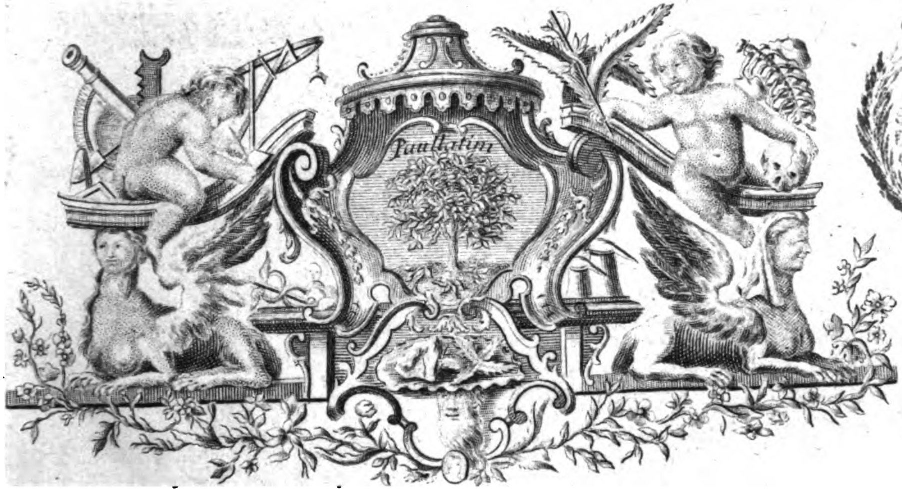
COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE.

TOMVS VII.

AD ANNOS cIↄIↄccxxxiv. & cIↄIↄccxxxv.



PETROPOLI,
TYPIS ACADEMIAE. cIↄIↄccxl.

INDEX
COMMENTARIORVM.

IN CLASSE MATHEMATICA.

Leonh.

IN CLASSE PHYSICA.

IN CLASSE HISTORICA.

CLASSIS PRIMA.
CONTINENS
MATHEMATICA.

DE
CAVSTICA CYCLOIDIS.
AVTORE
G. W. Krafft.

§. 1.

Tabula I.

DVo casus distingui possunt circa quaestionem de Caustica Cycloidis, vnus, qui est, cum radii incidentes paralleli sunt ad Axem, alter vero, cum iidem paralleli sunt ad Basin, datae Cycloidis. In illo casu Caustica haec nihil aliud est, quam alia noua Cyclois; in hoc autem, cum scil. radii incidentes sunt ad Basin paralleli, Caustica exinde orta talis est figurae, vt matrem suam minime referre videatur, neque statim appareat, ad quodnam genus Curuarum reduci possit. Figura scil. eius ex Ill. *Hospitalii* Analysi infinite paruorum §. 123. huc translata, talis est, quae apparet AFKD, vbi radius incidens PM ad Basin BD est parallelus, radius vero reflexus est MF, cuius longitudo aequalis esse debet, ex loco cit. applicatae PN circuli generatoris ANB. Proprietates huius Causticae *Hospitalius* recenset has: 1. vt punctum F ab axe sit remotissimum, radium incidentem debere procedere ex centro circuli generato- Fig. 1.

 ris

ris H. 2. Causticam hanc habere punctum flexus contrarii in K. 3. Spatium intra Cycloidem AM, Causticam AF, et radium reflexum MF contentum, aequale esse dimidio spatii circularis APN. Praeter haec enumerata nihil vlterius neque Auctor, neque eius Commentatores, *Varignonius*, *Crousazius*, neque *Carreus*, qui in Commentar. Acad. Parif. 1703. de his agit, indicant. Cum igitur mihi mirum id visum fuisset, sequi in alterutro casuum enarratorum Cycloidem morem suum, vt ipsa se reddat; in altero vero tam longe ab hac consuetudine abire: inueni, Causticam posterioris casus tamen non ita diuersam esse à vulgaribus Cycloidibus, vt ad eas referri nequeat. Generatur enim Caustica haec ab eodem semicirculo generatore, quo Cyclois ordinanaria; sed per tangentem in vertice Circuli annexam, cuius longitudo variabilis est, aequalis nempe semper applicatae circuli PN.

§. 2. Quod vt demonstrem, sit Cyclois ordinaria AMD, generata ex Circulo ANB supra basin BD voluto. Caustica radiis incidentibus PM basi BD parallelis debita, sit AFKD: dico, hanc describi motu eiusdem Circuli ANB, qui in vertice A annexam habeat Tangentem MF, cuius longitudo variet, vt in quolibet nempe situ CEM aequalis sit applicatae Circuli correspondenti PN. Veniat enim Circulus generator in situm CEM, ducantur chorda BN, et praeterea rectae EM, EF; et quia EM, EF, sunt, prior quidem ad Cycloidem, posterior vero ad Causticam, normales; ductae nimirum ex puncto describente in punctum contactus

Fig: 1.

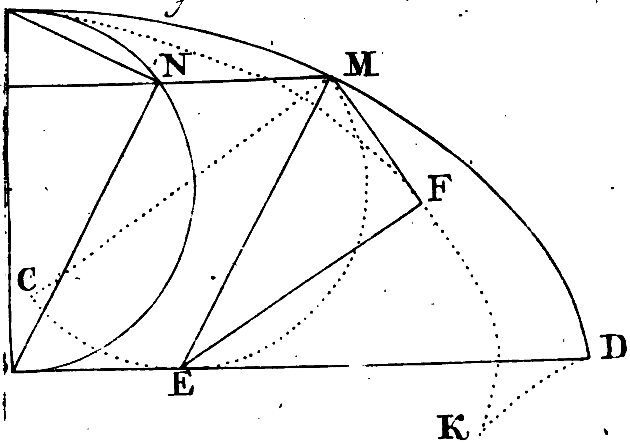
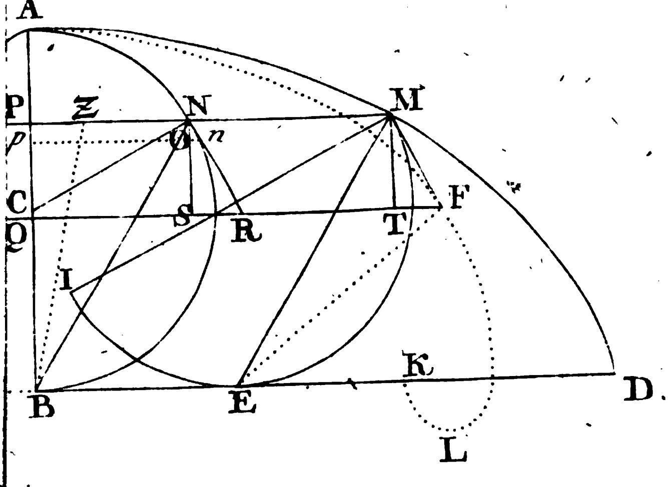


Fig: 2.



tactus, (per Analyſ. inf. paruorum §. 43.) praetereaque ob Cycloidem ſit $ME = BN$, et angulus $FME = \frac{1}{2}$ arc. $ME = \frac{1}{2}$ arc. $BN = BAN = PNB$; atque adhuc $PN = MF$, ex hypoth. erunt triangula EMF et PNB ſimilia et aequalia; quare MF erit orthogonia ad Normalem EF, conſequenter Curuae $AFKD$ Tangens. Quoniam vero $EMF = PNB$, per dem. erit etiam $EMF = PME$, adeoque circa Normalem Cycloidis EM angulus PME erit Incidentiae, EMF vero Reflexionis; conſequenter patet, punctum F generaliter eſſe in Cauſtica aliqua; eſt vero idem punctum F in Cauſtica Cycloidis, per demonſtrata *Hoſpitalii*, cum ex hyp. ſit $MF = PN$; ergo manifeſtum eſt, Cauſticam dictam praeſcripto modo generari. Q. E. D.

§. 3. Anſam haec mihi praebuerunt examinandi generaliter tales curuas, quae per dictam Tangentem variabilem generantur. Itaque vniuerſaliter rem conſiderando, ſit Cyclois ordinaria AMD, atque huic annexa Curua qualiscunque AGH. Veniat Circulus generator in ſitum MEI, habeatque diametro IM adiunctam Tangentem MF, cuius longitudo aequalis ſit Applicatae PG, quaeritur aequatio Curuae hoc modo genitae $AFLK$. Fig. 2. Poſitis igitur Coordinatis orthogoniis $AP = x$, $PM = y$, $AQ = t$, $QF = u$, $PG = z$, $AB = a$, ducantur chorda BN, et normalis ad Cycloidem ME, demittatur perpendicularis NS, ductoque praeterea radio NC; cum Tangente Circuli generatoris NR, erunt ob PNS et CNR rectos, triangula NSR et PNC ſimilia; ſed, ex natura Cycloidis, radius CN parallelus eſt diametro

IM, conſequenter parallelae etiam erunt rectae NR, MF, cum vtraque earum rectum efficiat cum parallelis CN, IM; ſed ob applicatam Curuae quaeſitae QF parallelam cum PM, erunt NR et MF quoque aequales. Habebitur ergo Analogia, PN$(\sqrt{(ax-xx)})$: CN$(\frac{1}{2}a)$ = NS$(t-x)$:NR(z), vnde fiet aequatio (A) $z = \frac{at-ax}{2\sqrt{(ax-x^2)}}$. Ductâ porro applicata pn priori infinite propinqua, erunt quoque triangula ſimilia NOn, et NSR, vnde habebitur NO(dx): O$n(\frac{adx-2xdx}{2\sqrt{(ax-x^2)}})$ = NS$(t-x)$:SR$(=\text{TF}=u-y)$ et conſequenter aequatio $u-y=\frac{(t-x)(a-2x)}{2\sqrt{(ax-x^2)}}$. Eſt autem per naturam Cycloidis, $y=\int\frac{adx-xdx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$, quo valore ſubſtituto, mutatur praecedens aequatio in hanc: (B) $u-\int\frac{adx-xdx}{\sqrt{(ax-x^2)}}=\frac{(t-x)(a-2x)}{2\sqrt{(ax-x^2)}}$. Quodſi igitur Curuae AGH aequatio data ſit in x et z, obtinebitur valor ipſius z in meris x, qui loco ipſius z in aequatione (A) ſubſtitutus, dabit valorem ipſius x in meris t; qui nouus valor ſubrogatus in aequatione (B), reddet aequationem conſtantem ex meris t et u, expreſſuram proprietates Curuae quaeſitae AFKL.

§. 4. Vt, ductâ EF, inueniatur, qualem illa angulum efficiat cum rectâ MF, euidens eſt, in triangulo EMF eſſe EM = BN = $\sqrt{(a^2-ax)}$; angulus EMF = BNR = PNB; ergo anguli EMF ſinus erit $=\frac{\text{PB}}{\text{BN}} = \frac{a-x}{\sqrt{(a^2-ax)}}$, eiusdem vero Coſinus $=\frac{\text{PN}}{\text{BN}}=\frac{\sqrt{(ax-x^2)}}{\sqrt{(a^2-ax)}}$ vocato itaque anguli MFB ſinu m, coſinu n, erit EM $(\sqrt{aa-ax})$: MF(z) = ſinus F(m): ſin. E$(\frac{mz}{\sqrt{aa-ax}})$. Eſt autem hic angulus E differentia angulorum M, et

extremi

externi ipsius F, quare orietur aequatio sequens, $m\sqrt{(ax-x^2)}-mz=n(a-x)$; ex qua deducitur $\frac{m}{n}=\frac{a-x}{\sqrt{(ax-x^2)}-z}$ = Tangenti anguli EFM. Quare si accipiatur NZ = PG, et ducatur BZ, erit angulus EFM = BZN. Si itaque sit PN = PG, vti in casu *Hospitaliano* accidit: tunc erit angulus EFM rectus.

DE NVMERIS PERFECTIS.

AVTORE G. W. Krafft.

DEprehenduntur non pauci errores authorum, de caetero doctissimorum, in modo inueniendi numeros perfectos; qui certe ex eo solo orti sunt, quod careamus hucusque infallibili charactere numerorum primorum. Euitauit scopulum hunc Euclides 36. IX. cum dicit: *Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus, et totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: factus erit perfectus*, quorum sensus est, si quotcunque numeri, ab vnitate dupli, in vnam summam colligantur, donec haec summa sit numerus primus: erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorum, perfectus. Sed vt errorum quoque exempla quaedam allegem, docet.

I. Mi-

I. *Michael Stifelius*, insignis alias Arithmeticus, sequentem numerorum perfectorum genesin, in Arithm. Integra pag. 10. Progressio Geometrica dupla diuidatur in binos terminos hunc in modum

1. 2 | 4. 8 | 16. 32 | 64. 128 | 256. 512 | 1024. 2048 |

quorumlibet binorum maior, vnitate minutus, ducatur in suum socium, factum erit numerus perfectus; quae sane regula fallit in ipso fere limine; nam sumatur quintum par horum numerorum, vbi $511 \times 256 = 130816$ non est numerus perfectus, quia, sequendo Euclidis effatum, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 = 511$ non est numerus primus, qualis tamen esse deberet, si multiplicatus in 256 perfectum efficere posset, est enim $511 = 73 \times 7$.

II. *Ozanamus* dupliciter errat in hoc Problemate: primo enim in suis Elementis Algebrae pag. 290. nimis audacter asserit; Potentias binarii, quarum exponentes sint numeri pariter pares, hanc habere proprietatem, vt partibus suis aliquotis additae faciant numerum primum. Sumamus enim $2^8 = 256$, cuius partes aliquotae additae ad numerum ipsum faciunt 511, qui primus non est, fatente ipso *Ozanamo*, dum hunc numerum in catalogo primorum omittit, Recr. Mathem. pag. 22. Deinde cum *Stifelio* perfectis adnumerat quoque 130816, cui hoc attributum non deberi, iam ostendi.

III. Auctor anonymus *des Recreations Mathematiques avec l' examen etc.* 1699. in sua annotatione pag. 147.

147. recte explicat mentem Euclidis, adiungitque ad finem: *Or ce qui nous a le plus induit à enseigner icy cette façon de cognoistre & trouver les nombres parfaits, a esté, que plusieurs, ignorans quels sont les dits nombres parfaits, en prennent beaucoup, qu' ils estiment tels, qui ne le sont pas pourtant, & entre ceux là un certain historien de ce siecle, bien que docte ès lettres, se monstre toutes fois ignorant en Arithmetique, veû qu' il estime* 120 *être un nombre parfait.* In ipsis vero Recreationibus Probl. LXX. §. 4. asseritur, ab 1 vsque ad 40000000, non contineri nisi septem perfectos, nempe 6, 28, 496, 8128, 130816, 2096128, 33550336, quae series duos falsos, nempe 130816, et 2096128, interpositos tenet, vti mox ostendetur. Falsum quoque etiam esse, quod omnes perfecti alternatim digitos 6 et 8 in fine annexos habeant, infra apparebit ex verorum perfectorum Tabula.

Cum igitur ante complures annos acceperim priuatim à beatè apud nos defuncto *Maiero* methodum satis elegantem inueniendi numeros perfectos, nusquam neque ab alio neque ab ipso publicatam: mei in defunctum officii esse putaui, hanc methodum hic exponere, vt si quid laudis etiam ex hoc specimine ipsius meritis accedere possit, illud ipsi tribuam. Constat hic modus sequenti calculo. Quoniam in hoc negotio partibus aliquotis adnumeratur etiam vnitas, ponantur numeri perfecti partes aliquotae 1, m, n, r, q, p, A, etc. ita tamen, vt duae mediae p et A in se multiplicatae efficiant numerum perfectum quaesitum pA; erunt ergo partes aliquotae reliquae, prioribus respondentes, sequentes, $\frac{pA}{q}$, $\frac{pA}{r}$, $\frac{pA}{n}$, $\frac{pA}{m}$; ex natura vero numeri perfecti fit aequatio $1+m+n+r+q+p+A+\frac{pA}{q}+\frac{pA}{r}+\frac{pA}{n}+\frac{pA}{m}=pA$, vnde elicitur $A=\frac{1+m+n+r+q+p}{p-1-\frac{p}{q}-\frac{p}{r}-\frac{p}{n}-\frac{p}{m}}$. Quoniam vero A debet esse numerus integer, necesse est, vt fractionis modo exhibitae nominator aequalis fiat vnitati, quare $p-1-\frac{p}{q}-\frac{p}{r}-\frac{p}{n}-\frac{p}{m}=1$, vnde fit $p=\frac{2q}{q-1-\frac{q}{r}-\frac{q}{n}-\frac{q}{m}}$, vbi quidem indeterminatarum vna, e.gr. q adhuc ad numeratorem admitti debet, ne valor ipsius p nimis cito fiat determinatus, nempe aequalis binario. Ex eadem vero ratione etiam hic denominator, et omnes sequentes, aequales esse debent vnitati; vnde adhibita priori cautela, rursus fit $q-1-\frac{q}{r}-\frac{q}{n}-\frac{q}{m}=1$, hinc $q=\frac{2r}{r-1-\frac{r}{n}-\frac{r}{m}}$; porro ex $r-1-\frac{r}{n}-\frac{r}{m}$, fit $r=\frac{2n}{n-1-\frac{n}{m}}$; rursus ob $n-1-\frac{n}{m}=1$, oritur $n=\frac{2m}{m-1}$, denique ob $m-1=1$, fit $m=2$, quod substitutum in omnibus prioribus valoribus efficit $m=2$, $n=4$, $r=8$, $q=16$, $p=32$, etc. et $A=1+2+4+8+16+32$; patet ergo, partes aliquotas priores, vsque ad primam mediarum inclusiue, debere constituere progressionem Geometricam duplam, et A debere esse numerum primum, ne nouas inducat partes aliquotas, diuersas ab his quas in computum assumsimus; quod quidem in numeris modo inuentis non accidit. Cum igitur sit $A=1+m+n+r+q+p$ etc. ex prioribus, euidens est,

A de-

A debere esse summam progressionis Geometricae duplae, et summam hanc debere efficere numerum primum, quia talis debet esse A; et hoc illud ipsum est, quod Euclides expressis verbis requirit. Vocato autem numero terminorum n, erit summa huius progressionis ex n terminis constantis $= 2^n - 1$, igitur $A = 2^n - 1$, p vero, cum sit vltimus terminus huius progressionis, erit 2^{n-1}, itaque numerus perfectus generaliter erit $= 2^{n-1}(2^n - 1)$ adiectâ tamen hâc cautelâ, vt $A = 2^n - 1$ sit numerus incompositus. Quoniam vero ex valore ipsius A deducitur $2^n = A + 1$, et hinc $2^{n-1} = \frac{A+1}{2}$, erit substituto hoc valore $pA = \frac{AA+A}{2}$, vnde etiam patet, quod omnes numeri perfecti simul sint numeri triangulares, quorum latus est A.

Cum igitur in nupero Schediasmate Clar. *Eulerus* noster asseruisset, eandem hanc Formulam $2^{n-1}(2^n - 1)$ semper efficere numerum perfectum, si pro n substituantur numeri primi sequentes, 1. 2. 3. 5. 7. 13. 17. 19. 31. 41. et 47, absoluto calculo horum numerorum ope inueni perfectos sequentes: nempe si sit.

$n=2$,	6 erit perfectus - - -	1
$n=3$,	28 - - - -	2
$n=5$,	496 - - - -	3
$n=7$,	8128 - - - -	4
$n=13$,	33550336 - - -	5
$n=17$,	8589869056 - - -	6
$n=19$,	137438691328 - - -	7
$n=31$,	2305843008139952128 -	8
$n=41$,	2417851639228158837784576 -	9
$n=47$,	9903520314282971830448816128 -	10

 In

In Arithmetica *Nicolai Tartaglia* Parisiis 1613. edita, occurrunt sequentes numeri perfecti:

6	1
28	2
496	3
8128	4
130816	5 *
2096128	6 *
33550336	7
536854528	8 *
8589869056	9
137438691328	10
2199022206976	11*
35184367894528	12*
562949936644096	13*
9007199187632128	14*
144115187807420416	15*
2305843008139952128	16
36893488143124135936	17*
590295810341525782528	18*
9444732965670570950656	19*
151115727451553768931328	20*

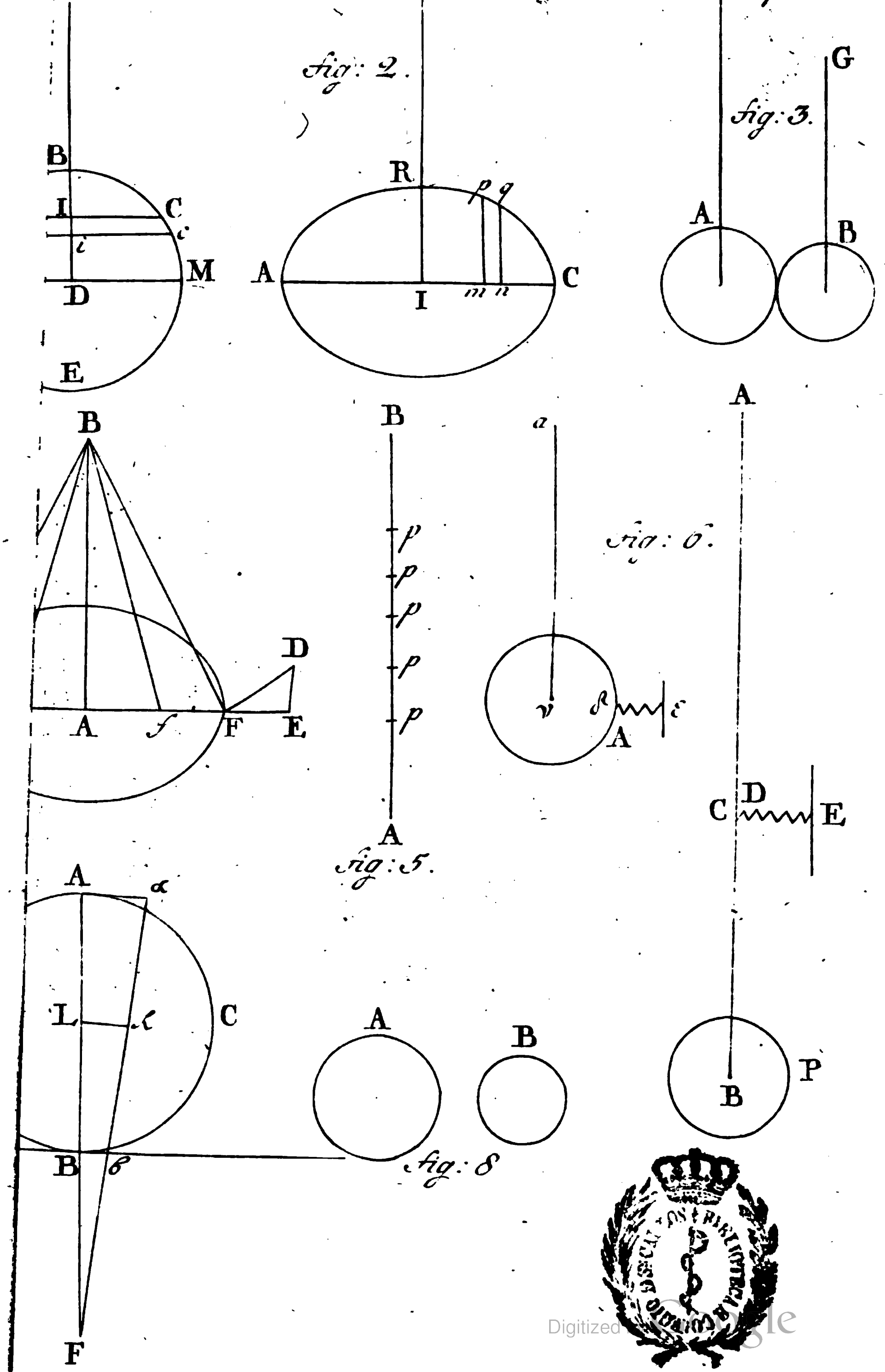
ex quibus illi, qui asterismo notati non sunt, cum meis perfecte conueniunt; reliquos autem iam examinabo, num loca sua tueri possint, nec ne. De *quinto* quidem res iam supra confecta est, quod sit expungendus. *Sextus* 2096128 est $(2^{11}-1)\,2^{10} = 2047 \times 1024$, sed 2047 non est primus numerus, compositus enim est ex

23 et 89. *Octauus* oritur ex $2^{14}(2^{15}-1) = 16384 \times 32767$ at vero 32767 non eſt primus, admittit enim diuiſores 7 et 4681. *Vndecimus* oritur ex $(2^{21}-1)\,2^{20} = 2097151 \times 1048576$, ſed 2097151 diuiſibilis eſt per 7 et 299593. *Duodecimus* exſurgit ex $(2^{23}-1)\,2^{22} = 8388607 \times 4194304$, ſed $8388607 = 47.\,178481$. *Decimus tertius* naſcitur ex $(2^{25}-1)\,2^{24} = 33554431 \times 16777216$, ſed ille diuiſibilis eſt per 31 et 1082401. *Decimus quartus* generatur ex $(2^{27}-1)\,2^{26} = 134217727 \times 67108864$, ſed horum prior per 511 et 262657 diuiſibilis. *Decimus quintus* reſultat ex $(2^{29}-1)\,2^{28} = 536870911 \times 268435456$, ſed prior conſtat ex 1103×486737. *Decimus ſeptimus* ortum ſuum debet $(2^{33}-1)\,2^{32} = 8589934591 \times 4294967296$, quorum factorum prior compoſitus eſt ex 2047 et 4196353. *Decimus octauus* fit ex $(2^{35}-1)\,2^{34} = 34359738367 \times 17179869184$ quorum ille diuidi poteſt per 127 et 270549121. *Decimus nonus* oritur ex $(2^{37}-1)\,2^{36} = 137438953471 \times 68719476736$, quorum prioris menſurae ſunt 223 et 616318177. Denique *vigeſimus* ortum ſuum ducit ex $(2^{39}-1)\,2^{38} = 549755813887 \times 274877906944$, qui non habet priorem factorem primum, ſed compoſitum ex 7 et 78536544841. Adeoque inter numeros perfectos à *Tartaglia* datos omnes aſteriſmo notati ſunt expungendi, ſeruatis reliquis; hic enim author ſubſtituit in formula pro numeris perfectis $(2^n-1)\,2^{n-1}$ loco ipſius n numeros ſequentes 2. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. 29. 31. 33. 35. 37. 39, nempe omnes impares, in quibus ſunt compoſiti 9. 15. 21. 25. 27. 33. 35. 39.

qui excluduntur omnino, nam $2^{mn}-1$ diuisores admittit 2^m-1 et 2^n-1, si m et n sint numeri integri, neque adeo primus esse potest. Deinde ex primis 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. excluduntur ex obseruatis Clar. *Euleri* sequentes: 11. nam $2^{11}-1 = 23.89$. deinde 23, nam $2^{23}-1$ diuidi potest per 47. porro $2^{37}-1$, nam hic diuidi potest per 223. denique $2^{29}-1$ admittit diuisorem 1103. adeoque ex viginti perfectis numeris *Tartaglianis* non nisi octo in hunc ordinem sunt admittendi. Inter reliquos numeros primos vero excludendus etiam occurrit 43, quia $2^{43}-1$ diuidi potest per 431.

Manifestum est ex his, inter 1 et 10000. Quadrilliones non plures interpositos esse numeros perfectos quam decem. Annotari quoque meretur, quod eorundem perfectorum, excepto primo, notae singulae ad se inuicem additae semper efficiant vnitatem, ex. gr. in 33550336 $6+3+3+0+5+5+3+3=28$, et $2+8=10$, et $1+0=1$. et sic de caeteris quoque; quamuis haec proprietas non sit reciproca, vt ex ea ad numerum perfectum concludere liceat, conuenit enim eadem etiam falsis *Tartaglianis* ex. gr. 536854528, vbi $8+2+5+4+5+8+6+3+5 = 46$ et $4+6=10$, et $1+0=1$. Certum denique etiam est, omnes perfectos in fine annexos habere numeros aut 6 aut 28, non vero alternatim constanter; nam in mea Tabula quintus et sextus terminantur vterque numero 6, septimus vero et octauus vterque 28.

DE


F
B
I
C
c
i
M
D
E
Fig: 2.
E
R
p q
A
C
I
m n
Fig: 3.
G
A
B
B
D
A
f
F
E
B
p
p
p
p
p
A
Fig: 5.
a
Fig: 6.
v
δ
ε
A
A
C
D
E
B
P
A
α
L
l
C
B
b
F
A
B
Fig: 8

DE MOTV CORPORVM SE INVICEM PERCVTIENTIVM.

AVTORE
Ioh. Bernoulli. I. Fil.

PARS PRIMA.

De corporibus oscillando se percutientibus.

Corpora super plano aspero rotando in se inuicem impingentia longe alias seruare leges, ac si collisio fiat sine rotatione, experientia testatur: Mihi autem, in leges istas inquirenti, obseruatum fuit, illas pendere a regulis corporum oscillando se percutientium. Hac itaque vice, quae circa regulas istas meditatus sum, proponam, proxima occasione rotationi ea applicaturus. Tabula II.

Definitio I.

I. *Motus progressiuus* mihi est, motus corporis, cuius singula puncta communi velocitate mota, describunt lineam rectam; et per *vim viuam progressiuam* intelligo vim viuam corporis, quatenus solo motu progressiuo mouetur.

De-

Definitio 2.

II. *Motus gyratorius* eſt motus globi circa axem immotum gyrati; *Vim viuam gyratoriam* appello vim viuam corporis, quatenus ſolo motu gyratorio mouetur: motum iſtum deinceps definiam ex velocitate puncti, in circulo maximo ad axem gyrationis perpendiculari, ceu aequatore, ſumti.

Definitio 3.

III. *Motus oſcillatorius* eſt motus corporis oſcillantis; huius vim viuam in ſitu fili verticali, qui ſitus ſolus a nobis conſiderabitur, voco *vim viuam oſcillatoriam.*

Lemma 1.

IV. Omnis motus compoſitus ex progreſſiuo et gyratorio, quaecunque ſit ratio inter velocitates reſpectiuas, quibus hi duo motus fiunt, reduci poteſt ſingulis momentis ad motum ſimplicem oſcillatorium, ſi nimirum quaeratur debitum ſuſpenſionis punctum, circa quod globus oſcillari intelligatur. Hoc punctum erit vel in peripheria globi, vel extra, vel intra illam, prout vel motus progreſſiuus aequalis eſt gyratorio, vel vnus, alterue, praeualet. Etenim per interuallum temporis valde exiguum motus iſte compoſitus nihil aliud eſt, niſi vera oſcillatio circa debitum illud punctum ſuſpenſionis.

Lem-

Lemma 2.

V. Data diſtantia puncti ſuſpenſionis a ſuperficie globi oſcillantis, vna cum velocitate centri, inuenire velocitatem motus gyratorii, vt manente eadem velocitate centri, inde oriens motus compoſitus ſit idem cum priori oſcillatorio.

Sit diſtantia puncti ſuſpenſionis a ſuperficie globi $= a$, radius $= b$, velocitas in centro $= v$, velocitas motus gyratorii $= x$, erit velocitas in ſummo peripheriae puncto $= v - x$; ſed eſt $a + b . v :: a . v - x$, igitur $x = \frac{b}{a+b} v$.

Si data velocitate motus gyratorii, quam nunc voco c, quaeratur velocitas centri, inuenietur illa $= \frac{a+b}{b} c$, vnde patet in caſu $a = -b$ velocitatem in centro eſſe nullam.

Problema 1.

VI. *Inuenire vim viuam globi oſcillantis.*

Solutio.

Intelligatur globus ſuſpenſus ex filo verticali FB, quod continuatum transeat per centrum D; Sit LBME circulus globi, in cuius directione mouetur, radius $= b$, FB diſtantia puncti ſuſpenſionis a ſuperficie globi, $= a$; per puncta infinite propinqua I et i ducantur horizontales AC et ac; voceturque BI $= x$, I$i = dx$, erit IC $= \sqrt{(2bx - xx)}$, ponaturque praeterea velocitas in centro $= v$. Figura 1.

Quaeremus primum vim viuam strati elementaris et horizontalis, quod respondet spatiolo $ACca$: sit itaque
Figura 2. circulus horizontalis $ARCS$ oscillans in directione AC circa axem suspensionis, cuius distantia a diametro circuli $RS = \alpha$, radius circuli $= \beta$, $Im = \xi$, $mn = d\xi$, erit $mp = \surd(\beta\beta - \xi\xi)$ et distantia ab axe suspensionis ad applicatam $mp = \surd(\alpha\alpha + \xi\xi)$.

Iam cum velocitas in centro globi sit $= v$, erit hic velocitas in $m = \frac{\surd(\alpha\alpha + \xi\xi)}{a+b} v$, et quia singula puncta in mp communi velocitate mouentur, erit vis viua spatioli $mnpq = \frac{\alpha\alpha + \xi\xi}{(a+b)^2} vv\, d\xi \surd(\beta\beta - \xi\xi) = \frac{vv}{(a+b)^2}(\xi\xi\, d\xi \surd(\beta\beta - \xi\xi) + \alpha\alpha\, d\xi \surd(\beta\beta - \xi\xi))$.

Huius expressionis si sumatur integrale et dein ponatur $\xi = \beta$, habebitur vis viua quadrantis circuli: Integretur ergo per partes; Est autem pars prior $\frac{vv}{(a+b)^2}\xi\xi\, d\xi \surd(\beta\beta - \xi\xi) = \frac{-vv}{(a+b)^2}(-\xi^{\frac{5}{3}} d\xi \surd(\beta\beta\xi^{\frac{2}{3}} - \xi^{\frac{8}{3}}))$, diuidendo nimirum et rursus multiplicando per $\xi^{\frac{1}{3}}$; si nunc ab hac quantitate auferatur $\frac{vv}{(a+b)^2} \times \frac{1}{4}\beta\beta\xi^{-\frac{1}{3}} d\xi \surd(\beta\beta\xi^{\frac{2}{3}} - \xi^{\frac{8}{3}})$ et dein illi rursus addatur, erit illa $= \frac{-vv}{(a+b)^2}(-\xi^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4}\beta\beta\xi^{-\frac{1}{3}}) d\xi \surd(\beta\beta\xi^{\frac{2}{3}} - \xi^{\frac{8}{3}}) + \frac{1}{4}\frac{\beta\beta}{(a+b)^2} vv\, d\xi \surd(\beta\beta\xi^{\frac{2}{3}} - \xi^{\frac{8}{3}})$
Huius expressionis integrale est $= \frac{-vv}{4(a+b)^2}\xi(\beta\beta - \xi\xi)^{\frac{3}{2}} + \frac{\beta\beta}{4(a+b)^2} vv \int d\xi \surd(\beta\beta - \xi\xi)$; est itaque $\int(\frac{\alpha\alpha + \xi\xi}{(a+b)^2} vv\, d\xi \surd(\beta\beta - \xi\xi)) = \frac{-vv}{4(a+b)^2}\xi(\beta\beta - \xi\xi)^{\frac{3}{2}} + \frac{\beta\beta}{4(a+b)^2} vv \int d\xi \surd(\beta\beta - \xi\xi) + \frac{\alpha\alpha}{(a+b)^2} vv \int d\xi \surd(\beta\beta - \xi\xi)$.

