - dV dx + M dx^2$, ideoque non diuer-

diuersum ab eo, quem pro prima classe eiusdem formulae $\int Q dx$ respondentem inuenimus §. 13. Atque generalius etiam valet pro omnibus sequentibus classibus, si in $\int Q dx$, Q pendeat quomodocunque ab x, y eorumque differentialibus tam primi gradus quam secundi, non vero ab s perpetuo ipsi eandem formulam $P = ddW - dVx + Mdx^2$ respondere, ex hacque omnes omnino quaestiones posse resolui. Similiter etiam colligere licet, si Q praeter x, y et eorum differentialia tum primi tum secundi gradus quoque differentialia tertii et altiorum graduum inuoluat, eundem valorem pro P inuentum omnibus classibus inferuire. Scilicet si ponatur $dy = p dx, dp = r dx, dr = t dx, dt = u dx$ etc. fueritque $dQ = N dx + M dy + V dp + W dr + X dt + Y du$ etc. tum ipsi $\int Q dx$ respondebit sequens valor ipsius $P = M - \frac{dV}{dx} + \frac{ddW}{dx^2} - \frac{d^3X}{dx^3} + \frac{d^4Y}{dx^4} -$ etc. qui ipsius P valor locum habet in omnibus classibus.

§. 22. Ad usum huius formulae monstrandum quaerenda sit inter omnes omnino curuas ea, in qua $\int dx dy$ fit maximum vel minimum. Ponatur ergo $dy = p dx, dp = r dx, dr = t dx$, quibus substitutis debeat ista formula $\int \frac{t dx}{p}$ esse maximum vel minimum. Fiet igitur $Q = \frac{t}{p}$ atque $dQ = -\frac{t dp}{p^2} + \frac{dt}{p}$, quare erit $N = 0, M = 0, V = -\frac{t}{p^2}, W = 0, X = \frac{t}{p}, Y$ etc. $= 0$. Hinc prodit valor ipsius $P = \frac{-dV}{dx} - \frac{d^3X}{dx^3}$, qui posito aequalis nihilo et integratus dat $V dx^2 + ddX = A dx^2$. Substitutis autem loco V et X valoribus inuentis prodibit $-\frac{t dx^2}{p^2}$

Tom. VIII. Aa

$-\frac{ddp}{p^3} + \frac{2dp^2}{p^3} = A dx^2$. Est autem $t = \frac{dr}{dx} = \frac{ddp}{dx^2}$, vnde
 erit $-\frac{2ddp}{p^3} + \frac{2dp^2}{p^3} = A dx^2$. Cum porro fit $dx = \frac{dp}{r}$
 atque $ddx = 0$, erit $ddp = \frac{dp dr}{r}$, quibus surrogatis ha-
 bebatur $-\frac{2dr}{r p^3} + \frac{2dp}{p^3} = \frac{A dp}{r^2}$ quae transit in hanc $\frac{-2pdr + 2r^2 dp}{p^3}$
 $= A dp$, cuius integralis est $B - \frac{r^2}{p^2} = A p$. Hinc fiet
 $r = \frac{dp}{dx} = \sqrt{(Bp^2 - Ap^3)}$ seu $dx = \frac{dp}{\sqrt{Bp^2 - Ap^3}}$. Posito nunc
 $B = 0$ et mutata constante erit $dx = \frac{adp}{p\sqrt{p}}$ seu $x = \frac{a}{\sqrt{p}}$,
 atque $p = \frac{a^2}{x^2} = \frac{dy}{dx}$, ex qua fit $y = b - \frac{a^2}{x}$, quae est pro
 hyperbola intra asyptotos. Posito vero $A = 0$ fit $x = \frac{p}{p}$
 et $\frac{dy}{dx} = p = e^{\frac{x}{a}}$. Vnde oritur $y = ae^{\frac{x}{a}}$ et $x = a \ln \frac{y}{a}$; quae
 est pro curua logarithmica.

§. 33. In formula autem generali $\int Q dx$ si in Q
 ingrediatur vel arcus s vel alia quantitas integralis vt
 $\int R dx$, tum valor ipsius P magis erit compositus pro
 quaestionibus secundae quam primae classis, accedente
 scilicet quantitate exponentiali. Pro sequentibus autem
 classibus valor ipsius P nequidem exhiberi potest, sed
 tum in solutione problematum, in quibus huiusmodi
 formulae occurrunt, ad modum confugiendum est quem
 in praecedente dissertatione exposui. Interim tamen haec
 regula semper potest magna cum utilitate adhiberi. Si
 Q pendeat ab s ita vt in eius differentiali insit termi-
 nus $L ds$, et in quaestionibus secundae sequentiumue clas-
 sium vna conditio sit vt omnes curuae sint aequae longae,
 i. e. si $\int ds$ fuerit vna proprietatum, quae vel omnibus
 curuis communis vel in quaesita maximum minimumue
 esse

esse debeat, tum tuto vsurpari poterit valor ipsius P ad primam classem pertinens. Simili modo etiam si in $\int Q dx$ pendeat Q ab alia quantitate integrali vt $\int R dx$, tum quoque valor ipsius P ad primam classem pertinens potest vsurpari, si quidem $\int R dx$ etiam inter proprietates, quae omnibus curuis communes esse debent, reperiatur. Hoc itaque artificio quaestiones alias difficillimae solutu admodum faciles redduntur.

§. 34. Quod autem, si Q in $\int Q dx$ contineat in se vel arcum s vel aliam quantitatem integram, tum valor ipsius P pro classe secunda magis fiat compositus, quam pro prima, atque in sequentibus classibus plane non exhiberi queat, nisi vel s vel aliae omnes quantitates integrales, quae in Q continentur, simul inter quantitates propositas reperiantur, quae omnibus iis curuis communes esse debent, ex quibus quaesita debet determinari, eius difficultatis ratio in hoc consistit; quod translato b in \mathcal{E} , haec mutatio non tantum expressionem ad elementa abc pertinentem afficiat et immutet, sed insuper ipsius $\int Q dx$ valorem, qui omnibus sequentibus elementis post c competit, afficiat atque immutet; quemadmodum si re ipsa ad sequentia elementa hunc ipsius $\int Q dx$ valorem applicemus, statim elucebit. Sed si Q in $\int Q dx$ tantum ab x et y horumque differentialis cuiusque ordinis pendeat, tum hoc incommodum locum non habet, sed quomodocunque punctum b varietur, tamen haec variatio in sequentia post c elementa nullum omnino habet influxum, vti ex allatis facile intelligitur.

Tabula IX.
Figura 1.

Tabula IX.
Figura 4.

§. 35. Si inter omnes curvas puncta o et z iungentes ea debeat determinari, in qua formula Q neque ab s neque alia quantitate integrali pendent, debeat esse maximum vel minimum, tum curva oz utique hanc habebit proprietatem, si eius quaevis portio oa eadem praerogatiua gaudeat. At si Q pendeat vel ab s vel ab alia quantitate integrali, tum curva oz habere poterit $\int Q dx$ maximum vel minimum, etiam si eius nulla portio hac praerogatiua gaudeat, cum translato b in \mathcal{E} tota curvae portio cz alium induat valorem ex $\int Q dx$, qui valor forte maior vel minor esse potest, etiam si valor elementis abc competens non sit maximus vel minimus. Quamobrem si quaeratur inter omnes curvas puncta definita o et z iungentes ea, in qua $\int Q dx$ involuente Q vel s vel aliam quantitatem integram, debeat esse maximum minimumue, tum positio elementorum abc non ex eo debet determinari, quo valor $\int Q dx$ ad ea applicatus fiat maximus minimusue, sed potius illa positio est quaerenda, quae pro omnibus sequentibus elementis $cdefg$ etc. atque adeo pro tota portione az generet maximum minimumue valorem ipsius $\int Q dx$.

§. 36. Haec autem determinatio positionis elementorum abc sequenti modo debet institui. Translato b in \mathcal{E} effici debet, ut eadem quantitas $\int Q dx$ tam in curvam $abc --- z$ quam in $a\mathcal{E}c --- z$ redundet. Posito autem Q ab s pendere ut sit $dQ = L ds + M dy + N dx + V dp$ posito $dy = p dx$, erit differentia inter valores curvae $abc --- z$ et curvae $a\mathcal{E}c --- z$ respondentes,

dentes, quae aequalis esse debet 0, sequens (posito $q = \frac{dy}{dx}$) $V. b^{\text{I}}$ + $L^{\text{I}} q dx. b^{\text{I}}$ + $M dx. b^{\text{I}}$ - $V. b^{\text{I}}$ - $L^{\text{II}} dx dq. b^{\text{I}}$
 $- L^{\text{III}} dx dq. b^{\text{I}}$ - $L^{\text{IV}} dx dq. b^{\text{I}}$ etc. donec ad punctum z
 erit peruentum. Abscissae autem OC respondet valor
 L^{II} ; quare si punctum z in c incideret haberetur praeter
 terminos $V. b^{\text{I}}$ + $L^{\text{I}} q dx. b^{\text{I}}$ + $M dx. b^{\text{I}}$ - $V. b^{\text{I}}$
 tantum $-L^{\text{II}} dx dq. b^{\text{I}}$. Sin autem in d incideret ha-
 beretur $-dx dq. b^{\text{I}}$ ($L^{\text{II}} + L^{\text{III}}$) et responderet abscissae
 $AC + dx$. Sumto autem in ipso puncto z , et posito
 abscissae interuallo $CZ = ndx$ erit terminus adiiciendus
 et respondens abscissae $OZ = OC + ndx$ iste $-dx dq.$
 b^{I} ($L^{\text{II}} + L^{\text{III}} + L^{\text{IV}} + \dots + L^{n+\text{II}}$). At cum sit n
 numerus infinitus, erit iste terminus $= -dx dq. b^{\text{I}}$ (nL^{II}
 $+ \frac{n^2 dL^{\text{II}}}{1.2} + \frac{n^3 ddL^{\text{II}}}{1.2.3} + \frac{n^4 d^2L^{\text{II}}}{1.2.3.4}$ etc.).

§. 37. Cum autem distantia OZ sit data ideoque
 constans, ponatur ea $= a$, erit $x + ndx = a$, hincque
 $n = \frac{a-x}{dx}$. Quo substituto erit terminus iste ab $V. b^{\text{I}}$
 $+ L^{\text{I}} q dx. b^{\text{I}}$ + $M dx. b^{\text{I}}$ - $V. b^{\text{I}}$ auferendus sequens:
 $dq. b^{\text{I}}$ [$(a-x)L + \frac{(a-x)^2 dL}{1.2 dx} + \frac{(a-x)^3 ddL}{1.2.3 dx^2}$ etc.]
 At $\int L dx$ si post integrationem ponatur a loco x , abit
 in hanc expressionem:

A a 3

$\int L dx$

$\int L dx + (a-x)L + \frac{(a-x)^2 dL}{1 \cdot 2 dx} + \frac{(a-x)^3 d^2 L}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^2} + \text{etc.}$
 quae expressio cum sit constans, ponatur = A erit ergo

$A - \int L dx = (a-x)L + \frac{(a-x)^2 dL}{1 \cdot 2 dx} + \text{etc.}$
 quare quantitas subtrahenda illa erit haec

$$dq. b^{\text{e}}(A - \int L dx).$$

Hanc ob rem habebitur pro curua quaesita ista aequatio

$$-dV + dx(Lq + M) = A dq - dq \int L dx.$$

Atque valor ipsius P tam pro quaestionibus primae clas-
 sis quam sequentium erit semper idem scilicet

$$P = -dV + dx(Lq + M) + dq \int L dx$$

vbi $\int L dx$ ita ponitur esse integratum, vt euanescat
 sumto puncto indefinito a in puncto fixo z seu posito
 $x = a$. Simili quoque modo erit progrediendum si Q
 ab alia quantitate integrali pendeat.

CLASSIS SECUNDA

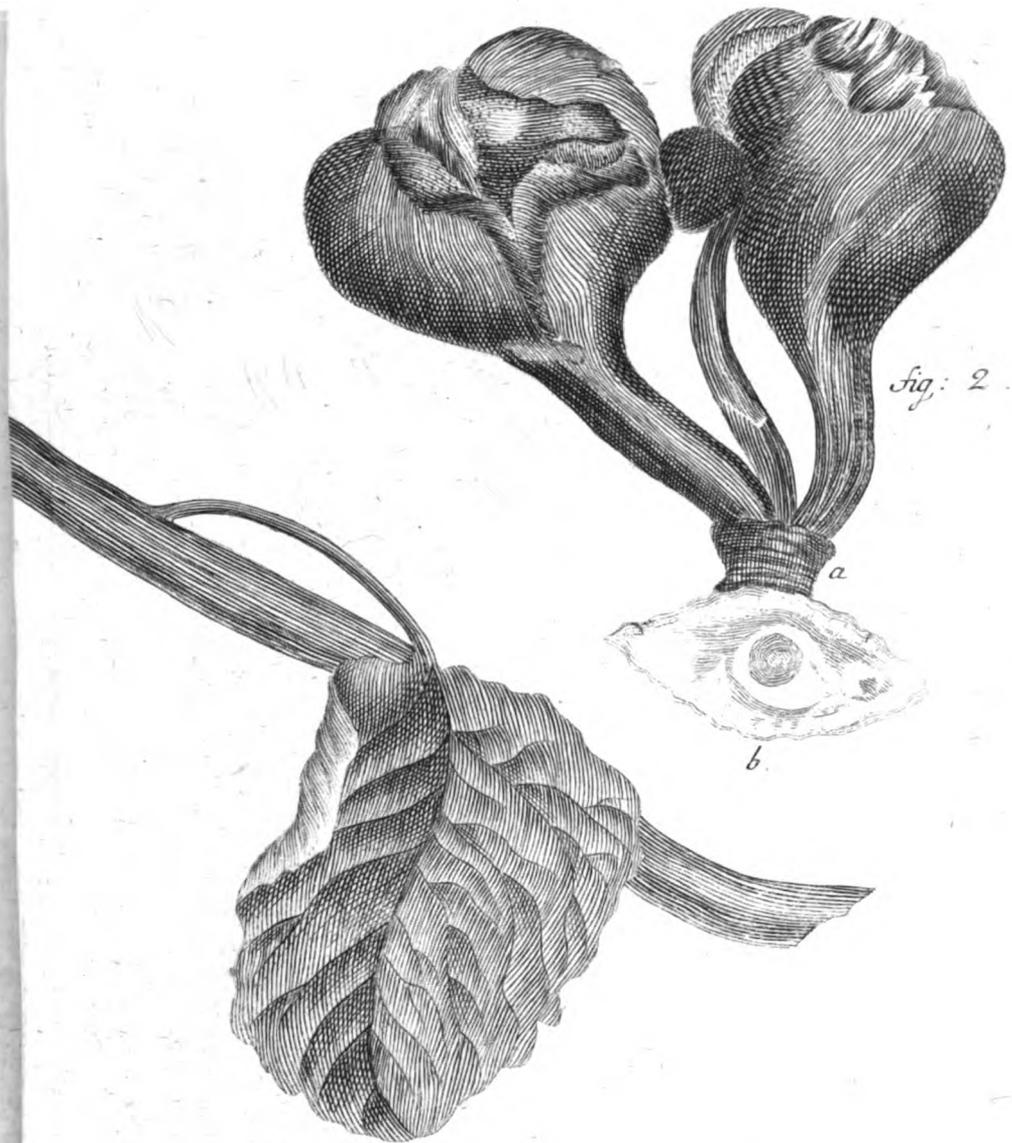
CONTINENS

PHYSICA.

Handwritten text, possibly a title or header, consisting of several lines of cursive script.

Handwritten mark or character, possibly a number '0' or a similar symbol.

Handwritten mark or character, possibly a number '3' or a similar symbol.





DE
FICVBVS
E
TRVNCO ARBORIS ENATIS.
AVCTORE
I. A.

Anno 1735 Iulio mense Ficum vulgarem, hominis circiter altitudinem assecutam, ex Aestua Imperiali Peterhoff vocata, vbi per aliquot annos culta fuit, huc missam accepimus, ex cuius caudice mox supra radicem enatae sunt ficus tres, communi pedunculo breui, lignoso et crasso insidentes, virides, aliis eiusdem arboris in ramis ex alis foliorum consueto modo nascentibus perfecte similes, nisi quod basi angustiori et tenuiori praeditae essent et in summitate dehiscerent, ita vt interna ipsarum superficies huic plantarum generi peculiari- bus flosculis penitus referta cerneretur. Harum media eiusdem primo cum lateralibus magnitudinis erat, cum examini arborem submitterem, sed flaccescere paulatim
Tom. VIII. Bb coepit,

Tabula XI.
Figura 2.

coepit, tandemque profus exaruit. In sinu, quem haec et alia lateralis efformabant, paruus conspiciebatur apex, similis illis, quos huius arboris extremitates ramorum ferunt, quique nihil aliud sunt, quam futurorum foliorum fructuum omniumque partium rudimenta. In pedunculo vero ficus has gerente tres cicatrices apparebant paulo excauatae, quae an foliorum vel aliarum adhuc ficuum delapsarum vestigia fuerint, pro certo affirmare non audeo; arborem enim demum vidi, postquam iam obduratae essent. Amputatus a caudice pedunculus cum aliqua corticis parte lignum ramorum eodem modo abscissorum simile habuit. Idem per longum sectus, lignosam suam partem mox extra corticem caudicis valde angustatam, in pedunculo vero iterum ampliorem redditam, exhibuit.

Figura 2
Lit. a.

Figura 2.
Lit. b.

Figura 1.

Causam huius monstrosi ficuum proventus suspicor hanc esse: gemmam ex loco caudicis, vbi nunc pedunculus tribus ficibus onustus videbatur, excrecentem casu quodam impeditam esse, quo minus omnibus suis partibus, foliorum scilicet et internodiorum rudimentis, incrementum capere et in longum sese expandere poterit, crescentibus folis istis tribus ficibus.

Internodiorum furculi infimorum rudimenta in ficulnea gemma oculo nudo conspici possunt, si vagina, intra quam foliolum conuolutum adhuc cum fructus rudimento, huius alam occupante, delitescit, ab internodii geniculo, cui accrescit, auellatur. Foliolo isto et futurae ficus rudimento indies crescente, vagina sese aperit, marcescit, cadit et annulare vestigium in geniculo internodii relinquit.

quit. Idem fit cum proxime sequentibus vaginis et foliis, donec omnium in gemma contentorum internodiorum, foliorum et ficuum rudimentorum euolutio facta sit. Hoc per totum annum in gemmis summos ramorum apices occupantibus obseruari potest.

Talis structurae gemmam principium monstrorum harum ficuum fuisse patet vel ex apice illo in sinu, quem media et lateralium vna efformabant, conspicuo, de quo supra mentionem fecimus: hunc enim opè microscopii magna cura examinatum omnes gemmae partes in se continereprehendi, vaginas, foliola minutissima conuoluta, et ficuum rudimenta.

Si iam concipiatur infima istius gemmae internodiorum rudimenta impedita fuisse quacunque causa in eorum augmento, ficuum interim rudimentis sese euoluentibus et in dies crescentibus, ita vt tandem tres simul vni pediculo ex tribus quasi internodiis coalito, insidere viderentur, patebit monstrofi huius partus modus et ratio. Folia, si quaedam sese explicare coeperunt, statim delapsa sunt, relictis istis vestigiis seu cicatricibus. Apici autem gemmae in sinu ficuum residuo, ab his sufficiens ad vltiorem euolutionem nutrimentum detractum est.

Ceterum notare operae pretium duco, pedunculo hoc fructifero et aliis ramis e trunci medio excrescentibus amputatis, arborem in loco minus temperato positam et iusto nimis, me nesciente, irrigatam, admodum laborare coepisse: guttatim enim emanabat hinc inde

Bb 2

per

per corticem prope radicem liquor cinereus, illum
corrumpens, et ex cinereo in fuscum colorem vergens.
Hasce guttas ab extrauafato, stagnante et corrupto la-
cteo arboris liquore prouenire iudicans, ob nimiam ir-
rigationem, minorem in aëre frigidiori perspirationem
plantis adeo necessariam et amputatas ficus et ramos,
qui antea magnam satis copiam superflui humoris ex-
halauerant, hypocaustum calefieri curavi ad augendam
perspirationem et incisiones feci in cortice iam pu-
trescere incipienti, vt corruptus liquor facilius effluere
posset; quo facto arbor ad pristinum vegetumque
redit statum.

DE



DE
POMO
EX
TRVNCO ARBORIS ENATO
DISSERTATIO,

IN QVA VARIA TRADVNTVR AD THEORIAM VEGETATIONIS PLANTARVM APPRIME FACIENTIA.

AVCTORE

Christiano Wolfio.

SI quid meum in scientia naturali iudicium est, Physicus Astronomum imitari debet. Quamobrem quae de Medico Astronomum imitante docui in Horis subseciuis A. 1729. Trim. brum. n. IV. p. 154. et seqq. ea ad Physicum quoque transferenda. Ad hoc imitamentum refero obseruationum quarumcunque, siue rariorum, siue maxime vulgarium, ad aliquem usum translationem, iisdemque non ex raritate, qua animum rerum nouarum cupidum oblectant, sed ex usu, quem in theoriis condendis, examinandis et limandis habere possunt. Equidem obseruatio, de qua dicere constitui, in rarissimarum numero est, non tamen tam ob raritatem, qua in admirationem facile coniicit theoriae verae vegetationis ignaros, quam ob usum, quem praestat, in hac ipsa theoria examinanda et corroboranda, attentionem Physicorum mereri mihi videtur. Theoria ve-

Bb 3

geta-

getationis plantarum nondum ita exulta, vt non manum auxiliatricem et emendatricem adhuc desideret. Etsi praeclara sint, quae *Malpighius*, *Nehemias Grew*, *van Leeuwenhoek* et alii de anatomia plantarum dedere; nondum tamen satisfaciunt ad vsum partium singularum euincendum, nedum ad theoriam vegetationis omnibus suis numeris absolutam condendam. Haec ratio ante multos annos me impulit, vt ad eam animum aduerterem et via analytica in eandem inquirerem, quemadmodum docui specimine aliquo in tentamine de vera causa multiplicationis frumenti idiomate patrio primum conscripto et postea cum appendice secunda vice edito, nunc vero in sermonem Anglicanum conuerso ab Anonymo. Et eodem fine in Tractatu Germanico de vfu partium per obseruationes et experimenta in vsum partium, quae sunt plantis, accuratius inquirere coepi. Quantum in hac theoria profecerim, aliorum erit iudicium, quando eandem publici iuris facturus. In praesente experiri lubet, quid valeat in reddenda ratione effectus naturae insoliti. Nihil tamen sumam ad illam spectans, nisi quod vel obseruatione, vel experimento quodam comprobauero.

Effectus ille naturae insolitus pomum est, quod ex trunco arboris enatum praeter omnem spem ac expectationem deprehensum est in horto Viri cuiusdam nobilis, cum autumno A. 1733. poma decerperentur. Inferior pediculi pars, qua trunco infigebatur, cortice obducta, sed omni foliorum ornatu destituta conspiciebatur. Malum ipsum erat maturum, nec in figura eius externa quic-

quicquam apparebat insoliti: alterius tamen erat speciei, quam cetera quae malus ferebat. Notandum vero arborem ex illarum fuisse genere, quae gerunt ramos ex peregrinis furculis trunco insitis natos. Quaesitum ex me fuit, quomodo fieri potuerit, ut praeter naturae consuetudinem truncus ederet malum, et cur idem alterius fuerit speciei, quam quae gerebat malus more consueto edita.

Responsio ad quaestionem alteram nihil prorsus difficultatis habet. In vulgus notum est, truncum cum radicibus nequaquam mutare speciem, si peregrini furculi eidem inseruntur. Quis enim est qui nesciat stolonones ex radicibus et stirpe istiusmodi arborum emissos eiusdem esse speciei, cuius erat arbor, antequam furculi eidem infererentur, nec ligni substantiam ac corticem a specie pristina abire. Immo quis est, qui nesciat, si furculi peregrini inseruntur relicto aliquo ramo, quem ante gerebat sibi proprium, illos ferre fructus eius speciei, cuius erat arbor, vnde rescabantur, hunc vero edere fructus consuetos? Quamobrem cum arbor, ex cuius trunco prodiit pomum, ramos peregrinos gereret, insoliti nihil hoc habet, quod pomum praeter naturae consuetudinem genitum a ceterorum specie abierit.

Enimuero ad quaestionem priorem, quomodo ex trunco arboris enasci potuerit malum, non adeo facilis responsio est. Neque enim principia vegetationis, ex quibus reddenda effectus insoliti ratio, hactenus Physicis

eis, quantum constat, satis explorata sunt. Nisi tamen totus fallor, ea mihi obtulit partim industria in obseruando, partim sagacitas in experimentando. Agedum itaque! videamus, quid valeat theoria vegetationis, praesertim arborum, - quam dudum animo concepi et iteratis nouisque obseruationibus atque experimentis in dies vberius confirmare annitor.

Nullus itaque dubito, pomum praeter naturae consuetudinem editum a trunco prodiisse e gemina grauida, quae A. 1732 protrusa verno tempore A. 1733 flores et folia genuit. Etenim ne fructus arborum, veluti mala, nascantur sine floribus lex naturae adeo sancta videtur, vt, cum anno praeterito mala plura monstrosa bicorporea, nonnisi vno pediculo instructa, deprehenderent, in singulis tamen vtrique malo suas fuerit flos. Equidem non ignoro malum per quadraginta continuos annos maliferam absque floribus, quam in literis ad Cl. *Iurinum* datis et in Actis philosophicis Societatis Regiae Londinensis pagina 199. publici iuris factis describit *Paulus Dudlejus*; ea tamen, si rem attentius consideres, minime probat legem istam a natura fuisse violatam. Cum sapor malorum fuerit immitis, manifesto indicio, quod succus nutritius vitio digestionis nimis adhuc crudus fuerit, vt per exilia vascula, quae cum foliis florum aduehunt, ascendere minime potuerit; non tam malorum rudimentis in gemmis adhuc latentibus prima foliorum stamina defuisse, quam deficiente succo nutritio non explicata fuisse videntur. Praeterea pro explorato habeo, absque foliorum ministerio
ad

ad maturitatem perfectam non peruenire fructus. Succurrit obseruatio recens, qua idem confirmatur. Pauci elapsi sunt anni, ex quo non nemo rei hortensis et theoriae vegetationis ignarus vitem foliis orbauerat, vt vuae foli expositae maturitatem citius consequerentur, miratus euentum prorsus contrarium, vbi nullam maturescere obseruauit, tempestate licet maturationi amica. Non est, quod excipias, nulla circa pediculum folia fuisse reperta. Infuetum non est pomis maturefcentibus folia exsucca decidere, praesertim vbi succus nutritius minime abundat.

Spes erat, quae dixi, obseruatione decisua confirmandi. Cum enim initio veris malos singulas per totum hortum, in quo non exigua earundem copia, studiose contemplerer, non sine voluptate incidi in gemmam grauidam, quae in imo trunci, vbi ad latera protendebantur rami, vltra corticem paucarum linearum interuallo prominebat. Malis florescentibus eadem in flores et folia explicabatur, nec floribus, neque foliis quicquam deerat, quo a ceteris, quibus rami superbiebant, differrent. Enimuero quoniam hoc anno in omni districtu circa urbem infecta quaedam minima floribus malorum erant infesta, vt vna propemodum nocte tantum non omnes decore suo priuarentur, oculis per aliquot iam dies formae nitore pastis; accidit vt omnes, in quibus spem collocaueram, corrumperentur, etsi tantus esset malorum praeter omnium ex illa florum strage propemodum vniuersali nihil boni praesagientium expectationem prouentus, quantum alio anno fuisse ne-

Tom. VIII. Cc mo

mo recordatur. Postquam vero foliis saluis flores perierunt omnes, non multo post ingens inde protrudatur furculus.

Ex trunco arborum protrudi furculos noto notius est, idemque obseruavi, quemadmodum alias saepius ita nuperrime in Pyro annosa et procera, in quam ex musaeo patebat prospectus, quod si cogitemus furculo corticem perumpenti insidere gemmam, aut ex male nutrito, parte superiore corrupta, antequam in debitam longitudinem extendatur, quemadmodum accidit floribus in gemma obseruationis praecedentis, et in omni plantarum genere ob defectum succi nutritii quouis tempore accidere solet, talem prouenire; ubi haec vere sequente explicatur flores ex cortice prodire videntur, quales ramorum furculi suberbire solent. Enimvero cum hoc rarissime contingat, florum quoque et multo magis fructuum ex trunco prouentus rarissimus, sicuti et alia naturae phaenomena minus frequentia sunt, quae plures habent causas nonnisi raro concurrentes.

Vt vero intelligatur, quomodo tam furculi ex trunco per corticem prorumpant, quam gemmae grauidae prodeant, distinctius explicandum, propterea quod Physicis theoria vegetationis arborum, quae principia supeditat, haecenus non satis perspecta fuit. Tenendum itaque succum nutritium, qui in vtriculis substantiam medullarem componentibus praeparatur, plenam esse rudimentis gemmarum, quemadmodum semen animalium atque hominum innumera animalcula alit. Etenim in
Tracta-

Tractatu de vsu partium, quem Germanico idiomate conscripsi et in quo etiam vsum singularum partium plantarum expono, clarissimis atque circumspectis obseruationibus docui, gemmas ex medulla prodire et per fistulosam ligni substantiam erumpere, vbi folia surculo adhaerent. Immo hoc vniuersaliter verum esse in omni plantarum genere iam olim euici in Tentamine de vera causa multiplicationis frumenti idiomate patrio conscripti et hoc ipso anno in Anglicanum translati. Praeterea dudum docui, sicuti singulis annis nouae nascuntur fistulae circa eas, quae anno praeterito excreuerant, in orbem dispositae, ita nouam quoque produci substantiam medullarem loco intermedio, quae ex vtriculis composita fistulas anni praecedentis immediate ambit et anno quoui gemmas suppeditat, quemadmodum medulla primo. Medullarem enim substantiam gemmis protrusis penitus exhauriri, vt ad vltiorem arboris vegetationem prorsus inutilis euadat, et autopsia microscopica testatur, et plantae singulae, quae vbi semina dedere statim emoriuntur, clarissime loquuntur. Quoniam itaque trunci arborum singulis annis non minus substantia medullari, quam vtriculosam esse diximus, quam noua fistularum serie augentur; nunquam ipsis defunt gemmarum atque florum rudimenta, productioni surculorum et gemmarum grauidarum profutura: deest saltem pabulum sufficiens, quo illa opus habent, vt fistulas ligneas a se inuicem diuellant corticemque perforantes foras erumpant.

Nihil in his suppono, quod protritit rei hortenss gnarorum obseruationibus non confirmetur. Ecquis enim est qui nescit, amputatis arborum ramis, antequam in frondes abeant gemmae, ex truncis laetos progerminare furculos? Immo idem vere praeterito obseruauit in *Lauro ceraso*, quae per hiemem neglecta folia deposuerat omnia, vt nutrimento in trunco praesente omni non haberet opus, ac alias saepius simile quid me vidisse memini atque in vulgus notum esse existimo. Nec est quod excipias, ramis praesentibus ac in vigore constitutis aduehi cum succo nutritio ista surculorum rudimenta, quae in trunco explicantur. Constat enim, si truncus cum ramis non sit eiusdem speciei, quemadmodum iam supra notauit, qui ex trunco protruduntur furculi a ramorum specie abire. Eorum itaque rudimenta substantiae medullari trunci inesse debent, cum eidem substantiae in ramis insint alia. Neque adeo alia esse potest causa, quod ordinarie in statum euolutionis non transferantur, quam quod succus nutritius, quo ad subeundam hanc mutationem indigent, sursum ascendat. A partibus enim arborum supremis, quae alimento egent, succum nutritium quasi prolectari, nemo ignorat. Inde nimirum est quod gemmis stemmati alieno insertis non omnes adimantur frondes vt succus nutritius per truncum felicius ascendat, pleraeque tamen auellantur, ne desit gemmae eidem adnascendae pabulum sufficiens.

Enimuero ne quid ea in re superesset dubii, experimentum plenam fidem facturum instituere libuit, Pomona fauente. Nimirum cum autumno A. 1733. pirum

Pyrum annosam, quam paulo ante testem appellavi, deiici curassem, partem quandam rami maioris, qui crassitie sua truncum arboris aemulabatur, et cuius diameter pede vno paulo maior erat, stillicidio supponi iussi horizontaliter, ita vt aquam per corticem imbiberet, et a radiis solaribus per totam fere diem tuta iaceret, ne lignum exsiccaretur. Aestate modo praeterita ibi loci, vbi aliquod rami vestigium erat, multi progerminarunt surculi, quorum vnus alterue ad duorum propemodum pedum altitudinem excreuit. Necesse igitur erat, quemadmodum vult theoria vegetationis arborum, quam animo conceperam et quae mihi surculorum edendorum spem faciebat, vt in substantia medullari seu vtriculosa et surculorum rudimenta laterent, et alimentum ipsis conueniens aqua pluuiali diluendum sufficiente copia adesset.

Notandum praeterea est, in eodem succo nutritio, quem inspissatum seruari constat in vtriculis, quorum congeries est substantia medullaris, florum rudimenta copiosa latere, a rudimentis gemmarum separata, quae cum in gemmas cum succo nutritio deferuntur, eas impregnant. Licuit mihi vere praeterito esse adeo felici, vt in observationem inciderem, qua hanc theoriae partem clarissime confirmari existimo. Demtis enim arbori humili (quale arborum genus lingua vernacula *Zwerg-Baume*, quasi pumiliones in arborum genere appellamus) omnibus surculis, quibus gemmae adhaerebant et ramis maximam partem amputatis, ita vt non nisi partes trunco vicinae relinquerentur, cum harum vna effrondesceret, in altera per corticem flores nudi prorumpabant, qui breuioribus pediculis eidem quasi infixi ap-

parebant. Flores hi male nutriti foliola sua explicabant, nec quicquam ipsis deerat ad structuram pertiniens ad iustam tantummodo magnitudinem non pertingebant. Marcescentes decidebant, nullo sui vestigio relicto; cortex vero cum ligno postea exaruit. Ecquis non videt flores istos fuisse eos, quorum rudimentis gemmae anni praesentis impraegnari debebant, nisi rami cum furculis fuissent resecti? Quoniam vero soli absque ceteris partibus, quae in gemma grauida deprehenduntur, prodire, ut ne minimum quidem illarum vestigium conspici posset, et singulares quasi per corticem disseminati fuere, quin a rudimentis gemmarum discreti in vtriculis reperiuntur, vnde gemmas per fistulosam substantiam ligni prorumpere supra diximus, dubitari haud quaquam potest. Obiter observamus rudimenta gemmarum, quae hoc anno erumpunt, nec non rudimenta florum, quibus impraegnantur, iam genita fuisse anno superiore, quemadmodum et nutrimentum, quo gemmae anno superiore protrusae praesente explicabuntur, anno superiore iam praeparatum fuit et in vtriculis asservatur hoc, anno nonnisi diluendum et per fistulas ad partes organicas explicandas advehendum: id quod in praesente multis adstruere non licet, ab attento rerum naturalium observatore facile animadvertendum, cum vniuersali plantarum omnium consensu nitatur, quae non primo statim anno semina edunt, atque emoriuntur, vtut etiam in his analogi quiddam obseruetur.

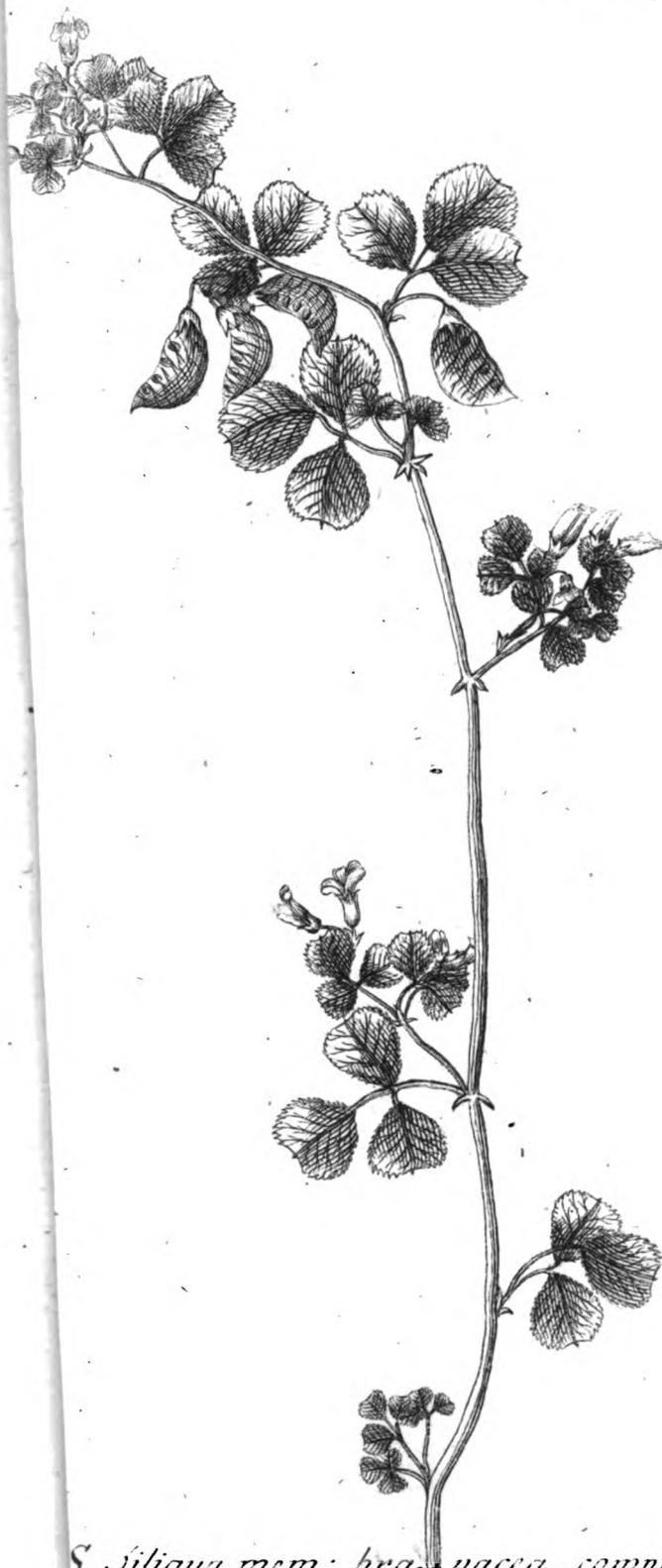
Atque haec principia minime conficta, quales vulgo sunt Physicorum hypotheses, sed experientiae congrua,

grua, sufficiunt vt intelligatur, quomodo truncus arboris ediderit malum. Nimirum aestate A. 1732 ex trunco arboris prorupit furculus, qui cum male nutrire-
tur ad eam proceritatem minime extendebatur, ad quam vulgo protendi solent, qui inde prodeunt. Cum folia nullo fere interuallo a se inuicem distarent et substantia medullaris ineffet perpauca, ad radices foliorum nullae vegetari poterant gemmae. Ast gemma, quae apici infedit, florum rudimentis impraegnabatur, quae instar ceterorum in furculis ramorum, cum anno 1733 gemma explicaretur, maturitatem suam adepta in flores abibant. Pericarpio vnus nutrito, malum crescebat atque iusto tempore cum ceteris, quae ferebat arbor, maturiscebatur. Surculus A. 1732 male nutritus ab obseruatoribus minus circumspectis pro parte pediculi habitus, vt ideo pars pediculi dimidia eaque infima cortice vestita visa fuerit.

Nihil itaque amplius restat, quam vt dubium tollatur, quod circa nostram effectus naturae insoliti explanationem vni alteriue subnasci potest. Etenim si theoria nostra standum, in trunco seu stipite arboris perinde ac in ramis eorumque furculis singulis annis nascuntur vtriculi, in quibus non modo nutrimentum commodum gemmarum praeparatur, sed earum quoque rudimenta vna cum rudimentis florum, quibus gemmae impraegnantur, maxima copia gignuntur, vndecunque tandem prodeant. Semper adeo fieri poterat, vt ex trunco vegetarentur gemmae grauidae earundemque beneficio fructus eidem adnascerentur. **Experientia tamen**

men contrarium docet. Rarius ex stipite emittuntur furculi, immo fere nunquam prodeunt gemmae grauidae, ita vt vix fidem inuenisset affirmaturus edi fructus inde posse. Immo valde vereor, ne Physicorum bene multi theoriam vegetationis hoc ipso ad absurdum esse deductam, quod inde consequatur stipites arborum fructus ferre posse. Enimuero difficultas ista, quantumuis speciosa videatur, reuera tamen nulla est. Multa sunt in naturae potestate, quae tamen ad actum minime perducuntur, deficientibus causis actum determinantibus: id quod dudum quoad vegetationem luculentis admodum exemplis docui in Tentamine de vera causa multiplicationis frumenti. Ita experimentis non minus, quam obseruationibus comprobauit, in medulla, quae partem caulis nodosam replet in quouis frumenti genere, contineri plantulas iis, quae ex semine vegetantur, prorsus similes, quae et radices agere, et in aristas excrecere possunt. Rarissime tamen id accidere nemo est qui ignorat. Nihil adeo singulare est, quod, quae in medullari stipitis substantia latent, gemmarum atque florum rudimenta in statum euolutionis minime transferantur.

DE



S. Siliqua mem: bra-nacca, compressa

DE
MELIOTO
SILIQVA MEMBRANACEA
 COMPRESSA.

AVCTORE

I. A.

NOua haec Meliloti species ex seminibus in Sibi-Tabula XII.
 ria collectis et ollae fictili terra repletæ com-
 missis octauo circiter anno post lectionem, in-
 signi fibrosarum radicum alte lateque porrectarum con-
 textu primo a satu anno valde luxuriabat.

Cauliculi ex vna radice plures, quatuor, quinque
 et sex subinde enascuntur quadranguli, ex viridi pur-
 purascentes, quandoque erecti, vt plurimum vero su-
 pini, aut aliarum plantarum adminiculo sese sustentan-
 tes, bipedales et tripedales, in multos laterales ramulos
 diuisi, quibus adnascuntur folia terna, singulis pediculis
 innascentia, ad Meliloti Officinarum Germaniae folia
 accedentia, sed rotundiora et breuiora, costa communi
 femunciali innixa, ad cuius exortum foliola duo acu-
 tissima aurita et profunde dentata conspiciuntur.

Ex alis harum costarum, nec non ex summitati-
 bus caulium et ramulorum pediculi oriuntur tribus aut
 quatuor vt plurimum floribus papilionaceis, luteis,
Tom. VIII. Dd nigri-

210 DE MELILOTO SILIQVA MEMBRAN. COMP.

nigricantibus striis notatis, et in praetenuem spicam dispositis, onustae. Maiores sunt reliquis huius generis, et longioribus pediculis sustentantur. Vexillum eorum striatum, breue, obtusum; alae eiusdem fere cum vexillo magnitudinis, parum hiscentes; carina breuissima intra alas delitescens. Omnes hae partes calyce excipiuntur viridescente, monophyllo, in plura segmenta acutissima secto.

Flores emarcidos et delapsos sequuntur siliquae latae, compressae, membranaceae, dimidiam et saepe integram unquam longae, quadrantem latae, primo virides, postea per maturitatem nigricantes, neruosae, rigidae, seminibus paruis reniformibus, flauis, quatuor vel plurimum foetae.

Odoris omnis expers est. Folia degustata herbidum et paululum adstringentem saporem linguae imprimunt.

Tabula XII. ramum huius plantae cum siliqua naturali magnitudine repraesentat.

QVIN-



E. ONTOPETALOIDES



QVINQVE NOVA PLANTARVM GENERA.

AVCTORE

Ioan. Amman.

GENVS PRIMVM.

LEONTOPE TALOIDES.

L EONTOPE TALOIDES est plantae genus flore Tabula XIII.
 AB monopetalo, infundibuliformi, multifido,
 quem sequitur fructus siue vesica C, feminibus
 foeta ouatis D.

LEONTOPE TALOIDES foliis profunde laciniatis,
 radice tuberosa.

Radix speciosae huius plantae, quae in India Orientali sponte provenit, subrotunda est, tuberosa, extus cinerea, intus alba, duos cum dimidio circiter pollices lata, paucas hinc inde fibras emittens.

Caulis ex ea surgunt ut plurimum quatuor, nudi, non ramosi, praealti, teretes, cineracei, striis nigricantibus creberrimis notati, digiti minoris crassitie, medulla viridi farcti. Duorum huiusmodi caulium summitates in folia expanduntur amplissima, valde tenuia, varie et profunde laciniata, laete viridia.

D d 2

E duo-

E duorum autem reliquorum extremis flores enascuntur quam plurimi, monopetali, infundibuliformes, in umbellam dense congesti, inferne tubulati, superne in sex segmenta acuta diuisi, coloris lutei, calyculis contenti monophyllis, viridibus, in aliquot segmenta dissectis, et pediculis sustentatis itidem viridibus, pollicem plus minus longis et paulo incuruis.

Floribus his delapsis succedunt fructus siue vesicae angulatae et inflatae, virides, deorsum inflexae, in medio, vbi latissimae sunt, vnciam circiter latae, in apicem desinentes purpurascentem. Intus vero continentur semina plura, maiuscula, ouata et striata, coloris lateritii dilutioris.

LEONTOPETALOIDES dicitur haec planta, quia ad Leontopetalon a Clarissimo Tournefortio in Institutionum suarum Corollario definitum, quam proxime accedit.

GENVS SECVNDVM.

RICINOCARPODENDRON.

Tabula XIV. RICINOCARPODENDRON est plantae genus flore A B rosaceo, tribus scilicet petalis in orbem positis constante, in quorum medio tubus B vrceolatus, per quem ex calyce surgit pistillum, quod deinde abit in fructum C trigonum, intus in tria loculamenta diuisum D, septis intermediis a se inuicem discreta, quorum singula semen continent cortice duro obductum.

Rici-

**RICINOCARPO-
-DENDRON**





RICINOCARPODENDRON foliis alatis, fructu coccineo.

Elegantis huius arboris rami recti sunt et cortice obducti cinereo-fusco.

Folia ex trium vel quatuor pinnarum coniugationibus composita, Fraxineis quodammodo similia sunt, pinnis longioribus, acutioribus et non serratis.

Flores circa foliorum alas egrediuntur, in tenuem spicam dispositi, albi ex tribus petalis planis et tubo vrceolato, medium eorum occupante, constantes.

Fructus primo viridis est, postea ex rubro flavescit, per maturitatem vero coccineus euadit, magnitudine nucis Iuglandis, Ricini fructui similis, in tria loculamenta diuisus, quorum vnumquodque semen continet oblongum, cortice duro, extus nigro, intus rubente obductum, quo nucleus includitur albi coloris, in duos lobos distinctus. Fructus hi per maturitatem dehiscunt et sponte in Indicis regionibus semina sua effundunt.

RICINOCARPODENDRON nomen est compositum ex vocibus Ricinus, καρπος, fructus et δένδρον arbor, quasi diceretur arbor fructu Ricini.

GENVS TERTIVM.

SIPHONANTHEMVM.

SIPHONANTHEMVM est plantae genus flore A Tabula XV. monopetalo, tubulato, multifido; ex cuius calyce sur-

Dd 3

git

git pistillum, quod deinde abit in fructum B quatuor baccas sibi inuicem appositas referentem, in quatuor loculamenta C diuisum, feminibus D foeta subrotundis.

SIPHONANTHEMVM falicis folio, flore flavescente.

E caulibus rectis, viridibus, striatis, folia nullo ordine ad breuia satis interualla oriuntur, quae salignis quodammodo similia sunt, tres plus minus uncias longa, vtrinque angustata, pollicem praeter propter lata, in acutum mucronem terminata, breuissimis pediculis insidentia, tam superne quam inferne intense viridia.

Versus summitatem caulium vel ex latere foliis opposito, vel paulo supra originem foliorum, aut ex ipsis horum alis pediculi enascuntur virides, crassiusculi, pollicares plus minus, in alios minores pedunculos tres, quatuor vel quinque umbellae in modum diuisi, quorum singuli calycem gerunt unifolium, in quinque segmenta dissectum, vnde flores oriuntur, ex biunciali seu triuncali, e viridi flavescenti gracillimoque tubo in calathum quadripartitum expansi, coloris pallide flavescentis, in cuius medio emicant stylus purpureus, incuruus, et quatuor vt plurimum stamina eiusdem coloris, apicibus fuscis, triangularibus instructa.

Flores subsequuntur fructus quadricapsulares, virides, qui ex quatuor quasi baccis compositi videntur. In singulis loculamentis semen continetur vnicum, subrotundum, coloris e viridi flavescentis.

SIPHON-

PTEROSPER- MADENDRON



SIPHONANTHEMVM nomen est compositum ex vocabulis graecis σιφον, tubus, et ανθεμον, flos, quasi diceret plantam flore tubulato.

GENVS QVARTVM.

PTEROSPERMADENDRON.

PTEROSPERMADENDRON est plantae genus Tabula XVI. flore A rosaceo, plurimis scilicet petalis in orbem positis constante, ex cuius calyce surgit pistillum embryone a instructum, qui deinde abit in fructum C lignosum, filiquosum, apice dehiscentem, in quinque loculamenta D diuisum, seminibus foeta alatis E.

I. PTEROSPERMADENDRON suberis folio anguloso, subtus incano, floribus albis. Arbor Champaccae suberis folio, fructu ligneo, seminibus alatis referto *Mus. Petiuer. n. 349.*

Rami huius arboris recti sunt, paucos hinc inde laterales ramulos emittentes, cortice obducti extus fusco, intus viridi. Lignum quoque subuiridis est coloris.

Folia nullo ordine disposita longa sunt tres circiter pollices, fescunciam lata, versus extremum angulosa, crassa, superne viridia, inferne incana, pediculis admodum breuibis appensa. Nervus medius foliorum, auersa praecipue parte conspicuus, tenui, valde breui suluaque lanugine obtectus est.

Flores,

Flores, qui ex foliorum alis et ramulorum summitatibus oriuntur modo singulares, modo bini aut terni, albi sunt coloris, ex quinque petalis constantes viciam circiter longis et valde acutis, staminibus pluribus eiusdem coloris et longitudinis cum petalis, et pistillo paulo incuruo, albi itidem coloris.

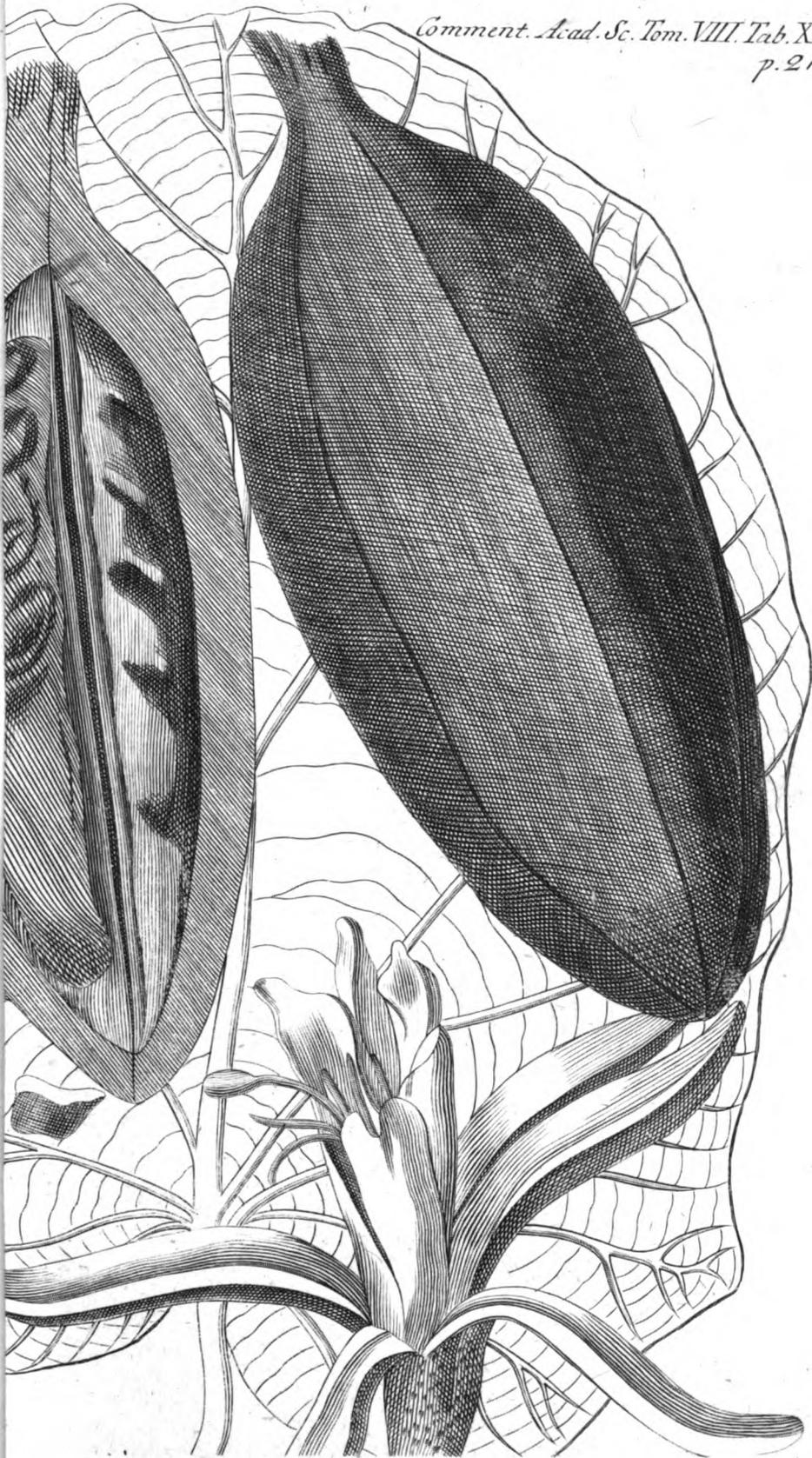
Calyx monophyllus, crassus, aequalis fere cum flore magnitudinis, in quinque segmenta diuiditur, oblonga, acuta, retroflexa, crassa, intus viridia et glabra, extus fulua lanugine obsita.

Embryo tandem, qui versus extremitatem pistilli conspicitur, fit fructus lignosus, fuscus, oblongus, vtriusque angustatus, in medio tumidus, nucis Juglandis magnitudine, apice per maturitatem dehiscens, in quinque loculamenta diuisus, quorum singula plura semina continent, oblonga, compressa, Aceris instar alata, coloris rufi, nucleum album condentia. Ceterum hi fructus ita dehiscunt, ut singula loculamenta in duas findantur partes, quo facto semina sponte decidunt.

Tab. XVII. II. PTEROSPERMADENDRON foliis auritis, flore fructuque maiori. An Solda Hort. Malabar. Vol. VI. Tab. 58. p. 103. Tab.?

A praecedenti differt foliis amplioribus, obtusioribus, sinuatis et auritis; florum petalis longioribus et angustioribus; calycis segmentis longioribus itidem, crassioribus et obtusioribus; fructu longiori et crassiori, longitudine scilicet quatuor vel quinque pollicum, crassitie duorum fere, semina quam praecedentis multo maiora continente.

An





PTEROSPER. MADENDRON II.

An sequentes plantae proprie ad hoc genus pertineant, iis determinandum relinquimus, quibus eas florentes et fructus ferentes videre continget.

1. Alcea arbor populnea fronde, tota argentea, quinquecapsularis, siue Ebenus viridis ex Insula St. Helenae, vbi ab Anglis indigenis *Blakwood* et *Ebony*, id est, lignum nigrum et Ebenus cognominatur *Pluken.* *Mant. p. 6. Tab. 333.*

2. Alcea arborea populi nigrae foliis prona parte albicantibus, flore amplissimo rubicundo, ex Insula St. Helenae, vbi *Redwood*, id est, lignum rubrum Anglis nuncupatur. *Eiusd. ib.*

In speciminibus ipsis *Plukenetianis*, quae nunc seruantur in Museo Ill. Equitis *Hans Sloane*, fructus duarum harum plantarum, cum fructibus huius generis exacte conueniunt structura, multo vero minores sunt, magnitudine vix nucem Auellanam aequantes.

3. Alcea Floridana, quinquecapsularis, Laurinis foliis leuiter crenatis, seminibus coniferarum instar alatis *Pluk. Almag. p. 7. Tab. 352, et Catesby Hist. Nat. Carolin. et Florid. Tab. 44. p. 44.*

4. Est mihi quoque fructus Arboris ad hoc genus forte pertinentis, quem mecum communicauit *G. Houston* Medicus et Botanicus peritissimus, qui eum circa Veram Crucem in Noua Hispania ad littus Sinus Mexicani sitam urbem collegit. Hic a primae huius generis speciei fructu non aliter differt, quam quod sit pentagonus.

Tom. VIII.

Ee

Fru-

Fructus Cedri Barbadosis, alatis Fraxini foliis, non crenatis, fructu singulari, quinis involucris crassis, validis, cochleato-cauis, totidem semina membranis aducta, et columnae canaliculatae pentagonae, praegrandi adnata, occludentibus, ornato *Phk. Almag. p. 92. Tab. 157, Fig. 1.* ab huius quoque generis fructu tantum in eo diuersus est, quod axi pentagono affixa sint.

PTEROSPERMADENDRON nomen compositum est ex vocibus graecis πτερον, ala, σπερμα, semen et δενδρον, arbor, quasi diceretur arbor semine alato.

GENVS QVINTVM.

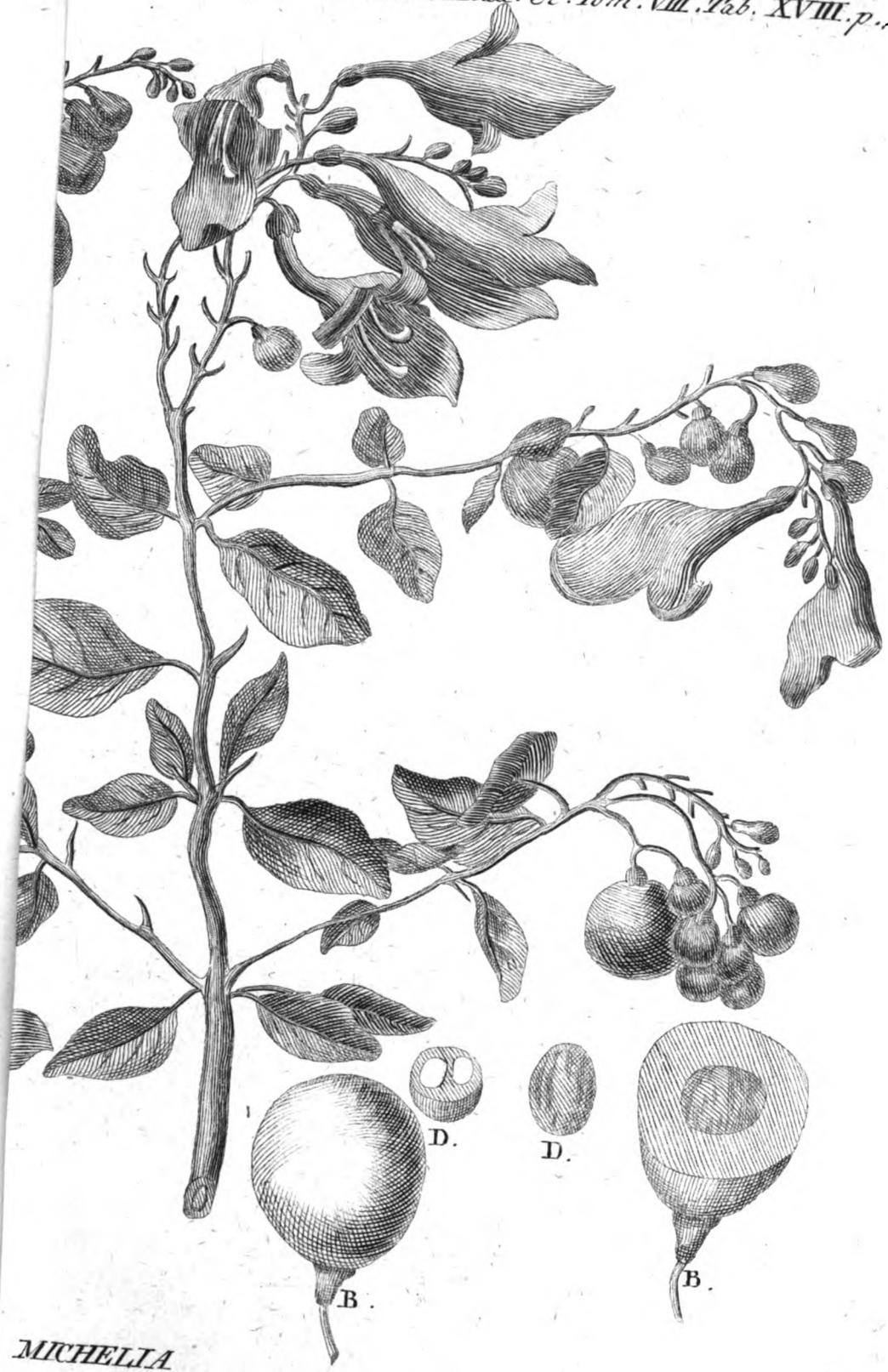
MICHELIA.

Tab. XVIII. MICHELIA est plantae genus flore A monopetalo, anomalo, tubulato, vtrinque patenti et quasi bilabiato; ex cuius calyce surgit pistillum, quod deinde abit in fructum B carnosum, officulo foetum in duo loculamenta diuiso D, quarum vnumquodque semen continet vnicum.

MICHELIA spinosa, floribus luteis.

Rami singularis huius fruticis cortice obducuntur laete viridi. Recti non sunt, sed parum hinc inde intorti, ramulos emittentes modo singulares, modo binos sibi inuicem oppositos seu coniugatos, spinis admodum acutis, viridibus, semvnciam longis, ad foliorum hinc inde exortum armatos.