Po-

Ponamus nunc $\xi = \epsilon$ et inueniemus vim viuam quadrantis circuli $\frac{4\alpha\alpha + \epsilon\epsilon}{4(a+b)^2} vv \int d\xi \sqrt{(\epsilon\epsilon - \xi\xi)} =$ (quia $\int d\xi \sqrt{(\epsilon\epsilon - \xi\xi)} =$ quadranti, quem voco Q) $\frac{4\alpha\alpha + \epsilon\epsilon}{4(a+b)^2} vvQ$; ergo vis viua totius circuli $= \frac{4\alpha\alpha + \epsilon\epsilon}{(a+b)^2} vvQ$. Applicentur iam haec ad sphaeram. In hac est $\alpha = a + x$, $\epsilon = \sqrt{(2bx - xx)}$, $Q = \frac{1}{8} n.(2bx - xx)$ (per n intelligo exponentem rationis inter peripheriam circuli et radium) adeoque $\frac{4\alpha\alpha + \epsilon\epsilon}{(a+b)^2} vvQ = \frac{n}{8(a+b)^2} vv \times (8aabx + 16abxx + 4bbxx - 4aaxx + 4bx^3 - 8ax^3 - 3x^4)$, quod ductum in dx altitudinem scilicet strati dabit eius vim viuam $= \frac{n}{8(a+b)^2} vvdx(8aabx + 16abxx + 4bbxx - 4aaxx + 4bx^3 - 8ax^3 - 3x^4)$, huius integrale est $= \frac{n}{48(a+b)^2} \cdot vv(4aabxx + \frac{16}{3} abx^3 + \frac{4}{3} bbx^3 - \frac{4}{3} aax^3 + bx - 2ax^4 - \frac{3}{5} x^5)$. In hac expressione si ponatur $x = 2b$, obtinebitur vis viua totius sphaerae oscillantis $= \frac{2}{3} nb^3 vv \left(\frac{aa + 2ab + \frac{7}{5} bb}{(a+b)^2}\right) =$ (si $\frac{2}{3} nb^3$ vtpote massa globi vocetur M) $\frac{aa + 2ab + \frac{7}{5} bb}{(a+b)^2} vvM$. Q. E. I.

Corollarium 1.

VII. Si ponatur $a = \infty$, habebitur vis viua globi solo motu progressiuo moti $= vvM$, plane vt fieri debet.

Corollarium 2.

VIII. Vis viua motus compositi ex progressiuo et gyratorio, quorum velocitates sunt inter se aequales, inueuenitur, si ponatur $a = 0$, hoc casu expressio generalis abit in hanc $\frac{7}{5} vv$ M; ergo vis viua progressiua se habet ad vim viuam oscillatoriam, vbi punctum suspensionis est in peripheria globi, vt 5 ad 7.

Scholion I.

IX. Nihil determinati dat expressio nostra pro casu, quo punctum suspensionis concipitur esse in centro, id est, quo globus omni motu progressiuo destitutus tantum circa axem suam gyratur; hoc enim in casu, quia $a = b$ et proinde velocitas centri nulla (Prop. V.), erit expressio nostra $= \frac{0}{0}$: Vt itaque determinemus vim viuam gyratoriam, vocemus c velocitatem, quae est in peripheria globi oscillantis et erit velocitas centri $= \frac{a+b}{a} c$; hoc valore substituto pro v in expressione nostra generali, mutatur illa in hanc $\frac{aa + 2ab + \frac{7}{5} bb}{aa} cc$ M; iam si in hac ponatur $a = -b$, habebitur vis viua gyratorii globi $= \frac{2}{5} cc$ M. Est adeo vis viua progressiua ad vim viuam gyratoriam globi, vt 5 ad 2.

Theorema.

X. *Si in globo oscillante motus gyratorius separatim consideretur a motu progressiuo et in vtroque motu simplici vis viua sumatur, aggregatum virium viuarum rursus exhibebit vim viuam oscillatoriam.*

Demonstratio.

Sint rursus distantia puncti suspensionis a superficie globi $= a$, radius $= b$, velocitas centri $= v$, erit (Pr. V.) velo-

velocitas, qua punctum in peripheria circa centrum gyratur, $=\frac{b}{a+b}v$, vis viua gyratoria $=\frac{2bb}{5(a+b)^2}vvM$; (Prop. IX.), vis viua progressiua $=vvM$ (Prop. VII.); summa harum virium viuarum $=\frac{aa+aab+\frac{7}{5}bb}{(a+b)^2}vvM$, qui valor idem est, quem antea pro vi viua oscillatoria inuenimus. (Prop. VI.)

Corollarium.

XI. Licet adeo in globo oscillante duas vires viuas, nimirum progressiuam et gyratoriam separatim considerare.

Problema 2:

XII. *Data velocitate duorum corporum* A *et* B, *oscillando circa puncta* F *et* G *se inuicem percutientium, determinare velocitatem quam habebunt post collisionem.* Figura 3.

Solutio.

Sit radius globi $A = \mathrm{A}$, ipsius massa $= M$, radius alterius globi $= \mathrm{B}$, huius massa $= N$, distantia puncti suspensionis a globo $A = \alpha$, distantia puncti suspensionis a globo $B = \beta$, velocitas in centro globi $A = m$, velocitas in centro alterius globi $= n$, erit vis viua progressiua globi $A = mmM$ atque (Prop. IX.) eiusdem vis viua gyratoria $=\frac{2\mathrm{AA}}{5(\alpha+\mathrm{A})^2}mmM$, similiterque vis viua progressiua globi $B = nnN$, eiusque vis viua gyratoria $=\frac{2\mathrm{BB}}{5(\beta+\mathrm{B})^2}nnN$. Notandum est: Quod ponam centra globorum tempore collisionis esse in linea horizontali.

 Post

Poſt colliſionem motus gyratorii, quia neuter illorum agit in alterum, non mutabuntur, (id quod deinceps aliter demonſtrabo), fiet ergo ſolum immutatio in motibus progreſſiuis et quidem, iuxta regulas receptas, ita, vt poſt impulſum velocitas progreſſiua corporis A, ſit $\frac{mM - mN + 2nN}{M+N}$, velocitas progreſſiua corporis $B = \frac{nN - nM + 2mM}{M+N}$, vis itaque viua progreſſiua globi $A = \frac{(mM - mN + 2nN)^2}{M+N} M$; huic ſi addatur eiusdem vis viua gyratoria, quam vidimus eſſe $= \frac{2AA}{5(\alpha + A)^2} mmM$, prodibit ipſius vis viua totalis ſeu oſcillatoria $= (\frac{2AA}{5(\alpha+A)^2} mm + (\frac{mM - mN + 2nN}{M+N})^2) M$; globi vero B vis viua progreſſiua poſt impulſum erit $= (\frac{nN - nM + 2mM}{M+N})^2 N$, quae addita eiusdem vi viuae gyratoriae dat ipſius vim viuam totalem ſeu oſcillatoriam poſt impulſum $= (\frac{2BB}{5(\beta+B)^2} nn + (\frac{nN - nM + 2mM}{M+N})^2) N$.

Dicatur nunc velocitas quaeſita in centro globi $A = v$, velocitas quaeſita in centro globi $B = p$, erit vis viua oſcillatoria globi A poſt impulſum $= \frac{\alpha\alpha + 2\alpha A + \frac{7}{5}AA}{(\alpha + A)^2} vvM$, (Prop. VI.) = eidem vi viuae oſcillatoriae poſt impulſum quam modo inuenimus eſſe $= (\frac{2AA}{5(\alpha+A)^2} mm + (\frac{mM - mN + 2nN}{M+N})^2) M$. Similiter erit vis viua oſcillatoria corporis B poſt impulſum $= \frac{\beta\beta + 2\beta B + \frac{7}{5}BB}{(\beta + B)^2} ppN = (\frac{2BB}{5(\beta+B)^2} nn + (\frac{nN - nM + 2mM}{M+N})^2) N$; vnde elicitur $v = \sqrt{(\frac{2AA}{5(\alpha+A)^2 + 2AA} mm + \frac{5(\alpha+A)^2}{5(\alpha+A)^2 + 2AA} (\frac{mM - mN + 2nN}{M+N})^2}$ et $p = \sqrt{}$

$= \sqrt{\left(\frac{2BB}{5(\beta+B)^2+2BB} nn + \frac{5(\beta+B)^2}{5(\beta+B)^2+2BB} \left(\frac{nN-nM+2mM}{M+N}\right)^2 \right)}$.
Q. E. I.

Corollarium I.

XIII. Si $\alpha\alpha\beta = \infty$, prodibunt regulae communes pro corporibus solo motu progressiuo motis; hoc enim casu erit $v = \frac{mM-mN+2nN}{M+N}$ et $p = \frac{nN-nM+2mM}{M+N}$.

Corollarium 2.

XIV. Si $\alpha\alpha\beta = 0$, qui casus est pro corporibus oscillantibus, in quibus motus gyratorius aequalis est motui progressiuo, erit $v = \sqrt{\left(\frac{2}{7}mm + \frac{5}{7}\left(\frac{mM-mN+2nN}{M+N}\right)^2\right)}$; et $p = \sqrt{\left(\frac{2}{7}nn + \frac{5}{7}\left(\frac{nN-nM+2mM}{M+N}\right)^2\right)}$.

Scholion.

XV. In Prop. XII. assumsimus motus gyratorios duorum corporum oscillantium ab impulsu non mutari; Istud, quia nonnullis scrupulum mouere posset, seorsim nunc demonstrabimus. Quaeremus impetum corporis oscillantis & inueniemus eum non esse maiorem, quam si solo motu primo progressiuo corpus esset motum.

Sit itaque primo planum horizontale CF, suspensum ex filo verticali AB atque oscillans in directione Figura 4.
CF; Si velocitas puncti A exprimatur per lineam AB, exprimatur velocitas puncti F per lineam BF, sed haec velocitas, cum habeat directionem obliquam secundum FD perpendicularem ad BF, non tota impenditur in impetum; de componenda itaque est in FE et DE,

quarum

quarum prior sola impenditur in impetum; Est autem (ob triangula similia FED, BAF) FE. FD::BA. BF, ergo velocitas, qua fit impetus puncti F exprimetur per lineam AB, adeoque erit aequalis velocitati puncti A; idem dicendum de omnibus reliquis punctis f, f, plani oscillantis; est ergo totius plani impetus aequalis toti massae ductae in velocitatem, quae est in puncto A, hinc considerari potest planum tanquam concentratum in A.

Si iam loco plani habeamus corpus oscillans, idem erit ac si infinita pondera p, p, p, p, concentrata in infinitis punctis virgae rigidae AB oscillarentur. Vt nunc rem clarius ob oculos ponamus, concipiamus duo corpora et quidem P et π duabus diuersis laminis rigidis AB et $\alpha\gamma$ affixa, sit autem distantia corporis P a puncto A dupla v. gr. distantiae corporis π a puncto fixo α; impingant haec duo corpora in elastra DE, $\delta\varepsilon$ aequalia, distantia elastri DE a puncto A sit aequalis distantiae elastri $\delta\varepsilon$ a puncto α; erit ex natura vectis impetus ponderis P in elastrum DE duplus impetus ponderis π in elastrum $\delta\varepsilon$ si puncta γ et c eadem velocitate moueantur; transferatur nunc pondus π ex γ in c, ita vt eidem virgae AB in medio affixum vna cum pondere P oscilletur et impingat in commune elastrum DE; cum omnia sint eadem, erit etiam impetus ipsius adhuc dimidio minor impetu ponderis P in elastrum DE: si nunc pondus P augeatur, vt fiat v. gr. triplum ponderis π, erit impetus ipsius sextuplo maior impetu huius; vnde apparet esse singulorum ponderum

Figura 5.

Figura 6.

derum impetus proportionales singulis massis ductis in suas respectiue distantias a puncto suspensionis; ergo si infinita sint pondera, erit summa omnium impetuum proportionalis summae singularum massarum ductarum in suas respectiue distantias a puncto suspensionis, aequalis, vt notum, impetui, quem haberet tota massa omnium ponderum, si concentrata foret in centro grauitatis. Cum itaque moles globi oscillantis tanquam punctum considerari possit; erit eius distantia a puncto suspensionis infinita aspectu radii, adeoque ratione impetus solus motus gyratorius considerandus est. Q. E. D.

PARS ALTERA.

De Corporibus rotando se percutientibus.

Lemma.

XVI. Si globus plano aspero incedat, eius motus progressiuus, siue radens, ab asperitate plani turbabitur, et accedet ei motus gyratorius, hincque orietur motus mixtus; hunc vocabimus *motum rotatorium* atque per *vim viuam rotatoriam* intelligemus vim viuam globi hac ratione moti.

Corollarium.

XVII. Motus itaque rotatorius nihil est aliud, nisi iste motus compositus ex progressiuo et gyratorio, de quo diximus in Prop. IV. adeoque semper reduci posset ad motum simplicem oscillatorium, si modo quaeratur debitum suspensionis punctum, circa quod globus oscillari intelligatur (Prop. IV.)

Definitio.

XVIII. *Rotationem perfectam* voco eam, quae fit cum punctum in circulo maximo ad axem rotationis perpendiculari describit cycloidem vulgarem; sin hoc punctum describat cycloidem contractam vel prolongatam, erit *rotatio imperfecta*.

Scholion 1.

XIX. Si motus perfecte rotatorius tanquam oscillatorius consideratur, erit punctum suspensionis isti motui respondens in superficie globi, hic enim singulis momentis reuera circa punctum in superficie oscillatur, in motu vero non perfecte rotatorio ad oscillatorium reducto, erit punctum suspensionis vel extra peripheriam vel intra eam, prout vel motus progressiuus praeualet vel gyratorius.

Scholion 2.

XX. Si planum super quo globus rotatur sit valde asperum et motus globi lentus, poterit rotatio pro perfecta haberi; sin impetus quo globus propellitur sit maximus, ita vt asperitas plani facile vincatur, motus globi gyratorius pro nullo haberi poterit respectu progressiui.

Scholion 3.

XXI. Ostensa identitate motus rotatorii cum oscillatorio, perfacile erit omnia ea, quae de globis oscillantibus demonstrauimus, iisdem applicare rotantibus.

Pro-

Problema. 3.

XXII. *Data velocitate, quae est in centro globi rotantis, vna cum velocitate motus gyratorii, determinare distantiam puncti suspensionis, circa quod si globus oscilletur, motus eius oscillatorius sit idem cum priori rotatorio.*

Solutio.

Sit globus ACBD; concipiatur ille rotare per interuallum temporis infinite paruum, ita vt diameter AB veniat in situm $\alpha\beta$; haec $\alpha\beta$, continuata si opus sit, priorem AB, etiam continuatam, secabit in aliquo puncto F; hoc punctum, quamdiu globus rotauit, nullam habuit velocitatem, sed mansit immotum, vnde necessario punctum suspensionis debet esse in F; vt itaque huius distantiam a peripheria globi determinemus, sit diameter $= 2b$, velocitas in centro $= v$, velocitas gyratoria (quam, vt iam dictum, definio ex velocitate puncti in circulo maximo ad axem rotationis perpendiculari sumti) $= c$, distantia quaesita BF $= x$: exprimentur velocitates punctorum A, L, B per arculos infinite paruos $A\alpha$, $L\lambda$, $B\beta$, radiis AF, LF, BF descriptos; est autem $B\beta = v - c$; vnde $LF(b + x)$. $L\lambda(v) :: BF(x). B\beta(v - c)$; adeoque $x = \frac{v - c}{c} b$. Q. E I. Figura 7.

Corollarium.

XXIII. Si $c = o$, erit $x = \infty$; si, $v = c$, erit $x = o$, id est punctum F existet in peripheria globi; sin $v < C$, erit x negatiuum, cadet nimirum punctum F intra peripheriam, et coincidet quidem cum centro globi si $v = o$.

Scholion.

XXIV. Vis viua globi rotantis inuenitur, si in valore, quem in Prop. VI. pro vi viua globi oscillantis elicuimus, substituatur $\frac{v-c}{c}b$ pro a, manentibus bv, et M iisdem quae antea; est ergo vis viua globi rotantis $=(vv+\frac{2}{5}cc)$M.

Corollarium I.

XXV. Si distantia puncti suspensionis sit infinita, id est, si ponatur $c=o$, obtinebitur vis viua globi M v motu progressiuo moti $=vv$M.

Corollarium 2.

XXVI. Vis viua globi perfecte rotantis inuenitur $=\frac{7}{5}vv$M, ponendo nimirum $v=c$.

Corollarium 3.

XXVII. Si $v=o$, erit vis viua globi solo motu gyratorio moti $=\frac{2}{5}cc$M.

Scholion I.

XXVIII. In Prop. X. demonstratum fuit, si in globo oscillante motus gyratorius separatim consideretur a motu progressiuo, et in vtroque motu simplici vis viua sumatur, fore vt aggregatum virium viuarum rursus exhibeat vim viuam oscillatoriam. Idem Theorema verum etiam erit in globo rotante, scilicet in hoc quoque aggregatum duarum virium viuarum, progressiuae et gyratoriae separatim sumtarum, rursus exhibebit

vim

vim viuam rotatoriam, quia motus rotatorius idem est cum oscillatorio. Hanc autem velocitatem ipsa expressio nostra statim ob oculos ponit, cum constet ex duobus terminis vvM et $\frac{2}{5}ccM$, quorum primus exprimit ipsam vim viuam progressiuam, alter vero gyratoriam seorsim sumtam.

Scholion 2.

XXIX. In Prop. XII. solutionem dedimus huius Problematis: "Data velocitate duorum corporum oscillando se inuicem percutientium, determinare velocitatem quam habebunt post collisionem;" solutio illa globis rotantibus applicari nequit, nam in globis oscillantibus punctum suspensionis, cum sit fixum, idem manet post impulsum, quod ante; in globis vero rotantibus punctum suspensionis, motui isti rotatorio respondens, cum non sit fixum sed imaginarium tantum, non necessario idem manet, sed mutari potest et quidem infinitis modis. Vt igitur dictum problema solui possit, cognitae supponi debent distantiae punctorum suspensionis, quae motibus rotatoriis globorum post impulsum sunt responsura, siue, quod eodem redit, data supponi debet ratio, quae post impulsum futura sit inter velocitatem progressiuam et gyratoriam vtriusque globi. Hoc praemonito ipsam Problematis solutionem in sequenti dabimus Propositione.

Problema 4.

XXX. *Datis in duobus globis A et B rotando in se inuicem impingentibus, velocitate centri vna cum velo-*

citate gyratoria, nec non ratione, quae futura sit inter has duas velocitates post impulsum determinare velocitates, quas habebunt post collisionem.

Solutio.

Fig. 8. Sit massa globi A $= M$, radius $= A$, massa globi B $= N$, radius $= B$, velocitas in centro globi A $= m$, eius velocitas gyratoria $= c$, ratio inter velocitatem progressiuam et gyratoriam post impulsum in eodem globo $= \frac{f}{g}$; velocitas in centro globi B $= n$, eius velocitas gyratoria $= e$, ratio inter velocitatem progressiuam et gyratoriam, quas habebit post impulsum $= \frac{h}{i}$, erit reducto motu rotatorio ad oscillatorium, debita distantia puncti suspensionis a superficie globi A $= \frac{m-c}{c} A$ (Prop. XII.) atque debita distantia puncti suspensionis a superficie globi B $= \frac{n-e}{e} B$.

Si nunc ea, quae habentur in Propositione XII, debite applicentur, inuenietur vis viua rotatoria globi A post impulsum $= (\frac{2}{5} cc + (\frac{mM - nN + 2nN}{M + N})^2) M$; globi vero B vis viua $= (\frac{2}{5} ee + (\frac{nN - nM + 2mM}{M + N})^2) N$; istae vires viuae in vnoquoque globo conseruabuntur, quomodocunque ab asperitate plani rursus mutentur velocitates progressiuae et gyratoriae globorum.

Vocetur iam velocitas progressiua globi A post impulsum $= v$, erit per hyp. eius velocitas gyratoria $= \frac{g}{f} v$ atque (Prop. XXIV.) eiusdem vis viua rotatoria $= \frac{5ff + 2gg}{5ff} vv M$, est autem (vti iam vidimus) eadem vis

viua

viuam etiam $=(\frac{2}{5}cc+(\frac{mM-mN+2nN}{M+N})^2)M$, ideoque elicitas $v=\sqrt{\frac{2ccff+5ff(\frac{mM-mN+2nN}{M+N})^2}{5ff+2gg}}$; eodem modo, si vocetur p velocitas progressiua corporis B post impulsum inuenietur $p=\sqrt{(\frac{2eehh+5hh(\frac{nN-nM+2mM}{M+N})^2}{5hh+2ii})}$. Q.E.I.

Scholion.

XXXI. In Propositione praecedenti generaliter expressimus rationes inter velocitates globorum progressiuas et gyratorias post impulsum per has fractiones $\frac{f}{g}$, $\frac{h}{i}$, in applicatione vero ad casus speciales pro $\frac{f}{g}$ et $\frac{h}{i}$ substituendae erunt rationes quae maxime videbuntur probabiles; v. gr. si globi admodum lente moueantur super plano aspero, erit rotatio sensibiliter perfecta (Prop. XX.) et singulae harum fractionum $\frac{m}{c}$, $\frac{f}{g}$, $\frac{n}{e}$ et $\frac{h}{i}$ aequales erunt vnitati. Hunc casum quia est frequentissimus, in sequenti propositione seorsim tractabimus.

Problema 5.

XXXII. *Data velocitate duorum globorum* A *et* B, *rotando se inuicem percutientium, determinare velocitates, quas habebunt post impulsum positis globis tam ante quam post collisionem perfecte rotantibus.* Fig. 8.

Solutio.

Positis iisdem, quibus in Prop. XXX, nisi quod sit $m=c$, $n=e$, $f=g$ et $h=i$; erit vis viua globi A post impul-

impulsum $= \frac{7}{5} vv M$ (Prop. XXVI.), est autem eadem vis viua etiam $= (\frac{2}{5} mm + (\frac{mM - mN + 2nN}{M + N})^2) M$ (Prop. XXX.) habetur itaque $v = V(\frac{2}{7} mm + \frac{5}{7}(\frac{nN - mN + 2nN}{m + N})^2)$; similiter inuenitur $p = V(\frac{2}{7} nn + \frac{5}{7}(\frac{nN - nM + 2mM}{M + N})^2)$. Q. E. I.

Corollarium I.

XXXIII. Si massae globorum A et B fuerint inter se aequales erit $v = V(\frac{2}{7} mm + \frac{5}{7} nn)$ et $p = V(\frac{2}{7} nn + \frac{5}{7} mm)$.

Corollarium 2.

XXXIV. Si vlterius globus B ponatur quieuisse ante collisionem, erit $v = m V \frac{2}{7}$, et $p = m V \frac{5}{7}$.

Scholion I.

XXXV. Hinc apparet, si in ludo *Billard* alter globorum in alterum quiescentem perfecte rotando impingat, priorem non esse quieturum, sed fore vt ambo moueantur, et quidem ea lege vt impingens retineat velocitatem, quae sit ad velocitatem alteri acquisitam, vt $V 2$ ad $V 5$; quod si globi impingentis rotatio sit imperfecta, retinere quidem debet aliquam velocitatem, sed minorem ac si perfecte rotasset; haecque ab experientia confirmantur; hinc est quod huius ludi periti globum suum magno propellant impetu, si colluforis globus prope lacunam in linea recta sit positus; hoc enim pacto leges ordinariae obtinent, (Prop. XX.) atque globi impingentis motus ipso impulsu sistitur, globusque alter solus in lacunam intruditur; id quod non fieret nisi impingens celerrime fuisset motus.

Scho-

Scholion 2.

XXXVI. Aliorum praeterea phaenomenorum, in eodem ludo *Billard* occurrentium, ratio reddi poterit, considerato ea qua fecimus ratione, motu duplici, progressiuo et gyratorio.

Obseruatur v. gr. globum, digito pressum hocque modo propulsum, primum quidem aliquantum antrorsum, dein vero retrorsum moueri; huius ratio est, quod digitus propellens globum simul eum retrahat sicque ei imprimat duplicem motum, alterum progressiuum antrorsum, alterum gyratorium in sensum contrarium, prior ab initio posteriori praeualet, sed propter asperitatem plani breui extinguitur, et sic illo extincto hoc autem remanente, globus retro mouetur: idem vero non accidit, si digitus propellens globum madefiat. Porro obseruatur directiones globorum post impulsum ad se inuicem non esse perpendiculares: hic iterum considerandum est, globum impingentem ante collisionem habere motum duplicem, progressiuum et gyratorium; posterior, quia, vt saepius dictum, non mutatur, retinet post impulsum eandem directionem, quam habuit ante: prior vero, nimirum progressiuus, post collisionem tendit secundum perpendicularem ad directionem alterius globi, sed propter asperitatem panni accedet insuper globo motus gyratorius secundum eandem directionem; habebit ergo globus motum triplicem et ex hoc motu triplici necessario oriri debet motus simplex rotatorius secundum directionem aliquam intermediam, hinc manifeste directiones globorum post impulsum constituent angulum aliquantum acutum, eoque magis acutum, quo motus fuerit lentior.

Vnum adhuc referam phaenomenon, primo haud absimile quodque eodem modo explicandum est, quod illud: si globus quiescens vni ex lateribus sit adhaerens (quod Galli vocant *être collé*) et alter in eum ita impingat, vt centra sint in linea perpendiculari ad latus, cui prior adhaeret, fiet vt post impulsum globus impingens per eandem perpendicularem aliquantum resiliat et dein vel subito quiescat vel retro moueatur; ratio huius, vt dixi, manifesta est iis quae habentur ab initio huius scholii; quodsi vero impulsus fuerit obliquus, poterit fieri, vt globus impingens post collisionem primum aliquantum resiliat, dein per lineam curuam rursus retro moueatur, seque in lacunam voluat, quia tunc directio motus gyratorii non e diametro est opposita directioni motus progressiui; hocque etiam saepissime accidere solet.

OBSER-

Comment: Acad: Sc. Tom. VII. Tab. III. p. 35.

Fig: 2.

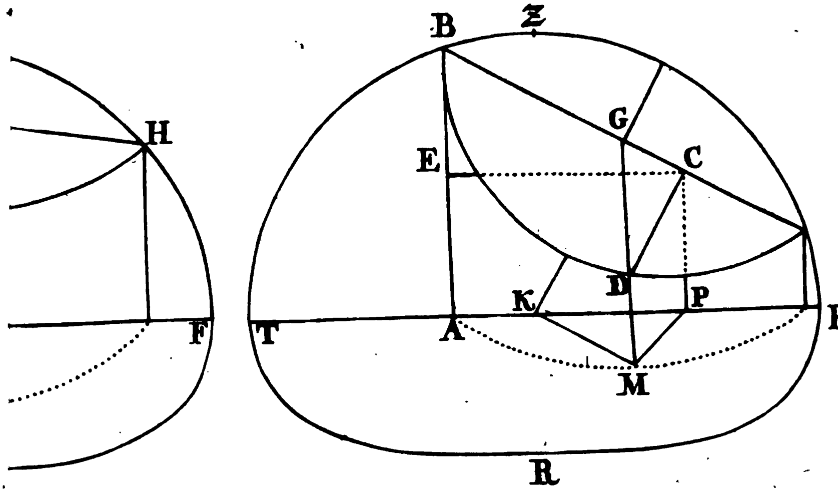
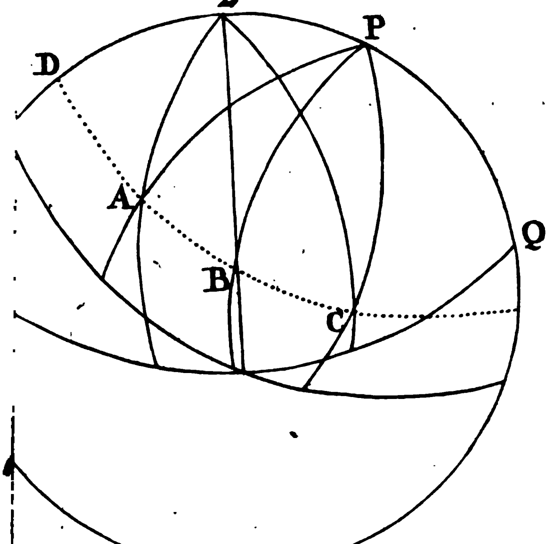


Fig: 3.



PROBLEMATIS ASTRONOMICI
A
Clar. De L'Isle
PROPOSITI
ENVCLEATIO.
AVTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

Lemma I.

I.

Posito finu toto $=1$, anguli acuti maioris finu $=S$, cofinu $=C$, Tangente $=T$; anguli vero acuti minoris finu $=s$, cofinu $=c$, tangente $=t$; femifummae horum duorum angulorum finu $=A$ cofinu $=B$; femidifferentiae finu $=a$, cofinu $=b$. Erit Tabula III.

1. Cofinus anguli compofiti ex vtroque dato $=Cc-Ss$
2. Sinus anguli refidui $=Sc-sC$.
3. Tangens anguli refidui $=\frac{T-t}{Tt+1}$.
4. $c-C=2aA$.
5. $S-s=2aB$.
6. $S+s=2Ab$.
7. Sinus anguli dupli $=2SC$.
8. Cofin. anguli refidui $=Cc+sS$.

Demonftrationes horum omnium vide in Comment. huius Academiae Tomo II. p. 13. feq.

Lemma 2.

Fig. 1. II. In Schemate Fig. 1. repraesentet TZF planum Meridiani, TRF planum Horizontis, BDH planum Paralleli, in quo stella quaedam D mouetur. Exponet itaque angulus CGD distantiam stellae D a Meridiano, in Aequatore, quam vocabo tempus; angulus PKM vero distantiam stellae D a Meridiano, in Horizonte, seu Azimuthum. *Inuenienda est ratio, quam habet Tempus ad Azimuthum.* Sit in hunc finem angulus Temporis CGD acutus, atque erit in triangulo CGD ad C rectangulo, sin. tot. (1) tang. CGD $=$ CG : CD, hinc tang. CGD $= \frac{CD}{CG}$; in triangulo PKM ad P rectangulo, erit rursus, sin. tot. (1): tang. PKM $=$ PK : PM, hinc tang. PKM $= \frac{PM}{PK}$; itaque erit tangens Azimuthi ad tang. Temporis $=$ CG : PK, ob CD $=$ PM, restat itaque inuestiganda haec ratio. Ponantur

Eleu. aequat. sin. $= a$.	Temp. sin. $= \alpha$.	Declin. sin. $=$ A.
cosinus $= b$.	cosin. $= \beta$.	cosin. $=$ B.
tangens $= c$.	tang. $= \gamma$.	tang. $=$ C.

et praeterea altitudinis Meridianae in B cosinus AK $= q$. Erit, ob altitudinem meridianam $=$ alt. aequatoris $+$ vel $-$ declinatione, per Lemmatis 1. num. 1 et 8. $q = \text{B}b - \text{A}a$, si declinatio sit Borealis, sed $\text{B}b + \text{A}a$, si eadem sit Australis. Deinde in triangulo CGD est sin. tot. (1): DG (B) $=$ cos. CGD (β): CG $= \text{B}\beta$; nec non in triangulo EBC, sin. tot. (1): BC $(\text{B} - \text{B}\beta) =$ sin. EBC (b): EC $=$ AP $= \text{B}b - \text{B}b\beta$; hinc CG : PK $=$ CG : AK $-$ AP $= \text{B}\beta : q - \text{B}b + \text{B}b\beta = \text{B}\beta : \text{B}b\beta \mp \text{A}a$,

(vbi

(vbi semper superius signum valet pro Declinatione Boreali, inferius vero pro Australi) $= \beta : b\beta \mp \frac{A\alpha}{B} = \beta : b\beta \mp C\alpha$, ob $C : 1 = A : B$. Igitur ratio quaesita est ipsius β ad $b\beta \mp C\alpha$, atque hinc Tangens Azimuthi, pro angulo Temporis acuto $\frac{\beta\gamma}{b\beta \mp C\alpha} = \frac{\alpha}{b\beta \mp C\alpha}$, ob $\gamma : 1 = \alpha : \beta$. Quodsi vero angulus Temporis sit obtusus, vt in Fig. 2. sumatur eius deinceps positus CGD, atque huius sit sinus α, cosinus β, tangens γ, erit pro hoc casu anguli, qui Azimutho AKM deinceps positus est, Tangens $= \frac{\alpha}{b\beta \pm C\alpha}$. In sequentibus vero semper assumam Declinationem esse Borealem, quare adhibendae sunt Formulae pro angulo temporis acuto $\frac{\alpha}{b\beta - C\alpha} =$ tang. Azimuthi; pro angulo Temporis autem obtuso erit $\frac{\alpha}{b\beta + C\alpha} =$ tang. anguli, qui deinceps positus est Azimutho. Q. E. I.

Problema.

III. *Ex obseruatis tribus Temporibus* ZPA, ZPB, ZPC *in Fig.* 3. *stellae alicuius, ita vt in obseruatione inter vtramque media stella sit in ipso verticali primario* ZB, *in vtraque altera vero ab hoc aequaliter remota, inuenire Altitudinem Poli.* Ad naturam huius Problematis excutiendam ponantur Figura 3.

Temporis ZPA sinus $= e$ cosin. $= f$ Elev. Aequ. sin. $= y$
ZPB sinus $= g$ cosin. $= h$ cosin. $= \sqrt{(1-yy)}$
CPQ sinus $= i$ cosin. $= k$. Declin. tang. $= u$.

Habebitur per Lemma 2. Tangens DZA $= \frac{e}{f\sqrt{(1-yy)} - uy}$, supposito angulo ZPA acuto, qui nunquam alius esse potest, porro erit Tang. DZB $= \frac{g}{h\sqrt{(1-yy)} - uy}$, supposito rurſus angulo ZPB acuto, qui etiam nunquam alius eſſe poteſt; denique erit Tangens CZQ, qui Azimutho DZC eſt deinceps poſitus, $=\frac{i}{k\sqrt{(1-yy)}+uy}$, vbi aſſumitur angulus CPQ ob angulum ZPC fere ſemper obtuſum. Factis his denominationibus, ob DZB rectum, erit tangens $\frac{g}{h\sqrt{(1-yy)}-uy}$ infinite magna, quare fractionis huius nominator $h\sqrt{(1-yy)}-uy=$ nihilo, vnde fit $uy=h\sqrt{(1-yy)}$; ob aequales autem AZB, BZC, et DZB rectum, aequales erunt etiam DZA, CZQ, quorum tangentes antea inuentae, ſi aequentur, facta ſubſtitutione ipſius $h\sqrt{(1-yy)}$ pro uy, emerget aequatio $if\sqrt{(1-yy)}-ih\sqrt{(1-yy)}=ek\sqrt{(1-yy)}+eh\sqrt{(1-yy)}$, quae, cum per incognitam $\sqrt{(1-yy)}$ diuiſibilis ſit, manentibus ſolis quantitatibus cognitis $if-ih=ek+eh$ indicat, quaeſitum ex his datis non poſſe inueniri, conſequenter Problema impoſſibile eſſe ſolutu.

Corollarium I.

IV. Si differentia Azimuthorum intelligatur data, Problema ſolui poterit, ſed ſuperfluus erit hoc caſu angulus aliquis Temporis, ex. gr. ZPC. Poſita enim cotangente ipſius AZB $=m$, erit ex prioribus $m=\frac{e}{f\sqrt{(1-yy)}-uy}$ $\frac{e}{(f-h)\sqrt{(1-yy)}}$, vnde oritur $\sqrt{(1-yy)}$, ſinus Eleuationis Poli $=\frac{e}{(f-h)m}$, quae formula facile ad logarithmos deducitur, conſiderando, quod $f-h$ ſit differentia coſinuum ZPA et ZPB, ponendo igitur ſin. $\frac{ZPB+ZPA}{2}=\eta$, et ſin. $\frac{ZPB-ZPA}{2}=\phi$, erit per Lemma 1. num. 4. $f-h=2\phi\eta$, quod in priori formula ſubſtitutum efficit ſin. Eleu. Poli $=\frac{eR^3}{2\phi\eta m}$, multiplicato numeratore per cubum radii

radii R, ad complendas dimensiones. Ergo log. sin. Eleu. Poli $= 3\,lR + le - (l2 + l\Phi + l\eta + lm)$. Sit e. g. $ZPA = 31^{\circ}\,24'$. $ZPB = 75^{\circ}\,26'$. $AZB = 45^{\circ}\,0'$, erit $\frac{ZPA + ZPB}{2} = 53^{\circ}\,25'$. $\frac{ZPB - ZPA}{2} = 22^{\circ}\,1'$. vnde talis emergit operatio:

$$
\begin{array}{rl}
l2 = & 0.3010300 \\
l\Phi = & 9.5738880 \\
l\eta = & 9.9047106 \\
lm = & 10.0000000 \\
\hline
 & 29.7796286 \\
3\,lR + le = & 39.7168458 \\
\hline
 & 9.9372172 \text{ log. sinus Eleuat. Poli.}
\end{array}
$$

cui respondent $59^{\circ}\,56'$. pro Eleuatione Poli, ad quam exemplum fuit adaptatum.

Corollarium 2.

V. Quoniam supra post factam diuisionem per $\sqrt{(1-yy)}$ remanet aequatio haec $if - ib = ek + eb$, potest assumi quaelibet harum cognitarum pro incognita, atque exinde nouum Problema solui; quaeratur ex. gr. b, erit ea $= \frac{fi - ke}{e + i}$, eritque Problema hoc: *Datis temporibus, quibus stella aliqua fuit in duobus verticalibus a primario aequaliter remotis, inuenire tempus, quo fuit in Verticali primario.* Sit autem sin. $(CPQ - ZPA) = \alpha$, erit per Lemma 1. num. 2. $fi - ke = \alpha$; sit porro sin. $\frac{CPQ + ZPA}{2} = \beta$, cosin. $\frac{CPQ - ZPA}{2} = \gamma$, et huius semidifferentiae sinus $= \delta$, erit per Lemma 1. num. 6. $e + i = 2\beta\gamma$; deinde quia $CPQ - ZPA$ duplus est semidifferentiae $\frac{CPQ - ZPA}{2}$, erit

quo-

quoque $a = 2\gamma\delta$, factis his substitutionibus erit $b = \frac{\delta}{\epsilon}$, aut $b = \frac{\delta R}{\epsilon}$ ad complendas dimensiones, vnde $lb = lR + l\delta - l\epsilon$. Sit in allegato exemplo $ZPC = 129^\circ.\ 40'$, erit $CPQ = 50^\circ.\ 20'$, vnde operatio haec est:

$$\begin{array}{r} lR + l\delta = 19.\ 2160967 \\ l\epsilon = 9\ \ 8157776 \\ \hline 9.\ 4003191.\ \text{log. cosin. } ZPB, \end{array}$$

cui respondent in Tabulis pro angulo $ZPB\ 75^\circ.\ 26'$. qualis antea fuit in Corollario praeced.

Corollarium 3.

VI. Cum insperatum id accidisset, vt Problema per data sua non determinaretur, inquisiui in causam huius rei, atque eum in finem Problema generalius concepi, vt nempe angulus DZB non sit rectus, sed alius quicunque datus acutus, cuius tangens $= m$. Erit ergo ex prioribus, suppositis angulis omnibus ZPA, ZPB, ZPC, acutis, vocatisque $\surd(1 - yy) = x$, $f - b = p$, $b - k = q$, $uy = \frac{mbx - g}{m}$, tang. $DZA = \frac{me}{g + pmx}$, tang. $DZC = \frac{mi}{g - qmx}$, hinc per Lem. 1. n. 3, tang. $AZB = (mg - me + pm^2x) : (m^2e + g + pmx)$, nec non tang. $BZC = (mi - mg + qm^2x) : (m^2i + g - qmx)$, qui duo valores aequati, praebent aequationem Quadraticam hanc: $-m^2ig - pm^3ix - 2g^2 + ge - 2gpmx + 2gqmx - eqmx + 2pqm^2x^2 + 2m^2ei - m^2eg + qem^3x + gi + pimx = 0$. Quodsi ergo DZB ponatur rectus, euadet m infinite magna, quare omnes termini, in quibus aut non reperitur m, aut non adest m^3, abiicientur, quo facto oritur $pm^3ix = qem^3ix$, vnde patet cur aequatio superius inuenta per incognitam sit diuisibilis.

OB-

OBSERVATIONES ARITHMETICAE DE SEPTENARIO,

AVTORE

G. W. Krafft.

§. 1.

Notissimae sunt Arithmeticorum regulae de inueniendo numeri cuiuscunque diuisore simplici, quas tradunt, vbi de Fractionibus ad minores terminos reducendis agunt. Extenduntur illae ad omnes numeros simplices, excepto vnico septenario; id quod ansam praebuit *Adriano Metio Arithm. Practicae Cap.* 19. dicendi: *Septenarius, cuius numeri mensura sit, nulla alia via certius explorari potest, quam diuisione ipsa.* Inueni tamen regulas etiam pro septenarii multiplo dignoscendo in duobus auctoribus, quarum vtramque examinabo; adiuncturus deinde nouam, in quam ipse ante complures annos casu incidi.

§. 2. Prima est *Mich. Stifelii*, in *Arithm. Integra, Lib.* I. *Cap.* 2. vbi haec leguntur: *Septenarius quemlibet numerum componit, et numerat, qui colligitur ex tribus, sex, nouem, aut duodecim, terminis proportionalitatis duplae, quadruplae, aut sedecuplae.* Quamuis autem videatur hanc obseruationem ad enumeratos solos hos modulos restringere: facile tamen demonstrari potest, generaliter hoc verum esse, de quibuscunque terminis harum progressio-meri propositi, adiectis tot cyphris, quot requirit valor eorum localis. Subtracto hoc ab illo, residuum fit sequens: $1a + 5b + 4c + 6d + 2e + 3f + 1g$; si itaque hoc residuum sit diuisibile per 7, etiam integer numerus propositus talis erit. Sed ex hoc residuo clare apparet, digitos numeri propositi multiplicandos esse per suos respectiuos Instrumentales modò indicatos, et videndum, an summa singulorum horum factorum sit diuisibilis per 7. Constat ergo veritas huius regulae, sed paruum exinde sperandum compendium; citius enim numerus propositus ipse per Septenarii diuisionem tentatur, quam haec praxis absoluitur.

§. 4. Neque diffiteor, quod idem dispendium meam quoque premat regulam, quam nihilominus prioribus adiungam. Quomodo autem ea se habeat melius primùm exemplo ostensurus sum. Sit propositus numerus 161 examinandus an per 7 diuidi queat. Accipio notam dextimam 1, quae si per 3, quem semper adhibeo, diuidi possit, eam diuido; si nequeat, tum à notâ proximâ sinisteriore sumo tot decades, quot necessariae sunt ad ternarii multiplum constituendum, id quod semper fieri potest; cuilibet enim digito potest adiungi numerus aliquis decadum, vt multiplum ternarii exsurgat; et in praesenti exemplo 2; igitur 21 diuisa per 3, praebent Quotum 7, huic adiungo $16 - 2 = 14$, oritur $7 + 14 = 21$; quod cum sit multiplum septenarii: concludo, etiam propositum 161 talem esse. Schemata quorundam exemplorum, cum suis compendiis, hic subiicio:

1736

$$1736^{(3}\,2+173=175^{(3}\,5+16=21.$$
$$1617^{(3}\,9+159=168^{(3}\,6+15=21.$$
$$14^{(3}\,8+1-2=7.$$
$$21^{(3}\,7+2-2=7.$$
$$543^{(3}\,1+54=55^{(3}\,5+4=9.$$

Cuius operationis vt reddam rationes, assumo numerum quemcunque $a+b$, ita tamen vt b designet assumti numeri digitum primum, siue in loco vnitatum positum. Ponatur deinde digitus c talis, vt $10c+b=3m$, dico, si fuerit $\frac{1}{10}a-c+m=7n$, numeri propositi $a+b$ mensuram fore septenarium. Nam ex posteriori aequatione deducitur $a=70n+10c-10m$, ex priori oritur $b=3m-10c$, ergo numerus propositus $a+b$ abit in hunc, factis substitutionibus, $70n+10c-10m+3m-10c=70n-7m$, qui omnino est multiplus septenarii. Idem vt exemplo numerico illustretur, ponam examinandum esse numerum 1617, erit itaque $1617=1610+7$, ergo $a=1610$, $b=7$. Assumo deinde digitum talem $2=c$ (erit enim c semper vnus ex his tribus digitis 0, 1, 2,) vt $10c+b=3m$, hoc est in hoc exemplo $10.2+7=3.9$ vnde $m=9$; si itaque fuerit $\frac{1}{10}a-c+m=7n$, numerus propositus erit multiplus septenarii. Est autem omnino $161-2+9=168=7.24$, vnde $n=24$; et quia Quotus numeri dati per 7 diuisi generaliter est $10n-m$, erit is in hoc casu $=240-9=231$. Quodsi vero cuidam non appareat numerum 168 esse multiplum septenarii, operatio antecedens cum hoc numero 168 repetenda erit.

SOLVTIO
PROBLEMATIS ARITHMETICI
DE
INVENIENDO NVMERO
QVI PER DATOS NVMEROS DIVISVS, RELINQVAT DATA RESIDVA.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Reperiuntur in vulgaribus arithmeticorum libris passim huiusmodi problemata, ad quae perfecte resoluenda plus studii et sollertiae requiritur quam quidem videatur. Quamuis enim plerumque regula sit adiecta, cuius ope solutio obtineri queat, tamen ea vel est insufficiens solique casui proposito conuenit, ita vt circumstantiis quaestionis parum immutatis, ea nullius amplius sit vsus; vel subinde etiam solet esse falsa, Ita quadratorum magicorum constructio iam pridem ab arithmeticis est tradita; quae autem cum esset insufficiens maiora ingenia *Labirii* et *Sauwerii* ad perficiendum requisiuit. Simili quoque modo vbique fere ocurrit istud problema, vt inueniatur numerus, qui per 2, 3, 4, 5, et 6 diuisus relinquat vnitatem, per 7 vero diuidi queat sine residuo: methodus vero idonea ad huiusmodi problemata soluenda nusquam exhibetur; solutio

tio enim ibi adiecta in hunc tantum casum competit, atque tentando potius absoluitur.

§. 2. Si quidem numeri, per quos quaesitus numerus diuidi debet, sunt parui, prout in hoc exemplo, tentando non difficulter quaesitus numerus inuenitur; difficillima autem foret istiusmodi solutio, si diuisores propositi essent valde magni. Cum itaque ad huius generis problemata soluenda methodus etiamnum habeatur nulla genuina, quae ad magnos diuisores aeque pateat, ac ad paruos; non inutiliter operam meam collocatam esse confido, dum in huiusmodi methodum inquisiui, qua sine tentatione pro maximis etiam diuisoribus talia problemata resolui queant.

§. 3. Quo igitur, quae hac de re sum meditatus, distincte exponam, a casu incipio simplicissimo, quo vnicus tantum datur diuisor, numerusque quaeritur, qui per illum diuisus datum relinquat residuum. Requiratur scilicet numerus z, qui per numerum a diuisus relinquat p pro residuo. Huius quidem quaestionis solutio est facillima, erit enim $z = ma + p$, denotante m numerum quemcunque integrum; interim tamen obseruari conuenit hanc solutionem esse vniuersalem, omnesque numeros satisfacientes complecti. Praeterea ex ea quoque intelligitur, si vnus habeatur numerus satisfaciens, ex eo innumerabiles alios satisfacientes quoque posse inueniri, dum ille numerus quocunque multiplo ipsius a vel augeatur, vel si fieri potest, minuatur.

Erit

Erit autem p seu $0a+p$ minimus numerus satisfaciens, hunc excipit $a+p$, quem porro sequuntur $2a+p$, $3a+p$, $4a+p$, etc. qui numeri omnes constituunt, progressionem arithmeticam differentiam constantem habentem a.

§. 4. Hoc exposito sequitur casus, quo duo diuisores cum suis residuis proponuntur, qui est praecipuus, et sequentes omnes in se complectitur. Nam quotcunque propositi fuerint diuisores, quaestio semper ad hunc casum, quo duo tantum proponuntur, reduci poterit, quemadmodum in sequentibus monstrabo. Quaeri igitur oporteat numerum z, qui per a diuisus relinquat p, per b vero diuisus relinquat q; sitque numerus a maior numero b. Cum ergo numerus quaesitus z ita debeat esse comparatus vt per a diuisus relinquat p, necessario in hac forma $ma+p$ continebitur, eritque idcirco $z=ma+p$. Deinde ex altera conditione, qua z per b diuisus relinquere debeat q, erit $z=nb+q$. Quamobrem, cum sit $ma+p=nb+q$, determinari debebunt numeri integri loco m et n substituendi, vt sit $ma+p=nb+q$, quibus inuentis erit $ma+p$ seu $nb+q$ numerus quaesitus z.

§. 5. Quia ergo est $ma+p=nb+q$, erit $n=\frac{ma+p-q}{b}$ seu posito $p-q=v$, erit $n=\frac{ma+v}{b}$. Hanc ob rem definiri oportet numerum m, vt $ma+v$ diuidi possit sine residuo per b. Quia est $a>b$ ponatur $a=ab+c$; erit $n=ma+\frac{mc+v}{b}$; oportet ergo vt mc

$+v$

$+v$ diuiſionem per b admittat; ſunt autem α et c numeri cogniti, qui reperiuntur ex diuiſione ipſius a per b; erit enim α quotus et c reſiduum. Ponatur porro $\frac{mc+v}{b}=A$, erit $m=\frac{Ab-v}{c}$; quare numerum A inueniri oportet, vt $Ab-v$ diuidi queat per c. Si eueniat, vt v per c diuidi poſſit, operatio iam poterit finiri; ſumto enim $A=o$, erit $m=-\frac{v}{c}$ et $z=-\frac{av}{c}+p$ quae expreſſio, etiamſi euadat negatiua, tamen ad infinitos numeros affirmatiuos pro z inueniendos eſt idonea.

§. 6. Sin autem v per c non poteſt diuidi, quo $\frac{Ab-v}{c}$ fiat numerus integer, pono $b=\beta c+d$, ſeu diuido b per c, dicoque quotum $=\beta$ et reſiduum $=d$. Quo facto erit $\frac{Ab-v}{c}=A\beta+\frac{Ad-v}{c}=m$, debebitque $\frac{Ad-v}{c}$ eſſe numerus integer ſit is $=B$, fiet $A=\frac{Bc+v}{d}$. Si nunc v per d diuidi poterit, facio $B=o$, eritque $A=\frac{v}{d}$, et $m=\frac{\beta v}{d}$. Sin autem v per d non eſt diuiſibile, pono porro $c=\gamma d+e$; eritque $A=B\gamma+\frac{Be+v}{d}$. Atque pono $\frac{Be+v}{d}=C$ ut ſit $B=\frac{Cd-v}{e}$. Si nunc v per e diuidi poterit, pono $C=o$ eritque $B=-\frac{v}{e}$, et $A=-\frac{\gamma v}{e}$ atque $m=-\frac{\beta\gamma v}{e}-\frac{v}{e}$; ſin $\frac{v}{e}$ nondum fuerit integer numerus, pono $d=\delta e+f$, eritque $B=C\delta+\frac{Cf-v}{e}$; atque facio $\frac{Cf-v}{e}=D$, ut ſit $C=\frac{De+v}{f}$, vbi videndum eſt vtrum v per f diuidi poſſit an ſecus, *atque* in vtroque caſu vt ſupra operatio debet inſtitui.

 §. 7. Quia

§. 7. Quia autem $a > b$, atque $b > c$ et $c > d$ etc. hac ſerie a, b, c, d, e, f, etc. continuanda perpetuo ad minores numeros deuenitur, ita vt tandem ad tam paruum perueniri oporteat, qui ſit pars aliquota ſeu diuiſor ipſius v. Sunt autem c, d, e, f etc. continua reſidua ordinariae operationis, qua maximus communis diuiſor ipſorum a et b inueſtigari ſolet, quam operationem hic appono.

$$
\begin{array}{lll}
n=\frac{ma+v}{b} & b\,|\,a\,|\,\alpha & a=\alpha b+c \\
n=\frac{Ab-v}{c} & c\,|\,b\,|\,\beta & b=\beta c+d \\
A=\frac{Bc+v}{d} & d\,|\,c\,|\,\gamma & c=\gamma d+e \\
B=\frac{Cd-v}{e} & e\,|\,d\,|\,\delta & d=\delta e+f \\
C=\frac{De+v}{f} & f\,|\,e\,|\,\varepsilon & e=\varepsilon f+g \\
D=\frac{Ef-v}{g} & g\,|\,f\,|\,\zeta & f=\zeta g+h \\
E=\frac{Fg+v}{h} & h\,|\,g\,|\,\eta & g=\eta h+i \\
F=\frac{Gh-v}{i} & i\,|\,h\,|\,\theta & h=\theta i+k \\
G=\frac{Hi+v}{k} & k &
\end{array}
$$

§. 8. Haec ergo operatio, qua ad maximum communem diuiſorem numerorum a et b vti ſolemus, eo usque eſt continuanda, donec ad reſiduum perueniatur, quod diuidat v. Quo inuento ſequenti modo inueſtigabimus numerum m. Si v iam per b diuidi poterit, fiet $m = 0$. Si v per c diuiſionem admittat, fiet $A = 0$ et $m = \frac{-v}{c}$. Si v per d diuidatur, fiet $B = 0$ et $A = \frac{v}{d}$ atque $m = \frac{bv}{cd} - \frac{v}{c} = \frac{\beta v}{d}$ ob $b = \beta c + d$. Quo autem valores ipſius m facilius reperiantur primo valor ipſius

A per

A per B, tum valor ipsius B per C et ita porro exprimi debet, vnde nata est ista tabula.

1. $m = \frac{Ab - v}{c}$,

2. $m = \frac{Bb + \beta v}{d}$

3. $m = \frac{Cb - v(1 + \beta\gamma)}{e}$

4. $m = \frac{Db + v(\delta + \beta\gamma\delta + \beta)}{f}$

5. $m = \frac{Eb - v(\delta\varepsilon + \beta\gamma\delta\varepsilon + \beta\varepsilon + \beta\gamma + 1)}{g}$

6. $m = \frac{Fb + v(\delta\varepsilon\zeta + \beta\gamma\delta\varepsilon\zeta + \beta\varepsilon\zeta + \beta\gamma\zeta + \zeta + \delta + \beta\gamma\delta + \beta)}{h}$ etc.

De his valoribus est notandum, signa ipsius v alternari hoc modo $- + - + - +$ etc. Deinde coefficientes ipsius v hanc tenent legem:

$$\begin{array}{llllll} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \\ 1, & \beta, & \beta\gamma + 1, & \beta\gamma\delta + \delta + \beta, & \beta\gamma\delta\varepsilon + \delta\varepsilon + \beta\varepsilon + \beta\gamma + 1, & \text{etc.} \end{array}$$

cuius progressionis quisque terminus est aggregatum ex termino praecedente in indicem supra se scriptum multiplicato et termino hunc praecedente.

§. 9. Si igitur v per b diuidi poterit, erit $m = 0$; si v per c diuidi potest erit $m = \frac{-v}{c}$ propter $A = 0$; si v per d diuidi poterit, fiat $B = 0$; eritque $m = \frac{v}{d}\beta$. Vnde sequens oritur lex:

Si eſt numerus integer	erit
$\frac{v}{b}$	$m = 0$
$\frac{v}{c}$	$m = -\frac{v}{c}$
$\frac{v}{d}$	$m = +\frac{v}{d}\beta$
$\frac{v}{e}$	$m = -\frac{v}{e}(\beta\gamma + 1)$
$\frac{v}{f}$	$m = +\frac{v}{f}(\beta\gamma\delta + \delta + \beta)$
$\frac{v}{g}$	$m = -\frac{v}{g}(\beta\gamma\delta\varepsilon + \delta\varepsilon + \beta\varepsilon + \beta\gamma + 1)$
$\frac{v}{h}$	$m = +\frac{v}{h}(\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta + \delta\varepsilon\zeta + \beta\varepsilon\zeta + \beta\gamma\zeta + \beta\gamma\delta + \zeta + \delta + \beta)$ etc.

Si nunc hi ipſius m valores in aequatione $z = ma + p$ ſubſtituantur, reperietur vt ſequitur:

Si eſt integer	erit
$\frac{v}{b}$	$z = q + \frac{bv}{b}1 = q + v$
$\frac{v}{c}$	$z = q - \frac{bv}{c}\alpha$
$\frac{v}{d}$	$z = q + \frac{bv}{d}(\alpha\beta + 1)$
$\frac{v}{e}$	$z = q - \frac{bv}{e}(\alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma)$
$\frac{v}{f}$	$z = q + \frac{bv}{f}(\alpha\beta\gamma\delta + \alpha\beta + \alpha\delta + \gamma\delta + 1)$
$\frac{v}{g}$	$z = q - \frac{bv}{g}(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\varepsilon + \alpha\delta\varepsilon + \gamma\delta\varepsilon + \alpha + \gamma + \varepsilon)$ etc

§. 10. Ad inueniendum ergo numerum z, qui per a diuiſus relinquat p, et per b diuiſus relinquat q, poſito $p - q = v$ ſequentem habebimus regulam; Inſtituatur operatio ad maximum communem diuiſorem inter a et b inueniendum, eaque eovsque producatur, donec ad reſiduum perueniatur, quod ſit diuiſor ipſius v, teneaturque quotus

quotus ex diuiſione ipſius v per illud reſiduum reſultans, qui ſit Q, vbi operatio abrumpatur. Deinde in ſerie ſcribantur quoti α, β, γ, etc. in hac diuiſione orti, ex iisque conſtruatur, noua ſeries 1, α, $\alpha\beta + 1$, $\alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma$, etc. quae ex illa quotorum ſerie formatur, atque eovsque continuari debet, quovsque per illam ſeriem fieri poteſt. Sub hac noua ſerie ſcribantur ſigna alternantia $+ - + -$ etc. vltimusque terminus cum ſuo ſigno multiplicetur per Q, atque etiam per minorem diuiſorem propoſitum b, ad factum addatur reſiduum q diuiſori b reſpondens. Quo facto erit aggregatum numerus quaeſitus.

§. 11. Inuento hoc modo vno nnmero ſatisfaciente z, ex eo ſtatim innumerabiles aliis numeri ſatisfacientes reperiuntur. Nam ſi z per a diuiſum p relinquit et per b diuiſum q; eandem proprietatem habebunt quoque numeri $ab + z$, $2ab + z$, et $mab + z$. Multiplum quidem facti ab continuo adiici vel auferri poteſt, ſi a et b fuerint inter ſe numeri primi; at ſi a et b fuerint numeri compoſiti, tum etiam ſufficit eorum minimum communem diuiduum ſumſiſſe; cuius multiplum quodque adiectum vel ablatum a z dabit numeros ſatisfacientes; vt ſi minimus communis diuiduus fuerit M comprehendet mM $+ z$ omnes omnino numeros quaeſtioni ſatisfacientes. Quare etiamſi hoc modo ſaepe numeri negatiui pro z inueniantur, tamen adiiciendo ad eos M vel eius multiplum obtinebuntur numeri affirmatiui. Hac ergo operatione ſemper minimus numerus ſatisfaciens inuenietur, ſiquidem minimus communis diuiduus M toties ſubtrahatur, quoties fieri poteſt.

§. 12. Quia exemplis haec operatio maxime illuſtrabitur, quaeramus numerum, qui per 103 diuiſus relinquat 87, et per 57 diuiſus relinquat 25. Erit ergo $a = 103$; $b = 57$; $p = 87$ et $q = 25$, atque $v = 62$; quare operationem ita inſtituo

$$\begin{array}{r|r|l}
57 & 103 & 1 \\
 & 57 & \\
\hline
46 & 57 & 1 \\
 & 46 & \\
\hline
11 & 46 & 4 \\
 & 44 & \\
\hline
 & 2 &
\end{array}
\qquad \frac{62}{2} = 31 = Q.$$

$$\begin{array}{cccc}
1, & 1, & 4 & \\
1, & 1, & 2, & 9 \\
+ & - & + & -
\end{array}$$

Nunc eſt $-9 \cdot 31 = -279$; atque numerus quaeſitus $= 25 - 57 \cdot 279$; qui cum fiat negatiuus addo ad eum $3 \cdot 57 \cdot 103$ ſeu $57 \cdot 309$, vnde inuenitur $25 + 57 \cdot 30 = 1735$, qui eſt minimus numerus quaeſitus; omnes vero ſatisfacientes continentur in hac forma $m \cdot 103 \cdot 57 + 1735$.

§. 13. Quaeramus porro numerum, qui per 41 diuiſus relinquat 10, et per 29 diuiſus relinquat 28. In

In hoc exemplo compendium adhibebo, quod in aliis similibus computationibus magnam habebit vtilitatem, nam cum in diuisione per 29 residuum sit 28, restare quoque poterit in eadem diuisione -1 si quotus vnitate maior accipiatur. Sumo ergo -1 pro residuo diuisoris 29; eritque $a = 41$, $b = 29$, $p = 10$ et $q = -1$; vnde erit $v = 11$. Operationem ergo vt ante instituo ita

29 | 41 | 1
  | 29 |
12 | 29 | 2
  | 24 |
5 | 12 | 2
  | 10 |
2 | 5 | 2
  | 4 |
1

$\frac{11}{1} = 11 = Q.$

1,	2,	2,	2.	
1,	1,	3,	7,	17
+	−	+	−	+

Erit ergo $+17 . 11 = 187$; atque numerus quaesitus $= -1 + 29 . 187$. Subtrahatur $29 . 4 . 41$ erit is $= -1 + 29 . 23 = 666$. Satisfacient ergo quaestioni *omnes* numeri in hac forma $m . 41 . 29 + 666$ *contenti.*

§. 14. Com-

§. 14. Compendium hinc ſe prodit ad ſupra datam regulam adiiciendum, quod in hoc conſtat, vt, poſtquam numerus Q per ultimum ſeriei formatae terminum eſt multiplicatus, factum per maiorem diuiſorem a diuidatur, atque reſiduum loco ipſius facti adhibeatur. Scilicet hoc reſiduum per minorem diuiſorem b multiplicatum atque reſiduo q auctum dabit numerum quaeſitum. Atque iſte numerus hoc pacto inuentus erit minimus, qui ſatisfacit. Praeterea hac diuiſione effici poteſt vt reſiduum prodeat affirmatiuuum, etiamſi diuidendus fuerit negatiuus. Ita in primo exemplo §. 12 habebatur -279, qui numerus per 103 diuiſus, ſumto quoto $= 3$, relinquit $+ 30$. Ex quo numerus quaeſitus minimus eſt $= 25 + 57 . 30 = 1735$.

§. 15. Fieri deinde etiam poteſt, vt huiusmodi exempla proponantur, quae ſolutionem omnino non admittant, vti ſi quaeratur numerus qui per 24 diuiſus relinquat 13, per 15 vero diuiſus relinquat 9; talis enim numerus per alteram conditionem deberet eſſe per 3 diuiſibilis, per alteram ſecus. Idem vero etiam ipſa regula oſtendit, nunquam enim ad tale reſiduum, excepto 0, deuenietur, quod diuidat v ſeu 4, vti ex ipſa operatione videre eſt.

```
15 | 24 | 1
   | 15 |
   -------
      9 | 15 | 1
        |  9 |
        -------
           6 | 9 | 1
             | 6 |
             ------
              3 | 6 | 2
                | 6 |
                -----
                  0
```

Huiusmodi vero exempla exhiberi non possunt, nisi diuisores a et b sint numeri compositi inter se; nam si fuerint inter se primi, semper numeri quaesiti exhiberi possunt. Sin autem diuisores a et b fuerint numeri compositi, atque v non diuidi potuerit per maximum ipsorum a et b diuisorem, tum semper problema ad absurdum deducit. Hocque est criterium, ex quo, num problema solutionem admittat, diiudicari potest, antequam operatio instituatur.

§. 16. Exposito hac methodo vniuersali, qua omnis generis huius problemata facile resolui possunt, ex ea alia regula potest formari, quae quidem ad vsum non est tam facilis, at simplicitatis plus in se habet. Oritur ea autem, si in valoribus supra inuentis ipsius (z) (§. 9.), loco α, β, γ, etc. eorum valores ex aequationibus $a = \alpha b + c$, $b = \beta c + d$, etc. substituantur. Nam si instituatur operatio ad maximum communem diuisorem inter a et b inueniendum, ex eaque innotescant continua residua c, d, e, etc. dico fore numerum $z = q + abv\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} - \frac{1}{de} + \frac{1}{ef} - \text{etc.}\right)$, eovsque hac serie continuanda, donec v per factorem aliquem denominatoris diuidi queat. Vti si quaeratur numerus, qui per 16 diuisus relinquat 1 et per 9 diuisus relinquat 7, erit $a = 16$, $b = 9$, $p = 1$, $q = 7$, et $v = -6$. Quare

$$\begin{array}{rrrrrr}
9 & 16 & 1 & & & \\
 & 9 & & & & \\
 & 7 & 9 & 1 & & \\
 & & 7 & & & \\
 & & 2 & 7 & 3 & \\
 & & & 6 & & \\
 & & & 1 & &
\end{array}$$

Hinc ergo erit $z = -6.\,9.\,16\left(\frac{1}{16.\,9} - \frac{1}{9.\,7} + \frac{1}{7.\,2}\right) = 7 - 6 + \frac{6.\,16}{7} - \frac{3.\,9.\,16}{7} = 1 - 3.\,16 = -47$. Satisfaciunt ergo omnes numeri $m.\,144 - 47$ seu $m.\,144 + 97$; eorumque minimus est 97. Superior formula generalis ipsius z etiam in hunc modum potest exprimi $z = p - abv\left(\frac{1}{bc} - \frac{1}{cd} + \frac{1}{de} - \frac{1}{ef} + \text{etc.}\right)$ quae series fractionum eousque continuari debet, donec valor ipsius z fiat numerus integer.

§. 17. Considerabo nunc quosdam casus particulares, in quibus a ad b datam habeat relationem; et primo quidem sit $b = a - 1$ seu $a = b + 1$, residua vero ex diuisione numeri quaesiti per a et b orta sint vt ante p et q. Erit ergo $c = 1$; ideoque per regulam

lam postremam $z = p - av = p - ap + aq$. Quae expressio si $aq + p > ap$ dat minimum numerum quaesito satisfacientem: at si $aq + p < ap$ tum minimus numerus satisfaciens erit $a^2 - a + p - ap + aq$. Omnes vero numeri satisfacientes in hac formula generali $ma^2 - ma + p - ap + aq$ comprehenduntur, seu etiam in ista $mb^2 + mb - bp + bq + q$. Quicquid nunc sit m si haec quantitas diuidatur per $b^2 + b$ residuum erit minimus numerus quaesito satisfaciens.

§. 18. Quemadmodum hac ratione ope residuorum datorum, quae post diuisionem numeri incogniti per diuisores b et $b + 1$ remanent, ipse numerus incognitus sit inueniendus, docuit *Sifelius* in Commentario ad *Rudolfi* artem Cossicam. Regula eius ita se habet: si fuerit residuum numeri incogniti per $b + 1$ diuisi p, et residuum eiusdem per b diuisi q, iubet q multiplicare per $b + 1$, et p per b^2, horumque factorum aggregatum per $b^2 + b$ diuidere, quod restat post diuisionem, id pronunciat esse numerum quaesitum. Fluit autem haec regula ex nostra generali formula, si ponatur $m = p$, tum enim habetur $b^2 p + (b + 1)q$, quod per $b^2 + b$ diuisum relinquit minimum numerum quaesitum.

§. 19. Interim tamen minori opera minimus numerus satisfaciens reperietur sequenti modo: Residuum q, quod ex diuisione quaesiti numeri per b oritur, multiplicetur per $b + 1$, factumque addatur ad numerum pronicum ipsius b puta ad $b^2 + b$, hinc subtrahatur factum ex residuo p, quod ex diuisione numeri quaesiti per $b+1$ remanet, ducto in b; si id quod restat fuerit $< b^2+b$, erit id ipse numerus quaesitus, sin vero fuerit $> b^2+b$ subtrahatur b^2+b, eritque residuum numerus quaesitus. Vt si quaeratur numerus, qui per 100 diuisus relinquat 75 et per 101 diuisus 37; tum addatur 10100 ad factum ex 75 in 101 seu 7575, vt habeatur 17675, hinc subtrahatur factum ex 37 in 100 seu 3700 remanebit 13975, a quo si 10100 auferantur prodibit 3875, qui est minimus numerus quaesitus.

§. 20. Si quaeratur numerus qui per b diuisus relinquat q et per $nb+1$ diuisus p; erit iterum $c=1$ atque numerus quaesitus $z=p-av=p-ap+aq=(nb+1)q-nbp$ ob $a=nb+1$. Atque omnes numeri satisfacientes continebuntur in hac expressione $mnb^2+mb+(nb+1)q-nbp$, ex qua sumto pro m numero quocunque, inuenietur minimus numerus satisfaciens, si ea expressio diuidatur per nb^2+b; residuum enim erit minimus numerus satisfaciens.

§. 21. Casus porro notari meretur, quo residua p et q, quae oriuntur ex diuisione quaesiti numeri per datos diuisores a et b, sunt inter se aequalia seu $p=q$. Hoc enim casu fit $v=0$, ideoque inuenitur numerus quaesitus $z=p$. Si igitur sit M minimus communis diuiduus numerorum a et b, omnes numeri satisfacientes continebuntur in hac formula $m\text{M}+p$. Eadem pla-

plane formula quoque satisfacit, si quotcunque fuerint diuisores a, b, c, d, etc. per quos singulos numerus quaesitus diuisus relinquat p, si quidem M denotet omnium diuisorum minimum communem diuiduum. Omnes ergo numeri huiusmodi quaestionibus satisfacientes ita sunt comparati, vt per M diuisi relinquant p.

§. 22. Hinc satis tritum problema, quo quaeritur numerus, qui per 2, 3, 4, 5, 6 diuisus relinquat 1 per 7 vero nihil relinquat, solui potest. Omnes enim numeri qui per 2, 3, 4, 5, 6 diuisi relinquunt 1 hanc habent proprietatem vt per 60, qui numerus est minimus communis diuiduus numerorum 2, 3, 4, 5, et 6, diuisi relinquant 1. Problema ergo huc redit vt inueniatur numerus qui per 60 diuisus relinquat 1, per 7 vero sit diuisibilis; erit ergo $a = 60$, $b = 7$, $p = 1$, $q = 0$, et $v = 1$. Facta ergo operatione.

```
7|60|8
 |56|
  4|7|1        1/1 = 1 = Q.
   |4|         8, 1, 1.
    3|4|1      1, 8, 9, 17
     |3|       +  -  +  -
       1
```

Erg. $z = 0 - 119 + 420m$.
et si $m = 1$ erit $z = 301$.