Folia



MICHELIA

Folia obtinet vtplurimum coniugata, subinde ternaria aut quaterna, vtrinque angustata, in medio vnciam circiter lata, sesquipollicem longa, superne laete viridia, inferne pallidiora, pediculis valde breuibus ramis ramulisque ad sesuncialia plus minus interualla adnata.

Summitates tam ramorum quam ramulorum terminantur in spicas longas, laxis florum luteorum speciosorum, monopetalorum, tubulorum, in quatuor segmenta inaequalia dissectorum, quorum superius amplum valde, fornicatum, inferius vero et lateralibus multo minoribus sunt et extrorsum flexa. In horum medio conspiciuntur stamina duo crassiuscula, sulphurei coloris, apicibus subrotundis, concoloribus praedita; inter haec autem pistillum eiusdem cum staminibus coloris, longitudinis et crassitiei. Calyx valde brevis est, monophyllus, viridis, superius in obtusa aliquot segmenta dissectus.

Floribus succedunt fructus carnosissimi, globosissimi, primo virides, per maturitatem flauescentes, nucis Iuglandis magnitudine, carne multa, pallida praediti, et officulo foeti ovato, dilute fusco, laevi, in duo loculamenta diuiso, in quibus nuclei continentur, albi intus coloris.

MICHELIAE nomen huic plantae imposui a Petro Antonio Michelio, Florentino, Ioannis Gastonis Magni Etruriae Ducis, Botanico celeberrimo.

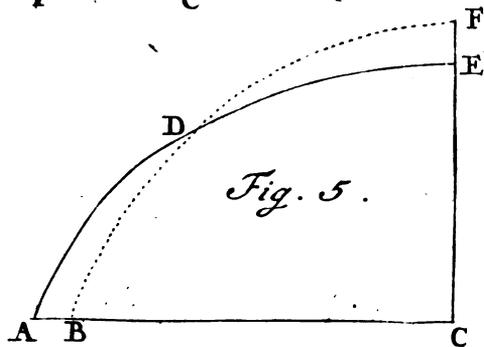
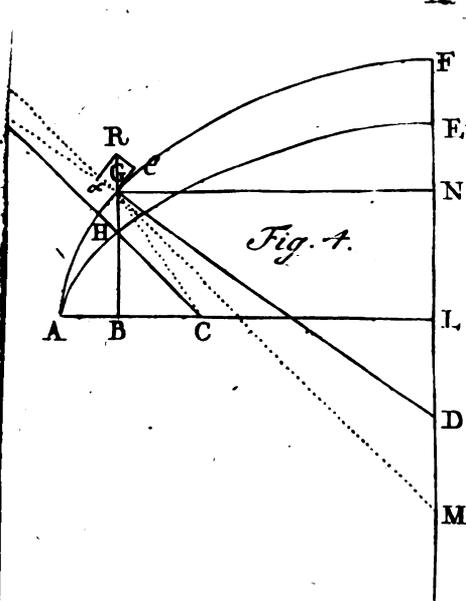
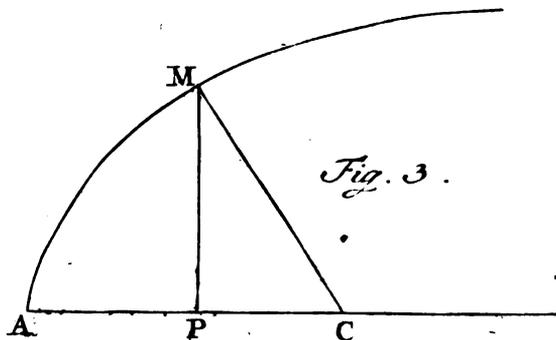
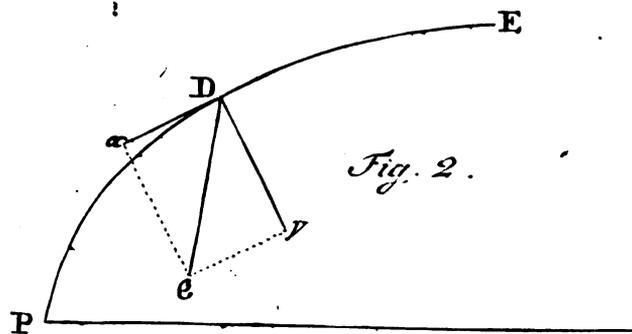
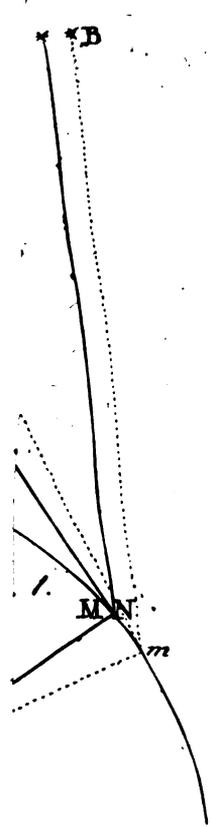
DE
FIGVRA TERRAE,
 DISSERTATIO I.

AVCTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

§. I.

Tabula XIX.
 et XX.

INter praecipua seculi huius inuenta referendae *milit* videntur meditationes, quae a recentioribus Philosophis de Figura Globi nostri terraquei prolatae sunt: constituunt vero Problema Geographiae Mathematicae difficillimum. Sparsae sunt partim hinc et inde de hac materia Eruditorum considerationes in variis Diariis; partim vero etiam non ea perspicuitate donatae sunt, ut a quouis primo statim intuitu intelligi possint. Quare cum hoc tempore de nouo vigeat haec quaestio, et praecipuorum Physicorum cura huic Problemati per Experientiam resoluendo quam maxime sit intenta: speravi, non incongruum fore, si praecipua huc pertinentia in vnum quasi systema colligerem, eaque eo ordine et perspicuitate, quantam quidem rei difficultas permittit, pertractarem, ut solius Analyseos ope eruantur, atque tum eo facilius hodiernis oculis pateant. Quae enim a summis Viris *Hugenio, Newtono, Hermanno*, atque aliis quibusdam, in medium prolatae sunt circa hanc quaestionem, optime quidem, et profundo ingenio eruta sunt, et demonstrata, sed methodo veterum



rum Synthetica, hoc est, tali, quae inuentum proponit, inuentionis autem fontem non detegit. Atque ad hanc tractationem eo promptius etiam accessi, quoniam in Tractatu Germanico, *De Geographia Mathematica et Physica*, nuper conscripto, eam, utpote quae altioris indaginis est, omittere coactus fui.

§. 2. Omnes de figura Terrae opiniones huc redeunt, ut prima earum sit *Antiquissima*, quae terram partim latissima planitie extensam, partim profundo alveo excauatam, partim etiam alio, non minus incongruo, modo formatam, statuit; quae omnes sententiae pro infantia quasi huius doctrinae haberi possunt. Enumerat earum potiores *Varenius* *Geographiae Generalis* Lib. I. Sect. 2. Cap. 3. cunctae autem, non tam propter earum vetustatem, quam infirmitatem, hodie obsoleuerunt. Secunda vocari potest *Antiqua*, quae variis perpen-
 pensis firmioribus argumentis, tandem in figura Terrae perfecte globosa acquieuit. Tertia est *Hugeniana*, quae statuit figuram Terrae a perfecte globosa recedere nonnihil, ita quidem, ut Diameter Aequatoris Axem Terrae per Polos ductum nonnihil excedat; et tradita est ab *Hugenio* in Tractatu eius: *Discours de la cause de la pesanteur*, pag. 157. Quarta est *Newtoniana*, quae cum *Hugeniana* fere coincidit, in eo autem potissimum differt, quod proportionem inter Diametrum Aequatoris et Axem paulo diuersam producat. Denique Quinta est celeberrimorum *Gallorum*, qui, Experientia confisi, figuram Telluri *Hugenianae* et *Newtonianae* contrariam

Ee 3

tribuunt,

tribuunt, hoc est, quae Diametrum Aequatoris habeat paulo minorem, Axem vero maiorem.

§. 3. Ratio, qua dictae vltimae tres sententiae nixae, a figura Telluris aut perfecte globosa, aut vero oblongiori, recedunt, in eo vnice posita est, quod Terra circa Axem suum motu diurno, spatio 24 horarum, vertatur, qui motus Vertiginis vocatur, et de quo praefati Authores minime dubitant. Est itaque *Copernicus* autor, qui Terram non sede solum sua dimouit, sed figuram quoque eius mutauit. Vt vero explanatius definire possim, quid ad quamlibet harum sententiarum spectet, non inutile esse iudico, sequentia in antecessum probe distinguere et considerare. Perpendenda igitur erunt (I.) Figura Terrae ante rotationem eius existens; dum nempe animum ab eius motu Vertiginis abstrahimus; et quam *Cel. de Mairan* in Comment. Acad. Scient. Paris. 1720 Primitiuam vocat. (II.) Figura Terrae, quam induit post eius rotationem factam, accedente nimirum motu Vertiginis, quam figuram praefatus *de Mairan* vocat Actualem. (III.) Vis Centrifuga, quam graue vnumquodque in ipso Aequatore terrestri positum, habet. Dum enim Terra motu Vertiginis circumrotatur, vti notissimum hodie est, et testibus Experimentis Physicis, Vis Centrifuga orietur in vnoquoque graui, quod in superficie Terrae positum est. Atque haec vis centrifuga nulla est in vtroque Polo ipso, maior subinde in Circulis a Polo magis distantibus, et maioribus, maxima denique in Aequatoris Circulo ipso; quae igitur maxima vis centrifuga Aequatoris maxime etiam in considerationem

nem veniet, vtpote reliquis intermediis locis pro fundamento et basi futura. (IV.) Ponderis grauis vnuscu-
 iusque absolutum. Cogita, ponderis corporis cuiuslibet in superficie Terrae positi, vi grauitatis niti deorsum, id est, versus Centrum Terrae, et vim centrifugam, a motu Vertiginis Terrae oriundam, niti sursum, id est, recedendo a Centro Terrae: vt destruat, necesse est, huius pars aliqua illius partem aliquam. Quia vero, vti vidimus, vis centrifuga in ipso Polo nulla est, et accedendo ad Aequatorem continuo crescit: erit etiam in ipso Polo destructio grauitatis nulla, sed haec destructio crescet accedendo propius ad Aequatorem. Quare ponderis vnuscuusque corporis in Polo ipso erit maximum, quod ideo vocatur Absolutum; in Aequatore vero minimum; in intermediis autem locis erit ponderis corporis etiam medium inter maximum et minimum; quare (V.) Consideranda etiam erit illa ratio vel proportio, iuxta quam pondera in diuersis a Polo Parallelis posita decrescunt. Ipsum vero illud ponderis residuum, quod, detracto vis centrifugae in directionem grauitatis effectu, adhuc superest, vocari poterit Ponderis Respectiuum, vel, cum Newtono, Solicitudio Acceleratrix. (VI.) Perpendendae etiam erunt, in vnaquaue sententia circa figuram Terrae, longitudines penduli alicuius pondere onusti, singula minuta secunda oscillantis. Cum enim tempora harum oscillationum ab actione grauitatis in ponduscula pendulis his annexa pendeat: et actio grauitatis in Terrae figura actuali sit inaequalis: sequitur longitudinem etiam penduli, singula minuta secunda oscillantis fore in diuersis superficiei terrestris locis in-
 aequa-

aequalem. Hinc, modo ponderibus in Terra analogo, consideranda veniet longitudo penduli simplicis, *singula* minuta secunda oscillantis, sub Polo, sub Aequatore, *et* in locis intermediis, vna cum ratione, iuxta quam *ab-* breuiatio huius penduli, pergendo a Polo ad Aequatorem, progreditur. (VII.) Examineda erit, *ex figura* Terrae Actuali, ratio Axis Telluris, a Polo ad Polum ducti, ad Diametrum Aequatoris. (VIII.) Cum magnitudo gradus vnius terrestris, pergendo ab Aequatore versus Polos, necessario vel crescat, vel decrescat, prout vna aut altera praefatarum sententiarum assumitur: determinari debet in qualibet opinione etiam proportio huius inaequalitatis. Denique (IX.) etiam excutienda occurret directio grauitatis, via nempe alicuius grauis, quam sequeretur, si a superficie Terrae libere caderet eousque, dum in statum quietis perueniret; quam viam *Cel. de Mairan* vocat Directricem grauitatis. Atque haec sunt praecipua, quae ab Auctoribus, qui de hac quaestione Figurae Terrae solliciti fuerunt, sunt pertractata.

§. 4. Neglecta figura Terrae Antiquissima, vtpote nullis plane rationibus, aut infirmissimis, nixa: *considerabo paululum figuram Terrae Antiquam*, hoc est, perfecte globosam. Huius rotunditatis argumentum praecipuum duxerunt Veteres ex eo, quod sumto in Meridiano Terrae loco quouis, progrediendo versus Polum alterutrum, animaduertamus constanter in aequalibus factis itineribus Polo nos aequaliter appropinquari. Huius argumenti vim commode per Globum artificialem ostendi posse, dicit Varenius l. c. sed Geometricè poterit

erit idem sic effici. Sit AMm superficies Terrae in Meridiano, quaecumque demum ea sit, B stella Polaris, **vel** Polus coelestis ipse, cuius adeo distantia a Terra, respectu radiorum osculi in M et m , erit infinite magna, quoniam certo constat, Curvam AMm esse in se redeuntem. Sint MD , md , tangentes punctorum M et m , repraesentabunt eae Horizontes locorum M et m , et anguli DMB , dmB , Eleuationes Poli locorum M et m . Erit autem differentia harum Poli eleuationum angulus $DMB - dmB$, hoc est, ob parallelas MB , mB , et angulum $DMB = DmB$, $= DmB - dmB = Dmd$. Producto radio osculi RM in N , erunt triangula MmN et NRm similia; quare angulus ad $R =$ angulo MmN , hoc est, aequalis differentiae Eleuationum Poli locorum M et m . Haec autem differentia debet esse proportionalis facto itineri per Mm , quare, proportionalitate per Aequationem expressa, positoque $Mm = ds$, et constante arbitraria $= \alpha$, erit, quia angulus quisque est arcus suus, diuisus per radium, $\text{ang. } R = \frac{ds}{MR}$, vnde habebitur $\alpha ds = \frac{ds}{MR}$, aut $MR = \frac{1}{\alpha}$. Cum itaque curua AMm talis sit, vt habeat radium osculi vbique constantem: patet eam nullam aliam esse posse, praeter circularem.

Figura 2.

§. 5. Haec quidem rotunditas perfecta, Terrae ex Obseruationibus Astronomicis asserta, vera tantum est, et cum figura Terrae Actuali concordat, si minutiae quaedam itinerum terrestrium Eleuationibus Poli analogorum, de quibus nostro demum tempore controuersia

Tom. VIII.

Ff

na-

nata est, negligentur. Suadent vero rationes Physicae, et a *Newtono* Princ. Lib. III. Prop. 18. quasi Axiomatibus loco assumitur, Terram perfectissimam rotunditatem habituram fore, si motu Vertiginis destituatur, et simul olim tota fluida fuisset. Ponamus enim haec tria: 1. Terram motu Vertiginis destitui, 2. esse fluidam, et vbiq̄ue homogēneam; et 3. graua omnia niti versus interioria globi terrestris; quorum illud, nemine contradicente, supponi potest; istud sufficit, si Terra olim fluida fuerit, aut, si non plane fluida fuerit, ex materia vniformiter molli constiterit, vel etiam talis sit, vt figuram, quam nunc habet, conseruare possit, si etiam nunc fluida fieret; hoc vero necessario ita se habere debet, nisi partes Terrae sint dispergendae: sequetur ex his, quod directio grauium omnium in Terrae superficie positorum

debeat esse perpendicularis ad hanc superficiem. Nam sit Terrae superficies PE, atque in ea particula grauis quaecunque D, quae habeat nisum grauitatis suae in directione D ξ ad superficiem PE non normali: resoluetur hic nisus D ξ in duos laterales, Tangentialem nempe D α , et Normalem D γ ; idem ergo tunc erit, ac si particula D traheretur a potentiis D α et D γ . Cum vero directioni tangentiali D α nihil resistat, quia tota extra superficiem PE cadit: sequeretur, particulam D versus eam directionem moueri debere, et separari a Terrae corpore, quod contra manifestam experientiam est. Cessat vero hoc incommodum, si directio particulae grauis D statuatur perpendicularis ad Terrae superficiem, quia tunc particulae vicinae vi tangentiali resistunt. Aliam demonstrationem huius proprietatis grauium

uium, ab hac diuersam, habet quoque *Hermannus*, *Phoron.* pag. 363. ex descensu grauis, quantum is fieri potest, maximo, petitam. Adiungamus itaque tribus prioribus suppositis hoc quartum, directionem nempe grauium perpendiculararem esse ad superficiem Terrae; sine qua lege neque nauis' supra mare quieta permanere, neque ipsae maris aquae sustinere pondera sua possent; ita vt *Cel. de Mairan* hunc effectum pro inuiolabili naturae] vniuersae lege habeat, in *Comm. Acad. Sc.* 1720, facillime poterit euinci, Terrae figuram esse debere perfectissime circularem. Sit enim Terra CAM pertusa Figura 3. vsque in centrum C duobus canalibus communicantibus AC et MC, quorum vterque perpendicularis sit respectiue ad A et M; debent certe haec pondera aquarum in canalibus contentarum inter se aequari. Sunt vero haec pondera aquarum, si canales sint aequae ampli, et aqua vniformiter densa, vti ipsae rectae CA et CM, quare posita $AP = x$, $PM = y$, erit MC normalis; PC vero subnormalis curuae AM; et hinc ob $CA = CM$, erit $x + \frac{y dy}{dx} = \frac{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, vel $x dx + y dy = y \sqrt{dx^2 + dy^2}$ aut vero etiam, $-dx = \frac{xy dy - y^2 dx}{x^2}$, quae aequatio integrata efficit sequentem $Cx - x^2 = y^2$, quae manifesto indicat, curuam AM debere esse circularem, cuius diameter = C, vt prioribus suppositis respondeat.

§. 6. Ponendum itaque omnino erit, primitiuam Terrae figuram fuisse perfecte sphaericam; nisi simplicitati naturae vim inferre velimus. Statutum hoc etiam est a praecipuis Philosophorum hodiernorum. Quo prae-

Ff 2

misso,

missio, accedam ad sententiam, de figura Terrae determinanda, Hugenianam, qui, occasione ex iuclyta illa Richerii obseruatione, de abbreviatione penduli Parisiensis prope aequatorem, arrepta, gradum quasi atque aditum ad indagandam Telluris figuram primus aperuit.

Figura 4. Sit hunc in finem Telluris figura Primitiua AHE, quam *Hugenius* posuit Circularem, ponam ego vero curuam qualemcunque; ex huius rotatione circa Axem AL oritur corpus Terrae primitiuum, et pergat deinde Terram gyrari semper circa eundem axem AL. Quoniam itaque Terra ponitur tota fluida, et rotari aequabiliter circa AL, orietur in quolibet eius superficiei puncto, ex. gr. H, vis centrifuga, quae pellet corpusculum H in directione BH; perpendiculari ad AL, sursum, ita ut hoc corpusculum peruenturum sit in G. Quare Terra figuram suam primitiuam non retinebit, sed assumet aliam AGF, quae indaganda est. Possent quidem videri, quod, accedente motu vertiginis, Terra assumere debeat figuram

Figura 5 BDF ex figura primitiua ADE, ita ut, manente eadem materiae quantitate, in Polo A ea tantum introcedat, quantum in F pristinos limites suos egreditur. Sed non possum mihi persuadere, quod hoc ita fit. Sequeretur enim exinde, quod necessario punctum aliquod Terrae primitiuae D maneat inuariatum, quamuis conatus centrifugus ibi adsit. Quare malo supponere: punctum Polare A manere inuariatum in Terra Primitiua et Actuali; sed ad extensionem AGF conciliandam Fig. IV., materiam in AHEL contentam fieri successive rariorem pergendo a Polo versus Aequatorem. Con-

Figura 4. siderabo nunc particulam H, habebit ea, ante motum
Verti-

Vertiginis Terrae, grauitatem suam absolutam, et, ex Hugeni mente, in omnibus Terrae locis constantem, aequalem nempe illi grauitati, quae esset sub Polo ipso, cuius directio erit perpendicularis ad superficiem AHE, nempe HC; producat haec Normalis CH in directum arbitrarie, vsque in I, et exponat recta HI pondus absolutum et constans corporis H, quod vocabo p . Concipiatur nunc, corpus H esse in I, atque trahi ibidem pondere suo absoluto IH, et vi centrifuga IK vel HG: efficient hae duae vires agentes, vt corpus I sequatur Diagonalem IG Parallelogrammi IHGK; quare in Terra Actuali AGF directio grauium erit IGD, quae recta GD proinde normalis sit oportet ad superficiem Terrae actualis AGF. Itaque positis $FL = a$, $AL = b$, $EL = c$, $LB = x$, $BG = y$, $BH = u$, et vi centrifuga in $F = n$, repraesentabit punctum A Terrae Polum, recta GB Parallelum, et recta FL Aequatorem. Quoniam igitur vires centrifugae corporum diuersos circulos tempore eodem periodico percurrentium, sunt in ratione directa radiorum illorum circulorum: erit $FL(a):BG(y) = n : \frac{ny}{a}$, quae erit vis centrifuga corporis considerati G. Ob HC normalem ad AHE, erit subnormalis $BC = -\frac{u du}{dx}$. Ponendum nunc est, rectam KG produci in M, duci rectam GN, parallelam cum AL, et, iunctis punctis G, C, esse rectam GC parallelam ipsi HC, vel GM, ob puncta H et G fere coincidentia. Quo posito, erunt triangula GBC et MNG similia; igitur $BC(-\frac{u du}{dx}):BG(y) = NG(x):NM = \frac{yx dx}{-u dx}$. Porro, ob GD normalem ad AGF, erit ND

Ff 3 sub-

subnormalis $= \frac{x dx}{dy}$. Erit etiam $GC = \sqrt{(BC^2 + BG^2)}$
 $= \frac{\sqrt{(u^2 du^2 + y^2 dx^2)}}{dx}$, et habebitur analogia haec sequens,
 nempe: $BC \left(\frac{-u du}{dx} \right) : GC \left(\frac{\sqrt{(u^2 du^2 + y^2 dx^2)}}{dx} \right) = NG(x) : MG$
 $= \frac{x \sqrt{(u^2 du^2 + y^2 dx^2)}}{-u du}$. Ob parallelas GB et FM, erunt
 quoque anguli IGH, et GDM aequales, et hinc trian-
 gula IHG et GMD similia, quare orietur analogia se-
 quens: $IH(p) : HG \left(\frac{ny}{a} \right) = GM \left(\frac{x \sqrt{(u^2 du^2 + y^2 dx^2)}}{-u du} \right) : MD$
 $= NM - ND = \frac{xy dx}{-u du} + \frac{x dx}{dy}$. Ergo extremis et
 mediis in se ductis, factaque diuisione per x , oritur
 Aequatio generalis pro natura curuae AGF haec sequens:
 $\frac{p dx}{dy} - \frac{py dx}{u du} = - \frac{ny \sqrt{(y^2 dx^2 + u^2 du^2)}}{a u du}$. Si igitur determinetur
 species curuae AHE, dabitur u in meris x et con-
 stantibus; quo dato habebitur Aequatio specialis differen-
 tialis curuae quaesitae AGF.

§. 7. Ponamus, ex mente Hugenii, Terram pri-
 mitiuam fuisse perfecte sphaericam, hoc est, curuam AHE
 esse circulum, cuius radius $LA = b$, erit $x^2 + u^2 = b^2$,
 et $u du = -x dx$; quo valore substituto, oritur Aequatio
 differentialis curuae AGF haec sequens: $\frac{p dx}{dy} + \frac{py}{x} =$
 $\frac{ny \sqrt{(x^2 + y^2)}}{ax}$, quae legitime reducta praebet sequentem
 aequationem $\frac{x dx + y dy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} = \frac{ny dy}{ap}$, cuius integralis est, ad-
 iecta constante arbitraria postmodum determinanda, $C +$
 $\sqrt{(x^2 + y^2)} = \frac{ny^2}{2ap}$. Obseruandum vero est, quod ab-
 eunte x in o , fiat $y = a$, vnde deducitur $C = \frac{na}{2p} - a$,
 et aequatio completa est $\sqrt{(x^2 + y^2)} = \frac{ny^2}{2ap} + a - \frac{na}{2p}$,
 quae

quae ab Asymmetria liberata, et posito $\frac{a^2}{n} = f$, membrisque ordinatis, fit Aequatio curuam AGF exprimens $y^4 = (4f^2 + 2a^2 - 4af)y^2 + 4f^2x^2 + 4a^2f - 4a^2f^2 - a^4$, quae est aequatio *Hugeniana*, quam dedit in *Discursu de la cause de la pesanteur*, multo operosius deductam; nimirum ante inuentum Calculum Integrale, et ab eo pendente methodum tangentium inuersam. Eandem hanc aequationem, pro casu *Hugeniano*, dedit quoque *Cel. Hermannus* in *Responsione ad Considerationes secundas Nieuwentitii*, pag. 35. eiusque in *Phoronomia* dedit Constructionem Syntheticam pag. 364. Imo vero eam adhuc ex principio aequilibrii in canale inflexo deduxit pag. 365. Patet vero ex his: directionem grauium in Terra Actuali *Hugeniana*, esse non versus centrum Terrae L, sed iuxta rectam GD.

§. 8. In praecedente aequatione determinata fuit constans arbitraria C ex eo, quod euanescente x, fiat $y = a$. Potest vero eadem constans etiam inueniri ex eo, quod euanescente y, fiat $x = b$, ex quo fit $C = -b$, quare erit $-b = \frac{na}{2p} - a$, aut $2bp = 2ap - an$, quare oriatur $a:b = LF:LA = 2p:2p-n$; est vero, quod postea §. 11. independenter ab his demonstrabitur, $n = \frac{2p}{27}$; quare $LF:LA = 2:2-\frac{1}{27} = 578:577$, quae est proportio, quam iuxta *Hugenii* placita habet in Terra Actuali diameter Aequatoris ad axem per Polos ductum.

§. 9. Extracta radice aequationis inuentae §. 7. oriatur $y^2 = 2f^2 + a^2 - 2af \pm 2f\sqrt{(x^2 + (f-a)^2)}$, vnde apparet, curuam AGF in hac hypothesi non posse esse

Sectio-

Sectionem Conicam, nisi fit $f = a$, quo facto fiet $y^2 = a^2 + 2ax$. Quicquid vero curvarum ex hac suppositione prodeat, quarum unam consideravit *Hugenius*; neutra cum natura consistere potest, quia est $f = a$, hoc est, $f = \frac{ap}{n} = a$, aut $p = n$. Deberet itaque vis centrifuga corporis in aequatore terrestri positi plane exhaurire pondus omne corporis; adeoque sub Aequatore corpora nullum haberent pondus, quod experientiae plane repugnat. Ut vero etiam sciatur, an pro figura Terrae actuali assumendum sit in valore ipsius y^2 , ab initio huius §. invento $+ 2f\sqrt{xx + (f-a)^2}$ an vero $- 2f\sqrt{xx + (f-a)^2}$ consideretur, quod abente x in 0, fiat $y = a$, hoc autem casu erit $a = f \pm (f-a)$. Si iam assumeretur signum $+$, orietur $a = f = \frac{ap}{n}$ hoc est $p = n$, quod experientiae repugnat. Si vero assumatur signum $-$, orietur $a = a$, quod est verissimum, itaque pro natura curvae figurae terrestris actualis, assumi debet aequatio $y^2 = 2f^2 + a^2 - 2af\sqrt{x^2 + (f-a)^2}$.

§. 10. Nituntur praecipua solutionum praecedentium eo fundamento, quod assumto motu Terrae circa axem suum 17 vicibus celeriori quam nunc est, vis centrifuga corporis alicuius sub Aequatore positi aequalis futura sit toti huius corporis ponderi absoluto. Id sequentem in modum demonstrat *Hugenius*: Sit pendulum simplex ΛG oscillans per arcum minimum GBH ; notum est ex doctrina pendulorum, quod vocata longitudine penduli $AB = l$, gravitatis actione $= g$, sit tempus per arcum $GBH = \frac{\pi\sqrt{2l}}{\sqrt{g}}$, posita ratione Diametri

tri ad Peripheriam = $1:\pi$, vel posita grauitatis actione g constanti, erit idem tempus per GBH, hoc est tempus vnius oscillationis = $\pi\sqrt{2l}$. Huic asserto iungatur alterum, nempe: si corpus quoddam reuoluatur aequabiliter in peripheria circuli, celeritate debita altitudini A , ita vt celeritas ipsa sit = \sqrt{A} : erit huius corporis vis centrifuga ad pondus ipsum corporis, vti $2A$ ad radium circuli, in quo mouetur corpus; hoc est, vocato pondere corporis = p , vi centrali = v , et radio circuli in quo mouetur = r , erit $v:p=2A:r$, vel $v=\frac{2Ap}{r}$. Huius circuli peripheria est = $2\pi r$, et celeritas qua corpus circumuoluitur = \sqrt{A} , igitur $\frac{2\pi r}{\sqrt{A}}$ erit tempus, quo haec peripheria absoluitur a corpore; quod tempus, si debeat esse aequale tempori duarum oscillationum penduli, hoc est, eius itui et reditui, poni debet $\frac{2\pi r}{\sqrt{A}}=2\pi\sqrt{2l}$, vnde fit $\frac{r^2}{2A}=l$. Atque si insuper etiam debeat esse vis centrifuga aequalis ponderi absoluto corporis, poni debet $\frac{2Ap}{r}=p$, vnde fit $2A=r$, qui valor in aequatione iam inuenta $\frac{r^2}{2A}=l$ substitutus, efficit $r=l$; hoc est: si corpus aliquod moueatur aequabiliter in circulo, cuius radius est r , ea quidem celeritate, vt vis centrifuga et pondus eius sese destruant: absoluet hoc corpus vnicum circuitum sui circuli eo tempore, quo pendulum longitudinis r facit duas oscillationes; vel, eo tempore, quo radius circuli in quo mouetur facit duas oscillationes minimas. Igitur in applicatione ad Terram, si corporis alicuius sub Aequatore circa Terram reuoluentis vis centrifuga debeat exaequare pondus huius corporis

Tom. VIII. Gg ris

ris: necesse est, vt hoc corpus eo tempore feratur semel circa Terram, quo radius Telluris faceret duas oscillationes; quod itaque tempus duarum oscillationum radii Telluris indagandum restat. Cum experientia doceat, quod pendulum longitudinis 881 dimidiarum linearum Parisiensium absoluat oscillationem vnicam tempore vnus minuti secundi, quaeritur quo tempore absoluat oscillationem vnicam pendulum 5649350400 dimidiarum linearum, quot quidem continet radius Terrae. Quoniam igitur longitudines pendulorum sunt in ratione duplicata temporum, quibus singulae oscillationes fiunt, erit vocato tempore in minutis secundis vnus oscillationis a radio Terrae

factae x , haec analogia: $881 : 5649350400 = 1 : x^2$, vnde oritur x , vel tempus, quo radius Terrae vnicam oscillationem absolueret $= 2532''$, vel $42' 12''$, ergo idem radius

duas oscillationes absolueret tempore 12424 , vel $124\frac{1}{2}$, vti ponit *Hugenius*. Terra autem in Aequatore, re-

spectu Fixarum, absoluit vnicum circuitum tempore 2356 , et corpus, cuius vis centrifuga aequaret pondus ipsius,

circumraperetur tempore 12424 , vnde haec tempora sunt vti 86160 ad 5064, vel vti 17 ad $1\frac{72}{5064}$, hoc est, quam proxime, vti 17 ad 1. Itaque si corpus aliquod sub aequatore ferretur 17 vicibus celerius quam Terra ipsa: nullam haberet grauitatem. Ex quo fundamento etiam *Hugenius*, hypothesi suae grauitatis innixus, statuit, materiam grauificam 17 vicibus celerius circa Terram moueri, quam mouetur Terra ipsa circa axem.

§. II.

§. 11. Si Terra 17 vicibus celerius moueretur ac nunc, effet corporis alicuius sub Aequatore positi celeritas, ad celeritatem quae nunc est, vti 17 ad 1. sed in circulis aequalium diametrorum vires centrifugae sunt in duplicata ratione celeritatum; igitur posita vi centrifuga sub Aequatore, qualis nunc reuera est, $=n$, effet in statu Terrae 17 vicibus celerius motae, ibidem vis centrifuga $=17^2.n=289n$. Sed in hoc casu vis centrifuga effet praecise aequalis ponderi toti ipsius corporis (§. 10.) ergo $289n=p$, vel vis centrifuga in ipso Telluris aequatore, hoc est, $n=\frac{p}{289}$, quod supra (§. 8.) supposuimus.

§. 12. Ex Mechanicis constat, tempus oscillationis per arcum infinite paruum esse $=\frac{\pi\sqrt{2l}}{\sqrt{g}}$. Et quoniam vires centrifugae corporum diuersos circulos tempore eodem percurrentium sunt in ratione directa radiorum illorum circulorum: erit FL:GB = vis centrifuga in Aequatore ($\frac{p}{289}$): vim centrifugam Paralleli BG $=\frac{p.CB}{289.FL}=GR$. Haec vis centrifuga agit iuxta directionem BG in corpus G, sed simul afficit quoque directionem grauitatis IGD. Vt itaque innotescat, quantum ponderis absoluti partem destruat haec vis centrifuga, resoluatur ea in duas alias, Gε directioni grauitatis perpendicularem, et Gα directioni grauitatis directe contrariam; atque erit completo rectangulo αGεR, et posito sinu toto = 1, sin. RαG(1):GR ($\frac{p.CB}{289.FL}=\sin.$ αRG:αG $=\frac{p.CB}{289.FL}\times\sin.$ αRG. Est autem sinus αRG = Gg 2 Cof.

Figura 4.

$\text{Cos } \alpha \text{GR} = \text{Cos. BGD} = \text{Cos. BHL}$ quam proxime, hoc est, $\text{sin. BLH} = \frac{\text{BH}}{\text{HL}} = \frac{\text{CB}}{\text{FL}}$, quo substituto fit $\alpha \text{G} = \frac{p \cdot \text{CB}^2}{219 \cdot \text{FL}^2}$. Cum igitur haec portio vis centrifugae in G directe in contrarium agat grauitati in G, nempe ipsi IG, sequitur, grauitatem absolutam hac portione minuendam esse, vt habeatur grauitas actualis in puncto G $= p - \frac{p \cdot \text{CB}^2}{219 \cdot \text{FL}^2}$. Itaque in expressione generali, qua duratio oscillationis per arcum aliquem minimum indicatur, $\frac{\pi \sqrt{2l}}{\sqrt{g}}$, loco ipsius g substitui debet $p - \frac{p \cdot \text{CB}^2}{219 \cdot \text{FL}^2}$ vt habeatur tempus oscillationis vnicae penduli in parallelo BG; quo facto, erit tempus of-

cillationis vnicae penduli in loco G $= \frac{\pi \sqrt{2l}}{\sqrt{(p - \frac{p \cdot \text{CB}^2}{219 \cdot \text{FL}^2})}}$. Positis

itaque longitudine penduli a grauitate absoluta sollicitati, hoc est, penduli in ipso Polo terrestri A positi, cuius penduli Polaris longitudinem ponam $= l$, et longitudine penduli alterius in Parallelo quocunque, BG, $= x$, erit

ob aequalia tempora ab his pendulis insurta, $\frac{\pi \sqrt{2x}}{\sqrt{(p - \frac{p \cdot \text{CB}^2}{219 \cdot \text{FL}^2})}}$

$= \frac{\pi \sqrt{2l}}{\sqrt{p}}$, vnde fit $x = l - \frac{l \cdot \text{CB}^2}{219 \cdot \text{FL}^2}$; hoc est: pendulum Polare singula minuta secunda pulsans, debet in loco G abbreviari parte $\frac{\text{CB}^2}{219 \cdot \text{FL}^2}$ sui, vt in G quoque singula minuta secunda oscillet; atque erit generaliter haec analogia instituenda, vt quadratum sinus totius (FL^2), ad quadratum Cofinus Latitudinis loci G (BG^2) ita $\frac{1}{219}$ ad abbreviationem penduli in loco datae Latitudinis G faciendam, vt in loco G singula minuta secunda pendulum ita abbreviatum oscillet; quam analogiam *Hugenius* quoque, sed alio modo, inuenit. Ex aequatione autem

ante

ante inuenta, $x = l - \frac{l \cdot GB^2}{289 \cdot FL^2}$, sequitur haec analogia: Longitudo penduli polaris (l) est ad longitudinem penduli in loco G (x) $= 1 : 1 - \frac{GB^2}{289 \cdot FL^2}$; atque ob pondus actuale in $G = p - \frac{p \cdot BC^2}{289 \cdot FL^2}$, fit analogia altera: pondus absolutum (p) est ad pondus in $G = 1 : 1 - \frac{GB^2}{289 \cdot FL^2}$; quare, combinandó has duas analogias, habebitur: longitudo penduli polaris est ad longitudinem penduli isochroni in loco G , vti pondus absolutum, vel pondus polare, ad pondus in G ; vel, vti *Newtonus* hoc effert, longitudo pendulorum aequalibus temporibus oscillantium, sunt vti grauitates. *Principp. Lib. III. Prop. 20.*

§. 13. Quoniam longitudo penduli Parisiensis singula minuta secunda oscillantis, iuxta *Cassinum* est 3 pedum $8\frac{1}{2}$ lin. Pedis Parisini Regii, siue 881 dimidiarum lin.; atque ex analogia paulo ante inuenta abbreviatio penduli Parisiensis debet esse $\frac{1}{557}$ penduli Polaris, posita latitudine Parisiorum $48^\circ 51'$, erit retenta denominatione penduli polaris l haec aequatio: $l - \frac{l}{557} = 881$ dimid. lin. vnde deducitur longitudo penduli Polaris, vel $l = 882.323$ dimid. lin. vel 3 pedum $9\frac{1}{2}$ lin. pro qua longitudo *Hugenius* assumfit 3 ped. $9\frac{1}{2}$ lin. His itaque praesuppositis calculavi sequentem Tabellam, in qua videre licet, quae in praecipuis Terrae latitudinibus debeat esse, iuxta *Hugenii* sententiam, proportio abbreviationis penduli Polaris, Abbreviatio ipsa, et denique quae debeat esse ipsa longitudo talis penduli, quod singulas oscillationes simplices tempore vnus minuti secundi absoluit; denique adiuncta quoque est longitudo penduli *ex sententia Newtoni*, vt differentia eo facilius percipiatur.

G g 3

Lat.

| Latit. | Abbr. | Abbreuiatio. | Pend. Hugen. | Pend. Newt. |
|--------|--------------------|-----------------|--------------|-------------|
| o / | prop. | | ped. lin. | ped. lin. |
| 0 0 | $\frac{1}{219}$ | 3.053 dim. lin. | 3 7.635 | 3 7.468 |
| 4 56 | $\frac{1}{251}$ | 3.032 | 3. 7.645 | 3 7.481 |
| 10 0 | $\frac{1}{298}$ | 2.961 | 3 7.681 | 3 7.526 |
| 20 0 | $\frac{1}{327}$ | 2.698 | 3 7.812 | 3 7.692 |
| 30 0 | $\frac{1}{383}$ | 2.292 | 3 8.015 | 3 7.948 |
| 40 0 | $\frac{1}{49}$ | 1.793 | 3 8.265 | 3 8.261 |
| 48 51 | $\frac{1}{555}$ | 1.323 | 3 8.500 | 3 8.556 |
| 50 0 | $\frac{1}{757}$ | 1.260 | 3 8.531 | 3 8.594 |
| 60 0 | $\frac{1}{1135}$ | 0.763 | 3 8.780 | 3 8.907 |
| 64 34 | $\frac{1}{1387}$ | 0.563 | 3 8.880 | 3 9.032 |
| 70 0 | $\frac{1}{2475}$ | 0.357 | 3 8.983 | 3 9.162 |
| 80 0 | $\frac{1}{5584}$ | 0.092 | 3 9.115 | 3 9.329 |
| 90 0 | $\frac{1}{\infty}$ | 0.000 | 3 9.161 | 3 9.387 |

In Insula Cayenna prope Aequatorem, cuius latitudo est $4^{\circ} 56'$, inuenta fuit a *Richerio* decurtatio penduli Parisini faciendae $1\frac{1}{4}$ lin. vel 1. 250 lin. quae a longitudine penduli Parisini subtracta relinquit 3 pedes 7. 250 lin. pro longitudine penduli in dicta Insula ex obseruatione reperta; ex Theoria autem, vi Tabulae antecedentis, eadem longitudo deprehenditur 3 ped. 7. 645 lin. igitur Theoria excedit obseruationem $\frac{395}{1000}$ lineae. Archangelopoli in Russia, cuius vrbis Latitudo est $64^{\circ} 34'$ inuentus est excessus penduli simplicis supra pendulum Parisiense a *Clar. de la Croyere* $\frac{3}{25}$ lineae vel 0. 150 lin. ex Tabula autem antecedente reperitur idem excessus, iuxta Theoriam *Hugenianam*, 0. 380 lin. itaque Theoria rursus excedit obseruationem quantitate $\frac{230}{1000}$ lin. Quam discre-

discrepantiam Theoriae et Experientiae, in minutiis quidem consistentem, *Hugenius* nulli alii causae, nisi summae difficultati penduli longitudinem accuratissime observandi, adscribit. Possset etiam adscribi incertitudini longitudinis penduli Parisini; nam in definienda eius longitudine notabiliter inter se variant Celeberrimi *Galli*.

§. 14. Restat nunc etiam assignandus angulus DKH, quem nempe in figura Terrae actuali PDE efficit directio penduli actualis KH cum recta KDC in Terrae centrum C ducta a puncto suspensionis K, quem angulum *Hugenius* non reperire docet, sed eum tantum Parisiis indicat esse 5' 45". Pro hoc triangulo KDH igitur generaliter soluendo, et angulo DKH, ex data ratione laterum KD et DH, et angulo ipso KDH, qui nempe pro angulo Latitudinis censetur, inueniendo, considerandum est, rectam KD exprimere pondus absolutum p vocatum, rectam DH vero exprimere vim centrifugam Paralleli DO, quae ante ipuenta est $= \frac{p \cdot DO}{289 \cdot EC}$. Erit itaqueposito sinu toto $= 1$, $= EC$, et cosinu Latitudinis $= b$, $KD:DH = p : \frac{pb}{289} = 289:b$, ex quo fit $KD+DH : KD-DH = 1 + \frac{b}{289} : 1 - \frac{b}{289}$. Iam vero ex Trigonometria plana notum est, esse in quouis triangulo summam laterum ad differentiam eorum vti tangens semisummae angulorum quaesitorum ad tangentem semidifferentiae eorundem angulorum. Cum igitur semisumma angulorum K et H data fit, ob angulum datum $KDH = CDO = DCE =$ Latitudini loci D datae, poterit inueniri ex dicta analogia semidifferentia angulorum K et H, et consequenter etiam ipse angulus K.

Pona-

Figura 7.

Ponatur ergo $\text{tang. } \frac{H+K}{2} = t$, $\text{tang. } \frac{H-K}{2} = z$, atque erit
 $1 + \frac{b}{279} : 1 - \frac{b}{279} = t : z$, unde eruitur $z = t \cdot \frac{1 - \frac{b}{279}}{1 + \frac{b}{279}}$, quae

operatio ut solis Logarithmis absolui queat, ponatur in
Figura 8. semicirculo BDGA radius $CB = 1$, et anguli BCD
 cofinus $= CE = \frac{b}{279}$, $\frac{1}{2}$ BCD vero tangens $= \theta$, erit itaque
 $BE = 1 - \frac{b}{279}$, $AE = 1 + \frac{b}{279}$. Porro ob $BD:DA = \frac{1}{2}BD:\frac{1}{2}BA$
 $= DH:HC$, et $BE:AE = BD^2:DA^2$, erit $BE:AE = DH^2:HC^2$.

Est autem $DH:HC = \theta:1$, ergo $\frac{1 - \frac{b}{279}}{1 + \frac{b}{279}} = \theta^2$, con-
 sequenter $z = \theta^2 t$, et $\log. z = 2 \log. \theta + \log. t$, ex quo
 oritur sequens regula: 1. Logarithmus Cofinus Latitudi-
 nis datae minuatur Logarithmo numeri 289, eritque re-
 siduum Logarithmus Cofinus anguli BCD. 2. Duplo
 Logarithmo Tangentis $\frac{1}{2}$ BCD addatur Logarithmus tang.
 $\frac{H+K}{2}$, atque a summa subtrahatur duplum Logarithmi
 finus totius, remanebit Logarithmus tang. $\frac{H-K}{2}$. 3. Ab
 inuenta semisumma $\frac{H+K}{2}$ subtrahatur inuenta semidiffe-
 rentia $\frac{H-K}{2}$, et remanebit angulus minor K. Ex hoc
 fundamento computari sequentem Laterculum:

Lati-

| Latitudo Loci | Angulus K. |
|---------------|------------|
| 0 0 | 0 0 |
| 10 0 | 2 5 |
| 20 0 | 3 51 |
| 30 0 | 5 10 |
| 40 0 | 5 53 |
| 44 57 1" | 5 57 |
| 50 0 | 5 53 |
| 60 0 | 5 11 |
| 70 0 | 3 50 |
| 80 0 | 2 4 |
| 90 0 | 0 0 |

§. 15. Apparet ex hoc laterculo, quod angulus K, pergendo ab Aequatore versus Polum, crescat, et postea decrescat; itaque idem angulus alicubi erit maximus. Vt itaque determinetur illa Latitudo, in qua angulus K est maximus, sit eius sinus = x , Cos. = y . Latitudinis KDH vero sinus sit = a , cosinus = b . Antea ostensum est, esse $KD:DH = 289:b$, est autem $KD:DH = \sin. KHD: \sin. K = \sin. (K+D): \sin. K = ay + bx : x$, igitur erit $289x = aby + b^2x$, vnde oritur $\frac{x}{y} = \frac{ab}{289 - b^2} = \frac{a\sqrt{(1-a^2)}}{289 - a^2} = \text{tang. K}$. Sumatur iam a pro variabili, et capiatur inuentae expressionis differentiale, quod, per methodum de maximis et minimis, statuendum = 0, ex quo fiet aequatio sequens: $288 da\sqrt{(1-a^2)} - \frac{289a^2 da}{\sqrt{(1-a^2)}} - a^2 da\sqrt{(1-a^2)} - \frac{a^2 da}{\sqrt{(1-a^2)}} = 0$ quae per da diuisa, et debito modo reducta, uabit $\sqrt{\frac{288}{177}} = a$, ex quo deducitur

Tom. VIII. Hh La-

Figura 7.

titudo quaesita $= 44^{\circ} 57' 1''$, in qua angulus K est maximus. Vt porro etiam acquiratur magnitudo ipsa anguli K maximi, substituatur valor huius a inuenti in formula $\frac{a\sqrt{(1-aa)}}{aa+aa}$, et habebitur Tangens ipsa anguli K maximi $= \frac{1}{34\sqrt{311}}$, vnde apparet, angulum K maximum esse, quando est $5' 57''$.

§. 16. Si pendulum aliquod, Parisiis singula minuta secunda pulsans, transferatur sub Aequatorem terre-

strem: esset tempus Parisiense $= \frac{\pi\sqrt{2l}}{2\sqrt{(p-\frac{pb^2}{315})}}$ per §. 12.

tempus autem sub Aequatore terrestri $= \frac{\pi\sqrt{2l}}{2\sqrt{(p-\frac{p^2}{315})}}$,

ergo tempus oscillationis vnicae huius penduli Parisiis $1''$, esset ad idem tempus sub Aequatore $= \sqrt{(1-\frac{1}{315})}$:

Figura 9. $\sqrt{(1-\frac{b^2}{315})} = \frac{\sqrt{211}}{17} : \sqrt{(1-\frac{b^2}{315})}$. Sit in semicirculo AED, radius CD = 1, CB = $\frac{b}{17}$, eritque BD = $1 + \frac{b}{17}$, AB = $1 - \frac{b}{17}$, et BE = $\sqrt{AB \times BD} = \sqrt{(1-\frac{b^2}{315})}$. Est autem BE sinus anguli ACE, cuius cosinus est $= \frac{b}{17}$, qui ergo angulus per Logarithmos inueniri potest. Sit nunc sinus anguli ACE = A, eritque analogia: $1''$ est ad tempus aequatoreum penduli Parisiensis $= \frac{\sqrt{211}}{17} : A$, aut tempus aequatoreum $= \frac{17A \times 1''}{\sqrt{211}}$ quod itaque tempus facillime per Logarithmos potest inueniri. Quia Parisiorum Latitudo est $48^{\circ} 51'$, erit

$1b =$

| | |
|---------------|------------------------------------|
| 1. <i>b</i> = | 9.8182474 |
| 1. 17 = | 1.2304489 |
| | |
| | 8.5877985 cui respondent 2° 13' 6" |
| | 89 5960 |
| | ang. ACE --- 87 4654 |
| 1. 17 = | 1.2304489 |
| 1 A = | 9.9996740 |
| 1. 3600''' = | 3.5563025 |
| | |
| | 14.7864254 |
| 1. 288 = | 1.2296962 |
| | |
| | 13.5567292 |
| 1. fin. t. = | 10 0000000 |
| | |
| | 3.5567292 cui respondent 3603''' |

cum igitur pendulum Parisiense sub Aequatorem translatum, inuariata sui longitudine, retardet singulis minutis secundis quantitate 3''', retardabit illud spatio 24 horarum $\frac{1}{3}$ vnius horae, hoc est 1' 12'', pro qua retardatione *Hugenius*, sine demonstratione adiuncta, posuit 1' 5''.

§. 17. Ex hac igitur sententia *Hugeniana* sequitur, quod Terra circa Polos debeat esse paulo depressior, eleuator autem sub Aequatore; ita quidem vt Axis per Polos ductus sit ad diametrum Aequatoris vti 577 ad 578. Ex quo deinde deducitur, quod Gradus in Meridiano terrestri mensurati pergendo ab Aequatore versus Polos, crescere debeant. Quod quidem hunc in modum ostenditur. Sit Quadrans Meridiani terrestris PNB, in P Polus, in B Aequator. Et quoniam Gradus in Terra meti-

Figura 10.

Hh 2

meti-

metimur et definimus lineis perpendicularibus ad superficiem Terrae, ope Instrumentorum Astronomicorum, sint duae tales rectae ad superficiem Terrae perpendiculares CD et FG, quae productae concurrent in aliquo puncto E Euolutae HEKX, si arcum GD comprehendant valde paruum, eruntque DE, GE, duo radii osculi Curvae PGB, definientes ex. gr. minutum secundum GD, si angulus DEG sit vnus minuti secundi. Pari modo distantia NO erit vnus minuti secundi, si angulus NKO, factus a continuatione duarum perpendicularium LN, MO, sit vnus minuti secundi. Sed ex doctrina de Curuarum Euolutis intelligitur, Euolutam curuae PB habituram fore talem figuram, et situm, qualem repraesentat HEKX. Erunt autem, ob angulos GED, OKN aequales, sectores GED, OKN, similes, quare fiet analogia: $GD:NO = DE:NK =$ minus ad maius; atque igitur in hac hypothese gradus, pergendo ab Aequatore ad Polos, crescent; id quod eodem fere modo etiam demonstrauit *Cel. de Mairan, in Comm. Ac. Sc. 1720*. Habebunt itaque magnitudines graduum in meridiano terrestri inter se rationem directam radiorum osculi.

§ 18. Quodsi itaque, in Theoretica Graduum Terrae aestimatione, approximatione velimus esse contenti, res sequenti modo poterit tractari. Quoniam per §. 7. aequationem Terrae figuram experimentem inuenimus sequentem, $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{ny^2}{2ap} + a - \frac{na}{2p}$, et postea in §. 8. deductum fuit, esse $b = a - \frac{na}{2p}$, aut etiam $\frac{n}{2p} = \frac{a-b}{a}$, orietur ex priori aequatione, facta substitutione, haec sequens:

sequens: $V(x^2 + y^2) = \frac{xy^2}{2ap} + b$, et postea adhuc, pro $\frac{xy^2}{2ap}$ substituendo valorem inuentum $\frac{a-b}{a}$, hacc: $V(x^2 + y^2) = \frac{(a-b)y^2}{a^2} + b$, et denique, ponendo $a-b=c$, orietur aequatio $V(x^2 + y^2) = \frac{cy^2}{a^2} + b$. Quaeratur iam curuae, hac aequatione expressae, radius osculi, sed, quoniam alias calculus prolixissimus oriretur, approximatione tantum, atque tali quidem, vt ob paruitatem ipsius $\frac{a-b}{a^2}$, hoc est, ipsius $\frac{c}{a^2}$, omnes dimensiones ipsius c , altiores quam prima, negligantur; et denique series *Newtoniana* pro extractione radice quadratae adhibeatur. Quo facto, quoniam abscissis a centro computatis, et posito dy constante, radius osculi est $= \frac{ds^3}{-ay dda}$, denotante ds Elementum Curuae, inuenietur is in hac curua quam proxime $\frac{a^2b - 3cy^2}{a^2 - bc}$; et ex hoc sequetur, esse radium osculi in Aequatore $BH = \frac{a^2 - ca^2}{a^2 - bc}$, quia ibidem fit $y = a$; et radium osculi in Polo $PX = \frac{a^2b}{a^2 - bc}$, quia hic fit $y = 0$. Erit ergo Gradus sub Aequatore ad Gradum sub Polo vti radius osculi Aequatoris ad radium osculi sub Polo (§. 17.), hoc est, vti $b - 3c : b$, vel, ob $c = a - b$, vti $4b - 3a$ ad b , hoc est, ob $a : b = 578 : 577$ vti 574 ad 577. Erit vero etiam differentia inter Gradum Polarem et Gradum N, Latitudinis BN , vti $\frac{a^2b}{a^2 - bc} - \frac{a^2b - cy^2}{a^2 - bc}$, hoc est, vti $3cy^2$, ex quo pater, quod decremента Graduum versus Aequatorem a Gradu Polari, sint inter se quam proxime in duplicata ratione ipsarum Na , hoc est, Cosinum Latitudinis. Pro determinando

Hh 3

nunc

nunc Graduum maximo, hoc est, Polari, in Hexapedis Parisinis, sit Gradus Polaris magnitudo $= z$, et Gradus in loco alio N, Latitudinis datae, magnitudo e hexapedd.; eritque per priora $z:e = a^2b:a^2b - 3cy^2$, ergo $z = \frac{a^2be}{a^2b - 3cy^2}$. Ponatur sinus totus $= 1$, et Latitudinis Cofinus $= q$, eritque in Triangulo αNY sinus totus $(1):NY(a) = \text{sinus } \alpha YN(q):\alpha N(y)$, unde $y = aq$, qui valor substitutus, efficit $z = \frac{e}{1 - \frac{3c \cdot aq}{b}}$. Vt haec magnitudo

Logarithmis inueniri queat, ponatur in semicirculo **Figura 9.** AED radius AC $= 1$, Cofinus anguli BCE $= \frac{q\sqrt{1-c}}{\sqrt{b}}$, eritque AB $= 1 - \frac{q\sqrt{1-c}}{\sqrt{b}}$, BD $= 1 + \frac{q\sqrt{1-c}}{\sqrt{b}}$, et BE² $= 1 - \frac{2c \cdot a^2}{b}$, quare $z = \frac{e}{PM^2}$. PM autem habetur per Logarithmos ex eo, quod sit sinus anguli BCE, cuius Cofinus per Logarithmos datur ex valore $\frac{q\sqrt{1-c}}{\sqrt{b}}$. Assumam itaque cum *Newtono Princip. Lib. III. Prop. 19.* mensuram Gradus inter Latitudines 45° et 46° a *Cassino* captam, hexapedarum Gallicarum 57292, atque facies calculi ineundi talis erit, positis $a = 578$, $b = 577$, $c = 1$, $e = 57292$,

Log. Cof. Lat. 45° --- 9.8494850

$\frac{1}{2}$ log. 3 --- 0.2385606

10.0880456

$\frac{1}{2}$ log. b --- 1.3805879

8.7074577 -- $2^\circ 55' 21''$ BEC

87 4 39 BCE

huius

huius BCE Logarithmus sinus = logarith. BE est =
9. 9994347, quapropter porro ponendum erit

$$\begin{array}{r} \log. e + 2 \log. rad. - - - - 24. 7580940 \\ 2 \log. PM - - - - 19. 9988694 \\ \hline 4. 7592246 \end{array}$$

cui respondent in Tabulis 57441.

Erit igitur in Hypothesi *Hugeniana* Gradus terrestris meridiani sub ipso Polo, seu inter Latitudines 89° et 90°, = 57441 Hexapedarum *Gallicarum* quam proxime.

§. 19. Postquam obtinuimus magnitudinem Gradus Polaris, facile nunc erit inuestigare magnitudines omnium reliquorum Graduum in integro Meridiani Quadrante. Nam sit loci cuiuscunque N, in Meridiano PNB positi, Latitudinis BN Cofinus = q , magnitudo Gradus in N = $z - u$, et magnitudo Gradus Polaris = z , atque uti ante $aN = y$, sinus totus = 1. Erit ex præcedentibus $z : z - u = a^2 b : a^2 b - 3cy^2$; itaque per conuersam rationem orietur haec analogia $z : u = a^2 b : 3cy^2$, quare $u = \frac{3cy^2 z}{a^2 b}$, vel ob $y = aq$, $u = \frac{3cq^2 z}{b} = \frac{3q^2 z}{b}$ ob $c = 1$. Quare decrementa Graduum a Gradu Polari haud difficulter poterunt obtineri. Ex quo fundamento sequens enata est Tabella, Graduum *Hugenianorum*, quibus *Newtonianos* adiunxi, ut differentia eo melius pateat.

Figura 10.

Lati-

| Latitudo | Grad. Hugon. | Grad. Newton. |
|----------|--------------|---------------|
| 0 | 57142 | 56909 |
| 10 | 57151 | 56931 |
| 20 | 57177 | 56996 |
| 30 | 57217 | 57096 |
| 40 | 57266 | 57218 |
| 50 | 57318 | 57348 |
| 60 | 57366 | 57470 |
| 70 | 57406 | 57570 |
| 80 | 57432 | 57635 |
| 90 | 57441 | 57657 |

Differentias horum Graduum sumenti statim patebit, eas ab initio crescere, et postea pari passu iterum decrescere; quare alicubi in iis maximum dabitur, cuius locum etiam inuestigabo. Sit igitur Quadrans meridiani terrestris ADE, et in eo Latitudo quaecunque ED, cuius sinus BC sit p , Cofinus vero $BD = q$,posito sinu toto $= 1$. Sitque praeterea angulus DCd infinite parvus, vt coincidat eius sinus cum arculo Dd , quem vocabo ds , eiusque cofinus erit $= \sqrt{1 - ds^2} = 1$. Erit itaque iuxta Trigonometriae leges, $\cos. (ED - Dd) = db = q + pds$; sed ex praecedentibus est magnitudo Gradus in D $= z - u = z - \frac{3q^2z}{b}$, ergo magnitudo Gradus in d erit $= z - \frac{3zq^2 + 6zpqds}{b}$, et differentia igitur horum graduum erit $\frac{6zpqds}{b}$, quae quantitas aequalis esse debet maximo. Facta eius differentiatione habetur, ob z et ds constantes, $\frac{6zds(pds + dp)}{b} = 0$, aut
vero

vero etiam $p dq = -q dp$. Est autem ob $q = \sqrt{1-p^2}$,
 $dq = \frac{-p dp}{\sqrt{1-p^2}}$, quo substituto, et facta diuisione per dp ,
 oritur $\frac{p^2}{\sqrt{1-p^2}} = \sqrt{1-p^2}$, vnde fit $2p^2 = 1$, et $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
 Notum autem est, quod $\frac{1}{\sqrt{2}}$ fit sinus anguli semirecti;
 quare sub Latitudine 45° differentia praetata omnium
 erit maxima.

§. 20. Potest vero etiam, non considerata Telluris figura primitiua, inueniri Curua figurae eius actualis *Hugeniana*, si hypothetice assumatur, grauitatem, ex materia quacunque vorticosa oriundam, eius naturae esse, vt ea corpora quaecunque versus fixum aliquod punctum vrgeat; vti quidem etiam ab *Hugenio* ipso, nec non *Hermanno*, factum est, qui figuram actualem sine consideratione primitiuae eruerunt, quae ab antecedenti non differt. Illud igitur, quod mihi adhuc pertractandum restat, coniungam cum hoc solutionis modo, assumendo aliam adhuc hypothesin, nempe, grauitatem in diuersis Meridiani locis absolutam non esse eandem, et aequalem semper Polari, vti *Hugenius* supposuit; sed eam variare in ratione quacunque multiplicata distantiarum a Centro Terrae. Positis itaque, vt hucusque factum est, $BC = a$, $AC = b$, $CP = x$, $PM = y$, $CM = z$, pondere absoluto in $A = p$, vi centrifuga in Aequatore $B = n$, erit pondus absolutum in Polo $A (p)$ ad pondus absolutum in loco quocunque $M = A C^c$: $MC^c = b^c : z^c$, et hinc pondus absolutum in M , quod hucusque cum *Hugenio* erat etiam p , iam in hac hypo-

Tom. VIII. Ii thesi

Figura 12.

thesi generaliori $= \frac{z^c}{b^c} p$. Per § 6. est $a:y=n$: vim

centrifugam in $M = \frac{ny}{a}$. Pondus itaque M trahetur gravitate absoluta sua versus centrum Terrae C , quam exponat ipsa recta MC , et vim centrifugam in M exponat recta MN . Cum itaque corpus M trahatur ab utraque recta MC et MN , sequetur id, completo Parallelogrammo $MNQC$, directionem Diagonalis MQ , quae igitur MQ normalis sit oportet ad Terrae figuram actualem AMB per §. 5. Erit itaque pondus absolu-

tum in M $\left(\frac{pz^c}{b^c} \right)$ ad vim centrifugam in M $\left(\frac{ny}{a} \right)$
 $= MC:MN = MC:CQ = z:CQ$, quare $CQ =$
 $\frac{nyb^c}{apz^{c-1}}$. Est autem OQ subnormalis, Abscissis a cen-

tro C sumtis, $= -\frac{xdx}{dy}$, quare $CQ = \frac{ydy + xdx}{dy} = \frac{zdz}{dy}$,
 ob $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Vnde aequatis his duobus valoribus ipsius CQ , habetur aequatio pro curva Terrae actuali AMB haec: $b^c ny dy = apz^c dz$, quae integrata, ad-

iecta constante C , efficit hanc: $C + \frac{b^c ny^2}{2} = \frac{apz^{c+1}}{c+1}$.

Quoniam autem abeunte x in b , fiunt $y=0$, $z=b$,
 fit $C = \frac{apb^{c+1}}{c+1}$, atque rursus abeunte y in a , fiunt

$x=0$, $z=a$, eruitur $C = \frac{pa^{c+1}}{c+1} - \frac{b^c na^2}{2}$; quare ae-

quatis

quatis his valoribus ipsius C , fit $\frac{b^c n}{2p} = \frac{a^{c+1} - b^{c+1}}{a \cdot (c+1)}$. Po-
 sito itaque in aequatione curvae, loco ipsius C , valore
 prius inuento $\frac{apb^{c+1}}{c+1}$, fit aequatio completa $\frac{ab^{c+1}}{c+1}$
 $+ \frac{b^c n y^2}{2p} = \frac{az^{c+1}}{c+1}$, et supposito valore ipsius $\frac{b^c n}{2p}$, e-
 mergit tandem $a^2 b^{c+1} + (a^{c+1} - b^{c+1})y^2 = a^2 (x^2$
 $+ y^2)^{\frac{c+1}{2}}$.

§. 21. Si iuxta *Hugenii* sententiam gravitas abso-
 luta debeat esse ubique constans: debet esse $\frac{p z^c}{b^c} = p$,
 quod aliter fieri non potest, nisi ponatur $c = 0$. Quo
 posito emergit aequatio pro curua Terrae $b + \frac{(a-b)y^2}{a^2}$
 $= \sqrt{(x^2 + y^2)}$, quae eadem est cum aequatione superius
 § 18. inuenta. Si ponatur $c = 1$, hoc est, si gravitas
 corporum absoluta distantis locorum a centro Terrae
 ipsis directe proportionalis sit, quem casum examinavit
Cel. Hermannus Phoron. Lib. II. Prop. 82. orietur aequa-
 tio pro curua Terrae $a^2 b^2 = b^2 y^2 + a^2 x^2$, quae est Ellipsis
 Conica, in qua Abscissis a centro computatis, semiaxis ma-
 ior est $= a$, semiaxis vero minor $= b$. Si ponatur $c = -1$,
 ex aequatione integrata nihil sequitur, sed confugiendum
 erit ad differentialem $b^c n y dy = ap z^c dz$, ex qua oritur
 $\frac{ny^2}{2b} = C + ap \cdot \log \cdot \sqrt{(x^2 + y^2)}$. Aliis casibus enumeran-
 dis supersedeo: sed hoc adhuc adiungo, debere in omni-
 bus

bus huius hypotheseos casibus semper esse $a > b$. Nam ob
inuentam §. 20. æquationem $\frac{ab^c n}{2p} = \frac{a^{c+1} - b^{c+1}}{c+1}$, deberet

$\frac{ab^c n}{2p}$ fieri quantitas negatiua, si esset $a < b$; quantitas

autem $\frac{ab^c n}{2p}$ nequit fieri negatiua, nisi n , hoc est, vis
centrifuga sub æquatore, esset negatiua; quod cum im-
possibile sit: sequitur, semper esse debere $a > b$, nisi
Naturæ leges plane inuertantur. Considerando autem

æquationem ante allegatam $\frac{ab^c n}{2p} = \frac{a^{c+1} - b^{c+1}}{c+1}$, et po-

nendo $\frac{a-b}{a} = e$, elicitur $a^{c+1} = (b + ae)^{c+1} = b^{c+1} +$
 $(c+1). aeb^c + \frac{(c+1).c.a^2e^2b^{c-1}}{1.2} + \text{etc.} = b^{c+1} +$

$(c+1). aeb^c + \sigma$, si $\frac{a-b}{a}$, aut e , sit valde parua. Hinc
deducitur porro $\frac{a^{c+1} - b^{c+1}}{c+1} = aeb^c$, quare habebitur

$n = 2pe = \frac{2p(a-b)}{a}$, vel denique $2pb = 2pa - na$, vn-
de deriuari potest analogia sequens: $a:b = 2p:2p-n$,
ex quo sequitur, in suppositione, quod excessus ipsius a
supra b sit non nimis magnus, seruare axes BC et AC
quam proxime eandem rationem, etiamsi grauitates ab-
solutæ sint in quacunque ratione multiplicata ipsarum MC,
semper vero esse diametrum Aequatoris maiorem Axe
per Polos ducto, vt modo indicatum est; vnde etiam
grauitates sub Polo et sub Aequatore erunt quam proxi-
me semper in ratione constante.

DE

Fig. 1.

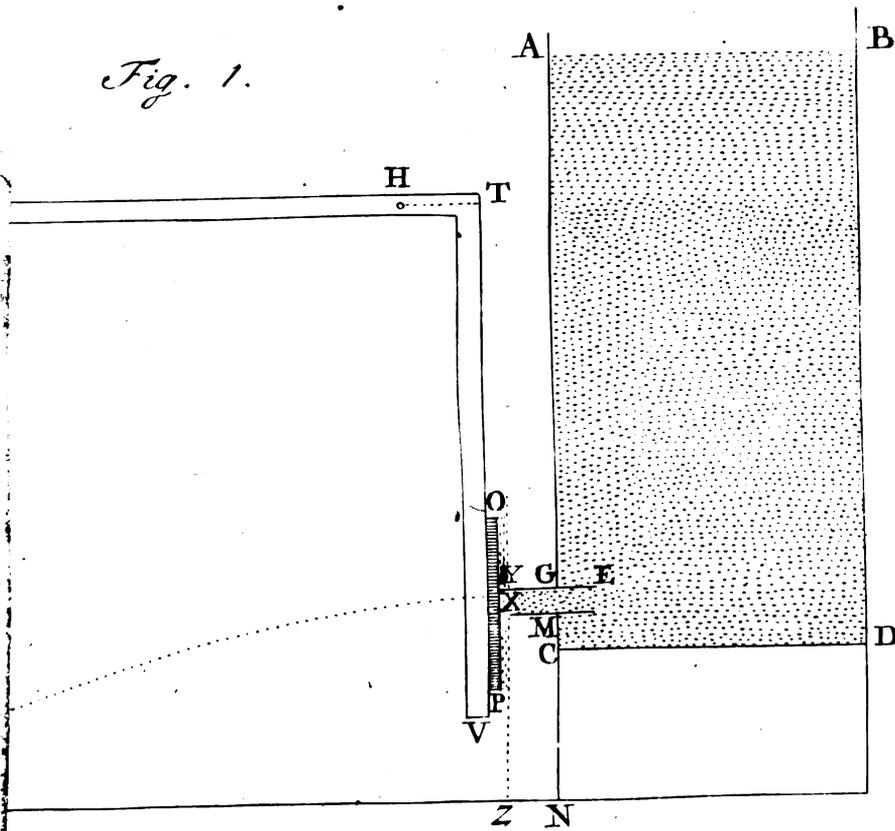
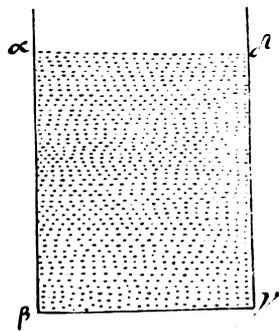


Fig. 2.



DE
VI VENAE AQVEAE
 CONTRA PLANVM INCURRENTIS
EXPERIMENTA,

AVCTORE

Georg. Wolffg. Krafft.

Misit ad Academiam nostram ante aliquod tempus Tabula XXI.
 Dissertationem eruditissimam Cl. *Dan. Bernoulli*,
 cui titulus est: *De Legibus quibusdam Mecha-*
nicis, quas natura constanter affectat, nondum descriptis,
earumque usu Hydrodynamico, pro determinanda vi venae
aqueae contra planum incumbentis. In qua, calculo ele-
 gantissimo, et fundamentis ex intima motus natura pe-
 titis, profundo sane ingenio, determinat vim seu impe-
 tum, quem vena aquea ex vase repleto profiliens, et
 in planum aliquod oppositum incumbens, contra hoc pla-
 num exserit. Cumque theoriam exinde formatam Ex-
 perimento ibidem exposito confirmasset: iussus ab *Illustri*
Academiae Praeside fui ego, vt idem Experimentum re-
 peterem, et quae deprehenderem Academiae exponerem.
 Feci ergo huius Theoriae periculum, summa qua potui
 diligentia et exactitudine. Ante vero quam enarrare pos-
 sim, quid per Experimenta mea edoctus fuerim: haud
 abs re fore puto breuiter repetere ea, in quibus inge-
 niosissima *Theoria Bernoulliana* consistit.

Pro determinanda vi venae aqueae in planum incurrentis prima Experimenta facta esse dicit in Academia Parisiensi, Anno 1669, teste *Dubammelio*, in Historia illius Academiae. Post haec secuta esse multa alia. Statuisse autem omnes Physicos ex his Experimentis, praedictam vim venae aqueae, mox ante foramen, ab afferculo aliquo exceptae, aequalem esse ponderi cylindri aquei, cuius basis sit foramen, per quod aqua exsilit; altitudo autem ea, quae est aquae totius supra foramen exstantis. Ita, iuxta hanc Hypothesin, esset vis, quam aqua per GM exsiliens in planum afferculum OP exferit, aequalis ponderi cylindri aquei, cuius basis est area foraminis GM , et altitudo GA . Afferit porro, Hypothesi huic Experimenta nunquam ex asse respondisse; cuius dissensus inter Experimenta et ratiocinia duplicem affert causam. Primo enim putant huius sententiae Patroni celeritatem aquae per GM exsiliens eam esse, quam graue aliquod libere per GA delapsum acquirere posset; quo ipso inducti sunt, vt cylindrum aqueum altitudinis GA assumerent. Sed notum hodie est, hoc non verum esse, nisi foramen GM statuatur infinite paruum; in foramine autem finitae magnitudinis celeritatem venae aqueae exeuntis istum gradum celeritatis nunquam attingere. Secundo statuitur in hac opinione, amplitudinem venae exeuntis eandem esse, quae est foraminis, per quod effluit; aut vtriusque eandem esse Diametrum; sed cognitum hodie est, venam aqueam per foramen e vase erumpentem contrahi sensibiliter, cum e foramine exiit; quam venae aqueae contractionem *Newtonus* primus obseruauit. Remedium itaque his duobus incommodis allaturus *Clariss. Bernoulli*, statuit, cele-

celeritatem aquae per GM exsurgentis non assumendam esse eam, quae debetur altitudini aquae supra foramen, GA, sed pro quolibet casu Experimentis inquirendum esse in celeritatem realem, quam aqua effluens actu ipso habet; quod per Mechanicae regulas semper fieri potest. Deinde amplitudinem venae assumendam esse non eam, quae aequalis sit amplitudini foraminis, sed quae aequalis sit amplitudini venae contractae; aut vero, evitandam esse hanc contractionem, quod fit, si aqua non per solum foramen GM, sed per tubulum YE, foramini GM insertum, effluit.

His praemissis, appellat Cylindrum aqueam correctum eum, cuius basis est amplitudo venae contractae; (nisi scilicet, haec contractio venae, immisso foramini tubulo, impediatur) et cuius altitudo est ea, quae debetur celeritati reali et actuali, quam vena aquea mox post effluxum suum habet, et quae in quolibet casu peculiari Experimento determinanda est. Tandem vero statuit, vim venae aqueae per tubulum YE in planum OP incumbentis, aequalem esse duplo ponderi huius cylindri aquei correcti.

Vt igitur in hanc Theoriam Experimentis inquirerem, assumi vas ligneum ABCD quadratum, cuius latus est $AB = \frac{1}{2}$ pedis Londinensis, et altitudo 2 pedum. Huic vasi inserui tubulum YE, ex orichalco confectum, interne bene politum, vt aqua eo liberius effluere possit. Deinde in parte anteriori vasis adaptavi vectem S.TV, e ligno quercino confectum, sub angulo recto inflexum, et circa Hypomochlium H liber-

time

rime mobilem; huius vectis brachio HS inferui annulum I, ex quo dependebat lanx K, pondusculis oneranda, et quae ope annuli I facillime hinc et inde moueri supra brachium poterat. In parte inferiori vero huius vectis affixus erat orbiculus OP rotundus, et ligneus, tubulo YE directe oppositus, in quem vena incurreret. Totus vero hic vectis inflexus nullo pondere in I oneratus, perfectum aequilibrium seruabat. Vasi ligneo AD inferne adiuncta est cista etiam lignea NR, in cuius fundo NQ amplitudo NL iactus liberi, quem vena aquea sibi relicta efficeret, obseruari potuit. Tandem vero semper curavi, vt fundus hic NQ in quouis Experimento esset perfecte horizontalis, et vectis inflexus, plane non oneratus, esset in exactissimo aequilibrio; dum nempe semper effeci, vt brachium TV esset perpendicularo proxime applicato parallelum. His ita praeparatis, cepi

Experimentum I.

die 2. Iunii 1736. vbi primum obseruavi, quam amplitudinem vena aquea libere, remoto nempe vecte, effluens efficeret; et inueni, in Scala Geometrica accuratissime confecta, distantiam $ZL = 4542$ partium tallium, qualium 2000 quamproxime efficiunt pedem Londinensem, (qua mensura in sequentibus constanter vtar) demissa nempe a fine tubuli Y perpendiculari YZ in fundum cistae adiunctae. Ipsa vero haec perpendicularis XZ, cuius initium e medio tubuli sumsi, erat 2017 part. pro amplitudine iactus liberi antem assumi
distan-

distantiam ZL, quoniam vena XL in X incipit Parabolam iactus sui describere. Ponderus lancis, cum anulo et filamentis simul erat 829 Granorum, ponderus vero K, lanci adhuc impositum, erat 720 Gr. ita vt ponderus totum, aequilibrium cum vi venae aqueae erumpentis produciens, fuerit 1549 Gr. Porro inueni HI = 2010 part. TX, cuius initium a recta per medium brachium ST transeunte sumsi, = 2218 part. Denique vt ponderus aquae, qua vas repletum erat, deprehenderem, impleui eadem aqua cylindrum, cuius diameter est 675 part. altitudo autem 685, cuius voluminis aquei ponderus, detracto pondere vasis, deprehendi 13111 Gr. Diameter GM erat 89 part. Igitur pro altitudine celeritati effluxus liberi debita, notum est, quod haec altitudo, supponendo semitam venae ita erumpentis esse Parabolicam, sit $= \frac{ZL^2}{4XZ}$, ex quo sequitur, altitudinem celeritati actuali, qua aqua per foramen X erumpebat, debitam fuisse 2557 part. Erat autem altitudo ipsa aquae supra foramen in vase, GA = 3738 part. vnde apparet, quod alias cognitum est, quod celeritas actualis aquae erumpentis plane non respondeat altitudini aquae supra lumen. Quoniam nunc indagari debet ponderus cylindri aquei correcti, hoc est, cylindri aquei, cuius basis est area GM, ob euitatam per tubulum venae aqueae contractionem, et altitudo 2557, sit hunc in finem vas, cuius aqua repleti ponderus examinaui $\alpha\beta\gamma\delta$, Figura a. atque erunt pondera, aquae in hoc vase contentae, et aquae cylindro correcto comprehensae, inter se vti volumina horum cylindrorum, ob densitatem aquae vtrouique eandem, hoc est, vti $\beta\gamma^2 \times \alpha\beta$ ad $GM^2 \times 2557$.

Tom. VIII. Kk Ex

Ex qua analogia inuenitur pondus cylindri aquei correcti = 850½ Gr. et huius duplum 1701. Gr. quae est, ex Theoria, vis venae aqueae contra orbiculum OP iacurrentis. At vero datum in K pondus totale, quod P vocabo, sustinet, in statu aequilibrui, impetum in X factum aequalem $\frac{HI}{TX} \times P$; vnde ex obseruatione colligitur hic impetus = 1403 Gr. ex quo sequitur, Theoriam excedere pondus in experimento obseruatum 298 Granis. Caeterum in hoc Experimento, et reliquis, obseruauit etiam, quod orbiculus OP, brachio TS nullo pondere externo onerato foramini admotus, eidem quasi affixus maneret, ita vt aquae motum fere omnem susteret. Fuit etiam prominentia tubi extra vas maius, nempe $GY = 218$ part. atque distantia orbiculi OP ab extremo tubuli $Y = 135$ part.

Experimentum II.

institutum fuit d. 3. Iunii, atque in eo vas maius, leniter aquam semper affundendo, constanter plenum fuit seruatum, tubus vero EY vtrinque breuior factus est. Tum inueni distantiam $ZL = 4608$ part. $YZ = 2058$. pondus totale in I appensum 1549 Gr. $HI = 2095$, $GM = 89$. pondus vero aquae cylindrico vase $\alpha\beta\gamma\delta$ contentae retinui, quale illud heri repereram. Ex his itaque fit altitudo debita celeritati aquae in X exsiliens = 2579 part. pondus cylindri aquei correcti = 860. Gr. et huius duplum 1720 Gr. colligitur vero ex obseruatione impetus in orbiculum realiter factus = 1463 Gr. vnde Theoria rursus pondus in Experimento obseruatum excedit 257 Granis.

Ex-

Experimentum III.

feci d. 5. Iunii, vase maiori constanter pleno ser-
uato, tubi vero prominentiam GY plane abscindi cu-
raui, retinuique solam GE. Atque tum inueni distan-
tiam NL=4755 part. MN e medio foraminis GM
sumtam, =2053, pondus totale in I appensum =1549
Gr. HI=2127. GM=86. pondus aquae, cylindrico
vase alio contentae, cuius diameter est =453, altitudo
=744, deprehendi 6191 Gran. Ex quibus oritur al-
titudo debita celeritati aquae in GM exsiliantis =2753
part. pondus cylindri aquei correcti =825½ Gr. et hu-
ius duplum 1651 Gr. Colligitur autem ex obseruatione
impetus in orbiculum realiter factus 1486 Gr. vnde Theo-
ria denuo pondus ab Experimento indicatum excedit 165
Granis.

Experimentum IV.

institui d. 18. Iunii, praesente et iuuante Clariss.
Eulero nostro: et maiori vase rursus constanter pleno ser-
uato, per continuam lenem affusionem aquae, inuenimus
distantiam NL=4557 part. MN=2044, pondus to-
tale in I appensum 1609 Gr. HI=1928. GM=88.
TX=2213. pondus aquae cylindricae, cuius diameter
=686, et altitudo =442, erat 8477 Gr. Ex quibus
emergit altitudo debita celeritati aquae in GM exsilien-
tis =2539 part. pondus cylindri aquei correcti =801
Gr. et huius duplum 1602 Gr. Colligitur autem ex
obseruatione actualis impetus in orbiculum factus 1401
Gr. vnde Theoria adhuc pondus ab Experientia indica-
tum excedit 201 Granis.

Kk 2

Ex-

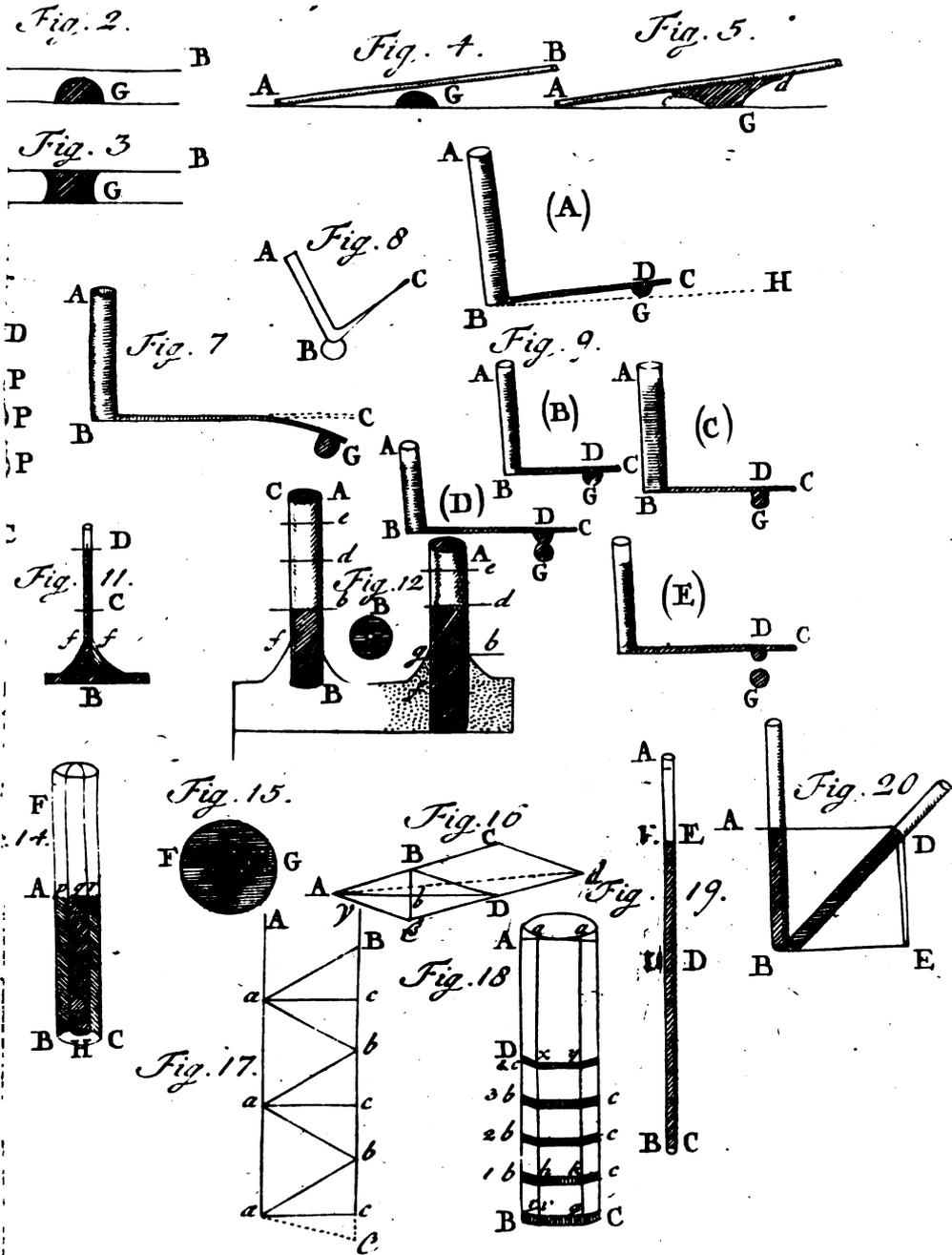
Experimentum V.

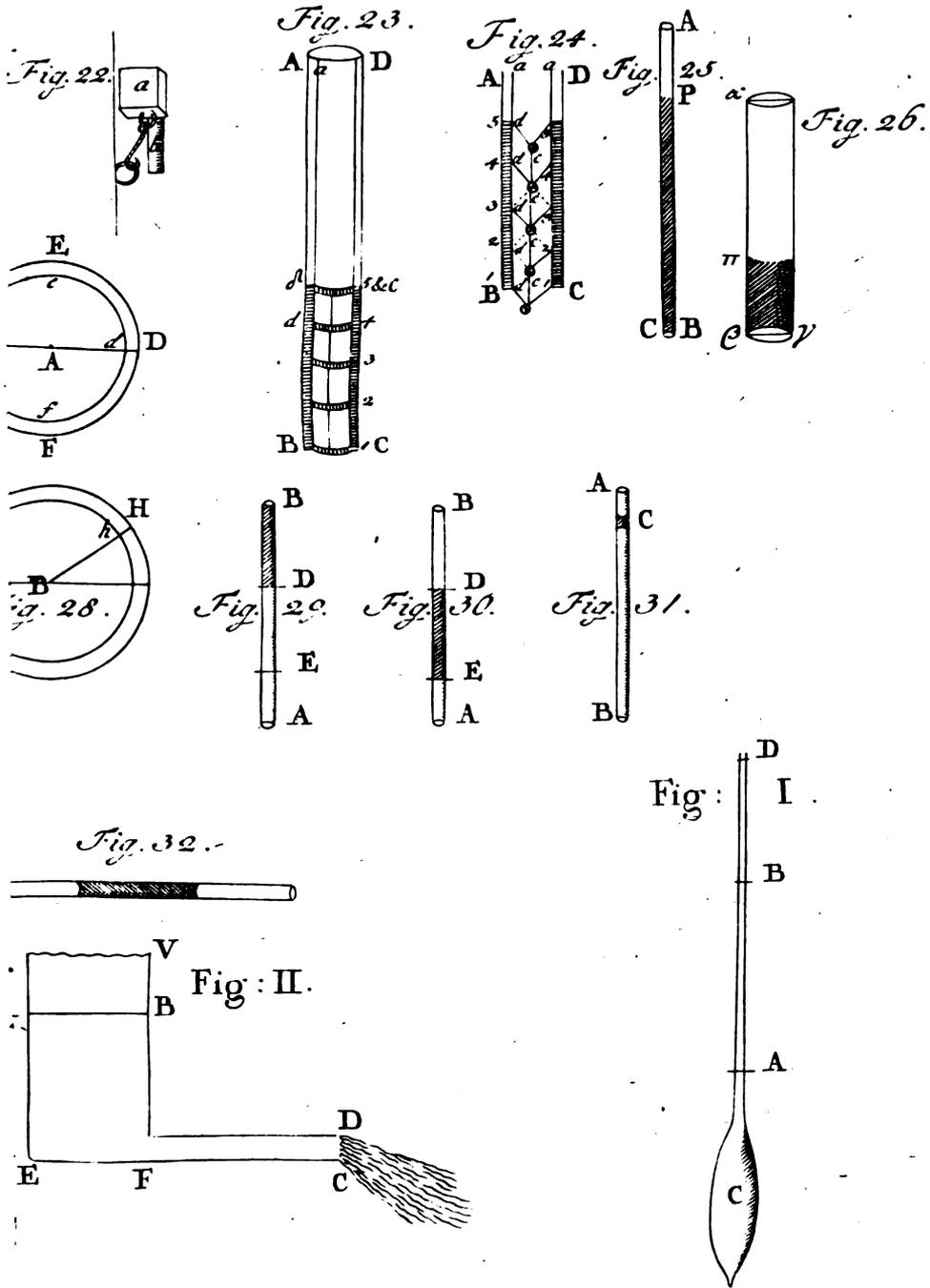
sumtum est ab ipso Clariss. *Bernoullio*, et in laudatissima ipsius *Dissertatione* descriptum, cuius circumstantias ad meam *Figuram* referam. Erant itaque $ZL = 900$ part. quarum 400 faciunt pedem Parisinum, $YZ = 900$ part. pondus in I appensum dicitur fuisse paulo maius quam 1020 Gr. sumam ergo 1021 Gr. Erat autem in vecte ipsi adhibito $HI = TX$, $GM = 19$ part. pondus aquae cylindricae cuius diameter 92 et altitudo 131 part. erat 122 Drachm. vel 7320 Gr. Ex his emergit altitudo debita celeritati aquae libere exsurgentis $= 225$ part. pondus cylindri aquei correcti $= 536$ G. huius duplum $= 1072$. Observatio vero ipsa dedit impetum aquae in orbiculum $= 1021$ Gran. hinc *Theoria* etiam tum pondus ab *Experientia* indicatum excessit 51 Granis. Denique

Experimentum VI.

sumtum fuit 2. Febr. 1737, et repetitum 7. Febr. praesente *Illustri Praeside*, et plerisque Membris *Academiae*. Inuenta autem fuit distantia $NL = 4469$, $MN = 2015$, pondus totale in I appensum 1549 Gr. $HI = 1983$, $GM = 86$, $TX = 2188$ part. pondus aquae cylindricae, cuius diameter 128, altitudo 278 part. erat 190 Gr. Ex quibus emergit altitudo debita celeritati aquae in GM exsurgentis $= 2478$ part. pondus cylindri aquei correcti $= 764$ Gr. et huius duplum $= 1528$ Gr. Colligitur autem ex observatione actualis impetus in orbiculum OP factus $= 1403$ Gr. vnde rursus *Theoria* pondus ab *experientia* indicatum excedit 125 Granis.

TEN-





TENTAMEN THEORIAE,
 QVA
 ASCENSVS AQVAE
 IN
 TVBIS CAPILLARIBVS
 EXPLICATVR.

AVTORE
Iofia Weitbrecht.

CAnales vitrei angustiores, vulgo tubuli capillares^{Tabb. XXII. et XXIII.} dicti, vtrunque aperti, quando altera sui extre-
 mitate superficiem aquae attingunt, vel illi immerguntur, aqua in illis ad altitudinem satis notabilem ascendit. Hoc Phaenomenon ab experientibus adeo manifestum et constans deprehensum est, vt, postquam inter Physicos innotuit, nullum dubium de illo sit relictum. De causa autem ascensus non aequae comuenit. Indagantur illam multi egregii et solertes Viri, in vias diuersas, imo saepe plane contrarias deducti; imo in hac nostra quoque Academia haec ipsa quaestio olim agitata fuit; siquidem Excellentissimus *Bullfingerus* plurima hunc in finem Experimenta instituit, et praecipuas antecessorum sententias neruose excussit. (*) Spes quidem subnata erat ex dissertationis eiusdem paragrapho vltimo, fore aliquando, vt Vir Excellentissimus singularem theoriam

K k 3

conde-

(*) Vid. Dissert. Experimentalis de Tubulis Capillaribus Comm. Tom. II. pag 233.

conderet: sed in notis responsioni Cel. *Iurini* ad dubia sua datae annexis Comment. Tom. III. p. 291. in explicatione *Iuriniana* se adquietere factus est. Litem ergo decisam et veritatem in aprico positam putares. Fateor autem, cum in enodandis quaestionibus quibusdam physiologicis occupatus inopinato ad tuborum capillarium actionem deflecterem, varia mihi subnata esse dubia, quae ex principiis hactenus stabilitis solui non poterant; unde factum est, ut non solum animum ad hanc materiam paullo studiosius appellere, operae pretium esse iudicarem: sed et simul quaedam adminicula detegerem, quae imprimis doctrinae huic ab attractione petita maiorem lucem affundere videbantur.

Explicatio autem *Iuriniana*, quemadmodum illa in *Transact. Angl.* nr. 355. et 363, atque in his dissertationibus seorsim impressis proponitur, haec est: *Aqua in tubulo capillari sustinetur supra libellam vi attractiva superficiei tenuis annularis tubuli internae, cui summa aquae suspensae superficies cohaeret et contigua est. Nam ista sola pars tubi est, a qua recessura sit aqua inter descensum, et proinde sola illa est, quae vi attractionis seu cohaesionis, aquae descensum impedit.* Non animus est, hanc sententiam, fauorabilibus experimentis munitam, et cui veritas, sed non satis depurata, immixta est, specialiter nunc examinare; sed sufficit, generaliter indicare, quamvis causam suspensionis quodammodo explicare videatur, illam tamen non satisfacere phaenomeno ascensus, qui certe non tam facile ex ista stabilita thesi sequitur; quin imo ipse *Celeb. Iurinus*, ut ascensum effectui daret, partim reliquos annu-
los

Ios superficiei internae intermedios ab orificio tubuli ad summitatem attractae aquae, partim vero abolitam grauitationem aquae suspensae per vim attractiuam, et hinc facilitatam pressionem aquae in vase contraponde-rantis ad maiorem altitudinem, in subsidium vocare co-actus est, quod tamen adminiculum iisdem cum hypo-thesi *Carreana* difficultatibus laborat. Reliquae, quae fieri possent, obiectiones clariores euadent in progressu huius meae tentatae commentationis, qua sententiam meam phaenomeno attractionis generali innixam sequentibus propositionibus assertam dabo.

PROPOSITIO I.

Quando duo corpora in mutuam viciniam delata, ad se inuicem accedunt, absque potentia manifesta haecenus cognita extrinsecus agente, vt vnum continuum efficiant: Talis mutus congressus vocari solet Attractio, et vis, quae hunc congressum producit, est vis attractiua.

Scholium.

Talem attractionem dari, adeo euidenter in pluribus corporibus obseruatur, vt omni iure a sagacissimis nostro-rum temporum Physicis tamquam phaenomenon generale sit receptum. Quamuis autem causa huius mutuae ac-cessionis vel Attractionis proxima nos adhuc latere omnes fateantur: hoc tamen non impedit, quo minus aliorum effectuum causae in Attractione quaerantur; quemadmo-dum multi effectus ex grauitate corporum deducuntur, quamuis grauitatis ipsius causa nondum sit determinata.

Qui

Qui ergo quaestionem aliquam ad phaenomenon tale naturae generale reduxit, ille problemati omnino hactenus satisfecisse putandus est.

PROPOSITIO II.

Quando vis attractiua congressis semel corporibus indefinenter agit, corpora cohaerere, sustentari, suspendi, retineri dicuntur pro vario corporum situ.

Corollarium I.

Cohaesio igitur talis corporis vnus cum alio, vel suspensio, sustentatio etc. nil est, nisi continua attractio siue continuata vis attractiuae actio.

Corollarium 2.

Quaecumque igitur corpora sensu propositionis primae, mutuo congressa cohaerent, suspenduntur, retinentur: et attrahi quoque dici possunt.

PROPOSITIO III.

Aqua a vitro suspenditur vel retinetur, et vicissim.

Demonstratio.

1. Aquam a vitro suspendi, siue illam ab hoc retineri, experimentis patet. Quando enim aqua ad tubulum vel etiam ad laminam vitream politam guttatim adspargitur, illa immota adhaeret. Quodsi etiam gutta
2. ad laminam verticaliter positam vel ad tubulum defluens ad oram infimam peruenit, non decedit, sed a laminae
- margine

margine suspenditur; in tubulo autem motu retrogrado Exper. 3.
 intra cauitatem eius reforbetur. (vid. *Muffchenbr. Exp. X.*
c. 1.) Si quoque vitrum inclinetur ad horizontem: Exper. 4.
 gutta A aucto pondere non secundum perpendicularem Figura 1.
 AB decidit, sed iuxta latus tubuli vel laminae ad infi-
 mam oram C deuoluitur, quod fieri non posset, nisi
 gutta a vi aliqua retineretur. 2. Vitrum quoque ab
 aqua retinetur et suspenditur. Madefiat enim lamina Exper. 5.
 vitrea vel eburnea, et imponatur tubulus horizontaliter:
 ille ab aqua aegre sursum diuellitur; et si laminam ma-
 defactam inuertas, vt deorsum spectet tubulus, ille non
 decidit.

PROPOSITIO IV.

Aqua a vitro attrahitur et vicissim.

Demonstratio.

Huius Propositionis veritas non solum ex antecen-
 tibus clare elucescit; dum enim in Experimentis Prop.
 III. nihil adsit nisi aqua et vitrum, et praeterea nulla
 alia vis externa manifesta premens et trahens; suspensio
 talis autem nil nisi continuata sit attractio (Prop. II.
 Cor. 1. 2.): sequitur necessario, haec duo corpora se
 mutuo attrahere: sed patet illa etiam ex consideratione
 modi suspensionis. Quodsi enim lamina vitrea AB gut- Exper. 6.
 tae G admouetur, vt cohaesio fiat; gutta non in solo Fig. 2. et 3.
 puncto contactus suspenditur, sed basi latiuscula per su-
 perficiem vitri diffunditur. Similiter, si tubulus AB ad
 guttam G inclinetur: in ipso momento contactus ad la- Exper. 7.
 tus tubuli tam deorsum ad *c* quam sursum versus *d* dif- Fig. 4. et 5.
 fluit.

Tom. VIII.

L1

fluit.

fluit. Cum igitur particulae quaedam aqueae ad vitrum successiue accedant et suspendantur, quae ab initio non in contactum veniunt, sequitur *attractionem inter vitrum et aquam intercedere.*

Scholium I.

Laudandi igitur sunt omnino ingeniosissimi Viri, qui reiectis aliis hypothesibus, phaenomenon Attractionis ad hoc negotium transtulerunt. Interim quiuis facile concedit, in simplici allegatione huius attractionis aquae ad vitrum non subsistendum esse: neque enim ad plenariam solutionem problematis propositi sufficit dicere: *aqua ad vitrum attrahitur: Ergo aqua in tubulis capillaribus ascendit.* Oportet etiam ostendere, *quomodo et quare* aqua ad hanc vel illam altitudinem, sub his vel illis circumstantiis ascendat? verbo: *leges ascensus explicari debent stricte ex phaenomeno et legibus attractionis.* Quousque vero sola aquae ad vitrum attractio huic quaestioni satisfaciat, ex sequentibus clarius patebit, quando circumstantias ascensus plenius euoluemus.

Scholium 2.

Mercurium quoque a vitro retineri et attrahi quidam voluere dubitare. Sed veritatem rei demonstravit Cel. Iurinus in Diff. II. Prop. IV. et manifestum quoque est
 Exper. 8. *ex eo, quod globuli mercuriales minimi, tubulis capillaribus externe adeo pertinaciter adhaerere soleant, ut abstergi se non patiantur; id quod, dum replendis mercurio thermometris occupatus essem, meo saepe incommodo*

modo expertus sum. Sed video me nimis operosum esse in re clara: propero igitur ad

PROPOS. V.

Aqua ad aquam attrahitur.

Demonstratio.

Huius propositionis nulla putem opus esse demonstratione (*). Interim tamen non possum reticere elegans aliquod phaenomenon, quo attractio particularum aquearum mutua ad oculum demonstratur, et quod mihi occurrit, cum in alio quodam experimento faciendo occupatus essem. Siphonem ABCD, cuius crus vnum AB altius erat amplum, alterum CD breuius capillare, repleui aqua. Crus capillare angustissimum a C ad D sensim crassescibat. Hoc siphone perpendiculariter erecto, orificiis A et D sursum spectantibus, particula aquea per orificium D protrusa descendit, et annulum sphaeroidem oblongum, qui tubulum circumcirca cingebat, formans substitit e gr. in 1 P. Cum hic annulus addita noua particula ex orificio D defluente turgesceret, porro descendit in 2 P, vbi denuo auctus descendit et substitit ad 3 P. donec gutta satis ponderosa facta tandem ad C vsque deflueret. Cum hi annuli 1 P. 2 P. 3 P etc. per nouam accessionem ita successue augerentur, manifesto vidi, e. gr. annulum 1 P non quiescere, donec augmento suo ditatus fuisset, sed quando hoc augmentum ex orificio D protrusum in viciniam suam peruenerat, multum eleuari, et tum demum cum illo illo coalescentem versus 2 P descendere. Similiter annulus 2 P ad notabilem quantitatem eleuatus superiori annulo 1 P

Exper. 9.
Fig. 6.

L 1 2

in

(*) Vid. Iurini Diff. II. Prop. I.

in viciniam suam descendentem in occursum venit; quod itidem cum annulo 3 P accidit, quando antecedens ad illum appropinquauerat. Quod iucundissimum spectaculum luculenter demonstrat, mutuum accessum dari inter particulas aqueas, quando in viciniam iustam et requisitam constituuntur.

Scholium.

Particulas Mercurii ad se inuicem attrahi, vide in allegata Iur. Dissert. II. Pr. II.

PROPOSITIO VI.

Attractioni resistit grauitas molecularum aquareum.

Demonstratio.

Moleculas aqueas vtcunque paruas grauitare tamen et pondus habere, ex natura corporis sequitur ita, vt nemo, spero, negauerit. Dubitantem vero experientia docet. Ducatur enim tubus AB lateraliter ad angulum rectum in Capillarem angustum rectum BC, sed longum, et repleatur aqua, vt haec per capillarem BC sensim protrudatur per orificium C: videbis guttulam G ab extremitate C pendentem inflectere tubulum capillarem elasticum BC, et quo magis gutta accrescit, eo magis tubulum incuruari: delapsa autem gutta, tubulum iterum post aliquas vibrationes recta extendi. *Aqua igitur suspensa grauitat*, resistit igitur vi attractiuae, quae descensum, quem gutta vi ponderis affectat, impedit.

Exper. 10.
Figura 7.

Corollarium I.

Crescente igitur gutta aquea, crescit resistentia: sunt enim pondera in ratione massae, et resistentiae in ratione ponderum, vt statica docet.

Corol-

Corollarium 2.

Quodsi igitur pondus guttae maius euadit, quam re-actio attractionis sustinere potest: cohaesio rumpitur, et gutta decedit.

PROPOSITIO VII.

Vis attractiua, quae inter particulas aqueas intercedit, non nisi guttam retinere et cohibere potest.

Demonstratio.

Hoc abunde patet per experimentum antecedens (Prop. VI.), dum primo aqua ex orificio C minutatim extruditur, quae, vbi sensim in guttam coaleuit, tandem abrumpitur et decedit. Probant hoc etiam omnia stillicidia. Et fluxus aquae guttatim delabentis, et profiliantis non nisi celeritate differunt, imo radius aquae profiliantis nil est nisi series guttarum aquearum velocissime sese insequentium.

Corollarium I.

Patet igitur ratio, quare vapores aquei, quando in guttam satis notabilem coaluere, in lamina vitrea perpendiculariter erecta, vti e. gr. in fenestris, tandem defluant.

Corollarium 2.

Quia gutta aquea, quae a vitro suspenditur, nihilominus decedit, quando in nimiam molem excreuit: (Pr. VI. Cor. 2.) Sequitur vim vitri attractiuam non posse plus sustinere, quam vis attractiua particularum aquea-

rum permittit: i. e. *ultra guttulam a vitro non posse suspendi.*

PROPOSITIO VIII.

Magnitudo guttae non semper est eadem, sed pro latitudine baseos, a qua dependet, paullo minor et maior esse solet.

Demonstratio.

Exper. 11.
Figura 8. Guttae in Experimento decimo (Prop. VI.) decidentis diameter lineam vix aequat. Quando vero tubulum in alium situm detuleris, ut aqua ex orificio C protrusa iuxta longitudinem tubuli BC versus angulum crassiores B defluat, ibique in unam massam colligatur: Videbis non solum omnem aquam latius diffundi, sed guttam quoque abruptendam multo maiorem euadere.

PROPOSITIO IX.

Aqua ad vitrum fortius attrahitur, quam ad aquam.

Demonstratio.

Exper. 12.
Figura 7. Quando in principio particula aquea effluxit ex orificio C, cruris capillaris BD siphonis ABC; illa non continuo decedit, sed pro maiore minoreve elevatione vel inclinatione cruris BC ad horizontem BH motu retrogrado haerebit e. gr. ad D, et guttulam ellipticam G formabit. [vid. Fig. 9. (A).] Aucto pondere per affluxum nouarum particularum guttula quoque turgidior et magis prolongata (B) euadet. Accrescente pondere gutta separari incipit, et lapsum minitari. Separatio autem non fit proxime ad canaliculum BC, sed in notabili distantia inci-

incipit aqua suspensa in duas partes diuidi (C), quarum superior D ad vitrum haeret, inferior autem guttam lapsuram G constituit; et in loco diuisionis in collum quasi coantari, vbi se mutuo tangunt et continent. Quod collum primo latiusculum postquam sensim strictius (D) factum est, vt puncta contactuum retinendae G non sufficiant: haec inferior decidit (E); pars vero superior D cum canaliculo capillari BC sursum refilit. Nimirum cohaesio particularum aquearum sollicitatur a duabus viribus, ab attractione vitri, atque a pondere suo. Quamdiu cohaesio ista satis fortis est ad resistendum istis potentiis (Prop. VI.) aqua indiuisa manet. Quando vero pondus ita auctum fuit, vt aut attractio vitri, aut attractio particularum aquearum mutua (Prop. VII.) guttam maiorem retinere non possit; necessario disruptio fiet, et quidem in loco debiliori. Quodsi igitur mutua aquae cohaesio fortior esset, quam vis attractiua vitri: necessario omnis aqua a vitro auelli deberet. Hoc vero non fit, sed vitrum retinet, quod attrahere potest; collum, cohaesionis basin exponens decrescit; et gutta pondere suo satis onusta decidit. *Aqua igitur non tam fortiter ad se attrahitur, quam ad vitrum.*

Scholium.

Phaenomenon plane contrarium manifestatur in Mer- Exper. 13.
curio. Huius enim globulus minimus vitro adhaerens augeatur, vt pondus vim attractiuam vitri (Pr. VI. Sch. 2.) superet: tum tota, quanta massa est, in vnum globum coalescens decidit, neque quicquam (dummodo purus Mer-
cu-

curius fuerit) ad vitri superficiem relinquatur. *Mercurius igitur fortius ad se congregatur, quam a vitro trahitur.*

Corollarium I.

Vitrum ergo aquam omnem, quam attraxit, nunquam dimittit, sed retinet quantum potest, nisi potentia contraria et maior quam vis attractiva aquae aut vitri accesserit. Hinc fit, () ut gutta aquae, quae (Exp. 2. et 4.) in lamina vitrea pondere suo deolvitur, semitam quandam madidam post se relinquere soleat, et in genere omnia vasa, in quibus aqua cohibita fuit, post effusionem madida restent: cum e contra mercurii nullum superstes maneat vestigium.*

Corollarium 2.

Quia superficies vitri non omnem a se aquam dimittit, sequitur, quando gutta delabatur, *illam semper aliquid de mole sua inter descendendum perdere et minui.*

PROPOSITIO X.

In explicando ascensu aquae in tubis capillaribus distinguendum est inter effectus, qui ab actione vitri in aquam et vicissim, et inter eos, qui ab actione particularum aquarum in se inuicem dependent et producantur.

Huius Postulati aequitas sole meridiano clarior est, ut neminem fore iure putem, qui illud denegare audeat. Hoc enim omnis physicae scientiae scopus et finis est,

ut

(*) Vid. et Lurin. l. c. Prop. V. in fine.

vt singularium effectuum verae cauffae patefiant. Interim tamen factum est, vt plurimi illud (non dicam, neglexerint, sed) non satis attenderint, et hinc in devia deflexi a veritate aberrauerint. Sed intellectus humanus interdum vult admoneri. Quapropter cum in phaenomeno ascensus occurrat vitrum et aqua, vitrum autem aquam attrahat et vicissim (Pr. IV.), neque minus particulae aqueae se mutuo (Pr. V.) attrahant: suum cuique tribuendum est, et sedulo curandum, ne cautelam hanc ex oculis dimittamus.

PROPOSITIO XI.

Vbicunque datur punctum vitreum, et particula aquea, in debita distantia: ibi datur attractio; et si distantia aequalis est, attractio etiam aequalis est.

Demonstratio.

Vt attractio fiat, corpora in debitam distantiam transferri debent, quae si nimia sit, effectus omnis irritus redditur. Hinc vitrum in aquam non agit nisi in vicinia, et si vitrum a gutta aquea plus iusto separatur, vtrumque quiescit. Hoc experientiae est. Sit iam globulus vitreus C, circumdatus vbique crusta aqueae sphaerica AAAA, in distantia aequali AC, quanta requiritur, vt attractio in effectum deduci possit. Dico, nullum punctum esse in superficie huius globuli vitri, quod non in crustam aqueam agat, et illam ad se secundum omnium radiorum directionem attrahat, et quidem in omni distantia AC aequaliter; siue, quod idem est, globulum hunc, ab omnibus punctis crustae aqueae

Tom. VIII. Mm sphae-

Figura 10.

sphaericae aequaliter sollicitari. Vis enim attractiva vitri et aquae semper adest; et si cetera paria sint, si eadem est particularum aquearum, et vitrearum conditio et positio; nulla est ratio, quare unum punctum vitri plus attrahat, et alterum otiosum sit? *Omnia igitur puncta vitri aequaliter attrahunt.*

PROPOSITIO XII.

Figura 10. Consideretur globulus ille vitreus C, tanquam punctum et centrum sphaerae, cuius radius est distantia AC, ad quam vis attractiva centri vitrei se exerere potest; superficies autem est crusta aquae AAA. Hanc sphaeram a semicirculo ACA circa diametrum ACA rotando generatam, dico sphaeram attractionis vel actiuitatis, et radius AC est radius attractionis vel actiuitatis.

PROPOSITIO XIII.

Radius actiuitatis, ad quem aqua a vitro attrahitur, est breuissimus.

Demonstratio.

Quando tubulus capillaris extremitate sua altera ad guttam aqueam in plano cuiuscunque materiae positam, vel in vasculo contentam admouetur, et in distantia, quanta minima oculis discerni potest, seruetur: illa tamen mutationem figurae nullam patitur; hactenus igitur non mouetur aut eleuatur: sed omnis assensus incipere videtur in ipso momento contactus, et in eodem ipso momento quoque circa superficiem tubuli externam agget quasi aqueus, f, ad notabilem altitudinem eleuatur, in cuius

*Exper. 24.
Figura 11.*

cuius figuram *Cl. Musschenbroek* in *diff. de attractione spec. Exp. I.* studiosius inquisiuit. Cum igitur nulla quantitas nudis oculis, vtut parua, assignari possit, quae distantiam, ad quam vitrum attrahere incipit, exprimat: sequitur omnino *radium actiuitatis esse breuissimum.*

Scholium.

Non dico, hunc radium esse infinite paruum, aut nullum. Posset enim forte detegi per microscopium, et ad radium tubuli capillaris angustissimi, datam et finitam rationem habere. Forte etiam maior est, quam apparet, sed in protractiori distantia debilior, vt effectus eius per pondusculum guttae attrahendae vel eleuandae resistens (Pr. VII.), et per vim, qua illa cum plano aut cum aqua in vasculo cohaeret (Pr. V.), irritus reddatur. Hoc tantum volo, vt vis attractiua vitri intra limites suos a natura concessos coerceatur, nec plus oneris ei imponatur, quam ferendo par sit.

Corollarium I.

Quicquid igitur carcere aquam a vitro potest, ita, vt non recipiatur intra sphaeram actiuitatis, illud accessum Exper. 15. *mutuum impedit; vnde intelligitur, quare, si sebo liquefacto internos tubuli parietes inunxeris, aqua interior vltra libellam cum exteriori non ascendat. Vis enim attractiua non abolita est, sed impedita. (*)*

M m. 2

Co-

(*) Vid. Mem. de l'Ac. Par. ad an. 1765. et Comtes. Acad. Petr. Tom II. pag. 269.

Corollarium 2

Quia distantia, ad quam particulae aqueae in se in-
nicem agere incipiunt, satis notabilis est, vt oculis ma-
nifesto distingui possit congressus earum mutuus (Prop.V.
Dem.): *radius actiuitatis particularum aquearum longior
esse videtur quam radius actiuitatis vitri.*

Corollarium 3.

Quia gutta aquea insignis diametri suspendi a vitro
potest (Exp. 10. 11. et 12), antequam cohaesio rumpatur,
cui diametro tamen radius actiuitatis vitri breuissimus non
aequatur: sequitur, *vitrum plus aquae attrahere posse, quam
quo radius eius pertingere potest, mediante cohaesione particu-
larum aquearum inter se;* quantum nimirum vis attractiua
istarum particularum (Pr. VII. C. 2.) sine rupturae metu
permittit.

PROPOSITIO XIV.

*In tubulo capillari omnia puncta superficiei tam ex-
ternae, quam internae et baseos attrahunt, quando parti-
cula aquea intra sphaeram actiuitatis puncti alicuius vi-
trei est constituta.*

Demonstratio.

Necessitas huius Propositionis patet ex Prop. IV. et
XI. Tubulus enim vitrum est, hinc et vitri natura ei
competit; et quoduis punctum in tubulo, proprio suo
actiuitatis radio gaudere concipi potest. Sed actu ita
fieri, Experimenta quoque ostendunt. Sit tubulus AB,
quoad latera Bc quidem crassissimus, sed cum orificio e
angustissimo. Admoueat basis B, superficiei aquae: vi-
de-

Exper. 16.
Figura 12.

dehis, circa superficiem externam attrahi aquam in forma aggeris eleuati, *f* (Exp. 14.), interne vero aquam similiter ad altitudinem quandam *Bb* ascendere. Non dubium hic est, quin omnia puncta superficiei externae atque internae, quibuscum aqua cohaeret, vim suam attractiuam, exercuerint. Immergatur tubulus profundius: semper idem erit phaenomenon, ascendet nimirum aqua interne ad altitudinem *Bd*, externe autem ad *g* vsque: dicendum est igitur, similiter annulos omnes peripheriarum, quae superficiem tubuli internam a *b* ad *d*, et externam ab *f* ad *e* constituunt, portionem suam attraxisse. Quod ratiocinium itidem verum est, si tubulus ita immergatur, vt aqua vsque ad *e*, vel vsque ad summitatem *A* ascendat. Quodsi tandem ante immersionem digitum superiori orificio *A* admoueris, ne quid aquae in tubum intret, et post factum contactum retraxeris, videbis ab omni illa lata basi *Bc* guttam aqueam suspendi. Quod item accidit, inuerso tubulo, cum basi *A*. *Tota igitur superficies tam interna quam externa, et bases tubuli capillaris aquam attrahunt, quando haec intra sphaeram actiuitatis comprehenditur.*

Corollarium I.

Quia interna tubuli superficies aequae attrahit atque alia quaecunque lamina vitrea; de tubulis verum esse debet, quicquid de vitro in genere praedicatur Propositione IX. et X. Hinc tubulus, cui semel aquam attraxit, illam non totam dimittit (Prop. IX. C. 1.); et quando in tubulo sicco inuerso quantitas attracta delabatur ad orificium alterum, illa semper aliquid de mole sua amittit.

M m 3

Etiamſi

Etiamsi denique talis tubulus ad sensum plenarie euacuetur; numquam tamen omni aqua attracta perfecte priuari potest; sed *restat canaliculus aliquis aqueus tenuissimus, interiori concavae superficiei tubuli quasi agglutinatus,* ita, ut hac ratione tubulum diametri breuioris, quam ante attractionem fuerat, nanciscaris.

Corollarium 2.

Quia etiam actio vis attractivae a singulis punctis contactus exercita (Pr. X.) ubique aequalis est: sequitur, *quoduis punctum superficiei internae tubuli capillaris (ceteris paribus) aequaliter attrahere.* Nulla igitur est ratio, quare annulo supremo huius superficiei, cui summa aquae attractae superficies cohaeret et contigua est, plus virtutis tribuatur, quam reliquis superficiei annulis isti supremo aequalibus. Si enim omnes aequaliter attrahunt, omnes etiam aequaliter retinent (Prop. II.); quatenus haec retentio a sola vi propria attractiva annulorum vitri proficiscitur (Pr. IX. Cor. 1.).

PROPOSITIO XV.

Ascensus aquae et sustentatio eius in tubis capillaribus, qui diametrum habent, duplo radio actiuitatis maiorem, non dependet vnice et immediate a sola actione vitri aquam attrahente.

Demonstratio.

Sit tubulus capillaris ABC, cuius diameter BC = d , sit maior, quam duplus radius actiuitatis vitri, qui sit = b : dico, cylindrum aqueum, comprehensum sub basi BC, et

et altitudine conuenienti BD , non attrahi aut sustineri totum vnice et immediate a vi attractiua vitri. Quia enim vitrum non agit extra sphaeram actiuitatis suae (Pr. I. XI.): igitur, quaecunque et quotcunque puncta in interna superficie tubuli imaginatus fueris; singula tamen non agent, nisi in distantia per radium actiuitatis suae $=b$, expressa; non igitur attrahunt aquam immediate nisi illam, quae intra sphaeram huius radii delata fuerit, et reliquiarum attractio necessario ab alia quadam vi dependet. Similiter quia vitrum immediate retinere aut sustentare plus non potest, quam attraxit (Prop. VII.): ideo etiam pars cylindri illa, quae a vitro non attracta est, et tamen retinetur, necessario ab alia quadam vi sustentari debet.

Corollarium I.

Cylinder igitur aqueus sub basi BC , et altitudine $AB = a$ comprehensus in duas partes diuisus esse suppo- Figura 14.
 ni potest; in canaliculum aqueum, superficiei tubuli in-
 ternae proxime adhaerentem Ap et qr ; qui canaliculus Figura 15.
 ex meris annulis aqueis constare concipitur, vt $FGEH$,
 quorum latitudo aequalis est radio actiuitatis $FE = HG$
 $= b$; summa autem altitudinem $= a$ conficit. Altera
 vero pars est cylindrus restans, pHq , comprehensus sub
 basi EH , cuius diameter est $= d - 2b$, et sub eadem
 altitudine $= a$; quarum partium sola illa, quae a virtu-
 te attractiua vitri attollitur et sustentatur, canaliculus est;
 cum interea cylindrus mediante alia quadam eleuari et
 retineri debeat.

Corol-

Corollarium 2.

Quia radius actiuitatis vitri est breuissimus (Pr. XIII): sequitur *canaliculum illum tenuissimum fore*, et tamquam lamellam subtilem cylindricam concavam concipi debere; imo fortasse aequalis est canaliculo illi (Prop. XIV. C. I.), qui post euacuationem in tubulo restat, aut certe non multo maior. Sequitur etiam, differentiam inter cylindrum, cuius bases diameter est $=d$, et inter alium, cuius diameter $=d-2b$, esse exiguam; interim tamen, quia $2b$ constans manet, quo angustiores tubuli sunt, eo minor est ratio diametri d ad $2b$.

Corollarium 3.

Quia radius b vix perceptibilis est; diametri vero tubulorum, quales ante conficiuntur, semper quantitatem vtcunque assignabilem habeant: *semper plus aquae in se recipiunt, quam actioni peripheriae suae interioris immediatae competit.*

Corollarium 4.

Quia Cylindrulus pHq non attrahitur aut sustentatur immediate a virtute vitri; in tubulo autem nil sit cognitum, nisi vitrum et aqua: huius *attractionis et sustentationis causa necessario in aqua ipsa quaeritur*. De hac enim constat, (Prop. V.) quod ipsius particulae se mutuo attrahant, et quod vi huius mutuae attractionis, vitrum plus attrahere possit, quam radius suus (Pr. XIII. Cor. 3.) immediate permittit.

PRO-

PROPOSITIO XVI.

Sine attractione mutua particularum aquearum nulla eleuatio aut suspensio fieri potest, in tubis capillaribus.

Demonstratio.

Pone attractionem mutuam particularum aquearum euanescere: tum nulla erat ratio, quare ex. gr. annulus infimus superficiei internae tubuli, ad oram orificii, plus attrahat, quam intra sphaeram actiuitatis suae cadit; et quia annulus superficiei proximus maiore attrahendi virtute (Pr. XIV. Cor. 2.) non pollet, quam primus, nulla quoque est ratio, quare annulus primus portionem suam attractam dimittat, et superiori cedat. Nihil igitur aquae attolleretur, si nulla daretur particularum aquearum cohaesio. Pone autem, tubulum repleti ad altitudinem debitam, modo qualicunque, tum vero annihilari mutuam cohaesionem pH , inter particulas aqueas: necessario cylindrulus pHq delaberetur, et nil nisi canaliculus (Pr. XV. Cor. 1.) aqueus restaret, ultra cuius latitudinem radius actiuitatis superficiei vitri non pertingit. Nullus igitur suspensioni locus foret; et vera est Propositio.

Figura 14.

Corollarium I.

Absque cohaesione particularum aquearum igitur, ne canaliculus quidem formari potest: haec enim est, qua mediante aqua distans in viciniam punctorum superficiei internae iuxta longitudinem tubi fertur, vt intra sphaeram actiuitatis cadat. Tota igitur aquae quantitas in altum eleuatur a vi attractrice superficiei internae tubuli, mediante

Tom. VIII. N n 60-

cohaesione, quae inter particulas aqueas se mutuo attrahentes et insequentes intercedit; quia praeter hanc cohaesionem (Pr. XV. Cor. 4.) nulla alia virtus cogita est.

Corollarium 2.

Quia vis attractiua particularum aquearum non nisi guttam (Prop. VII.) sustinere potest; qua nimium aucta cohaesio (Pr. VI. Cor. 2.) rumpitur: patet ratio, *quare in tubo maiori, cuius radius maior est, quam guttae convenit, nulla eleuatio aut sustentatio locum habeat*: namque idem est, ac si per resistantiam guttae vis attractiua annihilaretur.

PROPOSITIO XVII.

Ingressui aquae in tubum capillarem resistit aqua in vase vi mutuae attractionis, quae inter particulas aqueas intercedit, et vi grauitatis.

Demonstratio.

Exper. 17.

Quando aqua ad libellam in vase consistens tubum capillarem admotum intrare debet; tunc guttula intrans in monticulum eleuatur supra libellam. Dum igitur haec guttula situm suum pristinum relinquit, et altiorem occupat, auulsio quaedam a reliqua massa fieri debet, quae in abolita cohaesione particularum consistit. Auulsio igitur per cohaesionem sufflaminatur. Porro monticulus ille violenter eleuatur, quia vi grauitatis (Prop. VI.) in ratione pondusculi sui, vtut parui, deorsum potius quam sursum nititur. Pars igitur virium eleuantium impendi debet in superanda cohaesione ista particularum aquearum, quae

quae a vi attractrice (Prop. V.) proficiscitur, et in vincenda grauitate pondusculi eleuati. Atque *hoc sensu verum est, quod in propositione adseritur.*

PROPOSITIO XVIII.

Quando particula aquea a diuersis viribus trahitur: motus eius dirigitur versus plagam illam, ubi vires maiores erunt.

Demonstratio.