§. 23. Maiorem difficultatem habere videtur hoc problema, quo quaeritur numerus qui per numeros 2, 3, 4, 5, 6 diuiſus reſpectiue relinquat numeros 1, 2, 3, 4, 5, at per 7 diuidi queat, propter reſidua propoſita inaequalia. Sed haec quaeſtio congruit cum hac: inuenire numerum qui per 2, 3, 4, 5, 6 diuiſus relinquat -1 et per 7 nihil. Illi iam conditioni ſatisfacit forma $60m-1$; quare numerus quaeritur qui per 60 diuiſus -1, at per 7 nihil relinquat, fit itaque $a=60$, $b=7$, $p=-1$, $q=0$, et $v=-1$ atque operatione vt ante inſtituta eſt $Q=-1$ quod in -17 ductum dat $+17$, hocque per b multiplicatum dat 119 numerum quaeſitum.

§. 24. Ex his duobus exemplis apparet, quomodo huiusmodi quaeſtiones, in quibus quotcunque diuiſores proponuntur, quibus autem duo tantum reſidua reſpondent, per ſupra datas regulas ſolui queant; ſtatim enim quaeſtio ad quaeſtionem duorum diuiſorum reducitur: vti ſi omnia reſidua ſunt aequalia, quaeſtio perinde ſoluitur, ac ſi vnicus diuiſor fuiſſet propoſitus. At ſi reſidua ſunt inaequalia, tum nihilominus repetendis his operationibus, quibus pro duobus diuiſoribus vſi ſumus, ſolutio poterit obtineri. Primo enim duobus diuiſoribus ſatisfieri debet, tum tertius aſſumitur, deinde quartus, donec omnibus erit ſatisfactum. Hoc vero commodiſſime exemplis explicabitur.

§. 25. Quaeramus igitur numerum, qui per 7 diuiſus relinquat 6, per 9 relinquat 7, per 11 relinquat 8 et per 17 relinquat 1. Ex his iam quatuor condi-

conditionibus ſumamus duas quasque, vt duas priores, et inueſtigemus omnes numeros iis ſatisfacientes. Erit ergo $a=9$, $b=7$, $p=7$, $q=6$ et $v=1$, quare operatio inſtituetur vti ſequitur:

$$\begin{array}{c|c|c}
7 & 9 & 1 \\
 & 7 & \\
\hline
2 & 7 & 3 \\
 & 6 & \\
\hline
 & 1 &
\end{array}\qquad Q=1.$$

$$\begin{array}{ccc}
1, & 3, & \\
1, & 1, & 4 \\
+ & - & +
\end{array}\qquad \text{fietque } z=6+1.4.7=34.$$

Omnes ergo numeri his duabus conditionibus ſatisfacientes continentur in hac forma $63m+34$, ſeu ita erunt comparati, vt per 63 diuiſi relinquant 34.

§. 26. Problema ergo huc eſt reductum, vt inueniatur numerus, qui diuiſus per 63 relinquat 34, per 11 relinquat 8, et per 17 relinquat 1. Harum trium conditionum ſumantur duae priores eritque $a=63$, $b=11$, $p=34$, $q=8$, et $v=26$, vnde fluit ſequens operatio:

$$\begin{array}{r|c|l}
11 & \begin{array}{c}63\\55\end{array} & 5 \\ \hline
8 & \begin{array}{c}11\\8\end{array} & 1 \\ \hline
3 & \begin{array}{c}8\\6\end{array} & 2 \\ \hline
 & 2 &
\end{array}
\qquad Q = \tfrac{26}{2} = 13.$$

$$\begin{array}{l}
5,\ 1,\ 2 \\
1,\ 5,\ 6,\ 17 \\
+\ -\ +\ -
\end{array}
\qquad \text{ergo } z = m.63.11 + 8 - 13.17.11.$$

Quo minimus numerus satisfaciens reperiatur, ponatur $m = 4$; erit $z = 8 + 31.11 = 349$. Omnes ergo numeri satisfacientes in hac continentur forma $693m + 349$, seu hanc habebunt proprietatem, vt per 693 diuisi relinquant 349.

§. 27. Problema ergo tandem huc est reductum, vt definiatur numerus, qui per 693 diuisus relinquat 349 et per 17 diuisus relinquat 1. Facio ergo $a = 693$, $b = 17$, $p = 349$, $q = 1$, et $v = 348$, sequentemque iuxta data praecepta instituo operationem:

$$\begin{array}{r|c|l}
17 & \begin{array}{c}693\\697\end{array} & 41 \\ \hline
 & -4 &
\end{array}
\qquad Q = \tfrac{348}{-4} = -87.$$

$$\begin{array}{l}
41 \\
1,\ 41 \\
+\ -
\end{array}
\qquad z = 693.17.m + 1 + 41.87.17.$$

Quo

Quo minimus numerus satisfaciens prodeat pono $m = -5$, eritque $z = 1 + 102 . 17 = 1735$, qui est minimus numerus quatuor praescriptis conditionibus satisfaciens. Omnes autem qui satisfaciunt hac continentur formula $11781 m + 1735$. Ex hoc exemplo ergo abunde intelligitur, quomodo omnes huiusmodi quaestiones sint resoluendae.

§. 28. Pertinet huc solutio problematis chronologici satis cogniti, quam, prout ex his regulis inueni, apponam, in quo annus a Christo nato quaeritur, ex datis cyclis solis et lunae vna cum indictione Romana illius anni. Cum enim cyclus solis sit residuum, quod oritur diuisione numeri anni nouenario aucti per 28; cyclus vero lunae sit residuum, quod oritur diuisione numeri anni vnitate aucti per 19; Indictio vero Romana sit residuum, quod oritur, si numerus anni ternario auctus per 15 diuidatur, sequens prodiit solutio. Sit p cyclus solis, q cyclus lunae et r indictio Romana; multiplicetur p per 4845; q per 4200; et r per 6916, haec tria producta cum numero 3267 in vnam summam coniiciantur, eaque diuidatur per 7980; quod remanebit residuum erit numerus anni quaesiti. Si annus periodi Iulianae requiratur, tum operatio eodem modo instituatur, nisi quod numerus 3267 negligi debet; quae est regula iam passim tradita.

§. 29. Multam quidem operam requirit solutio pro pluribus diuisoribus, si quidem problema continuo ad ad casum, quo diuisorum numerus vnitate minuitur, vt in praecedente exemplo fecimus, reducitur; At ex ea ipsa operatione facilior multoque breuior via sese prodit, qua statim proposita quaestio, quotcunque etiam fuerint diuisores, ad casum duorum diuisorum reduci potest; quae regula ita se habet: Inueniendus sit numerus, qui per diuisores a, b, c, d, e, quos numeros inter se primos esse pono, diuisus relinquat respectiue haec residua p, q, r, s, t. Huic quaestioni satisfacit iste numerus $Ap + Bq + Cr + Ds + Et + mabcde$, in qua expressione A est numerus, qui per factum $bcde$ diuisus nihil relinquat, per a vero diuisus relinquat vnitatem; B est numerus, qui per $acde$ diuisus relinquat nihil, per b vero vnitatem; C est numerus qui per $abde$ diuisus nihil relinquat, per c vero vnitatem; D est numerus qui per $abce$ nihil relinquat, per d vero vnitatem; atque E est numerus per $abcd$ diuisus nihil relinquat, per e vero vnitatem, qui ergo numeri per regulam pro duobus diuisoribus datam inueniri possunt.

DE

Comment: Acad: Sc: Tom. VIII. Tab. IV. p.

Fig: 1.

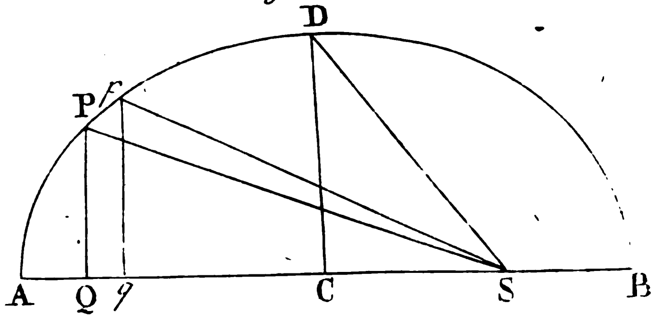
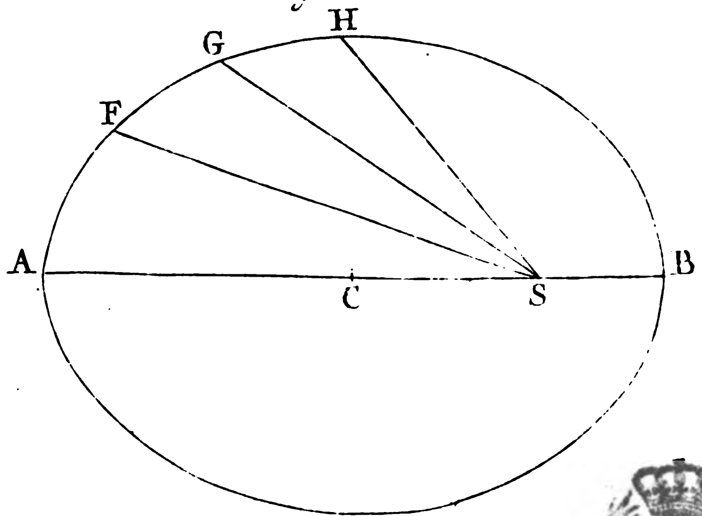


Fig: 2.



DE MOTV PLANETARVM ET ORBITARVM DETERMINATIONE

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

CVm hoc tempore ſatis conſtet, planetas in ellipſibus moueri, in quarum altero foco ſol ſit poſitus, motumque ita eſſe comparatum, vt tempora areis circa ſolem deſcriptis ſint proportionalia; quaeſtio de motu planetarum duplex oritur, quarum altera qualitatem ellipſis, poſitionem abſidum ſcilicet et excentricitatem requirit, altera vero ipſius planetae motum in ſua orbita. Vtramque hanc quaeſtionem hic euoluere, et quantum calculi difficultas permittet, reſoluere conabor. Tabula IV.

§. 2. Primum quidem orbitam planetae pro cognita habebo, atque motum planetae in ea definire ſtudebo. Sit igitur ADB ſemiſſis orbitae planetae cuiusdam P, cuius abſis ſumma ſeu aphelion ſit in A, periphelion vero in B, atque ſol ſit in foco ellipſis S poſitus. Sit porro C centrum orbitae, et ponatur ſemiaxis AC vel BC $=a$, diſtantia foci S a centro C ſeu excentricitas CS $=b$, erit ſemiaxis coniugatus CD $=V(a^2-b^2)$. Ponamus nunc planetam ex aphelio A perueniſſe in P, Fig. 1.

hincque momento temporis progredi in p, ex quibus punctis tam ad S rectae, quam ad axem AB perpendicula ducantur; ponaturque $CQ = r$, erit $PQ = \frac{\surd(a^2-b^2)(a^2-r^2)}{a}$, et $PS = a + \frac{br}{a}$.

§. 3. His positis exprimit angulus ASP planetae anomaliam veram seu coaequatam, quam ponam $= z$. Anomalia vero media proportionalis est tempori, quo planeta spatium AP absoluit, seu areae ASP. Erit ergo area ADB ad aream ASP vt angulus duobus rectis aequalis ad anomaliam mediam. Consideremus nunc circulum radii 1, cuius arcus sit anomalia vera $= z$, in eodem ergo si anomaliam mediam inuenire velimus, quae aequalis sit arcui x; erit area ADB ad angulum duobus rectis aequalem seu ad duplam aream semicirculi illius vt AC. CD ad 2, i. e. vt $a\surd(a^2-b^2)$ ad 2. Fiet igitur $a\surd(a^2-b^2) : 2 =$ Area. ASP $: x$, vnde est $x = \frac{2 \text{ Area ASP}}{a\surd(a^2-b^2)}$.

§. 4. Cum sit anomalia vera z aequalis angulo ASP, erit eius incrementum dz aequale PSp. Angulus vero PSp aequatur areolae PSp bis sumtae per quadratum PS diuisae; erit scilicet $dz = \frac{2 \text{ Areol. } PSp}{(a+\frac{br}{a})^2} = \frac{2a^2 . PSp}{(a^2+br)^2}$. At ex superiore aequatione erit $dx = \frac{2 PSp}{a\surd(a^2-b^2)}$. Restat ergo, vt elementum areae PSp idoneo modo exprimatur, id quod ex consideratione totius areae fiet. Est enim area $ASP = \frac{PQ.QS}{2} + \int PQ.Qq = \frac{(b+r)\surd(a^2-b^2)(a^2-r^2)}{2a}$

$-\int$

$-\int \frac{dr\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-r^2)}}{a}$, cuius differentiale est $= \frac{-dr(a^2+br)\sqrt{(a^2-b^2)}}{2a\sqrt{(a^2-r^2)}}$ quod ergo est $= PSp$. Hinc igitur fit elementum anomaliae mediae $dx = \frac{-dr(a^2+br)}{a^2\sqrt{(a^2-r^2)}}$, et elementum anomaliae verae $dz = \frac{-adr\sqrt{(a^2-b^2)}}{(a^2+br)\sqrt{(a^2-r^2)}}$.

§. 5. His duabus aequationibus continetur relatio, quae inter anomaliam mediam et veram intercedit; ad eam ergo definiendam oportet, vt vtraque aequatio integretur, quo tandem aequatio inter z et x elici queat. Quod ad priorem attinet, ea statim abit in hanc $dx = \frac{-dr}{\sqrt{(a^2-r^2)}} \frac{-brdr}{a^2\sqrt{(a^2-r^2)}}$, cuius integralis est $x = A.\frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{a} + \frac{b}{a^2}\sqrt{(a^2-r^2)}$, vbi A significat arcum circuli, cuius sinus est quantitas postfixa existente sinu toto $= 1$. Posito ergo hoc sinu $\frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{a} = s$, erit $x = A.s + \frac{bs}{a}$.

§. 6. Altera aequatio differentialis est $dz = \frac{-adr\sqrt{(a^2-b^2)}}{(a^2+br)\sqrt{(a^2-r^2)}}$ quae cum absolute, tum plurimis modis per series potest integrari. Prae reliquis vero is modus eligendus esse videtur, qui huiusmodi det seriem, in qua dimensiones ipsius b in numeratoribus crescant, quo pro exiguis excentricitatibus sufficiat duos vel tres terminos initiales assumsisse.

§. 7. In seriem ergo primum conuerto $\sqrt{(a^2-b^2)}$, quae erit ista $a - \frac{1.b^2}{2a} - \frac{1.1.b^4}{2.4.a^3} - \frac{1.1.3b^6}{2.4.6.a^5}$ etc. $= a - \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} - \frac{b^6}{16a^3}$ etc. Deinde est etiam $\frac{a}{a^2+br} = \frac{1}{a} - \frac{br}{a^3} + \frac{b^2r^2}{a^5} - \frac{b^3r^3}{a^7} +$ etc. Hae ergo duae series in se inuicem multiplicata dabunt $\frac{a\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2+br} = 1 - \frac{br}{a^2} - \frac{b^2(a^2-2r^2)}{2a^4} + \frac{b^3r(a^2-2r^2)}{2a^6} - \frac{b^4(d^4+4a^2r^2-8r^4)}{8a^8}$

$+\frac{b^5 r(a^4+4a^2r^2-9r^4)}{8a^{10}}-$ etc. Si nunc huius feriei finguli termini ducantur in $\frac{-dr}{\sqrt{(a^2-r^2)}}$ habebitur elementum anomaliae verae dz. Erunt vero omnes termini praeter primum abfolute integrabiles, inuenietur enim $z = A.\frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{a} - \frac{b\sqrt{(a^2-r^2)}}{a^2} + \frac{b^2 r\sqrt{(a^2-r^2)}}{2a^4} - \frac{b^3(a^2+2r^2)\sqrt{(a^2-r^2)}}{6a^6} + \frac{b^4 r(a^2+2r^2)\sqrt{(a^2-r^2)}}{8a^8}-$ etc.

§. 8. Dicatur nunc arcus feu angulus V, cuius finus eft $\frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{a}$ et fignum $\int$ denotet pofthac finum anguli pofcripti; erit $x = V + \frac{b}{a}\int V$, atque per eundem angulum V eiusque finum vna cum multiplorum ipfius finibus z fequenti modo determinabitur, vt fit $z = V - \frac{b}{a}\int V + \frac{b^2}{4a^2}\int 2V - \frac{b^3}{12a^3}(\int 3V + 3\int V) + \frac{b^4}{32a^4}(\int 4V + 4\int 2V) - \frac{b^5}{80a^5}(\int 5V + 5\int 3V + 10\int V) + \frac{b^6}{192a^6}(\int 6V + 6\int 4V + 15\int 2V) - \frac{b^7}{448a^7}(\int 7V + 7\int 5V + 21\int 3V + 35\int V) +$ etc. cuius feriei lex facile patet, conftituunt enim denominatores numerales hanc feriem, 1. 1, 2. 2, 3. 4, 4. 8, 5. 16, 6. 32, etc.

§. 9. Commodiffime ergo ex data anomalia media x determinabitur anomalia vera z, fi primum ex aequatione $x = V + \frac{b}{a}\int V$ angulus V per angulum x definiatur, atque is tum in altera aequatione anomaliam veram z exhibente fubftituatur. Difficile autem videtur ex illa aequatione V per x definire, cum fit aequatio transcendens, atque ideo V per x algebraice omnino exprimi nequeat. In id ergo eft incumbendum, vt V quam fieri poteft proxime et minimo labore per x definiafiniatur, id quod mihi ſequenti modo commodiſſime praeſtari videtur, erit ſcilicet $V = x - \frac{b}{a}$ ſ$(x - \frac{b}{a}$ ſ$(x - \frac{b}{a}$ ſ$(x -$ etc. hinc enim admodum erit facile angulum V inuenire. Nam ſumatur log. ſx' ab hoc ſubtrahatur log. $\frac{a}{b}$, denuoque ſubtrahatur iſte log. 6, 4637261; reſiduum quaeratur inter logarithmos numerorum naturalium, numerusque reſpondens dabit angulum in minutis primis. Iſte deinde angulus ſubtrahatur ab anomalia media x, reſiduique anguli ſinus capiatur logarithmus, a quo tam log. $\frac{a}{b}$ quam 6, 4637261 ſubtrahatur, numerusque logarithmo reſiduo reſpondens dabit numerum minutorum primorum ab x ſubtrahendum, angulus reſiduus, ſi opus eſſe cenſeatur, denuo eodem modo tractetur, donec tandem neque amplius augeatur neque minuatur; atque tum iſte angulus erit verus valor ipſius V.

§. 10. Inuento hac ratione angulo V, a logarithmo eius ſinus denuo tam log. $\frac{a}{b}$ quam 6, 4637261 ſubtrahatur, et numerus reſiduo reſpondens dabit angulum in minutis primis expreſſum, qui ab V ſubtrahi debet, reſiduumque erit anomalia vera iam ſatis exacta; magis vero correcta euadet ſi ſinus dupli anguli V ſumatur logarithmus ab eoque duplus log. $\frac{a}{b}$, et log. 4. atque praeterea 6, 4637261 ſubtrahantur reſidui enim numerus reſpondens dabit minuta prima inſuper vel addenda vel ſubtrahenda prout V vel minor vel maior fuerit quam 90°. Praeterea etiam ſequentes termini ſeriei, cui z aequalis eſt inuenta, eodem modo computari

tari possunt, quamdiu anguli inueniuntur, quos negligere non volemus. Semper autem dum res logarithmis peragitur, praeter consuetas operationes logarithmorum, iste logarithmus 6, 4637261 subtrahi debet, numerusque respondens dabit minuta prima; sin loco minutorum primorum secunda desiderentur, tum loco illius logar. iste debet vsurpari 4, 6855749.

§. 11. Inuento angulo V facile innotescet planetae a sole distantia $PS = a + \frac{br}{a}$; fiat vt sinus totus ad cosinum anguli V ita b ad quartam proportionalem, quae ad distantiam mediam a addita vel subtracta, prout cosinus ipsius V fuerit vel affirmatiuus vel negatiuus, dabit veram planetae a sole distantiam. Ex angulo quoque z inuento seu ipsa anomalia vera, distantia PS poterit inueniri, erit namque $PS = \frac{(a+b)(a-b)}{a - b.\text{cos}.z}$.

§. 12. Inuento angulo V porro simplicius ipsa anomalia vera z poterit inueniri; erit enim cos. $z = \frac{a.\text{cos}.V+b}{a+b\,\text{cos}.V}$, vel sin. $z = \frac{\text{f}V.\sqrt{(a^2-b^2)}}{a+b.\text{cos}.V}$, quae expressio etsi simplicior est et breuior, quam supra inuenta series, tamen nescio, an illa non sit huic, si commoditas calculi spectetur, praeferenda; in sequenti vero ista formula maiorem fortasse praestabit vtilitatem.

§. 13. Sit nobis exemplum orbita Martis, in qua est $a:b = 152369 : 14100$. ideoque log. $\frac{a}{b} = 1, 0336775$. Dataque sit anomalia media 2 S, 20°, seu 80° quaeraturque anomalia vera. Erit ergo operatio instituenda vt sequitur.

$l\frac{a}{b} =$

$l\frac{a}{b} = 1,0336775$ | $l\int 80 = 9,9933515$
$4,6855749$ | subtr. $5,7192524$
$5,7192524$ | $4,2740991$

num. 18797''
hoc est 5°, 13', 17''
ab 80°

restat 74°, 46', 43''
log. sinus huius anguli $= 9,9844906$
subtr. $5,7192524$

$4,2652382$

num. 18418''
hoc est 5°, 6', 58''
ab 80°

restat 74°, 53', 2''
log. sinus huius anguli $= 9,9847070$
subtr. $5,7192524$

$4,2654546$

num. 18427''
hoc est 5°, 7', 7''
ab 80°

restat 74°, 52', 53''
log. sinus huius anguli $= 9,9847035$
subtr. $5,7192524$

$4,2654511$

num. 18427
hoc est 5°, 7', 7''

Erit ergo $V = 74°, 52', 53''$
subtrah. $\frac{b}{a}\int V = 5°, 7', 7'$

z prope

z prope verus valor $= 69°, 45', 46''$
$2V = 149°, 45', 40''$
Deinceps pos. $= 30°, 14', 14''$

log. sinus huius anguli $9,7020703$
subtrah. $2 l\frac{a}{b}$ $2,0673550$
$7,6347153$
subtrah. $4,6855749$
$2,9491404$
subtrah. log. 4 $0,6020600$
$2,3470804$
num. $222''$
hoc est $3', 42''$ addat.

Valor ipsius z magis correctus $69°, 49', 28''$
$3V = -44°, 38', 39''$, sinus $= -7025671$
$+ 3 \int V = 28961904$
$\int 3V + 3 \int V = 21936233$
eius log. $= 10,3412220$
subtrah. $3 l\frac{a}{b} = 3,1010325$
$7,2401895$
subtrah. $l12 = 1,0791812$
$6,1610083$
subtrah. $4,6855749$
$1,4754334$
num. $37''$ subtr.

Valor ipsius z correctus seu anomalia vera $= 69°, 48', 51''$.

§. 14.

§. 14. Cum vero altero modo, quo z ex V inueniri potest, sit cos. $z =$ cos. $V + \frac{b\int V.\int V}{a+b.\,\text{cos. }V} =$ cos. $V + \frac{\int V.\int V}{\frac{a}{b} + \text{cos. }V}$, videamus an eandem anomaliam veram eodem modo inueniamus. Operatio erit vt sequitur:

Cos. V	=	2608181
sin. tot. $\frac{a}{b}$	=	108063121
$\frac{a}{b}$ + cos. V	=	110671302
huius log.	=	11, 0440348
$2\,l\int V$	=	19, 9694070
diff.	=	8, 9253722
respondet sinus		842116
ad cos. V		2608181
cos. z	=	3450297
Ergo Anomalia vera	=	69°, 48′, 59″

ad quam ante inuenta proxime accedit, notandum autem est praecedentem esse nimis paruam, cum adhuc terminum $\frac{b^4}{32a^4}(\int 4\,V + 4\int V)$ adiicere opportuisset; hic vero terminus ne integrum quidem minutum secundum efficit. Ceterum in prioris calculi ultima operatione partes medias proportionales non sumsi; atque in isto calculo tabulae log. non sufficiebant.

§. 14. Distantia Martis a sole respondens huic anomaliae est $= a + b$ cos. V; est vero vt ante inuenimus $\frac{a}{b}$ + cos. $V = 110671302$. Fiat ergo vt sinus

 totus

totus ad hunc numerum, ita b ad diſtantiam Martis a ſole. Ergo erit per logarithmos

$l(\frac{a}{b}+\text{coſ. V}) =$	11, 0440348
$+lb.$	4, 1492191
$-l$ ſin. tot.	$-$ 10, 0000000
log. diſt. a ☉	5, 1932539

§. 16. Denique notandum eſt, ſi inuenta fuerit anomalia vera datae anomaliae mediae reſpondens, facili negotio incrementum minimum anomaliae verae inueniri poſſe, ſi anomalia media minima particula augeatur. Augeatur ſcilicet anomalia media angulo dx, erit incrementum anomaliae verae $dz = \frac{dx}{(1+\frac{b}{a}\text{coſ. V})^2}$ Noſtro ergo caſu erit $l(1+\frac{b}{a}\text{coſ. V}) = 0,0103573$ et $(1+\frac{b}{a}\text{coſ. V})^2 = 1,04885$ Quare erit $dz = \frac{dx}{1,04885}$ $= dx - \frac{2dx}{43}$ ſi ergo anomalia media fuerit $81°$, erit anomalia vera $70°, 46', 4''$

§. 17. Sin autem quis velit hac methodo tabubulam anomalium verarum computare, is ſcopum ſuum commodius aſſequetur, ſi non anomalias medias pro cognitis aſſumat, ſed angulos, quos littera V diſignaui, ex hisque angulis tam anomalias medias quam veras calculo inueſtiget; Hoc enim modo facile tabulam conficiet. Sumto enim pro lubitu angulo V, erit $x = V + \frac{b}{a}\int V$ et $z = V - \frac{b}{a}\int V + \frac{b^2}{4a^2}\int 2V - \frac{b^3}{12a^3}(\int 3V + \int 3V)$ Exempli gratia pro orbita martis ponatur V=

$V = 20°$. Erit $l\,ſV =$	9, 5340517
ſubtr. vt ſupra	5, 7192524
	3, 8147993
num. reſp.	6528″
hoc eſt.	1°, 48′, 48″
Erit ergo anomalia media	21°, 48′, 48″
et anomalia vera prope vera	18°, 11′, 12″
Nunc ſumatur $l\,ſ\,2V$	9, 8080675
ſubtr. $2\,l\frac{e}{b}$	2, 0673550
	7, 7407125
ſubtr. $l\,4$,	0, 6020600
	7, 1386525
ſubtrahatur inſuper	4, 6855749
	3, 4530776
num.	284″ = 4′, 44″
Anomalia magis correcta =	18°, 15′, 56″
Denique ſumatur $ſ\,3V =$	8660254
et $3\,ſV =$	10260606
	18920860
huius log.	10, 2769406
ſubtr. $3\,l\frac{a}{b}$	3, 1010325
	7, 1759081
ſubtr. $l\,12$	1, 0791812
	6, 0967269
ſubtr.	4, 6855749
	1, 4111520
num.	26″

Anomalia vera ergo eſt $18°, 15', 30''$ reſpondens anomaliae mediae $21°, 48', 48''$. Huic vero anomaliae mediae in tabulis reſpondet haec anomalia vera $18°, 16', 14''$.

§. 18. Progredior ergo ad alteram quaeſtionem, cuius initio mentionem feci, quae circa ſpeciem ellipſis, in qua planeta circumfertur, eiusque poſitionem determinandam verſatur. Ad haec inuenienda cognitum eſſe pono tempus periodicum planetae, quod ſit $= T$. Deinde etiam data eſſe oportet tria loca heliocentrica planetae, cuiusmodi ſint FS, GS, HS vna cum temporibus inter obſeruationes elapſis. Ex locis ergo heliocentricis dantur anguli FSG et FSH, ſitque $FSG = f$ et $FSH = g$. Praeterea fiat vt tempus periodicum T ad tempus inter duas obſeruationes, ita 360 gradus, ad angulum qui eſt differentia anomaliarum mediarum inter easdem obſeruationes. Cum igitur dentur differentiae anomaliarum mediarum inter obſervata planetae loca, ſit ea quae eſt inter loca F et $G = m$, et quae eſt inter loca F et $H = n$. Ponatur nunc ratio AC ad CS vt 1 ad v; erit $\frac{b}{a} = v$; porro ſit anomalia media loci $F = x$, et anomalia vera ſeu angulus ASF $= z$.

Fig. 2.

§. 19. His poſitis erit loci G anomalia media $= x + m$, et loci $H = x + n$; loci vero G anomalia vera erit $= z + f$ et loci $H = z + g$. Deinde ſit $x = P + v \int P$; $x + m = Q + v \int Q$ et $x + n = R + v \int R$; erit cof. $z = \frac{\text{cof.}\, P + v}{1 + v\, \text{cof.}\, P}$ et cof. $P = \frac{\text{cof.}\, z - v}{1 - v.\, \text{cof.}\, z}$, atque $\int P = \frac{\int z . \sqrt{(1 - v^2)}}{1 - v.\, \text{cof.}\, z}$.

Simili

Simili modo erit cof. $Q = \frac{\text{cof.}(z+f)-v}{1-v\,\text{cof.}(z+f)}$, et $\int Q = \frac{\int(z+f).\sqrt{(1-v^2)}}{1-v\,\text{cof}\,z+f)}$; atque cof. $R = \frac{\text{cof.}(z+g)-v}{1-v.\text{cof.}(z+g)}$ ac $\int R = \frac{\int(z+g).\sqrt{(1-v^2)}}{1-v.\text{cof.}(z+g)}$. Si nunc hi valores loco P, Q, R in tribus prioribus aequationibus, fubftituantur, habebuntur tres aequationes, ex quibus tres incognitae x, z et v determinari debent. At hoc modo ftatim deuenitur ad aequationes omnino irrefolubiles, ita vt hac via minime ad finem peruenire queamus. Quamobrem expediet potius hanc quaeftionem vero proxime refoluere.

§. 20. Ad hoc commodiffime efficiendum iuuabit anomalias veras priori modo per feries exprimere. Erit ergo vt fequitur.

$$z = P - v\int P + \tfrac{v^2}{4}\int 2P - \tfrac{v^3}{12}(\int 3P + 3\int P) + \text{etc.}$$
$$z+f = Q - v\int Q + \tfrac{v^2}{4}\int 2Q - \tfrac{v^3}{12}(\int 3Q + 3\int Q) + \text{etc.}$$
$$z+g = R - v\int R + \tfrac{v^2}{4}\int 2R - \tfrac{v^3}{12}(\int 3R + 3\int R) + \text{etc.}$$

Ex his aequationibus eliminando z erit

$$f = Q-P-v(\int Q-\int P)+\tfrac{v^2}{4}(\int 2Q-\int 2P)-\tfrac{v^3}{12}(\int 3Q-\int 3P+3\int Q-3\int P)\ \text{etc.}$$
$$g = R-P-v(\int R-\int P)+\tfrac{v^2}{4}(\int 2R-\int 2P)-\tfrac{v^3}{12}(\int 3R-\int 3P+3\int R-3\int P)\ \text{etc.}$$

Priores vero aequationes eliminando x dabunt.

$$m = Q-P+v(\int Q-\int P)$$
$$n = R-P+v(\int R-\int P) \quad \text{atque}$$

Ponamus terminos in quibus ineft v^2 et altiores poteftates euanefcere; erit coniungendis aequationibus $\frac{f+m}{2} = Q-P$ et $Q = P + \frac{f+m}{2}$, atque $R = P + \frac{g+n}{2}$. Per

pofteposteriores autem aequationes esta $= \frac{m-f}{2\int(P+\frac{f+m}{2})-2\int P}$ $= \frac{n-g}{2\int(P+\frac{g+n}{2})-2\int P}$. Ex his vero aequationibus oritur tang. $P = \frac{(m-f)\int\frac{n+g}{2} - (n-g)\int\frac{m+f}{2}}{(m-f)\int v.\frac{n+g}{2} - (n-g)\int v.\frac{m+f}{2}}$ vbi $\int v.$ sinum versum denotat. Ex hac igitur aequatione iam proxime inueniri potest angulus P; hocque inuento simul quoque valor ipsius v proxime verus innotescit.

§. 21. Inuento hac ratione angulo P, ex eo determinetur valor ipsorum Q et R per aequationes $Q = P + \frac{f+m}{2}$ et $R = P + \frac{g+n}{2}$ deinde etiam valor ipsius v per aequationem $v = \frac{m-f}{2\int Q - 2\int P}$. Hi vero valores hoc modo inuenti nondum sunt veri, sed tantum veris propinqui; propiores autem inuenientur sequentibus terminis non negligendis, erit nempe $\frac{f+m}{2} = Q - P + \frac{v^2}{8}(\int 2Q - \int 2P) - \frac{v^2}{24}(\int 3Q - \int 3P + 3\int Q - 3\int P)$ etc. ideoque $Q = P + \frac{f+m}{2} - \frac{v^2}{8}(\int 2Q - \int 2P) + \frac{v^2}{24}(\int 3Q - \int 3P + 3\int Q - 3\int P)$ atque simili modo $R = P + \frac{g+n}{2} - \frac{v^2}{8}(\int 2R - \int 2P) + \frac{v^2}{24}(\int 3R - \int 3P + 3\int R - 3\int P)$; in quibus expressionibus loco, P, Q, R et v ante inuenti valores substituantur post signum $=$; hocque pacto propiores pro Q et R valores habebuntur. Ponatur breuitatis gr. $Q = P + M$ et $R = P + N$ erit $v = \frac{m-M}{\int(P+M) - \int P} = \frac{n-N}{\int(P+N) - \int P}$. Ex quibus aequationibus inuenitur tang. P $= \frac{(m-M)\int N - (n-N)\int M}{(m-M)\int v.N - (n-N)\int v.M}$; unde quoque multo propior valor ipsius

ipſius P obtinetur. Quo iterum ſubſtituto tam pro Q et R quam pro v multo magis propiores valores oriuntur.

§. 22. Cum ſit $M = \frac{f+m}{2} - \frac{v^2}{8}(\int 2Q - \int 2P) + \frac{v^3}{24}(\int 3Q - \int 3P + 3\int Q - 3\int P) -$ etc. et $N = \frac{g+n}{2} - \frac{v^2}{8}(\int 2R - \int 2P) + \frac{v^3}{24}(\int 3R - \int 3P + 3\int R - 3\int P) -$ etc. ſi in his aequationibus loco P, Q, R, et v vltimo inuenti valores ſurrogentur; tum proxime veri valores pro M et N habebuntur; et conſequenter proximi quoque pro Q et R, iterumque pro P et v. Harum ergo operationum reuolutiones, ſi toties repetantur, quoad valores ipſorum P et v non amplius mutentur; tum demum inuentos valores ipſos eſſe veros certum erit. His vero inuentis ex P et v per ſupra traditas regulas reperietur z, qui eſt angulus ſeu diſtantia loci primum obſervati F ab aphelio; v vero exprimit rationem excentricitatis orbitae ad ſemiaxem transuerſum ſeu diſtantiam mediam.

§. 23. Ad talem autem calculum ſuſcipiendum conducit plures tribus obſeruationes aſſumſiſſe, cum quo operationes inſtituendae magis confirmentur, tum quo obſeruationes maxime idoneae eligi queant. Habent autem eae obſeruationes, in quibus differentiae anomaliarum mediarum et verarum aequales ſunt, hoc incommodum, vt ſtatim in prima operatione dent $v = \frac{0}{0}$. Quod ergo quo euitetur tales obſeruationes ſunt eligendae, in quibus differentiae anomaliarum ſint maximae.

 Atta-

Attamen ne hac quidem circumſpectione eſt opus, ſi quidem excentricitas praeter propter tantum fuerit cognita, quin imo prolubitu excentricitas poteſt fingi eaque initio pro v ſubſtitui, unde ſtatim propiores valores pro Q et R detegentur ex quibus tum operationes, vt ante, inſtitui poterunt.

§. 24. Exempli loco per iſthanc methodum determinemus poſitionem abſidum orbitae terrae, eiusque excentricitatem ex datis tribus ſequentibus obſeruationibus, quae ex Comment. Ac. R. Scient. Pariſ. A. 1720. ſunt decerptae.

Anno 1716 erat	Locus ☉
Mart. 20. d. $11^{h}.57', 44''$	0S, 0°, $0'$, $0''$
Mai. 12. d. $11^{h}.55', 53''$	1S, 21°, $44'$, $35''$
Iul. 28. d. $12^{h}. 5', 48''$	4S, 5°, $22'$, $10''$

Ex his obſeruationibus eſt differentia anomaliarum verarum inter primam et ſecundam obſeruationem, quam poſuimus - $f = 51^{\circ}, 44', 35''$
et differentia inter primam et tertiam ſeu $g = 125^{\circ}, 22', 10''$

§. 25. Ad differentias anomaliarum mediarum inveniendas aſſumo pro tempore periodico T ſeu anno tropico 365 d. 5 h. $49'$ $8''$ ſeu $31556948''$. Atque differentia temporum primae et ſecundae obſeruationis eſt 52 d. 23 h. $58'$, $9''$ ſeu $4579089''$ hinc oritur differentia inter anomalias medias harum obſeruationum, quam poſuimus $m = 52^{\circ}, 14', 17''$. Differentia vero temporum

porum primae et tertiae obseruationis est 130d, 0^h, 8', 14'' seu 11232494''. Ex quo fit differentia inter anomalias medias harum obseruationum, quae erat $n = 128°$, $8'$, $23''$.

§. 26. Nunc ad calculum instituendum est

$$m-f = \quad 29', 42'' = 1782''$$

$$\text{et } n-g = 2°, 46', 13'' = 9973''$$

$$\text{atque } \tfrac{m+f}{2} = 51°, 59', 26''.$$

$$\text{et } \tfrac{n+g}{2} = 126°, 45', 16''$$

Deinde ad commoditatem calculi est

$$l\tfrac{n-g}{m-f} = 0,\ 7479181,$$

$$\text{Deinde est } \int\tfrac{n+g}{2} = \quad 8012073$$

$$\text{atque } \int v.\tfrac{n+g}{2} = \quad 15983867.$$

$$\text{Deinde est } l\int\tfrac{m+f}{2} = 9,8964761$$

$$\text{ad quem additus } l\tfrac{n-g}{m-f} = 0,7479181$$

$$10,6443942$$

$= l\frac{n-g}{m-f}\int\frac{m+f}{2}$, cui logarithmo respondet numerus hic:

44095498 ab hoc subtractus

8012073 $\int\frac{n+g}{2}$

36083425 $= \frac{n-g}{m-f}\int\frac{m+f}{2} - \int\frac{n+g}{2}$

qui numerus est numerator fractionis cui tP aequatur. Est vero $l\int v.\frac{m+f}{2}$ 9,5845671 ad hunc $l\frac{n-g}{m-f}$

0,7479181 addatur

10,3324852 $= l\frac{n-g}{m-f}\int v.\frac{m+f}{2}$.

Huic respondet in tabulis finuum numerus

21502313 ab hoc subtrahatur

15983867 $\int v.\frac{n+g}{2}$

5518446 denominator fractionis.

 Erit

Erit ergo tang. $P = \frac{36083425}{5518446} = 6,5387 \text{---}$

vnde prodit angulus $P = 81^\circ, 18', 17''$.

Deinde est $l\frac{m-f}{2} = 2,9498777$,

atque $P + \frac{m+f}{2} = Q = 133^\circ, 17', 43''$

cuius sinus aequatur sin. $46^\circ, 42', 17'' = 7278292$,

et $fP = 9888506$2,

est igitur $f(P+Q) - fP = -2606770$,

ex quo valor ipsius v erit negatiuus, id quod indicat locum, quem calculus pro aphelio dare deberet non esse aphelion sed periphelion. Vt vero v determinetur sumatur ex tabula sinuum logarithmus sinus 2906770, qui erit 9,4160988

ab hoc subtrahatur numerus supr. 4,6855749

log. denom. fract. pro v 4,7305239

subtr. 2,9498777

Hinc erit $l-v = -$ 1,7806462

ergo $\frac{100}{6035}$, seu distantia terrae mediae a ☉ est ad excentricitatem vt 6035 ad 100, quae ratio autem nondum est correcta. Si hinc antequam sequentes correctiones adhibeamus, positionem absidum inuenire velimus, prodibit pro z circiter $82^\circ, 14'$ seu $2\,S, 22^\circ, 14'$, qui locus a loco primae obseruationis subtractus dat $9\,S, 7^\circ, 46'$ pro loco periphelii; et $3\,S, 7^\circ, 46'$ pro loco aphelii; qui locus iam prope congruit. Accuratissime autem haec quaesita obtinebuntur, si tantum prima correctio adhibeatur.

§. 27.

§. 27. Ad correctionem autem instituendam notandum est loco anni tropici sidereum, quippe quo sol ab aphelio ad aphelium reuertitur, adhiberi debere, quo facto fiet $m = 52°, 14', 10''$ et $n = 128°, 8, 5''$, ideoque $m - f = 1775''$ et $n - g = 9955''$. Atque $\frac{m+f}{2} = 51°, 59', 22''$, et $\frac{n+g}{2} = 126°, 45', 8''$. Deinde est $P = 81°, 18'$, $Q = 133°, 18'$ et $R = 208°, 3'$, vbi minuta secunda de industria negligo, quia ad M et N inuenienda nihil conferunt. Est vero $M = \frac{f+m}{2} - \frac{v^2}{8}(\int 2Q - \int 2P)$; et $N = \frac{n+g}{2} - \frac{v^2}{8}(\int 2R - \int 2P)$. Ex his prodit $M = 51°, 59', 17''$ et $N = 126°, 45', 4''$; et $m - M = 0°, 14', 53'' = 893''$, et $n - N = 1°, 23', 1'' = 4981''$, vnde erit $l\frac{n-N}{m-M} = 0,7464650$ atque per superiorem regulam $tP = \frac{(\frac{n-N}{m-M})\int M - \int N}{(\frac{n-N}{m-M})\text{ſ.v.}M - \text{ſ.v.}N}$. Ex hoc inuenitur ang. $P = 81°, 23', 0''$, et $P + M = 133°, 22', 17'' = Q$. Atque v iterum prodit valoris negatiui, estque $l - v = -1,7815349$ seu est distantia media terrae a sole ad excentricitatem vt 6047 ad 100. Hi valores cum sint exactissimi, erit $z = 82°, 19', 16''$, qui angulus subtractus ab aequinoctio verno dat locum perigaei solis 9 S, 7°, 40', 44''. Vnde erit Apogaeum solis in ♋, 7°, 40', 44''. Tabulae vero Streetianae pro hoc tempore dant ♋. 7°, 52', 32'' Si adhuc vnam correctionem quis vellet instituere, dubito an ea minuta secunda sit affectura.

ORBITAE SOLARIS DETERMINATIO.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Ope methodi, quam in praecedente dissertatione exposui, facile erit orbitam, quam terra motu annuo circa solem describit, seu quod eodem redit orbitam solarem determinare, ex datis tribus locis solis ex terra visis, vna cum temporum interuallis. Quamobrem ad orbitam solis quam exactissime definiendam, oportet vt ex obseruationibus astronomicis tria solis loca eligamus, de quibus minime dubitare licet. Huiusmodi autem solis loca in ecclíptica seu orbita sua cum ex altitudinibus meridianis deriuare necesse sit, conducet eiusmodi obseruationes ad hunc vsum adhibere, quae circa aequinoctia sint factae, eo quod his temporibus minimus error in longitudine oriatur. Reiiciendas igitur ad hunc finem esse judico obseruationes circa solstitia factas, cum his temporibus etiam ex accuratissimis obseruationibus de loco solis vix ad aliquot minuta prima certi esse possimus.

§. 2. Perlustraui ergo in hunc finem *Flamsteedii* historiam coelestem, atque ex altitudinibus solis meridianis eius loca in ecclíptica calculo deducere sum annisus.

ſus. Cum autem iſtae obſeruationes neque a refractionibus ſint purgatae, neque omnes vt opinor ſint aeque bonae cenſendae, ex iis vix auſus ſum quippiam circa ſolis orbitam concludere. Cum vero prolegomena in tertio volumine huius operis perlegiſſem, deprehendi *Flamſteedium* huic ipſi inquiſitioni operam dediſſe, at methodum, qua is locum apogaei et excentricitatem orbitae ſolis aſſignare annisus eſt, minime probare poſſum. Veriſſimas enim primo cenſet tabulas ſuas motus medii ſolis, de quibus omnino ad hoc inſtitutum exequendum dubitare debuiſſet; deinde vero locum apogaei tantum paulisper immutauit excentricitatis nulla habita ratione, quo vni vel alteri obſeruationi ſatisfaceret. Facile autem perſpicitur, hac methodo vix quicquam profici poſſe.

§. 3. Interim tamen obſeruationes, quibus *Flamſteedius* in hoc negotio eſt vſus, ipſe certiſſimas et exactiſſimas praedicat, neque ego de bonitate earum dubitandum eſſe exiſtimo, cum ſine dubio ad hoc inſtitutum eas ſelegerit, de quibus maxime erat certus. Hanc ob rem ego non dubito easdem obſeruationes vſurpare ad orbitam ſolis ope meae methodi determinandam, ex iis vero praeterea tales obſeruationes eligam, quae circa aequinoctia ſunt factae, quippe quae eo magis certae ſunt habendae. Obſeruationes ergo, quas ad hoc inſtitutum adhibere conſtitui, ſunt tres ſequentes, anno 1690 factae. Menſe ſcilicet Martio die 7 meridie locum ſolis exhibet in ♓, 27° 21′, 47″,

Dein-

Deinde eiusdem menſis die 14 erat ſol in ♈ 4°, 17′, 18″. Atque tertio menſe ſeptembri die 15 erat ſol in ♎ 2°, 45′, 37″. Quae ſolis loca ex altitudinibus meridianis exactiſſime obſeruatis deduxit ipſe *Flamſtedius*.

§. 4. In his autem locis ſol verſabatur ipſo puncto veri meridiei, dum per meridianum tranſiebat. Quare quo anomalias medias ex his temporibus recte concludamus oportet haec tempora ope aequationis temporis corrigere. Quo facto erunt vt ſequitur.

Tempore medio	*Solis loca*
Mart. d. 7. 12^h. 8′, 24″	11 S, 27°, 21′, 27″
Mart. 14 d. 12^h. 6′, 15″	0 S, 4°, 17′, 18″
Sept. 15 d. 11^h. 51′, 27″	6 S, 2°, 45′, 37″

Harum obſeruationum primam ſumo igitur tanquam terminum, et pono eius anomaliam veram $= z$, atque anomaliam mediam $= x$. Praeterea $1 : v$ mihi denotat rationem diſtantiae mediae ad excentricitatem, adeo vt hae tres quantitates z, x et v ex his tribus obſeruationibus debeant determinari. Ponatur ſecundae obſeruationis anomalia vera $= z + f$, et media $= x + m$; tertiae vero obſeruationis anomalia vera $= z + g$ et media $= x + n$. Quae quantitates f, g, m et n ex ipſis obſeruationibus immediate determinantur.

§. 5. Differentia temporum inter primam et ſecundam obſeruationem eſt ergo 6 d, 23^h, 57′, 51″, cui tempori motus medius respondet $6°, 53', 52''$. Cum autem inter ea aequinoctia circiter $1''$ sint retrogressa, erit differentia inter anomalias medias primae et secundae obseruationis $m = 6°, 53', 51''$. Differentia vero inter loca solis est $6°, 55', 31''$, quae similiter minuto secundo minuta ob praecessionem aequinoctiorum dat differentiam inter anomalias veras primae et secundae obseruationis $f = 6°, 55, 30''$. Deinde differentia temporum primae et tertiae obseruationis est 191 d. $23^h, 43', 3''$ cui motus medius respondet $189°, 12', 0''$: hinc motu aequinoctiorum $26''$ subtracto remanet differentia inter anomalias medias primae et tertiae obseruationis, $n = 189°, 11', 34''$. Denique differentia inter solis loca primae et tertiae obseruationis $26''$ diminuta dat differentiam inter anomalias veras primae et tertiae obseruationis $g = 185°, 23', 24''$.

§. 6. His praeparatis sequitur vt quantitatem anguli cuiusdam P, qui est anomalia excentri, definiamus, quo cognito facile omnia, quae requiruntur, determinare licet. Ostendi autem in praecedente mea dissertatione fore proxime tang. $P = \frac{\int \frac{m+f}{2} - \left(\frac{m-f}{n-g}\right) \int \frac{n+g}{2}}{\int v. \frac{m+f}{2} - \left(\frac{m-f}{n-g}\right) \int v. \frac{n+g}{2}}$ posito sinu toto $= 1$.
Quo igitur ista expressio per calculum definiatur, sequenti modo operationes instituo.

$m = 6°, 53', 51''$	$f = 6°, 55', 30''$
$n = 189°, 11', 34''$	$g = 185°, 23', 24''$

Ex his erit

$$m-f=-1', 39''=-99''$$
$$n-g=8°, 48', 10''=13690''$$

atque

$$-\left(\frac{m-f}{n-g}\right)=0,0072315.$$

Praeterea eſt

$$\frac{m+f}{2}=6°, 54', 40''$$

et

$$\frac{n+g}{2}=187°, 17', 29''$$

Iam vero eſt

$$\int\frac{m+f}{2}=1203393$$

atque

$$\int\frac{n+g}{2}=-1269155$$

qui multiplicatus per $-\left(\frac{m-f}{n-g}\right)=0,0072315$ dat -9178. Erit ergo numerator fractionis, cui tang. P aequatur $=1194115$. Praeterea eſt $\int v.\frac{m+f}{2}=72661$ atque $\int v.\frac{n+g}{2}=19919130$ qui ductus in $-\left(\frac{m-f}{n-g}\right)=0,0072315$ dat $-\left(\frac{m-f}{n-g}\right)\int v.\frac{n+g}{2}=144045$. Vnde fit denominator $=216706$. Diuidatur nunc factum ex numeratore in ſinum totum per denominatorem et prodibit tang. $P=55103000$. Quocirca inuentus eſt angulus $P=79°, 42', 51''$, qui autem valor tantum eſt vero proximus, et ſequenti modo corrigi debet.

§. 7. Ex valore ipſius P ſequentes litterae Q et R habebuntur, nempe cum ſit $P=79°, 42', 51''$, erit

Q=P

$Q = P + \frac{m+f}{2} = 86°, 37', 31''$, atque $R = P + \frac{g+n}{2} = 267°, 0', 20''$. Ex his valoribus erit $v = \frac{\frac{m-f}{2}}{ſQ - ſP} = \frac{\frac{n-g}{2}}{ſR - ſP}$, vnde patet valorem ipſius v fore negatiuum, id quod indicat diſtantiam primae obſeruationis non ab apogaeo ſed ab perigaeo inuentum iri. Erit ergo $l - v = l\frac{f-m}{2} - l(ſQ - ſP)$, in qua expreſſione notandum eſt, quia ſinus cum angulis comparantur, a logarithmis ſinuum ſubtrahi debere 4, 6855704, quo logarithmi minutorum ſecundorum obtineantur. Ob eandem rationem erit $\frac{f-m}{2}$ in minutis ſecundis $= 49, 5$ atque $l\frac{f-m}{2} = 1, 6946052$.

Iam vero eſt

$ſQ =$	9982658
et $ſP =$	9839292
ideoque $ſQ - ſP =$	143366
atque $l(ſQ - ſP) =$	8, 1564482
a quo ſubtrah. $=$	4, 6855704
reſtat	3, 4708778
ſubtr. a $l\frac{f-m}{2} =$	1, 6946052
erit $l - v = -$	1, 7762726
ſeu $v = \frac{-99}{5915}$	

hic vero valor ſicut et reliqui correctione ſequente habet opus.

§. 8. Ad hanc correctionem inſtituendam quaerantur valores litterarum M. et N ex ſequentibus formulis:

M =

$$M = \frac{f+m}{2} + \frac{v^2}{8} \int 2P - \frac{v^2}{8} \int 2Q.$$
$$N = \frac{g+n}{2} + \frac{v^2}{8} \int 2P - \frac{v^2}{8} \int 2R.$$

vbi a logarithmis ſinuum ſubtrahi debet 4, 6855704. Quia vero ſinguli ſinus multiplicati ſunt per $\frac{v^2}{8}$ cuius logarithmus eſt $-4, 4556252$, a logarithmis ſinuum ſubtrahi debet iſte logarithmus 9, 1412056 et numerus logarithmo reſiduo reſpondens dabit numerum minutorum ſecundorum. Compendii autem gratia non eſt opus vt anguli $2P$, $2Q$, $2R$ ad minuta ſecunda vsque ſumantur: tanta enim accuratio eſſet ſuperflua. His praemiſſis erit vt ſequitur:

$$\int 2P = \int 159^\circ, 26' = \int 20^\circ, 34'.$$
$$\int 2Q = \int 173^\circ, 15' = \int 6^\circ, 45'.$$
$$\int 2R = \int 534^\circ, 1' = \int 5^\circ, 59'.$$

Hinc erit

$l \int 2P =$ 9, 5456745
ſubtrahatur 9, 1412056
0, 4044689

ergo $\frac{v^2}{8} \int 2P = 2\frac{1}{2}''$

Simili modo

$l \int 2Q =$ 9, 0701761
ſubtrahatur 9, 1412056
(−1), 9289705

ergo $\frac{v^2}{8} \int 2Q = 0, 85''$
atque $\frac{v^2}{8} \int 2R = 0, 75''$

Ex his prodit

$M = 6^\circ, 54', 42''$ et
$N = 187^\circ, 17', 31''$.

§. 9.

§. 9. Quia valores litterarum M et N tam parum discrepant ab $\frac{m+f}{2}$ et $\frac{n+g}{2}$ correctio litterarum P et v fere erit insensibilis; interim tamen ad vsum regulae a me traditae ostendendum calculum instituam. Ostendi igitur fore tang. $P = \frac{\int M - (\frac{m-M}{n-N}) \int N}{\int v.M - (\frac{m-M}{n-N}) \int v.N}$ posito sinu toto $= 1$. Ad hunc ergo angulum P detegendum sequenti modo operor

$$m - M = -50, 69'$$
$$n - N = 1^{\circ}, 54', 3, 21'' = 6843, 21''$$
ergo $-(\frac{M-M}{n-N}) = 0,0074073$

Praeterea est

$$\int M = 1203003$$
$$\int N = -1296242$$
ergo $-(\frac{m-M}{n-N}) \int N = -9400$
ergo numerator $= 1193603$

Deinde est

$$\int v.M = 72670$$
$$\int v.N = 19919123$$

Erit ergo

$-(\frac{m-M}{n-N}) \int v.N = 149306$ ideoque
denominator $= 221976$

Inuenitur ergo

tang. $P = 53771000$
ideoque $P = 79^{\circ}, 27', 54''$.

 §. 10.

§. 10. Sumto ergo hoc valore pro vero angulo P erit $Q=P+M=86°, 22', 36''$ et $R=P+N=266°, 45', 25''$, atque ex his erit verus valor ipsius $v=\frac{m-M}{\int Q-\int P}$ $=\frac{n-N}{\int R-\int P}$, quae expressio vt ante debet tractari. Ex aequatione autem $v=\frac{n-N}{\int R-\int P}$ prodit $l-v=-1,7761733$ qui est verus valor ipsius v, atque distantia media ad excentricitatem vt 100000 ad 1674.

§. 11. Ex his nunc per praecepta tradita vtraque anomalia loci solis in prima obseruatione poterit definiri, in quo autem notandum est ob valorem ipsius v negatiuum a perigaeo anomalia computatas prodire. Erit autem primi solis loci obseruati 11 S, 27°, 21', 27'' anomalia media $x=P+v\int P$ et anomalia vera $z=P-v\int P+\frac{v^2}{4}\int 2P$ etc. ad quos valores inueniendos est

$$\begin{array}{rl}
P = & 79°, 27', 54'' \\
l\int P = & 9,9926192 \\
\text{subtr.} & 4,6855704 \\
\hline
 & 5,3070488 \\
l-v = & -1,7761733 \\
\hline
l-v\int P = & 3,5308755 \\
\text{ergo } -v\int P = & 3395'' = 56', 35'' \\
l\int 2P = & 9,5556433 \\
\text{subtr.} & 4,6855704 \\
\hline
 & 4,8700729 \\
l\frac{v^2}{4} = & -4,1655562 \\
\hline
l\frac{v^2}{4}\int 2P = & 0,7045167
\end{array}$$

ergo $\frac{v^2}{4}\int 2P=5''$. Ex his ergo fit

$x=$

$x = 78, 31', 19'' = 2S, 18°, 31', 19''$
$z = 80°, 24', 34'' = 2S, 20°, 24', 34''$

§. 12. Cum igitur Sol fuerit A. 1690. Menſ. Martio $7^d, 12^h, 8', 24''$ in ecliptica 11 S, 27°, 21', 27', erat illo tempore aequatio 1°, 53', 15'' addenda ad motum medium. Quamobrem illo tempore erat motus medius ſolis 11 S, 25°, 28', 12'' atque 1690 die 7 Martii ipſo meridie iuxta tempus medium erat motus medius ſolis 11 S, 25°, 27', 52''. Ergo A. 1689. completo ſeu initio anni 1690. erat motus medius ſolis 9 S, 20°, 24', 42'', qui locus ſi cum tabulis motus medii ſolis in Lexico Harris comparetur, deprehendetur 40'' maior, et hanc ob rem illae tabulae pro obſeruatorio Greenwicenſi augeri debent 40''. Quocirca erit

A. a C. N.	Motus medius ☉
1701	9 S, 20°, 44', 30''
1721	9 S, 20°, 53', 34''
1741	9 S, 21°, 2', 38''
1761	9 S, 21°, 11', 42''
1781	9 S, 21°, 20', 46''
1801	9 S, 21°, 29', 51''

In tabula pro annis intermediis nihil eſt mutandum.

§. 13. Subtrahatur a vero loco ſolis
anomalia vera inuenta, 11 S, 27°, 21', 27''
prodibit 2 S, 20°, 24', 34''
locus perigaei orbitae ſolaris. 9 S, 6°, 56', 53''

Quam-

Quamobrem apogaeum orbitae solaris erat,

A. 1690. d. 7. Mart. in 3 S, 6°, 56′, 53″
atque initio anni 1690. in 3 S, 6°, 56′, 44″
atque initio anni 1701. in 3 S, 7°, 5′, 54″

Quare a loco apogaei solis ex tabulis astronomicis citatis inuento perpetuo subtrahi debet 34′, 16″, adeo vt in illis tabulis plusquam dimidio gradu apogaeum sit nimis promotum.

§. 14. Logarithmum rationis excentricitatis ad distantiam mediam inuenimus $-1,7761733$, ita vt sit distantia media ad excentricitatem, vt 100000 ad 1674 seu vt 5973 ad 100. Si nunc ille logarithmus iuxta regulam in sequ. diss. expositam addatur ad 5, 6154596 prodibit 3,8392863, cui respondet numerus 6907″ pro aequatione maxima, est ergo aequatio maxima $= 1°, 55′, 7″$.

§. 15. Restat vt definiatur anomalia media, cui maxima aequatio respondet; id quod per regulam meam sequenti modo fiet.

Ad log. sinus totius	10, 0000000
addatur $lv^3_4 = -$	5, 9305799
	4, 0694200
qui est log. sinus anguli	14‴
est ergo	$q = 14‴$.
Deinde ad	5, 3144295
addatur $lv = -$	1, 7761733
	3, 5382562

cui respondet numerus 3454″ seu 57′, 34″. Quamobrem erit anomalia media cui aequatio maxima respondet 90°, 57′, 34″; atque anomalia vera, cui aequatio maxima respondet, erit 89°, 2′, 27″.

SO-

SOLVTIO PROBLEMATVM QVORVNDAM ASTRONOMICORVM.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

Problema I.

Data planetae aequatione maxima, inuenire orbitae eius excentricitatem.

Solutio.

Conuertatur aequatio maxima in minuta ſecunda, ſitque eorum numerus $= m$; dico fore diſtantiam planetae a Sole mediam ad excentricitatem vt 412533 ad numerum m; ſi quidem aequatio non fuerit nimis magna. At ſi aequatio admodum fuerit ingens, poſita ratione diſtantiae mediae ad excentricitatem vt 1 ad v, erit $v = \frac{m}{412533} - \frac{m^7}{32(412533)^7}$. Q.E.I.

Problema 2.

Data excentricitate orbitae planetaris, inuenire aequationem maximam.

Solutio.

Sit 1 ad v vt diſtantia planetae a Sole media ad excentricitatem, et ſit m numerus minutorum ſecundorum aequationis maximae, qui quaeritur, dico fore $m = 412533(v + \frac{v^7}{32})$; vel per logarithmos erit log. $m =$

$5,6154596 + l(v + \frac{v^7}{32})$. Vbi notandum eſt, niſi excentricitas fuerit vehementer magna loco quantitatis $v + \frac{v^7}{32}$ ſumi poſſe tantum v. Q. E. I.

Problema 3.

Data excentricitate orbitae planetaris, inuenire anomaliam mediam, cui aequatio maxima reſpondet.

Solutio.

Sit 1 ad v vt diſtantia media ad excentricitatem, quae ergo ratio datur et proinde v. Multiplicetur ſinus totus per $\frac{v^5}{4}$, et factum erit ſinus cuiusdam anguli ex tabulis inueniendi: ſit hic angulus q graduum. *Haec vero operatio commodius per logarithmos inſtituetur.*

Deinde quaeratur logarithmus quantitatis $v - \frac{v^7}{32}$, vel tantum ipſius v, ex tabulis logarith. num. naturalium, ſi fuerit v admodum paruum, iſte logarithmus addatur ad hunc 5, 3144295, et logarithmi, qui prodit, quaeratur numerus reſpondens, qui ſit n; vbi notetur n'' eſſe dimidiam partem aequationis maximae; ita vt, ſi aequatio maxima iam fuerit inuenta hac poſteriori operatione nequidem ſit opus. Dico fore anomaliam mediam quaeſitam $90° + q° + n''$. Q. E. I.

DE

Comment. Acad. Sc. Tom. III. Tab. V. p.

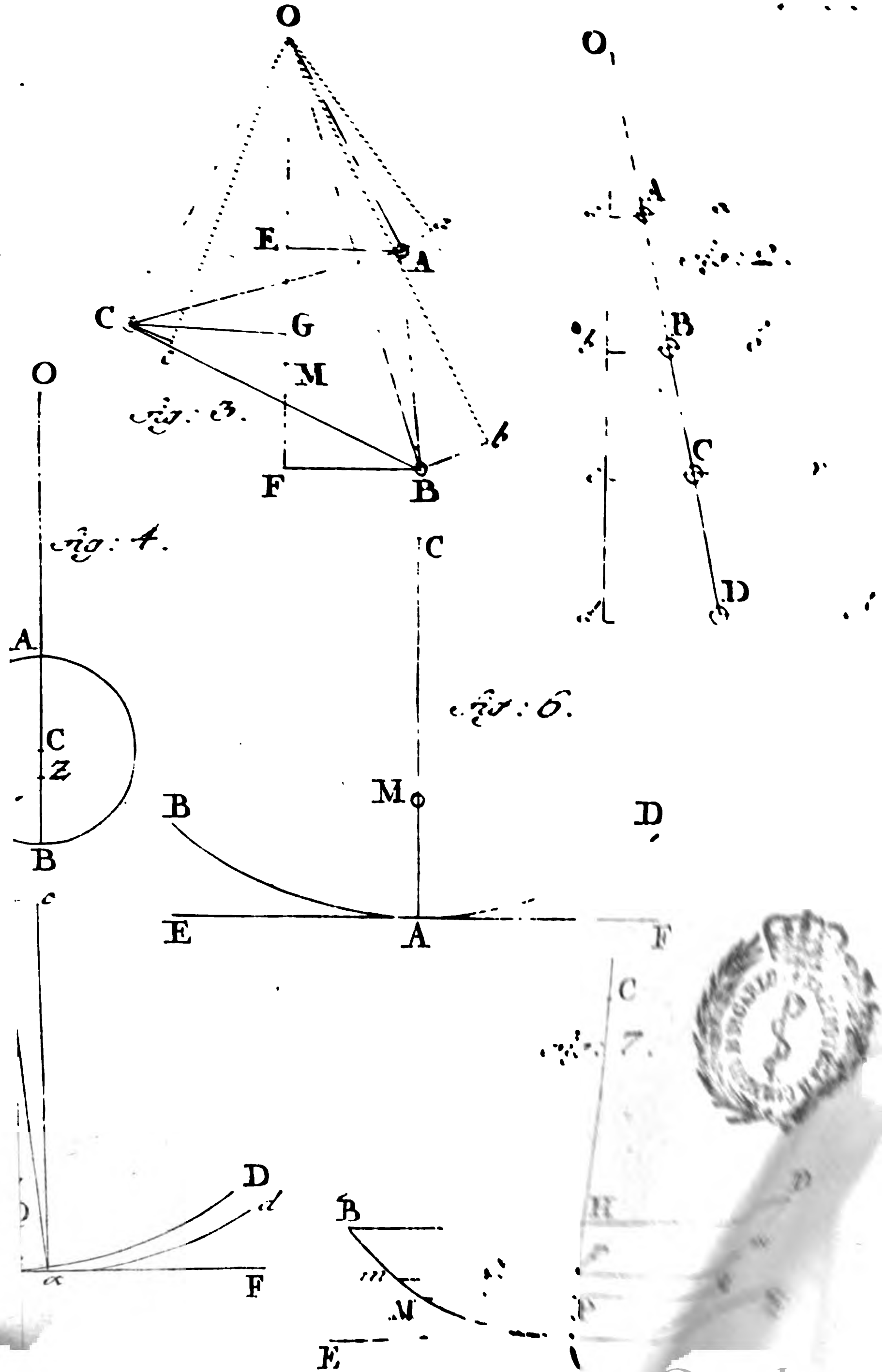


fig: 8.

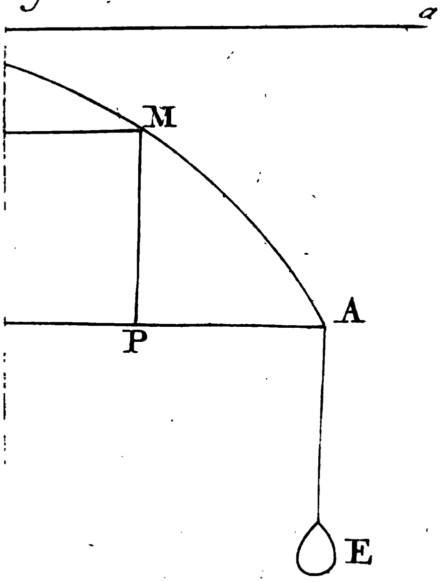
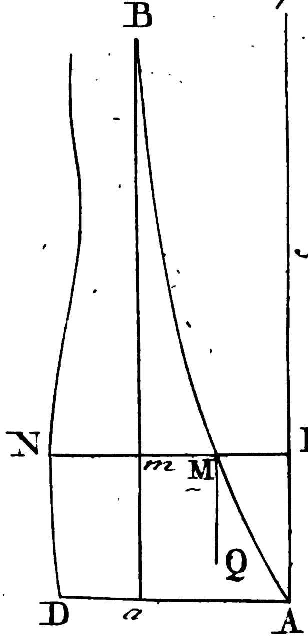


fig: 9.



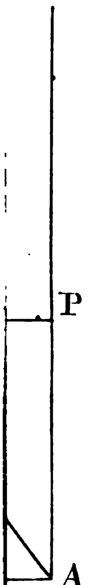


fig: 11.

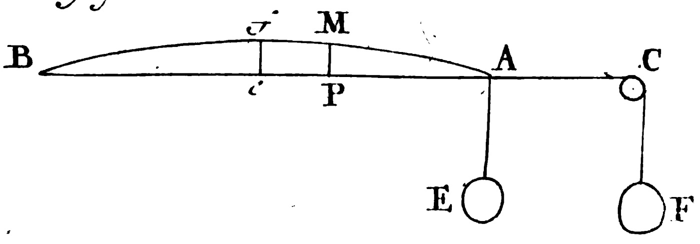
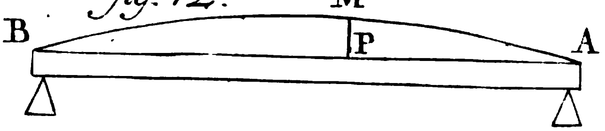


fig: 12.



DE MINIMIS OSCILLATIONIBVS CORPORVM TAM RIGIDORVM QVAM FLEXIBILIVM. METHODVS NOVA ET FACILIS.

AVCTORE
Leonh. Euler.

§. 1.

Qvae ad oſcillationes corporum rigidorum pertinent problemata, ea Geometrae ad inuentionem centri oſcillationis referre ſunt ſoliti. Tabb. V. VI. Cum enim corpora rigida figuram ſuam, quantumuis etiam a potentiis ollicitentur, immutatam retineant; ad eorum oſcillationes determinandas ſufficit eorum oſcillationis centrum noſſe. Hac enim ratione tota quaeſtio reducitur ad oſcillationes penduli ſimplicis, cuius motus iam ſatis cognitus et extra omne dubium eſt poſitus. Omnes idcirco circa motum oſcillatorium corporum rigidorum quaeſtiones eo redeunt, vt inueniatur longitudo penduli ſimplicis, quod iisdem temporibus oſcillationes ſuas abſoluat; hac enim cognita ſimul quoque motus oſcillatorius corporum propoſitorum innoteſcit.

§. 2. Quod vero ad oſcillationes corporum flexibilium attinet, de iis duplex facienda eſt quaeſtio. Nam antequam penduli ſimplicis iſochroni longitudo determinari

nari poteſt, figura, quam huiusmodi corpora flexibilia inter oſcillandum induunt, debet definiri; niſi enim haec ſit cognita, quid potentiae in ea agentes efficiant, aſſignari nequit. Ad motum igitur oscillatorium corporum flexibilium inueniendum requiritur, vt figura eorum, quam quouis momento inter oſcillandum induunt, determinetur; quo facto facile erit longitudinem penduli ſimplicis iſochroni aſſignare.