Concipiatur particula aquea = A, quae sollicitatur a vi attractiua plani vitrei directe oppositi = B ϵ . Quia omnia huius plani puncta aequali vi attrahente pollent: in iisdem etiam a puncto medio *b* distantis, AB = A ϵ , aequaliter agunt. Nulla igitur est ratio, quare particula aquea A, (quae grauitatis expers supponitur) in vnum latus magis quam in alterum inclinetur; sed illa necessario in recta diagonali AD progredietur vsque ad Ab. Augeatur vero vis vnus lateris B*b*, vi alterius lateris b ϵ manente eadem, vt ratio illius ad hanc e. gr. sit = AC:AB; tunc motus particulae aqueae non dirigitur amplius in recta media AD, sed lateraliter in diagonali Ad. Quo magis igitur vis AC respectu AB crescit, eo minor fit angulus BA*d*, eoque magis particula aquea in linea Ad ad lineam AC appropinquat. *Motus igitur particulae aqueae versus illam plagam dirigitur, ubi vires maiores erunt.*

Figura 14

Corollarium.

Quando igitur vires trahentes in linea perpendiculari positae concipiuntur, ita, vt vis superior B*b* maior sit

N α a

vi

vi inferiore $b\bar{b}$: particula aquea A non ad punctum \bar{b} accedet, sed pro ratione differentiae virium paullo *altius* in aliquo puncto lineae Bb consistet.

PROPOSITIO XIX.

Aqua in tubo capillari ascendit, quando vis aquam eleuans maior est, quam vires deprimentes, seu ascensum impediētes.

Demonstratio.

Quando tubulus capillaris superficiei aqueae admouetur, particula aquea ascensura in ipso contactu a tribus diuersis viribus sollicitatur. Primo enim versus anulum infimum superficiei internae vitri impellitur vi mutuae attractionis, quae inter vitrum et aquam intercedit (Pr. IV.). Deinde huic ascensui resistit massula eleuanda pondere suo; et denique attractio, quae inter particulas aqueas ipsas in vase intercedit, auulsionem illius sufflammat, quae fieri debet, vt cylindrus generetur (Pr. XVII.); quibus duabus viribus effectus vis primae infringitur. Est autem vis attractiua fortior inter aquam et vitrum, quam inter aquam et aquam (Pr. IX.): pondusculum autem cylindri primi, qui intra anulum infimum superficiei internae vitri generari et comprehendi debet, nullius adhuc momenti. Motus igitur aquae determinatur versus plagam vis maioris (Pr. XVIII.), id est, versus vitrum. Aqua igitur tantillum intrat. Et quia tubulus perpendiculariter erigitur, vt annulus vitreus in aquam subiectam agens locum superiorem occupet: haec necessario versus superiora dirigitur (Pr. XVIII. Cor.), id est, aqua in tubo

bulo ascendit. Idem ratiocinium valet, quando iam portionem aquae tubulum intrasse, et cylindrum aliquem aqueum generatum esse supponas; idque tam diu, quam vis eleuans dictas vires oppositas superat. Concipiatur Figura 17. ex. gr. planum perpendicularare vitreum V. cui e regione opponatur columna aquea A, sensim generanda; sit vis attractiua vitri $= ab = aB$, vis attractiua aquae $= aC$. Quia igitur (abstrahendo tantisper a pondere) ista vis hac maior est: particula aquea *a* non in linea recta *ac* mouebitur, sed paullo altius dirigetur, atque in aliquo puncto lineae *bc* consistet; hoc est, si loco plani vitrei substituatur superficies interna tubuli, aqua non in infimo margine haerebit, sed eleuabitur. Atqui haec ratio semper obtinet, in quacunque altitudine particulam *a* concipias; semper enim vis *aB* maior est, quam vis *aC*. Aqua igitur semper eleuabitur, et ascensus talis continuabitur, quam diu excessus ille virium eleuantium constabit.

PROPOSITIO XX.

Aqua in tubum capillarem ascendit virtute attractiua totius superficiei internae tubi successiue adplicata; concurrente mutua particularum aquareum cohaesione.

Demonstratio.

Concipiatur tota superficies interna tubi ABC diuisa Figura 18. in tot circulos seu annulos, quot dantur puncta in linea AB. Tangat extremitas tubuli BC superficiem aquae: tunc circulus infimus BC attrahet aquam, ad distantiam, quae aequatur radio actiuitatis, quo singula puncta periph-

N n 3

phē-

pheriae illius circuli gaudent, et denotatur per lineam Aa vel Br , sitque $=b$ (Pr. XV.). Formatur inde annulus **Figura 15.** $FGEH$, qui principium canaliculi generandi constituit, et cuius latitudo est eadem distantia $Aa=b$. Huic annulo adhaeret circumquaque particula aquea, seu lamella tenuis rg (EH. Fig. 15.), quae initium cylindruli medii $xrgy$, cuius diameter est $=d-2b$ (Pr. XV. Cor. 1.), constituit, et quae vi huius cohaesionis simul (Pr. XIX.) elevatur. Facta hac quantulacunque elevatione lamella propius accedit ad circulum proximum bc , ut eius peripheria ab huius radio actiuitatis pertingi possit, et nouus annulus bb , canaliculi augmentum generetur; in simul vero lamella prima bk viam rb emittitur, et post se trahit lamellam nouam priori aequalem, ut cylindrulus ad altitudinem rb vel Bb accrescat. Eadem eueniunt ad circulos $2bc$, $3bc$, etc. eousque, donec aqua ad altitudinem debitam xy sit eleuata. Demonstratio autem, quod ascensus aquae hoc et non alio modo fiat, ex antecedentibus plana et facilis est. Nam primo quidem nulla est ratio, quare particulis aqueis in vicinia debita constitutis, omnia puncta superficiei internae attractionem suam actu non exercent (Pr. XI.). Quotiescunque igitur accidit, ut e. gr. circulus superficiei $2bc$ lamellam proxime inferiorem bk attingere possit; necessario sequitur attractio atque eleuatio, propter vim annuli vitrei, quae maior est, quam cohaesio lamellae cum annulo canaliculi sui correspondentis (Pr. XIX.). Porro propter breuitatem radii actiuitatis vitri ex. gr. circulus superficiei $3bc$, non potest agere in distantem superficiem aquae in vasculo; oportet igitur, ut particulae aquae in viciniam eius debitam deferantur,

ferantur, si attractio actu exerceatur (Pr. XIII. X.). Natura autem non facit saltum, sed antequam lamella infima rg ad circulum $3bc$ perueniat, necessario omnes circulos intermedios bc , $2bc$, tangere debet. Singuli igitur circuli superficiei non agunt nisi successiue; itemque canaliculus non nisi successiue generatur. At vero, ne annulus canaliculi secundus bb quidem formari posset, nisi lamella prima rg , vi attractionis, quae inter particulas aqueas intercedit, cum principio canaliculi Br cohaeret, atque huius cohaesionis ope propius ad circulum bc admoueretur. Non igitur nisi *per successiuam viuum eleuantium applicationem, accedente vi cohaesionis mutuae particularum aquearum, ascensus aquae in tubulo capillari fieri potest.*

Corollarium.

Vera igitur est propositio Haucksbejana, quae aquam in tubulo capillari ascendere asserit attractione totius concavae superficiei ipsius tubuli, cui cylinder aqueus successiue adhaeret. Vera est, inquam, cum de ascensu sermo est. Sed nolim ea applicari ad suspensionem vel conseruationem aquae iam eleuatae; neque etiam consequentia valet, vti infra docebitur.

PROPOSITIO XXI.

In tubo capillari singuli cylindruli aquei $xrgy$ in di- Figure 18
uersis altitudinibus considerati ascendunt vel eleuantur supra libellam, vi attractiua solius annuli vitrei superficiei concavae tubuli, qui immediate supra summam aquae superficiem constituitur.

Demon-

Demonstratio.

Tota quidem interna tubuli superficies concava aquam attrahit: non autem simul, eodem temporis momento; sed successive (Pr. XX.). At vero neque illa superficiei pars DB, cui aqua iam attracta accumbit, amplius quicquam attrahere vel eleuare potest: neque pars reliqua vacua DA in longiorem distantiam agit, quam breuitas radii (Pr. XI. XIII.) permittit. Ergo solummodo vnicus ille annulus vitreus, qui singulis ascensus tempusculis superficiei aquae successive proximus fit (Pr. XX.), restat, a cuius virtute attractiua propter viciniam in actum deducta eleuatio singulis momentis dependet.

Corollarium.

Quia eleuatio singulis tempusculis ab vnico annulo dependet, qui omnes inter se aequales esse censentur: hinc etiam *vis attractiua e euans semper eadem, et quouis ascensus momento constans est.*

PROPOSITIO XXII.

Cylinder aqueus, qui intra tubulum capillarem ascendit et suspenditur, ponderat, et grauitate sua eleuationi et suspensioni resistit.

Demonstratio.

Attractioni resistere massam guttulae, vi ponderis sui et grauitatis, patet in genere ex Propositione VI. Cum vero grauitas indiuisa corporis proprietates sit: ipsa ratio concludere iubet, etiam cylindrum aqueum intra tubuli cauitatem genitum non solum grauem esse et pondus habere: sed etiam vi grauitatis et ponderis sui
re-

Figura 14.

resistere vi alteri attractrici, quae sollicitationibus suis aut ascensum efficere aut descensum impedire nititur. Canaliculus quidem virtute vitri attractiva cohibetur omnino, atque adeo firmiter agglutinatur, vt *pondere suo proprio* diuelli et descendere nequeat (Pr. XIV. Cor. 1.). Est enim crassities canaliculi minima (Pr. XV. Cor. 2.), et pondusculum eius respectu vis attractricis minimum; potest igitur iste canaliculus censerī, quasi pondere careret. De cylindrulo autem *pHq* aliter statuendum est. Ille enim iam non retinetur vi attractiva vitri, sed ope cohaesionis mutuae particularum aquearum (Prop. XV. Cor. 4.), et massa sua massam canaliculi superat, hinc et pondus maius habet, et vi ponderis sui cohaesioni isti resistit. Sed quia haec res, vtut clarissima, dubitationibus tamen obnoxia facta est: ad experientiam ipsam promouamus, quae de praesentia huius grauationis et resistentiae abunde testatur. 1. Si enim tubulum, qui aquam ad sufficientem altitudinem *CD* attraxit, inuertas: aqua attracta non haeret quiescens in superiore tubuli parte, sed reuera descendit vsque ad orificium inferius. 2. Si tubulum profundius immergas, vt plus aquae *CE* capiat, quam per attractionem recipere potest: tum remoto tubulo ex vase omnis aqua superflua *ED* descendit, donec iterum ad altitudinem debitam *CD* peruenit. 3. Si tubulum, qui perpendiculariter erectus aquam ad *AB* hausit, ad horizontem inclinaueris; aqua in tubulo de nouo progreditur eo vsque, donec altitudo perpendicularis *DE* (quae ad longitudinem tubi *BD* se habet, vt sinus rectus anguli elevationis *DBE* ad radium) altitudini pristinae aequalis fuerit. An igitur (Exper. 1.)

Exper. 18.

Figura 13.

Exper. 19.

Fig. 19.

Exper. 20.

Fig. 20.

Tom. VII.

Oo

sim-

simplex inuersio grauitationem et pondus attulit, quod non aderat prius? An (Exper. 2.) sola aquae quantitas superflua ED grauitat? et quidem adeo vt portionem CD loco suo detrudere possit? cur non omnis aqua effluit? an grauitatio desinit, quando portio ED in locum Cylindri DC descendit? An (Exper. 3.) per inclinationem tubuli pondus aquae euanescit? si hoc? cur aqua non ad alterum tubi extremum ascendit? Annon potius dicendum est in experimento primo, nisum ad descensum adfuisse perpetuo, nunc vero, sublato impedimento vel superato, illum actu sequutum esse et quidem vi grauitatis et ponderis: in secundo, nullam esse differentiam inter portionem aquae attractae ordinariam CD et superfluam DE, et huius descensum non continuari, nisi quod effectus grauitationis per vim contrariam (quaecunque illa denique sit) sufflamine- tur: in tertio, aquam in inclinato tubulo denique progredi, quod portio ponderis cylindri nunc sustineatur a latere tubuli, circulum igitur superficiei proximum ob diminutam ponderis resistantiam in suam attractiuam exercere; ascensum vero denuo cessare, quando altitudines perpendiculares iterum fiant aequales, quia in hoc casu etiam pondera ante et post inclinationem (vt statica docet) sint aequalia? *Vera igitur est Propositio.*

Scholium.

Ex his dirimi posse putauerim quaestionem, quid de illorum consilio statuendum sit, qui adiuumentum ascensus in abolita grauitatione quaesuerunt. Quamuis enim canaliculum pondere quasi carere concedimus; et praeterca cylindrum

lindrulum ita suspensum nullam pressionem in aquam subiectam exercere fatendum sit: tamen nimis praecipitanter inducta mihi videtur hypothesis (quam *Vossianam*, aut *Borellianam* aut *Carreanam* denique dixeris), quasi per istam non-grauitatem vel non-pressionem in inferiora, pondus cylindri in tubo leuius factum esset respectu aquae in vase contraponderantis, et hinc ob ruptum aequilibrium ascenderet, vti fieri solet cum duobus fluidis diuersae grauitatis specificae; hypothesis, quae multorum Virorum intelligentium assensum nacta est, et cuius refutatio magno cum apparatu instituta fuit, quae tamen receptis simplicissimis principiis staticis ac hydrostaticis repugnat. Quid enim? dependeat lapis A a fune, et admoueatur lapidis basi potentia B, ita tamen, vt nude tangat. An igitur leuior euasit lapis, quia a fune dependet? An lex *Newtoniana* hic per miraculum tollitur? an minor potentia requiritur, quando illa ascendere et lapidem sursum tollere nititur; quia in solo contactu antecedaneo lapis A potentiam B non premit? an igitur cylinder aqueus non omni grauitate sua resistit potentiae illum porro eleuare nitenti, propterea, quia cum vitro cohaeret? Consideremus rem distinctius. Canaliculus cum vitro adeo fortiter cohaeret (Pr. XIV. Cor. 1.), vt numquam dimittatur semel attactus. Tantum igitur abest, vt haec cohaesio ascensum adiuet, vt potius illum potentissime impediat, imo plane tollat; quapropter res in hoc casu eo recidit, ac si latus vitri crassius et orificium tubuli angustius factum esset? Putem vero diametrorum inaequalitatem non mutare altitudines aequales in tubis communicantibus; sed posito tubulo minoris diametri, minoris quoque diametri

Figura 22.

O o 2

cylin-

cylindrum aqueum in vase contraponderare censendum esse. Cylindrulus autem aut cum canaliculo ita cohaeret, ut diuelli nequeat, aut potest diuelli et moueri. Si diuelli nequit: nullus quoque erit ascensus. Si potest, dum reuera inter ascendendum intra canaliculum mouetur; aut extra sphaeram cohaesionis pellitur, aut intra illam subsistit. Si hoc; nonne resistentia tanto maior est; quippe iam non simplex pondusculum cylindruli eleuandi, sed et simul vis cohaesionis cum canaliculo superanda est, tantum abest, ut ascensus per cohaesionem faciliteretur; quemadmodum in situ figurae 22. potentia *b* non solum pondus lapidis *a*, sed et vim funis renitentem superare debet, quando ascensum continuari velis. Quodsi vero aqua sphaeram cohaesionis excedit: an non in ipsa diuisione et mutatione loci vis attractiua inter canaliculum et cylindrulum quasi agere cessat, et praetensa leuitas eo ipso euanescit?

Figura 22.

PROPOSITIO XXIII.

Cohaesio, quae inter ipsas particulas aqueas, ex quibus cylindrulus medius componitur, vi mutuae attractionis intercedit, maior est et fortior, quam cohaesio cylindruli totius cum superficie canaliculi.

Demonstratio.

Figura 23.

Concipiatur totus canaliculus $AaBbCD$ intra tubuli cauitatem genitus in tot annulos diuisus, quot dantur puncta in linea superficiali tubi AB . Diuidatur etiam totus cylindrulus intra canaliculum comprehensus in totidem lamellas (sectiones vel strata dixeris), ex. gr. 1. 2. 3. 4. 5 etc. quibus totidem annuli canaliculi respondent. In

In propatulo est, singulas lamellas non tantum cum annulis suis correspondentibus vi mutuae attractionis, quae inter particulas aqueas intercedit, cohaerere, sed etiam lamellas ipsas inter se cohaerere; hoc est: totum cylindrum non solum vnā massam continuam constituere, sed et tota superficie sua conuexa cum superficie concaua canaliculi secundum longitudinem lineae *ab* continuari. Porro: denotent circelli 1. 2. 3. 4. 5. lamellas cylindruli; lineae *c* Figura 24. longitudinales *c* cohaesionem lamellarum inter se; laterales *d* cohaesionem cum canaliculo: dico, cohaesiones *ccc* etc. fortiores esse, quam cohaesiones *ddd* etc. Magnitudo enim cohaesionis lamellarum inter se est in ratione baseos cylindruli, et cohaesio lateralis *d* est in ratione peripheriae. Sunt autem bases in ratione diametrorum duplicata, peripheriae contra sunt in ratione simplici. *Fortius igitur cohaeret cylindrulus inter se, quam cum canaliculo.*

Corollarium.

*Quando igitur lamella suprema in motum agitur, tunc totus cylindrulus mouetur, nam citius cohaesio *ab* inter ipsum et canaliculum rumpitur, quam vt massa cylindruli diuidatur.*

PROPOSITIO XXIV.

Pondus a virtute attractiua annuli vitrei proxime superioris quouis momento eleuandum aequale est ponderi cylindruli totius inter canaliculum moti.

Demonstratio.

Quando cylindrulus aqueus, cuiuscunque altitudinis tubulum ingressus, vterius eleuari debet: hoc fieri non potest, quin lamella suprema cylindruli, quae sola a vi

attractiua annuli vitrei proxime superioris ad ascensum sollicitatur (Pr. XXI.), omnes subsequentes lamellas et sibi continuas (Pr. XXIII.), simul secum eleuet ac post se trahat. Omnes igitur lamellae, i. e. cylindrulus totus, qui ex illis componi concipitur, intra cauitatem canaliculi, cui contiguus est, mouetur simul, et cohaesio superficiei communis *ab*. Atqui totus cylindrulus ponderat et grauitat (Pr. XXII.). Ergo *vis attractiua annuli illius vitrei quouis ascensus momento totius cylindruli pondus eleuare debet.*

Figura 24.

Corollarium I.

Figura 23.

Quo altius aqua in tubum ascendit, eo magis cylindruli massa augetur; pondus autem in ratione massarum aestimatur. Datis igitur diuersis cylindruli altitudinibus in eodem tubulo *Bd* et *Bδ*: *annulus δδ altiore loco positus pondus maius, nimirum cylindrum altitudinis Bδ, eleuare debet, quam angulus inferior δd, qui non nisi cylindrulum altitudinis Bd eleuare debeat.*

Corollarium 2.

Quia vis eleuans semper eadem et constans manet (Pr. XXI. Cor.); pondus autem eleuandum pro ratione altitudinis aquae ascendentis (Cor. 1.) continuo crescit: sequitur quoque *resistentiam a vi illa eleuante superandam (Pr. XXII.) continuo augeri; excessum igitur virium eleuantium continuo decrescere, et celeritatem, qua aqua in tubo ascendit, diminui.*

Corollarium 3.

Ex eadem causa (Cor. 2.) sequitur, *ascensum non nisi ad determinatam aliquam altitudinem fieri posse; quam*
vbi

vbi cylindrulus ascendens attingit, *aequilibrium oritur inter vim eleuantem et pondus eleuandum.*

PROPOSITIO XXV.

Cylindrulus aqueus intra tubulum eleuatus et quiescens a solo annulo supremo canaliculi suspenditur.

Demonstratio.

Quando tubulum, qui aquam ad datam altitudinem Exper. 22i hausit, remoueas, atque extra vasculum erectum teneas: omnem illam aquam admissam atque eleuatam videbis immotam haerere et quasi suspendi. Atqui haec suspensio totius massae a virtute attractiua vitri immediate provenire non potest. Vitrum enim non nisi canaliculum radio suo actiuitatis conuenientem attrahit et sustentat. Cylindrulus igitur a vitro immediate non suspenditur. (Pr. XV.) Sed neque attractio quae inter caualiculi et cylindruli superficies *ab* mutuo sibi contiguas intercedit ad Figura 23i suspensionem cylindruli quicquam confert. Cohesionem enim, quas inter singulos annulos et lamellas respondentes (P. XXIII. Dem.) finximus, se inuicem destruunt; quia quantum vna lamella sursum vel deorsum trahitur, tantum per lamellas vtrinque proximas, itemque per annulos vtrinque proximos, qui tam in lamellas respondentes, quam in laterales proxime superiores et inferiores agunt, impeditur. Vnde lamellae istae indifferenter se habent quocum annulo cohaereant; siquidem cohaesio lateralis *d* facile Figura 24i soluitur, et totus cylinder mouetur, vbi primum vis aliqua motum producens accesserit. Solus nexus lamellae supremae per nullam aliam incumbentem, in quam annuli supremi attractio agere posset, destruitur. Sola igitur cohaesio inter annulum supremum et lamellam supremam
la-

efficax permanet, a qua omnes reliquae lamellae subfequentes vi mutuae attractionis particularum aquearum dependent. *Totus igitur cylindrus, ope lamellae suae supremae a solo annulo canaliculi supremo suspenditur.*

Scholium.

Si cui libuerit inter causam suspensionis etiam referre sollicitationem continuam annuli vitrei proxime superioris (Pr. XXI.); cuius praesentia negari non potest, etsi ad plenarium ascensum producendum insufficientis sit: equidem non admodum refragor; sed meminisse tamen oportet, hanc causam evanescere, quando tubulus breuior aut certe non longior est, quam altitudo, ad quam aqua in illo ascendere posset.

Corollarium I.

*Falsa est igitur propositio Hauksbejana (Pr. XX. Cor.), quando de causa suspensionis aquae iam eleuatae et quiescentis quaeritur. E contrario vera est propositio Iurinianna supra allata, si duas cautelas adhibueris. Oportet enim meminisse: primo, etsi canaliculus a nobis suppositus tenuissimus sit, vt massa tota parum differat (Pr. XV. Cor. 2.); tamen non omnem aquam, sed solum cylindrum ab illo annulo vitreo sustentari: deinde, sustentationem illam vel suspensionem non immediate a vi attractiua annuli vitrei, sed mediate, ope annuli supremi canaliculi aquei, peragi. Correcta igitur ista propositio ita enunciari potest: *Cylindrulus aqueus in tubo capillari sustinetur supra libellam vi attractiua superficiei tenuis annularis internae tubuli, mediante annulo canaliculi aquei, cui summa cylindruli suspensi superficies cohaeret et contigua est.**

Co-

Corollarium 2.

Quia vis suspendens semper est eadem, nimirum vis attractiua, quae inter particulas aqueas supremi annuli canaliculi et supremae lamellae intercedit; pondus autem suspendendum continuo crescit: sequitur, *suspensionem non nisi ad determinatam aliquam altitudinem locum habere; quam ubi aqua ascendens attigit, aequilibrium oritur inter vim suspendentem et pondus suspensum.*

PROPOSITIO XXVI.

Ascensus aquae in tubulo cessat, quando potentiae, quae aquam ad ascensum et descensum sollicitant, ad aequilibrium redactae sunt.

Demonstratio.

Potentiae, quae aquam in tubulo ascendentem ad motum sollicitant, sunt duae praecipuae quoad directionem contrariae; nimirum vis attractiua annuli vitrei proxime supra superficiem aquae constituti, quae aquam attollit (Pr. XXI.), et pondus aquae eleuatae, quae vi grauitatis descendere nititur (Pr. XXII.). Dico *praecipuae*, quia potentia tertia (Pr. XVII. XVIII.) cum pondere conspirans, et constans in hac consideratione tuto omitti potest. Ascensus aquae continuatur, quamdiu excessus potentiae eleuantis constat (Pr. XIX.). Excessus autem ille continuo decrescit propter augmentum ponderis (Pr. XXIV. Cor. 2.). Quando igitur massa aquae ascendentis eo vsque excreuit, vt momenta vtriusque potentiae aequalia euadant: oritur aequilibrium (Pr. XXIV. Cor. 3.), et excessus ille virium eleuantium euanescit. Nulla igitur

Tom. VIII. Pp adest

adest ratio, quare ascensus continetur. Quiescit igitur aqua, et ascensus cessat, quando potentiae, quae aquam ad motus contrarios sollicitant, ad aequilibrium redactae sunt.

Corollarium I.

Quamdiu igitur aequilibrium perdurat: omnis aqua in tubulum eleuata in quiete sustentatur. Quicquid vero hoc aequilibrium turbat, illud vel ascensum ulteriorem, vel descensum promouet.

Corollarium 2.

Potentiarum altera (Pr. XXVI. XXII.) motum aquae producentium est pondus cylindruli aquei eleuati. Quodsi igitur, ex causa quacunque, tubus aquae quantitatem maiorem hausit, quam quae a vi attrahente vitri eleuari poterat: aequilibrium tollitur et cylindrulus descendit.

PROPOSITIO XXVII.

Ascensus aquae in tubo cessat, quando cylindruli massa ita excreuit, ut vis attractiua inter anulum canaliculi et lamellam supremam cylindruli, maius pondus sustinere nequeat.

Demonstratio.

Figura 23. Suppone, aquam ad altitudinem eam ex. gr. $4d$ ascendisse, in qua vis attractiua annuli cum cylindruli suspensi pondere ad aequilibrium redacta est (Pr. XXV. Cor. 2). In hoc casu aqua eleuata ad eam molem excreuit, ut illa aucta, cohaesionis vis insufficientis sit. Quodsi enim velles, ut ascensus continuaretur: sequeretur, ab annulo canaliculi nouo $5d$ plus ponderis debere suspendi quam ab annulo proxime inferiore $4d$, qui ante hanc augmentationem supremus fuerat. Atqui hoc fieri

BOB

non potest, vbi semel ad aequilibrium peruentum est; quia vis attractiua annulorum singulorum vbique aequalis est. Annulus igitur canaliculi nouus constitui non posset sine metu rupturae cylindruli dependentis adaucti. Tolleretur igitur cohaesio, et sequeretur in ascensu descensus, quod est absurdum. *Cessat igitur ascensus, quando vis suspendens et massa suspensa in aequilibrio constituuntur.*

Corollarium I.

Quodsi igitur tubulus ex causa quacunque aquam ad altitudinem tantam hausit, vt pondus cylindruli ab annulo canaliculi supremo suspensi maius sit, quam quod a vi attractiua particularum aquareum retineri possit: aequilibrium istud tollitur; et cohaesio rumpitur; vnde aqua descendit, donec aequilibrium redeat.

Corollarium 2.

Circulus superficiei internae tubuli, qui proximus est summitati cylindruli, sollicitat lamellam continuo ad ascensum (Pr. XXI.). Attrahere autem aut eleuare plus nequit, quam cohaesio particularum aquareum (Pr. VIII. Cor. 2.), quae suspensionem (Pr. XXV.) determinat, permittit. Cessat igitur ascensus, quando vis ista suspendens cum pondere suspenso ad aequilibrium redacta est, quia sollicitationes circuli vitrei supremi minores sunt, quam vt annulum canaliculi nouum constituent sine metu rupturae cylindruli dependentis.

PROPOSITIO XXVIII.

Altitudo, ad quam fluidum quodcumque in tubo capillari ascendit, est in ratione directa differentiae virium at-

Pp 2

tracti-

tractuarum fluidi ad vitrum, et fluidi ad se; et in ratione reciproca diametri fluidi eleuandi.

Demonstratio.

Figura 25. Sit vis, qua fluidi particulae se mutuo attrahunt $= q$; vis autem, qua fluidum ad tubum vitreum attrahitur $= p$. Diameter tubi $ABC = d$; Altitudo $= c$. Quia ad obtinendum effectum, qui est eleuatio fluidi intra tubum moti, applicatio virium harum fit secundum annulos successiue applicitos, qui sunt vt peripheriae columnarum (Pr. XX. XXI.): erit vis, qua fluidum sursum trahitur, (Pr. XVII. XIX.) vt $d(p - q)$; cui, facto aequilibrio, aequale esse debet pondus columnae eleuatae cd^2 . Erit ergo, (designante m numerum constantem) $cd^2 = d(p - q)$ et $c = \frac{m(p - q)}{d}$.

Corollarium 1.

Quia attractio aquae ad vitrum maior est, quam attractio mutua particularum aquearum (Pr. IX.) erit $p - q$, quantitas affirmatiua: *Altitudo igitur BP est affirmatiua, et aqua in tubo supra libellam eleuatur.*

Corollarium 2.

Quia solus cylindrulus aqueus intra canaliculum, qui indiuulsus manet (Pr. XIV. Cor. 1. et Pr. XXIV.), mouetur et eleuatur: applicatio virium istarum consistit in soluenda cohaesione, quae intercedit inter anulum canaliculi supremum, et respondentis lamellae cylindruli (Pr. XXV.) peripheriam: haec autem peripheria est, vt diameter (non totius tubi, sed) cylindruli (Pr. XV. Cor. 1. Pr. XXIV.) $= d - 2b$. Erit igitur vis, qua aqua ascendit

dit (Pr. XVII. XIX.) $= (p - q)(d - 2b)$, pondus cylindruli $= c(d - 2b)^2$. Et altitudo $c = \frac{m(p - q)}{d - 2b}$, in ratione reciproca diametri cylindruli.

Corollarium 3.

Sint duo tubi cylindrici, ABC, cuius diameter $= d$, et altitudo PB $= c$, alter $\alpha\epsilon\gamma$, cuius diameter $= \delta$, et altitudo $\pi\epsilon = \kappa$. Quia differentia virium $p - q$, constans est, erit $c : \kappa = (\delta - 2b) : (d - 2b)$. i. e. *Altitudines aquae ascendentes in tubis cylindricis diuersae diametri sunt reciproce ut diametri cylindrorum eleuandorum, seu in ratione reciproca diametri ipsorum tuborum quam proxime, quippe diameter cylindruli, ob exiguitatem radii actiuitatis b quam proxime ad tubi ipsius, seu totius columnae aqueae diametrum accedit.*

Figura 25.
et 26.

Corollarium 4.

Quia (Cor. 3.) $c : \kappa = \delta - 2b : d - 2b$, sequitur altitudines in tubo angustiore paullo maiores esse, quam debeant, si altitudines essent praecise, ut tuborum diametri reciproce. Quo angustior enim est tubus, eo minor est d , eo sensibilibior euadit differentia inter d et $d - 2b$; eo maior erit igitur quantitas $\delta - 2b$, respectu quantitatis $d - 2b$, id quod etiam experimentis respondet.

Scholium I.

Altitudines aquarum ascendentium esse in ratione diametrorum reciproca, ex experimentis diu cognouerunt Viri Celeberrimi, qui circa hoc negotium versati sunt. (*) Quae autem ipse obseruauit, sunt sequentia: (NB. Nu-

Pp 3

meri

(*) Vid. Musschenbr. l. c. II. totum, et. Comm. Ac. T. II. Diss. cit. §. XXX.

meri denotant centesimas partes pollicis, quales duodecim constituunt pedem Anglicanum.)

| Exper. 22. | <i>Diameter tubi.</i> | <i>Altitudo ascensus.</i> |
|------------|------------------------------|---------------------------|
| | 0, 6. lin. ——— | ——— 7, 2. lin. |
| | 0, 4½ ——— | ——— 9, 5. — |
| | minor 0, 4. } med. 0, 4½ ——— | 9, 2. — |
| | maior 0, 5. } | |
| | 0, 5 ——— | ——— 8, 5. — |
| | 0, 6 ——— | ——— 7, 1. — |
| | 0, 8 ——— | ——— 5, 3. — |
| | 0, 2½ circiter — | ——— 17, 2. — |

Quae dimensiones cum assignata proportione, positis tamen cautelis (Cor. 2. 3. 4.), satis conueniunt.

Corollarium 5.

Quando tubulus cum aqua ad datam altitudinem eleuata a vasculo remouetur; tum vis, qua aqua in tubo cum aqua in vase cohaesit (Prop. XVII.) euanescit, et sola restat vis sollicitans = p . Est igitur $p(d - 2b) = c(d - 2b)^2$, et $c = p : d - 2b$. Aqua igitur ad maiorem altitudinem attrahitur extra aquam, quam trahi potest intra illam, quia $p > p - q$.

Corollarium 6.

Quia differentia virium $p - q$, infinities variari potest; hinc etiam diuersissimae altitudines oriuntur pro densitate fluidorum, quae attrahuntur. (*)

Corol-

(*) Vid. Muschenbr. l. cit. C. III.

Corollarium 7.

Si fluidi attractio mutua maior est, quam attractio ad vitrum, vti esse solet in *Mercurio* (Pr. IX. Schol.); hoc est, si $p < q$: tum fluidum ne quidem ad libellam ascendit, et defectus erit pariter reciproce, vti diametri.

Corollarium 8.

Per attractionem, quae inter particulas aqueas intercedit, non nisi gutta sustentari potest, qua nimis aucta cohaesio rumpitur (Pr. VII). Neque igitur per vim attractivam annuli supremi canaliculi (Pr. XXV. XXVII.) plus quam gutta, absque descensus metu cohiberi potest. Pondus igitur cylindrici, qui ab hoc annulo supremo dependet, pondus guttulae excedere non debet. Deprehendit autem Exc. *Bullfingerus* (Diff. cit. §. XXVII.) totam massam columnarum, quarum altitudo est in ratione diametrorum reciproca, non excedere guttulam tantam, quanta ab orificio tubuli infimo dependere potest. Patet igitur ratio vehementer probabilis et congrua, quare ascensus cessat, quando altitudines ad datam proportionem accreuerunt, quia videlicet per ascensum ulteriolem gutta maior eleuari deberet, quam per cohaesione aquae sustineri potest. Et quia in tubulis orificii maioris, sed eiusdem vbique diametri, annuli canaliculorum quoque maiores sunt, sequitur in tubulis amplioribus maiorem quoque guttam (Prop. VIII.) attrahi posse, modo diameter ista dimensionem (Prop. XVI. Cor. 2.) iustam non excedat.

Exper. 22.

Scholium 2.

Atque ita in aprico collocatam esse rationem puto, quare ascensus aquae tandem cesset, et quare descensus

se-

sequatur, quando tubulus plus iusto haufit. Quae proprietas theoriam nostram omnino eo magis commendat, quo difficilius haecenus fuit ad istas quaestiones respondere. (Prop. XIV. Cor. 2.) Omni enim iure *Lxc. Bullingerus* hypothesin de adhaesione et abolito pondere examinans, in dissertationis suae §. XXVIII. instat et vrget: “ Si
 “ prima aquae portiuncula fistulam ingressa pondere carebit respectu succedentis secundae: carebit et secunda fistulam ingressa respectu tertiae: namque et secunda lateribus adhaerebit sibi contiguus. Sic item tertia respectu quartae: et quis erit finis successionis? Quae est
 “ ratio, cur non in omni fistula ad summitatem aqua ascendit, cum nulla fistulam ingressa deorsum premit in sibi subiectam? Suspenditur, inquis, quantum latera
 “ valent sustinere. Bene est. Si latera inde a C ad D possunt sustinere quantitatem DD poterunt et latera a D ad E sustinere quantitatem DE, et sic porro, donec ad finem laterum A perueuias.” Quae autem contra cohaesionem hic dicuntur; opponi etiam debent, si causam ascensus vel suspensionis in actione vitri sola quaesieris. Videlicet: verum est, quod omnia puncta superficiei internae tubuli (Pr. XIV. Cor. 2.) aequaliter attrahant; aequalem igitur particulam aquae possunt sustinere. Quare igitur ascensus vel suspensio ad finem vsque fistulae, vtcunque longae non continuatur? quod omnino fieri deberet, si a sola attractione vitri res omnis penderet. Videmus inde necessitatem superinductae virtutis attractivae, quae inter particulas aquae (Prop. XVI.) ipsas intercedit, et per quam aequilibrium denique (Pr. XXIV. Cor. 3. XXV. Cor. 2.) generatur.

Figura 19.

Pro-

PROPOSITIO XXIX.

In tubis cylindricis quantitas aquae a superficie eadem attracta minor est in tubis diametri minoris; maior autem in tubis diametri maioris.

Demonstratio.

Haec propositio ex natura figurae circularis vera esse intelligitur. Separetur in circulo A limbus CEDFcedf. Sit diameter CD = d, latitudo limbi Cc = b. Diameter circuli B = δ, et latitudo limbi Gg eadem = b. Erit igitur in circulo A peripheria CEDF = $\frac{22}{7}d$, et peripheria minor cedf = $\frac{22}{7}(d - 2b)$. In circulo B, peripheria maior = $\frac{22}{7}\delta$ et minor = $\frac{22}{7}(\delta - 2b)$. Est autem in quovis circulo area limbi totius = $\frac{22}{7}Dc.Cc$. Erit ergo area limbi dimidii CEDced = $\frac{11}{7}b(d - b)$. Abscindatur in circulo B portio peripheriae GH, quae sit aequalis peripheriae dimidiae circuli A, unde erit GH = $\frac{11}{7}d$. Quia BH:GH = Bb:gb; erit gb = $\frac{11}{7} \frac{d(\delta - 2b)}{\delta}$. Est autem area portionis limbi GHhg = GH + gb · $\frac{1}{2}$ Gg = $\frac{11}{7} \frac{bd}{\delta} (\delta - b)$. Ergo area limbi dimidii in circulo A, est ad aream portionis limbi GHhg in circulo B = $\frac{11}{7}b(d - b) : \frac{11}{7} \frac{bd}{\delta} (\delta - b) = \delta d - \delta b : \delta d - bd$. Hoc est: erunt inter se in ratione composita, ex reciproca diametrorum, et directa differentiae inter diametros circulorum et radium actiuitatis. Si igitur $\delta > d$; erit etiam $\delta b > db$. et $\delta b - \delta b < \delta d - bd$. Consequenter eadem peripheria CED et GH in minori circulo A minus attrahit aquae, quam in maiore B.

Corollarium I.

Quia in quovis circulo area limbi CEDFcedf = $\frac{22}{7}Dc.Cc$: erunt areae limborum in duobus circulis A
Tom. VIII. Q9 et

Figura 27.
et 28.

sequatur, quando tubulus plus iusto hausit. Quae proprietas theoriam nostram omnino eo magis commendat, quo difficilius hactenus fuit ad istas quaestiones respondere. (Prop. XIV. Cor. 2.) Omni enim iure *Lxx. Bulfingerus* hypothesin de adhaesione et abolito pondere examinans, in dissertationis suae §. XXVIII. instat et vrget: “ Si
 “ prima aquae portiuncula fistulam ingressa pondere ca-
 “ ret respectu succedentis secundae: carebit et secunda fi-
 “ stulam ingressa respectu tertiae: namque et secunda la-
 “ teribus adhaerebit sibi contiguis. Sic item tertia re-
 “ spectu quartae: et quis erit finis successione? Quae est
 “ ratio, cur non in omni fistula ad summitatem aqua
 “ ascendit, cum nulla fistulam ingressa deorsum premit
 “ in sibi subiectam? Suspenditur, inquis, quantum latera
 “ valent sustinere. Bene est. Si latera inde a C ad D
 “ possunt sustinere quantitatem DD poterunt et latera a D
 “ ad E sustinere quantitatem DE, et sic porro, do-
 “ nec ad finem laterum A perueuias.” Quae autem
 contra cohaesionem hic dicuntur; opponi etiam debent, si causam ascensus vel suspensionis in actione vitri sola quaesieris. Videlicet: verum est, quod omnia puncta superficiei internae tubuli (Pr. XIV. Cor. 2.) aequaliter attrahant; aequalem igitur particulam aquae possunt sustinere. Quare igitur ascensus vel suspensio ad finem vsque fistulae, vtcunque longae non continuatur? quod omnino fieri deberet, si a sola attractione vitri res omnis penderet. Videmus inde necessitatem superinductae virtutis attractivae, quae inter particulas aquae (Prop. XVI.) ipsas intercedit, et per quam aequilibrium denique (Pr. XXIV. Cor. 3. XXV. Cor. 2.) generatur.

Figura 19.

Pro-

PROPOSITIO XXIX.

In tubis cylindricis quantitas aquae a superficie eadem attrahita minor est in tubis diametri minoris; maior autem in tubis diametri maioris.

Demonstratio.

Haec propositio ex natura figurae circularis vera esse intelligitur. Separetur in circulo A limbus CEDFcedf. Sit diameter CD = d, latitudo limbi Cc = b. Diameter circuli B = δ, et latitudo limbi Gg eadem = b. Erit igitur in circulo A periphēria CEDF = $\frac{22}{7}d$, et periphēria minor cedf = $\frac{22}{7}(d - 2b)$. In circulo B, periphēria maior = $\frac{22}{7}\delta$ et minor = $\frac{22}{7}(\delta - 2b)$. Est autem in quouis circulo area limbi totius = $\frac{22}{7}Dc.Cc$. Erit ergo area limbi dimidii CEDced = $\frac{11}{7}b(d - b)$. Abscindatur in circulo B portio periphēriae GH, quae sit aequalis periphēriae dimidiae circuli A, vnde erit GH = $\frac{11}{7}d$. Quia BH:GH = Bb:gb; erit gb = $\frac{11}{7} \frac{d(\delta - 2b)}{\delta}$. Est autem area portionis limbi GHhg = GH + gb · $\frac{1}{2}$ Gg = $\frac{11}{7} \frac{bd}{\delta} (\delta - b)$. Ergo area limbi dimidii in circulo A, est ad aream portionis limbi GHhg in circulo B = $\frac{11}{7}b(d - b) : \frac{11}{7} \frac{bd}{\delta} (\delta - b) = \delta d - \delta b : \delta d - bd$. Hoc est: erunt inter se in ratione composita, ex reciproca diametrorum, et directa differentiae inter diametros circulorum et radium actiuitatis. Si igitur δ > d; erit etiam δb > db. et δb - δb < δd - bd. Consequenter eadem periphēria CED et GH in minori circulo A minus attrahit aquae, quam in maiore B.

Figura 27.
et 28.

Corollarium I.

Quia in quouis circulo area limbi CEDFcedf = $\frac{22}{7}Dc.Cc$: erunt areae limborum in duobus circulis A
Tom. VIII. Qq et

et B, quorum diametri sunt d et δ , et radius actiuitatis b , $=b(d-b):b(\delta-b)$. Et quando altitudines sunt in ratione reciproca, erunt canaliculi, seu quantitates a sola vi attrahente vitri eleuatae similiter $=\delta(d-b):d(\delta-b)=d\delta-b\delta:d\delta-bd$, et quia $b\delta > bd$: Erit *mas-
sa canaliculi minor in circulo minore, maior in maiore.*

Corollarium 2.

Quia peripheriae minores circulorum A et B sunt inter se $=d-2b:\delta-2b$, erunt areae $=(d-2b)^2:(\delta-2b)^2$. Consequenter cylindruli, quorum altitudines sunt in ratione reciproca diametrorum suorum, sunt inter se $=d-2b:\delta-2b$. i. e. Sunt in ratione diametrorum suorum directa. Si igitur $\delta > b$, *cylindrulus minor continebitur in tubo minori, maior in maiori.*

Scholium.

Hauksbejus, qui attractionem primus in hanc scenam introduxit, arbitratus est, totam internam superficiem, cui aqua suspensa cohaeret, hanc virtutem actu exercere. Atque hoc quidem omni iure postulauit (P.XX.Cor.1.). Interim placuit Viris, postliminio hanc materiam recolentibus, sententiam istam relinquere. Neruus autem contradictionis in eo consistit, quod supponerent, totam columnam, quanta est a sola vi attractrice vitri immediate eleuari; cum igitur altitudines in ratione reciproca diametrorum essent, (quod et *Hauksbejus* agnouerat) et consequenter columna attractae in ratione directa diametrorum, superficies cylindricae autem vitri attrahentes aequales esse deberent: necessario inde sequi, quod eadem
caussa

caussa effectus inaequales ederet, id quod absurdum esset. At vero, quia primo suppositio ista a veritate abhorret (vid. Pr. XV.); deinde differentia ista quantitatum eleuatarum necessario ex figura circulari columnae cylindricae (Pr. XXIX. fluit: putem, *Hauksbejum* ex hoc capite minus feliciter refutari, sed rem alia via aggrediendum (Pr. XX. Cor. et XXV. Cor. 1.) esse.

PROPOSITIO XXX.

Si pondus Cylindruli cum vi attrahente annuli in aequilibrio positum augeatur per vim accessoriam, conspirantem cum pondusculo in eandem directionem: aequilibrium rumpitur, et aqua descendit.

Demonstratio.

Quando potentiae aquam in tubulo mouentes in aequilibrium perueniunt: motus cessat (Pr. XXVI. Cor. 1.) et aqua quiescit. Turbato hoc aequilibrio nouus motus oritur, et quidem in plagam illam, in quam potentia mouens et praeualens dirigitur. Aqua autem ratione ponderis deorsum grauitat. *Quodsi igitur vis accessoria cum hac grauatione conspirat: aqua in tubulo descendit; namque idem est, ac si pondus auctum fuisset.*

Corollarium I.

En fundamentum caussae pro explicatione phaenomeni, supra (Pr. XXII. Dem. Exp. 18.) a nobis allegati, et quod in Diff. Bulff. 31. est, *quod nimirum aqua ad altitudinem debitam eleuata in tubulo inuerso ad extremitatem alteram descendat.* Nam superficiei internae tubuli puncta omnia attrahunt; ergo et circulus D infra

Q 2

ca-

Figura 29.

canaliculum proximus attrahit. Ad pondus igitur cylindri BD per anulum canaliculi supremum ad A sustentati accedit noua vis circuli vitrei D, quae cylindrum deorsum nitentem ad descensum sollicitat; inde aequilibrium tollitur, et descensus actu sequitur. Quod autem circa circulum D accidit; id circa alium quemcunque consequi debet, quia semper eadem est ratio et eadem sollicitatio superficiei vitreae. Descensus igitur prius non cessat, quam vis illa accessoria cessat, nimirum quando aqua ad orificium inferius A peruenit.

Scholium.

Hoc vero phaenomenon ex theoria Iuriniiana explicari nequit. Si enim superficies annularis D, cui summa aquae suspensae superficies cohaeret et contigua est, **Figura 29.** vi sua attractiua totum cylindrum BD retinet, ne grauitate sua descendat, in situ ordinario: quare eadem vis attractiua pressionem eiusdem cylindri non sustinet in tubo inuerso (Fig. 25.)? cum sola inuersione nec in vi, nec in pondere quicquam mutatum sit. Demus vero cylindrum descendere debere ex alia qualicunque causa. **Figura 30.** Quare ille non subsistit, quando in situm DE peruenit? quando nimirum summa aquae suspensae superficies cum eodem summo annulo vel circulo D cohaeret. Ceterum nostram explanationem veram esse constat ex eo, quia descensus cylindri **Exper. 24.** DE cessat, et in eo situ quiescit, quando superficies tubuli interna EA, oleo illinitur, vt vis attractiua vitri (Pr. XIII. Cor. 1.) agere non possit.

Corollarium 2.

Sit ista vis accessoria aequalis vi cylindrum ad ascensum sollicitanti, vel tantillo minor, sed contraria; pondus-

pondusculum vero aquae ratione virium istarum sit infinite paruum: particula aquea ita vtrinque sollicitata in quocunque loco tubuli posita haerebit immota. Sit nempe intra tubulum AB particula aquea C, quae sollicitatur tam sursum quam deorsum ab annulis superficierum vitri, particulam vtrinque proxime attingentibus. Sit sollicitatio superior = S; inferior = f; pondus particulae = p: erit $S = f + p$, et particula immota haerebit. Idem est, si tubulus horizontaliter positus ingentem cylindrum aqueum continet: tunc enim pondus eius sustentatur a solo latere tubuli, et quasi evanescit; aqua igitur quiescit, quia sollicitationes virium attractionis ad vtramque cylindri basin aequales sunt.

Figura 32.
Exper. 23.

Figura 32.
Exper. 23.

Scholium Generale.

En Theoriam ascensus et suspensionis aquae in tubulis capillaris, planam, facilem, ex consideratione phaenomenorum minus compositorum genitam, et principiis simplicissimis adstructam. Quae si vera est, aliarum refutatione strictiori non est opus. Euadet illa perfectior, quando theoria attractionis in genere latius erit exulta. Malui autem in hoc negotio prouocare ad experimenta talia, in quibus phaenomena a paucissimis causis apertis, quam pluribus inuicem mixtis dependent. Possunt hoc modo facilius euitari fallaciae caussarum. Sunt aliqua experimenta inter Muschenbroekiana, quae huic theoriae contradicere videntur; sed ne haec dissertatio in maiorem molem excrescat: responsiones, quae nunc facile in promptu essent, dabo in scriptione singulari; in quam etiam solutiones aliorum plurium phaenomenorum, quae difficiliora esse, et aliorum hypothesebus saeuere videntur, reiiciam.

Q9 3

DE

DE
THERMOMETRIS
 CONCORDANTIBVS.

AVCTORE

Iofia Weitbrecht.

§. 1.

Constat inter Physicos, Thermometra Florentina, quibus vulgo vtuntur, duobus imprimis laborare defectibus: altero, quod nullam graduum caloris mensuram certam et determinatam exhibeant, altero quod ne ipsa quidem Thermometra inter se concordent in eodem calore, nec obseruationes diuersis instrumentis inter se comparari queant. Vtrumque plurimum haecenus impediuit incrementum scientiarum. Restitit igitur problema sequens: *Inuenire methodum vniuersalem, secundum quam conficiantur Thermometra talia, quae diuerso locorum intervallo in eodem calore quocunque posita, mensuram eandem exhibeant, et quorum variationes non simpliciter decrementsa et incrementa caloris, sed et illorum quantitatem, et quae ad aliam magnitudinem referri potest, indicent.*

§. 2. Ad hunc scopum perueniendi multi varias ingressi sunt vias. Per industriam excellentis in his rebus artificis *Fahrenheitii*, et alterius cuiusdam nactum esse scimus *Cel. Wolffium* (*), a quouis duo Thermometra,
 quorum

(*) Vide eius Experimenta Physica germanica.

quorum bina inter se conueniunt, sed duo vnus non conueniunt cum duobus alterius, et mensuram graduum habent arbitrariam. Tentauit similia apud nos *Cl. Leutmannus* noster. Cui bono autem istiusmodi Thermometra in eodem asserere, quorum struendorum methodus non constat, et quibus forte perditis aut fractis non possunt condi alia similia, vt obseruationes sequentes prioribus respondeant? *Cel. Musschenbroeckius* (*) methodum aliquam generaliore[m] tradit Thermometra concordantia conficiendi. Sed praeterquam, quod plane non vniuersalis sit, et non nisi ad paucum numerum extendi possit: illa tot operosissimis cautelis obnoxia est, vt eo ipso minus tuta accerta euadat, et euitari vix queat, quin aut in eligendis tubis et cylindris aequalibus, aut in implendis mercurio aere priuato instrumentis, aut in inueniendo frigoris gradu primo, accuratissimi quoque artificis industria deficiat. Denique scalam graduum, quam Thermometris suis applicat, cum *Fahrenheitio* plane arbitrariam eligit. Nulla enim ratio est, quare longitudinem Tubi, quam Mercurius a frigore per sal ammoniacum excitato ad frigus aquae in glaciem abeuntis percurrit, in 32. gradus diuidat, quam in alium quemcunque numerum diuidere potuisset. Neque haec mensura plus cognitionis ad metiendam frigoris intensitatem affert, quam diuisio in Florentinis adhiberi solita. Nondum igitur horum Virorum industria finem quaesitum obtinuit, sed remanserunt semper incommoda pristina. Vt de plurium aliorum tentaminibus nunc taceam.

§. 3.

(*) In Notis ad Experimenta Acad. del Cimento.

§. 3. Postremo *Cl. Dominus De L'Isle* noster ad hoc negotium animum appellens methodum aliam felici successu tentauit, quam alibi (*) fufius descripsit, vnde Thermometrum obtinuit, cuius diuisiones ad massam Mercurii contentam relationem haberent. Summa autem huius methodi huc redit, vt terminum aliquem fixum et constantem assumferit, a quo gradus numerare incipiat, eligendo in hunc finem calorem aquae bullientis; diuisiones autem ita adornauerit, vt in quouis gradu e. gr. centies millesima pars mercurii contineatur, obseruando, quantum spatium in tubo data portio mercurii in magno aliquo frigore occupet. Postquam Thermometrum hoc primarium seu *normale* confectum fuit; quamplurima alia minora, secundaria, leuissimo negotio construxit; dum absque scrupuloso delectu proportionis, quam tubus et cylinder inter se habere debent, illa Mercurio replet, qui per calorem aquae bullientis sursum pellitur, aut si abundat, plane expellitur, vt terminum diuisionis nanciscatur; quo facto instrumenta in aerem factis frigidum reponit, et totam illam viam, quam Mercurius a summo calore ad summum frigus in tubo decurrit, in tot diuidit partes centies millesimas, seu gradus, quot Thermometrum normale in eadem aeris temperie repositum indicat.

§. 4. Non dubium est, quin, si quis Methodum *Dehlianam* imitati velit, simile thermometrum concordans nanciscatur. Hoc vero praestare difficillimum est.

Cam

(*) Vid. eius Memoires pour seruir a l'histoire et au progres de l'Astronomie de la Geogr. & de la Phys. pag. 267.

Cum enim opera potissimum danda sit, vt terminum aliquem frigoris magni constantem habeas et retineas, donec confectum sit instrumentum: id, quod ab aere, cuius calor per horulas subinde mutatur, expectare vix queas: numquam tutus eris, an diuisio graduum cum diuisione massae mercurialis exacte conueniat? Vt igitur methodus certa sit, oportet, primo, vt in potestate artificis sit, eundem semper frigoris gradum conseruare; deinde, vt sciatur, quomodo se habeat volumen mercurii in calore aquae feruentis ad volumen in isto determinato et fixo frigoris gradu, in Thermometro.

§. 5. Terminum fixum frigoris ipsa aqua gelascens nobis exhibet. Quemadmodum lenim aqua nonnisi ad certum gradum caloris efferuescit et ebullit, qui augeri nullo igne potest: ita etiam ille calor nonnisi ad certum gradum minui potest, etiamsi aquam in intensissimi frigoris viciniam, quod vniquam arte aut natura produci- tur, reposueris. Talis autem gradus frigoris est, quando ita gelascit, vt illa iamiam in glaciem conuerti incipiat, vel saltim glacies in illa non liquefcit; id quod per experi- menta luculenter constat, quae pro inuenienda varietate caloris aquae fluentis in flumine Neua institui, et de qui- bus ad Ill. Societatem 1734. et 1735. (*) retuli.

§. 6. Thermometrum, quibus memorata (§. 5.) experimenta feci, fuit vnum ex secundariis *Delislianis*, cuius capacitas in 10000 partes diuisa erat, et in quo Mercurius in aqua gelascente semper ad gradum 152^{num} constiterat. Cum repeterem experimentum Thermome- tro alio: Mercurius similiter ad eundem locum haerebat.

Tom. VIII.

R r

Ar-

(*) Vid. Comm. Tom. VII. pag. 235.

Arbitratus igitur sum, hunc gradum $\frac{152}{10000}$ mum esse verum terminum frigoris aquae gelascentis; et iuxta hanc hypothesein aliquot thermometra confeci, quae omnino perfecte conspirare videbantur. Sed suspicio mihi *subnata* est, vt de veritate rei dubitarem, cum obseruarem, reliqua Thermometra secundaria Delisiana, etsi in eadem aeris temperie, vel in aqua eadem gelascente reposita, plerumque vno, duobus, pluribusue gradibus inter se differre. Cuius discrepantiae causam, quemadmodum hic loci non est indagare: ita illam plane nollem in deficientem auctoris industriam reiicere. Vt tamen cognoscerem, quod nam ex secundariis cum primario maxime conueniret? praesente *Cl. Dn. De L'Isle* primo Thermometrum meum in ipsum fluuium glacie tectum demisi, quod iuxta praedictam hypothesein confeceram, vt certo constaret, nullam mutationem caloris aquae factam esse; deinde etiam expertus sum, quomodo se Mercurius in Thermometro Delisiano normali haberet in eodem frigore. Inuenimus autem, Mercurium in meo haerere ad 152^{dum} gradum; cum in altero tantummodo indicabatur 1495 (seu quod idem est $149\frac{1}{2}$) gradus: vnde differentia $2\frac{1}{2}$ graduum se manifestabat.

§. 7. In hac rerum incertitudine operae pretiosa duxi ad experimenta confugere; quae duobus diuersis modis institui, et nunc paullo fufius recensebo. Modus alter hic erat. Sumfi Thermometrum vacuum, ex tubo A et cylindro C constans; et pondus eius per bilancem quaesiui; tum repleui cylindrum et aliquam partem tubi ita, vt Mercurius in aqua gelascente e. gr. circa A
hae-

Tab. XXIII.
Figura I.

haereret, et pari modo in pondus Mercurii inquisiui. Quo facto Thermometrum immisi in aquam bullientem, vt terminus B innotesceret, ad quem Mercurius in huius aquae calore ascenderet. Longitudinem viae, quam Mercurius a calore aquae bullientis ad calorem gelascentis A B percurrit, mensuravi; et reposito iterum instrumento in aquam gelascentem, totum spatium istud Mercurio addito repleui, et huius denique augmenti pondus inueni. Alter modus talis fuit. Sumsi Thermometrum simile vacuum; ponderavi, et in aqua gelascente ad plenitudinem tubi vsque Mercurio repleui. Inuento pondere Mercurii transtuli instrumentum in aquam bullientem, et expulsa per huius calorem omni superflua portione quaesiui pondus Mercurii restantis, et terminum denique ad quem ille in aqua gelascente descenderet, obseruaui. Ex his datis calculus emergebat pro determinandis diuersis voluminibus Mercurii restantis, et applicanda scala diuisionum. Totam autem Massam Mercurii, et capacitatem vitri assumsi diuisam in 100000 partes aequales. Bilanx, qua primo vsus sum, fuit pharmaceutica cum eo pertinentibus instrumentis. Mensura fuit decima pars lineae, quarum decem pollicem, duodecim vero pollices pedem Anglicanum constituunt. Thermometra adhibita vocabo A.) B.) C.) etc.

Experimentum I.

In Thermometro A.) quod vacuum pendet = 384. gran.
erat Pondus Mercurii in aqua gelascente

in A. haerentis — — — — = 1861. gr.

vna cum augmento Mercurii in B. — = 1890. gr.

Rr 2

Ergo

316 DE THERMOMETRIS CONCORDANTIBVS.

Ergo augmentum ipsum, spatium

$$\begin{array}{r} \text{AB occupans} \quad - \quad - \quad - \quad = \quad 29 \text{ gr.} \\ \text{Longitudo viae AB} \quad - \quad - \quad = \quad 316. \text{ dec. part. lin.} \end{array}$$

Ex his datis sequens emergit calculus: Nimirum, quia, vti est Massa totalis ad 100000: ita sunt massae partiales ad quaesita respectiue; erit

$$\begin{array}{l} 1890 : 100000 = 1861 : 98465 \frac{1159}{1758} \\ \text{et } 1890 : 100000 = 29 : 1534 \frac{749}{1758}. \end{array}$$

Porro; quia in spatio AB continentur Mercurii 29. grana; si ponamus, tubum eousque produci, donec omnem Mercurii massam capere possit; erit longitudo spatii, quam adimplet Massa 1861. gr., = 20278 $\frac{14}{25}$ d. p. l., ergo longitudo totalis pro Massa totali = 20594 $\frac{14}{25}$ dec. part. lin. Quapropter erit

$$\begin{array}{l} 20594 \frac{14}{25} : 100000 = 20278 \frac{14}{25} : 98465 \frac{16349}{19724} \\ \text{et } 20594 \frac{14}{25} : 100000 = 316 : 1534 \frac{23894}{19724}. \end{array}$$

Experimentum II.

Sumsi Thermometrum aliud B.), pendens 224 gr. cuius tubulus ratione cylindri paulo angustior erat. Casu accidit, vt esset aequale cum priori

$$\begin{array}{r} \text{Pondus Mercurii primi in A} \quad = \quad 1861. \text{ gr.} \\ \text{sed vna cum augmento in B} \quad = \quad 1889. \text{ gr.} \\ \text{Ergo augmentum ipsum} \quad = \quad 28. \text{ gr.} \end{array}$$

$$\text{Longitudo viae AB} \quad = \quad 325. \text{ p. d. l.}$$

Est igitur iuxta proportiones consuetas

$$\begin{array}{l} 1889 : 100000 = 1861 : 98517 \frac{1317}{1779} \\ \text{et } 1889 : 100000 = 28 : 1482 \frac{502}{1779}. \end{array}$$

Porro

Porro longitudo tubi, pro Massa 1861, erit = $21600 \frac{25}{32}$

Ergo longitudo pro Massa totali = $21925 \frac{25}{32}$

Quapropter $21926:100000 = 21601:98517 \frac{16258}{37528}$

et $21926:100000 = 325:1482 \frac{566}{1928}$

longitudo viae a Zero ad frigus aquae gelascentis.

Experimentum III.

Retinui Thermometrum antecedens, et Mercurium, qui in aqua gelascente steterat ad B, pepuli per aquam bullientem vsque ad D: et spatium BD postmodum addito nouo Mercurio impleui. Erat autem

Pondus Massae totalis = 1920. gr.

Si iam ponamus Massam partialem

iuxta Exp. II. fuisse = 1889. gr.

erit augmentum in BD = 31. gr.

Longitudo viae BD = 352. p. d. l.

Vnde sequitur: $1920:100000 = 1889:98385 \frac{800}{1928}$

et $1920:100000 = 31:1614 \frac{1120}{1923}$

Porro spatium pro massa Mercurii 1889. erit = $21449 \frac{2}{3}$

Ergo longitudo totalis pro Mercurio, 1920. gr. = $21801 \frac{2}{3}$

Quapropter erit $21801:100000 = 21449:98385 \frac{8615}{21801}$

et $21801:100000 = 352:1614 \frac{13186}{21831}$,

quae est longitudo viae a Zero ad frigus aquae gelascentis.

Quia vero nulla ratio sufficiens est, quare augmentum Mercurii in Experimento II. sit tantum 28. gr.; cum tamen in Experimento primo fuerit = 29. gr. et Massa partialis in utroque sit aequalis = 1861. gr. Quia etiam spatium, quod Massa Mercurii 1889. in Experimento

Rr 3

II. et

318 DE THERMOMETRIS CONCORDANTIBVS.

II. et III. occupat, diuersum sit, nimirum $21925\frac{25}{17}$, et $21449\frac{2}{7}$, cum tamen cetera paria sint: sequitur numerum 1889. falso acceptum esse.

Quodsi igitur loco illius ponatur = 1890. gr.
erit augmentum = 30. gr.

Erit igitur $1920:100000 = 1890:98437\frac{960}{1928}$
et $1920:100000 = 30:1562\frac{960}{1928}$

Porro longitudo pro Massa partiali 31. gr. est = 352 d. p. l.

Ergo longitudo pro Massa part. 1890. gr. erit = 22176
et longitudo tota pro Massa totali = 22528

Quapropter $22528:100000 = 22176:98437\frac{11264}{22528}$
et $22528:100000 = 352:1562\frac{11264}{22528}$,

quae est longitudo viae AB a Zero ad frigus aquae gelascentis.

Experimentum IV.

Repleui Thermometrum C.) iuxta modum alterum (S. 7.) in aqua gelascente Mercurio ad plenitudinem usque, et fuit

Pondus Mercurii totale = 1951. gr.

Pondus Mercurii restantis post
expulsionem in feruida = 1922. gr.

Ergo portio elapsae pondus = 29. gr.

Longitudo viae, quam Mercurius
in gelida descendit = 374. p. d. l.

Quapropter erit iuxta proportiones consueras:

$1951:100000 = 1922:98513\frac{1127}{1951}$

et $1951:100000 = 29:1486\frac{114}{1951}$.

Porro

Porro longitudo tubi, quem adimplet

Mercurius restans $= 24787 \frac{5}{29}$.

Ergo longitudo totalis pro massa totali $= 25161 \frac{5}{29}$ d.p.l.

Quapropter $25161 : 100000 = 24787 \cdot 98513 \frac{17497}{25187}$

et $25161 : 100000 = 374 : 1486 \frac{7754}{2518}$, d.p.l.

quae est longitudo viae a Zero ad gradum frigoris.

Experimentum V.

In Thermometro D.)

Pondus massae Mercurii totalis est $= 2550$. gr.

Pondus Mercurii restantis $= 1512$. gr.

Ergo Portio elapsa $= 38$. gr.

Longitudo spatii, quod portio elapsa occupavit $= 570$. d.p.l.

Quapropter erit $2550 : 100000 = 2512 : 98509 \frac{2050}{2513}$

itemque $2550 : 100000 = 38 : 1490 \frac{500}{2513}$.

Porro longitudo tubi pro Massa Mercurii

restante $= 37680$. p. d. l.

pro Massa totali $= 38250$. p. d. l.

Erit ergo $38250 : 100000 = 37680 : 98509 \frac{20759}{2513}$

et $38250 : 100000 = 570 : 1490 \frac{7500}{2513}$

§. 8. Ex his obseruationibus variae determinationes deducuntur pro diuidendo spatio AB a termino caloris aquae bullientis ad calorem aquae gelascentis. Distant enim hi duo termini iuxta

Experimentum I. $= 1534 \frac{74}{189}$ gr. siue $= 153 \frac{1}{2}$ circiter

II. $= 1482 \frac{502}{189}$ gr. $= 148 \frac{1}{2}$ gr.

III. 1) $= 1614 \frac{1120}{1928}$ gr. $= 161 \frac{1}{2}$ gr.

2) $= 1562 \frac{960}{1928}$ gr. $= 156 \frac{1}{4}$ gr.

IV. $= 1468 \frac{814}{1914}$ gr. $= 148 \frac{1}{3}$ gr.

V. $= 1490 \frac{10}{31}$ gr. $= 149 \frac{1}{30}$ grad.

Vtut

Vtut autem fatendum fit, primo obtutu diuersitatem ingentem videri: omne tamen discrimen fortasse ab errore aliquo minimo, qui ex nequitia bilancis ponderumue observationibus facillime se ingerere potuit, obortus est, vt aut pondus massae totalis aut partialis, aut fortasse vtrumque minus iuste determinauerimus.

§. 9. Vt igitur errorem detegamus et prosequamur, ponamus veram esse hypothesin, quod mercurius ex calore aquae summo ad calorem aquae minimum viam percurrat, quae est ad spatium reliquum, quod occupat, vt 152:10000, et quod volumen Mercurii expansi ad contractum fit, vt 10000:9848. Inde sequitur, Massas inuentas partiales esse ad Massam totalem, vt 9848:10000, itemque vt 152:10000. Sit igitur error in Massa totali, erit iuxta

| | | | | | | | |
|---------|-------------|---|-----------|-----------------------------------|--------------|---------|------------------|
| Exp. I. | 9848:100000 | = | 1861:1889 | $\frac{7128}{9848} (\frac{3}{4})$ | ergo in 1890 | erratum | + $\frac{1}{4}$ |
| II. | — : — | = | 1861:1889 | $\frac{7128}{9848} (\frac{3}{4})$ | — 1889 | — | - $\frac{5}{4}$ |
| III. 1) | — : — | = | 1889:1918 | $\frac{1536}{9848} (\frac{1}{8})$ | — 1920 | — | + $1\frac{5}{8}$ |
| 2) | — : — | = | 1890:1919 | $\frac{1688}{9848} (\frac{1}{8})$ | — 1920 | — | + $\frac{5}{8}$ |
| IV. | — : — | = | 1922:1951 | $\frac{6552}{9848} (\frac{2}{3})$ | — 1951 | — | - $\frac{2}{3}$ |
| V. | — : — | = | 2512:2550 | $\frac{7600}{9848} (\frac{4}{3})$ | — 2550 | — | - $\frac{4}{3}$ |

Quodsi vero massam totalem exacte ponderatam esse, et errorem in partiali restante iacere putemus, similis orietur differentia:

| | | | | | | |
|-----------|-----------|---|---------|------------------------------------|------------------|--------------------|
| Exper. I. | 10000:152 | = | 1890:28 | $\frac{7280}{10000} (\frac{3}{4})$ | a quo 29 differt | + $\frac{1}{4}$ |
| II. | — : — | = | 1889:28 | $\frac{7280}{10000} (\frac{3}{4})$ | — 28 | — - $\frac{3}{4}$ |
| III. 1) | — : — | = | 1920:29 | $\frac{1040}{10000} (\frac{1}{8})$ | — 31 | — + $1\frac{5}{8}$ |
| 2) | — : — | = | 1919:29 | $\frac{1688}{10000} (\frac{1}{8})$ | — 30 | — + $\frac{5}{8}$ |
| IV. | — : — | = | 1951:29 | $\frac{6552}{10000} (\frac{2}{3})$ | — 29 | — - $\frac{2}{3}$ |
| V. | — : — | = | 2550:38 | $\frac{7600}{10000} (\frac{3}{4})$ | — 38 | — - $\frac{3}{4}$ |

Vide-

Videmus in experimento primo, numerum 1890, qui quantitatem massae totalis ex obseruatione erutam exprimit, non differre a numero 1889, quem hypothesis suggerit, nisi vna quarta parte vnus grani: interim tamen hanc minimam differentiam nihilominus in causa esse, cur terminus gelationis sesqui gradibus profundior poni deberet. Quemadmodum vero in experimento primo Massa totalis iusto maior assumta fuit: ita e contrario in experimento secundo (dum casu accidit, vt Massa partialis vtrunque aequalis esset) iusto minor assignata est. Et, quia error semel admissus alios plures gignit, non mirum est, quod in experimento tertio, in quo massa partialis 1889. gr. perperam pro vera assumebatur, differentia maior orta fuerit, quae omnino minor euasit, cum massae determinatio altera, nempe 1890. gr. substituebatur. Pari modo in reliquis experimentis quarto nimirum et quinto vni grano non aequiparatur.

§. 10. Verum enim vero non putandum est, hypothesis hanc adscititiam veram esse, quia tam prope ad obseruationes accedit; sed eo ipso, quia res ad minutias redit, iudicium potius suspendendum est. Quodsi enim aliam adoptare velimus, in qua longitudo viae AB sit e. gr. $\frac{150}{10994}$; vel, (quae in diuisione Thermometri Del'isliani primarij locum obtinuit) ($\frac{1465}{109000}$): videbimus, illas aequae bene, imo aliqua ex parte accuratius cum experimentis concordare. Sit enim Longitudo AB, vel Massa partialis in illo spatio contenta $= \frac{150}{10994}$ erit iuxta

322 DE THERMOMETRIS CONCORDANTIBVS.

Exper. I. $9850:10000 = 1861:1889 \frac{335}{985} (\frac{1}{3})$ a quo 1890 diff. +

II. — : — = 1861:1889 $\frac{335}{985} (\frac{1}{3})$ — 1889 —

III. — : — = 1889:1917 $\frac{255}{985} (\frac{2}{3})$ — } 1920 +2

— : — = 1890:1918 $\frac{270}{985} (\frac{2}{4})$ — } +1

IV. — : — = 1922:1951 $\frac{265}{985} (\frac{1}{4})$ — 1951 —

V. — : — = 2512:2550 $\frac{250}{985} (\frac{1}{4})$ — 2550 —

item, iuxta

Exper. I. $10000:150 = 1890:28 \frac{350}{1000} (\frac{1}{3})$ a quo 29 diff. +

II. — : — = 1889:28 $\frac{335}{1000} (\frac{1}{3})$ — 28 —

III. — : — = 1920:28 $\frac{300}{1000} (\frac{4}{7})$ — 31 — +2

— : — = 1919:28 $\frac{285}{1000} (\frac{4}{3})$ — 30 — +1

IV. — : — = 1951:29 $\frac{265}{1000} (\frac{1}{4})$ — 29 —

V. — : — = 2550:38 $\frac{250}{1000} (\frac{1}{4})$ — 30 —

Sit vero AB = $\frac{1495}{100000}$: erit iuxta

Exper. I. $98505:100000 = 1861:1889 \frac{33055}{98505} (\frac{1}{3})$ — 1890 diff. +

II. — : — = 1861:1889 $\frac{33055}{98505} (\frac{1}{3})$ — 1889 —

III. — : — = 1889:1917 $\frac{65915}{98505} (\frac{2}{3})$ — } 1920 — +2

— : — = 1890:1918 $\frac{69410}{98505} (\frac{2}{10})$ — } +1

IV. — : — = 1922:1951 $\frac{16745}{98505} (\frac{1}{8})$ — 1951 —

V. — : — = 2512:2550 $\frac{12250}{98505} (\frac{1}{8})$ — 2550 —

itemque iuxta

Exper. I. $10000:1495 = 1890:28 \frac{25550}{100000} (\frac{1}{4})$ — 29 diff. +

II. — : — = 1889:28 $\frac{24055}{100000} (\frac{1}{4})$ — 28 —

III. — : — = 1920:28 $\frac{70400}{100000} (\frac{7}{10})$ — 31 — +2

— : — = 1919:28 $\frac{68905}{100000} (\frac{2}{3})$ — 30 — +1

IV. — : — = 1951:29 $\frac{16748}{100000} (\frac{1}{6})$ — 29 — +

V. — : — = 2550:38 $\frac{12250}{100000} (\frac{1}{8})$ — 38 — +

§. II.

§. 11. Ex his speciminibus patet, experimenta nostra ad plures hypotheses adplicari posse, nec quicquam stabile exinde concludi. Quapropter, quamuis differentia omnis ab errore quodam proficiscatur, qui adeo exiguus est, vt vix adtentionem mereri videatur: illum tamen plane non negligendum esse intelligimus; quin potius exinde sequitur, si ad certitudinem aliquam peruenire velimus, nos etiam ad quartam partem grani in ponderanda massa mercurii scrupulosos esse debere. Hunc in finem denuo ad experimentorum repetitiones confugi, et loco fallacis bilancis pharmaceuticae aliam accuratioram elegi, nimirum illam, quae a *s'Grauesandio* sub nomine bilancis hydrostaticae descripta inter instrumenta physica academica reperitur; et pondusculis minutissimis instructa est. Quae inueni, sunt sequentia.

Experimentum VI.

Thermometrum E.) quod pendet 200½ gr. repleui Mercurio in aqua gelascente ad plenitudinem vsque: erat

Pondus Massae Mercurii totalis = 2567. gr.
 Pondus Massae partialis restantis = 2528. gr.
 Portionis igitur expulsae = 39. gr.

Experimentum VII.

In Thermometro F.) quod pendet 146. gr. erat

Pondus Massae Mercurii totalis = 2732½ gr.
 Pondus Massae partialis post
 expulsionem restantis = 2691. gr.
 Pondus ergo portionis expulsae = 41½ gr.

§ 2

Expe-

Experimentum VIII.

In Thermometro G.) quod pendet 484. gr. pleno,
erat

$$\text{Pondus Massae Mercurii totalis} = 5554\frac{1}{2} (\frac{1}{2}) \text{ gr.}$$

$$\text{— — post expulsionem} \\ \text{restantis} = 5470\frac{1}{2} \text{ gr.}$$

$$\text{Pondus igitur portionis expulsae} = 84\frac{1}{2} \text{ gr.}$$

§. 12. Ex his observationibus sequentes emergunt
calculi. Nimirum, vti sunt Massae Mercurii totales ad
100000: ita massae partiales ad quaesita respectiue; qua-
propter erit iuxta

$$\text{Exper. VI. } 2567 : 100000 = 2528 : 98480 \frac{1160}{1167}$$

$$\text{et — : — = } 39 : 1519 \frac{77}{1167}$$

$$\text{Exper. VII. } 2732\frac{1}{2} : 100000 = 2691 : 98481 \frac{1115}{1167}$$

$$\text{et — : — = } 41\frac{1}{2} : 1518 \frac{110}{1167}$$

$$\text{Exper. VIII. } 5554\frac{1}{2} : 100000 = 5470\frac{1}{2} : 98483 \frac{2176\frac{1}{2}}{5554\frac{1}{2}}$$

$$\text{et — : — = } 84\frac{1}{2} : 1516 \frac{4678}{5554\frac{1}{2}}$$

§. 31. Apparet, hos calculos multum appropinquare
ad hypothesin, quae massam partialem in spatio AB =
 $\frac{152}{10000}$ ponit; est enim iuxta

$$\text{Exper. VI. } 10000 : 152 = 2567 : 39 \frac{1160}{10000} (\frac{1}{24}) \text{ a quo } 39 \text{ diff. } -\frac{1}{24}$$

$$\text{VII. — : — = } 2732\frac{1}{2} : 41 \frac{5740}{10000} (\frac{2}{15}) \text{ — } 41\frac{1}{2} \text{ — } -\frac{1}{15}$$

$$\text{VIII. — : — = } 5554\frac{1}{2} : 84 \frac{4114}{10000} (\frac{3}{7}) \text{ — } 84\frac{1}{2} \text{ — } -\frac{1}{7}$$

Sed

Sed nec aliae hypotheses multum abluunt. Sit enim $AB = \frac{150}{10000}$:
erit iuxta

- Exp. VI. $10000:150 = 2567:38 \frac{2950}{10000} (\frac{1}{2})$ a quo 39 diff. $+\frac{1}{2}$
 VII. — : — $= 2732\frac{1}{2}:40 \frac{2975}{10000} (\frac{70}{100})$ — $41\frac{1}{2} - +\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
 VIII. — : — $= 5554\frac{1}{2}:83 \frac{3175}{10000} (\frac{5}{10})$ — $84\frac{1}{2} - +\frac{15}{16}$

item

- Exp. VI. $10000:9850 = 2567:2528 \frac{4950}{10000} (\frac{1}{2})$ a quo 2528 diff. $-\frac{1}{2}$
 VII. — : — $= 2732\frac{1}{2}:2691 \frac{5125}{10000} (\frac{1}{2})$ — $2691 - -\frac{1}{2}$
 VIII. — : — $= 5554\frac{1}{2}:5471 \frac{1025}{10000} (\frac{2}{10})$ — $5470\frac{1}{4} - -\frac{10}{16}$

Sit vero $AB = \frac{1495}{10000}$, erit iuxta

- Exp. VI. $100000:1495 = 2567:38 \frac{37665}{100000} (\frac{3}{10})$ a quo 39 diff. $+\frac{2}{3}$
 VII. — : — $= 2732\frac{1}{2}:40 \frac{39017}{100000} (\frac{9}{10})$ — $41\frac{1}{2} - +\frac{5}{3}$
 VIII. — : — $= 5554\frac{1}{2}:83 \frac{3977}{100000} (\frac{1}{20})$ — $84\frac{1}{2} - +1\frac{1}{3}$

item

- Exp. VI. $100000:98508 = 2567:2528 \frac{62135}{100000} (\frac{2}{5})$ a quo 2528 diff. $-\frac{2}{3}$
 VII. — : — $= 2732\frac{1}{2}:2691 \frac{15660}{100000} (\frac{2}{10})$ — $2691 - -\frac{2}{15}$
 VIII. — : — $= 5554\frac{1}{2}:5471 \frac{46024}{100000} (\frac{1}{2})$ — $5470\frac{1}{4} - -1\frac{1}{4}$

§. 14. Dices: ita nos pristina laborare incertitudine. Verum, si cui libuerit, rem ipsam tentare, ille mirari desinet, quare nullum experimentum, omni licet cura et circumspectione, et eadem methodo institutum cum altero conspiret. Experietur enim mecum, in ipso Mercurio latere ineuitabile successus impedimentum. Ab hoc videlicet separari non potest proprietates naturalis, qua particulae suae mutuo se attrahunt. Quodsi igitur e. gr. thermometerum vel in frigore vel in seruore ad plenitudinem repleas, rarissime obtinere poteris, vt haec repletio ex-

acte ad libellam fiat, sed plerumque Mercurii summitas aut depressior aut altior erit orificio tubi, neque minus a margine orificii quasi fugit, et in tumorem eleuatur, qui maior est pro maiore diametro luminis tubi. Hinc omne discrimen ad minimum quendam globulum mercurialem reducitur, qui quidem si deficit superaddi, si abundat, nullatenus auferri potest, vnde etiam vix cauetur, quin pondus verum Mercurii aliquota parte vnus grani immutetur.

§. 15. Cum igitur propemodum desperandum sit de talibus experimentis, quae adeo accurate inter se conspiciant, vt plane nulla laborent differentia: liberum nobis erit, talem eligere hypothesin, quae cum obseruationibus quam proxime conuenit. Inter omnes autem illa proportio optionem mereri mihi videtur, quae Massam Mercurii partialem in B ad massam totalem (vel longitudinem viae AB, quam Mercurius a summo calore aquae feruentis ad infimum calorem aquae gelascentis percurrit, ad totam vitri capacitatem) ponit $= 150 : 10000$, vel in Thermometris maioribus $= 1500 : 100000$. Quamuis enim non negandum sit, tria vltima experimenta, et imprimis VI^{um}, potius exposcere, vt sit $AB = \frac{152}{10000}$: quia tamen non perfecte correspondent; aequae ac cetera scrupulum animo relinquunt. Rationes autem, quae ad illius proportionis optionem me determinant, sunt sequentes: quia, quamuis similiter, vti omnes, ab obseruationibus discrepet, in omnibus tamen mediam fere distantiam ac differentiam seruat: deinde ipsa est, quae ad experimentum Thermometro Delisliano normali (§. 6.) factum quam proxime accedit. Tandem nulla diuisione
scala

scala graduum commodius adaptari potest. Denique, si quoque poneretur illam non esse verissimam: differentia magnitudinis graduum iuxta reliquas hypotheses concinatorum in Thermometris minoribus, in quibus gradus vix $\frac{3}{10}$ lin. raro $\frac{1}{2}$ lineam aequant, insensibilis euadit. Diuidatur enim scala in 150. partes, et longitudo graduum sit $=\frac{3}{10}$ lin.; si eadem scala diuidatur in 152. gr. erit differentia graduum $=\frac{1}{250}$ lin.; si autem diuisio fiat in $149\frac{1}{2}$ partes, erit differentia graduum $=\frac{1}{1000}$ lineae. Sit autem longitudo gradus in scala prima $=\frac{1}{2}$ lineae; tum erit differentia graduum in diuisione secunda $=\frac{1}{50}$ lin.; et in diuisione tertia $=\frac{1}{250}$ lineae, quae igitur cum impossibile sit, vt in oculos incurrat, merito pro insensibili habenda est.

§. 16. Methodus igitur vniuersalis, construendi Thermometra concordantia, talis esto:

Fiat instrumentum vitreum, cuius pars inferior est cylinder amplior, superior tubus angustior. Magnitudo instrumenti potest esse qualiscunque. Proportio inter cylindrum et tubum seruetur talis, qualis sufficit, vt gradus in scala diuisionum satis distingui possint; quo maior ratio est capacitatis cylindri ad capacitatem tubi, eo maiores fiunt gradus. Optima est, si diameter cylindri est 3. 4. vel 5. linearum, longitudo 2. vel 3. pollicum; diameter tubi $\frac{1}{2}$ vel $\frac{3}{8}$ lineae, longitudo 10. vel 12. pollicum; id quod solo intuitu facile diiudicare disces, vbi primum breui exercitio habitum tibi adquisueris. Tale instrumentum repleatur Mercurio puro, quovsque placuerit; quo facto immitte instrumentum in aquam bullientem, vt

vt Mercurius ascendat, vel si superabundat, illum expelle. Terminum summum, ad quem Mercurius quiescit, observa, itemque et terminum infimum, quando instrumentum in aquam gelascentem transtulisti. Longitudinem interualli intra hos duos terminos diuide in 150. partes aequales; adscribendorum numerorum principium esto terminus summus; diuisionem denique continua infra terminum infimum, quo vsque tubi longitudo id concefferit. Quia obseruatum est hactenus Petropoli, Mercurium in summo aeris frigore parum descendisse vltra gradum 200^{mm} : igitur pro captandis variationibus aeris sufficit, si repletio ita fiat, vt Mercurius in frigore aquae gelascentis circa tertiam partem longitudinis tubi haereat; hunc in finem, si depressior erit, aut Mercurii massa debet augeri, si longitudo tubi id permittit, aut capacitas cylindri minui debet: si altior; portionem de Mercurio demere oportet. Quodsi vero thermometrum pro inueniendis multo vehementioribus frigoribus inseruiat; opus est, vt terminus frigoris aquae in mediam circiter longitudinem tubi incidat. Atque hoc modo Thermometrum confectum erit, et si plura iuxta eandem methodum adornaueris, omnia inter se concordabunt in calore eodem, in diuerso autem magnitudinem differentiae respectu voluminis Mercurii indicabunt.

§. 17. In construendo et replendo instrumento itemque et in adaptanda scala cautelae quaedam et artificia obseruari debent, quae nunc placet adiungere.

Notum est inter artifices, cylindrum et tubum non posse combinari, nisi sint eiusdem materiae vitreae. Cy-
linder

linder in infima sui parte in figuram conicam ducitur, seruata in apice eius apertura angustissima. Repletio fit, exugendo aerem per alterum tubi extremum, vt Mercurius per apicis inferioris aperturam intret, vel, si Mercurii copia tibi suppetit totum cylindrum in illum immittendo, vt sua grauitate intret. Repletum instrumentum inuerte, applicando digitum ad tubi orificium, et apicem claude ad flammam lychni, quam per alium tubulum vitreum, qui in capillarem ductus est, celerrime afflis. Ne flamma nimis ad Mercurium appropinquat, oportet cylindrum ad tres quatuorue lineas vacuum relinquere, et propterea partem Mercurii, si abundauerit, per tubum dimittere. Quia hoc modo inter apicem clausum et Mercurium spatium existit aere repletum: ille facile abigitur, si tubi summitatem duobus dexteræ digitis prehendas, atque ita perpendiculariter suspenso instrumento dexteram manum ad sinistram allidas. Saepe vna alteraue succussione aer omnis auolat. Quodsi vero res minus succedat, oportet, vt ad manus habeas filum tenue ferreum, quibus Musici vtuntur, quo si per tubuli orificium ad cylindri apicem immisso bullulas aeris reliquas tetigeris, hae cedentem fili extremitatem insequentes reciprocatis aliquibus motibus facile extrahentur. Si forte instrumentum non satis, aut nimis repletum fuerit, huius ipsius fili ope mercurius commode addi aut demi potest, si in primo casu iuxta illud per infundibulum tenue infunditur; ita enim Mercurius ad vnum latus fili descendit, ad alterum vero aeri spatium relinquitur, vt auolare possit, id quod multo melius est, quam si infundibulum tubulo capillari longissimo instructum adhibueris.

Tom. VIII.

T t

ris,

§ 30 DE THERMOMETRIS CONCORDANTIBVS.

ris, quia hi facile diffringuntur; in altero casu per idem filum admissō aere Mercurium superfluum dirimes, dirēptum autem facile extrahis. Ad obtinendos terminos caloris et frigoris videtur quidem sufficere, vt solus cylinder aquae immittatur; sed securius est, vt totum instrumentum ad libellam fere Mercurii immergatur, cui fini super ignem vrceus altior argillaceus aut ferreus inferuit. Aquae gelascentis frigus maximum est in flumine glacie tecto, aut in vase quodam amplo, quando ingruente magno gelu aeri exposita crusta glaciali obducitur. Coctio fiat, quando altitudo Mercurii in Barometro satis notabilis est, quae aliquando continuari et igne vrgeri debet, vt summum calorem obtineas; et si plura Thermometra conficere velis, talia tempora elige, quibus aer eandem aut non multum differentem specificam grauitatem habet. Pro notandis terminis et mensurando intervallo para tibi asserem ex ligno duriore, vel si placet ex orichalco, duos pollices et plures latum, dimidium crassum, longitudinis conuenientis: exsculpatur sinus satis spatiosus pro locando cylindro, vt aqua vbique appellere possit. Inferne applicetur fulcrum ligneum, aut, quod melius, ferreum, vt sedes instrumenti inuariata maneat, et, ne fluctuet, duobus locis tubum retinaculis ex filo ferreo aut cannabino firma. Porro super duas lamellas chartae durioris duc lineam rectam subtilem atramento, et opere ceruae mollioris post tubum, ad asseris superficiem applica alteram ad terminum frigoris, alteram ad terminum caloris; quando iam instrumentum in aquis tenetur, has lamellas tam diu hinc inde moue, donec lineae in illis ductae cum punctis altitudinem Mercurii exacte

exacte respondeant; quarum linearum distantiam dein ope circini optime mensurabis. Tandem super asserem expande chartam glutine, duc in ea duas lineas longitudinales parallelas, intra quarum cancellos tubus excurrat, et ope lamellarum memoratarum, (vel si Mercurius in aqua bulliente tubum exacte adimplet, sola applicatione instrumenti) quaere in lineis duo puncta terminis altitudinum respondentia; horum interuallum diuide in duas partes aequales, partes dimidias diuide in tres alias; partes has sextas subdivide iterum in quinas, et singulas diuisiones quatuor punctis aequaliter a se inuicem distantibus interstingue. Ita ductis ad assignata puncta lineolis subtilibus parallelis, parasti scalam, et applicito vitro, totum instrumentum. Lineae non possunt separatim in charta duci, quia, quando deinde agglutinatur, per maiorem glutinis expanditur, et hinc vera diuisio mutatur. Cui vero placuerit scalam aeri incidere, captis terminis in separata lamina id peragere, et factis diuisionibus illam affigere poterit. Orificium tubi globulo ceraceo clauditur, ne puluerulentae sordes illabantur et ad conseruandum vacuum. Posset quidem extremitas tubi, in quo Mercurius in aqua bulliente non summum ascendit, in tubulum capillarem duci, et Mercurio per calorem dilatato, aereque expulso, hermetice sigillari: sed aliud incommodum inde nascitur. Quodsi enim in transportando Thermometro Mercurius succussiones patitur, ille in globulos dirimi solet intra tubum, quorum reuiniendorum causa orificium iterum aperiri deberet.

§ 18. Non opus esse mihi videtur, multis verbis praedicare insignem facilitatem huius methodi, quae alias operosissimas longe antecedit, dum secundum illam intra

paucas horas machina leui negotio construi potest; hoc enim perspicuum est harum rerum intelligentibus, et qui periculum experimenti facere cupiunt. Restat potius obiectiones aliquas occupare et refellere, quae contra illam in medium proferri possunt.

§. 19. Dici potest, experimenta nostra non exprimere perfecte vera volumina diuersa massae mercurialis, in diuersis caloris gradibus, quia ob cylindri vitrei contractionem et dilatationem, quam patitur, dum ex aqua frigida in bullientem et vicissim defertur, non eadem vbique cavitatis amplitudo conseruetur; hinc quoque assignatam propositionem 150:10000 inter respectiuas massas Mercurii et capacitates vitri falsam esse. Nihil habeo, quod regeram contra veritatem obiectionis. Sed nec institutum nostrum est, quaerere, quae sit grauitas specifica massae mercurialis sub diuersis voluminibus in diuerso statu caloris, *in genere*. Oportet nos potius scire specialiter, quomodo se habeat diuersum volumen in diuerso statu caloris, *quatenus mercurius in instrumento, cuius capacitas variabilis est, continetur*. Imo, si quis esset, qui veram diuersitatem et rationem voluminum Mercurii per varios gradus caloris dilatati assignare sciret: nullum tamen commodum ad hoc negotium inde redundaret, quia naturae effectus ab experimentis non possunt separari, et vitrum semper dilatabile manet. Quod si igitur scalam graduum secundum longitudinem tubi, cuius capacitas ob crassitiem laterum inuariata supponi potest, iuxta veram Thesin diuidere velles: illa nihilominus numquam veram Mercurii contractionem indicatura esset; cum e contra, si quae differentia ex hac vitri proprietate oritur, quae tamen parua est, illa per omnes gradus, quas iuxta methodum

dum nostram ponimus, aequabiliter diffunditur, quia mutatione vel leuissima caloris Mercurii facta, vitrum similiter mutationem suam proportionaliter patitur.

§. 20. Secundo loco, quia nondum cognitum, eandem grauitatem specificam esse omnium aquarum, e. gr. Vistulae, Rheni, Sequanae, Tagi, Tiberis, Wolgae, Lenae, quae est fluiui Neuae: dubitandi caussa subnascitur, an per eundem caloris et frigoris gradum ebullitio vel congelatio harum aquarum effici possit? vnde vniuersalitati methodi multum decederet. Equidem, quamuis metum hunc vanum esse putauerim, si sermo est de aquis dulcibus fluminum magnorum, et quae non ex solis torrentibus aut fontibus mineralibus confluunt: tamen, quia huius noçi solutio vnice ab experientia dependet; operam dedi, vt diuersis in locis experimenta Thermometris nostris influerentur. Quapropter ante omnia *Cl. Dn. Gmelinum* de hac re certiore feci, et petii, vt Thermometris istis, quae ab Academia accepit, exploraret, quinam gradus caloris se manifestarent in aquis tractuum septentrionalium in itinere suo occurrentibus. Quodsi forte accideret, vt differentiae quaedam demonstrabiles orirentur, nulla melior afferri medela potest, quam vt obseruator, qui hisce rebus incumbit et delectatur, eadem methodo qua nos egimus, in rationem grauitatis specificae, quam Mercurius sub diuerso volumine in diuersis gradibus caloris aquarum suarum seruant, inquirat, et secundum illam thermometra sibi conficiat. Cognita autem ista ratione, differentiae quoque thermometrorum facile inter se combinari et ad vnā mensuram reduci poterunt.

COGITATIONVM PHYSIOLOGICARVM
DE CIRCULATIONE SANGVINIS

CAPVT III.

DE

QUANTITATE MOTVS SANGVINIS.

AVTORE

Iosia Weitbrecht.

§. I.

Postquam in capitibus antecedentibus (*) non solum motum sanguinis in genere, sed et potentias motum istum producentes contemplati sumus: natura rei ipsius poscit, ut animum quoque ad inquirendum in quantitatem huius motus adpellamus. Hoc enim omnis cognitionis physicae scopus est, ut non solum causas et effectus rerum intelligamus, sed ut quantitates illorum etiam mensurare discamus: siquidem ad eo maiorem perfectionis gradum scientia corporis animalis euehitur; quo accuratius phaenomena eius et proprietates determinare valeamus. Merito igitur quaeritur: *Quantus est motus sanguinis?* Quae quaestio vtut paucissimis verbis enunciata, adeo late tamen diffunditur, ut limites eius circumscribere atque adaequatam responsonem dare difficillimum sit. Solutionem igitur huius problematis impraesentiarum nec ausus sum dare, propter maximam, qua laboramus, datorum seu conditionum praecognitarum inopiam atque incertitudinem; neque etiam necessarium iudicaui, cum in iis, quae post *Iacobum Keilium*, *Cel. Iurinus* limatissimo iudicio

(*) Vid. Commentar. Tom. VI. Cap. I. pag. 276. et Tom. VII. C. II. p. 235.

iudicio determinavit, concessis quibusdam postulatis facile adquiescere possimus, donec maiores progressus in prae-liminarium propositionum acquisitione ope anatomicorum atque hydraulicorum experimentorum ac principiorum fecerimus. Sed hoc tantummodo agere propositum mihi est, ut in naturam tam quaestionis quam responsionis inquirendo, normam et cautelas aliquas detegam, iuxta quas vel mihi vel aliis circa hanc materiam versaturis progrediendum erit, ut ad pleniorum problematis solutionem olim perueniamus.

§. 2. Ad problema igitur soluendum ante omnia requiritur, ut recta methodo illud aggrediamur, deinde, ut certa quaedam data, seu conditiones, quae necessario cognitae esse debent, iuste determinemus. Methodus autem in eo consistit, ut, quemadmodum in omni motu, consideretur tam massa sanguinis mouenda, quam velocitas eius, quae ex spatio, dato tempore percurso, aestimari debet. Hic autem motus cum sanguini non sit insitus, nec fortuito generetur, eo ipso manuducimur ad indagandam quantitatem motus sanguinis ex corde dato tempore prorumpentis, et porro ad scrutandam mensuram potentiae cordis, quae isti sanguinis portioni motum imprimit.

§. 3. Recte igitur omnino egerunt isti bini Viri ingeniosissimi, ut separatim primo de celeritate sanguinis in vasis suis moti, et de quantitate huius motus egerint, tum vero in potentiam cordis inquisuerint, quae motum positus istis conditionibus, producere posset; quamvis uterque viam ab altero diuersam inceserit. Cum autem, ut *Cel. Iurimus* optime iudicat, et nos Cap. II. quodammodo

at-

attigimus, vix speranda sit determinatio virium cordis a priori: eo minus assensum sibi comparabunt illi, qui pro definienda vi cordis, quam ignorant, velocitatem sanguinis vt datam assumunt, quam tamen adhuc quaerere debebant; id quod a petitione principii parum abluat.

§. 4. Per quantitatem motus autem non intelligenda est illa, quae aestimari solet ex massa, quamlibet arteriae sectionem data velocitate datoque tempore transiente. Sed considerari debet motus totius massae sanguineae, quatenus in vasis suis omnibus iunctim sumtis data celeritate progreditur, plane vti *Cel. Iurinus* rem adgressus est. Illa enim velocitas tantum *relatiua* est atque ab hac necessario dependet. Vnde non sufficit dicere, velocitates esse in ratione sectionum reciproca, sed determinare oportet ex aliis principiis, quanta alterutra et imprimis haec posterior esse debeat.

§. 5. Porro, quia velocitas sanguinis intra vasa a quantitate motus sanguinis ex corde dato tempore prorumpentis dependet: huius portionis velocitas *methodo Keiliana* minus recte tamquam respectiua determinari mihi videtur per spatium ex quantitate dato tempore prorumpente per orificium aortae diuisa ortum. Haec enim absoluta *potius* velocitas esset. Multo melius igitur, meo quidem iudicio, *Cel. Iurinus* motum totius sanguinis determinauit per massam portionis vna systole prorumpentis, ductam in celeritatem, qua eodem tempore totam canalis sanguinei longitudinem percurrere potest. Quippe motus sanguinis naturalis id requirit, vt non solum vnica portio proiecta per spatium a *Keilio* indicatum progrediatur; sed et tota massa sanguinea eodem tempore in motum cipi et per spatium simile pro-

DE QUANTITATE MOTVS SANGVINIS. 337

progredi debet, vnde idem effectus oritur, ac si sola portio proiecta per totam canalis sanguinei cohaerentis longitudinem progressio fuisset. Vid. Cap. I. l. c. §. 25.

§. 6. Recte etiam a *Cel. Iurino* animaduersum est, velocitatem sanguinis non assumi posse aequabilem, id quod partim generationi motus, partim ipsi experientiae auersatur. Hinc ipse in indaganda potentia cordis velocitatem sanguinis vt variabilem considerauit. Huius inaequalitatis leges difficulter inuenientur, nisi actio cordis, hoc est, tam potentia eius quam adplicatio ad certos limites restringatur, qui calculo subiici possint. Ita e. g. cor posset considerari tamquam vas aqua plenum cum affixo tubo laterali, cuius orificium sit clausum, vt aqua quiescat. Aperiatu enim repente hoc orificium, aqua incipiet effluere celeritae minima, quae vero dato tempore maxima euadet, quo facto iterum minuetur: ex quo casu similis variatio velocitatis sanguinis ex corde prorumpentis quodammodo posset determinari. Sit e. g.

Vas cylindricum TEFV, initio vsque ad TV repletum, quod annexum habeat tubum horizontalem FDC. Tab. XXIII.
Figura II.

Ponatur vasis verticalis altitudo FV = a , horizontalis longitudo FC = b vasis verticalis amplitudo seu sectio in TV vel AB = m , sectio tubi CD = n . Durante aquae effluxu in tubo verticali iam subsederit aqua vsque in AB, sitque, posita BF = t , altitudo debita celeritati qua aqua hoc momento in CD effluit = z , ita vt sit celeritas aquae effluentis vt Vz : haec celeritas quouis momento ita determinabitur, vt sit

$$z = \frac{m m}{(m m - n n)(m m - 2 n n)} \left((m^2 - n^2) t + m n b - [(m^2 - n^2) a + m n b] \right) \left(\left(\frac{n t + m b}{n a + m b} \right) \frac{(m m - n^2)}{n n} \right).$$

V v

Tom. VIII. Hinc sequi-

sequitur, celeritatem aquae initio, cum est $t = a$, esse $= 0$; subito autem crescere vsque ad certum terminum, quem cum superauerit, iterum decrefcere. Ex quo etiam definiri poterit altitudo aquae FD in vase verticali, cui celerrimus effluxus respondet; quemadmodum haec omnia ex principiis a *Cel. Bernoullio* in Hydrodynamices Sect. III. stabilitis facile deducuntur. Reperietur autem altitudo

$$FB = \left(a + \frac{mb}{n} \right) \left(\frac{b + \frac{n}{m} a}{b + \frac{n^2 - n^2}{mn} a} \right)^{\frac{nn}{m^2 - 2n^2}} - \frac{mb}{n}.$$

§. 7. Non autem sufficit, vt hanc velocitatis variationem assignare valeamus, nisi etiam simul demonstremus, quousque illae in toto arteriarum et venarum tractu simul locum habeat. Oportet igitur prius satisfacere illis quaestionibus, quas in Cap. II. de massa mouenda proposui: an totus sanguis arterioso-venosus vi cordis in motum agatur? an vero arteriosus solus? et porro: an sanguis arteriosus omnis simul, an vero successiue moueatur? pro diuersitate enim responsionis diuersissimae quoque velocitatis et quantitatis motus aestimationes producentur. Si enim, quod mea sententia est, solus sanguis arteriosus tempore systoles vi cordis mouetur: tum in mensura motus *Iuriniana* loco canalis arterioso-venosi, solae arteriae substitui debent. Si porro iste sanguis arteriosus solus quidem, sed tamen simul eodem temporis momento moueatur: tum etiam supponere licet, quod velocitatis variatio in omnibus arteriis quoque aequaliter dispersa et simultanea sit. Quo concesso vera maneret propositio *Keiliana*, quod, si summa sectionum transuersarum ramorum, qui ex arteriis ori-

oriuntur ad sectionum truncorum vbique eandem rationem haberet; (posita ratione diuisionum $= A:B$, et numero diuisionum $= n$) velocitas in prima diuisione ad velocitatem in vltima foret $= 1:(A:B)^n$. Et in genere, posita ratione diuisionum et sectionum quacunque: foret adhucdum, eodem tempore velocitas sanguinis in ramo quocunque ad velocitatem in aorta, vti est sectio aortae ad summam sectionum omnium ramorum in iisdem ab aorta distantis. Verum etiam ac firmum persisteret *Iurinianum* illud Corollarium, quod datis quibuscunque arteriis binis aequalem sanguinis molem transmittentibus maior impetus sanguinis futurus sit in arteria a corde remotiore quam in propiore; quod omnino paradoxon videri illis debet, qui contrarium statuunt. Quodsi autem ne solus quidem arteriosus sanguis in singulis arteriis eodem tempore, sed successiue, intra vnus systoles moram tamen, moueatur: tum non solum omnes hae propositiones, si non conciderent, pluribus tamen difficultatibus ac restrictionibus obnoxiae forent, sed et ne canon quidem ille generalis hydraulicus, quod velocitates fluidi intra canalem moti eodem tempore in ratione sint sectionum reciproca, in oeconomia animali locum haberet.

§. 8. Quia autem non solum *Cel. Iurinus* in literis suis humanissimis ad me datis me monuit, vt iterum iterumque perpendam, an non tempore systoles aliqua saltem portio ex arteriis in venas proiciatur; sed et forte alii de hac re nondum plane conuicti erunt: non possum, quin praeter ea, quae iam in Cap. I. et II. de hac et altera quaestione in medium attuli, ad sententiam meam roborandam hic adiungam considerationem phaenomenorum, quae partim in mo-

tu sanguinis maximo, hoc est, in vigore febris, et in motu minimo, nimirum in articulo mortis occurrunt. In illo enim sanguis non solum in ultimas arterias sed et in vasa serosa impellitur; in hoc autem, pulsante licet corde, ne quidem in arteriis minimis pulsus sentitur: id quod manifesto est iudicio, posse impetum sanguinis e corde prorumpentis nunc maiori nunc minori massae sanguineae imprimi, dari igitur terminum aliquem medium, ad quem motus mediocris seu naturalis perueniat, et probabile esse, hunc terminum circa connexionem arteriarum et venarum inueniri, vnde sequeretur, in motu naturali non modo solum sanguinem arteriosum vi cordis propelli, sed et hunc ipsum motum tantummodo successiue fieri, vtut interuallum temporis minimum sit, nec rationem assignare valeamus distantiarum, secundum quam ista successio fiat.

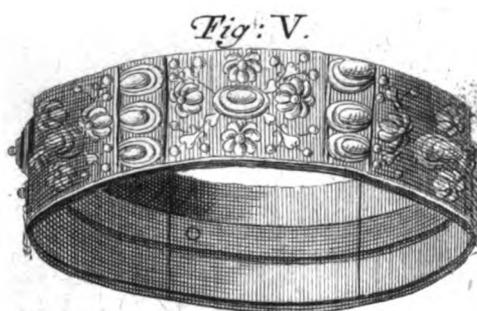
§. 9. Quod denique ad quantitatem actionis cordis atinet, omnis res eo redit, vt iusta et commoda (§. 6.) applicatio huius potentiae inueniatur, quae ad naturalem actionem cordis in sanguinem quam proxime accedit. *Cel. Iuvinus* actionem cordis ita animo concepit, quasi illa tota in vnum ictum concentrata esset; quae methodus quemadmodum aliorum institutum, qui actionem cum pressione ponderis alicuius comparant, multis parasangis antecedit, vtpote ad concipiendam atque aestimandam motus generationem multo fauorabilior ac certior: ita multo perfectior euaderet, si ad successiuam applicationem laterum cordis sese contrahentium et in sanguinem accumbentem impingentium reduci posset, quemadmodum in Cap. II. §. 23. indicaui; quippe quae consideratio cum actione naturali propius conueniret.

CLAS-

CLASSIS TERTIA.
CONTINENS
HISTORICA.

V 3

DE





DE
NUMMO MVSEI
IMPERATORII AMIDENO.

AVCTORE
T. S. Bayer.

Nullus fere ex omni antiquitate numus maioribus Tab. XXIV.
doctissimorum antiquariorum disputationibus no- Figura 1.
bilitatus fuit, quam is, quem produco, quemue
Ioannes Valens *inter rarissimos reponendum* iu-
dicavit; Ioannes Harduinus autem et fere etiam
Ezechiel Spanhemius, ex tanta prisci aeris copia vnicum
sui generis in gaza Regis Francorum superesse arbitrati sunt.
Eius *ἐκλυσιον* Spanhemius primus edidit ad Iuliani Cae-
sares (a), et fide praestantium apud Parisinos antiquario-
rum custodumque Regii cimeliarchii subnixus EMI. in eo
legentium, ad Emisenos retulit. Mox idem illustris vir,
difficultatum, quibus haec sententia vrgeatur, magnitudi-
nem cernens, cum praeterea litteras illas in numo exesas
parum agnosci moneretur, posterioribus curis (b) senten-
tiam retractavit, atque pro EMI. legendum censuit EΔE.
vt pro Emiseno numo euaderet Edessenus. Anno post
Har-

(a) p. 96. (b) Ad Iuliani Caesares p. 491. Confer eundem de
Praestantia et vsu numismatum Tomo I. p. 603. seq.

Harduinus in numis vrbium et populorum illustratis (c) vtramque opinionem repudiavit. Emisam item, vt Spanhemius, a Mesopotamia, in qua numus fuit cufus, nimis remotam priori sententiae repugnare monuit, altera autem in sententia, *pereruditi*, vt aiebat, *Spanhemii*, non potuit acquiescere, quod . . . MI. *conspicue legatur, corrosa modo littera, iniuria hominum potius, quam vetustate*. Igitur AMI. legebat, vt esset Amida Mesopotamiae. Contra Iohannes Valens (d) concedebat quidem, *ingeniose* hoc excogitatum esse, at primam litteram *paullulum detritam* adseuerabat, ergo numum ad Emisenos relatum sic descripsit:

Tab. XXIV.
Figura 2.

ΑΥΤ. ΚΑΙ. ΑΥ. ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ. C. *Alexander laureatus, medio corpore tenus, dextra hastam, humero laevo clupeum gerit.*

ΕΜΙ. ΚΟ. ΜΗ. ΜΕΚΚΟΠ. *In area A. Εμισῶν Κολωνίας Μηλοσωόλεως Μεσσοποταμίας πρώτης. Mulier turrita et velata, insidens rupibus ante arulam, dextra spicas tenet.*

Harduinus Valenti in Antirrhethico diligenter respondit, coniecturamque suam vindicavit (e). Spanhemius ea, quae contra se Harduinus dixerat, aegre tulit: nam et aliae simultatum inter eos causae erant complures. Itaque cum de praestantia et usu numismatum postremo labore et eximio tractaret, defensionem sui suscepit (f). Viderat interim et ipse numum, cum Electoris Brandeburgici legatione apud Regem Franciae defungeretur. Igitur negabat, vel a se ipso, vel a Federico Morello, cuius in his

stu-

(c) p. 37. ed. Paris 1684. (d) In numifinatis coloniarum et municipiorum parte altera p. 120. (e) p. 92. (f) Tomo I p. 604.

studiis exercitationem, quanta fuerit, nemo ignorat, litteras MI. atque omnino priores tres vel quatuor agnosci potuisse, Harduino autem et aliis, ipsi, puta, Vaillantio gratulabatur, *quibus tam perspicaces et lyncei oculi contigissent.* Obiicit deinde nonnulla Harduino, ne ei Amida sua nimis placeret, tum Valenti negotium faceffit eique vertit vitio, quod *non ad numi ipsius a se probe et accurate inspecti fidem, eius ectypum protulisset, sed sicuti ad Iuliani Caesares ab ipso vulgatus fuerat.* Ad postremum, vbi vtrumque coniecturam suam de Edeffa adferuerat, moderati animi insigne documentum dedit. Non enim diffitebatur, si quid earum litterarum in numo legi possit, ob disertam Mesopotamias mentionem ad nullam urbem melius, quam ad Amidam, *cum eruditissimo Harduino* referri posse. Quid interim Ioannes Harduinus? Cum numi urbium et populorum illustrati in eius operibus selectis iterum ederentur, totum hoc suum de Amida vrbe expunxit (g), hunc vero numum inter Emisenos strictim recensuit: EMI. KO. MH. MECCOII: *et in ipsa area A.* Hoc est: *Emesa colonia metropolis Mesopotamiae, prima: numus est Seueri Alexandri in thesauro regio.* Hoc quid erat aliud, quam castra sua deserere et in Valentis fidem atque clientelam se conferre? Enimvero dissimulauit Harduinus, ne quis hoc ipsum persentiret. Ea causa Iobertus quoque, qui totus ab Harduino pependit, omniaque eius *παράδοξα*, tamquam inuenta perpetuitate digna consecrauit, studiose cauit, ne

Tom.VIII. X x quid

(g) Amstelodami A. 1709 p 15. 54 Librarius omnem operam in hac editione nauatam in se recepit: fenserunt tamen eruditissimi viri, et praecipue Maturinus Veysiere Lacrofus V C. in Vindiciis veterum scriptorum, ipsam Harduinum emendationum omnium auctorem, sub librarii nomine latere voluisse.

quid sibi de Amida elaboretur. Ceterum non est infrequens in numis, ut pro ratione aciei, qua cuiusque potent oculi, et vel lucis, vel umbrae incidentis, alio alius plus minusue in obtritis vestigiis cernat. Quam ob causam tamen me Harduini sententia oblectabat, tamen citius Valenti, ut exercitatissimo viro credere me oportuit, adfirmanti, EMI in numo exstare, quam Harduino neganti, primam litteram apparere. Ergo in historia Osrhoëna (b) mei experimentum feci ingenii atque ut Valenti opem ferrem, Mesopotamiam aliam inter Orontem et Chrysorrhoeam coepi constituere. Vix tamen pedem quasi porta ad capiendam nouam prouinciam extuleram, cum iam eundem referrem et Harduino me adiungerem, neque enim animaduerteram, eum signa sua reliquisse.

Praeter numi auctoritatem oculorumque, quae cuique obtigit, aciem, rationes quoque fuerunt, quibus quasi armis in hoc certamine summi viri congressi sunt, quae iucundae nobis spectatu et ad operam nostram persequendam commemoratione dignae videntur. Hic Spanhemius et Harduinus initio plane consentiebant, hoc in numo non potuisse signari Emisam, quippe quod extra Mesopotamiam longe ab Euphrate, proxime ad Libanum montem et ad Orontem fluium esset reiecta, siue eius prouincia Cyrrestica fuerit, siue Apamene, siue magis Phoenicia: nam scriptores veteres inter se dissentiunt. Urgebatur Valens: tamen dissimulabat. Tamquam nihil ad se, aut ad causam pertineret, quod in hac quaestione vim habebat maximam, cum, inquebat, *Emisa Mesopotamiae in hoc numo tribuatur, fecit, ut duas in hac prouincia, sicut*

(b) p. 188. 189.

sicut in aliis proximis, metropoles constitutas esse crediderimus, unam cis Euphratem, alteram trans fluuium: quod confirmare videtur littera A. in area numi, quam interpretati sumus, $\pi\rho\omega\lambda\eta\varsigma$, ut in Carrhenis Δ pro $\Delta\epsilon\upsilon\lambda\acute{\epsilon}\gamma\alpha\varsigma$ non semel obseruauimus. Emisa quidem prima metropolis constituta, Carrhae uero urbs, secunda. Tantum apud Valentem potuit litterae unius a se lectae fiducia. Non diffitebatur Spanhemius, quibusdam in prouinciis metropoles fuisse duas, at mirabatur, quemadmodum Valens Mesopotamiae metropolin daret, quae ipsius confessione, cis Euphratem in Phoenicia esset adscripta. Deinde ei in memoriam reuocabat Edessam, quae sub eodem Alexandro Seuero, item ut Carrhae, metropolis diceretur in numis, et uero sine controuersia Mesopotamiae. Cum autem etiam numum Carrharum sub M. Aurelio $\text{Μη}\rho\epsilon\pi\acute{o}\lambda\epsilon\omega\varsigma\ \pi\rho\omega\lambda\eta\varsigma$ dignitate insignitum obiecit, temporum diuersitas et fortunae istarum urbium uicissitudo facit, ut hac re quemquam minime oporteat commoueri. Contra Spanhemii coniecturam nihil admodum Valens: Harduinus uero primum litteras MI. conspicue positas opponebat, tum consuetudinem in numis Edessenis obseruatam, in quibus, inquit, $E\Delta E$. pro $E\Delta E C C A$. uel $E\Delta E C C A I \Omega N$ (i) haud temere uideas. Non inuictum hoc, neque tamen prorsus contemnendum illarum in numis regionum erat, si praesertim totum auersae typum huicce notationi adiungas, qualis neque apud Ioannem Valentem,

X X 2

tem,

(i) $E\Delta E C C H N \Omega N$, ut Spanhemius in Harduini sententia commiter emendauit, non $E\Delta E C C A I \Omega N$. Sed confundit etiam alias Harduinus Edessacos in Macedonia et Edessenos in Mesopotamia. Vide Historiam Osrhoënam p. 122.

tem, neque apud Henricum Norisium (k) aut apud alios in Emisenorum numis reperitur. Ad Edeffenos enim quam proxime accedit, nisi quod astra desint. Spanhemius numum a Ioanne Valente editum inscriptumque ΚΟΛΩ. ΜΑΡ. ΕΔΕ. Harduino rependit. Est apud eundem Valentem numus cum Elagabali $\pi\epsilon\sigma\lambda\omicron\mu\tilde{\eta}$ et vultu solis radiati, inscriptus EMI. ΚΟΛ. *Emisa colonia* et exstant quoque in aliarum urbium numis huiuscemodi formae exempla. Quamquam non est reticendum, propter nimiam elegantiae et concinnitatis studium antiquarios plerosque effecisse, ut eorum in operibus haud scias, *plusne* huicce rei et suo iudicio, quam veritati inferuicrint. Facile contingere potuit, ut, si quae litterae, quemadmodum innumeris in numismatibus accidit, margine inter cundum detruncato abscissae sunt, ab antiquariis deinde sine notatione relinquerentur, tamquam si deessent nullae. In hoc instituto veteres numos exprimendi tamquam integros, nusquam tuta fides. Qui numos Graecos copiose tractarit, quid dicam, quantumque detrimenti ea ex concinnitate importatum sit, secum velim recolat. Antonius Pagius, grauissimus idem et aequissimus censor, cum a numo Traiani, ut eum Carolus Patinus ediderat, prope circumuentus atque in angustias esset redactus, deinde autem eum a Toinardo et Valente cognouisset, Hadriani esse, *hinc*, inquebat (l) paullo quidem commotior, sed ab iusta indignatione, *intelligere est, quantum obsint eruditioni antiquarii, dum, quae in numis et inscriptionibus habentur, non satis accurate describunt, et, quod peius,*

ali-

(k) In Epochis Syro Macedonum p. 95. (l) In Critica Historica Chronologica Tom. I. p. 107. ed. Antwerp. Confer eundem p. 235.

aliquando corrumpunt, correctionis praetextu, ne quidem lectores monendo, quid in iis immutarint. Sed crebra illa eius querela fuit, neque enim quisquam magis sentire hoc detrimentum potuit, quam magnus Pagius.

Inter haec sententiarum diuortia atque diffidia, Harduini quoque fuit, coniecturam suam de Amida stabilire: neque enim satis hoc ei fuit visum, nullius nomen vrbi^s in Mesopotamia, illud MI. initio vocis continere, nisi simul demonstraretur, Amidae vrbi et coloniae et metropoleos dignitatem conuenire posse. Hoc iterum difficile fuit factu. *Ad Amidam, inquiebat, e Mesopotamiae primariis urbibus numus hic attinet, de qua saepenumero Ammianus.* Quod nemo erat inficiaturus, neque enim obscurum est, Ammiani Marcellini aetate inter insignia contra Persas propugnacula Amidam fuisse, id nobis videlicet demonstrare potuit Harduinus. Sed producitur quoque ab eodem ex Concilii Constantinopolitani primi subscriptionibus: *Mareus Amidensis prouinciae Mesopotamiae.* Et ex Hieroclis notitia Ecclesiastica: *Ἐπαρχία Μεσοποταμίας τῆς ἀνω ἢ τοῦ τελέτης Ἀρμενίας, Ἀμιδᾶ μητροπολις.* *Eparchia Mesopotamiae superioris, seu quartae Armeniae, Amida metropolis.* Addit denique: AMID. in numis Constantini M. occurrit, qua voce signata Amidae moneta intelligitur. Inscriptiones Concilii Constantinopolitani dignae sunt relatu, vt, quae A. C. 381. Theodosio Imp. qui status ecclesiarum in Mesopotamia fuerit, demonstrant. Erat autem sic distributa in duas prouincias (m).

X x 3

Pro-

(m) Conciliorum ab Harduino editorum Tome I. p. 815.

*Prouinciae Osrboënae.**Eulogius, Edeyenus.**Vitus, Carrensis.**Abramus, Batnensis.**Prouinciae Mesopotamiae**Mareas, Amidensis.**Bathes, Constantinianensis**Iobianus, Imeriensis.*

In concilio Ephesino, epistolae episcoporum ad Cyrillum Alexandrinum subscripsit (n), *Asterius episcopus Amidae Mesopotamiae*. Et cum deinde ad partes Ioannis Anuocheni sese aggregasset, epistolae synodi orientalium et epistolae ad Antiochenos subscripsit (o), *Asterius episcopus Amidae, metropolitanus*. In Concilio Chalcedonensi (p): *Symeon episcopus Amidae, metropolis Mesopotamiae* (q). Nondum tamen vel sic aetatem Ammiani sumus antegressi. Nam Hierocles quanto deinde recentior scriptor est? Habemus etiam luculentiorum, Nilum Archimandritam cognomento Doxopatrium (r), qui, cum tredecim sub Patriarcha Antiocheno metropoles recenset, tertio loco τὴν Εδέσης ponit et sub ea episcopos undecim, decimo loco τὴν Ἀμίδης et sub ea octo episcopos. Sed ex Syris scriptoribus de dignitate ecclesiastica Amidenae urbis diligentissime egit (s) Iosephus Simonius Assemanus, quem honoris causa nomino. Quod Harduinus AMID. ex numis Constantini M. subiunxit, ut Amida ante Constan-

(n) Conciliorum ab Harduino editorum Tomo I. p. 1351. (o) lb. p. 1533. et 1560. (p) lb. Tomo II. p. 269. (q) Confer Cardinalem Norisium de epochis Syro Macedonum p. 111. (r) Apud Leonem Allatum de consensione ecclesiae Occid et Orientalis p. 166. (s) In dissertatione de Monophysitis voce *Amida* et Tomo II. Bibliothecae Vaticanae p. 48.

stantium Imper. videretur celebrari, id, quemadmodum fieri potuerit, non video. Quis enim vsquam eiusmodi numum vidit? Ne Harduinus quidem in numis seculi Constantiniani vel vestigium aliquod huiusce numi reliquit impressum. Manet igitur Amida ante Constantium Imper. obscura. Tanto fidentiori animo Valens aduersarium est aggressus: *Harduinus*, inquit, *numum ad Amidam Mesopotaniae in Conciliis metropolin reuocauit, quasi in imperio idem esset, qui postmodum in ecclesia fuit ordo. Amidae ad Tigrim in numis nulla mentio, cuius frequens esset, si metropolis dignitate hoc tempore ornata fuisset, sicut crebra est Emisae.* In eandem sententiam Spanhemius, sed mitioribus verbis differuit. Harduinus vero non ita imperite egit, vt plane contemni a Valente mereretur. Tametsi enim ab Imperatoribus Christianis quaedam metropoles in ecclesia sint constitutae, quae antea in orbe Romano eadem dignitate minime censerentur, tamen haud facile vetustas imperii metropoles, praeterquam graui de causa neglexerunt, celebritatem vero urbium vel maxime spectarunt. De hac re insignis Doxopatrii illius locus exstat (t), quem, quia paullo est prolixior, lectores mei apud Leonem Allatum requirent. Denique cum Valens tum Spanhemius, omnium in imperio metropolium eandem videntur conditionem statuisse, cum in quibusdam id *ἀξιωμα* nullam prouinciae diuisionem, sed honorem tantummodo vrbi tributum comprehendat. Itaque quoties Harduinus ad notitias ecclesiasticas prouocat, quod saepe facit, priscae celebritatis, ni aliunde eadem fuerit testator, grande fieri praeiudicium sensit. Cum autem illius ad-

uerfa-

(t) l. c. p. 160. l. 10.

uersarii numos alios Amidae vel urbis, vel coloniae et metropoleos requirant, utcumque iure factum videri possit, tamen summa est iniuria. Nam, qui haud raro numos unicos concedi sibi postularunt, iidem Harduino, ut hunc haberet Amidae urbis unicum, pro imperio interdixerunt. Crebra, inquit Valens, Emisae metropoleos in numis facta est mentio. Nempe, ut confitetur Valens, tamquam provinciae Mesopotamiae nulla. Hic, si quis dicat, numus est unicus Emisae in quo mentio sit facta, intercedam pro Harduino eodemque iure, Amidae unicum esse, postulabo.

His fluctuationibus iactatus fuit numus. Nunc eundem ex Museo Imperatorio exhibui multo luculentiorum, in quo illae maxime litterae, quae tantum barbarum pepererunt, ante alias sunt conspicuae. Est autem in eo:

Imperator Caesar, Marcus Seuerus Alexander laureatus, fascibus ad cervicem fluitantibus, loricated, sinistra clupeum tenens, neque dextera, neque hasta signata, ut in Parisino aiunt cerni . . . V. K. M. A. C. ΑΛΕΞΑΝΔ. . . Αυτοκρατορ Καϊσαρ Μάρκος Αυρηλιος, Σευηρος Αλέξανδρος.

Figura muliebris, sedens in rupe ante arulam, sinistram rupi imponit, dextera protendit duas aristas, ad pedem fluvii genius medio corpore procedit: AM. KO. M. . . ΜΕΥΚΟΠ. in area A.