§ 3. Huius generis problemata iam quaedam a Geometris ſunt pertractata, quorum primum, cuius *Cl. Taylorus* elegantem dedit ſolutionem, circa oſcillationes chordarum muſicarum tenſarum verſatur, quibus oscillationibus ſoni eduntur. In hacque tractatione *Cl. Taylorus* primo curuam, quam chorda vibrata format, determinauit; ex eaque poſtmodum numerum oſcillationum, quem data chorda dato tempore abſoluit, definiuit.

§. 4. Huc quoque pertinet problema de oſcillationibus funis ſeu catenae perfecte flexilis, cuius praeterito anno *Cl. Bernoullius* ſolutionem huc tranſmiſit; quodque idem problema poſtmodum alia metodo ſatis breui et facili reſolui, pariter hic coram ſocietate praelecta. In vltimis vero, quas ad me dedit Cl. *Bernoullius*, litteris mentionem fecit oſcillationum laminae elaſticae altero termino parieti firmo infixae, atque aequationem mihi perſcripſit a ſe pro curua, quam lamina oſcillans facit, inuentam eſſe; de qua autem adhuc anceps haerebat, vtrum conueniat, an ſecus: propterea quod haec quaeſtio tam ſit intricata, atque in ea reſoluenda errorem committere admodum ſit procliue.

§. 5.

§. 5. Ego quidem, quamuis valde facilem et latepatentem essem adeptus methodum curuam funis perfecte flexilis oscillantis determinandi; tamen ex ea parum vtilitatis ad curuam laminae elasticae oscillantis inueniendam haurire potui. In mentem igitur mihi venit alia methodus latissime patens atque staticis tantum principiis nitens, cuius ope non solum has de oscillationibus laminae elasticae et funis suspensi quaestiones mira facilitate resolui, sed omnia quae ad oscillationes pertinent promptissime expedire possum.

§. 6. Aliis enim, iisque maxime diuersis methodis sunt vsi auctores, qui de centro oscillationis seu oscillationibus corporum rigidorum egerunt, alias etiam *Cl. Bernoullius* et ego methodos ad oscillationes funis suspensi flexilis inueniendas adhibuimus. Ex diuersis quoque principiis Clarissimi Viri *Taylorus*, *Ioh Bernoulli*, et *Hermannus* oscillationes chordae vibratae deriuauerunt. Ea vero methodus, qua problema oscillationum laminae elasticae parieti fixo infixae resolui, ita est comparata, vt eius ope quoque supra memorata problemata omnia summa cum facilitate resolui queant.

§. 7. Quo igitur hanc methodum, qua omnia huiusmodi problemata circa oscillationes corporum tam rigidorum quam flexibilium resolui possunt, commodissime exponam, considero ante omnia pendulum simplex, et oscillationes, quas peragit: quippe ad quod quorumque corporum oscillationes sunt reducendae. Contemplor autem ad hoc institutum oscillationes minimas tantum

tum, eo quod hae ſunt inter ſe iſochronae tam in pendulo ſimplici, quam in corpore quocunque: cum maiores oſcillationes cum pendulo ſimplici rariſſime comparari queant.

Figura 1. §. 8. Sit ergo OM pendulum ſimplex in O ſuſpenſum et in M habens pondus alligatum, cuius maſſa ſit M. Declinet hoc pendulum a ſtatu quietis ſeu recta verticali OA angulo infinite paruo AOM, ita vt arculus MA pro recta horizontali haberi queat; voceturque longitudo huius penduli $OM = f$; et ſpatiolum AM corpori M percurrendum, donec in ſtatum quietis perueniat $= k$. Vis grauitatis porro, quae corpus M deorſum vrget, aequatur ipſius ponderi ſeu ipſi M. Ex hac vero per reſolutionem oritur vis corpus verſus MA vrgens $= \frac{am.M}{Mm} = \frac{AM.M}{OM} = \frac{Mk}{f}$, facto triangulo Mam ſimili triangulo OAM.

§. 9. Ponatur haec vis ſollicitans corpus M ſecundum $MA = g$; erit $g = \frac{Mk}{f}$, vnde oritur $f = \frac{Mk}{g}$. Si igitur corpus M ſecundum directionem MA vrgeatur vi g, eique percurrendum ſit ſpatium $MA = k$, donec in ſtatum quietis perueniat; erit tempus, quo ex M in A peruenit, aequale tempori deſcenſus penduli longitudinis $\frac{Mk}{g}$; ſi quidem dum corpus per MA incedit, vis ad A vrgens proportionalis fuerit diſtantiae corporis ab A.

§. 10. Ex his ergo perſpicitur, quomodo, ſi detur maſſa corporis et via percurrenda atque vis corporis ſecundum hanc viam ſollicitans, inueniri debeat longitudo

gitudo penduli ſimplicis eodem tempore deſcenſum ſeu ſemioſcillationem abſoluentis, quo illud corpus viam ſuam abſoluit. Illa autem via eſt ſpatium, quod corpus percurrere debet, donec in ſtatum quietis perueniat. Dum vero corpus in hoc ſpatio mouetur, vis illud ſollicitans ſemper eſt proportionalis diſtantiae a ſtatu quietis, ſi quidem minimae oſcillationes fuerint iſochronae. Id quod ex caſibus deinceps euoluendis patebit, in quibus vis ſingulas particulas vrgens proportionalis quoque reperietur diſtantiis ipſarum a ſtatu quietis.

§. 11. Si igitur plura corpora ſimul in ſtatum quietis peruenire debeant, oportet vt in iis quantitas $\frac{Mk}{g}$ ſit eadem. Quocirca potentiae ea corpora ſecundum directionem, in qua mouentur, ſollicitantes debent eſſe in ratione compoſita ex rationibus maſſarum et ſpatiorum percurrendorum, quibus confectis in ſtatum quietis perueniant, ſeu in quo ſitu in quiete permanere poterunt.

§. 12. In omni ergo corpore oſcillationes peragente ſpectandus eſt ante omnia ipſius ſtatus aequilibrii, in quo ſi ſemel fuerit in quiete, in eo perpetuo ſit permanſurum. Hic enim ſtatus reſpondebit ſitui penduli ſimplicis verticali in quo ſolo quieſcere poteſt. Deinde illud corpus parumper ex hoc ſtatu eſt deturbandum, et inquirendum, quanto interuallo quaeque particula ab eo loco, quem in ſtatu aequilibrii occupabat, diſtet; quod erit ſpatium percurrendum. Denique

nique, quo omnes particulae iterum ſimul in ſitum aequilibrii perueniant, debet eſſe potentia, quae vnamquamque particulam ſecundum ipſius viae percurrendae directionem ſollicitat, vt factum ex maſſa particulae in viam percurrendam.

§. 13. At ſi ſingulae corporis oſcillantis partes actu ab aliis viribus atque in aliis directionibus ſollicitentur, tum loco illarum virium aliae ſubſtitui debent, quae ſingulas partes ſecundum ſpatiorum percurrendorum directiones ſollicitent, et proportionales ſint factis ex maſſis ipſarum particularum et viis percurrendis. Haeque potentiae tantae ſunt accipiendae, vt omnes aequiualeant ipſis potentiis corpus actu ſollicitantibus.

§. 14. Cum igitur hae potentiae ſubſtituendae ipſis potentiis corpus ſollicitantibus aequiualere debeant, ex ſtatica conſtat, ſi earum loco potentiae ipſis aequales at ſecundum directiones contrarias agentes collocentur, tum corpus eſſe debere in aequilibrio. Quamobrem iſte ſtatus aequilibrii erit determinandus, quo definito tempus innoteſcet, quo corpus ſibi relictum oſcillationes ſingulas abſoluat. Hac ergo ratione tota circa oſcillationes corporum verſans disquiſitio ad ſtatica principia reducitur. Quae omnia ex ſequentibus caſibus melius percipientur.

Fig. 2. §. 15. Sit virga rigida grauitate ſeu potius omni materia deſtituta et quatuor ponduſculis A, B, C, D onuſta; eaque circa O oſcillationes peragat, dum in ſitum aequilibrii O*d* accedit, ex eoque in alteram partem recedit. Huius-

Huiusque penduli compositi requiritur tempus vnius cuiusque oscillationis. Ponamus longitudinem penduli simplicis isochroni esse f, quod scilicet pendulum eodem tempore descensum absoluat, quo tempore virga OD in situm Od pertingit.

§. 16. Quo autem virga OD in situm Od transferatur corpusculis A, B, C, et D percurrenda sunt spatia Aa, Bb, Cc, et Dd, quae ob angulum DOd infinite paruum, pro lineis horizontalibus haberi poterunt. Omnia vero haec corpuscula in Ad simul eodemque tempore, quo pendulum f descensum absoluit, peruenient, si ea secundum directiones Aa, Bb, Cc et Dd vrgeantur viribus $\frac{A.Aa}{f}$, $\frac{B.Bb}{f}$, $\frac{C.Cc}{f}$ et $\frac{D.Dd}{f}$ respectiue. Quare si his potentiis aequales in directionibus contrariis Aα, Bβ, Cγ et Dδ applicentur, hae virgam AD in hoc situ AD in aequilibrio seruabunt.

§. 17. Singula vero corpuscula A, B, C et D reipsa vi grauitatis deorsum tendunt viribus ipsis eorum massis proportionalibus. Quare hae potentiae deorsum trahentes cum illis horizontalibus Aα, Bβ, Cγ et Dδ in aequilibrio debent esse constitutae. At momentum ponderum A, B, C, D ad virgam circa O conuertendam est $= A.Aa + B.Bb + C.Cc + D.Dd$. Momentum vero potentiarum horizontalium est $\frac{A.Aa.AO + B.Bb.BO + C.Cc.CO + D.Dd.DO}{f}$. Quae momenta cum debeant esse aequalia prodibit $f = \frac{A.Aa.AO + B.Bb.BO + C.Cc.CO + D.Dd.DO}{A.Aa + B.Bb + C.Cc + D.Dd}$, quae est longitudo penduli simplicis isochroni cum pendulo composito OD.

§. 18. Sunt autem ſpatia ſingulis corporibus percurrenda Aa, Bb, Cc, Dd diſtantiis ipſorum a polo O proportionalia. Quocirca erit $f = \frac{A.AO^2 + B.BO^2 + C.CO^2 + D.DO^2}{A.AO + B.BO + C.CO + D.DO}$. Quae expreſſio eſt ea ipſa, quae ex regulis iam ſatis cognitis pro diſtantia centri oſcillationis a polo O inuenitur. Eſt enim diſtantia centri oſcillationis a polo O nil aliud, niſi longitudo penduli ſimplicis ipſi compoſito OD iſochroni. Cognita ergo longitudine f innoteſcit numerus oſcillationum, quem hoc pendulum compoſitum OD dato tempore abſoluit.

Figura 3. §. 19. Sin autem ponduſcula, quae virgis rigidis inter ſe connexa circa polum O oſcillari ponuntur, non fuerint in linea recta ſita, primo caſus aequilibrii eſt ſpectandus, qui ſit is, qui in figura repraeſentatur, in qua tria ponduſcula A, B, C ex polo O ſunt ſuſpenſa. Horum ergo ponduſculorum centrum grauitatis erit poſitum in recta verticali OF. Quare ſi demittantur ad hanc verticalem perpendicula AE, BF et CG erit $A.AE + B.BF = C.CG$.

§. 20. Conſideretur iam triangulum ABC circa polum O infinite parum conuerti, ita vt A in a, B in b, atque C in c perueniat, erunt haec elementa Aa, Bb, Cc inter ſe vt AO, BO et CO. Sit iam f longitudo penduli ſimplicis deſcenſum eodem tempore abſoluentis, quo tria ponduſcula ex ſitu abc in ſitum ABC pertingunt. Hoc poſito erit vis quae corpus A in a ſecundum aA vrget $= \frac{A.Aa}{f}$; ſimiliterque vis corpus B iuxta bB vrgens $= \frac{B.Bb}{f}$, et vis corpus C per cC vrgens $= \frac{C.Cc}{f}$. Harum ergo virium momentum in polum O

erit

erit $= \frac{A.Aa.AO + B.Bb.BO + C.Cc.CO}{f}$. Momentum vero, quod oritur ex ponderibus corporum A, B, C in a, b, c ſitorum in O, eſt $= A.AE + B.BF - C.CG + \frac{A.OE.Aa}{AO} + \frac{B.OF.Bb}{BO} + \frac{C.OG.Cc}{CO}$, in qua formula $A.AE + B.BF - C.CG$ eſt $= 0$, propterea quod ABC eſt ſtatus aequilibrii.

§. 21. Cum igitur haec duo momenta inter ſe debeant eſſe aequalia erit $\frac{A.Aa.AO + B.Bb.BO + C.Cc.CO}{f} = \frac{A.Aa.OE}{AO} + \frac{B.Bb.OF}{BO} + \frac{C.Cc.OG}{CO}$. Quia autem Aa, Bb, Cc, ſunt ipſis AO, BO et CO proportionalia, erit $\frac{A.AO^2 + B.BO^2 + C.CO^2}{f} = A.OE + B.OF + C.OG$. Ex qua aequatione oritur $f = \frac{A.AO^2 + B.BO^2 + C.CO^2}{A.OE + B.OF + C.OG}$. Exprimit autem $\frac{A.OE + B.OF + C.OG}{A + B + C}$ diſtantiam centri grauitatis corporum A, B, C a polo O, quod ſi ponatur in M, erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $f = \frac{A.AO^2 + B.BO^2 + C.CO^2}{(A+B+C)OM}$, quae quantitas dat quoque diſtantiam centri oſcillationis a polo O. Ex hac ergo naſcitur ſequens regula pro centro oſcillationis corporis cuiuscunque rigidi circa punctum fixum oſcillantis inueniendo. *Quaelibet particula multiplicetur in quadratum diſtantiae ſuae a polo, et horum factorum ſumma diuidatur per maſſam totius corporis in diſtantiam centri grauitatis a polo ductam; quotusque dabit diſtantiam centri oſcillationis a polo ſeu longitudinem penduli ſimplicis iſochroni.* Haecque regula ſufficit ad oſcillationes quorumcunque corporum rigidorum circa polum fixum determinandas.

§. 22. Hic quidem poſuimus omnes corporis oſcillantis partes cum polo O in eodem ſitas eſſe plano, easque in eodem plano oſcillationes abſoluere; nihilo vero minus haec eadem regula valet, ſi vel omnes partes non in eodem plano fuerint poſitae, vel oſcillationes non in eo plano peragantur. His enim in caſibus non tantum polus ſeu punctum debet conſiderari, ſed axis ſeu linea horizontalis, circa quam oſcillationes abſoluuntur. Hic enim iterum quaeuis particula in quadratum diſtantiae ſuae ab axe eſt multiplicanda, et ſumma omnium factorum per factum ex tota oſcillantis corporis maſſa in diſtantiam centri grauitatis ipſius ab axe diuidenda, ex qua diuiſione ortus quotus dabit centrum oſcillationis ſeu potius longitudinem penduli iſochroni. Hinc inuenitur Theorema Hugenianum pro globo ex materia homogenea conſtante AB circa polum O oſcillante, Figura 4. quod ſcilicet centrum oſcillationis Z ſeu longitudo penduli ſimplicis iſochroni ſit $OZ = OC + \frac{2}{5}\frac{AC^2}{OC}$, exiſtente C centro globi.

§. 23. Dantur autem praeter motum oſcillatorium corporum rigidorum circa polum fixum, ex quo ſunt ſuſpenſa, infinita alia oſcillationum genera. Quorum vnicum ſatis notum, neque tamen a quoquam, quantum mihi conſtat expoſitum, hac methodo pertractabo, antequam ad corpora flexibilia progrediar. Conſtat autem hoc oſcillationum genus in motu reciproco curuarum vel corporum quorumque baſi conuexa ſuper plana ſuperficie vacillantium. Quem motum, ne cum motu oſcillatorio modo expoſito confundatur, vacillatorium appellari conuenit. In hoc motu vero notandum eſt pla-

planum, ſuper quo ſit, aliquantulum aſperum eſſe ponendum, ne curuae de loco ſuo inter vacillandum dimoueri queant, quod eueniret ſi planum maxime foret politum.

§. 24. Sit igitur BAD baſis ſeu ſectio verticalis corporis ſuper plano EF vacillantis, cuius in imo puncto A curuaturae radius ſit AC; in hocque ſitu ſit corpus in aequilibrio, atque M ſit particula quaecunque huius corporis. Quoniam vero in hoc ſitu BAD corpus ponitur eſſe in aequilibrio, erit eius centrum grauitatis in recta verticali AC ſitum. Quamobrem erit ſumma omnium factorum ex particulis M in diſtantias ipſarum MQ a verticali $AC = 0$, ſumtis nempe diſtantiis particularum ad alteram partem rectae AC poſitarum negatiuis, ſeu erit $\int M . MQ = 0$. Iam vacillet hoc corpus parumper, vt veniat in ſitum $b\alpha d$, in quo α eſt punctum contactus corporis cum plano EF et radius αc; quo motu punctum A in a perueniet, et M in m, ita vt ſit ang. $M\alpha m$ ſeu $MNm = Cac$ ſeu $AC\alpha$ atque elementum Mm normale erit ad rectam $M\alpha$ vel MA. Figura 5.

§. 25. Poſito nunc corpore BAD in ſitu bad, determinari debet vis id rurſus in ſtatum quietis BAD reſtituens, quae reperietur ſumendis omnibus momentis, quae ſingulae particulae M habent ad corpus circa α conuertendum. Momentum vero particulae M in m poſitae erit $M . p\alpha$ demiſſo ex m in EF perpendiculo mp. Cum autem ſit $CA : A\alpha = AM : Mm$; erit $Mm = \frac{AM . A\alpha}{CA}$; vnde

vnde erit $AM:PM = Mm:Pp$ seu $Pp = \frac{PM.A\alpha}{CA}$. Ex his fit $p\alpha = PA + A\alpha - Pp = PA + \frac{(CA-PM)A\alpha}{CA} = PA + \frac{CQ.A\alpha}{CA}$. Particulae ergo M momentum est $M.PA + \frac{M.CQ.A\alpha}{CA}$. Atque summa omnium momentorum erit $= \int M.PA + \int \frac{M.CQ.A\alpha}{CA} = \int \frac{M.CQ.A\alpha}{CA}$, quia $\int M.PA$ aequale est nihilo.

§. 26. Ponamus iam longitudinem penduli isochroni $= f$, erit vis punctum m in M sollicitans $= \frac{M.Mm}{f} = \frac{M.AM.A\alpha}{CA.f}$ huiusque vis momentum in $\alpha = \frac{M.AM^2.A\alpha}{CA.f}$. Omnium ergo horum momentorum summa erit $\int \frac{M.AM^2.A\alpha}{CA.f}$ seu $\frac{A\alpha}{CA.f}\int M.AM^2$, ob $A\alpha$, CA et f constantes quantitates. Haec vero momentorum summa aequalis esse debet summae momentorum inuentae $\int \frac{M.CQ.A\alpha}{CA}$ seu $\frac{A\alpha}{CA}\int M.CQ$, vnde habebitur ista aequatio $f\int M.CQ = \int M.AM^2$, ex qua fit $f = \frac{\int M.AM^2}{\int M.CQ}$, quae expressio dat longitudinem penduli simplicis isochroni, quod iisdem temporibus oscillationes absoluit, quibus corpus BAD super plano EF vacillationes peragit. Quocirca hinc tempus cuiusque vacillationis definire licet.

§. 27. In formula autem inuenta designat $\int M.CQ$ distantiam centri grauitatis corporis a C in massam totius corporis ductam. Si igitur G fuerit centrum grauitatis atque massa totius corporis ponatur C, erit longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{\int M.AM^2}{C.CG}$. Ponamus autem ad comparationem instituendam corpus in situ deorsum conuerso circa A oscillationes absoluere, erit longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{\int M.AM^2}{C.AG}$. Data ergo

hac

hac penduli longitudine per priorem regulam inuenta, quae sit F; erit $F.AG = f.CG$ atque $f = \frac{F.AG}{CG}$. Si igitur inuentae fuerint oscillationes corporis ex A suspensi, innotescent simul vacillationes super plano EF.

§. 28. Sit machina vacillans basin BAD habens omni materia destituta praeter vnicum pondusculum M in axe CA situm. Vacillante ergo hac machina super plano EF, erit londitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{AM^2}{CM}$. Vnius igitur vacillationis tempus erit vt $\frac{AM}{\sqrt{CM}}$. Atque quo dato tempore, eo scilicet quo pendulum simplex f oscillatur, vacillationes absoluantur, debet esse $AM^2 = f.AC - f.AM$. Quare inuenitur $AM = -\frac{1}{2}f + \sqrt{(\frac{1}{4}f^2 + f.AC)}$. Figura 6.

§. 29. Consideremus iam segmentum circulare BAD ex vniformi constans materia vacillare super recta EF. Ponatur $AC = a$; $AH = b$; $AP = x$, erit applicata $PM = \sqrt{(2ax - xx)}$. Iam in elemento $MPpm$, capiatur particula μ existente $P\mu = z$; erit ista particula $= dxdz$, quae ducta in $A\mu$ quadratum dat $dxdz(x^2 + z^2)$, cuius integrale posito x constante est $x^2zdx + \frac{z^3dx}{3}$. Fiat $z = \sqrt{(2ax - xx)}$, erit summa factorum ex singulis elementi mP particulis in quadrata distantiarum ab $A = dx(\frac{2ax}{3} + \frac{2xx}{3})\sqrt{(2ax - xx)}$, cuius duplum $\frac{4xdx}{3}(a + x)\sqrt{(2ax - xx)}$ respondebit toti elemento $MMmm$. Huius differentialis integrale denuo sumtum dat $3a^3\int dx \sqrt{(2ax - xx)} - (\frac{x + 3a}{3})(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}$. Ponatur $x = b$ prodibit $\int M.AM^2$ pro toto segmento $BAD = \frac{3a^3}{2}.BADB - a.BH^3 - \frac{1}{3}AH.BH^3$. Figura 7.

§. 30.

§. 30. Ad ſummam vero ipſarum M.CQ inueniendam, multiplicetur elementum $MMmm = 2dx\sqrt{(2ax - xx)}$ per $CP = a - x$, prodibit $2(a-x)dx\sqrt{(2ax - xx)}$, cuius integrale eſt $\frac{2}{3}(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}$ in quo ſi ponatur AP = AH, habebitur $\int M.CQ$ pro toto ſegmento $BAD = \frac{2}{3}BH^3$. Longitudo ergo penduli ſimplicis iſochroni erit $\frac{9a^2.BADB}{4BH^3} - \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}AH$. Si fiat ſegmentum hoc aequale ſemicirculo, fient $BH = a$, $AH = a$, poſitaque ratione inter diametrum et peripheriam $1:\pi$ erit area ſemicirculi $= \frac{\pi a^2}{2}$. Pro ſemicirculo ergo vacillante erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{9}{8}\pi a - 2a$, ſeu quam proxime $\frac{43}{28}a$. Semicirculus ergo radii 2061 ſcrup. ped. Rhenani ſingulis minutis ſecundis vacillationes abſoluet.

§. 31. Si tantum arcus circuli BAD materia vniformi conſtet, reperietur $\int M.AM^2 = 2a^2(BAD - BD)$; atque $\int M.CQ = a.BD$. Ergo longitudo penduli ſimplicis iſochroni erit $= \frac{2a.BAD}{BD} - 2a$. Aequetur arcus toti ſemiperipheriae erit longitudo penduli iſochroni $= a(\pi - 2) = \frac{8}{7}a$ quam proxime. Minore ergo tempore ſemiperipheria quam ſemicirculus vacillationes abſoluit. Ceterum in genere notari debet de his motibus reciprocis, centrum grauitatis ſemper infra centrum baſis C ſitum eſſe debere: nam ſi in ipſo centro C centrum grauitatis exiſtat, corpus ex ſtatu quietis deturbatum non reſtituetur, ſed quieſcet. At ſi ſupra C centrum grauitatis exiſtat corpus non ſolum non motu reciproco feretur, ſed penitus ſubuertetur.

§. 32.

§. 32. His de corporibus rigidis expositis pergo ad oscillationes corporum flexibilium, quae vel sunt perfecte flexibilia, vel ita comparata, vt ad ea flectenda vi sit opus, cuiusmodi corpora elastica vocantur. Ex quo intelligitur corpora perfecte flexibilia ex elasticis oriri, si vis elastica euanescat. De huiusmodi corporibus igitur, antequam eorum oscillationes possunt determinari, necesse est, vt figurae, quas inter oscillandum induunt, definiantur. Quod quo secundum in principio tradita principia fieri queat, ante necesse est, vt figura definiatur, quam huiusmodi corpus a quibuscunque potentiis sollicitatum induere debet, id quod prolixe satis in *Tom. III. Comment.* sum persecutus. Quamobrem breuitatis causa propositionem primariam ibi traditam hic repetam.

§. 33. Sit B*a* virga recta elastica in B fixa, quae tum a potentiis quibuscunque in singulis punctis applicatis, tum etiam a duobus ponderibus E et F in altero extremo termino A appensis induat figuram BMA, cuius naturam aequatione exponere oportet. Sumatur recta AC pro axe, in eaque abscissa AP $= x$, sitque applicata PM $= y$. Ponamus singulis punctis M duas potentias esse applicatas, quarum altera in directione verticali MP agat, altera in directione horizontali MQ. Sit summa omnium potentiarum verticalium singulis arcus AM punctis applicatarum P; et summa omnium horizontalium eidem arcui applicatarum Q. Praeterea sit vis *elastica* in M $=$ V. Cumque eadem vis elastica sit eo maior, quo magis virga curuatur, erit vis elastica in M vt V diuisum per radium osculi in M, quem po- Figura 8.

namus $=r$. His positis natura curuae BMA hac continebitur aequatione $\frac{V}{r} = Ex + Fy + \int P\,dx + \int Q\,dy$. Si ergo virga fuerit perfecte flexilis; euanescet V, ideoque haec aequatio $Ex + Fy + \int P\,dx + \int Q\,dy = 0$, dabit naturam curuae quaesitae.

Figura 9. §. 34. Sit funis perfecte flexilis Ba ex B suspensus, qui ad oscillationes minimas peragendas sit impulsus, ita vt in medio cuiusque oscillationis in situm Ba perueniat, ad quam legem quascunque oscillationes vt libet initio irregulares reduci experientia demonstrat. Sit nunc BMA figura, quam funis inter oscillandum induit, quae, quia infinite parum a verticali Ba declinat, erit Aa linea horizontalis, et arcus BMA $=$ Ba. Exponant applicatae Nm curuae DN crassities funis in respondentibus locis M. Ex A ducatur verticalis AP, voceturque $AP = x = am$, et $PM = y$ atque $Nm = q$. Erit ergo quam proxime arcus $AM = AP = x$, atque hinc pondus elementi arcus AM erit $= q\,dx$. Ponatur $Aa = b$, et $Mm = u$, erit $y = b - u$.

§. 35. Sit porro longitudo penduli simplicis isochroni $= f$; necesse est vt quaeuis particula M, quae est $q\,dx$ sollicitetur versus Mm vi, quae est $= \frac{qu\,dx}{f}$, est enim $Mm = u$ spatium particulae M percurrendum, quo in statum aequilibrii perueniat. Eundem igitur hae potentiae in singulis punctis applicatae effectum producent, quem vis grauitatis, qua singulae particulae funis deorsum vrgentur. Quamobrem si in singulis punctis M potentiae $\frac{qu\,dx}{f}$ versus contrariam plagam MP applicatae concipiancipiantur, funis BMA ab his potentiis et propria grauitate sollicitatus erit in aequilibrio. Cum autem P denotet summam omnium potentiarum MP, erit $P = \int \frac{qudx}{f}$. Pondus porro particulae M est $= qdx$ et secundum MQ tendit, quae directio illi, quam in generali propositione assumsimus est contraria; hanc ob rem erit $Q = -\int qdx$. E vero et F euanescent. Ex his inuenitur ista pro curua BMA aequatio $\int dx \int \frac{qudx}{f} = \int dy \int qdx$, seu $dx \int qudx = fdy \int qdx$, et posito dx constante, erit $qudx^2 = fddy \int qdx + fqdxdy$, in qua si loco y ponatur $b-u$ prodit $qudx^2 + fddu \int qdx + fqdxdu = 0$. Quae est aequatio pro curua AMB, ex qua longitudo f determinatur ex data funis longitudine Ba; quae si ponatur a, et ex aequatione quaeratur locus vbi $u = 0$; dabit valor ipsius x per f inuentus longitudinem a, vnde f per a inuenietur. Siue sumto M in A erit $\int qudx = Da.Aa.dx$ et $\int qdx = Da.dx$. Quibus positis erit in puncto A, $f = \frac{Aa.dx}{dy} =$ tangenti seu subtangenti curuae in A.

§. 36. Progredior nunc ad problema, quod mihi Cl. *Dan. Bernoulli* nuperrime proposuit, in quo oscillationes laminae elasticae muro verticali infixae et in plano horizontali oscillantis requirit. Sit igitur Ba virga seu lamina elastica in situ horizontali muro in B infixa, atque eiusdem vbique crassitiei. Induat ea inter oscillandum figuram BMA, sitque longitudo penduli simplicis isochroni $= f$. Debebit ergo esse vis, quae quoduis eius elementum M, quod est $= dx$, posito AP $= x$, secundum Mm vrget $= \frac{Mm.dx}{f}$. Quare si in quouis eius puncto Figura. 10.

 cto

cto M potentia $\frac{Mm.dx}{f}$ secundum directionem ipsi Mm contrariam MP concipiatur applicata, lamina elastica BMA in hoc situ erit in aequilibrio. Ponatur PM$=y$, A$a=b$, et M$m=b-y=u$; sitque radius osculi in M$=r$, et vis elastica absoluta $=$A seu constans; erit ergo V$=$A. Deinde quia grauitas laminae non in considerationem venit, erit Q$=0$, et P$=\frac{\int u\,dx}{f}$. Ex quibus pro curua BMA haec obtinetur aequatio $\frac{A}{r}=\int dx\int\frac{udx}{f}$. Posito autem dx constante est $r=\frac{-dx}{ddy}=\frac{dx^2}{ddu}$; quare erit A$ddu$ $=dx^2\int dx\int\frac{udx}{f}$ seu A$fd^4u=u\,dx^4$, quae est aequatio pro curua AMB.

§. 37. Ex hac autem aequatione differentiali quarti ordinis valde est difficile quicquam ad oscillationes laminarum elasticarum cognoscendas deriuare. Quia enim haec aequatio quadruplicem integrationem requirit, si in vnaquaque constans adiiciatur, tam innumerabiles prodibunt eae curuae, ad quas ea pertinet, vt quae illarum nostro exemplo conueniat, non sine summa circumspectione definiri queat. Obseruauit quidem *Cl. Dan. Bernoulli* in hac aequatione contineri istas B$d^2u=u\,dx^2$ et B$du=u\,dx$, quarum vero neutra hic locum habere potest. Quod quidem ad quatuor illas constantes in totidem integrationibus addendas attinet, earum tres ex his conditionibus determinantur, quod posito $x=0$, fieri debeat $u=b$; simulque et $\int u\,dx=0$ et $\int dx\int u\,dx=0$; quarta vero constans tamen manet indeterminata. Eam autem ex hac conditione definiri debere tandem intellexi, quod in puncto B, vbi fit $u=0$, tangens in ipsam rectam

rectam Ba debeat incidere, id quod natura elateris, qui non nisi a potentia infinita ad angulum finitum inflecti potest, postulat.

§. 38. Quo igitur melius curuae BMA natura cognoscatur, sumo aequationem $A f\, dd\acute{u} = dx^2 \int dx \int u\, dx$ eamque in seriem transmuto tribus primo memoratis conditionibus satisfaciendo. Methodo autem ad hoc faciendum satis consueta adeptus sum hanc aequationem $u = b - Cx + \frac{bx^4}{1.2.3.4\, Af} - \frac{Cx^5}{1.2.3.4.5\, Af} + \frac{bx^8}{1.2 \cdots 8\, A^2 f^2} - \frac{Cx^9}{1.2.3 \cdots 9\, A^2 f^2}$ + etc. quae series ex duabus satis regularibus est conflata. In ea vero inest noua indeterminata constans C, quae ex quarta conditione debet definiri. Pono ergo $Ba = a$, positoque $x = a$, euanescere debet u. Quocirca prodibit ista aequatio $o = b - Ca + \frac{ba^4}{1.2.3.4.\, Af} - \frac{Ca^5}{1.2.3.4.5.\, Af}$ + etc. ex qua prodit

$$C = \frac{b + \frac{ba^4}{1.2.3.4\, Af} + \frac{ba^8}{1.2.3 \cdots 8\, A^2 f^2}}{a + \frac{a^5}{1.2.3.4.5\, Af} + \frac{a^9}{1.2.3 \cdots 9\, A^2 f^2}}$$

Cum vero etiam $\frac{du}{dx}$ debeat esse $= o$ si $x = a$; erit $o = - C + \frac{ba^3}{1.2.3\, Af} - \frac{Ca^4}{1.2.3.4\, A^2 f^2}$ + etc. seu

$$C = \frac{\frac{ba^3}{1.2.3.\, Af} + \frac{ba^7}{1.2 \cdots 7\, A^2 f^2} - \frac{ba^{11}}{1.2 \cdots 11.\, A^3 f^3}}{1 + \frac{a^4}{1.2.3.4.\, Af} + \frac{a^8}{1.2 \cdots 8\, A^2 f^2} + \text{etc.}}$$

§. 39. His duabus inuentis aequationibus coniungendis et loco numeralium coefficientium litteris α, β, γ, etc. ponendis prodibit ista aequatio: $o = 1 + \frac{\alpha a^4}{Af} + \frac{\beta a^8}{A^2 f^2} + \frac{\gamma a^{12}}{A^3 f^3}$ + etc. in qua C non amplius inest. Ex hac aequatione pro f valor huiusmodi erit formae $\frac{N a^4}{A}$ denotante N numerum quempiam constantem, qui est circiter

citer $= \frac{2}{25}$, ita vt longitudo penduli ſimplicis iſochroni ſit vt $\frac{\alpha a^4}{A}$. *Pro variis ergo laminis elaſticis eiusdem vbique craſſitiei oſcillantibus erunt longitudines pendulorum ſimplicium iſochronorum in ratione compoſita ex directa quadruplicata longitudinum laminarum, et reciproca ſimplici elaſticitatum abſolutarum. Tempora vero ſingularum oſcillationum erunt directe vt quadrata longitudinum laminarum et inuerſe vt radices quadratae ex elaſticitatibus abſolutis.* Tempora igitur oſcillationum laminarum aequali elaſticitate praeditarum ſunt in duplicata ratione longitudinum laminarum.

§. 40. Sin autem duae laminae ex materiis diuerſae elaſticitatis aequales fabricentur, eaeque parieti firmo infigantur, tum tempora oſcillationum illarum erunt in ratione reciproca ſubduplicata elaſticitatum, quia longitudines ponuntur aequales. Quamobrem numeri oſcillationum, quas iſtae laminae dato tempore puta vno minuto edunt, erunt directe vt radices quadratae ex elaſticitatibus. Hoc igitur modo diuerſarum materiarum elaſticitates explorari poterunt, quod tum in Phyſica, tum in vita communi non parum vtilitatis habebit. Hinc enim inueſtigari poterit, quanto alia chalybis ſpecies ſit alia magis elaſtica; atque etiam elaſticitates diuerſorum metallorum inter ſe comparari poterunt. Ad hoc accedit, quod haec methodus admodum ſit facilis, et ſola oſcillationum numeratione perficiatur. Ne autem oſcillationes nimis fiant celeres, oportet vt laminae ſatis ſint magnae ſeu longae; de quo quidem obſeruaui ſufficere poſſe, ſi earum longitudo ſit duorum circiter pedum.