Tum caput, tum navis in hoc numo aliquam diversitatem a Parisino ostentant, sed qualis ferme esse solet in numis eadem in moneta, non vno cufis praelo Littera A in nomine urbis sic propemodum signata est uti Α sic quoque

quoque in ceteris huius numi vocibus, quod item in illius aetatis numis frequentissimum est. Legimus autem plane et perspicue, nemo ut ambigere possit, AM Punctum ad caput τ̄ M, sic factum est, ut mihi initio I paruum fuerit visum. Ast nulla aciei intentione opus est, ut agnoscat, eundemque ad modum reliqua in numo puncta sunt facta. Quare, cum, qui numum gazae Regiae Parisiis inspexerunt, in eo MI. clarissimis ductibus litterarum cerni testentur, potuit isthuc alio ab praelo accedere: cum vero neque Spanhemius, neque Morellus, extremam litteram deprehenderint, potest etiam fieri, ut illud ipsum punctum alios fecellerit. Fuit in Mesopotamia Αμμᾶα, teste Claudio Ptolemaeo (u), sed in mediterraneis, cum huius numi urbem ad fluvium aliquem celebrem fuisse, etiam ipso ex numo demonstrari queat. Et huius quidem *Ammae* memoria nullo alio testata fuit monumento, ut, quae urbs fuerit, explicare queam. Nihil iam reliquum est, quam, ut Amidam in numo signari, cum Harduino, immo eodem etiam repugnante statuamus.

Video nihilo minus, quod in me onus susceperim: subeundum tamen esse sentio. Principio, ut fassus sum antea, ita prae me nunc fero, ante Constantium Imper. nullo in scriptore istius nomen urbis reperiri. Ipso imperante Constantio, Ἐξήγησις ὅλα τῶ κόσμου ab homine Syro, et, ut videtur, mercatore Antiocheno scripta fuit, cuius vetus interpretatio Latina exstat a Iacobo Gothofredo primum edita. Nondum aliqua ibi Amida: tan-

Tom. VIII.

Y y

tum

(u) p. 143. Ita etiam in Manusc. Segueriano apud Montefalconem in Bibliotheca Consoliniana p. 711.

tam excellentes vrbes et Persarum viribus metuendae Nisibis atque Edéssa. In Geographo Rauennate, qui illo fuit posterior, utpote in vno omnium, quotquot sunt, corruptissimo scriptore, potest alicui *Amaude* (x) *Amida* videri, quamquam Manuscr. Vrbinatense hic *Amande* (y) habet, quod ab illa voce abhorret. Forte huius Rauennatis auctoribus Αμῶδης siue Αμῶδης ex Procopio Caesariensi cognita fuit, de quo castello Henricus Valefius ad Ammianum Marcellinum, quod satis sit, dixit (z). *Fuisse* autem ante Constantium Imp. Amidam, Ammianus testis est idoneus. Neque adeo miror, ante illum fere scriptorem mentionem Amidae a nullo esse factam. Nam omnium vrbium ad Tigridem sitarum vetus fama sub tanta clade veterum monumentorum et ruina sepulta, aut subobscura est, aut nulla. Huc accedit, quod vrbes in Mesopotamia propter et indigenarum et colonorum diuersitatem multa habuere nomina, aliter eas Graecis, aliter Syris, Arabibus, Persis, aliter denique Armenis nuncupantibus, ex quibus nominibus alia aliis temporibus scriptoribusue insignitiora fuerunt. *Amida* vtique Arabicum est

أميد *Amid*, *Onusta*, vt *navis oneraria*, quae plena est, dici solet (a). Inter Syros Gregorius Bar Hebraeus Malatiensis etiam *Amid* scripsit (b). Ceteri Syri, vt Dionysius Patriarcha (c), Georgius Iacobi Sarugiensis discipulus (d), Chronicon Edessenum (e), Faustus Naironus Maronita (f), *Amed* pronunciant. Arabes quoque *Amed* et *Emed*

(x) p. 70. ed. Porcheronis. (y) p. 5. ed. Hudson. (z) p. 154. ed. Gron. (a) Golius in Lexico p. 155. Antonius Gigzaeus et Mesgnien Meninsky hac voce destituuntur. (b) In Asmani Bibliotheca Vaticana Tom. II. p. 322. (c) Ib. p. 48. (d) Ib. Tom. I. p. 288. (e) Ib. Tom. I. p. 395. (f) In Euoplia fidei p. 46. et in dissertatione de Maronitis p. 49.

Emed dicere, *Assēmanus* testatur (*g*). Inde nonnulli existimarunt, apud *Cedrenum* et *Ioannem Scylitzen* (*b*) Σα-
 ρακηνηκὸν Ἐμῆτ *Amidam* dici, quod, prouti in fabula,
 perinde duco, vt quisquē accipiat. *Turcis* hodie, tametsi
Harduinus negat, قرا آمد *Kara Amid*, a moenibus ex
 nigricante saxo ductis. *Iacobus* quoque *Golius* animad-
 uertit (*i*), et ديار بکر *Diâr bekr*, quod nomen toti pro-
 uinciae tribuitur, in qua veluti metropolis est, et آمد
 علي دجلة *Amid ali Digjlat*, seu, *Amidam ad Tigrim*
 nuncupari. Quod vero vrbi nomen fuerit *Graecum* a
Seleucidis impositum, non inuenio. *Petrus Montanus*
 quidem, vetus *Amidae* nomen visus sibi est in *Ammaea*
Ptolemaei reperisse, eumque secutus est *Assēmanus* in dis-
 fertatione de *Monophysitis*. Hanc opinionem iam reie-
 cit *Iacobus Golius* (*k*), quod *Ammaca* a *Tigri* nimis fue-
 rit remota, et *Amidam* potius cum *Ptolemaei* Δόρθηλα
 (in *Manuscr. Segueriano* est (*l*) Δόρθηλα) comparari posse
 censuit, quod nostrum non est, vel refellere, vel plane
 adseuerare. *Persae* quidem mirificam *Amidae* vetustatem
 praedicant, cum a *Thahamurathe* primae dynastiae *Persarum*
 tertio rege conditam referunt (*m*). Quis autem his
 eorum fabulis immoretur? Gratiam tamen habeamus tam
Persis, quam *Arabibus*, quod situm vrbis definiuerunt,
 qualiscumque tandem eorum in obseruando fuerit industria.
Nassir Eddin et *Vlugbegus* sub gradu 73. 40' longitudi-
 nis, inde ab *insulis Fortunatis* *Amidam* collocarunt, et sub

Y y 2

gradu

(*g*) In dissertatione de *Monophysitis*, voce *Amida*. (*b*) *Tom. I.*
p. 135. (*i*) *Ad Alfraganum p. 241.* Vide *Herbelotum* quoque. (*k*) *l. c.*
 (*l*) *Montfauconii Bibliotheca Coisliniana p. 710.* (*m*) *Herbelotus p. 108,*
Confer. p. 1016.

gradu latitudinis 38. 0', quae latitudo *Durbetae* Ptolemaei est: nam longitudo Ammaeae propemodum congruit. Eledrifus (n) Amidam ab Samofatis LXXVII. M. P. distare tradit, ab Nisibi, LXXVIII. M. P. ab Edeffa CLVIII. Et sunt aliarum quoque interualla urbium notata: sed vaga atque incerta omnis illa Eledrifi dimensio est. Ita autem propinqua fuit Armeniae Amida, ut ager omnis Amidenus vsque ad Antiochiam a nonnullis, in Armenia censeretur, teste Procopio (o).

Chronicon Edeffenum (p) ad annum suum 660, qui annus ab autumnno A. C. 348. iniit: بنا قوسطنطىوس مر اعدى مدىنبا قوسطنطىوس اعدى مدىنبا *aedificauit Constantius filius Constantini Amid ciuitatem.* Eodem modo Dionysius Telmariensis Iacobitarum Patriarcha ad illum annum. Assemanus iam monuit, Syrorum hoc esse, aedificatas tradere vrbes, quae moenibus ductis sint instauratae. Econtrario Ammianus Marcellinus (q): *Hanc ciuitatem, olim perquam breuem, Caesar etiam tum Constantius, ut accolae iugium possint habere tuiissimum, eo tempore, quo Antomnupolin oppidum aliud struxit, turribus circumdedit amplis et moenibus, locatoque ibi conditorio muralium tormentorum, fecit hostibus formidatam, suoque nomine voluit appellari.* Locus nobilis, sed aequae difficilis. Ioannes Harduinus et Iosephus Simonius Assemanus (r), ex eo concludunt, Amidam a Constantii nomine fuisse dictam, de qua re vehementer ambigo. Et dicit hoc quidem scriptor tenebri-

cosus

(n) p. 202. 203. ed. Paris. (o) De B. P. p. 49 et de Aedificiis p. 52 Confer locum ex Hierocle supra citatum. (p) In Bibliotheca Orient. Vati ana Tom. I. p. 395. Confer Assemanum ib. 26. et 196. (q) p. 159. ed. Gron. (r) In dissertatione de Monophysitia.

cosus verbis planis: sed Antinonupolis, cuius tamquam eodem tempore conditae recordatur, memoriae eius heic quoque subrepsisse videtur. Illa enim dicta fuit a Constantii nomine. Quae, malum, inquires, Antinonupolis? Quis veterum Romanorum Graecorumque eius mentionem coloniae iniecit? Habemus Edeffam in numis Antoninianam, cum colonia in eam ab Antonino Caracalla esset deducta, quod ipsum nesciretur, nisi numi scriptorum silentium explerent. Non haec tamen Marcellini Antinonupolis fuit. Fuit igitur alia colonia militum Romanorum, ab aliquo Antoninorum deducta, quantumuis scriptores et numi de ea reticeant. Quae fuerit, non inuenerunt, quemadmodum indicarent, vel Valesii fratres, vel Iacobus Gronomus. Et adhuc ignoraremus, nisi insignis locus in Chronico Edeffeno a me esset animaduersus, qui me ad Antinonupolim deduceret. Quemadmodum Ammianus Amidam et Antoninupolim eodem tempore a Constantio munitam fuisse commemorat, sic Chronicon Edeffenum, postquam ad A. C. 660 de Amida dixerat condita, ad A. 661. refert: بنا توب هو قو سطنطيوس اتلا مل بينا هي

Aedificauit etiam Constantius Telam urbem, quae olim Antipolis dicebatur. Antipolis vocabulum sine omni dubio ἐξ Ἀντωνεινῶ-λεως, vt Ammianus habet, corruptum fuit. Et huic vero vrbi Constantius nomen suum vel potius patris Constantini imposuit. Testis inter alios est Dionysius Telmariensis, quamquam vbique pro Constantio fratrem Constantium nominauit, qui error ab Assemano iam est no-

tatus. Ita autem Dionysius de Tela : وهو بنا لتلا
 سموز لت دبيت نهرين عل شمة قوسطنطينا فوليس شمة
et ille condidit Telam Mauzalut Mesopotamiae urbem suo-
que de nomine Constantinopolin appellauit. Iam hunc quo-
 que Dionysii errorem in nomine *Constantinopoleos* Afse-
 manus sustulit. Quemadmodum deinde in orientalium mo-
 numentis celebratissima est Tela, sic eadem in Actis Con-
 ciliarum et scriptoribus Graecis Latinisque denique etiam
 Syris quibusdam, nomine *Constantiniae*. Christophorus
 Cellarius ex Stephano Byzantio et Suida, vetus nomen
 Graecum huius urbis edidit *Nicephorium*. Quidquid sit
 de Nicephorio, non illa utique urbs Tela fuit, seu Con-
 stantinia. Nam Theophanes Byzantius ab Afsemano iam
 in hac quaestione testis productus, Constantiniam ad occi-
 dentem Nisibis stadiis 56, totidem stadiis ab Amida ad
 septemtrionem remotam prodidit. Qui situs ut in Prole-
 maei prouinciam Anthemusiam conuenit, ita a Nicepho-
 rio ad Euphratem penitus abhorret. Quare verissimum
 est, quod Afsemanus censuit (s), Anthemunta seu Anthe-
 musia et Anthemusiam eam priscis Graecis fuisse vocit-
 atam. Isidorus Characenus (t): εἶτα Χάρακα Σίδυ,
 ὑπὸ δ' Ἑλλήνων Ανθεμυσίας πόλις, ut in Hoescheliana
 editione et in Manuscr. Io. Albertus Fabricius in editione
 Hoescheliana: χαρακωασίνυ rescripit. Sed illud
 Χάρακα Σίδυ corruptum mihi videtur ex veteri Arme-
 nico aut Syriaco nomine urbis et potius sine emendatione
 relinquendum esse. Telae utique, ut Χάραξ diceretur,
 non conuenit, quippe quae non in valle, sed in colle
 sita fuit, vnde ei nomen *Tela* obtigit, quod Syriace *mon-*
tem

(s) In dissertatione de Monophysitis voce *Tela*. (t) p. 2. ed. Hudsa.

tem aut *collem* significat. Anthemusias vrbs nobilis. Tacitus, a Tiridate, quem Tiberius Caes̄ar Parthis regem dederat, captam refert (v). Capta item cum omni provincia Anthemusia a Traiano Caes̄are (u). Quid mirum, si a L. Veri Antonini legatis recepta, propter opportunitatem situs coloniae honore aucta et Antoninopolis nuncupata fuit.

Nunc, Ammiani loco illustrato, de tempore quo Amida a Constantio instaurata fuit, quaeremus. Ammianus tradit, a Constantio adhuc Caes̄are auctam fuisse et munitam. Nihil, vt ita sit, prohibet. Nam Constantium Caes̄arem a patre Constantino orienti fuisse praefectum, ex S. Rufo Festo (x) constat. *Constantinus*, inquit, *rerum dominus, extremo vitae expeditionem parauit in Persas, sub cuius aduentum, Babyloniae in tantum regna trepidarunt, vt supplex ad eum legatio Persarum accurreret, et facturos imperata promitteret: nec tamen pro assiduis eruptionibus, quas sub Constantio Caes̄are per orientem tetrauerant, veniam meruerunt.* Hoc Sex. Rufi loco id ipsum, quod diximus, Antonius Pagijs asseruit (y). Sed Iulianum Caes̄arem quoque testem habeo. Is enim ad Constantium, postquam eum a patre in Asiam translatum fuisse dixit (z), τοῖς Παρθυαίων ἔθνεσιν ἀντελάχθης μόνος. *Parthis*, inquit, *Medisque oppositus eras solus.* Deinde etiam res a Constantio in Melopotamia praeclare gestas praedicat. Nullo tamen adhuc Amida fuit loco, cum Constantinus M. decederet. Nam
in

(v) Annalium I. VI c. 41. (u) Sex. Rufus, Eutropius, Historia Miscella. (x) c. 26. (y) In Critica in Baronii Annales Tom. I. p. 433. (z) Orat. I. p. 13.

in diuisione imperii, vt Eunapius commemorat, Constantio Asia Orientisque imperium vsque ad Nisibin obtigit. Iam cum duorum itinere dierum citerior esset Nisibis, quam Amida, si iam tum Amida in celebritate fuisset, ad eam citius Eunapius, quam ad Nisibin, imperii fines porrexisset. Sed non admodum hoc validum est: cum eundem in modum quaeri possit, cur Eunapius imperium Romanum non ad Tigrim fluium protenderit, quod inde a Diocletiano adhuc quinque prouincias Transtigritanas tenebat. Nempe in nobili aliqua vrbe desinere cupiebat sophista, Amida autem obscura erat. Nihil hoc tamen impedit, quin Chronico Edeffeno suum annum *Amidae* penitus absolutae perfectaeque concedamus, quod propter Antoninopolin pariter instauratam Ammianus tempora susceptrae consummataeque munitionis permiscuisse videtur. Sunt utique auctores, qui initia imperii Constantiani maximis operibus nobilitata confiteantur. Saepe Tigrim ponte ex ratibus strato traiectum Iulianus Caesar testatur (a), ἦρθη δ' ἐπ' αὐτῷ Φερίγια, castella quoque ad eum excita sunt. Addit deinde, Constantium agrum Transtigritanum lite vastasse, Persis ne quidem prospicere audentibus. Ea quoque initia imperii Libanius in Basilico magnifice extulit, vbi Constantium laudat (b), πόλεις, τὰς μὲν κινῶντα, τὰς δὲ καλοκίζοντα. Denique locus et plane illustris est in Themistio Euphrada, cum Constantium item laudat (c), ἀνακαθηράμενον ἢ Φραζάμενον τὰ πρὸς ἑω, oriente per-purgato et communito contra tyrannos esse profectum, et quidem ἀπὸ τῆς τήριδος ἑρείθρων τὰ ἕωλα τρέψαντα

εωι

(a) Oratio. I. p. 22. (b) Oratio. in Imperatorem Constantium p. 298 ed. Petauii. (c) p. 302.

ἐπὶ ἐσπέριον ὠκεανόν, *ab ipsis Tigridis fluentis arma vertisse ad occidentalem oceanum.* Profectus est Constantius Imp. aduersus Magnentium et Vetranionem A. C. 350. sub auctumnus. Anno ante perfecta fuerant munimenta Amidae, eodem Telae seu Constantinae. Nihil aptius ad Themistium illustrandum dici potest. Et cum nocturnum ad Singaram praelium, A. C. 345. commissum fuit, hac clade illata, Constantius excitatus fuisse videtur, ut quam firmissimam ad Tigridem arcem Amidam esse vellet, si quid secus aliquando Singarae accidisset.

Dicat mihi nunc quispiam, hanc tu tamen urbem nullis ante Constantium monumentis celebrem, et coloniam militum Romanorum et metropolin sub Alexandro Seuero fuisse largieris? Nempe id mecum constitui largiri, cum huicce numo fidem tribui conveniat. Cuius auctoritate scriptoris tot vrbes in Mesopotamia et colonias exstitisse et metropoles, ad hunc diem testatum fuit? tamen vbi numi testes producantur, dubium esse potest nullum. At multi de ceteris numi exstant: videlicet, si, ut de Amida, singuli, id ipsum, quod propter multitudinem credimus, ut opinor, negaremus? Ab antiquariis vero nulla alia causa haesitatum fuit in hoc numo, quam, quod prima littera non esset perspicua, quo scrupulo sublato, nihil reliquum est, quam ut victas manus demus numoque fidem nostram adiungamus. Ut autem res ipsa maiori in luce versetur, Mesopotamiae fata animo recolamus, quae alibi quidem attigimus, sed ita, si ad Osrhœnam historiam pertinerent. Loginqua sub Lucullo, Pompeio, Crasso, Antonio non attingam. Zosimus iactat

Tom. VIII.

Z z

(d),

(d), a Caesare Augusto limites imperii Tigrim atque Euphraten constitutos fuisse, deinde prouincias eas in Romanorum potestate permanisse, donec Iuliani Imper. clade amissae, recuperari nequuerint. Nusquam tantum malae fidei vnum in locum aggestum reperiatur, quantum in hoc Zosimi est, qui, vt Iulianum laudibus efferret, ab ipsa impudentia pigmenta emendicasse videtur. Bene tamen haberet, si hoc vno in loco strenue ineptiisset Zosimus. Philo, qui Augusti temporibus fuit proximus, cum de legatione ad Caium Caesarem, illum, inquam, Germanici filium commentaretur et orbis Romani amplitudinem opesque ipso in exordio ornatissimis verbis praedicaret, sic factus est (e); ἀρχὴν τῶν πλείστων ἢ ἀναγκαστικῶν μερῶν τῆς ἀνατολῆς, ἃ δὴ ἢ κυρίως ἂν τις ἀνατολῆς εἰποι, δυσὶ ποταμοῖς ὁριζομένην, Εὐφράτη τε ἢ Ρήνω, τῷ μὲν ἀπολεμνομένῳ Γερμανίαν ἢ ὅσα θηρωδέετρα ἔθνη, Εὐφράτη δὲ Παρθύην ἢ τὰ Σαρματικῶν γένη ἢ Σκυθῶν. *Imperium plurimarum et maxime necessariorum partium orbis, quas quis proprie orbem terrarum appellare queat, duobus fluuiis definitum, Euphrate et Rheno, quorum hic quidem Germaniam ceterasque immaniores gentes disiungit, Euphrates autem Parthiam et Sarmaticos Scythicosque populos.* Et ne alios testes in hac quaestione legitima producam, iam eum vel Iulianus ὁ Θαυμασιος conuincet. Is enim, vt irridendum Augustum suis daret, mira eum modestia in Caesaribus producit, res suas strictim referentem, et isthuc vero etiam (f), ὅτι διὰ τὸ ὡς περ ὑπὸ τῆς φύσεως ἀποδομένα, Ἰστρον ἢ Εὐφράτην πάλαι μὲν ἐθέμεν. *Duos*

ter-

(d) I. III. c. 32. p. 334. ed. Cell. (e) p. 993. ed. Paris. (f) p. 326.

terminos, tamquam a natura tributos, Istrum et Euphratem posui. Quare, ubi Iuliano alibi (g) Tigris Persiae Romanique orbis ὄρος ἀρχαῖος vetus terminus dicitur, tempora Imperatorum, qui post Augustum fuerunt, respiciuntur. Neque tamen Mesopotamia semel acquisita Romanorum in potestate mansit, neque post Iulianum caesum, Romanorum in potestate numquam fuit. Hoc quidem nostrum nunc non est refellere, isthuc autem alterum S. Rufus breuiter confutat, qui, cum Mesopotamiam ab Hadriano Persis redditam dixisset, ita inquit (b): *sed postea sub Antoninis duobus Marco et Vero et Seuero, Pertinace ceterisque Principibus Romanis quater amissa, quater recepta Mesopotamia est.* A Traiano igitur, ut Rufus eodem loco testatur, *limes orientalis supra ripam Tigridis constitutus est.* Et alibi (i): *Antemusum optimam Persidis regionem accepit ac tenuit.* Scilicet Persidis regio Anthemusia, quod in Persarum ditone fuisset. Numus est insignis apud Angelonum, in quo Traianus paludatus inter duos amnes stat, puta Tigridem et Euphratem. ARMENIA. ET. MESOPOTAMIA. IN. POTESTATEM. P. R. REDACTAE. Rufus: *Prouincias fecit, Armeniam, Assyriam, et Mesopotamiam, quae intra Tigridem atque Euphratem sita, irriguis annibus instar Aegypti foecundantur.* Coloniam tamen ab eodem deductam inuenio nullam, credo, quod his aduersus Persas praefidiis in Mesopotamia uti nollet. Satis deinde constat, Hadrianum, ut de laudibus Optimi Principis detraheret, Mesopotamiam restituisse Persis, ut orbis Romani terminus iterum esset Euphrates. L. Antoninus

Z z 2

Verus

(g) Omt. J. p. 23. (b) c. XIV. (i) c. XX.

Verus per Statium Priscum, Auidium Cassium et Marcium Verum, Parthos, vt habet Chronicon Edesenum (*k*), subegit, hoc est, Mesopotamiam recuperavit. Prima, quod constet, colonia, deducta est Carrhas. Nam numus eius exstat, inscriptus: ΚΟΛ. ΑΥΡ. ΚΑΡΡΗΝΩΝ. *Colonia Aurelia Carrhenorum*. Ea deinde, L. Vero defuncto, cum Mesopotamia regenda daretur Auidio Cassio, a M. Antonino etiam metropoleos primae dignitate aucta est. Nam numus eius in cimeliarchio Regis Franciae (*l*): ΚΟΛ. ΑΥΡ. ΚΑΡΡΗΝΩΝ. ΦΙΛΟΡ. Μ. Α. ΑΥΡΗΛΙΑΣ ΚΑΡΡΗΝΩΝ ΦΙΛΟΡΩΜΑΙΩΝ ΜΗΤΡΟΠΟΛΕΩΣ ΠΡΩΤΗΣ, inscriptus exstat. In auersa: ΜΑΡ. ΑΥΡ. ΦΙΛΟΡ. Μ. Α. ΑΙΡ. ΜΑΡΚΩ ΑΥΡΗΛΙΩ ΦΙΛΟΡΩΜΑΙΑ ΜΗΤΡΟΠΟΛΕΩΣ ΠΡΩΤΗΣ ΑΝΝΟ CXI. Hunc annum Harduinus cum Septembri A. V. C. 924. et 11^o. M. Antonini coniungit, cuius sententiae causas edidit nullas (*m*). Nos cum illo Carrhenorum anno, A. V. C. 926. aut 927. certis de causis comparauimus (*n*). Deinde Carrhae sub Commodio cunctisque Imperatorum ceterorum in numis, tantummodo metropolis. Obseruatum est a Ioanne Valente (*o*) Singaram ad Tigridem in numo Seueri Alexandri ΑΥΡ. ΣΕΠ. ΚΟΛ. ΣΙΝΓΑΡΑ dici, itaque eidem videtur a Marco et Lucio Vero colonia ea ante Septimum deducta, vnde appellata fuerit *Aurelia*. Sed an superstiti Vero, an deinde a solo Marco definiri item non potest. Similiter in numo Philippi Nisibis *Iulia*, *Aurelia*, *Septimia* signata est. Res gessit in Mesopotamia L. Septimius Seuerus, nouasque deduxit colonias aut veteres in-

sta-

(*k*) l. c. p. 390. (*l*) Io. Harduinus in numis vrbium illustratis p. 80. ed. Amst. (*m*) Neque l. c. neque in Chronologia V. T. p. 636. (*n*) In historia Osihoëna p. 186. (*o*) Tomo II, p. 122. et p. 197.

stauravit. Singaram deducta est Legio II. Parthica, ut ex Gordiani et Gallieni numis Ezechiel Spanhemius demonstravit (p). De Nisibi testem habemus Dionem Cassium in epitome Xiphilini (q): ἀξίωμα τῆ Νισίβη δὲς, ἰσ-
 τῶν τὰυτὴν ἐπέτερεψεν. *Dignitate auxit Nisibin eam-
 que equitatus commisit.* Seu Septimiam coloniam equi-
 tum esse iussit. In duobus numis Iuliae Paulae, quae Elagabalo fuit nupta, CЄΠ. ΚΟΛΩ. ΝЄCIBI. Fuit ex Septimii coloniis etiam Rhesaena, quod ex vno Traiani Decii numo Ioannes Valens nos docuit (r). In eo est colonus cum bobus, inscriptio: CЄΠ. ΚΟΛ PHCAI-
 NHCIΩN. L. HIP. Explicuit Valens: Σεπτιμία Κο-
 λώνεια Πησαυνησίωv Διοσβανλος εἶη, seu anno 118, tam-
 quam si ea coloniae Rhesaenam deductae epocha fuerit,
 quae ad Hadrianum vsque ascendat. Sed multimodis haec coniectura suspecta est. Primum in sex numis De-
 cii diverso typo signatis, in quinque numis Herenniae Hetruscillae coniugis eius et in vno Q. Herennii Decii Caesaris illud L. HIP. occurrit. Quis sibi persuaderi
 patietur, eodem omnes anno cufos fuisse? Et ponamus, fuisse cufos anno tertio, eodem et postremo De-
 cii, quo anno cum Herennio Caesare consulatum gessit A. C. 251. Ita caput huius epochae ab A. C. 134. et 18. Hadriani exsurgit. Quod autem tantum Hadriani in Rhesaenenses beneficium exstare potuit, cum Mesopotamia ab eo, simul atque imperium adiit, fuisset derelicta? Quare cum alius huius coloniae numus partem Graece, partem Latine inscriptus est PHCAINHCIΩN. LEG. III. GAL ita similiter in illis factum putabimus,

Z z 3

vt

(p) Ad Iuliani orationem T. I. p. 171. (q) p. 320. (r) T. II. p. 122, 197.

vt colonia militaris deducta fuerit et Legio III. Gallica et Legio aliqua Hipponensis. His rebus in Mesopotamia sic constitutis, dicere potuit Septimius Imp. vt eum praedicasse auctor est Dio Cassius (s), magnam se regionem imperio adquisiuisse eamque propugnaculum Syriae effecisse. Antoninus Caracalla deinde regno Osrhoeno sublato, Edessam coloniam fecit. Ea haud ita multo post a Macrino Imp. metropoleos dignitate aucta fuit, vtique sic, vt priori loco esset, quam Carrhae, cuius vrbis numi deinde tantum μητροπόλεως, vel, vt sub Elagabalo, μητροπόλεως δευτέρας axioma gerunt. Quae autem potuit esse prima, nisi Edessa, vrbis tum vt maxime opibus florentissima? Nulla deinde alia ad id tempus in Mesopotamia metropolis fuit. Et argumentum huiusce rei in Historia Osrhoëna protuli, quod Edessam oportuerit grandi deuinctam fuisse beneficio, cum in Macrini numo, A. O. M. ΕΔΕΚΚΑ inscribatur, Αυτωνειανή Οπελιανή Μακρινιανή Εδεσσα, vt cum Harduino legi (t). Malim nunc quidem, *Antoniniana*, *Opeliana*, *Metropolis*, *Edessa*. *Antoniniana* ab Antonino Caracalla coloniae in eam deductae causa, *Opeliana* ob metropoleos honorem munere Opelii Macrini Imp. in eam delatum. Antoninus Elagabalus Mesopotamiam neglexit.

Hic status coloniarum et metropoleon ante Alexandrum Seuerum in Mesopotamia fuit. Is bellum cum Persis gessit, vt eam ab Antonino neglectam (u) recuperaret. Nota est Elagabali socordia, qui, dum lasciuiret,

totum

(s) l. c. p. 320. (t) In historia Osrhoëna p. 192. (u) Aelius Lampridius c. 56.

totum Romanum orbem fecit nihil. At hic nulla alia eius culpa fuit, quam quod aduersus necopinatos casus non satis vel praesidiis vel imperio muniuit. Nam, quoad Elagabalus fuit, non iam illas Parthorum vires existisse reperio, vt tot iactatae calamitatibus fractaeque intestino malo, Romanas prouincias ad se traxisse videantur. Vt-cumque rerum potentes exstiterunt Persae, tamen aliqua regni Persici species, arctis circumscripta spatiis mansit, sed obscura eius regni est memoria. Tandem Artaxerxes Persarum rex Parthos subegit. Inde iam epocha regni Persici, ab A. C. 226. Kal. Octobribus, exorditur, vt Antonius Pagijs demonstrauit. Iidem Mesopotamiam, nondum satis munitam ab Alexandro Imper. inuasertunt. Contra eos profectus est Aurelius Alexander Seuerus A. C. 229. Anno post, confecto bello, rediit et VII. Kal. Octobris triumphauit, Antonio Pagio iterum demonstrante. De hac expeditione Sextus Rufus (v): *Aurelius Alexander quasi fato quodam in exitium Persicae gentis natus: ipse Persarum regem nobilissimum Xerxem (Artaxerxem) gloriose vicit.* Apud Aelium Lampridium (x), Alexander in Senatu dixit: *Persas P. C. vicimus. Terras Interammanas, Mesopotamiae scilicet, neglectas ab impura illa bellua, recepimus. Artaxerxem potentissimum regem, tam re, quam nomine, fufum fugauimus, ita vt eum terra Persarum fugientem videret.* Herodianus his nonnihil obstreperit, nihilque fere, nisi cladem Romanorum exercituum, non inuitam tamen praedicat. Hunc, vt Alexandro minus aequum, tam Aelius Lampridius, quam Iulius Capitolinus nominatim perstringunt. Mouet me
mode-

(v) c. 22.

(x) c. 56.

modestia Alexandri, quae in eo omnium testimonio fuit summa, ut nihil eum gloriosius de rebus suis apud Senatum iactitasse opiner. Contra in clade Romanorum non modo Herodianus, bonus cum primis scriptor, sed multo magis Dio Cassius me mouet (y). Nihilo minus ex Herodiano quoque colligi potest, exercitum Alexandri, qui per Armeniam in regiones Tigridi adiacentes irrupit, res magnas contra Persas gessisse. Et Herodianus quidem, Artaxerxem multis suorum desideratis superiorem fuisse praedicat, tamen idem testatur, non minoribus eum claudibus suorum debilitatum in Persiam se recepisse, militem dimisisse, et pacem coluisse. Ετῶν ἕν τετῶν ἢ τετάρων ἡσύχασαν, ἃδ' ἐν ὄπλοις ἐγένοντο. Annos igitur tres aut quatuor quieuerunt, neque in armis fuerunt. Quartus ille annus in extremum Alexandri incidit. Quae illae tam voluntariae, tamquae diuturnae induciae, si illo bello Persae non fuerint repressi? Quid adeo Artaxerxes, neque cum Alexander mox ex Syria decederet, neque cum inde ad Germanicum bellum proficeretur, nihil tamen ausus est, nisi Alexandro superstite nimis validi in Mesopotamia Romani fuerint? Et Pagius quidem Persis scriptoribus hoc loco nimium tribuit (z), cum vanitatem eorum facile posset dispicere. Aiunt, Alexandrum solum multis stragibus *terram Elam et Hamat et Sinear, cum parte Ion et Palaestinam usque ad Arabiam* Persis cecidisse. *Elam* seu Persia, in potestate Romanorum numquam fuit: *Hamat* seu Syriam et *Ion* seu Asiae minoris partem et Palaestinam in Persarum manus minime peruenisse, ne opus quidem est, ut operose demonstrum. Qui tam foeda com-

(y) Vide Historiam Osrhoënam p. 193. seq. (z) Tomo I, p. 212.

commenti sunt, iis de *Sinear* seu Mesopotamia, quis credat? Quae cum ita sint, anno seu 229. seu potius A. C. 230. bello confecto, Amidam colonia deducta est, partem ut milites, qui ad Tigridem fortiter sese gesserant, beneficio illo reficerentur, partem quod etiam ad Tigridem defendendum hoc castellum fuit accommodatissimum. Sed hoc quoque fortium virorum honori datum, ut metropolis ea esset colonia et adeo prima. Quid autem? imminutane hunc in modum Edessae coloniae dignitas fuit, quam primam Mesopotamiae fuisse, alibi demonstrauius? Nempe ita commeriti fuisse videntur Edesseni. Cognosce mihi hunc locum Georgii Syncelli (a), quem Iosephus Scaliger in Excerpta Eusebiana, eo nondum edito, translulerat (b): Ουράνιος δέ τις ἐν Εδέσση τῆς Οσρονηῆς ἀυλοκράτωρ ἀναγορευθεὶς ἔ κατὰ Ἀλεξάνδρου τυραννί-
 σας διαφθέρεται. *Vranius quidam, qui Edessae in Osrhœna Imperator appellatus, contra Alexandrum tyrannidem inuasit, opprimitur.* Huius Vranii mentionem etiam Zosimus (c) iniecit: Ουράνιος δέ τις ἐκ θυλίας γένους ἀναρέθηθαι, παραχρηῖμα μετὰ τῆς ἀλυργίδος Ἀλεξάνδρῳ προσήχθη, *Vranius quidam ex seruili genere Imperator dictus, statim, ut erat purpuratus, ad Alexandrum deductus est.* Vranii nomen suspicor a Graecis, ex Persico huius hominis deprauatum fuisse. Dictum, opinor, *Vararanem*. Et ponit haec Georgius inter caedem Vlpiani et inter bellum Persicum media. Itaque Alexander iusta in Edessenos indignatione, metropoleos quidem atque coloniae honorem reliquisse, primatu autem multasse eos videtur.

Tom. VIII.

A a a

Sed

(a) p. 357. ed. Paris

(b) p. 84.

(c) l. i. c. 12.

Sed non diuturna ea felicitas Amidae coloniae et metropoleos fuit. Quales milites in Mesopotamia fuerint, cum Aurelius Alexander bellum gereret, Dio Cassius apud Xiphilinum (d) prolixè tradidit. Ita videlicet adfecti, ut pars ad Artaxerxem transirent, pars arma contra Persas ferre nollent, mollitia, licentia et impunitate corrupti. Igitur post Alexandri mortem defectio in Mesopotamia consecuta est, ut Edessa tamen in fide maneret, cuius solius urbis numus exstat cum Caii Iulii Maximi Augusti. $\pi\epsilon\sigma\iota\sigma\mu\eta$. Neque vero hoc bellum fuit apertum. Id enim denique, ut ait Iulius Capitolinus (e) *Gordiano iterum et Papiniano Coss. natum est*. Gordianus Aug. II. Cos cum Pompeiano (hoc enim collegae nomen) A. C. 241. fuit. Persarum rex, ut idem refert (f), et suis copiis instructus fuit et Romanis. Romanos ait, quos supra defecisse diximus. Colonias autem in Mesopotamia defecisse ex eo concludo, quod primus impetus belli iam ipsam Antiochiam inuasit, quo penetrare Persae non poterant, nisi Mesopotamiae maxima parte perfidia coloniarum intercepta. Eo denique anno, quo bellum Persicum natum est, Antiochiam a Persis et obsessam esse et captam, ex hoc vexatissimo quidem, at insigni loco Iulii Capitolini teneo (g): *Gordianus per Syriam in Antiochiam venit, quae a Persis iam tenebatur: illic frequentibus praeliis pugnavit et vicit, Sapores Persarum rege submoto et post Artaxerxem Antiochiam recepit, Carras et Nisibin, quae omnia sub Persarum imperio erant*. Hic istud,

et

(d) p. 375. (e) c. 23. (f) c. 27. (g) In Gordiano c. 16.

Ex iis, quae hoc loco dico, emenda et exple a me dudum dicta in Historia Osihœna p. 200. seq. ubi etiam $\mu\eta\mu\omicron\nu\iota\delta\omicron\nu\ \acute{\alpha}\mu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\mu\alpha$ Chesroes pro Sapore.

et post Artaxerxem mirifice torfit criticos, Gruterum, Casaubonum, Salmasium. At nihil aliud Capitolinus dixit, quam Antiochiam fuisse ab Artaxerxe captam, post vero receptam a Gordiano. Parum hoc quidem Latine, sed in Capitolino quis miretur? et duriores etiam sunt criticorum emendationes. Regem quorum hoc bellum gessit Gordianus, Sex. Rufus et Eutropius (b) Xerxem, Eutropii Metaphrasta Ἀρσην, id est, Artaxerxem vocant. Perperam hoc, quod eum ab Gordiano victum tradunt: victus est Sapore Artaxerxis filius. Attamen apparet, auctores habuisse, qui proderent, bellum hoc ab ipso Artaxerxe motum, et, ut Capitolinus indicat, ab eodem quoque Antiochiam captam fuisse. Id autem A. C. 241. contingere non potuit, cum iam decessisset Artaxerxes. Antonius Pagius quidem ad hunc annum: *Artaxerxes obiit currenti anno*. Sed calculus eum fefellit. Georgius Syncellus (i) Artaxerxem 15 annos regnasse refert. Accuratus hoc ex Persicis diphtheris Agathias Myrinæus (k), quem Pagius sequitur, annos 14. menses 10. Iam si, ut aequum est, cum Pagio, primum Artaxerxis annum ab A. C. 226. Kal. Octobribus exordiamur, A. C. 240. Septembri ineunte fati functus est. - Tum vero Sapore maiori vi Syriam inuasit. Zosimus (l): ἤδη δὲ τῆς βασιλείας ὕψους ἐν ὄχρῳ, Πέρσαι τοῖς κατὰ τὴν εὐάν ἔθνεσιν ἐπιέναι προσεδόκωντο, τὴν ἀρχὴν Σαπώρου παραλαβόντες μετὰ Ἀρταξέρξην. *Cum iam imperium (Gordiani) in tuto esset, Persae gentes orientales aggressuri expectabantur, cum Sapore post Artaxerxem regno esset potitus.* Quae cum ita sint, necesse est Artaxerxem ex-

A a a 2

tremis

(b) c. 14. (i) p. 360. (k) p. 134. (l) l. 1. c. 18.

tremis annis in Mesopotamia quaedam gessisse; Nisibin utique et Carrhas proditione, ut opinor, recepisse in potestatem, ut deinde fama eius bello, quod aperta vi gestum est a Sapore filio, immisceretur. Herodianus utique eum tantum, quoad Alexander vixit, quatuor admodum annos, quieuisse testatur. Sed dum motus intestini Romanos agerent, non antea de bello Persico cogitatum est, quam ubi confirmato Gordiani imperio, Sapores non iam astu et corruptione coloniarum rem ageret, sed maximo apparatu impressionem faceret in Syriam. Contra Saporem Gordianus Augustus profectus est, non A. C. 241. (nam non me modo, sed etiam Antonium Pagium, acutissimum Chronologum locus ille Capitolini fetellit) sed ut differte testatur alio loco Capitolinus (m): *Praetextato et Attico Coss. Gordianus aperto Iano gemino (quod signum erat indicti belli) profectus est contra Persas cum exercitu ingenti, et tanto auro, ut vel auxiliis vel militibus facile Persas vincere posset.* C. Vettius Atticus, et Asinius Praetextatus Coss. A. C. 242. fuerunt. De rebus a se gestis sic Gordianus Aug. ad Senatum scripsit (n): *Persas, ut breui multa connectam, ab Antiochenis ceruicibus, quas iam nexas Persico ferro gerebant, et reges Persarum et leges amouimus: Carrhas deinde ceterasque urbes imperio Romano reddidimus: Nisibin usque peruenimus: et, si dii fauerint, Ctesiphonta usque veniemus.* Illi reges iterum in tam obscura fama non modo Saporis, sed etiam Artaxerxis nos admonent. In Mesopotamia igitur Gordiano Imp. numi signati sunt Edeffae coloniae et metropoleos, Carrharum eodem titulo,

tum

(m) c. 26. (n) c. 27.

tum coloniarum tantummodo, Nesibis Septimiae, et Singaræ Aureliae Septimiae ad Tigridem. Earum coloniarum, quamdiu Misitheus Imperatoris socer et praefectus praetorii vixit, optima fuit conditio. Capitolinus: *Cuius viri tanta in republica dispositio fuit, ut nulla esset unquam (forte, usquam) ciuitas limitanea potior (seu, alicuius momenti) quae non posset exercitum P. R. ac principem ferre, (hoc est, alere:) quae totius anni in aceto, frumento et larido atque hordeo et paleis condita non haberet.* Gestum deinde bellum Persicum vsque ad A. C. 244. cuius initio Philippus res turbauit, ut Pagius egregie exsecutus est. Iam Amida, quae in illo rerum tumultu fuit? Credo ego, quodsi ad ceteras colonias in obsequio continendas ab Alexandro condita in fide permanfit, oppressam fuisse ceterarum coloniarum inuidia: sin aliter, etiam ipsam Persarum in potestatem defectione peruenisse. Cum autem Gordianus Mesopotamiam recepisset, neglecta fuisse videtur, quod Singara ad Tigrim sufficeret et mox deinde M. Iulius Philippus Nisibenis faueret. Nisibin enim nouam coloniam deduxit, quae idcirco in numo IOYA. CEN. KOAΩ. NECIBI. *Iulia Septimia colonia Nesibi.* Accessit deinde etiam metropoleos dignitas. Nam in numo Otaciliae Seueræ Augustae est IOYA. CEN. KOAΩ. NECIBI. MET. *Iulia Septimia colonia Nesibi metropolis.* Sub Messio Traiano Decio et Q. Herennio Messio Decio Edeffae et Rhesinae numi sunt. Deinde numi nos destituunt. Vnicum hic proferram Rhesinae coloniae, qui in Museo Imperatorio exstat. Caput in eo est Decii radiatum. In naui nonnihil obtrita figura muliebris, sinistra tenens cornu copiae,

Tab. XXIV.
Figura 3.

dextera ad aram sacrificans, respicit aquilam insistentem laurea tenentemque rostro fertum $\text{C}\Pi$. $\text{K}\text{O}\Lambda$. $\text{P}\text{H}\text{C}\Lambda$ ω N. L. Sic item sunt numi Decii Imp. apud Valentem. Hoc vero in nostro singulare est, quod e regione auris, inuerso in capite, alio praelo caput urbis turritum altius impressum fuit. Iactatus igitur fuit hic Decii numus, donec Rhefaena, suae urbis, tamquam liberae, genium imprimeret. Diu iacuit imperii Romani maiestas in Mesopotamia. Diocletianus primus iacturam resarciuit talemque reliquit prouinciam, qualem denique tenuit Constantius Constantini filius.

De situ urbis agrique Amideni conditione ad extremum dicemus, quod argumentum auersam numi explicabit. Nam hic Genius urbis in rupe sedet accliu et sinistram vertici eius imponit, quod urbs in excelso locata esset. Genius fluminis propter Tigridem urbi vicinum. Ammianus Marcellinus (o): *Et a latere quidem australi geniculato Tigridis meatu subluitur propius emergentis: qua euri opponitur flatibus, Mesopotamiae plana despectat: unde aquiloni obnoxia est, Nymphaeo amni vicina, verticibus Taurinis umbratur, gentes Transtigritanas dirimentibus et Armeniam: spiranti zephyro contraversa Gumathenam contingit, regionem uberem et cultu iuxta foecundam, in qua vicus est Abarne nomine, hospitium aquarum lauacris calentibus notus.* Ismael Abulfeda apud Iacobum Golium (p) cum Ammiani hac descriptione plane concordat. Fuit igitur versus orientem in altum magis euecta, ita ut ex ea agri Mesopotamienfes subiecti dispectaren-

(o) p. 159. (p) p. 240.

starentur. Etiam versus meridiem et Tigrim praeterlabentem sic sita fuit. Ammianus (q): *In summoto loco partis meridianae murorum, quae despectat fluvium Tigrim, turris fuit in sublimitatem exsurgens, sub qua hiabant rupes abscissae, ut despicere sine vertigine horrenda non possent, unde cavatis fornicibus subterraneis per radices montis scalae adusque civitatis ducebant planitiem, quo ex amnis alveo haurirentur aquae furtim, ut in omnibus per eas regiones munimentis, quae contingunt flumina, vidimus, affabre politae.* Sed occidentem versus adscensus urbis impeditus quoque fuit. Ammianus enim ab Samofateni regione Amidam fugiens (r), *civitatem, inquit, petebam anhelato cursu rependo, ex eo latere, quo incessabamur, in arduo sitam, unoque adscensu per angustum meabilem, quem scissis collibus molinae ad calles arctandas aedificatae densus constringebant.* Genium fluminis Tigrim malui interpretari, ut vicinum moenibus, civitati que aquam praebentem et percelebrem denique fluvium, quam alium aliquem. In numo Singarae ad Tigridem non possum satis mirari, cur illustris Spanhemius addubitaverit (s), geniumne fluminis, similiter signatum, Tigrim ederet, an nescio quem riuum prope eam coloniam. Ammianus utique (t) ad Amidae aquilonem Nymphaeum amnem locavit, et ipso in meditullio sub arce, *fons, inquit, dives exundat, potabilis quidem, sed vaporatis aestibus nonnumquam foetens.* Abulfeda etiam plures in urbe fontes esse testatur. Cur autem minora nomina vel Nymphaei, vel fontium, vicino Tigridi Amideni praetulissent? Valesius quidem Nymphae-

(q) p. 166. (r) p. 159. (s) Ad primam Orationem Iuliani p. 171. (t) p. 159. 160.

phaeum in Sophanene, CCXL. aut CCC. ab Amida stadiis, ad Martyropolin a Procopio Caesariensi (u) prodi animaduertens, Ammianum hoc in nomine offendisse autumat. In Ammiano autem nulla tanta fuit oscitantia, vt, cum Amidam contra Persas propugnasset, amnem aliquem ad boream labi et Nymphaeum ab incolis vocitari ignoraret: neque a nobis Procopius postulat, vt aliter statuamus, quam Ammianus memoriae prodidit. Ipse ille Pisides Diaconus Ammiani fidem suffulcit:

Καὶ τὸν μέγιστον ἐκπεράσας Νυμφίον
 Οἷς Τίγρητος ταῖς ῥοαῖς ἐπιρέων
 Ἀποσερεῖται πρὸ καλῆσθαι Νυμφίος.

*Et maximum traiecit Nymphium,
 Qui Tigridis fluctibus influit,
 Alicubi vero non dicitur Nymphius.*

Ergo Nymphius a Martyropoli orientem versus in Tigridem ferebatur, ad quem fluuium erat Amida. Sed quid quid dubitationis superesse potuit, totum hoc de medio sustulit nitidissimum Iacobi Golii ingenium (x), cum ex Abulfeda ostendit, باسلینا *Baslinsa*, prope *Meyafarekinum* oriri, atque in Tigrim labi duobus supra *Ticrit* (quae Martyropolis quondam fuit) parasangis: ex nominis autem conuenientia concludit, illum ipsum veterem Nymphaeum esse. Quapropter, inquit, cum intermedio loco sita sit Amida, non potest ipsa a fluuii illius alueo adeo longe abesse. Spicae, quas figura vrbis dextera tenet, vbertatem agri pollicentur. Forte inde etiam *Amida* Arabice dicta fuit

(u) De B. P. p. 25. et 62. (x) Ad Alphraganum p. 240.

fuit *onusta*. Iam supra ex Ammiano *Gumathenam* regionem *vberem et cultu foecundam*, ad occidentem vrbis commemoravi. Frustra hic Fridericus Lindenbrogius *Commagenam* scribi oportere iudicavit. Quanto enim illa ab Tigri semota fuit interuallo. Immo Gumathena nomen videtur Armenicum, regionis proxime Amidam vrbem. Sed idem Ammianus quoque (y) patentes ad occidentem Amidae *agros, pingues cultosque* praedicat.

DE
 DVOBVS DIADEMATIBVS
 IN
 MVSEO IMPERATORIO.

AVCTORE

T. S. Bayer.

PRidie eius diei, quo die ANNA AVGVSTA laetissimis caeremoniis Moscuæ vncta consecrataque fuit, in summorum virorum et doctissimorum publica concione apud Academiam et de virtutibus Augustae pro tenuitate ingenii dixi, et vt consuetudo Academiae postulabat, de duobus diadematis Musei Imperatorii disserui. Quaerenti enim mihi et mecum consideranti, quo argumento illum auspiciatissimum diem ex more et instituto Academiae instaurarem, ne meus sermo a publicis studiis in Augustae venerationem effusus penitus abhorretet, aut laetissimas auditorum cogitationes ab incredibili voluptate auocarem ad alienas ab hoc tempore litteras, nihil opportunius occurrebat, quam si de his diadematis verba facerem. Reperta sunt ante aliquot annos, vt relatum est mihi, in agro Casaniensi. Existere apud nos, qui arbitrarentur, haec brachiorum ornamenta fuisse, qualia a quibusdam populis gestari accepimus. Apud Saracenos, vt Constantinus Porphyrogenneta memoriae tradidit (a), insignia imperii fuerunt anauli. Sed nihil planius est et per-

Tab. XXIV.
 Figura 4.

(a) De administrando imperio p. 73 ed. Band.

perspicuum magis, quam ab annulis, qui in brachiis gestari potuerint, horum diadematum formam abhorrere, contra ea Byzantiis diadematis penitus congruere. Antoninus ille Elagabalus exacta in Syria pueritia, *voluit*, ut ait Aelius Lampridius (b), *diademate gemmato uti, quo et usus est domi*. Etiam imaginem suam pictam illo cum diademate in Urbem misit ante aduentum suum, ut populum Romanum spectaculo huic adsuefaceret (c). Siue id honori patrii numinis dederit, cuius in sacerdotio diadema gesserat, ut Gisbertus Cuperus ad Lactantium sibi videri ostendit, siue regum Parthorum aemulatione, absterritus tamen est iudicio populi Romani a peregrino more alieni. Aurelianus Augustus quoque, victis Persis et Zenobia Palmyrenorum regina, diadema sumpsit (d), ita vero, ut post eum coronis radiatis laureisque restitutis aut galeis receptis, primus Constantinus M. *perpetuo diademate* sese exornarit, quemadmodum S. Aurelius Victor factus est. Constantinus iuxta se fratres quoque et filios diadematis insigniri passus est. Et cum inde usque a Domitiano Imp. institutum fuisset, ut Imperatores summo in fastigio *Αυτοκρατορες* et *Augusti* appellarentur, proximo gradu, ob spem succedendi consisterent *Καίσαρες*, deinde fere Augusti modo cum Caesaribus hanc diadematis maiestatem communicarunt, modo hoc solo honore sese praetulerunt. Sed in ipsa forma diadematum saepe mutatum fuit, praesertim cum tiara accederet. Spectari id potest in numis apud Carolum Ducangium, Anselmum Bandurium et alios. Anna Comnena Porphyrogenneta Alexii Imp. filia perfectum Augustorum diadema, ut

B b b 2 tum

(b) c. 2. 3. (c) Herodianus l. V. c. 5. (d) Victor in Epitome.

tum fuit, sic descripsit in Alexiade (e): τὸ βασιλικὸν διάδημα καθάπερ ἡμισφαίριον εὐγυρον τὴν κεφαλὴν διαδῆ παύλαχθεν μαργάροις κοσμημένον; τοῖς μὲν ἐγκλίμασι, τοῖς δὲ ἔξηρημένοις. Ἐκατέρωθεν γὰρ τῶν κροτάφων ὄρθασαι τινες ἀπαιρωτῆλαι διὰ μαργάρων ἢ λίθων ἢ τὰς παρεὰς ἐπιζέουσι. Καὶ ἐστὶ τῆτο ἐξηρημένον τι Χρῆμα τοῖς βασιλεῦσι σολῆς. *Imperatorium diadema venuti benijphaerium undique concavum et clausum caput devincit, ab omni parte margaritis ornatum tum intextis, tum exstantibus et pendulis: nam utrimque ad tempora ex unione et gemmis monilia pendent et genas feriunt: (ad imitationem taeniarum veterum a diadematis sericeis dependentium ad cervicem) hoc eximium et proprium Augustorum diadema est.* Tum vero Anna Porphyrogenneta diademata Sebastocratorum et Caesarum describit: οἱ δὲ Σεβαστοκρατόρων ἢ τῶν Καισάρων σέφανοι σποραδῆν ἐστὶν ὅπως τῶν μαργάρων ἢ λίθων μελέχοντες ἄνευ τῆ ἐπισφαιρώματος, *Sebastocratorum vero et Caesarum coronae erant passim margaritis gemmisque distinctae, at sine eminenti orbe, seu tiara.*

Sentio quidem, posse alicui hanc dubitationem iniici, quod hi aurei gemmatique circuli tam parvi sint, vix ut aptari capitibus queant, eo neque in diadematum loco ponendos esse. Hunc scrupulum coronā Longobardica, quam ferream vulgo vocant, nobis eximet. Formam huius diadematis, quod Modoctiae prope Mediolanum adseruatur cum his nostris convenire ex tabula cerneris. Amplitudo autem ea est, vix ut duorum anno-

rum

Tab. XXIV
Figura 5.

(e) p. 78. ed. Paris.

rum puer capite gerere possit, diametro quinque digitorum: pondus vix trium unciarum est. Modoetenses ferunt, Helenam Constantini Magni matrem clauos ferreos sanctissimae crucis reperisse atque eorum vnum Imperatoris filii diademati interuisse: a Constantio deinde diadema dono datum fuisse Gregorio M. Pontifici Romano, hinc ad Theolindam peruenisse, quae Agilulfo primum imponi illud fuerit. Aduersus hos Modoetensium sermones, cum praesertim populus ad venerationem laminae, tamquam e sacrae crucis clauo concinnatae, moueretur, et Antoninus Franchedinus rem ad Viscontum Archiepiscopum Mediolanensem detulisset, hic ad Congregationem Rituum, quae Romae est, integram causam reiecisset; Ludouicus Muratorius (f) sententiam suam nondum diiudicata causa protulit, quae spes omnes Modoetensium prosterneret. Inter cetera negauit diadema esse, quia ob minutiam gestari capite non potuerit. Enimvero dum non inficiatur, saepe hoc diadema in inauguratione Imperatorum Germanorum adhibitum fuisse, ex eo, quod etiam Iustus Fontaninus in dissertatione de corona ferrea Longobardorum contra Muratorium vrget, per se apparet, admoueri capiti posse. Non esse ita antiquum, vt Modoetenses postulant, concedo. Quis credat Constantinum M. se suosque priuatum fuisse diademate, quod, vt ait Ambrosius in oratione de excessu Theodosii, *clauo dominicae crucis connexum fuit*? Contemplemur formas diadematum in numis Byzantiis inde vsque a Constantini M. temporibus, ita magis etiam confirmabimur, sequioris aetatis eam coronae Longobardicae esse. Muratorius Modoetenses cum

B b b 3

istis

(f) Analect. Tom. II. p. 267.

istis rumoribus suis plorare iubet monumentorumque testimonia et auctoritates requirit: Fontaninus vero satis veterem illam famam esse contendit, et peruulgatam, neque absurdam. Equidem, ut inter summorum virorum disceptationes meo quodam iudicio utar, quod fieri plerumque solet, non sine veri falsique mistura Modoënsium famam perseuerare censeo. Factum videtur diadema hoc ad Constantinopolitanorum formam, transmissumque a Constantino ad Longobardos, sed minime gentium a Magno. Nomen tamen sefellit Magni, cuius illustrior semper fuit memoria ad populum, quam ceterorum *Constantinorum*. At illa minuties coronae Longobardicae nos confirmat, ne nostris hisce circulis ob hanc solam causam diadematum nomen negemus, quod paullo minores sint. Non sunt tam exigui, ac Longobardica corona, quam hic ex Muratorio et Fontanino propositam descriptamque conferre potestis. Scio Ioannem Peringskioldum formam Longobardicae coronae ab hac diuersam ad Theodorici Regis vitam (g) protulisse, ut eam illustris Sparwensfeldius Modoëti ipse pinxerat. Quid hanc diuersitatem peperent, dicere non possum: at Italis et consummatissimae doctrinae viris, et orta controuersia, oculatissimis, cur ego potius fidem non adhibeam? Denique etiam de minutie talium diadematum orta mihi est suspicio non absurda, ut arbitror. Cum tot populi, quod ex Constantino Porphyrogenneta mihi constat, diademata Constantinopoli peterent, Constantinopolitani, qui inuiti dabant, de pondere detraxisse et magnitudine videntur, ut et sumptui parcerent et maie-

maiestatis imminuerent decus, ne diademata commode gestari possent et circumferri in capite regio.

Hic intercedere videtur Constantinus Porphyrogeneta nostrisque opinionibus obstare. Ita enim fatur (b):

Ἰδοὺ ὅτι βορείοις ἅπασιν γέ- Cunctis populis septentriona-
νεσι φύσις ὡς περ κατέ- libus quaedam quasi natura
στηκε τὸ ἐν χερήμασι λίχ- est tributa, opum cupiditas
ρον καὶ ἄπληστον, καὶ μηδέ- quae expleri atque exsatiari
ποτέ κορεννομενον, ὅθεν nequeat, unde omnia expetunt
πάντα ἐπιζητεῖ καὶ πάντων et cuncta desiderant, neque
ἐφίεσσι καὶ οὐκ ἔχει τὰς ἐπι- cupiditates ullo termino ha-
θυμίας ὅρω περιγραφα- bent circumscriptas, sed sem-
μένας, ἀλλὰ εἰ τῆ πλείονος per plura concupiscunt et pro
ἐπιθυμεί, καὶ ἀντὶ μικρῶς ὡ- exigua opera, magna lucra
Φερίας μεγάλα κέρδη προ- comparare volunt: idcirco
σπορίζεσθαι βύβληται. Διὸ oportet eorum importunas
δαί τὰς τῶν ἀκαίρων αἰ- petitiones et impudentes po-
τήσεις καὶ παρρησιασικὰς sulationes blandibus verbis
ἀξιώσεως διὰ λόγων πιθα- et prudentibus callidisque
νῶν καὶ Φροίμων καὶ συνελῶν excusationibus eludere atque
ἀπολογιῶν ἀνατρέπειν καὶ repellere. Quae excusatio-
ἀνακρέσθαι. Αἱ τινες ὅσον nes, quantum nos ab ex-
ἀπὸ τῆς πέρας ἡμῶς κα- perientia potuimus cognosce-
ταλαβῆν ἠδυνήθημεν, ὡς ἐν re, ut exemplo complectar,
τύτῳ περιλαβῆν, τοιαῦτά ἰstiusmodi erunt. Si quan-
τινες ἔσονται εἰ ἀξιώσεσσι do seu Chazari, seu Tur-
ποτέ καὶ αἰθήσοντα, εἴτε Χά- cae, siue etiam Rossi, aut
ζαροί, εἴτε Τούρκοι, εἴτε καὶ alia gens ex borealibus et
Ρῶς,

(b) p. 63. ed. Band.

Πῶς, ἢ ἕτερόν τι ἔθνος τῶν *Scythicis*, *ut saepenumero* βορειῶν καὶ Σκυθικῶν, *δια fieri solet*, *ex Imperatoriis* πολλά συμβαίνει, ἐκ τῶν *vestibus aut coronis, aut stobasiléων εὐδήτῶν, ἢ σεμ- lis, pro aliquo seruitio et mi- μάλων, ἢ σολῶν, ἕνεκά τινος nisterio suo, sibi aliquid mitti* δαλίας ἢ ὑπεργίας αὐτῶν *postulent et petant*, *ita oportet ἀποσαλῆνα αὐλοῖς, ἕτω tet ut te excuses*: etc.

Χρή σε ἀπολογήσασθαι.

κ. τ. λ.