§. 41.

§. 41. In hoc negotio vel lamina grauitatis expers ponitur, vel ita est parieti firmo infigenda, vt grauitas oscillatorium motum nihil afficiat, id quod obtinetur, si horizontaliter muro infigatur, atque satis sit lata, ne a grauitate deorsum incuruari queat. Nunc vero quoque laminam elasticam grauem contemplabimur, eamque pauimento firmo verticaliter in B infixam ponemus, ita vt ea ex B dependens oscillationes perficiat. Sit ergo BMA curua, quam haec lamina inter oscillandum format, in qua vt ante pono $Aa = b$, $AP = am = AM = x$, $PM = y$, $Mm = u$, radium osculi in $M = r$ atque vim elasticam in $M = \frac{A}{r}$. Sit f longitudo penduli simplicis isochroni, erit vis, qua quoduis elementum dx per Mm vrgeri debet $= \frac{udx}{f}$, quae ergo vis si in directione contraria MP applicata concipiatur, tota lamina in situ BMA erit in aequilibrio. His ergo cum generali propositione comparatis est $P = \int \frac{udx}{f}$, $Q = -\alpha \int dx = -\alpha x$, et E et $F = 0$. Prodibit ergo pro curua BMA ista aequatio $\frac{A}{r} = \int dx \int \frac{udx}{f} - \alpha \int x dy$ seu $\frac{A ddu}{dx^2} = \int dx \int \frac{udx}{f} + \alpha \int x du$, quae abit in $f A d^4 u = u dx^4 + \alpha f dx^3 du + \alpha f x dx^2 ddu$, quam autem vlterius non persequor.

§. 42. His de oscillationibus funium perfecte flexibilium et laminarum elasticarum vnico puncto fixarum expositis ad oscillationes eorundem corporum inuestigandas progredior, si in duobus punctis fuerint fixae, quorsum pertinent motus vibratorii chordarum tensarum tam perfecte flexibilium quam elasticarum. Ac primo quidem sit BPA chorda perfecte flexibilis in B fixa, in A vero Figura 11.

vero tensa pondere F ope fili AC. In A vero chorda vel per foraminulum transit vel ponticulo superiacet, ne vibrationes vltra A versus B propagentur. Huius ergo loco pondus E concipio, quo chordae punctum A semper in hoc loco retineatur. Sit itaque BMA figura, quam chorda inter oscillandum induit, voceturque $AP = x$, cui et AM ob interuallum PM valde paruum aequatur, et $PM = y$, sitque pondusculum seu massa elementi chordae in $M = g\,dx$, pono enim chordam aequabilis crassitiei.

§. 43. Sit porro longitudo penduli simplicis isochroni f, erit vis, qua quoduis elementum $g\,dx$ ex M versus P per MP vrgetur $= \frac{gy\,dx}{f}$. Huic ergo vi, si aequalis in directione contraria applicata concipiatur, chorda BMA erit in aequilibrio. Chordam praeterea ipsam grauitatis expertem pono. Hoc ergo casu ad propositionem generalem accommodato erit $P = -\int \frac{gy\,dx}{f} = \frac{-g}{f} \int y\,dx$, $E = E$, atque $F = -F$ ac $Q = 0$. Ex quibus pro curua AMB haec prouenit aequatio $Ex = Fy - \frac{g}{f} \int dx \int y\,dx = 0$, quae bis differentiata dat $Ff\,ddy + gy\,dx^2 = 0$ posito dx constante. Huius aequationis in dy ductae integralis est $Ff\,dy^2 + gy^2\,dx^2 = gb^2\,dx^2$ posita b maxima chordae a recta AB declinatione ef, vbi est $dy = 0$. Hanc ob rem erit $dx = \frac{dy\sqrt{Ff}}{\sqrt{g(b^2 - y^2)}}$, atque $x = \frac{\sqrt{Ff}}{b\sqrt{g}} \times$ in arcum circuli cuius sinus est y existente sinu toto $= b$.

§. 44. Sit tota chordae longitudo $AB = a$, quae ex aequatione inuenta prodire debet, si y altera vice euanescere ponatur. Hoc vero euenit, si arcus ille circuli

aequa-

aequalis fit femiperipheriae, quo facto erit $x = a$. Sit ergo $1 : \pi$ ratio diametri ad peripheriam erit πb femiperipheria circuli radii b. Quamobrem erit $a = \frac{\pi \sqrt{Ff}}{\sqrt{g}}$ feu $\sqrt{f} = \frac{a\sqrt{g}}{\pi\sqrt{F}}$ atque $f = \frac{ga^2}{\pi^2 F}$, quae eft longitudo penduli fimplicis ifochroni, in qua F pondus chordam tendens, a longitudinem chordae, et ga feu $\int g dx$ pondus feu maffam chordae fignificat. Sit autem pondus chordae $= p$ erit $f = \frac{ap}{\pi^2 F}$. Singularum igitur vibrationum tempora erunt in ratione compofita fubduplicata ex directis longitudinum et ponderum chordarum et ex inuerfa ponderum chordas tendentium.

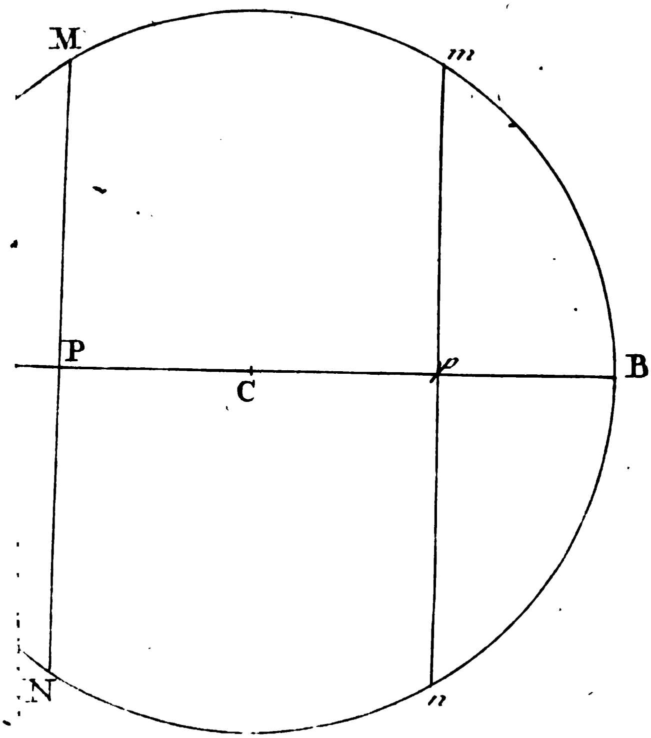
§. 45. Quo autem appareat, quot ofcillationes chorda dato tempore fcilicet minuto fecundo edat; confiderari debet longitudo penduli fimplicis fingulis minutis fecundis ofcillantis quae eft 3,166 ped. Rh. Erit ergo vnum minutum fecundum ad tempus vnius chordae vibrationis vt $\sqrt{3,166} : \frac{\sqrt{ap}}{\pi\sqrt{F}}$, ex quo numerus vibrationum minuto fecundo editarum eft $\frac{\pi\sqrt{3,166F}}{\sqrt{ap}}$, feu $\frac{\pi\sqrt{3166F}}{\sqrt{ap}}$, fi a in partibus millefimis pedis Rhenani exprimatur. Pofito vero loco π eius valore, erit ifte vibrationum numerus $= \frac{\sqrt{31250F}}{\sqrt{ap}} = \frac{125\sqrt{2F}}{\sqrt{ap}}$, vbi 15625 fcrup. denotant altitudinem, quam graue defcendendo minuto fecundo abfoluit.

§. 46. Haec eft ea ipfa regula pro inueniendo vibrationum numero tempore vnius minuti fecundi edito a data chorda tenfa, quam primum *Cl. Taylor* in Methodo Incrementorum, et *Cl. Ioh. Bernoulli* in Comment. noftris dederunt, ex longe diuerfis principiis petitam. Habet autem haec regula magnam vtilitatem in Mufica et acuftica, ad fonos, quos quaeuis chorda edit, determiterminandos, ſunt enim ſoni inter ſe vti vibrationum dato tempore editarum numeri. Ex hac porro regula, ſi habeatur menſura fixa ſcilicet pedis Rhenani, qui vbi vis locorum ope pendulorum inueniri poteſt, ſoni fixi determinari poterunt, dum chorda ita adaptatur, vt datum minuto ſecundo vibrationum numerum edat. Ope huius regulae inueni in inſtrumentis muſicis, quae ad tonum choralem attemperata ſunt, chordam infimam littera C notatum minuto ſecundo 118 edere vibrationes; ſummam vero, quae $\bar{\bar{c}}$ ſignari ſolet, eodem tempore vibrationes 1888 abſoluere.

§. 47. Ponuntur quidem hic chordae perfecte flexibiles, quod autem in chordas aeneas et chalybeas minus competere videtur. At cum huiusmodi chordae ſint admodum flexibiles, quin etiam laxae ſponte ſeſe inflectant, merito dubitari licet, num elaſticitas in computum ſit ducenda, ſi quidem chordae fuerint admodum tenues, vti in inſtrumentis adhiberi ſolent. Sin autem chordae admodum craſſae fuerint, vt etiam non tenſae ſint in directum ſitae, atque ad eas tantum inflectendas vis requiratur, tum vtique vis elaſtica in calculum duci debebit. Huc ſcilicet pertinent vibrationes bacillorum metallicorum vel etiam ligneorum ſuis extremitatibus ponticulis impoſitorum, qui impulſi, etiamſi non ſint tenſi, ſola vi elaſticitatis ſonos edunt. Si igitur in his elaſticitas fuerit $=\frac{A}{r}$, vt ſupra poſuimus, atque bacillus AB inter oſcillandum induat curuam AMB, pro qua ponatur $AP=x$, $PM=y$, erit $\frac{A}{r}=-\frac{g}{f}\int dx\int y\,dx$ ſeu $Afddy+gdx^2\int dx\int y\,dx=0$, quae aequatio fere conuenit cum ea, quam pro lamina elaſtica oſcillante inuenimus, ſed modo alio huic caſui eſt accommodanda.

Figura 12.

DE


M
m
P
C
p
B
N
n

DE SVMMIS SERIERVM RECIPROCARVM.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tantopere iam pertractatae et inuestigatae sunt series reciprocae potestatum numerorum naturalium, vt vix probabile videatur de iis noui quicquam inueniri posse. Quicunque enim de summis serierum meditati sunt, ii fere omnes quoque in summas huiusmodi serierum inquisiuerunt, neque tamen vlla methodo eas idoneo modo exprimere potuerunt. Ego etiam iam saepius, cum varias summandi methodos tradidissem, has series diligenter sum persecutus, neque tamen quicquam aliud sum assecutus, nisi vt earum summam vel proxime veram definiuerim vel ad quadraturas curuarum maxime transcendentium reduxerim; quorum illud in dissertatione proxime praelecta, hoc vero in praecedentibus praestiti. Loquor hic autem de seriebus fractionum, quarum numeratores sunt 1, denominatores vero vel quadrata, vel cubi, vel aliae dignitates numerorum naturalium; cuius modi sunt $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ etc., item $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+$ etc. atque similes superiorum potestatum, quarum termini generales continentur in hac forma $\frac{1}{x^n}$. Tabula VII.

Q 2 §. 2.

§. 2. Deductus sum autem nuper omnino inopinato ad elegantem summae huius seriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$ expressionem, quae a circuli quadratura pendet, ita, vt si huius seriei vera summa haberetur, inde simul circuli quadratura sequeretur. Inueni enim summae huius seriei sextuplum aequale esse quadrato peripheriae circuli, cuius diameter est 1; seu posita istius seriei summa $= s$, tenebit $\sqrt{6s}$ ad 1 rationem peripheriae ad diametrum. Huius autem seriei summam nuper ostendi proxime esse 1, 6449340668482264364, ex cuius numeri sextuplo, si extrahatur radix quadrata, reipsa prodit numerus 3, 14159265358979 3238 exprimens circuli peripheriam, cuius diameter est 1. Iisdam porro vestigiis, quibus hanc summam sum consecutus, incedens huius seriei $1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \frac{1}{625} + \text{etc.}$ summam quoque a quadratura circuli pendere deprehendi. Summa nempe eius per 90 multiplicata dat biquadratum peripheriae circuli, cuius diameter est 1. Atque simili ratione etiam sequentium serierum, in quibus exponentes dignitatum sunt numeri pares, summas determinare potui.

§. 3. Quo igitur, quemadmodum haec sum adeptus, commodissime ostendam; totam rem, quo ipse vsus sum, ordine exponam. In circulo AMBNA centro C Figura 1. radio AC vel BC $= 1$ descripto contemplatus sum arcum quemcunque AM, cuius sinus est MP, cosinus vero CP. Posito nunc arcu AM $= s$, sinu PM $= y$, et cosinu CP $= x$, per methodum iam satis cognitam tam sinus y quam cosinus x ex dato arcu s per series possunt

ſunt definiri, eſt enim, vti paſſim videre licet $y = s - \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \frac{s^7}{1.2.3.4.5.6.7} +$ etc. atque $x = 1 - \frac{s^2}{1.2} + \frac{s^4}{1.2.3.4} - \frac{s^6}{1.2.3.4.5.6} +$ etc. Ex harum ſcilicet aequationum conſideratione ad ſummas ſupra memoratarum ſerierum reciprocarum perueni; quarum aequationum quidem vtraque ad eundem fere ſcopum dirigitur, et hanc ob rem ſufficiet alteram tantum eo, quem ſum expoſiturus, modo tractaſſe.

§. 4. Aequatio ergo prior $y = s - \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \frac{s^7}{1.2.3.4.5.6.7} +$ etc. exprimit relationem inter arcum et ſinum. Quare ex ea tam ex dato arcu eius ſinus, quam ex dato ſinu eius arcus determinari poterit. Conſidero autem ſinum y tanquam datum, et inueſtigo, quemadmodum arcum s ex y erui oporteat. Hic vero ante omnia animaduertendum eſt, eidem ſinui y innumerabiles arcus reſpondere, quos ergo innumerabiles arcus aequatio propoſita praebere debebit. Si quidem in iſta aequatione s tanquam incognita ſpectetur, ea infinitas habet dimenſiones, ideoque mirum non eſt, ſi iſta aequatio innumeros contineat factores ſimplices, quorum quisque nihilo aequalis poſitus, idoneum pro s valorem dare debet.

§. 5. Quemadmodum autem, ſi omnes factores huius aequationis cogniti eſſent, omnes quoque radices illius ſeu valores ipſius s innoteſcerent, ita viciſſim ſi omnes valores ipſius s aſſignari poterunt, tum quoque ipſi factores omnes habebuntur. Quo autem eo melius tam de radicibus quam de factoribus iudicare queam, transmuto aequationem propositam in hanc formam: $0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1.2.3.y} - \frac{s^5}{1.2.3.4.5.y} +$ etc. Si nunc omnes radices huius aequationis seu omnes arcus, quorum idem est sinus y, fuerint A, B, C, D, E etc. tum factores quoque erunt omnes istae quantitates, $1 - \frac{s}{A}$, $1 - \frac{s}{B}$, $1 - \frac{s}{C}$, $1 - \frac{s}{D}$ etc. Quamobrem erit $1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1.2.3.y} - \frac{s^5}{1.2.3.4.5.y} +$ etc. $= (1 - \frac{s}{A})(1 - \frac{s}{B})(1 - \frac{s}{C})(1 - \frac{s}{D})$ etc.

§. 6. Ex natura autem et resolutione aequationum constat, esse coëfficientem termini, in quo inest s, seu $\frac{1}{y}$ aequalem summae omnium coëfficientium ipsius s in factoribus seu $\frac{1}{y} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} +$ etc. Deinde est coëfficiens ipsius s^2, qui est $= 0$, ob hunc terminum in aequatione deficientem, aequalis aggregato factorum ex binis terminis seriei, $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}$ etc. Porro erit $- \frac{1}{1.2.3.y}$ aequale aggregato factorum ex quaternis terminis eiusdem seriei $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}$ etc. Similique modo erit $0 =$ aggregato factorum ex quaternis terminis eiusdem seriei, et $+ \frac{1}{1.2.3.4.5.y} =$ aggregato factorum ex quinis terminis istius seriei, et ita porro.

§. 7. Posito autem minimo arcu $AM = A$, cuius sinus est $PM = y$, et semiperipheria circuli $= p$, erunt $A, p-A, 2p+A, 3p-A, 4p+A, 5p-A, 6p+A$ etc. item $-p-A, -2p+A, -3p-A, -4p+A, -5p-A$, etc. omnes arcus, quorum sinus est idem y. Quam igitur ante assumsimus seriem $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}$, etc. ea transmutatur in hanc $\frac{1}{A}, \frac{1}{p-A}, \frac{1}{-p-A}, \frac{1}{2p+A}, \frac{1}{-2p+A}, \frac{1}{3p-A}, \frac{1}{-3p-A}, \frac{1}{4p+A}, \frac{1}{-4p+A}$ etc. Horum ergo omnium termi-

terminorum summa est $=\frac{1}{y}$; summa autem factorum ex binis terminis huius seriei est aequalis 0; summa factorum ex ternis $=\frac{-1}{1.2.3.y}$, summa factorum ex quaternis $=0$; summa factorum ex quinis $=\frac{+1}{1.2.3.4.5.y}$; summa factorum ex senis $=0$. Atque ita porro.

§. 8. Si autem habeatur series quaecunque $a+b+c+d+e+f+$ etc. cuius summa sit α, summa factorum ex binis terminis $=\beta$; summa factorum ex ternis $=\gamma$; summa factorum ex quaternis $=\delta$, etc. erit summa quadratorum singulorum terminorum, hoc est $a^2+b^2+c^2+d^2+$ etc. $=\alpha^2-2\beta$; summa vero cuborum $a^3+b^3+c^3+d^3$ etc. $=\alpha^3-3\alpha\beta+3\gamma$; summa biquadratorum $=\alpha^4-4\alpha^2\beta+4\alpha\gamma+2\beta^2-4\delta$. Quo autem clarius appareat, quomodo hae formulae progrediantur, ponamus ipsorum terminorum a, b, c, d, etc. summam esse $=P$, summam quadratorum $=Q$, summam cuborum $=R$, summam biquadratorum $=S$, summam potestatum quintarum $=T$, summam sextarum $=V$ etc. His positis erit $P=\alpha$; $Q=P\alpha-2\beta$; $R=Q\alpha-P\beta+3\gamma$; $S=R\alpha-Q\beta+P\gamma+4\delta$; $T=S\alpha-R\beta+Q\gamma-P\delta+5\varepsilon$; etc.

§. 9. Cum igitur in nostro casu seriei $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{p-A}$, $\frac{1}{-p-A}$, $\frac{1}{2p+A}$, $\frac{1}{-2p+A}$, $\frac{1}{3p-A}$, $\frac{1}{-3p-A}$ etc. summa omnium terminorum seu α sit $=\frac{1}{y}$; summa factorum ex binis seu $\beta=0$, atque vlterius $\gamma=\frac{-1}{1.2.3.y}$; $\delta=0$; $\varepsilon=\frac{+1}{1.2.3.4.5.y}$, $\zeta=0$; etc. erit summa ipsorum illorum terminorum $P=\frac{1}{y}$; summa quadratorum illorum terminorum $Q=\frac{P}{y}=\frac{1}{y^2}$;

summa

summa cuborum illorum terminorum $R = \frac{Q}{y} - \frac{1}{1.2.y}$; summa biquadratorum $S = \frac{R}{y} - \frac{P}{1.2.3.y}$. Atque porro $T = \frac{S}{y} - \frac{Q}{1.2.3.y} + \frac{1}{1.2.3.4.y}$; $V = \frac{T}{y} - \frac{R}{1.2.3.y} + \frac{P}{1.2.3.4.5.y}$; $W = \frac{V}{y} - \frac{S}{1.2.3.y} + \frac{Q}{1.2.3.4.5y} - \frac{1}{1.2.3.4.5.6\,y}$. Ex qua lege facile reliquarum altiorum potestatum summae determinantur.

§. 10. Ponamus nunc sinum $PM = y$ aequalem radio, vt sit $y = 1$, erit minimus arcus A cuius sinus est 1 quarta peripheriae pars, $= \frac{1}{2}p$, seu denotante q quartam peripheriae partem erit $A = q$ et $p = 2q$. Superior ergo series abibit in istam $\frac{1}{q}, \frac{1}{q}, \frac{-1}{3q}, -\frac{1}{3q}, \frac{+1}{5q}, +\frac{1}{5q}, -\frac{1}{7q}, -\frac{1}{7q}, +\frac{1}{9q}, +\frac{1}{9q}$, etc. binis terminis existentibus aequalibus. Horum ergo terminorum summa, quae est $\frac{2}{q}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.})$ aequalis est ipsi $P = 1$. Hinc igitur oritur $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.} = \frac{q}{2} = \frac{p}{4}$. Huius ergo seriei quadruplum aequatur semiperipheriae circuli, cuius radius est 1, seu toti peripheriae circuli, cuius diameter est 1. Atque haec est ipsa series a *Leibnitio* iam pridem prolata, qua circuli quadraturam definiuit. Ex quo magnum huius methodi, si cui forte ea non satis certa videatur, firmamentum elucet; ita vt de reliquis, quae ex hac methodo deriuabantur, omnino non liceat dubitari.

§. 11. Sumamus nunc inuentorum terminorum pro casu quo $y = 1$, quadrata, prodibitque haec series $+\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{9q^2} + \frac{1}{9q^2} + \frac{1}{25q^2} + \frac{1}{25q^2} + \text{etc.}$ cuius summa est $\frac{2}{q^2}(\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.})$, quae ergo aequalis esse debet ipsi $Q = P = 1$. Ex quo sequitur huius seriei $1 + \frac{1}{9}$

+

$+ \frac{1}{25} + \frac{1}{49} +$ etc. summam esse $= \frac{q^2}{2} = \frac{p^2}{8}$; denotante p totam circuli peripheriam, cuius diameter est $= 1$. Summa autem huius seriei $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} +$ etc. pendet a summa seriei $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} +$ etc. quia haec quarta sui parte minuta illam dat. Est ergo summa huius seriei aequalis summae illius cum sui triente. Quamobrem erit $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} +$ etc. $= \frac{p^2}{6}$, ideoque huius seriei summa per 6 multiplicata aequalis est quadrato peripheriae circuli cuius diameter est 1; quae est ipsa propositio cuius initio mentionem feci.

§. 12. Cum igitur casu quo $y = 1$, sit $P = 1$ et $Q = 1$, erunt reliquarum litterarum R, S, T, V etc. vt sequitur: $R = \frac{1}{2}$; $S = \frac{1}{3}$; $T = \frac{5}{24}$; $V = \frac{2}{15}$; $W = \frac{61}{720}$; $X = \frac{17}{315}$ etc. Cum autem summa cuborum ipsi $R = \frac{1}{2}$ sit aequalis, erit $\frac{2}{q^3}(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} -$ etc.$) = \frac{1}{2}$. Quare erit $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} -$ etc. $= \frac{q^3}{4} = \frac{p^3}{32}$. Huius ideo seriei summa per 32 multiplicata dat cubum peripheriae circuli cuius diameter est 1. Simili modo summa biquadratorum, quae est $\frac{2}{p^4}(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} +$ etc.$)$ aequalis esse debet $\frac{1}{3}$, ideoque erit $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} +$ etc. $= \frac{q^4}{6} = \frac{p^4}{96}$. Est vero haec series per $\frac{16}{15}$ multiplicata aequalis huic $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} +$ etc. quare ista series aequalis est $\frac{p^4}{90}$; seu seriei $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} +$ etc. summa per 90 multiplicata dat biquadratum peripheriae circuli cuius diameter est 1.

§. 13. Simili modo inuenientur summae superiorum potestatum; prodibit autem vt sequitur $1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} -$ etc. $= \frac{5q^5}{48} = \frac{5p^5}{1536}$; atque $1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6}$

$+$ etc

$+$ etc. $= \frac{q^6}{15} = \frac{p^6}{960}$. Inuenta vero huius ſeriei ſumma, cognoſcetur ſimul ſumma huius ſeriei $1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} +$ etc. quae erit $= \frac{p^6}{945}$. Porro pro poteſtatibus ſeptimis erit $1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} -$ etc. $= \frac{61 q^7}{1440} = \frac{61 p^7}{184320}$ ac pro octauis $1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} +$ etc. $= \frac{17 q^8}{630} = \frac{17 p^8}{161280}$; vnde deducitur $1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} +$ etc. $= \frac{p^8}{9450}$. Obſeruandum autem eſt de his ſeriebus in potentiis exponentium imparium ſigna terminorum alternari, pro poteſtatibus paribus vero eſſe aequalia; hocque in cauſa eſt, quod huius generalis ſeriei $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} +$ etc. iis tantum caſibus ſumma poſſit exhiberi, quibus n eſt numerus par. Praeterea quoque notandum eſt, ſi ſeriei $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{24}, \frac{2}{15}, \frac{61}{720}, \frac{17}{315}$ etc. quos valores pro litteris P, Q, R, S etc. inuenimus, terminus generalis poſſet aſſignari, tum eo ipſo quadraturam circuli exhibitum iri.

§. 14. In his poſuimus ſinum PM aequalem radio, videamus ergo quales ſeries prodeant, ſi ipſi y alii valores tribuantur. Sit igitur $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, cui ſinui minimus arcus reſpondens eſt $\frac{1}{4}p$. Poſito ergo $A = \frac{1}{4}p$ erit ſeries terminorum ſimplicium ſeu primae poteſtatis iſta $\frac{4}{p} + \frac{4}{3p} - \frac{4}{5p} - \frac{4}{7p} + \frac{4}{9p} + \frac{4}{11p} -$ etc. cuius ſeriei ſumma P aequalis eſt $\frac{1}{y} = \sqrt{2}$. Habebitur ergo $\frac{p}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ $\frac{1}{13} - \frac{1}{15}$ etc. quae ſeries tantum ratione ſignorum a *Leibnitiana* differt, et a *Newtono* iam dudum eſt prolata. Summa vero quadratorum illorum terminorum nempe $\frac{16}{p^2}$ $(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} +$ etc.$)$ aequalis eſt ipſi $Q = 2$. Erit ergo

ergo $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+$ etc. $=\frac{p^2}{8}$, vti ante eſt inuentum.

§. 3. Si fiat $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ erit minimus arcus huic ſinui reſpondens 60°, ideoque $A=\frac{1}{3}p$. Hoc ergo caſu ſequens prodibit ſeries terminorum $\frac{3}{p}+\frac{3}{2p}-\frac{3}{4p}-\frac{3}{5p}+\frac{3}{7p}+\frac{3}{8p}$ etc. quorum terminorum ſumma aequalis eſt ipſi $\frac{1}{y}=\frac{2}{\sqrt{3}}$. Habebitur ergo $\frac{2p}{3\sqrt{3}}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+$ etc. Summa vero quadratorum illorum terminorum eſt $=\frac{1}{y^2}=\frac{4}{3}$; vnde ſequitur fore $\frac{4p^2}{27}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+$ etc. in qua ſerie deſunt termini ternario conſtantes. Pendet autem haec ſeries quoque ab iſta $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}$ etc. cuius ſumma erat inuenta $=\frac{p^2}{6}$; nam ſi haec ſeries ſui parte nona minuatur prodit ipſa ſuperior ſeries, cuius ideo ſumma debet eſſe $=\frac{p^2}{6}(1-\frac{1}{9})=\frac{4pp}{27}$. Simili modo ſi alii aſſumantur ſinus, aliae prodibunt ſeries, tam ſimplicium, quam terminorum quadratorum altiorumque poteſtatum, quarum ſummae quadraturam circuli inuoluent.

§. 16. At ſi ponatur $y=0$, huiusmodi ſeries non amplius aſſignari poterunt, propter y in denominatorem poſitum, ſeu aequationem initialem per y diuiſam. Alio autem modo ſeries inde deduci poterunt, quae cum ſint ipſae ſeries $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+$ etc. ſi n eſt numerus par: quemadmodum harum ſerierum ſummae ſint inueniendae, ſeorſum ex hoc caſu quo $y=0$ deducam. Poſito vero $y=0$ ipſa aequatio fundamentalis abit in hanc $0=s-\frac{s^3}{1.2.3}+\frac{s^5}{1.2.3.4.5}-\frac{s^7}{1.2.3.4.5.6.7}+$ etc. cuius aequationis radices dant omnes arcus, quorum ſinus eſt $=0$.

Eſt autem vna minimaque radix $s = 0$, quare aequatio per s diuiſa exhibebit reliquos arcus omnes, quorum ſinus eſt $= 0$, qui arcus proinde erunt radices huius aequationis $0 = 1 - \frac{s^2}{1.2.3} + \frac{s^4}{1.2.3.4.5} - \frac{s^6}{1.2.3.4.5.6.7} +$ etc. Ipſi vero arcus quorum ſinus eſt $= 0$ ſunt $p, -p, +2p, -2p, 3p, -3p$ etc. quorum binorum alter alterius eſt negatiuus, id quod quoque ipſa aequatio propter dimenſiones ipſius s tantum pares indicat. Quare diuiſores illius aequationis erunt $1 - \frac{s}{p}$, $1 + \frac{s}{p}$, $1 - \frac{s}{2p}$, $1 + \frac{s}{2p}$, etc. atque coniungendis binis horum diuiſorum erit $1 - \frac{s^2}{1.2.3} + \frac{s^4}{1.2.3.4.5} - \frac{s^6}{1.2.3.4.5.6.7} +$ etc. $= (1 - \frac{s^2}{p^2})(1 - \frac{s^2}{4p^2})(1 - \frac{s^2}{9p^2})(1 - \frac{s^2}{16p^2})$ etc.

§. 17. Manifeſtum iam eſt ex natura aequationum, fore coefficientem ipſius ss ſeu $\frac{1}{1.2.3}$ aequalem $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{4p^2} + \frac{1}{9p^2} + \frac{1}{16p^2} +$ etc. Summa vero factorum ex binis terminis huius ſeriei erit $= \frac{1}{1.2.3.4.5}$; ſummaque factorum ex ternis $= \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$ etc. Hanc ob rem erit iuxta §. 8. $\alpha = \frac{1}{1.2.3}$; $\beta = \frac{1}{1.2.3.4.5}$; $\gamma = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$; etc. atque poſita quoque ſumma terminorum $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{4p^2} + \frac{1}{9p^2} + \frac{1}{16p^2} +$ etc. $= P$, et ſumma quadratorum eorundem terminorum $= Q$; ſumma cuborum $= R$; ſumma biquadratorum $= S$; etc. erit per §. 8. $P = \alpha = \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{6}$; $Q = P\alpha - 2\beta = \frac{1}{90}$; $R = Q\alpha - P\beta + 3\gamma = \frac{1}{945}$; $S = R\alpha - Q\beta + P\gamma - 4\delta = \frac{1}{9450}$; $T = S\alpha - R\beta + Q\gamma - P\delta + 5\varepsilon = \frac{1}{93555}$; $V = T\alpha - S\beta + R\gamma - Q\delta + P\varepsilon - 6\zeta = \frac{691}{6825.93555}$ etc.

§. 18. Ex his ergo deriuantur summae sequentes:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\text{ etc. }=\frac{p^2}{6}=P$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}\text{ etc. }=\frac{p^4}{90}=Q$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}\text{ etc. }=\frac{p^6}{945}=R$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}\text{ etc. }=\frac{p^8}{9450}=S$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}\text{ etc. }=\frac{p^{10}}{93555}=T$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}\text{ etc. }=\frac{691p^{12}}{6825.93555}=V.$$

quae series ex data lege attamen multo labore ad altiores potestates produci possunt. Diuidendis autem singulis seriebus per praecedentes orientur sequentes aequationes: $p^2=6P=\frac{15Q}{P}=\frac{21R}{2Q}=\frac{10S}{R}=\frac{99T}{10S}=\frac{6825V}{691T}$ etc. quibus expressionibus singulis quadratum peripheriae cuius diameter est 1, aequatur.

§. 19. Cum autem harum serierum summae etiamsi vero proxime facile exhiberi possent, tamen non multum adiumenti afferre queant ad peripheriam circuli vero proxime exprimendam propter radicem quadratam, quae extrahi deberet; ex prioribus seriebus eliciemus expressiones, quae ipsi peripheriae p sint aequales. Prodibit autem vt sequitur:

$$p = 4\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \text{etc.}\right)$$

$$p = 2\left(\frac{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = 4\left(\frac{1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = 3\left(\frac{1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = \frac{16}{5}\left(\frac{1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = \frac{25}{8}\left(\frac{1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = \frac{192}{61}\left(\frac{1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \frac{1}{11^7} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \text{etc.}}\right)$$

DE

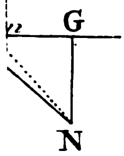


fig: 3.

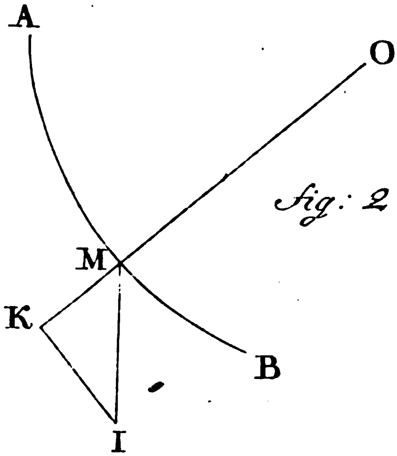


fig: 2.

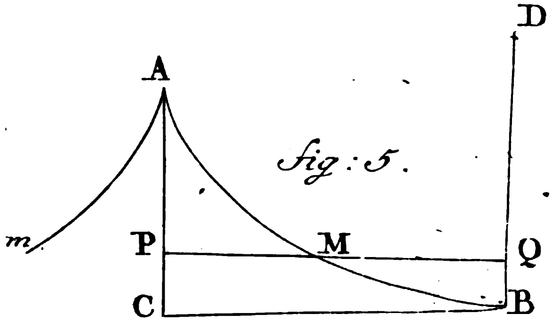


fig: 5.

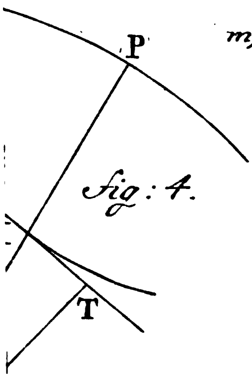


fig: 4.

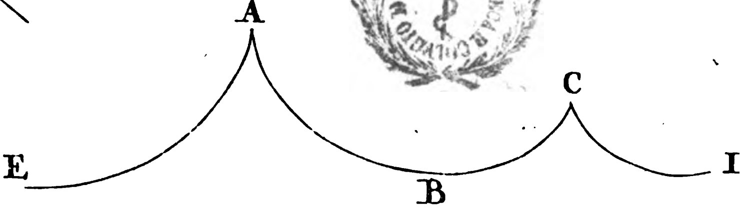


fig: 6.

DE LINEA CELERRIMI DESCENSVS IN MEDIO QVOCVNQVE RESISTENTE.

AVCTORE
Leonh. Euler.

§. 1.