Sic deinde filium instruit: ex libris arcanis ad memoriam extare, et stolas et coronas per angelum ad Constantinum M. a Deo fuisse caelo demissas, iussumque ab eo fuisse, ut in Magna Sancta Ecclesia Sophiae consecrata deponerentur, et ut iis Imperatores tantum in publico festo induerentur: ita igitur Constantinum M. constituisse, ut fieret, et in sacra ecclesiae mensa ex mandato angeli sacrum carmen inscripsisse, quo diras omnes sit imprecatus, si quis Imperator extulisset ex ecclesia: eadem religione teneri, qui ad earum similitudinem seu stolas, seu coronas conficiendas curaret, nisi cum confectae fuerint, in eadem ecclesia deponerentur. Addit deinde, Leonem Imperatorem, quod ausus esset sacras vestes et coronam ecclesia efferre domique gestare, repente in vultu carbone erumpente maximis cum cruciatibus animam efflasse, quod de Leone etiam Michael Glycas praedicavit (i). Videtis populos ad septentrionem et nominatim, Chazaros, Turcas, Ruffos ab Constantinopoli tum diademata, tum vestes regias repetere, et pro officio aliquo postulasse. Im-
petra-

(i) p. 285.

petrare potuisse Constantinus Porphyrogenneta negat, quod ad diadematum eorum formam alia confici communicari- que ius fasque non esset, iis etiam terrore perculsis, qui gestare auderent. Sed haec ita sunt reperta, ut impor- tunae flagitationes reiicerentur, ne vulgato diadematis ho- nore, Imperatorum maiestas vilesceret. Ante eum vero Constantium, vel gestandi extra ecclesiam diadema, vel ad eius formam alia fabricandi, vel honoris causa cum aliis communicandi, religionem nullam fuisse inuenio. Communicati honoris testem vetustissimum vide Cyrillum Hierosolymitanum in epistola ad Constantium Augustum (k):

ἕτεροι μὲν γὰρ, ἀφ' ὧν ἔχουσι τὴν τιμίαν σκ, πολ-
 λὰκις σεφάνῃσι κεφαλὴν χρυσοκολλήτες σεφάνας, λί-
 θοις διαυγεσταῖσι πεποικιλμένῃς προσκομιζοῦτες. Ex-
 stat apud Nicephorum Patriarcham Constantinopolitanum
 (l) insigne Heraclii Augusti factum. Nam cum contra
 Chosrhoën moueret, ponto deuectus in Lazicam, lega-
 tos ad Turcarum principem de foedere misit. Turca Im-
 peratori obuiam processit cum magna auxiliariorum mul-
 titudine, et ab equo defiliens sese prostravit humi. Foe-
 dus cum eo sanciuit Imperator, καὶ ὄν περιέκειλο σεφα-
 τον, τῆς κεφαλῆς λαβῶν, τῇ τῷ Τέρκῃ κεφαλῇ πε-
 ριέκειλο. *diadema capiti suo detractum Turcae imposuit.*
 Dicat hic quisquam minoris dignitatis id diadema fuisse,
 sine tiara, sine reliquo maiestatis splendore: ego vero
 hoc vltro concedo, neque quidquam amplius postulo, cum
 et haec Casaniensia diademata, quae produxi, non plenam
 maiestatis speciem referant. Aio tamen. etiam diadema,
 perfectum absolutumque summæ maiestatis apicem Bulga-
 ris

Tom. VIII.

C c c

ris

(k) p. 305. ed. Th. Millea. (l) p. 22. ed. Paris.

ris fuisse concessum hoc ipso imperante Constantino Porphyrogenneta, ut excusationum illam formam prorsus vanam esse sentiamus. Nam cum Ioannes Tzimitzes, Bulgaria recepta, Borisum Imperatorem in potestatem rede-gisset, triumpho in urbem deuectus, τὰ παράσημα τῆς Βυλγαρικῆς βασιλείας insignia Bulgarici imperii coram populo Borisō detrahit (m). Erant autem ea insignia, ut ait Cedrenus, σέφανος ἐκ χρυσῆ ἢ τιάρα ρειησμέ-νη ἐκ βύσσου ἢ πέδιλα ἐρυθρὰ, *diadema aureum et tia-ra et caligae rubrae*. Quod Nicephorus et Cedrenus σέ-φανον *coronam* dixerant, id ego, ambiguitatem vocabuli deuitans, interpretatus sum *diadema*. Dixi Constantino Porphyrogenneta imperante hoc diadema accepisse Bulga-ros. Nam is Constantinus et Romanus Lacapenus eius socer imperabant, cum Symeon Bulgarorum, gentis Scla-uonicae Princeps maximis cladibus Imperatores adfecit, donec pax coaluit durissimis conditionibus. Missi ad Sy-meonem de pace Nicolaus Patriarcha et alii insignes viri, mandatum retulerunt, ut Romanus Imperator ipse praesens a praesente Symeone pacem precatum veniret. Tan-ta tum necessitas rem Constantinopolitanam vrgebat, ut Romanus Lacapenus ad Cosmidii litus adesset prior Sy-meonemque exspectaret. Venit tandem Symeon *cum suis* satellitibus, qui eum clupeis hastisque auro et argento re-splendentibus ornati medium ducebant, καὶ ὡς Βασιλέα ἐυφύμην τῇ τῶν Ρωμαίων Φωνῇ *et tamquam Imperatori Graecis vocibus fausta omnia acclamabant*. Prior exor-sus Romanus paene supplex pacem petiit. Annuit Symeon et discessit, δάροις μεγαλοπρεπέσι τῆ Βασιλείως δε-ξίω.

(m) Cedrenus p. 682.

ξίωσαμένε τὸν Συμεὼν, *cum Imperator magnificentissimis muneribus ornasset Symeonem*, ut ait incertus auctor rerum Lacapeni (n). Quod aliud tempus ita accommodatum fuit felicitati Bulgaricae, ut diadema ab Imperatore Constantinopolitano extorqueret ambitiosissimus Princeps: nec modo diadema cum tiara ad maximam maiestatem perfectum, sed etiam maiorem confessionem maiestatis suae, ipsum Βασιλέως titulum, in quo Constantinopolitani ita fuerunt parci, ut eum ne Carolo quidem Magno aut Ottoni ceterisque Imperatoribus tribuerint.

C c c 2

ORI-

(n) p. 252. Symeon Logotheta p. 484. seq. Georgius Monachus in nouis Imperatoribus, p. 580. seq.

ORIGINES RVSSICAE.

AVCTORE

T. S. Bayer.

ANte Michaelem Imp. Theophili et Theodorae filium multa Sclauonicarum gentium memoria existat apud Byzantios scriptores, nulla Ruffici nominis, quamquam e gente *Rosch* legatos omnium primos Constantinopolin ad Theophilum Imp. venisse, ex Annalibus Franciscis Bertinianis demonstrabo. Quare etiam Historiographus Anonymus Ruthenus, Michaele Imp. Indictione XV. primum auditum fuisse Rufficum nomen, asseueravit. In huius Imperatoris temporibus duo anni, Indictione XV. insigniti fuerunt: annus Christi 852. et annus 867. ita vt Indictio XV. Constantinopolitana et Ruffica (Ruffi enim in Indictionibus et annis mundi Constantinopolitanas rationes sequuntur) a superiorum annorum Kal. Septembribus procedat. Tamen potius A. C. 866. exeuntem et A. C. 867. maximam partem, quam alterum annum in animo habuit Historiographus: illo enim anno existimauit primam expeditionem a Ruffis fuisse susceptam. Etsi verum rei gestae annum non tenuit, tamen ab eodem non admodum aberravit, vt alio loco dicam.

Ne quis forte improuidus fallatur, cum inueniet Ruffos quosdam vetustioremem nominis sui memoriam in
 Graec.

Graecis requirere : quidquid eiusmodi est proditum , id vero nobis inferuire non potest. Neque enim nos iuat, quaecumque de Sclavis exstant, ea raptim transferre ad Russos, vt isti quidem sunt ausi : nomen Russicum desidero. Verum etiam isthuc aliqui reperire sibi sunt visi apud Graecos multo antiquissimum. Ea causa Theophanis Byzantii locum quendam, tum alia aliorum dicta aut momenta, contra offensionem muniam, denique Nicephori Gregorae errorem detegam sane perquam absurdum. Theophanes auctor est (o), anno tertio et tricesimo Constantini Copronymi Imp. A. C. 752. Bulgarico bello Imperatorem classem instruxisse tria millia chelandiorum : *ipse aduersus Russorum chelandia in Danubium aditum sibi paraturus mouit.* Sic enim Theophanem Latine conuertit Iacobus Goar. Quis hoc loco Russicum bellum non expectet, aut nauale cum Russis praelium ? aut quis saltem Russicum nomen e Theophane nobis non obiiciat, vetustius, quam nos exstare apud Graecos diximus ? At Theophanes nihil de Russis, cum ita fatus est : καὶ ἀπελθὼν αὐτὸς εἰς τὰ ῥύσια χελάνδια, ἀπεκίνησε, πρὸς τὸ εἰσελθεῖν εἰς τὸν Δανύβιον ποταμὸν. *Imperator in russis chelandiis, quae conscendemat, mouit, vt Danubium intraret,* nimirum contra Bulgargos Danubio finitimos. Τὰ ῥύσια χελάνδια Constantinopoli fuere rubro colore pictae naues. Sic in quatuor factionibus *russati* seu Tertulliano vocabulo, *russai*, ῥυσσᾶσι Constantinopolitanis ab eodem colore. Illa ipsa ῥύσια χελάνδια quae Constantino Porphyrogennetae (p) ἀγρόρια ῥύσια, quorum in locum Leo Sapiens Imp.

C c c 3

δρσ-

(o) P. 376. (p) de A. I. p. 139.

δρομώγια instituit. Vt, quod ait Herodotus (q), τὸ δὲ παλαιὸν ἅπασαν νῆες ἦσαν μιλιηλεφεές, *rubrica pi-ctae omnes veterum naues fuerunt*: ita Constantinopoli erant Imperatoriae, exornatae etiam puluinaribus et aulaeis purpureis. Haud dissimilis est error Chronographi Rutheni, cum sic ait: *Andreas apostolus iam dudum Russos baptisauerat: fueratque iam in primo concilio prouinciali Antiocheno Antipater episcopus Russiae haeresinque Pauli Samosatani sua subscriptione damnauerat* (r). Dicam initio de S. Andrea. Hippolytus Portuensis S. Irenaei discipulus primus est, qui tradidit, Andream Scythis atque Thracibus praedicasse: de Scythis consentit eius fere aequalis Origenes apud Eusebium. Alii Achaiam adiiciunt. Hieronymus (s), Gregorius Nazianzenus (t) et Pontius Paullinus (u) Scythiam ignorasse videntur. Nam cum maxime de cursu diuinae religionis inter gentes dicunt, Achaiam tantummodo attribuiunt Andreae apostolo, aut Epirum. Iam deinde Sophronius Scythis addit Sogdianos et Sacas. Dorotheus vero, ille inquam ὁ ὁσολιμαίος Dorotheus, totum litus maris et Bithyniam et Pontum et Thraciam et Scythiam edidit, e quo ipsa fere verba in Menologio Basilii Imp. exstant (x), denique Nicephorus Callistus (y) totum quasi septemtrionem et orientem in acie explicuit, Cappadociam, Galatiam, Bithyniam et Anthropophagos, et Scythiae deserta Εὐξινόν τε Πόντον ἐκάτερον, Pontum puta Euxinum, et Mare Caspium, et prouincias eorum marium ad boream atque notum, et Thraciam,

(q) L. III. c. 5^a. (r) Sic etiam in Menologio Russico edito in Actis Sanctorum a Daniele Papbrochio Maio mense Tomo I p. 54. (s) Epistola 148. ad Marcellam. (t) Orat. xxv. (u) Natali ix. S. Felicitis (x) Tom. I. p. 221. (y) H. E. I. II. c. 39.

ciam, Macedoniam, Thessaliam, Achaiam. Nouisse mores me et Dorothei istius et huius Callisti meditare decet, quibus religio fuit, orbem christianum celare, quae noctu somniarint. De Thracia non dubito, neque opus fuit inficeta fraude, qua Nicephorum Imp. ductum memorat Symeon Logotheta (z). Nam cum in venatione haud procul a Byzantio esset, inuenta scilicet ex improviso vetus ara et ad Imperatorem delata hoc cum titulo: τῆτό ἐστὶν τὸ ἅγιον θυσιαστήριον τῆ Αρχιερατῆ γῆ Μιχαὴλ τῆ Ανατέλλοντος, ὅπως ἐνεθρότισεν ὁ ἅγιος Ἀπόστολος Ἀνδρέας, hoc est sanctum altare Archi-
strategi Michaelis Orientis, quod dedicauit S. Apostolus Andreas. De Scythia quoque consentio, quando ita Hippolitus et Origenes tradidere, quorum apud nos auctoritatem valere decet, cum proximi ab aetate illa fuerint. At quam Scythiam dicant, quos populos, etiam atque etiam considerandum fuit, ne voce ambigua vtamur, tamquam pueri talis. Thraciae mentio mihi persuadet, vicinos quoque S. Andream adiisse. At tum quidem inde a Danubio ad Borysthenem Scythae fuere nulli: Getae regionem tenebant, paucis Scythis permixtis. Non nego superiora Borysthenis Scythas tenuisse: at quis mihi praestabit, eosque penetrasse S. Andream, aut Borysthenem traiecisse? nempe in veterum scriptorum silentio, neque nouis delector, quos iam vulgus eruditorum exhibilat, neque hariolari meum est, sed pudorem adhibere et verecundiam. Quis deinde mihi Russos iam tum ad Borysthenem fuisse demonstrabit? videlicet cum alios populos Tiberii Imp. aetate isthic coluisse ostendere possim. At cum in Antiocheno
 con-

(z) P. 455.

concilio Antipater Rufforum episcopus fuisse dicitur, *vanitas ἐπ' ἀνώφωρω* deprehensa est. Nimirum inuenerat ille in subscriptionibus Concilii Antiocheni A. C. 363. *Ἀντιπάτρον Ρώσος* (a), hinc ex leui nominis congruentia error errorem extrusit. Stephanus Byzantius: *Ρῶσος, τὸ ἐθνικὸν Ρώσιος, ἀλλὰ ἔ Ρωσεὺς τὸ κτητικὸν Ρωσικὸς*. Apud Claudium Strabonem, Ptolemaeum, Athenaeum *Ρωσσεὺς*. Vrbis in Cilicia ad Sinum Issicum, testibus Strabone, Cedreno (b), Zonara (c), Syriae adscribitur a Plinio et Athenaco. Notitiae Graecae: *Ρῶσος Ἀρχιεπισκοπῆ*. Eodem modo offensionem esse possunt episcopi Rhusii. Nam obseruarunt nonnulli, *episcopum Rufforum* in Concilio Constantinopolitano IV. subscripsisse. Immo in subscriptione Concilii contra Photium Patriarcham e veteri Anastasii Abbatis ad Hadrianum Pontificem Romanum interpretatione (d), A. C. 870. *Ioannes misericordia dei archiepiscopus Ruffii exstat*. In Actis Synodi Photianae, quae ex Vaticana bibliotheca integra edidit Ioannes Harduinus, fragmenta enim tantummodo exstant apud Beueregium:

Ἀγάθωνος Μωράβων

Φιλίππου Καρπάθου

Τριφωνος Ρυσις

Erat autem *Ρῶσιον* vrbis in Thracia ad Aegaeum mare, e regione Thasi insulae, antea *Τόπυρος*. Hieroclis Grammatici Syncedemus (e) in prouincia Rhodopes: *τὸ Πυρὸς νῦν Ρῶσιον*, lege *Τεπυρος*: Catalogi duo urbium, quae

(a) *Top. I. Concilium Constantinopolitano p. 710.* (b) *p. 654.* (c) *p. 213.*
 (d) *Imperium Concil. Tom. V. p. 324.* (e) *p. 31, ed. Harduini.*

nomina mutarunt, editi ab Anselmo Bandurio in Imperio Orientali (f). Τόπαιρος τὸ νῦν Ρῶσιον. In Concilio Ephesino A. C. 431. Δυκιανὸς Τοπύρου. Vtriusque Andronici ἐκθέσης, Rhufium XCIII. e LXXVII. metropolin throni Constantinopolitani habet. Iacobus Goar (g) ex vno Msc. ἐκθέσεως Andronici Senioris edidit Ροδιον ex altero Andronici Iunioris Ρῶσιον, at rectius alii Ρῶσιον. Quare ista non magis ad Russos pertinent, quam si quis e Concilio Aruernensi aliisque in Francia Ruthenense Ruthenicumque episcopum nobis producat. In Concilio Agathensi A. C. 506. *Quintianus Rutenus*. Est enim, ut Ioannes Harduinus iam monuit, episcopatus *Rhodes* in Aquitania orientali, sub Albienfi archiepiscopatu. Martyrologium Romanum XVIII. Kal. Iulias: *Apud Ruthenos S. Quintiani (h)*. In martyrologio Abbatis Messanensis: *ipso die Quintiani presbyteri et Titii confessoris*.

Nicephorus Gregoras, de dignitatum origine disputans (i), a Constantino Magno inquit, Ρωσικὸς τὴν τε ζάσιον ἢ τὸ ἀξίωμα τῷ ἐπι τραπέζης κεκλήρωται, *Ruscus et locum et dignitatem praefecturae triclinii in aula Constantinopolitana accepit*. Sic idem tradit Peloponnesi dominum Principis dignitate a Constantino Magno fuisse auctum: Atticae dominum, Magni ducis, Boeotiae dominum Magni primicerii, Siciliae principem Regis. Sed, quod in primis est ridiculum, Montisferrati princeps, hoc eodem auctore Gregora, Μαχεσιος, *Marchio* a Constantino Magno dictus est, tamquam ὁ βασιλικὴν κατέχων σημεῖον, *qui signifer sit Imperatoris*, exi-
 Tom. VIII. D d d gua

(f) Tom II, p. 10. (g) sub finem Codini Tom. II, p. 403.
 (h) V. Baronii Annales A. C. 506. (i) p. 146.

gua deinde apud Latinos existimatione. Carolus Ducangius, hoc omni in genere litterarum incomparabilis, simplicitate hominis vehementer offenditur: *merae sunt*, inquit, *et aniles omnino fabulae, quas refellere, operam esset ludere.* Sed veniam, ut puto, meretur Gregoras, cum ipse incitiam deprecatur, quod illarum memoriam rerum ὁ χρόνος συνέχωσε ἢ τὰ μὲν τελῶς ἐκάλυψε ἢ λήθης πόλαμοῖς ἀφῆκε συμφέρεσθαι, τὰ δ' ἀτέκμαρα συνεχώρησε περὶ τὸν βίον πλανᾶσθαι. Quis huic succensere potest, qui tam urbana et eleganti sententia sese muniuit? Fuerit igitur aliquis Rossicus Princeps ante A. C. 1352. (eo enim tempore Gregoras scripsit) qui pincernae munus Constantinopolitana in urbe obire gloriosum duxerit: nihil tamen ille ad eam rem pertinet, quam nunc tractamus. *Russica dapiferi dignitas*, inquit Ducangius, *nullibi occurrit.* De Graecis et Latinis monumentis dicit Ducangius, ὁ ἐπιείκελος ἀθανάτων. Addo Russica, saepe nimis indulgentia Graecorum honori, in quibus nihil vsquam de hoc munere Russicorum principum reperitur, tamquam Constantinopolitano imperio obnoxiorum. Dicam quod mihi videtur, neque patiar Nicephorum nimis traduci. Ut Atticae duces, Boeotiae primicerius, Siciliae rex, Montisferrati marchio Gregorae temporibus profecto fuerunt, ita fuit etiam Rossicus pincerna: neque enim tanta res Gregoram fugere potuit in aula versantem. At ille Rossicus nullus alius fuit, quam Rhosii urbis in Cilicia dominus, ut multi ista aetatae minores Principes illis in tractibus, concedente aula Byzantia exstiterunt. Nulla eius memoria exstat? nempe etiam maiorum rerum testimonia deficiunt, quas tamen

pro-

probabili coniectura tenemus. At Constantinus M. illam Rhofii dignitatem instituit? hoc enimvero vanum est, nec iam ita sustinere auctoritatem Gregoras potest in rebus ante se tot seculis, vt illa in memoria pincernae Rhofii, statum Constantinopolitani imperii non penitus ignorabat. Nam ita quoque in ceterarum dignitatum origine impingit, quae tum quidem erant, obscurae tamen apud Gregoram originis.

Huius diuturni de Rossico nomine apud Byzantios Scriptores silentii duas causas esse posse video: alteram e Russorum sententia, alteram e ratiocinio non absurdo. Russi contendunt, circa Michaelis Imp. tempora Ruricum rem publicam primum constituisse nomenque parti cuidam Slauorum indidisse, vt nuncuparentur Russi. Quod, si ita est, Russicum nomen medius fidius a Byzantiis ante cognosci non potuit, quam fuit. Ostendam autem et nomen et rem publicam Russorum Rurici tempora excedere, quocirca altera in causa potius acquiesco. Populus Russicus ante Michaellem Imp. longius a Constantino- poli, multis populis interiectis, remotus fuit, quam vt spectatorem aliquem rerum suarum nancisci posset. At vbi attollere sese incepit et mercaturas Ponticas exercere, Constantinopolin vero ipsam aggredi bello, tum denique etiam cognitum in vrbe est nomen Russicum et monumentis ad posteritatem celebratum. Ea necessitate motus Constantinus Porphyrogenneta Imp. operam dedit, vt per Cherrhonestas et finitimos Ponto populos, ad quos saepe legati Romani commeabant, quemadmodum ceterarum gentium ad septemtrionem situs et mores et consilia sta-

D d d 2

tusque

tusque explorarentur, ita etiam Rufforum. Ante hunc vero Constantinum Imp. incredibile, quantum omnis doctrina, etiam plebeia, et vel legendi scribendique copia multa fuerit Constantinopoli Michaelis Imp. extremis temporibus. Bardas Caesar ad deserta litterarum studia populum vocavit gymnasio condito: tamen ad Constantinum Imp. vsque nullum habemus probabilem historiarum auctorem. Et illi ipsi, quos Constantinus Imp. ad conscribendam rerum memoriam induxit, quos comiter adiuvit, adeo infantes fuerunt, ut me eorum saepe suppudeat. Praeterea vero etiam conqueruntur, multarum et *maximarum* obliuione illa ante sese tempora laborare (k). Itaque ab A. C. 805. in quo Theophanes Byzantius desit, ad exitum Romani Porphyrogenetae et A. C. 963. nihil est in Byzantiis historiis, nisi *Συθηῶν ἐρημία*, raris rerum memoriis, quasi tuguriolis inculca. Pauca sunt scriptorum nomina: si inter sese contendas, vix paucos inuenies existisse scriptores, sane ignauos, e quibus ceteri emendicati sunt non modo res, sed etiam verba. A Romani Porphyrogenetae temporibus iam paullulum se attollit Georgius Cedrenus: secundum eum scriptores sic satis boni. Quae cum ita sint, potuit etiam ante *Michaelem* Imp. nomen Rufficum, quemadmodum fuit, ita Constantinopoli non ignorari, tamen deinde per scriptorum desidiam negligi et exstingui.

Nolim autem quisquam arbitretur, me deinceps illorum opinioni patrocinari, qui Rufficum nomen in vetustis Romanorum scriptis requirunt. Video nonnullis,

(k) Continuator Theophanis p. 193.

lis, quorum ab commemoratione abstineo (1), in mentem venisse *Rutenos* in Gallia, iam sub C. Iulii Caesaris expeditionem, maximam suam partem in provincia Romana, de quibus et Lucanus:

Soluuntur flauis longa statione Ruteni.

Hos, inquam, nonnulli ad Russos referunt. Credo equidem, Saxonem Grammaticum et reliquos istarum aetatum cum *Rutenos* dicerent Russos, istum Gallicum populum recordatos fuisse, ut tum eruditionis perexiguæ inanis esse solebat ostentatio. Duo interpretes Latini in Marco Paulo Veneto, ille Mulleri *Ruchenos*, alter Franciscus Pepuris de Bononia Dominicanus *Rutbenos* ediderunt, quamquam sic etiam Mullerianum interpretem scripsisse poto, litteras autem, ut in Manusc. saepe accidit, confusas esse. Apponam e Francisci Pepuris interpretatione locum, quando Mulleriana omnium in manibus est (m): *Rutbenorum provincia maxima ad polum sita est: huius terrae populi christiani sunt et seruant in ecclesiasticis officiis ritum Graecorum: omnes sunt albi et pulchri valde, flauos capillos habentes: tributarii sunt regis Tatarorum, cuius ad orientalem plagam affines sunt: de pellibus ermellinorum, sabbellinorum, vulpium et herculinorum et variorum copia ibi maxima est: multae sunt argenti minerae: est autem regio frigida supra modum et vsque ad mare oceanum protenditur: in mari illo insulae quaedam sunt, in quibus nascuntur et capiuntur girsalchi et herodii seu falcones peregrini in copia magna, qui postmodum ad regiones diuersas et provincias deferuntur.* Sed haec talia simulac comme-

D d d 3

morata

(1) V. Ioannem Cluuerum. (m) l. III, c. L.

morata sunt, omnium fastidio refelluntur. Graecorum est nemo, qui Ruthenos dixerit, quod argumento est, ab exemplo populi Gallici nomen duxisse, aut ex C. Caesaris commentariis aut e Plinio. Patiar equidem Russos bono vocabulo Ruthenos dici: vtar ipse peruulgato iam nomine: at stirpes gentis Aquitanicae atque Russicae memoriasque confundi non patiar.

Quas igitur origines gentis Russicae aut alii ediderint, aut nos constituere vero quam simillimas possimus, considerandum duco. Primum illi, qui Russos etiam Moscovitas dixerunt, *Moschum* Sidonium philosophum eorum in memorias inuexere.

Bacchum in remotis carmina rupibus

Vidi doctentem, credite posteri:

Nymphasque discentes et aures

Capripedum Satyrorum acutas.

Neque enim alius deus talem mentem indere alicui potuit, vt sic caespitaret. Iam quid dicam illum Annii Viterbiensis Berosum, quoniam is quoque producitur, cui a Saturno Babyloniae rege Moscum et Magogum visum est repetere, qui colonias deducerent? Quasi hoc propudium nondum iam satis sit exploratum. At rursus ab Herodoti, Xenophontis, Strabonis *Mosynaecos* et *Moschos* patremque *Mesechum* ex sanctissima Mosis Genesi recordantur, vt Russicas inueniant origines. Quae opinio duorum fere seculorum est, vt eam a Polonis etiam receperit auctor Synopsos siue Historiae Ruthenicae, quae Slaunico sermone ante multos annos Kiouiae est edita.

Illo

Illo in errore Samuelem quoque Bochartum fuisse inuenio, maximi virum ingenii. Et quoniam ab Ezechiele Propheta (n) **גוג נשיא ראש משך ורובל** *Gog princeps Rosch Mesech et Thubal*, eo quibusdam *Rosch* sunt Russi, *Mesech* Mosi, et *Thubal* Tobolscenses. Equidem video Ezechielem dicere principem *Rosch*, siue Araxis et *Mesech* siue Mosynaecorum et Moscorum in Caucaſo; sint deinde *Thubal* Tibareni, quid igitur deinde illi ad Russos hos nostros? veluti Ezechielis aetate haud alia regionum supra Caucaſum facies fuerit, quam quae nunc est. Quae autem tum fere fuerit, e Scythicis nostris intelligi potest, quando Ezechielis dicta nulli tempori aut casui potius conueniunt, quam Scytharum irruptioni in Asiam superiorem et Palaestinam, tum eorundem diuturno imperio et cladi. At concedunt nobis, multo etiam post tum Moschos tum Tibarenos intra Caucaſum se continuiffe, inde tandem digressos aiunt condidiffe Moscicum imperium et Thubalense ad Thobolem fluuium. Si cui haec placent adeo, non intercedo quin sua opinione gaudeat et delectetur: modo mihi quoque, vt non lubet his animum aduertere, ita etiam liceat. Dicam, quemadmodum illum in errorem inciderint. Satis diu tenuit ridiculus error, vt Russi dicerentur a Moscua metropoli, *Moscouitae* et *Moscouii*, quod Polonis maxime debuit Europa, et quoniam *Mosci* intra Caucaſum apud veteres scriptores exstabant, eo nomen videlicet vetus, visum est elegantius. Iam erat aditus ille patefactus ad regnum coniecturarum. Neque tamen vel a Graecis vel vetustis

scripto-

(n) C. XXXIIX 2. C. XXXIX, v. l. Confer Henrici Brenneri notes in Mossem Chorenensem p. 57. 77.

scriptoribus, apud quos perfrequens est Russorum memoria, Moscicum et Moscoviticum nomen occurrit: nimirum non ante illud tempus, cum Moscu a Georgio Vladimiri filio Longimano circiter A. C. 1149. condita est, et serius etiam, donec confirmato magno Moscoviae ducatu, attollere sese vires Russicae coeperunt. Moscu autem non a fluvio, (fuit enim fluviu vetus nomen *Smorodinae*) sed a veteri monasterio *Moskoi* nomen habuit. *Moskoi* a *Mus* et *Musik*, viro, quasi *virorum sedem dicas* (o). Quare haud rectius Moscos dixeris gentem Russicam, quam si ego Francos dicam Parisios, Polonos vero Varsovienses et Hispanorum regem, Carpethanorum. Satius fuerit, ista aliquando relinquere: nam populo Russico adeo ignotum est Moscoviticum hoc tamquam vniuersae gentis nomen, adeo ridiculum, si expleres, ut nihil supra,

Iam deinde Graeci Russos ab Scythica stirpe repetunt. Terentianus Pamphilus, cui vxor ducenda erat inuito,

nisi si id est, quod suspicor:

*Aliquid monstri alunt: ea quoniam nemini obtrudi potest,
Itur ad me.*

Nam quid ego nunc dicam de Scythis? quidquid obscurae originis est et peruetustae, vix deliberandi amplius atque considerandi spatio relicto, despondetur Scythis. Continuator Theophanis Byzantii (p) *ὁ Πῶς ἔθνος Σκυθικὸν ἀνθρώπων ἢ ἄγγελον.* Cedrenus (q) et Zonaras (r):
ἔθνος

(p) Henricus Brennerus nos in Seriem principum Iberiae p. 86.
(q) p. 121. (r) p. 551. (r) T. II. p. 162.

ἔθνος οἱ Ρῶς Σκυθικὸν περὶ τὸν ἀρκτῶν Ταῦρον, ἀνή-
μερον ἢ ἄγροικον. *Ros gens Scythica ad arctoum*
Taurum. Sic Michael Glycas (s): οἱ Σκύθαί, τῆτ'
ἔστιν οἱ Ρῶσοι. Ioannes Cinnamus (t): Ταυροσκυθῶν ἢ
Ταυροσκυθικῆς appellationibus delectatur et addit vno loco:
ἔστι δ' ἐν Ταυροσκυθικῆς πόλι, ὄνομα Κίαμα, lege
Κίανα seu Κίανα, ita enim puto Cinnamum scripsisse.
Nassir Eddin كويابہ مدينة روس *Cuiabah metropolis Rus-*
siae. Et corruptius Vlugbegus chan non modo in Ioan-
nis Grauii editione, sed etiam vt eum Ioannes Hudson
recudit كويا *Cuia.* Non enim Cuiaiam in Polonia
dicunt, sed Kiouiam in Russia. Nicetas Choniata (u):
ἔστι δὲ Γάλιζα μία τῶν παρὰ τοῖς Ρῶς τοπαραρχιῶν ἔς
ἢ Σκύθας Ὑπερβορέας Φασίν, *Galitza vna est prouin-*
ciarum Russorum, quos etiam Scythas Hyperboreos dicunt.
Nicetas Paphlago in vita Ignatii Patriarchae (x) τὸ μαι-
φονώλατον τῶν Σκυθῶν ἔθνος οἱ λεγόμενοι Ρῶς, *crudelis-*
simus et sanguinolentus Scytharum populus, quem Ros
dicunt. Sic illi fore, credo, vt ne quid puritati sermonis
Graeci detereretur. Nam istis temporibus, quibus Cin-
namus, Nicetas Choniata et Paphlago fuere, cum vera
eloquentiae dignitas et castitas sermonis dudum esset ex-
stineta, quidam inepte seduli satisfacere huic rei visi sunt,
si a veris gentium, vt tum erant, nominibus, veluti scae-
uis refugerent, prisca autem nomina e vetustis scriptori-
bus adoptarent. Ergo cum Herodotus, cum ceteri istis
in regionibus ad septemtrionem prodidissent Scythas, eo
in nomine Graeculi sese iactabant,

Tom. VIII.

E e e

et

(s) p. 319. (t) p. 136. 137. 127. (u) T. V. Concil. Hard. p. 964.

*et tum mirifice sperabant se esse locutos, cum,
quantum poterant,*

dicebant *Scythas*. At *Scythae* illis et *Cimmerii* et *Hunni* et *Auares*, *Slavi*, *Getae*, *Chazari*, *Pazinacitae*, *Vzi*, *Germani* et qui non? *Anastasius Sinaita*: Σκυθίαν δ'εὐ-
θασί καλεῖν οἱ παλαῖοι τὸ κλίμα ἅπαν βόρειον ἔνθα
εἰσιν οἱ Γότθοι καὶ Δάνεις, *Scythiam solebant veteres ca-
care clima totum septentrionale, ubi sunt Gotthi et Dani*.
Si humani generis isthoc nomen est, patiamur *Scythas*
dici etiam *Russos*: sin mediocris populus fuere *Scythae*,
pudor sit nobis, tot populos tam diuersos tota fere na-
tura, ad eandem stirpem referri. Sed satis iam de hoc
errore in *Scythicis* diximus. Cur autem *Russi* *Tauroscy-
thae*? *Taurus* *Herodotus* a *Scythis* distinxit, vetustiores
videlicet illa in *cherrhoneso*, forte *Cimmerii* generis. At
tandem *Scythas* illa in *Taurica* coluisse ostendit *Herodo-
tus*: quare *Tauroscythas* dixere *Graeculi* *Scythas* in *cherr-
honeso* et Σκυθοταύρης, vt *Arrianus* in *periplo Ponti
Euxini* (γ). Neque tamen hic constitit vagus error, sed
inde tantummodo profectus, toto *Septentrione* peregrina-
tus est. Nam *Taurum* montem aliquem deinde esse
sub boream credidere, decepti similitudine vocum, *Tauri*,
qui mons in *Asia* est et *Tauricae* gentis, veluti quae in
Tauro colat. *Eustathius Thessalonicensis* (z) huiusce *Ar-
cto* montis mentionem sibi visus est apud *Herodotum* re-
perisse. Nam cum dixisset, a *Tauro* in *Asia* diuersum
esse. *Taurum* borealem, οἱ δ'ἐνλαῦθα, inquit, Σκύθα
Ταυροσκύθα λέγονται ἀπὸ τῆ ἐκῆ Ταύρεσ ὄρεσ, ἅπαν
οἶδε

(γ) p. 20. (z) In *Dionysium* v. 168.

ἴδτε ἔν τῃ Ἡρόδοτος ἰσορῶν ἔν ἀλώς ὄρη Ταυρικᾶ, Σκυθικᾶ, *Scythae*, qui ἰσθμῖ colunt *Tauroscythae* dicuntur, a *Tauro* monte, qui ἰσθμῖ ἐστ, quem etiam cognouit *Herodotus*, recensens et ipse montes *Tauricos* sive *Scythicos*. Vide quantum *Graecia mendax ausa sit* in *Geographia*. *Herodotus* cum saepe atque multum tradidisset, *Scythiam* omnem campestem esse, ostendit etiam longius a *Volga* famam montium septemtrionalium remoueri. Montes dicit prope *Siberiam* nullo nomine, quos *Riphaeos* postea appellarunt *Graeci*, nunc dicunt *Vergaturios*. Nihilominus *Taurum* montem quasi *Herodoto* auctore in *Scythiam* transtulerunt: ut ille *Dionysius Eustathii*, qui *Cimmerios* canit ὑπὸ ψυχρῶ ποδὶ Ταύρου. Vbi ille error in situ deprehensus est, alii *Taurum* illum suum nulla opera, sine machinis et ferramentis remouerunt versus boream, vsque ad fontes *Borysthenis*: nam ἰσθμῖ *Claudius Ptolemaeus* *Alanicos* montes nobis pinxit. Neque *Carpathici* montes caruere fama et nomine *Tauri*: ac ne *Alpes* quidem, quod illis in montibus *Polybius* Ταυρίνης seu Ταυρίσκης, ita diuersis locis vocat (a), collocauit. Quare *Constantinus Manasses* (b) multum sese iactat in *Tauroscythis*, qui *Heraclio Imp.* *Constantinopolin* cum classe τῶν μονοξύλων obsederint. At *Theophanes Byzantius* (c) nos docet, *Auares* fuisse, et secundo *Danubio* classē illam deuectam venisse contra *Byzantium*. Habes *Manassis* *Taurum* in *Carpathicis* montibus. Hi qui *Ruffos* quoque *Tauroscythas* dixere, ne venustulum nomen intermoreretur, cum natura montes ad *Borysthenem* extulit

3 E e e 2

nullos,

(a) p. 294 144. 161.

(b) p. 76. 77.

(c) p. 264.

nullos, ipsi agesserunt cum ingenio suo, tum aliorum fide. Quare homines vanos et temerarios relinquamus.

Nouam opinionem Incertus auctor in vita Romani Lacapeni (d) protulit, Russos ab stirpe esse Francos: ἐκ Ρῶς, οἱ καὶ Δρομίται λεγόμενοι, οἱ ἐκ γένους τῶν Φράγγων καθιστάται, *Russi etiam Dromitae dicti, qui e Francorum orti sunt genere.* Anselmus Bandurius in Imperio Orientali (e) fragmentum Symeonis Logothetae protulit: Ρῶς δὲ οἱ καὶ Δρομίται Φερώνημον ἀπὸ Ρῶς τινος σφαιδρῆ διέδραμεν ἀπηχήμενος τῶν χερσαμένων ἐξ ὑποθήκης ἢ θεοκλυίας τινος καὶ ὑπερεχόντων αὐτῆς ἐπικέκληται, Δρομίται δὲ ἀπὸ τῆς ὀξέως τρέχων αὐλοῖς περιεγένετο. ἐκ γένους δὲ Φράγγων καθιστάται. Illud ipsum in Symeone Combesisii exstat (f) eo loco, ubi multa de gentibus et urbibus, vnde nomina duxerint, pleraque icuina et inepta. Perperam Combesisius interpretatus est: *Russi, (qui et congruo rei nomine Dromitae nuncupantur) a Ros quodam viro forti, cum suae monitu ac consilio, siue diuino quodam afflatu et oraculo pro potestate illis utentium eisque superiorum iniurias noxamque euasissent, dicti sunt: Dromitae vero ut appellarentur, cursus celeritas causam dedit: genus autem ex Francis ducunt.* Siue Φερώνημοι scripserit Logotheta, ut Combesisii codex habuit, siue ut Bandurii Φερώνημον perinde est: his enim modis Scholiastae loquuntur, cum vocem ab sono aliquo, seu quo alio casu deductam *nomen suum inde ferre* dicunt, praesertim cum dicunt ὀνομαλο-παῖσθαι παρὰ τὴν τῆς ἡχῆς ιδιότητα κατὰ μίμησιν τῆς Φωνῆς. Cum

(d) p. 262.

(e) T. II. p. 33.

(f) p. 465.

Cum autem ille Φερώνυμοι posuerat, recte subiicit, δια-
 δραμόνες, vt alter Φερώνυμον διέδραμε. At ἀπο-
 χήματα Combesis pro Banduriani codices ἀπηχήμα-
 τος nihili est. Et cum Combesius conuertit, *a viro*
quodam forti Ros, hoc eum fefellit, quod Ρῶς τινος scri-
 ptum est, tamquam *Rossi cuiusdam*. Hic vero mos
 grammaticorum est, vt isthuc τινός post vocem, a qua
 alteram deriuant, praesertim barbaram, obsoletam, fictam,
 ponant. Vt cum Scholiasta Theocriti, sic ait (g): ἡ
 κῆρος διονὲ χώρη τις ἕσα, ἀπὸ τῆ δι' αὐλῆς κῆσθαι
 et alibi (h) κισσύβιον ποτήριον, παρὰ τὸ κῆσθαι ἐν
 αὐλῶ τὸ πίνειν χυσιπίον τι δν. Sic alii (i) κόβαλος,
 δλησῆς, ἀπὸ κόπιδος κοπίβαλός τις ὦν, aut Φιάλη
 κατὰ μελάθεσιν τῆ π εἰς Φ πιάλη τις ὦν aut βάρβιλος
 ἔρηλαι, διονεῖ βαρύμιλος τις ὦν, ὃ βαρέαν τὴν Φωνὴν
 ἀφίεις. In his τὸ τινός ἢ τις παρελκόντως κῆσθαι
 videtur, cum Latine veritas: Graece tamen et necessarium
 est et elegans. Cum econtrario ab obscuri hominis no-
 mine vocem ortam obseruant Critici Graeci, tum sic
 potius efferunt, vt Scholiasta Theocriti, τὸ Λακίνιον ἀκρω-
 τήριον, ἀπὸ τινός Λακίνα Κωρυθαία (Philo p. 747.
 ὡσανεὶ δεχάδα ἕσαν V. quomodo Plato). Iam locum
 Symeonis Magistri, ipsius vt puto auctoris culpa con-
 fusum, sic restitui posse video. Ρῶς δὲ ἢ Δρομίται,
 Φερώνυμοι, ἀπὸ ῥῶς τινος σφοδρῆ ἀπηχήματος, τῶν
 Χρησαμένων ἐξ ὑποθήκης ἢ Θεοκλυτίας τινός καθ' ὑπε-
 ρεχόντων αὐλῆς, ἐπιπέκληται *Rossi* (iidem qui *Dromi-
 tae*) *vocabulo dicti sunt, quod ortum habet a Ros, id est,*
gravi et uebementi sono, quem siue ex condicito, siue
E e e 3 iussu

(g) Id. A. 47. (h) Id. A. v. 27. (i) Etymologus magnus passim.

iussu aliquo deorum edunt contra hostem, cum superior bello est. Διέδραμεν aut διαδραμόντες obrepit Logothetae, cum forte apud alium ante se sic legerit: Ρῶς Φερώνυμον ἀπὸ σφοδρῆ διέδραμεν ἀπηχήματος, ex quo cum faceret adiectis ceteris Φερώνυμοι διαδραμόντες multo magis sensum obscuravit otiosa voce. Cetera deinde, Δρομίται δ' ἀπὸ τῆ ὀξέως τρέχων αὐλοῖς προσεγένελο, malo, ut Combesius, quam ut Bandurius περιγένελο, *Dromitarum nomen illis tributum a celeri cursu.* Cetera Combesius recte. Credidi initio, Graecos, cum adueuissent Russos dicere Tauroscythas, *Taurinos autem Polybii recordarentur, eo ipsos tamquam ab Alpibus profectos dixisse Francos.* Sed alia causa est, et dicam tribus verbis, geographiae summa inscientia. Nam Franciam Graeci vocabant magnam Europae partem, praecipue eam, in qua Germanicae usus linguae fuit. Iam cum domus regia Russorum a Normannis fuit, Varagi autem multi, quos Scandinavos, Normannos, Danos, fuisse demonstrauius, in officiis palatinis exercituque Russorum versarentur, magna deinde alia multitudo Scandinava Slavis permista, quorum lingua a Francica non admodum abhorrebat, eo Constantinopolitani Russos *dixere ortos a Francis, hoc est a Scandinavis.*

Haec res propius attingit Russorum origines, quales ab omnium rationum rerumque veterum consideratione informatas animo habeo. Dixi alio loco, mihi videri ante Slavos has terras sub septemtrione incultas fuisse a Fennici corporis gentibus: causas illo ipso in loco edidi. Neque tamen nego inter Fennos coluisse Gothos. Nam
cum

cum Getae principio cum Thracibus eodem corpore supra Macedoniam ad Istrum vsque egerunt, vicini ad occasum ceteris Germanicis populis, inde iam eos sub aetatem Augusti Caesaris, et paullo ante eum, traiecto Istro Borysthenem petiisse alibi demonstraui. Sequuntur deinde tempora, cum ad Volgam vsque latissimis spatiis regnarunt, donec, quod in primis accurate ex Ammiano Marcellino tenemus, ab Hunnis pulsi sunt. Scio magnam eorum partem in Germaniam, Galliam, Italiam, atque Hispaniam, sese effudisse: tamen haud paruam eorum manum puto magis ad boream et ipsam in Scandinauiam concessisse. Non est huiusce loci, vt id exequar, dabitur isti argumento et tempus aliud et maior oportunitas dicendi. Tantum enim abest, vt veteres Scandinauiae auctores, qui Iornandem nondum viderant, Scandinauiam vaginam gentium prodant, e qua Gothi tota Europa illustres exierint, vt potius iidem illi suas incolas non aborigines edant, verum aduentitios, qui alios sedibus expulerint, vtque Gothicum nomen in Scandinauia ferius ortum referant, quam fuit illis Gothicis temporibus. Post ista tempora Slauī caput extulerunt. At illi magis australes tractus tenuere, donec eodem, quo Getae iure, regiones inuaserunt sub borea. Ita superiores seu boreales Slauī, tum Geticis reliquiis, tum Fennis permisti, et reges sibi imposuerunt e Getico corpore, et ab hoc dispersione nomen Rossicum. Isti dispersi Slauī et quasi sati, coniuncti cum ceteris gentibus vnum in corpus atque vno sub rege, magnas res gesserunt, ceterisque Slauīs sub iugum missis, Borysthenis maximam tenuere partem, ipsa cum Kiouia. Cum autem Slauī a Geticis ciuibus, quo-
rum

rum ab stirpe reges erant, dissentirent, rege pulso, Nouogrodienfes falces contulerunt in Gostomyslum, quod quidem ita testantur Russica monumenta, virum Slauici generis, vt vel nomen indicio est; alii Russi alios in principes. Illo autem ipso Gostomyslo auctore, multis intestinis dissidiis et tumultibus fracti, ex eius regis, quem pepulerant, domo haeredem Ruricum, circiter A. C. 862. reuocarunt Nouogrodienfes. Rurici filio Igori Oleg tutor fuit: is Kiouiam, interim ab Oscoldo et Diro, Scandinauici generis principibus, regno Rossico superioribus rerum conuersionibus abreptam, eo maxime nomine vindicauit, quod ad iustum dominum rediret. Inde iam recuperata sunt cetera, quae antea Russici et nominis fuere et regni.

Ista rerum momenta coniunctim posui, vt summa mearum cogitationum vno ambitu spectaretur. Quaedam sunt quae laboriosas demonstrationes requirunt et alteri magis loco aptas, quare mihi interim concedi tamquam hypotheses velim, quoniam confici tam celeriter non possunt. Ante Ruricum reges Russiae fuisse ex Skioldungorum illustrissima domo et alios, tum Snorro Sturlaenus nos docet, tum aliae saegae Septemtrionales. Et Russicum nomen fuisse Rurico antiquius ex eo colligo, quod, cum A. 864. 865. Kiouienfes, qui tum sub Rurico non erant, Constantinopolitanam expeditionem susciperent, iam ita peruulgatum nomen fuit, vt Constantinopoli haud aliter, quam Russi dicerentur. Testem vide coaetuum Nicetam Paphlagonem, ne forte existimes, ceteros, qui se ritus prodiderunt, recentiori nomine abusos. Testem deinde habes Photium Patriarcham in epistola encyclica,

quo

quo quis potest esse maior. Et cum Photius commemorata expeditione illa sic ait: *Russi, qui infinitos populos sibi subiecerunt, et propterea multum elati aduersus Romanum imperium manus iniecerunt.* Res tantae geri non potuerunt tanta cum fama gloriae, nisi multo tempore. Immo locum producam ex Annalibus Francicis Bertinianis, dignum vt aureis in tabulis figatur, non modo vt hac ponamus integrum. Hic anonymus (k) ad A. C. 839. Theophilo Michaelis patre Imperatore Constantinopolitano. *Misit etiam Theophilus Imp. cum eis (legatis ad Ludouicum Pium Imp.) quosdam, qui se, id est gentem suam, Rhos vocari dicebant: quos rex illorum, Chacanus vocabulo, ad se amicitiae, sicut asserebant, causa direxerat: petens per memoratam epistolam, quatenus benignitate Imperatoris redeundi facultatem atque auxilium per imperium suum totum habere possent: quoniam itinera, per quae ad eum Constantinopolin venerant, inter barbaras et nimiae feritatis gentes immanissimas habuerant, quibus eos, ne forte periculum inciderent, redire noluit: quorum aduentus causam Imperator diligentius inuestigans, comperit, eos gentis esse Sueonum, exploratores potius regni illius nostrique, quam amicitiae petitores ratus, penes se eousque retinendos iudicauit, quoad veraciter inueniri posset, vtrum fideliter eo nec ne peruenerint: idque Theophilo per memoratos legatos suos atque epistolam intimare non distulit, et quod illius amore libenter susceperit, ac, si fideles inuenirentur, et facultas absque illorum periculo in patriam remeandi daretur, cum auxilio remittendos: sin alias, vna cum missis nostris ad eius praesentiam dirigendos, vt,*
 Tom. VIII. F ff quid

(k) Apud Duchesnium Tom. III. p. 195. b.

quid de talibus fieri deberet, ipse decernendo efficeret. Quid iis factum sit, in Annalibus Bertinianis non inuenio. Habes Rosficum nomen A. C. 839. annis XXI II. ante Ruricum. Habes regem Russorum tantae maiestatis, ut se *خاقان Chakan*, more Chazarorum et Turcarum dixerit: quod nomen omni in oriente tantum fuit, quantum Constantinopoli *Βασιλέως* aut Romae Imperatoris et Augusti, aut Regis regum et Regis magni in Persis atque Parthis. Habes denique testimonium luculentum, reges ab iis ipsis Varagis seu Scandinavis fuisse, e quibus postea fuit Ruricus. Neque iam mirum est, cum Lithuani Russiam *Guday* Russos *Gudas* vocant, scilicet e veteri memoria *Gothiam* et *Gothos*: neque deinde etiam, quod Fenni Suedos (1) appellant *Rossalain*, sive *Ros populum* (*alain* enim populum significat) nimirum cum et illi Russorum vetus in se imperium, reges autem generis Scandinauici recordantur. Et cum apud Constantinum Porphyrogenetam Rossica cataractarum nomina a Slauonicis differunt, Slauonica quidem nunc vulgo etiam cognoscuntur, Rossica seu superiorum ad Nouogrodium populorum vocabula Scandinauica magis sunt. Ex quo intelligas, etiam linguae Scandinauicae seu Gothicae veteris aliquem usum his in regionibus fuisse. Quare cum Septentrionalium scriptorum, qui quidem veteres sunt neque Olao Magno, aut Rudbequio et Peringskioldo et Saxoni illi Grammatico similes, illorum igitur scriptorum fides his praeiudiciis firmata est, utar eorum auctoritate alio loco, ut ostendam hanc Augustam Russiae domum
vltra

(1) V. hoc loco sententiam Henrici Brenneri in notis p. 87. et ex-
pende.

ultra Ruricum Skioldungis inferi et genealogiam probabilem produci vsquē ad Christum natum.

Dixi supra, Slauos paullatim Septemtrioni succedentes, quod non contiguīs regionum tractibus, sed dispersi inter alios populos sedes fixerant, eo dictos fuisse Russos. Luithprandus Ticinensis παρὰ τὸ ἔξοιον, vt audiuerat Constantinopoli Graecos dicentes *rubrum colorem*, Russos appellatos credidit. Visum item est Graecis quibusdam, qui vbi peregrina vocabula audiebant, confestum grammatico supercilio e suo sermone aliquid commentabantur simile, vnde essent ducta. Pari iure ab *equis* dictos putares. Ionas Rugman in Monosyllabis Islandicis: *Hross*, *equus*. Sic populi quoque Teutonici. At cum et Slauī et Russi ipsi appellatione illa sunt vsi, non sane fuit adscititia a Graecis, quos nondum adierant, cum iam Rossicum nomen exstaret: neque vel ipsi Scandinauī vel Russi admodum equestri gloria sese iactarunt maior pedestris fuit et naualis denique, vt dicam postea, adeo non a Scandinauis datum est Rossis nomen, vt etiam diu in Scandinauia ignoratum fuerit. Quare mihi ille Slauonicorum quorundam Scriptorum consensus placet, qui a разсѣяніе *Rassianie* seu *dispersione* et разсѣя *Rasseia dispersit*, pro quo *Roseia* vulgo, nomen hoc deriuant, tamquam *sparfos et satos* dicas. Haec mihi potior sententia nunc videtur, quam quae olim in mentem venit, quae etiam Synopsis auctori fuisse videtur, a *Rha* seu *Rhos* flumine, Herodoti *Araxe* nostro Volga nomen accepisse. Neceffe autem est, vt primum quot modis Russicum nomen a vetustis scriptoribus efferatur, explicemus.

F f f 2

mus.

mus. Nihil dicam de *Rutbenico* nomine, quod per errorem ab Aquitanico est tractum: a Graecis *Ruffi*, plerumque ῥι Ρῶς, vt. ab Annalium Bertinianorum auctore *Rbns* nonnumquam ῥι Ρῶροι appellantur. A Latine commentantibus vario modo. Lambertus Schafnaburgensis aliique, quod in Germania *Ruffen* pronunciari audierant, scripsere *Ruzenos Rusciam* et *Rufcos (m) Ruffos, Ruzzios, Ruffiam, Rutziam (n)*, alii magis corrupte *Ruciam* et *Rutiam (o)* ediderunt. Corruptissime ad Italicam pronunciationem, qui *Rugiam* et *Rugios* et deinde *Rugos (p)*. Nisi hoc potius factum ob memoriam Rugiorum, qui ipse exercitu Attilae fuerunt,

subito cum rupta tumultu

Barbaries, totas in te transfuderat arctos

Gallia: pugnacem Rugum comitante Gelono.

vt Sidonius Apollinaris cecinit (q). Res in primis notae ex Iornande, cuius hoc in loco quaedam Prisci Panitae reliquiae ab eruditis magni fieri solent. Ex eodem Iornande et Paulli Diaconi Longobardicis Excerptisque auctoris ignoti Valesianis, quicquid id est, de Odoacro et Rugiorum rebus scimus. Non dico fuisse *Ruffos*, neque enim demonstrari potest, tamen illorum nomen cum *Russico* confusum est soni congruentia. Ioannes Peringskioldus ad vitam Theodorici regis omnia permisit (r): His
tem-

(m) Lambertus p. 156. 157. Annalista Saxo p. 265. Annales Hildeshemenses in Scriptoribus Brunsvicensibus T. I. p. 718. Quedlimburgense chronicon ibidem T. II. p. 280. Saxo Chronologus p. 177. (n) Liuthprædus l. c. Adamus Bremensis H. E. p. 58. Chronica Slavica Lindebrogi p. 189. ed. Fabr. (o) Hermannus Cornerus p. 482. (p) Eggehardus Vraeiensis p. 300. Chronographus Saxo p. 160. Vita S. Adalberti in Mabilonii Actis Benedictinis Sec. V. p. 576. (q) Panegyrico in Avitum v. 319. (r) p. 419.

temporibus, inquit, Odoacar natione Rugius, siue Saxo Teutonicus (aliis dicitur Russus vel Slauus a lingua Slaua, qua eo tempore utebantur ad littora maris Baltici) multitudine armatus Turcilingorum, Herulorum, Sueti-
 corum quoque, siue, quos nunc Suedos ab insula nuncupamus, ab extremis fere Saxoniae finibus venit in Galliam. Nimirum Trithemius Abbas Viro summo impositum, cum crederet, Rugiam insulam Pomeraniae praetentam, priscam Rugorum Odoacri sedem fuisse: inde cum aliquando Slaui Pomeraniam et Rugiam tenuere, Peringskioldus, modo Saxonas, modo Slauos et Russos fuisse credidit. Et quod Suedos huic memoriae inferit, id a Sueuorum illis in bellis mentione tractum. At Rugiorum, qui cum Attila et Odoacro fuere, priscas sedes ad Pontum Euxinum et Danubium nobis monstrauit Ioannes Iacobus Mascouius V. C. in Historia Germanorum, elegantissimo opere, vt ad confutandum Trithemii opinionem nostra sedulitate nemo indigeat. Russos, vt ad eos reuertar, tandem Germani superiores dixerunt *Reussen* seu *Reussen*, dialecto suae indulgentes, vt ille qui Ernesti Ducis Bauariae historiam commentus est. Scandinauis prisci diu ab hoc Russorum nomine abstinerunt. Nam tamen Saxo Grammaticus multus est in Russorum memoria et Rutenorum, tamen quantum sibi indulerit, ex Snorrone Sturlaeo apparet. Quid Saxonem tefellerit, alias dicam. Peringskioldus (s) e codice Msc. de primis Christianae religionis incrementis in Gothlandia, testimonium produxit, multos e Gothia petiisse Palaestinam *um Ryzaland oc Gricland, circum Russiam et Graeciam* Sed

F f f 3

recep-

(s) l. c. p.

recentior hic scriptor est, vetustissimus quisque nomen ignoravit, et vel *Gardarikiam* dixit, vel *Holmgardiam*, vel *Ostrogardiam* et *Austurland*. Hungari Russos et *Franciai nepec Francicum genus* appellant, et *Oroszoc nepec, Orossicum populum*. Georgianis *Russet* Russia, ut *Franket* Francia, quod nos Henricus Brennerus amicus noster, qui inter eos egit, docuit. Turcae et Tartari, ut *Abulgasi Bahadur chan* Russiam appellant اوروس واروس *Vrus* et *Orus* ὄρουλονωσ et روس *Rus*, quod Arabibus notius est, Russum autem روسن الاصل *Rus alazel* aut etiam صقالبة *Zkalbat* et numero multitudinis صقلاب *Siklab* seu Slauos. Mungali, Calmucci, plerique ad orientem populi *Orus* dicunt. In diplomate quodam foederis inter Russos *et Sinos Orus i Zaban Kan, Rusorum Albus Chan*. Poloni Russiam vocant *Rus kraj* seu *Rus regio* et Russum *Russin*. Russi ipsi hozemla *Ruskaia semla* Russiam vocant, et Russum *Ruskoi*, рускаѣ *Rusak*, vsu elegantium Russos. рускія *Ruskia* adhuc vetustima vocis pronuntiatio in lingua rossіѣскіѣ *Rossiski* Rossiacus et *Все росіѣскіѣ et* *Все росіѣскаѣ totius Rossiae*.

Itaque primum *Ros* deinde κατὰ διάλεκτον *Ras* et *Rus* dicti sunt Slauoni. Vtrumque omnibus in dialectis Slauonicae linguae, praesertim in compositis, *diuidendi, dirimendi, dispergendi, diffluendi, spargendi, disseminandi* significationem habent. Eadem in Prutenico et Lithuanico

nico fermone semper fuit, vnde vetus Prussicum vocabulum *Russen*, *dispersio*. Neque aliud videtur fuisse isthuc *Pōs*, quo Graeci testantur, Russos in bello vfos, cum rem male gestam inclinare sentirent, quam vt se mutuo adhortati sint, vt fuga sese dispergerent, e qua deinde se recipiebant prisco more in aciem. Procopius Caesariensis (t) testatur: Slauinos dictos fuisse *Σωρέες*. Graecum vocabulum si explices, nihil aliud est, quam si *dispersos et disseminatos* dicas, quod Slauonice aliter non explicaueris, quam *Rossos*. Id iam monuit Stanislaus Sarnicius (u): *Sporos quidam Russos, non inepte, id est dispersos exponunt.*

Non asseuerate dixerim Rossicum nomen iam ante Iustinianum Imp. vna et eadem in gente Slauonica permansisse. Nasci et occidere potuit. Nam et *Raschi*, qui nunc in Illyrico degunt, id nominis ab eadem causa accepisse videntur, neque eos tamen idcirco cum his Russis proximiori necessitudine deuinctos fuisse puto, quam quod et ipsi ab stirpe sunt Slauoni. Multum vero nostram de nomine Russico sententiam confirmat, quando Slauonico in populo exempla exstare cernimus vocis in populorum et locorum appellationibus vsurpatae. Et haec sunt multo etiam vetustiora. Vt mea fert opinio, hoc vocabulum *Rbas*, *Ros*, *Rus* a Slauis aut potius ab eorum maioribus Sarmatis etiam Volgae fluuio tributum est, quod sese latius dispergit multa in ostia: vt in Prussia quoque alueus quidam Niemenis *Rus* appellatur. Volgae vetus nomen *Araxes* apud Herodotum, *Rba* Ptolemaei, non differt

(t) De B. G. p. 498. (u) Annalium Polonicorum L. IV. p. 1017.

differt a Slauonico *Ras*, *Ros* et *Rus*. Recordemur, nunc quoque ipsa in Russia dialectos ita differre, vt, vbi alii quarta vocali vtuntur, isthic iterum alii pronuncient primam. Sic nomen fluuii in Armenica, quem Araxem Graeci vocant, neque fuit aliud, neque nunc est, quam نهر روس *Nabar Rus* aut *Ros*, vnde Araxem fecere Graeci. Eledrisus postquam hunc Araxem descripsit, septimam climatis partem ingreditur et de نهر روس *Nabr Ros* agit, cui nomen sit اتل *Atel*, hoc est de Volga. Gabriel Sionita et Ioannes Hefronita dubitasse videntur, an fluuius *Rossus*, tamquam suo nomine, an *fluuius Russiae*, regionis explicari debeat. Si vero Volgae nomen *Rus*, siue *Ras* e Slauonico, vt dixi, interpretemur, nihil aliud significat, quam late patentem fluuium et in ramos dispersum. Ad ostia Volgae Sarmatici populi coluere, a quibus Slaui egressi sunt: et coluere iam ante Herodotum, vt non absurdum sit, ab iis fluuiio nomen fuisse inditum. Βορϑσχοι Claudii Ptolemai Πορυϑ *Porus*, ad *Ruffum* fluuium. Et, vt paullulum excedam finibus, vox illa *Rus* seu *Ros*, in Ρωξανάκη, ἔνθα Σάκαις τὸ βασιλεῖον ἦν, *Roxanace regia Sacarum*, exstare videtur. Nicolaus Damascenus in *Excerptis Constantini Porphyrogennetae* (x) tradit, post caedem Μαρμάρεω τῆ Θρακῶν βασιλέως (vbi recte Henricus Valeus emendat τῶν Σακῶν) reginam fuisse Ζαρινᾶαν. Sunt haec ἐρωλικότερα, quae de Zarinaea et Stryangaeo narrat et Ctesiae figmentis non dissimilia, tamen et nomina memouent et vicinitas Sacarum atque Sarmatarum, vt, si, quae Nicolaus Damascenus narrat, historiae finibus exigenda

(*) P. 437.

genda cenſeam, tamen nomina retineam, vt perpetua. Stephanus Byzantius, Ροξονοαία πόλις, τὸ ἔθνικὸν Ροξονοαῖος, Ροξονοαϊάτης ἢ Ροξονοαϊανός. Vidit iam Lucas Holſtenius, eam urbem dicere Stephanum Byzantium, quam Nicolaus Damascenus celebrauit. Et Stephanus cum τὸ ἔθνικὸν huius urbis tribus modis enunciat, memoriam eius haud paucis in ſcriptoribus reperiffe videtur. Quid autem Ζαριναία regina? an iſthuc vetus nomen *Czar* eſt? Nempe vt mea opinio fert, iſ titulus ſummae maietatis vetuſtiſſimus fuit apud Sarmaticos populos Perſis چار et چهار *Czar* et *Czebar* eſt *thronus regius*. Et veteres Slauos quoque *Czebar* dixiſſe, Scylitzes Curopalata auctor eſt (y). Nam cum Baſilius Porphyrogenneta Imp. aduerſus Ioannem Bulgarum ante ſigna equo inuectus, ab exploratoribus noſceretur, hi cum impetu in caſtra ſeſe receperunt, vociferantes Βεζῆτε ὁ Τζεῶρ Slaunice Обжице Царь, *fugite Tzar* ſc. adefſe. Scio eius loco Georgium Cedrenum ſcripſiſſe ὁ Τζαίσαρ vt ſit *Caesar*, ſed magis credo Scylitzen veram lectionem Cedreni conſeruaſſe, et Bulgaros Imperatorem Byzantium vocaſſe *Czar*. Atque cum Symeon Bulgarus Romano Lacapeno et collegis titulum Βασιλέως extorſit, haud alio vocabulo videtur Bulgarice dictus, quam *Czar* pleno maietatis honore. Nam apud Cedrenum (z) inter eos, qui Baſilio Porphyrogennetae Imp. ſeſe dederunt ſunt praeter viduam Vladislai, proceres ὁ Νεφορίτζης, ὁ Ζαρίτζης ἢ ὁ νεὸς Δοβρομηρός, *Neforitzes*, *Zaritzes*, et *Dobromirus iunior*. Quo in loco *Zaritzen* credo iuuenem regium fuiſſe. Recordemur deinde in regionibus Sarmaticis

Tom.VIII.

G g g

ticipis

(y) Apud Cedrenum p. 712. (z) p. 713.

ticis ad Pontum Euxinum *Zarbiemum* Plutarcho commemoratum in Lucullo (a) et *Ζαριάδην κυρρεύσαντα τῶν ὑπεράνω Κασπίων πυλῶν μέχρι τῆς Ταναΐδος* apud Charetem Milesium in historiis Alexandri *Zarmaerum* (b) Armeniae regem apud Mosem Chorenensem et apud Theophanem Byzantium (c) *Σαρβαναζῶν* aut quod saepius exstat *Σαρβαρατῆν* et apud eundem (c) *Σαραβλαγῶν*, duces Persarum Regia Bactriorum fuit *Ζαρίασ-ωα*, celebrata Polybio, Arriano, Straboni, aliis. Huius rationem nominis credidi esse a *ز* *zah* seu *zeb* et *راس* *rasb*, *neruo mansueto mitique*, tamquam urbem pacificam dicas. Quid vero, si aliquis malit a *چار* *Tschbar*, throno seu principe, et vel ab *ازب* *asb* quod *pilojum* significat, vel ab *اسب* *asb*, *esb*, quod equi nomen est? Equidem neque adfirmo, neque nego. At *שׂר* *Sar* principis nomen etiam apud vetustissimos Hebraeos frequens fuit. Ludouicus Thomassinus Oratorii Presbyter (d) *Hinc Scar et eliso sibilo κύριος, κοιρανός forsan et Gallicum Sire: hinc forsan et apud Moscos Czar, summus eorum princeps*. Non abhorret animus ab hac coniectura, quando aliae quoque voces dignitatum ab vetustissima memoria multas per gentes quasi sparsae et seminatae et multimodis tortae atque tonfae sunt, ut vel in voce *Koenig* Otto Sperlingius multa eruditione ostendit. Et Anglo Saxonicum *Sire*, Runicum *Siar* et *Sir*, quo etiam Noruagi sunt vsi, et codicis argentei vocabulum *Sibor*, vnde Olaus Vormius Teutonicum *ber* derivauit,

(a) p. 512. (b) p. 256. (c) p. 259. (d) In Glossario universali Ebraico p. 1026.

uauit, eadem omnia significatione *domini*, a Graeco κύριος et vt postea dixere κύρ ducta videntur, nisi *Sibor* Gothicum cum Francisco Iunio et Georgio Hickefio (e) hoc censu eximamus et a *victoria* dictum putemus, argumento sunt, item ex *Sar* potuisse fieri κυριον, quam ἐν τῷ κυρίῳ *Sir*. In Dacia veteri mihi videor eiusdem nominis vestigia reperisse. Ad Sargetiam fluium fuit Ζαρμιγέθσα βασιλειον, vt Claudius Ptolemaeus, vt alibi idem Ζαρμισογιέθσα, quasi *Myforum et Geta- rum thronus*. Sic in titulo apud Gruterum (f).

IMP. CAES. ANTONINO
PIO. AVG. COLONIA
SARMIZAEGETHUSA

Iterum apud Gruterum (g)

COLONIA. VLPIA. TRAIAN.
AVG. DACICA. SARMIZGETUSA

In aliis fere SARMIZ. in vna Zamoscii inscriptione: SARMIZEG. Et nomina vero dignitatum temporis tractu aut altiori maiestate sese extulerunt, aut vilescere et infra classẽm coeperunt poni, vt mirum non sit, si idem huic titulo ab omni aeuo acciderit. Hoc loco inuidiam audaciae coniectandique deprecor. Nihil ita talibus coniecturis tribuo, vt aliis obrudam. Dixi quod mihi videatur: potest aliis videri aliter, non repugno. Qui Russicum *Czar* a *Caesare* deriuant, maioribus difficultatibus vrgentur, quando in aula Byzantia raro vsurpatus est titulus *Caesaris* et fere minori dignitate fuit

G g g 2 quam

(e) In Grammatica Franco Theotica p. 98. 2. adde eum in Grammatica Anglo Saxonica p. 120. (f) p. 257. 1. (g) p. 437. 1.

quam Βασιλέως. Quamquam non nego, orientales nonnumquam Imperatorem Constantinopolitanum *قصر Kizar* et *Kizar* nuncupasse, proximo ad *Czar* vocem sono: tamen si a Caesare Rutheni nomen isthuc duxerunt, non longius reiectorum populorum pronunciationem aucupaturi fuisse videntur, sed ut Constantinopoli audiebant, dicturi. Et ne quid per aetatem corruptum putes, en tibi vetustissimam Slauonicorum Bibliorum versionem, quae iam tum haud aliter edidit vocem, quam nunc in usu est, *Czar*.

Vt autem vetusta ante Ruricum tempora *maiori* in luce versentur, necesse est, de forma rei publicae inter Slauonos quaeri. Non excedam plane spatium ad ultimam Slauonicarum rerum memoriam, sed me intra viciniam huiusce acui, quod tractandum suscepi, continebo. Satis constat, multos in populos diuisos fuisse Slauonos. Qui inde ab Albi ad Vistulam vsque coluere, in duodecim censebantur (*b*). Erant deinde ad orientem Chrobati, Seruii, Zachlunitae, Terbuniotae, Rentani, Canalitae, Drebliani, Lenziniani, Vltini, Cribetae, Bolgari, Morau, Russi et quae alia nomina exstant. Ut e Constantino Porphyrogenneta Imp. constat, singuli populi minores in gentes diuisi, suas sibi res publicas condidere, aut in speciem popularis libertatis, aut principatus. Nam apud plerosque eum statum fuisse reperio, qualem Saxo, poëta Caroli M. aequalis, editus a Reineccio et Leibnitio, cecinit paullo ante se fuisse in Germania:

Quae

(b) Chronographus Saxo ad A. C. 960.

*Quae nec rege fuit saltem sociata sub vno,
 Ut se militiae pariter defenderet usu:
 Sed variis diuisa modis plebs omnis habebat
 Quot pagos, tot paene duces, velut vnius artus
 Corporis in diuersa forent hinc inde reuulsi.*

Ita accidit, vt quidam populi aliorum potestati subicerentur, vt Slauī Byzantio finitimi Imperatoribus Constantinopolitanis, vt Chrobati deinde Ottoni Imp. Romano, vel ipso Constantino Porphyrogenneta teste. Qui sub Byzantio imperio fuerunt, Michaelē Amoriensi Balbo Imp. negligentius rem gerente, iugum Romanum excussere. Liberi facti, ἀυλονομοί τε ἢ ἀδέσποτοι καθεστῆκισαν ὑπὸ ἰδίων ἀρχόντων μόνον ἀρχόμενοι, Chrouati, Serui, Zachlumi, Terbuniorae, Canalitae, Diocletiani, Rentani, vt testatur Constantinus Imp. (i) et incertus Auctor rerum Basilii Macedonis (k): quamquam et hic auctor et Cedrenus, alterius Michaelis, qui Theophili filius fuit, quique post illum Amoriensem imperauit, socordiae tribuunt. Huius autem Michaelis temporibus, cum Slauī in Macedonia et Illyrico ab Agarenicis classibus vexarentur, legatos Constantinopolin misere de auxiliis. Legati veterunt Michaële iam defuncto, imperante Basilio Macedone. Auxilia ab Imperatore submissa, pulsi Agareni, Slauī in fidem recepti. At ceteri Slauī, qui longius remoti erant, numquam in Imperio Constantinopolitano censi, suos habuere duces atque magistratus, suas leges, sua iura. Constantinus, vbi quosdam populos nominauit, ἀρχοντας, inquit (l), ὡς Φασί, ταῦτα τὰ ἔθνη μὴ ἔχουσι

G g 3

ἔχουσι

(i) De A. I. p. 87. (k) p. 178. Cedrenus p. 576. (l) l. c. p. 87.

ἴχη πλὴν Ζεωάνης γέροντας, καθὼς ἔτι οἱ λοιποὶ Σκλαβίνιοι ἔχουσι τύπον, *principes, ut mihi relatum est, hi populi habent nullos, praeter Supanoffenes, sicuti et ceteri Slauici populi eandem reipublicae formam seruant.* Exemplo sunt Chrobati in Dalmatia et Illyrico, diuisi a Bielochrobatis, seu Chrobatis Albis Transdanubianis. Hi Chrobati in Ζεωανίας ἰά in *Zupanias* χι. distribuebantur (m), quarum nomina Constantinus recenset partem maximam Slauica, partem indita a Graecis. Ioannes Lucius (n): *zupa* et *zupania* explicat *populum* vel *regionem a populo incultam.* Diocletes presbyter, quisquis fuerit, in Historia Dalmatica tradit, a Suetopolco primo Dalmatarum rege, *Banos* suo in regno tamquam *Duces* et (*Gjupani*) *Supanos* tamquam *Comites* fuisse institutos, ut hi urbium praefecti, ad omnia concilia ius suffragiorum haberent, isti maiori dignitati principes essent. De Seruis Villermus Tyrius (o): *hi magistratus habent, quos Suppanos vocant.* Qui summæ rei praeerat apud Seruios, is quoque a Niceta Choniata (p) Ζεωάνος appellatur. At a Cinnamo (q) *Αρχιζεωανος τῆς Σερβικῆς.* In actis Innocentii III. P. R. apud Ducangium est *Megajupanus Seruiae*, partem Graece, partem Slauonice, *Μεγαζεωανος* enunciatum, ut *Megajupan.* De Dalmatis etiam Anna Comnena (r), *Balkanum* aduenisse scribit, *ἑπαγόμενον τῆς τε συγγενεῖς ἔκκερτους τῶν Ζεωάνων.* *Balcanus* ille, ut alibi scripsit Anna Comnena (s) τὸ πᾶν τῆς ἀρχῆς τῶν Δαλματῶν Φέρων. Principem Dalmatiae dicit, quem *Αρχιζεωανον* τῶν Δαλ-

(m) Constantinus l. c. p. 95. (n) Hist. Dalmat. Lib. l. c. 13. (o) p. 977. (p) p. 278. (q) p. 118. (r) p. 265. (s) p. 251.

Δαλματικῶν Cinnamus (t). Etiam Bohemi suos Zupanos habuere. Godofredus Monachus S. Pantaleonis (u): *regnum Boëmiae abiudicatum Odoacro regi per sententiam principum, praesentibus Supanis et pluribus nobilibus terrae.* Historia Australis (x) *Zabifius Sopanus quidam nobilis et potens Boëmus.* De Polonis Chronicon Montis Sereni testimonium perhibet (y): forte inde adhuc *pan*, dominus, ut maioris dignitatis vox abusu viluerit. Nam *Su-pani*, nomen dignitatis Senatoriae fuit: ut γέροντας Constantini Imp. interpretemur *senatores*. A Slauicis gentibus vulgatum etiam inter alterius corporis populos. Lithuani adhuc, sed veluti proletarium honoris titulum adhibent: Prussi veteres, vnius originis populus, eodem vocabulo vsi sunt. Et habuerunt tamen alia nomina, quibus vterentur tamquam suis. Prussis *viraefts*, princeps, *viraefti*, proceres: sed et nescio, an peregrinum, *rekis*, *reykies*, *rykies*, *rickis*, dominus, ut Lithuanis *wiesz-pats*. Hungaris *Ispan*, ab eodem vocabulo. Immo Constantinopolitani quoque suum ἐπάνω ἢ κατεπάνω magistratum ab hac Slauica voce mihi videntur formasse, ut multa Slauica receperunt. In Britannica lingua *bann*, fuit *excelsum*, eodem sensu in Celtica *pen*, vnde Alpes Penninas dici obseruatum est (z). Celtica Leibnitii *Penfestin*, capitis munimentum, galea: Scandinavis *fan*, dominus: Germanis *bann*, *interdictum*, quod cogendi vim continet. Non puto, haec Celtica, Scandinauica, Britannica, Teutonica, a Slauicis, aut Slauica inde ab istis effecta: immo vero videtur hoc vocabulum e maiorum nostro.

(t) p. 58. 116. (u) ad A. C. 1212. p. 280. ed. Freh et alibi (x) ad A. C. 1209. p. 86. (y) ad A. C. 1209. p. 86. (z) Celtica Leibnitii p. 137. 119, adi omnino Ioan. Georgii Vuachterii Glossarium Germanicum p. 90. & 9.

nostrorum prisco sermone diuersis in populis superesse. At isthuc *Supani* cum aliis in linguis, seu totidem litteris, seu leuiter inflexum, vt *Ispan* Hungarorum, pronunciatur, sane totum Slauonicum est. Chrouati veteres praeter vndecim *Supanias*, tres alias gentes suo in corpore censebant, et vnicuique praefectum habebant Βούνον, a *pan*, vt puto (a). Sic in Hungaria sunt *banni* et *bannatus*, *iurisdictiones*, *dominia*. Ioannes Cinnamus (b): Βέλοσις, ὃ τὰ πρῶτα παρὰ Πηγὶ Φέρων, Μαωανην ταύτην καλῶσιν Οὔννοι τὴν ἀρχὴν. Vbi Ducangius maluit Μωάνον, vt sit simile Hungaricae dignitati *banorum*, Slauonico *pan*. Nam Graeci illo aeuo sic fere solebant inanes praefigere litteras, vt apud Georgium Chrysococcam in Syntaxi Persarum Μωαρταὰ pro Βάρτα seu Βίρθα, Μωασεὰ pro Βάσσα, Μωαλχ pro Βαλχ, Μπυχαεὰ pro Βύχαεα. Sic item in multis aliis. Anonymus de conuersione Vladimiri, cum Graece recenset litteras Russicas pro *Buki* scribit Μωύκη Μρυκι (c).

Inuenio etiam *Kniasios* et *Knesios* dignitate praecelluisse apud Slauonos. Goarus ad Codinum de officiis aulae Constantinopolitanae (d) e Codice regis Francia, μέγας Κνέζις et Κνετζής πάσης Σερβίας. Κνετζής, ne corruptum putes, legas more eius aetatis Κνε-νζής *Kne-nzis* siue *Knezis*. Nam vocalis alterius syllabae haud aliter pronunciabatur istis seculis et ante Z in peregrinis vocibus frequenter inanem litteram praefigebant, vt apud Chrysococcam Ντζερμι est جورمي *Gjormi* Mahometis
Al.

(a) Constantinus de A. I. p. 107. (b) p. 67. (c) Band. Imp. Orient. Tom. II. in animaduersionibus ad Constant. Por. p. 115. (d) Vide eius Comceptarium in Annam Comnenam p. 347.

Alfragani, Ptolemaei Γαράμη. Σαντζαλμαλα, Naffi-
reddini ساجمتاسه *Sagjetmaja*. Ντζιν Musladini Sadi alio-
rumque Perlarum صين *Zin* Arabum سين *Sin* feu Σιναι
vt apud Marcianum Heracleotam et Turcarum atque Per-
sorum چين *Tschin*, feu Τζιναι vt apud Cosmam Indi-
copleuffen. Sic Ντιμισκ *Damascus* Ντιμιατ *Damiata*.
Sic Anonymus Graecus quem supra citavi, ντεβερδω (cre-
do eum scripsisse ντεβερδω *Tverdo* littera Russica) Caro-
lus de Fraxinis: *idem autem valet, ac dominus, nam ea*
fuit vocis Kneg notis apud Slauos. Nicolaus Firleius
Castellanus Voynicensis in epistola ad filium (e), cum de
Polubinsciis et Massalsciis Russicae stirpis familiis in Po-
lonia agit, negat titulum *Kniaz*, quem gentes istae ge-
runt *ducem* reddi Latine posse: nam in Russica lingua
nihil aliud significare, quam *vici seu villae dominum haer-*
edem. An vnumquam in Russia *Kniaz* vi vocis mino-
ris titulus dignitatis fuerit, dubitandi causas habeo multas.
Et, si ista quasi stirps est, quam Ducangius et Firleius
ediderunt, tamen nihil vetat, quin paulatim sese extufe-
rit altius significatio. Nam et *Gospodarz*, vt Poloni di-
cunt, Государь vt Rutheni, *patrem familias* proprio
significat. Quis autem nescit Principem seu Valachiae
feu Moldaviae *Hospodar* eximio sensu appellari: et Impe-
ratorem Russiae dici, si quis Ruthenus dicat *Gossudar*.
Et isto quidem titulo vnumquemque magnae dignitatis vi-
rum, alios etiam, cum adulantur, praesentes compellant,
de absente non vsurpant, nisi de Imperatore. Neque
vero mirum est, Firleium equitem Polonum, instituta
patriae ob oculos gerentem, et qualemcumque eminentio-

Tom. VIII.

H h h

ris

(e) Subiuncta Matthiae Dargodzky libro de titulata nobilitate.

ris nobilitatis existimationem tamquam dignitati suae aduersantem, gradu mouisse Kniazios. Iniuria tamen: nam totum isthuc a Turcis et Persis et Chazaris fuit, ex خان *Chan* (f). *Chan* autem apud illos populos familiam quidem et patrem familias significat, at praeterea aucto vocis gradu, principem quemcumque, ut ne quidem Imperatores Turcae aut Persarum Reges ab eo refugerint unquam. Ita reges Seruiae olim Kniaziorum titulo delectati sunt et duces Lithuaniae, ut Christophorus Hartknochius (g) demonstrauit ex Statuto Lithuanico, quod A. C. 1566. in comitiis Vilenensibus a Sigismundo Augusto confirmatum fuit et ex Constitutionibus A. 1628. in quibus Magnus Dux Lithuaniae *Kniaz Wielkiego*. Idem obseruatum est in reginis. Dithmarus Merseburgensis Sclauonicarum rerum peritissimus auctor (h): *Vxor autem eius Beleknegini, id est, pulchra domina vocabatur.*

Polonis *Voivoda*, Palatinus seu praefectus provinciae, et eorum exemplo Lithuanis. Proprie ab stirpe sua *ductorem exercitus* significat: nam *bojowy* Polonis est *bellicus, militaris, castrensis*. Turcas quoque Sclauorum emulatione in Hungaria suos Βοεβόδης *Voevodos* habuisse, Constantinus Porphyrogenneta auctor est. *Imperator ἀρχηγός duces belli*, quam conuenientissime ad nostram sententiam, explicat. Primus Turcarum *Voevoda* fuit Λεβεδίας (i), qui ad Chazaros fugit supplex tribus annis antequam

(f) Georgius Pachymeres L. III. c. 25. L. X. c. 25. L. V. c. 4. Κάνης et Κάνης et Χάνης enunciat: ὁ δὲ Χάνης, inquit βασιλεὺς. Rallitur Proteclicus ille Dicacophylax. Error ex eo natus, quod etiam reges Chanos seu Principes dici audiuerat. (g) De Rep. Polonica p. 606. etc. (h) L. VII. p. 106. (i) Constantinus de A. I. p. 107.

tequam Pazinacitae Turcas a Tanai et Borysthene pepulere. Et nomen quidem Λεβεδίας, Turcicum est لوان *Lewads* et *Lews*, *supplex*. Immo Chazari quoque *Voievodas* habuere: recepto a Slavis finitimis nomine: cetera enim nomina dignitatum Chazaris fuere, Turcica خانان *Cbakan*, Imperator, Rex et Πεχ seu ك Beg, Princeps. In Bolgaris Theophanes Byzantius (k) testatam reliquit Voievodarum dignitatem, si apud eum Βοιλαδας emendes, ut sit Βοιβαδας.

Ceterum inter Slauicos populos nullum vetus nomen inuenio, quo nobilitas sese extulerit supra plebem. Si qua fides Ioanni Georgio Stredowskio (l), A. C. 864. ad Radislaum Morauiae regem *Samouitus* et *Bogarimus* *Russiae duces* venerunt, eodem venit et Boriuogius Bohemorum dux: ceteris in scriptoribus Bohemicis Boriuogium Bohemum ad Radislaum profectum video, at duces illos Russiae non inuenio. Isthuc *Boiarin* plane est, quem vulgo dicunt бояринъ *Boiarin*, pro quo elegantius et vetustius dici putant боляринъ *Boliarin* et multitudinis numero боляре *Boliare* incertae originis vocabulum. At isthuc vero nomen non nobilitatis est, sed officii et dignitatis palatinae. Dicunt etiam дворянинъ *Dworianin*, sed ab agro seu praedio, quem quis possidet. Et vulgo quidem etiam illi *Dworiane* dicuntur, qui nulla praedia possident, orti tamen a parentibus sunt eius conditionis, ut suos agros tenuerint: id vero serius inuectum et peregrinum mihi videtur. Eodem modo apud Polo-

H h h 2

nos

(k) p. 367. 376.

(l) Morauiae sacrae II. 9.

nos *Ziemianie*, *terrestres* dicuntur ab agris, quos possident, quod item nouum videtur. Christophorus Varfeticus (*m*) ita etiam Nouogrodienfes nobiles sese vocare testatur: Polonorum vtique imitatione. Isthuc autem, quod nunc maxime in vsu est apud Polonos nobilis viri nomen *Szlachcic* et inde quoque apud Rutenos, a *Schlachta* seu *genere*, totum est Teutonicum, quod Martinus Cromerus iam vidit. Causa huiusce rei manifesta est: neque enim nobilitas q̄ ciuibus ceteris aut plebe discerni voce potuit, vbi in re ipsa nihil fuit diuersum. Quidquid Slauonici sanguinis fuit, id liberum et per se satis nobile, communi omnium iure. Seruus nemo nisi alio ex populo sine captus bello siue emptus. Quare nobiles ipsi Russi, alia conditio nulla nisi seruorum.

Cum Slauī hac conditione essent, inter se autem bella gererent crebra et alius alium populus, gens vna alteram ad tributa soluenda adigeret, denique vicini Slauos diuexarent; salutaris visa est, vnius principis auctoritas. Nam Chroboti Slauis Paganis tributa pendebant, Constantini Porphyrogennetae aetate (*n*), Albi Chrouati Francis subiecti erant eodem teste Constantino (*o*), et ex eodem de ceteris Slauis in Illyrico et Macedonia partem a Francis, partem a Constantinopolitano imperio pressis constat. Haec inquam necessitas coegit Slauos, vt conseruandae causa libertatis popularem statum commutarent cum principatu. Chroboti praeter Supanos Constantini aetate Αρχοντα Principem habuere, habuere Seruii. Vt quisque populus principatum cum libertate maturius mutauit, ita sese
maxi-

(*m*) In dialogo de origine generis et nominis Poloni p. 39. (*n*) p. 96.
(*o*) p.

maxime extulit: tantum vnus Principis vis ad muniendum ornandumque statum publicum potest. Inter primos sese extulere, quod quidem memoria tenemus, Bulgari, quorum Archontes Graeco Byzantium vocabulo, adeo et viribus valuerunt et auctoritate, vt et ἀρχόντων et ἀρχιζευπάνων nomina despicerent regesque dici mallent. Byzantii, vt erant astatii, Πῆγας dixere Latino vocabulo, ne Βασιλέως nomen vulgarent. At Symeon rex Romano Lacapeno imperante rem eo perduxit vt et Βασιλέως titulus sibi tribueretur et summae maiestatis diadema cum tiara. Neque minus principatus honore atque amplitudine regionum excelluerunt Morau, Marahenses scriptoribus Francis, Bohemorum maiores, donec immixtis Turcis ab Arnolpho Imp. oppressi sunt. Si Ruricus primus Rufforum rex fuit, paullo ante eum, annis admodum viginti, primum Principem Piasum Poloni habuere. Et isti quidem duo ante Piasum secula principibus complent, sed tam incerta fide, vt nullus sit eorum, quem non mouere loco firmissimis ratiociniis possis. Saltem duodecim Palatinorum memoria incorrupta videtur, sic vt duodecim Zupaniae fuerint ante reges et ad formam rei publicae Chroboticae Zupani. At cum, vt alio dicam loco, regum Rufficorum longe altior aetas ante Ruricum surgit ex certis istarum aetatum non vnus gentis testimoniis, multo etiam antiquior est forma Rossiaci principatus, quam Polonici. Et istorum regum ante Ruricum tanta fuit maiestas, vt testibus Annalibus Bertinianis, postremus eorum se nuncupauerit خاقان *Chakan*. Hunnorum reges illo sese titulo extulerunt, vt ex Menandro Protectore constat (p),

H h h 3

no

(p) In Legationibus p. 117. 138. ed. Reg.

ne Gregorium Turinensem dicam, aut Paulum Varnefridum. Theophylactus Simocutta (q) Chacanium Hunnorum induxit gloriantem, κύριον ἑαυτὸν ἔθνους ἄσπαστος, μὴ προσῆναι τε ὅσον περ ἥλιος ἀνατένει τὸ βλέμμα, τὸν ἀνλιτάξαοθαυ δυνησόμενον, *dominum se esse gentium omnium, neque esse, quacumque sol circumferat vultum, qui resistere possit.* Is etiam apud potentissimas gentes summae maiestatis titulus fuit. Quare Iazidus Validi filius Chalifa, cum de genere suo gloriaretur dicere est solitus (r): *sum ego Cbofrbois filius, mihi pater est Meruanes*

وتیصر جلی و جلی خافان

Et Kizr (Caesar) avus et avus Cbakan.

Eum in modum reges Hungarorum titulo Chacani delectati sunt: testes habeo Reginonem Prumiensem, Astronomum illum, Ludouici Pii Imp. familiarem, Eggehardum Vragiensem, alios. Constantinopolitani Ingerem, Suendostlauum, Vladimirum, Iaroslauum Ἀρχοντίας seu *Principes* dixere, vt Constantinum Porphyrogenetam Imp., Cedrenum, Zonaram, alios fecisse video. At Ducae (s) Ρῆξ Ρωσίας *Rex Rossiae*, Ioanni Cantacuzeno Imp. in rerum a se gestarum historia (t) non modo Ρῆξ, sed etiam Βασιλεὺς τῶν Ρωσῶν *Russorum Imperator.* Maiori titulo, quam Βασιλέως, ab eo qui nunc quidem scriberet, erat Iosaphus Christodulus, Monachus, paullo ante vero Imperator fuerat, reges Rossiae maectari non potuere. Nempe ita Imperator, cum rerum potiretur, loqui adsueuerat, summae maiestatis societatem Russis concedens, vt Adamus Bremensis haud immerito dixerit Regis
Rus-

(q) p. 159. (r) Gregorius Malatiensis I. 211. (s) c. xx.
(t) Lib. II, c. xxvi.

Russiae temporibus, quibus fuit: *Kiuiam aemulam imperii Constantinopolitani, clarissimum decus Graeciae.* Illum ego Bremensem inter scriptores septentrionales primo loco nominauerim, qui Russiae dominos, haud aliter vocitauit, quam Reges. Neque mirum, si Bosouiensis Presbyter, Adami affecla eodem vsus est titulo. Neque aliter vel Arius Polyhistor Islandorum omnium antiquissimus, vel qui eum secutus est, Snorro Sturlaeus. Snorro fere *Riki Valldimars Kong, regnum Valdimari Regis (u)* et de Iaroslai legatis loquens (*x*), *Sendemenn Iarizleifs Kongs austann oc Holmgardi, legatos* appellat, *Iarislai regis orientalis siue Holmgardiae.* Et ita de Iaroslao saepius. De Valdemaro Iaroslai filio (*y*). *Valldimar Kongur af Holmgarde, Sonur Iaritsleifs Kongs oc Ingibiargar Drottningar, Valdemari regis Holmgardiae Iaroslaidis regis et Ingibirgae coniugis.* Neque aliter de regibus ante Ruricum Heruorar saga aliaeque sagae septentrionales. Et Saxo Grammaticus, qui Rege Daniae auctore et auspice scripsit, perpetuo Regum titulo principes Russiae mactauit, quod eum a regibus Daniae tribui sciret. Nam et Ericus Pommeranus Rex Daniae, haud aliter appellauit. Polonos veteres eum in numerum referre possum, quando Vincentius Kadlubko, Episcopus Cracouiensis, omnium antiquissimus testimonium perhibere potest sub Regis Russiae aetatem. Nihil dicam de Ioanne Duglossio, qui ducentis annis secundum Vincentium fuit. Iam scriptores Germani magno numero, *Ingerem regem, Helenam reginam* Eggehardus Vragiensis (*z*) et Sigebertus Gem-

(u) Tom. I. p. 196. 216. 233. 318. (x) Tom. I. p. 511. 513. 516. 733.
 (y) Tom. II. p. 178. (z) p. 265. 300.

Gemblacensis (a), immo ipse Liutprandus Ticinensis (b) homo in Constantinopolitana regia, ceterisque Germaniae atque Italiae aulis multum versatus: *Valdemarum regem* Annalista ille Saxo (c), Iaroslauum regem Adamus Brementensis (d) Eggehardus Vragiensis (e) Lambertus Schafnaburgensis (f). Vides consensionem gentium fere omnium regio in titulo Russiae.

Quemadmodum supra dixi, tria maxima regna e Slaunicis Russicum, Polonicum, Bohemicum istis temporibus viguisse, ita haec cum perpetuo fortunae cursu sese extulere, causam dedere comminiscendi tres fratres *Lech Rus et Czech. Rus*, qui sit conditor Rossicae rei publicae, *Lech* Polonicae, *Czech* Bohemicae. Nescio quis Vincentii Kadlubconis commentator, non ita vetus tamen, fuit enim paullo ante Dlugoffum et post A. C. 1434. homo supra modum simplex, primus hos tres fratres, Annonis filios produxit (g). Cum Kadlubco scriberet, annis ante commentatorem ducentis et amplius, nondum nati erant, neque Anno pater neque tres germani fratres: credo, ut Palladem Iouis repente profiluisse armatos e cerebro commentatoris. At Kadlubco a Lescone incipit Polonicas res, aequali et victore Alexandri Macedonis. Hunc tamen Lesconem cum alii, tum Stanislaus Orichovius (h) auctor alioqui minime vanus, cum Lecho Commentatoris contendunt. Inde vero a Lescone omnia illa familiae *Kaszsko*, vsque ad Piastos commentitia sunt, nec ita veteris memoriae tamen, ut vel Alexandrum vel Iulium Cae-

(a) Ad A. C. 936. (b) p. 144. (c) p. 426. (d) p. 23. (e) p. 446. (f) p. 159. (g) p. 8. ed. Dobromil. (h) *Annal.* p. 5. ed. Dobrom.

Caesarem attingat, si quis fuit Lesco. *Lechus* quo semine genitus sit, vides: item vt *Rus* et *Czech*. Nempe e veteri nomine gentium. Nam etiam nunc Bohemus Polonis dicitur *Czech*, Lithuanis *Cziek*, veluti gens orta fit a Zichis priscis ad Caucasum. Polonis vero et Russis Polonus *Polak*, Lithuanis *Lynkas*, vnde clarissimus Lengnichius sibi persuasit, nomen a Lazis vetustis esse. Vt cumque vero Martinus Cromerus (i) aliique pro Lecho suo pugnant, tamen grauissimis de causis fratres Annonis filios inter umbras regnare iubemus. *Illa se iactet in aula et Lech et Czech et Rus.*

En tibi alios tres fratres cum sorore, qui Kiouiam condidere. Historiographus Anonymus Ruthenus: *Kius Polonus erat, et primo illum locum incolebat, ubi убоаб боркбевб Vos Borisczew, seu traiectus Borysthenis est, postea vero ipse cum duobus fratribus et sorore Kiouiam condidit.* Chronographus Russus: *Tres fratres Kii Sze-roek et Choriv condiderunt urbem nomine fratris sui natu maioris eamque Kiew dixerunt: sunt qui tradunt, Kium fuisse Перевозникб (Perevoschnick, portitorem) qui traiciendo Borysthene vitam egerit, at falso: ille enim princeps fuit, et expeditione contra Constantinopolin suscepta, ibi ab Imperatore magno honore exceptus fuit: in reditu prope Danubium urbeculam struxit, quam et hodie Kiewec vocant, sed expulsus ab accolis, cum fratribus et sorore Kiouiae obiit, post defuncto Kio posterius eius successerunt.* Synopsis historiae Russicae primum Kiouiae, deinde Moscuae edita, Principes Rossos fuisse adseuerat, *Kij, Schczek seu Schczoek*
 Tom. VIII. I i et

(i) De ortu et rebus gestis Polonorum L. I. c. XIII. XV.

et *Korew* seu *Chorew*, sororem eorum *Libed* ad Borysthemem: multis urbibus et castellis in Polonia occupatis, Kium condidisse urbem *Kiew*, esse denique de tempore diffensionem, existare tamen qui A. C. 401. conditam ferat: *S. hczekum* urbem in monte poluisse nomine *Schczekaviza*: tertium Koreuum, urbem *Chorevizam*, quae tandem appellata sit *Vyschgorod*, denique *Libed* sororem urbem suo nomine ad fluuium itidem *Libed*. De successione nihil certi definiuit Synopsos auctor, praeterquam quod Stricouium auctorem citat, genus eorum usque ad Oicoldum et Dirum non interrupta serie nepotum propagatum esse. Vti Strycowio non multum tribuere videtur Synopsos auctor, ita illis adiungit Radinum a quo Rademiczauus populus, Viatcum a quo *Viatczani* ad Volgam, Duliepam a quo Duliepiani ad Bogum, deinde Luczani dicti. Mirum, ni hic quoque Polonici scriptores aliquid turbauerint, vt Kiouiae perpetuam possessionem vindicarent populo suo: Rosicis demde scriptoribus imposuerint auctoritate sua. Oicoldum et Dirum e Polonico genere non fuisse, vel nomina argumento sunt. De Rademiczanicis, Duliepianis dixi alias. Kius ille, vereor ne ex Iornande sit adscitus. Is enim in Geticis scribit (*k*) de *Cniua* Gothorum rege iis ferme similia, quae de Kio Poloni. *Cniua* exercitum in Moesiam immisisse, ipsum alia septuaginta millia suorum ad *Eustesium* (*Eoscesium* in Ambrosiano codice est) id est *Nduas* duxisse et inde Nicopolin: Decio Imp. aduentante recessisse Cniuam in Haemoniam et Philippopolin, rursus, vt Decium ad Berrhoeam adesse cognouit, eodem se contulisse, et fuso fugatoque Decio cepisse Philippopolin: iterum deinde pugnasse cum Decio, eoue in praelio Imperatorem ceci-

(k) p. 201. c. xviii. ed. Murat.

cecidisse. Habes nomen Gniuae isti Kio egregie conueniens, habes expeditionem Constantinopolitanam Kii ex ista Gniuae ad Danubium, et tempus non admodum abhorrens ex eius sententia, qui A. C. 401. Kium edidit: nam Cniua ante eum annis centum fuit et quinquaginta. Stredouskius (l) et Pessina (m) ad A. C. 855. scribunt Radislaum Morauiae regem cum Poloniae Ruffiaeque ducibus foedus iniisse. Est deinde apud Stredouskius memoria (n) Semouiti et Bogarini ducum Ruffiae iis fere temporibus. Videtur autem ille Premislum eorum sedem indicare, ut ad Kiouiam nihil pertineant. Neque ego, si qui his nominibus fuere, duces fuisse concesserim: Supanos magis, aut Kniasios, et urbium praefectos fuisse credam. Kiouiam vero ut antiquam censeo, ita a quibus condita sit, ignorare malim, quam decipi. Hoc denique video, ante Ruricum in eorum regum potestate fuisse urbem, qui in Ruffia regnarunt tanta potentia, ut cum iis comparati Piafti Poloni multo fuerint inferiores. Hoc mihi suadet nomen Rufforum Kiouiensibus tributum, cum in potestate Rurici nondum essent, hoc Photii Patriarchae testimonium de Rufforum ante Ruricum maximis rebus gestis, hoc denique Annales Bertiniani me docent.

Aequae incerta fama de Nouogrodii urbis origine. Chronographus in Synopsi: *Pestilenti morbo totam Slauoniam inuadente, ut vix superessent, qui mortuos sepelirent, plerique confugerunt in БѢЛЫЯ nunc Bielozero aut шякоє езо-ро sese receperunt et Wes vocati sunt: alii etiam in regiones dispersi, variisque nominibus dicti: alii etiam ad Danubium, vetustas sedes suas, confugerunt: Slovenesk et Rus (Slauonia*

I i i 2

et

(l) Morauia Sacra II. 5. p. 107.
(s) II. 8. p. 231. item c. 12.

(m) in Marte Morauico II. 5. p. 146.

et Russia) adeo desertae sunt, ut a feris solis incolerentur: non multo post Slouani, receptis in societatem Bulgaris et Scythis in desertas regiones redierunt: cum vrbes restaurassent, утгы бѣлые eos adorti deuincunt, vrbes diruunt, regionem vastant: eo audito Slauoni, qui in Scythiam aufugerant, rediere et Nouogrod urbem ad Volchouam fluiuium condiderunt, vno stadio a veteri vrbe Slouensko: urbem quoque Rus pristino in loco restaurarunt, et principem esse iusserunt Gostomyslum. Alii in Pole, seu in campos discesserunt, vnde Polaene, id est, Poloni dicti. Alii ad Polotam fluiuium. vnde Poloezane appellati. Alii in Mofouiam. Alii ad Bug fluiuium, dicti inde Buzane. Accepere alii nomina Dregoviczorum, Kriczorum, Cziud, Merae Drewlanorum, Morywa Siewerorum, Lap, seu Morduae, Maraenae. Omnes eodem nomine Slueni dicti. Synopsis Moscuae edita: Alii Rossi supra lacum Ilmen diffusi sunt, alii ad Volchouam fluiuium condidere Nouogrodiam, et Gostomyslum, aliquem virum insignem e suo corpore, principem legerunt. Etiam hic sentio nihil veteris faemae contineri. Nam cum semel constitutum esset, Russos a dispersione dictos fuisse, eo deinde secum scriptores inieuerunt rationem, quemadmodum id acciderit. Hoc vero hariolari est. Id. apud me quam verissimum videtur, Nouogrodiam eo maxime dici tamquam Neapolin, quod ante eam fuerat sedes regia Aldaioburgum, seu si vim vocis explices, Palaeopolis.

Monendi sunt qui has Dissertationes T. S. Bayeri legent, auctorem diem suum obiisse antequam eas perficere posset.

OBSER-

OBSERVATIONES
ASTRONOMICAE
ET
METEOROLOGICÆ.

IOANNIS POLENI

AD

NOBILISSIMVM VIRVM COMITEM

ALEXANDRVM DE POMPEIIS

PATRICIVM VERONENSEM EPISTOLA,

QVA

NONNVLLAE

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE

ET

METEOROLOGICAE

CONTINENTVR.

SI nobilibus viris, qui scientias melioresque artes non modo ament, verum etiam calleant, fas non est quidpiam denegare; me quidem Tibi, Observationem meam nuperae Lunarise Eclipsis petenti, morem gerere, immo obtemperare libenter, oportet. En itaque illam, cui etiam nonnullas alias adiunxi. At vellem, vt Te iure meritoque plurimi facio, ita Tibi maiora industriae meae specimina mittere posse.

I. OB-

I. OBSERVATIO
 AVRORAE BOREALIS,
 VISAE NOCTE INSEQUENTE DIEM XXI. MARTII
 M D CC XXXIX. HABITA PATAVII.

Lenis subsolanus flauerat tota die, parique lenitate fluxit a Septemtrionibus tota nocte ventus. Interdium abunde pluerat.

Circa nonam horam (post meridiem) quasi fortuito, vidi Borealem Auroram splendere. Sed a Viris fide dignis postea rescivi, eius Aurorae initium circa horam octauam apparuisse. Tunc temporis, cum observare coepi, in Barometro mercurius altitudine sua aequabat Dig. 29. Dec. 20. (vtor mensura Anglici Pedis) quae altitudo inter minores computanda sane est. In Thermometro meo *Amontoniano* erat mercurii altitudo Dig. 48. Dec. 96. Et in Thermometro, quod a se peculiari artificio constructum Petropoli dono mihi misit *Celeberrimus Ioseph Nicolaus de L'Isle* (in quo ex maiore minoreue mercurii densitate altitudines variantur, mensuraeque initium sumitur pone vacuum superius spatium) numerabantur partes 139.

Cum coepi ego observare, gradibus ferme centum (septuaginta versus occidentem, triginta versus orientem) extensa Aurora videbatur secundum finitorem, quem tamen non attingebat; eius erat altitudo graduum septuaginta, et amplius. Rubescebat tota (excepto vno aut altero albescente tractu) limbus tamen inferior magis, quam superior. Tenuis tota: ac trans eam plures stellae, praesertim

sertim vero pleraeque Maioris Vrsae, transpiciebantur: quamobrem indicium hoc (praeter cetera) Auroram equidem esse Borealem illud phaenomenum, perspicue commonstrabat.

Post horae trientem, humilior reddita erat; ac parte occidua attingebat finitorem: inferior limbus subobscurior apparebat; superior vero mire lacinosus. Et supra ipsum tres quatuorue veluti rubrae trabes extendebantur; plures autem etiam ante prodierant illiusmodi trabes, seu virgae, ac euanuerant.

Quindecim circiter praeteritis horae sexagesimis, versus occiduum plagam quodammodo Aurora concesserat, plures vero sese efferebant virgae, et quaedam eius partes quasi fluctuare videbantur; mutationesque creberrimae aliae alias excipiebant.

Deinceps vero quietius (vt ita dicam) languidius, et albidius phaenomenum efficiebatur. Quin etiam ab occidua plaga contrahebatur, perfans versus septemtriones. Nonnullae veluti nubes albidulae, tenuissimae, ac splendentes ad summum fere caeli pertingebant.

Circa horam decimam cum dimidia, iam extinguebatur; ac solummodo inter Boream et Ortum incerta quaedam exigua albicantia lumina conspiciebantur. At deinde quid ulterius contingeret, mihi non licuit speculari, nubibus infuscantibus aëra. Non defuere tamen qui in alia regione eandem Auroram Borealem post aliquod temporis intervalum obseruauerint reuiuescentem quidem, sed, breuissimo transacto temporis spatio, iterum ita euanescentem, vt post perpaucas sexagesimas omnino dissoluta fuerit atque extincta.

442. OBSERVATIONES ASTRONOMICAE

II. OBSERVATIO ECLIPSIS SOLIS,

(SIVE, VT NONNVLII LOQVI AMANT, ECLIP-
SIS TELLVRIS) QVAE CONTIGIT IV. KAL.
IANVAR. MDCCXL. HABITA PATAVII

AB

IO. POLENO

VNA CVM

IOSEPHO BARTOLO et IACOBO DVRERO.

Rara quaedam, admodum sublimis, nebula aërem infuscabat: nihilominus umbra, qua discus Solis afficiebatur, poterat satis bene, non tamen perfectissime, observari.

| Temp. H. | Appar. " | |
|-------------|-------------|-----|
| 20. | 54. | 4. |
| 20. | 55. | 0. |
| 20. | 58. | 40. |
| 21. | 3. | 5. |
| 21. | 13. | 30. |
| 21. | 20. | 36. |
| 21. | 28. | 54. |
| 21. | 38. | 23. |
| 21. | 46. | 8. |
| 21. | 52. | 2. |
| 21. | 59. | 8. |

Vmbræ principium aliquod videbatur videri in limbo solaris disci.
 Eclipsis certe coeperat.
 Dig. /
 0. 15.
 0. 30.
 I. 0.
 I. 15.
 I. 30. Vix tamen.
 I. 15.
 I. 0.
 0. 30.
 Finis Eclipsis.

III. OB-

III. OBSERVATIO
 LVNARIS ECLIPSIS,
 QVAE CONTIGIT NOCTE INSEQVENTE IDVS
 IANVAR. MDCCXL. HABITA PATAVII

AB
 IO. POLENO
VNA CVM
 IOSEPHO BARTHOLO.

AB nebula quadam, longe lateque expansa, aër fuscus reddebatur. Itaque umbra, quae obseruabatur in Lunae disco, obscurior (quod velim animaduerti diligenter) solito esse videbatur. Praeterea vero, vel sub ipsum Obseruationis initium, sparsim in aëre multae nubes cernebantur. Adhibitus est tubus opticus longus Pedes regios parisienses septem.

| Temp. | Appar. | | |
|-------|--------|-----|--|
| H. | ' | " | |
| 9. | 6. | 30. | Lunae limbum tenuissima penumbra tenere videbatur. |
| 9. | 8. | 0. | Penumbra distincte apparens et certa. |
| 9. | 12. | 32. | Initium Eclipsis. |
| 9. | 16. | 16. | Umbra attingit Grimaldum. |
| 9. | 17. | 25. | Grimaldum integrum tegit. |
| 9. | 23. | 12. | Cooperit Aristarcum integrum. |
| 9. | 33. | 0. | Attingit Copernicum. |
| 9. | 43. | 45. | Platonem totum tegit. |
| 9. | 45. | 29. | Pertingit ad Tychonem. |

Deinde vero Lunam obtexit densa nubes, quae tractu temporis euanescere visa est.

K k k 2

Temp.

444 OBSERVATIONES ASTRONOMICAE

| Temp. | Appar. | | |
|-------|--------|-----|---|
| H. | ' | " | |
| 10. | 10. | 2. | Apparebat denuo Luna. Umbra vero tegere Crisium Mare incipiebat. |
| 10. | 18. | 12. | Inter Lunam nostrosque oculos nullae interpositae erant nubes (saltem non distinguebantur) at nebula reddebatur crassior. Puncto temporis quodlibet residuum Lunae lumen se oculis nostris prorsus subduxit; itaque tempus illud pro Totalis Immerfionis <i>initio</i> reputauimus. |

Conuersis tribus circiter horae ~~qu~~drantibus post Immerfionis Totalis principium, nubes plures perspicue apparebant, quae deinde in vnum coeuntes, totum Caelum obtexere: vbi vero id relatum sit, quid superfluum magis foret, quam addere, tunc temporis Lunam videri *minime* potuisse? sed fortassis *inutile* haudquaquam erit, si illud animaduertatur, quod etiam anteriore tempore, nimirum etiam per eos tres horae quadrantes articuli huiusce initio commemoratos, inuisam nobis Lunam fuisse; qui caelum diligenter obseruantes, frustra

fra nudis oculis, frustra oculis tubo optico adiutis, eam perquisuimus. Licuit autem conicere, absolutam illam integramque Lunae occultationem ortam fuisse ab ea nebula, qua (antequam nubes in vnum coirent) iam aër totus fuscus reddebatur.

Nunc vero, vbi prima coniectura haec proposita est, iuuabitne coniecturam alteram superaddere? atque ponere, nebulam aliquam, non satis conspicuam, neque obseruabilem, causam fuisse illius phaenomeni; cuius similia quaedam in nonnullis Lunae Eclipsibus alias obseruata fuere (vt colligi facile potest vel ex iis, quae *Obseruatorum Eclipsium Historiae* mandauit Io. Baptista Ricciolus in *Almagesto suo Nouo*, Lib. V. Cap. XIX.) quamuis similibus illis in casibus Caelum ceu sudum fuerit reputatum. An vero potius dicemus, illiusmodi phaenomena habenda esse pro signis atque indiciis Lunaris Atmosphaerae, cuius sint variae variis temporibus densitates? At hic res hasce vltius persequi minime conuenit: sufficiet, Obseruationem nostram retulisse.

| Temp. | Appar. | | |
|-------|--------|-----|--|
| | H. | // | |
| 12. | 20. | 30. | Per dehiscentes nubes licuit Lunam obseruare, quae suum lumen rursus acquirere coeperat. |
| 12. | 25. | 38. | Copernicus totus extra umbram. |
| 12. | 33. | 30. | Tycho iam ex umbra erat egressus. Tum denuo coiungere nubes, ac solummodo vergente ad extremum Eclipsi, potuit Luna obseruari. |
| 12. | 59. | 56. | Mare Crisium detegi coeperat. |
| 13. | 3. | 18. | Totum Mare Crisium apperebat. |
| 13. | 9. | 26. | Eclipsis finiuisse profecto videbatur. |

IV.

Iam vero, ad quos deuenit gradus proxime elapso mense Februario vis frigoris, indicabo. Haec dum persequor, non dubito fore, ut cuiquam videar fortasse rebus nimium hercle minutis, ac superuacaneis etiam, si diis placet, vacare: quotus enim est quisque, qui praeteritae ignoret insolentiam tempestatis? At profecto hic mihi liceat similitudine uti a rebus petita generis diuersi. Si quaedam, quorum cognitio antiquis temporibus cuique obuia erat, eaque vulgaris, descripta olim fuissent, ac litteris consignata, sic ut peruenisset ad posteros eorum memoria, quam magno negotio, ac molestia liberatos se intelligerent eruditi homines, quos nunc est necesse ire per labores improbos, ut quid ea fuerint, inquirant. Quem non mouerunt

uerunt lapidem, quas se non verterunt in partes iidem studiosi Antiquitatis exploratores, ut valorem eruerent sefertiorum? hos partiti sunt in minores, in maiores; quae motio, et vis huic subiecta esset nomini, quando neutro genere enunciatur, expenderunt; omnia demum rimati sunt: atqui quanti esset sefertius res esse debuit olim ipsis nota tonforibus ac foemellis. Superiore vero saeculo, quam studiose quaesitum inter doctos homines fuit, qui situs esset, quae constitutio remorum in triremibus, in quadriremibus, in quinqueremibus, aliisque antiquis nauigiis, et quam multa hac super re scripta sunt? quem remorum situm atque ordinationem, utpote rem notissimam omnibus, quibus notum esset mare, nemo scriptorum veterum tanti fecit, ut scripturae credendam putaret.

Sic ut a rebus in exemplum adductis veniamus ad illam, quae prae manibus est, si ex antiquis Philosophis Naturalibus exstitissent, qui quae sua aetate contigisse obseruarunt (contigisse enim multa obseruatu digna credibile est) quaeque tum temporis nota omnibus fortasse fuerunt, ob eamque causam, quasi publica ac vulgaria, relata in commentarios sunt a nemine, *Φαρμομένα* prodita scriptis, mittenda curauissent ad posteros; facile nunc ex multarum eiusmodi obseruationum comparatione quibusdam scientiae Physicae partibus afferri lumen posset.

Ecce igitur quae me primum causa mouerit, ut obseruarem, quae me deinde impulerit, ut diligenter obseruatam scripto exponerem notam omnibus, et publicam rem. Quoniam vero propositum erat mihi maximos frigoris gradus discernere, exposueram aëri libero atque aperto,

aperto, appensum parieti ad Septentriones aduerso Thermometrum elaboratum atque diuisum ea ratione, qua vti consuevit Fahrenheitius, ingeniosus ille harum rerum artifex, et quam descripsit doctissimus ac celeberrimus vir *Petrus van Muschbroekius* in Opere (pag. 12.) cui titulus: *Tentamina Experimentorum Naturalium captorum in Academia del Cimento* etc.

Instrumenti autem constructio ac diuisio talis est. Cylindrus Thermometri, in quo inest Mercurius, cum acerbius est hyemis frigus, iniicitur in niuem aut in glaciem comminutam, quacum permixta sit par vis salis ammoniaci; atque ad illud punctum, quo Mercurius intra tubulum descendit, primum graduum initium, id est o adnotatur: tum statuitur cylindrus in pura glacie, ac signatur punctum illud, ad quod Mercurius intra tubulum pertingit; interiectumque inter duo illa puncta interuallum diuiditur in partes 32, quae Gradus vocitantur; ex quorum graduum magnitudine scala produciturfursum versus: deinde eodem cylindro aquae ex vino distillato ebullienti iniecto, quamdiu liquor ipse inclusus ebulliat, Mercurius ad gradum 184. fere attollitur: denique iniecto cylindro in aquam puram ebullientem, pariter donec Mercurius quoque ipse ebulliat, is ad gradum vsque 214. euehitur.

Verum quoniam obseruauit, atque expertus sum, si aqua ex vino distillato purgatior fuerit, aut minus purgata; ac, si salis ammoniaci copia maior sit, vel minor, quam copia glaciei, cum qua permiscetur; tam inter ascensiones, quam inter depressiones Mercurii in Thermometro

| S N. rius | Thermo metrum Gradus | Baro - metrum DIG. DEC. | Ven- tus. | Aeris Constitutio |
|-----------------|----------------------------|-------------------------------|--------------|------------------------------------|
| | 29. | 29. 96 | S | Nix |
| | 30. | 29. 66 | N W | Coelum nubibus obductum. Et pluit. |
| | 27. | 29. 46 | N W | Coelum nubibus obductum. Et pluit. |
| | 26. | 29. 56 | N | Nix. |
| | 24. | 29. 40 | N | Nix. |
| | 30. | 29. 72 | N | Nubes sparsae. |
| | 27. | 30. 10 | N W | Coelum sudum. |
| | 18. | 30. 8 | W | Coelum sudum. |
| | 15. | 30. | W | Coelum sudum. |
| | 3. | 29. 84 | W | Coelum sudum. |
| | 8. | 29. 86 | W | Nubes paucae raraeque. |
| | 5. | 29. 76 | W | Coelum sudum. |
| | 13. | 30. | N W | Coelum sudum. |
| | 18. | 29. 92 | N W | Coelum sudum. |
| | 21. | 29. 65 | N W | Coelum sudum. |
| | 18. | 29. 65 | N W | Coelum nubibus obductum. |
| | 20. | 29. 94 | N | Coelum sudum. |
| | 14. | 29. 86 | N W | Coelum sudum. |
| | 12. | 29. 56 | W | Coelum sudum. |
| | 16. | 29. 60 | N W | Coelum sudum. |
| | 21. | 29. 66 | W | Nubes rarae. |
| | 25. | 29. 92 | N | Coelum nubibus obductum. |
| | 20. | 29. 74 | N | Coelum nubibus fere obductum. |
| | 22. | 29. 64 | N E | Coelum sudum. |
| | 24. | 29. 66 | W | Coelum sudum. |
| | 24. | 29. 48 | N W | Coelum sudum. |
| | 28. | 29. 48 | E | Paucae nubes. |

Vertical text on the left side of the page, possibly bleed-through from the reverse side. The text is mostly illegible due to the quality of the scan and the orientation of the lines.

metro non nihil nasci discriminis, censerem (*) fore haud inutile, videre, an praestaret capere longitudinem interualli inter duo puncta, alterum purae glaciei, alterum aquae ebullientis, ac secundum eam longitudinem peragere diuisionem, et an id esset conducibilius, quam partiri primum lineam inferiorem inter punctum purae glaciei, et punctum glaciei cum sale ammoniaco permixtae. Fortasse linea illa maior, atque certius determinata, rei melius inferuiret, quam ista.

Sed haec obiter, ac veluti per transennam. Ad propositum vt reuocem me, factum bene putavi, si obseruationes meas omnes redigerem in Tabulam, quam etiam appono indicatam A. Prima eius columna exhibet dies mensis: Secunda gradus integros, omissis minutis, eleuationis Mercurii in Thermometro, quo vsus sum *Fahrenheitiano*, vt superius dixi: Tertia altitudines Barometri (huius scala diuisa est in digitos, ac partes decimales, sumptas ex pede Anglico): Quarta ventos, quos ego indicaui per initiales litteras nominum transalpinorum *Nord*, *Est*, etc.: Quinta demum caeli aërisque constitutionem. Illud monebo, descriptas obseruationes eadem hora omnes factas a me fuisse, hoc est paulo ante Auroram; idque maxime ob eam causam, quia tempus illud frigidissimum esse totius diei plerumque solet.

Tom. VIII.

L II

S i

(*) Quod Illustrissimus Auctor hic tentandum esse censet, an praestaret capere longitudinem interualli inter duo puncta, alterum purae glaciei, alterum aquae bullientis? id Auctor dissertationis antecedentis de Thermometris concordantibus, pag. 310. in Academia nostra executus est.

Si quis autem quaerat, quare obseruationes exhiberim spectantes ad mensē Februarium potius, quam quae ad Ianuarium pertinebant; respondebo, id me fecisse primum ob eam causam, quia mensē Ianuario nunquam peruenerat ad eum gradum frigus, ad quem peruenisse mensē Februario obseruatum est; deinde ob hanc etiam causam aliam, quia res me noua atque insolens, ut id facerem, mouit; inauditum est enim sub hoc caelo nostro maximam frigoris vim perceptam fuisse post 3. Idus Februarias.

Huius porro frigoris vis tanta aliquando (*pride Idus* eius mensis) fuit, ut maior potius, quam minor existerit, quam quae tum hac in Vrbe, tum in caeteris finitimis percepta est mensē Ianuario An. 1709. quantum calculo fas est colligere ex obseruationibus tum temporis institutis: Thermometris tamen alia ratione constructis, ac nunc soleant Fahrenheitiana. Quod si cui mirum hoc loco videatur, anno isto non eas contigisse concreciones aquarum (puta venetorum aestuariorum), quae anno 1709. acciderunt; rei huius, ut mittantur reliquae, haec reddi ratio potest satis idonea, facilis, et clara. Nam anno quidem 1709. (quo tempore peragebantur obseruationes, de quibus loquor) fere continua erat frigoris vis illa immodica: contra vero anno hoc (obseruationum per nos institutarum tempore) sub ortum solis incipiebat nonnihil remitti frigus, sensimque pergebat decrescere usque ad horam fere quartam post meridiem; quo tempore singulis prope diebus sub vespas acutior ventus spirabat ab occasu (W.) atque hinc frigus increfcebat fere usque ad Auroram.

roram. Mirari ergo desinamus, si frigus hoc anno, quod per aliquam solummodo, eamque breuem diei partem, vi summa agebat, per ceteras autem diei partes vim illam summam in agendo modo magis remittebat, modo minus (remittebat tamen semper) non potuerit eos effectus edere, quos edidit anno 1709. quo anno fere semper eadem fuit et constans frigoris faculties summa, tum propter vim venti, tum propter defectum Solis interdiu, aërisque nocturnam serenitatem.

In *Mercurio Historico et Politico* (Tomo Mensis Martii An. 1740. ad calcem) qui apud Batauos typis editur, descriptae sunt obseruationes nonnullae in hyeme A. 1739. et 1740. habitae Harlemi ab *D. Nicolai Duino*, Thermometro Fahrenheitiano. Sed incertum an dies ibi indicati reuocari debeant ad stilum veterem (quod faciendum fortasse videretur esse) ac praeterea obseruationes illae paucis Ianuarii ac Februarii diebus respondent. Ex iis tamen videtur mihi posse colligi, quod et maxime loci conuenit ingenio, frigus in Batauia vehementius fuisse, quam hic apud nos: sed illic quidem summum frigus mense Ianuario contingit; hic mense Februario; ac frigus maximum Februarii hic paullo ante desaeuit, quam illic frigus maximum eiusdem mensis.

Quod autem ad physicas insolentium frigorum causas attinet, de iis facile sciri aliquid certi, affirmarique poterit, si tempus appetat, quo pateat manifestius, quare fiat vt ver quandoque vberioribus solito scateat vaporibus, vnde praeter morem modumque pluuiae tempestates existunt;

stunt; ut quandoque aëri permisceantur multo maiore, quam fieri ut plurimum soleat, copia sulphureae particulae, a quibus nascitur immodicus tempestatum feruor. Tum illud etiam fortasse constabit clarius, quare interdum referciatur aër vi tanta nitroforum corpusculorum, quae causam praebeant frigoris praeter modum saevi. Nasci enim frigus, aut certe vim eius intendi ex nitri maxime accessione, suadent in primis glacies arte confectae, quae (quaerendum constat ex variis certisque experimentis) magis magisque intendi observantur vel aucta partium nitri cum glacie permixtarum magnitudine, vel nitro ad maiorem vim redacto, exempli causa, si in glaciem nitri spiritus infundatur. Sed ut haec aliquando innotescant melius et clarius, opus est per diuturna certarum accuratarumque tum observationum tum experimentorum serie: quam ob rem praestat, ut ego quidem puto, in commentarios referre omnes illas meteorologicas observationes, quae sint dignae considerari.

Ex multis Datis inter se comparatis id saepe deducitur, quod minime praevidebatur, cum primum Data singula expendere. Ego quidem (ut ingenue fatear) haud admouerem manum operi, nisi prius collecta esset tanta materiarum copia, quanta firmo aedificio construendo par esse videretur. Quare non addam plura: haec Tu aequi bonique facito, tanquam meae erga Te observantiae monumentum.