QVae curuae ad certum quendam motum producendum in vacuo non multo labore inueniuntur, eaedem in medio resistente non solum laborem multo maiorem; sed etiam plus sollertiae et cautionis requirunt. Saepenumero quoque euenit, vt multa problemata in hypothesi medii resistentis solutionem vel omnino respuant vel in particularibus tantum casibus admittant. Cuiusmodi est problema tautochronarum, de quo an in alia resistentiae hypothesi, praeter simplicem et duplicatam celeritatum rationem resolui queat, vehementer dubito. Tabula VIII

§. 2. Pertinet huc quoque problema lineae brachystochronae seu celerrimi descensus, quod a *Cel. Ioh. Bernoulli* in hypothesi vacui Geometris propositum mox plures easque differentes nactum est solutiones, quas in Actis Lipsiensibus, Transact. Angl. Comment. Parisinis, pluribusque aliis libris videre licet. Idem autem problema in medii resistentis hypothesi ego primum in Actis Lipf. A. 1726. soluendum proposui, cum ob eius non contemnendam elegantiam, tum ob singularem circumspectioſpectionem, qua in eius ſolutione vti oportet, ne quis in errorem incidat.

§. 3. Poſtquam autem hoc problema propoſuiſſem Celeb. *Hermannus* id dignum iudicauit, cuius ſolutionem diſſertationi de motibus variatis Tom. II. Comment. insereret. Sed copia rerum, quas in hac diſſertatione pertractauit viro ceterum perſpicaciſſimo non permiſiſſe videtur vt hoc problema, quod paucis tantum attigerat, ſatis perpenderet, et ſolutionem inuentam accurate examinaret. Ex quo factum eſt, vt curuae ab illo aſſignatae problemati non conueniant, nec brachyſtochronismi proprietatem poſſideant. Monui etiam hac de re beatae memoriae Virum per litteras, ipſique meam ſolutionem a ſua diſcrepantem transmiſi, vt in cauſam diſcriminis inquireret, ad quae mihi reſpondit, ſe vtique de ſua ſolutione dubitare coepiſſe, et quam primum negotia conceſſura eſſent, emendationem ſe perficere velle, quam etiam, niſi mors interueniſſet, pro eius eximia integritate iam certe haberemus.

§. 4. Quod igitur ipſe feciſſet, ſi vixiſſet, non arbitror quenquam aegre laturum, ſi idem ego fecero atque eius ſolutionem correxero. Hoc non ſolum non iniquum puto, ſed etiam ad id me obſtrictum credo, ne forte poſthac alii ſint acceſſuri, qui Viri eximii famam et exiſtimationem iſto lapſu imminuere ſuſtineant. Atque cum oſtendero, quantam circumſpectionem ad huiusmodi errores euitandos adhiberi oporteat, tum vnusquisque eo facilius Viro defuncto hoc erratum condonabit, tum etiam meum inſtitutum non reprehendet, quo genuina methodo problema a me propoſitum reſoluere ſtatui.

§. 5.

§. 5. Praecipuum, ad quod in ſolutione huius problematis attendere debemus, eſt lemma ex natura maximi et minimi petitum, per quod diſpoſitio duorum elementorum contiguorum curuae quaeſitae determinatur, quo corpus ea breuiori tempore abſoluat deſcendendo, quam quaeuis alia elementa intra eoſdem terminos poſita. Huiusmodi propoſitio habetur a *Hugenio* demonſtrata, eaque vſus eſt *Hermannus* in ſua ſolutione: ſed vti mox apparebit, plus ei tribuit, quam oportebat, atque ad reſtrictionem, quam iſta propoſitio requirit, non ſatis attendebat. Quamobrem et hoc Lemma *Hugenianum* et aliud latius patens atque ad quosuis caſus accommodatum in medium proferam.

§. 6. Oporteat igitur in recta FG definire punctum M ex quo ad datos terminos L et N ductae lineae LM, MN a deſcendente corpore tempore breuiſſimo percurrantur: ſit autem celeritas corporis ſupra $FG = m$ et infra eam $= n$, quocunque aſſumto puncto M in FG. His igitur poſitis debebit $\frac{LM}{m} + \frac{MN}{n}$ eſſe minimum, quia hac quantitate tempus per LMN aſſignatur. Quod vt efficiatur, puncto M proximum m eſt accipiendum, et ductis Lm, mN tempora per LMN et LmN aequalia facienda. Hinc ergo habebitur $\frac{LM}{m} + \frac{MN}{n} = \frac{Lm}{m} + \frac{mN}{n}$, ex quo deſcriptis centris L et N arculis Mf et mg prodibit haec aequatio $\frac{mf}{m} = \frac{Mg}{n}$ ſeu iſta analogia $mf : Mg = m : n$. Eſt vero mf ad Mg vt coſinus anguli LMF ad coſinum anguli GMN. Quocirca coſinus angulorum, quos haec duo elementa cum recta FG conſtituere debent, ſunt celeritatibus, quibus illa elementa deſcribuntur, propor- Figura 1.

tionales. Atque hoc est lemma *Hugenianum*, quo vsus *Hermannus* ad suam problematis solutionem peruenit.

§. 7. Quo autem perspiciatur, quam late pateat hoc lemma et quibus in casibus possit adhiberi, ad hoc est aduertendum, quod in eo ponitur, elementa omnia infra rectam FG sumta eadem celeritate n absolui. Quamobrem, nisi corpus in hisce omnibus elementis, puncto M vbicunque assumto, eandem habuerint celeritatem, hoc lemma perperam adhibetur, atque in erroneam solutionem inciditur. Euenit autem hoc in medio resistente, atque ita est factum, vt *Cel. Hermannus*, postquam hoc lemmate in inueniendis brachystochronis in vacuo feliciter esset vsus, pro mediis resistentibus eodem lemmate a recta via fuerit seductus.

§. 8. In vacuo tamen etiam res ita est instituenda, vt recta FG ad directionem potentiae sollicitantis vbique sit normalis. Tum enim id, quod requiritur, obtinetur, et corpus ex L ad quodque rectae FG punctum descendens idem semper acquirit celeritatis incrementum, ita vt singula elementa intra FG sita aequali celeritate percurrantur. Curua igitur his in casibus, scilicet in vacuo, erit brachystochrona, si celeritas corporis in quouis elemento proportionalis fuerit sinui anguli, quem hoc elementum cum directione potentiae sollicitantis constituit. Quamobrem ope huius regulae inueniri poterit curua celerrimi descensus in vacuo, quaecunquae fuerit potentiae sollicitantis lex.

§. 9. Ex his iam satis perspicitur datam regulam inueniendae brachystochronae ad medium resistens accommodari

modari non posse. Namque celéritatis incrementa, quae corpus descendendo ex L ad quaeque rectae FG puncta acquirit, non sunt inter se aequalia, etiamsi recta FG ad potentiae sollicitantis directionem sit normalis; sed praeterea ab inclinatione elementorum percursorum pendent, quemadmodum ex natura resistentiae facile apparebit. Pro his igitur casibus peculiare lemma stabiliri oportet, in quo celeritates per inferiora elementa vtcunque variabiles ponuntur, pro diuersis locis in quibus punctum M in FG accipitur.

§. 10. Sumtis igitur vt ante punctis M et m proximis, et ductis elementis LM, MN ac Lm, mN, sit celeritas per elementa LM et L$m = q$, celeritas per MN $= q + dt$, at ea per elementum mN $= q + dt + dd\theta$. Incrementum scilicet celeritatis per LM acquisitum ponitur dt, et id, quod per Lm acquiritur, ponitur $dt + dd\theta$. Quo igitur tempus per LMN fiat minimum, oportet id aequale fieri tempori per LmN. Ex quo habebitur $\frac{LM}{q} + \frac{MN}{q+dt} = \frac{Lm}{q} + \frac{mN}{q+dt+dd\theta}$, atque ex hoc prodibit $\frac{mf}{q} = \frac{Mg}{q+dt} + \frac{mN.\,dd\theta}{(q+dt)(q+dt+dd\theta)}$ seu $(q + 2q\,dt + dt^2 + q\,dd\theta + dt\,dd\theta)\,mf = (q^2 + q\,dt + q\,dd\theta)\,Mg + q.\,mN.\,dd\theta$. Est vero $mf = \frac{FM\,Mm}{LM}$ et $Mg = \frac{MG.\,Mm}{LM}$ Quibus substitutis et neglectis negligendis orietur $q(\frac{MG}{LM} - \frac{FM}{LM}) = \frac{FM}{LM}dt - \frac{LM\,dd\theta}{Mm}$. Quae, cum $dd\theta$ semper ita per Mm determinetur vt sit huius formae Z.Mm, alias quantitates non inuoluet, nisi quae a puncto M pendebunt.

§. 11. Si aequalia ponantur elementa LF, NG, dicanturque dx, atque fiat $FM = dy$, $LM = ds$, erit $MG = dy + ddy$ et $MN = ds + dds$. Quibus substitutis superior formula transibit in hanc $\frac{qdsddy - qdydds}{ds^2} = \frac{dydt}{ds} - \frac{dsdd\theta}{Mm}$, seu ob $dsdds = dyddy$ posito dx constante, in hanc $\frac{qdx^2ddy}{ds^3} = \frac{dydt}{ds} - \frac{dsdd\theta}{Mm}$. Atque hoc est lemma, quo loco *Hugeniani* ad inueniendas brachystochronas in medio resistente vti debemus.

§. 12. Sit nunc potentia sollicitans quaecunque, eius vero directio, vt ante, normalis ad rectam FG. Ponatur ea dum corpus elementum LM vel Lm describens vrget $= p$, posita vi grauitatis $= 1$. Resistat porro medium in ratione quacunque multiplicata celeritatum, cuius exponens sit $2n$, atque haec resistentia ita se habeat, vt aequalis sit vi grauitatis 1, si corporis celeritas debita fuerit altitudini c. Iam sit corporis in L celeritas tanta, quanta acquiritur lapsu grauis per altitudinem v. Quibus positis erit vis resistentiae, quae motum corporis ab L ad FG ingredientis retardat, $= \frac{v^n}{c^n}$.

§. 13. A potentia p corpus, siue per LM siue per Lm descendat idem accipit celeritatis incrementum, quia FG ad directionem potentiae normalis ponitur. Altitudo autem v capiet augmentum $= pdx$. Resistentia autem ita retardabit corpus per LM descendens, vt decrementum altitudinis v sit $= \frac{v^n}{c^n}$LM. At si corpus per Lm incedere ponitur, erit decrementum altitudinis $v =$

$\frac{v^n}{c^n}$ Lm. Quare celeritas, qua elementa LM et Lm percurruntur, debetur altitudini v; celeritas vero per MN altitudini $v + p\,dx - \frac{v^n}{c^n}$ LM, et celeritas per mN altitudini $v + p\,dx - \frac{v^n}{c^n}Lm$.

§. 14. His cum nostro lemmate comparatis habebimus $q = v$, $q + dt = \sqrt{(v + p\,dx - \frac{v^n}{c^n}\mathrm{LM})} = \sqrt{v} + \frac{p\,dx - \frac{v^n}{c^n}.\mathrm{LM}}{2\sqrt{v}}$; adeoque $dt = \frac{p\,dx - \frac{v^n}{c^n}ds}{2\sqrt{v}}$. Atque $q +$

$$dt + dd\theta = \sqrt{(v + p\,dx - \frac{v^n}{c^n}\mathrm{L}m)} = \sqrt{v} + \frac{p\,dx - \frac{v^n}{c^n}\mathrm{L}m}{2\sqrt{v}}$$

Ex his fiet ergo $dd\theta = \frac{v^n(\mathrm{LM} - \mathrm{L}m)}{2c^n\sqrt{v}} = -\frac{v^n.\mathrm{FM.M}m}{2c^n.\mathrm{LM}.\sqrt{v}}$ consequenter $\frac{dd\theta}{\mathrm{M}m} = -\frac{v^n\,dy}{2c^n\,ds\sqrt{v}}$. Sequens igitur ex istis orietur aequatio singulis per $2\sqrt{v}$ multiplicatis, $\frac{2v\,dx^2\,ddy}{ds^3} = \frac{p\,dx\,dy}{ds} - \frac{v^n\,dv}{c^n} + \frac{v^n\,dy}{c^n}$ seu $2v\,dx\,ddy = p\,dy\,ds^2$. Hanc igitur proprietatem, vt sit $v = \frac{p\,dy\,ds^2}{2\,dx\,ddy}$, curua brachystochrona habere debet, ex eaque facile erit eam inuenire.

§. 15. Quia ii termini, in quos resistentia $\frac{v^n}{c^n}$ ingreditur sese mutuo destruunt, hoc lemma latissime patet et ad quamcunque resistentiam potest accommodari, sine vlla mutatione. Haec est igitur proprietas vniuersalis omnium brachystochronarum tam in vacuo, quam in quocunque medio resistente. Sed quo facilius istud lemma memoria teneri queat, aliam formam ei inducemus.

§. 16. Aequatio inuenta $2vdxddy = pdyds^2$ si diuidatur per ds^3 abit in hanc $\frac{2vdxddy}{ds^3} = \frac{pdy}{ds}$, in qua $\frac{pdy}{ds}$ exprimit vim normalem resolutione vis sollicitantis p ortam. In altero membro $\frac{2vdxddy}{ds^3}$ significat $\frac{-ds^3}{dxddy}$ radium osculi curuae LMN secundum plagam F porrectum. At quia curua versus F est conuexa radius osculi in plagam oppositam G erit directus, et habet idcirco valorem negatiuum. Eius ergo longitudo erit $\frac{ds^3}{dxddy}$. Quare posito radio osculi $= r$, et vi normali $=$ N habebitur ista aequatio $\frac{2v}{r} =$ N. Denotat autem $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam, qua corpus, quatenus in recta linea progredi nequit, curuam, in qua mouetur, premit. Hanc ob rem omnis brachystochrona hanc habebit proprietatem, vt vis normalis aequalis sit vi centrifugae.

Figura 2. §. 17. Notandum autem est omne corpus, quod a quapiam vi sollicitatum siue in vacuo siue in medio resistente super concaua parte curuae cuiusdam AMB incedit, curuam duplici vi premere, vi scilicet normali a potentia sollicitante orta, et vi sua centrifuga. Sit MI potentia solli-

sollicitans corpus in M; haec resolui solet in duas alias MK, KI, quarum illius directio MK normalis est in curuam et propterea vis haec normalis appellatur, alterius KI directio est secundum curuae tangentem et tangentialis vocatur. Perspicuum igitur est harum virium normalem solam corpus ad curuam apprimere. Secundum eandem directionem MK praeterea curua AMB in M premitur a vi centrifuga, quae se habet ad vim grauitatis, vt altitudo celeritatem generans v ad dimidium radii osculi MO.

§. 18. Si ergo curua AMB siue in vacuo siue in medio resistente quocunque ita fuerit comparata, vt corporis super ea descendentis ambae vires, quibus curua premitur scilicet normalis et centrifuga, inter se fuerint aequales, curua semper erit brachistochrona, seu corpus super ea minori tempore ex A ad M descendit, quam super alia quacunque linea per A et M transeunte. Haec igitur aequalitas inter vim normalem et vim centrifugam vera et vniuersalis est lex omnium curuarum brachystochronarum, eiusque beneficio in quacunque et potentiae sollicitantis et resistentiae hypothesi in promtu erit curuas brachystochronas determinare.

§. 19. Quia in vacuo secundum *Theorema Hugenianum* celeritas proportionalis esse debet sinui anguli, quem curua cum directione potentiae constituit, i.e. ipsi $\frac{MK}{MI}$, erit $\frac{MK^2}{MI^2.MO}$ proportionale ipsi MK seu $\frac{MK}{MI}$ ipsi MI. MO. Omnes igitur brachystochronae in vacuo hanc habent proprietatem, vt sinus anguli, quem directio potentiae cum curua facit, vbique sit proportionalis radio osculi

osculi et potentiae sollicitanti coniunctim. Quare huius regulae ope sine celeritatis determinatione omnes brachystochronae in vacuo facile inuenientur.

§. 20. Initium autem curuae A, in quo omnes descensus ex quiete fieri debent, semper in eo est loco, in quo curuae tangens in directionem potentiae incidit. In hoc enim loco in vacuo ipsa corporis celeritas propter angulum curuae cum directione potentiae euanescentem fit aequalis o. In medio autem resistente ipsum motus initium a vacuo non differt, et hanc ob rem etiam hoc casu tangens initii curuae cum potentiae directione congruere debet. Huius vero ratio est habenda in adiectione constantium quantitatum, quando aequationem differentio-differentialem brachystochronae integramus, et efficere debemus, vt curua datum habeat initium et per datum punctum transeat.

Figura 3. §. 21. Illustremus regulam §. 19. pro brachystochronis inueniendis in vacuo datam exemplis, sitque potentia sollicitans constans $= g$, eius directio verticalis secundum PM. Brachystochrona vero quaesita sit AM et abscissae in recta horizontali AP per initium curuae transeunte accipiantur. His factis sit $AP = y$, $PM = x$, $AM = s$, eritque sinus anguli, quem PM cum curua conficit $= \frac{dy}{ds}$, et radius osculi $= \frac{ds^3}{dxddy}$, posito dx constante, qui ob potentiam constantem proportionalis esse debet ipsi $\frac{dy}{ds}$. Fiat igitur $\frac{ds^3}{dxddy} = \frac{ady}{ds}$ seu ob $ddy = \frac{dsdds}{dy}$ hoc modo $ds^3 = adxdds$. Diuidendo per ds^2 et integrando prodit $s = C - \frac{adx}{ds}$. Quia facto $s = o$ fieri debet.

debet $dx=ds$, erit $C=a$ et ideo $sds=ads-adx$, quae porro integrata dat $s^2=2as-2ax$ aequationem pro cycloide vt constat.

§. 22. Sit porro C centrum virium attrahens in ratione quacunque multiplicata distantiarum, cuius exponens sit m. Curua AM sit brachystochrona pro corpore in vacuo moto. Dicatur $CA=a$, $CM=y$, et perpendiculum CT in tangentem MT ex C demissum $=z$. Vis ergo in M secundum MC corpus trahens erit vt y^m, sinus anguli curuae cum hac directione erit $=\frac{z}{y}$, et radius osculi erit $-\frac{ydy}{dz}$. Quare vi regulae erit $\frac{z}{y}$ vt $\frac{y^{m+1}dy}{dz}$ seu $Azdz=y^{m+2}dy$, cuius integralis est $C+Az^2=y^{m+3}$. Quia si $y=a$ fit $z=0$, erit $C=a^{m+3}$, et consequenter $Az^2=a^{m+3}-y^{m+3}$, arbitraria A negatiue sumta. Haecque aequatio omnes brachystochronas, quae circa centra virium existunt, complectitur. Fig. 4.

§. 23. Reuertamur autem ad medium resistens in ratione quacunque multiplicata celeritatum, cuius exponens sit $2n$. Potentia sollicitans vero ponatur constans $=g$ et habens directionem verticalem vbique ipsi AP parallelam. Sit AMB curua celerrimi descensus inuenienda, in qua ponamus $AP=x$, $PM=y$ et $AM=s$. Celeritas porro in M debita sit altitudini v, quare resistentia in M erit $=\frac{v^n}{c^n}$. Vnde ex sollicitatione potentiae et effectu resistentiae simul habebitur $dv=gdx-\frac{v^n ds}{c^n}$. Brachystochronismus vero dat $2vdxddy=gdyds$, Figura 5.

posito dx constante (§. 14.). Ex quibus aequationibus coniunctis exterminata littera v prodibit aequatio pro curua brachystochrona quaesita.

§. 24. Propter dx constans erit $ddy = \frac{ds\,dds}{dy}$ ideoque $v = \frac{g\,ds\,dy^2}{2\,dx\,dds}$. Ergo $dv = \frac{g\,dy^2\,dds^2 + 2g\,ds^2\,dds^2 - g\,ds\,dy^2\,d^3s}{2\,dx\,dds^2}$. His valoribus substitutis in aequatione $dv = g\,dx - \frac{v^n\,ds}{c^n}$ habebitur $\frac{g\,ds\,dy^2\,d^3s - 3g\,dy^2\,dds^2}{2\,dx\,dds^2} = \frac{g^n\,ds^{n+1}\,dy^{2n}}{2^n c^n\,dx^n\,dds^n}$ seu $ds\,d^3s - 3\,dds^2 = \frac{g^{n-1}\,ds^{n+1}\,dy^{2n-2}}{2^{n-1}\,c^n\,dx^{n-1}\,dds^{n-2}}$. Haec aequatio, si medium resistens sit infinite rarum seu in vacuum transmutatur, quo casu fit $c = \infty$, abit in $ds\,d^3s = 3\,dds^2$, cuius integralis est $a\,dx\,dds = ds^3$. Quae quod sit ad cycloidem §. 21. ostendimus.

§. 25. Ad aequationem autem generalem construendam pono $ds = p\,dx$, vt sit $dds = dp\,dx$ et $d^3s = dx\,ddp$. Hinc erit $dy = dx\,V(p^2 - 1)$ et $v = \frac{g\,p\,dx(p^2-1)}{2\,dp}$. Ipsa autem aequatio abibit in hanc $p\,ddp - 3\,dp^2 = \frac{g^{n-1}\,p^{n+1}\,dx^n\,(p^2-1)^{n-1}}{2^{n-1}\,c^n\,dp^{n-2}}$. Ponatur porro $dx = q\,dp$, eritque $ddp = -\frac{dp\,dq}{q}$. Quo substituto prodibit $-\frac{p\,dq - 3\,q\,dp}{q^{n+1}} = \frac{g^{n-1}\,p^{n+1}\,(p^2-1)^{n-1}\,dp}{2^{n-1}\,c^n}$. Multiplicetur haec aequatio per $n\,p^{-3n-1}$; quo facto habebitur

$$-\frac{np^{-3n}dq-3np^{-3n-1}qdp}{q^{n-1}}=\frac{ng^{n-1}p^{-2n}(p^2-1)^{n-1}dp}{2^{n-1}c^n}$$

Cuius integralis est $\frac{2^{n-1}c^n}{ng^{n-1}p^{3n}q^n}=\int\frac{(p^2-1)^{n-1}dp}{p^{2n}}$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{ng^{n-1}}{2^{n-1}c^n}\int\frac{(p^2-1)^{n-1}dp}{p^{2n}}=P^{-n}$, quae quantitas concessis quadraturis, si integratio non succedit, semper potest exhiberi. Quo ergo posito erit $p^3 q=P$, atque ob $q=\frac{dx}{dp}$, fiet $dx=\frac{Pdp}{p^3}$. Consequenter $x=\int\frac{Pdp}{p^3}$, $s=\int\frac{Pdp}{p^2}$ et $y=\int\frac{Pdp\sqrt{(p^2-1)}}{p^3}$. Quare in quacunque medii resistentis hypothesi brachystochrona hoc modo poterit construi.

§. 26. Si resistentia medii sit vt quadratum celeritatis erit $n=1$, ideoque $P^{-1}=\frac{1}{c}\int\frac{dp}{p^2}=\frac{1}{ac}-\frac{1}{cp}=\frac{p-a}{acp}$ Quare fiet $P=\frac{acp}{p-a}$; atque $p^3q=\frac{ac}{p-a}=\frac{p^3dx}{dp}$, seu $dx=\frac{acdp}{p^3(p-a)}$, cuius integralis est $x=b+\frac{c}{p}+\frac{c}{a}l\frac{p-a}{p}=b+\frac{cdx}{ds}+\frac{c}{a}l\frac{ds-adx}{ds}$. In qua aequatione, quia facto $x=0$, debet esse $ds=dx$, fiet $b=-c-\frac{c}{a}l(1-a)$. Habebitur ergo pro curua quaesita haec aequatio $x=\frac{c(dx-ds)}{ds}+\frac{c}{a}l\frac{ds-adx}{ds-ads}$. Vel si aequatio a logarithmis libera desideretur, haec differentio-differentialis, $acdxdds=ds^3-adxds^2$ posito dx constante. Haec alio modo disposita abit in hanc $\frac{acdxdds}{ds^2}=ds-adx$, cuius integralis est $s-ax=ac-\frac{acdx}{ds}$ seu $sds-axds=acds-acdx$. Quae integrata dat $s=cl\frac{s-ax-ac+c}{c-ac}$ seu $e^{\frac{s}{c}}(c-ac)=s-ax+c-ac$. Huius curuae punctum infimum B ibi erit

 vbi

vbi eſt $s = a(x + c)$. Hoc igitur caſu erit $AB = c\,l\frac{1}{1-a}$ et $AC = \frac{c}{a}\,l\frac{1}{1-a} - c$.

§. 27. Si autem *Theoremate Hugeniano* tanquam ad hunc caſum idoneo vſi eſſemus, ſtatim hanc habuiſſemus inde aequationem $v = \frac{ady^2}{ds^2}$. Hincque $dv = \frac{2adx^2ddy}{ds^3}$ $= gdx - \frac{a^n dy^{2n}}{c^n ds^{2n-1}}$ ſeu $2adx^2ddy = gdxds^3 - \frac{a^n dy^{2n}}{c^n ds^{2n-4}}$. Quae facto $ds = pdx$ abit in $\frac{2apdp}{\sqrt{(p^2-1)}} = gpx^2dx - \frac{a^n dx(p^2-1)^n}{c^n p^{2n-4}}$ quae iam per ſe eſt ſeparata, ideoque conſtrui poteſt. Si ponatur $n = 1$, vt brachyſtochrona pro medio reſiſtente in duplicata celeritatum ratione prodeat, erit $2acdx^2ddy = cgdxds^3 - ady^2ds^2$ ſeu $2acdx^2dds = cgdxdyds^2 - ady^3ds$. Quae aequatio, etiamſi lemmate ſimpliciore nitatur, tamen multo magis eſt compoſita et perplexa, quam noſtra brachyſtochrona inuenta; id quod per ſe ſaepe veritatis criterium eſſe ſolet, praecipue ſi operoſior calculus eo deduxerit.

§. 28. Quo autem appareat, qualem figuram brachyſtochrona noſtra in medio ſecundum celeritatis quadrata reſiſtente habitura ſit, aequationem ſumamus hanc $e^{\frac{s}{c}}(c - ac) = s - ax + c - ac$. Haec, in ſeriem conuerſo $e^{\frac{s}{c}}$, abit in hanc $(c-ac)(1 + \frac{s}{c} + \frac{s^2}{1.2.c^2} + \frac{s^3}{1.2.3.c^3} + \frac{s^4}{1.2.3.4.c^4} + \text{etc.}) = s - ax + c - ac$, ex qua reperitur poſito $\frac{1-a}{a} = k$ haec aequatio $x = s - \frac{ks^2}{1.2.c} - \frac{ks^3}{1.2.3.c^2} - \frac{ks^4}{1.2.3.4.c^3}$ — etc. Perſpicitur ergo k neceſſario eſſe debere numerum affirmatiuum, alias enim fieret $x > s$ quod fieri nequit; erit

erit ergo $a = \frac{1}{1+k}$. Ex hac ſerie, quia vehementer conuergit facile pro quouis valore ipſius s reſpondens ipſius x inuenietur. Praeterea intelligitur curuam hanc vltra A continuari in Am, quae ſimilis eſt ipſi AM.

§. 29. Quomodo vero curua vltra B porrigatur hac ratione inueſtigo. Ducto ex B axe verticali BD, in eumque applicata MQ, ſit BQ $=$ PC $= u$, arcus BM $= t$. Hoc poſito erit $s = c\,l\frac{1}{1-a} - t$, et $x = \frac{c}{a}\,l\frac{1}{1-a} - c - u$, quibus ſubſtitutis haec emergit aequatio $c\,e^{\frac{-t}{c}} = au - t + c$ vel haec differentialis, $tdt - audt = acdu$. Per ſeriem vero habebitur $au = \frac{t^2}{1.2.c} - \frac{t^3}{1.2.3.c^2} + \frac{t^4}{1.2.3.4.c^3} -$ etc. Quae aequatio prorſus congruit cum ea, quam A. 1729. pro tautochrona aſcenſui in eadem reſiſtentiae hypotheſi inueni. Altera igitur portio curuae vltra axem BD ſita erit tautochrona ad deſcenſum pertinens. Habebit ergo curua brachyſtochrona huiusmodi formam EABCD infinitis cuſpidibus A, C etc. praeditam, quarum alterni ſunt altiores vt A, alterni humiliores vt C. Rami vero ex vtraque cuſpidis cuiusque parte ſunt inter ſe aequales et ſimiles. Eleuatio altiorum cuſpidum eſt $\frac{c}{a}\,l\frac{1}{1-a} - c$ humiliorum vero eſt $c - \frac{c}{a}\,l(1+a)$. Ipſi vero rami altiores AB vel AE ſunt $= c\,l\frac{1}{1-a}$ depreſſiorumque CB, CD longitudo eſt $= c\,l(1+a)$. Conuenientia ceterum iſta inter tautochronam et brachyſtochronam praeter vacuum etiam in hac reſiſtentiae hypotheſi praecipue conſiderari meretur, et disquirendum reſtat, num forte in reliquis reſiſtentiae hypotheſibus ſimilis analogia locum obtineat? Id quod tautochronarum inuentionem per ſe difficillimam redderet facillimam. Figura 6.

DE PROGRESSIONIBVS HARMONICIS OBSERVATIONES.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Progressionum harmonicarum nomine intelliguntur omnes series fractionum, quarum numeratores sunt aequales inter se, denominatores vero progressionem arithmeticam constituunt. Huiusmodi ergo forma generalis est $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a+2b}$, $\frac{c}{a+3b}$, etc. Quique enim tres termini contigui vt $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a+2b}$, $\frac{c}{a+3b}$ hanc habent proprietatem, vt differentiae extremorum a medio sint ipsis extremis proportionales. Scilicet est $\frac{c}{a+b} - \frac{c}{a+2b} : \frac{c}{a+2b} - \frac{c}{a+3b} = \frac{c}{a+b} : \frac{c}{a+3b}$. Cum autem haec sit proprietas proportionis harmonicae; vocatae sunt istiusmodi fractionum series progressiones harmonicae. Vocari etiam possent reciprocae primi ordinis, quia in termino generali $\frac{c}{a+(n-1)b}$ index n vnicam eamque negatiuam habet dimensionem.

§. 2. Quanquam in his seriebus termini perpetuo decrescunt; tamen summa huiusmodi seriei in infinitum continuatae semper est infinita. Ad hoc demonstrandum non opus est methodo hasce series summandi; sed veritas facile ex sequente principio elucebit. Series quae in infinitum continuata summam habet finitam, etiamsi ea ſi ea duplo longius continuetur nullum accipiet augmentum, ſed id quod poſt infinitum adiicitur cogitatione, re vera erit infinite paruum. Niſi enim hoc ita ſe haberet, ſumma ſeriei etſi in infinitum continuatae non eſſet determinata et propterea non finita. Ex quo conſequitur, ſi id, quod ex continuatione vltra terminum infiniteſimum oritur, ſit finitae magnitudinis, ſummam ſeriei neceſſario infinitam eſſe debere. Ex hoc ergo principio iudicare poterimus, vtrum ſeriei cuiusque propoſitae ſumma ſit infinita an finita.

§. 3. Sit itaque ſeries $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a+2b}$ etc. in infinitum continuata, terminusque infiniteſimus $\frac{c}{a+(i-1)b}$, denotante i numerum infinitum, qui ſit index huius termini. Iam haec ſeries vlterius continuetur a termino $\frac{c}{a+ib}$ vsque ad terminum $\frac{c}{a+(ni-1)b}$ cuius exponens eſt ni. Horum terminorum igitur inſuper adiectorum numerus eſt $(n-1)i$; Summa eorum vero minor erit quam $\frac{(n-1)ic}{a+ib}$ maior vero quam $\frac{(n-1)ic}{a+(ni-1)b}$. Sed quia i eſt infinite magnum, evaneſcet a in vtroque denominatore. Quare ſumma maior erit quam $\frac{(n-1)c}{nb}$ at minor quam $\frac{(n-1)c}{b}$, Ex quo perſpicitur hanc ſummam eſſe finitam, atque conſequenter ſeriei propoſitae $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$, etc. in infinitum continuatae ſummam infinite magnam.

§. 4. Huius autem ſummae terminorum ab i ad ni limites propiores ex ſequentibus proportionis harmonicae proprietatibus eliciuntur. Scilicet omnis proportio harmonica ita eſt comparata, vt terminus medius minor

ſit

ſit quam pars tertia ſummae terminorum omnium. Hanc ob rem terminus medius inter $\frac{c}{a+ib}$ et $\frac{c}{a+(ni-1)b}$, qui eſt $\frac{c}{a+\frac{(ni+i-1)}{2}b}$, ductus in terminorum numerum $(n-1)i$, ſeu $\frac{(n-1)ic}{a+\frac{(ni+i-1)}{2}b}$ minor erit quam ſumma terminorum Siue terminorum ſumma hinc maior erit quam $\frac{2(n-1)c}{(n+1)b}$ ob i infinitum. Praeterea medium arithmeticum inter terminos extremos maius eſt parte tertia ſummae terminorum. Ex hoc ſequitur fore etiam in ſerie harmonica terminorum ſummam minorem quam $(n-1)i$ in medium arithmeticum terminorum extremorum, quod eſt $\frac{(2a+(ni+i-1)b)c}{2(a+ib)(a+(ni-1)b)}$ ſeu $\frac{(n+1)c}{2nib}$, ductum. Quare ſumma erit minor quam $\frac{(n^2-1)c}{2nb}$, ita vt hi duo limites ſint $\frac{2(n-1)c}{(n+1)b}$ et $\frac{(n^2-1)c}{2nb}$, adeoque ſumma proxime $=\frac{(n-1)c}{b\sqrt{n}}$ quod eſt medium proportionale inter limites.

§. 5. Ex his colligere licet, quibus caſibus haec ſeries magis vniuerſalis $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a+2^\alpha b}$ etc. in infinitum vsque ad $\frac{c}{a+i^\alpha b}$ habeat ſummam finitam vel infinitam. Sequantur enim terminum vltimum termini $(n-1)i$, eritque horum ſumma minor quam $\frac{(n-1)c}{i^{\alpha-1}b}$, at maior quam $\frac{(n-1)c}{n^\alpha i^{\alpha-1}c}$. Quare ſi fuerit α numerus vnitate maior

maior, summa horum terminorum sequentium erit $=0$, et propterea summa progressionis finita. At si sit $a < 1$, summa terminorum sequentium erit infinita; quocirca ipsius progressiones summa in infinities maiore gradu erit infinita. Inter has igitur progressiones sola harmonica, in qua $\alpha = 1$, hanc habet proprietatem, vt summa eius in infinitum continuatae sit infinite magna, terminorum vero sequentium post terminum infinitesimum summa finita.

§. 6. Quanta vero sit summa terminorum a termino indicis i ad terminum indicis ni sequenti modo inuestigo. Ponatur summa seriei $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$ - - - - - - - $\frac{c}{a+(i-1)b}$ ad terminum indicis i vsque $= s$, quae est quantitas ex a, b, c et i determinanda. Crescat i vnitate, habebitque s pro augmento terminum sequentem $\frac{c}{a+ib}$. Quare erit $di : ds = 1 : \frac{c}{a+ib}$ seu $ds = \frac{c\,di}{a+ib}$. Vnde inuenitur $s = C + \frac{c}{b} l(a+ib)$, denotante C quantitatem quandam constantem. Apparet quoque ex hac forma summam eiusdem seriei ab initio ad terminum indicis ni continuatae fore $= C + \frac{c}{b} l(a+nib)$. Harum igitur summarum differentia $\frac{c}{b} l \frac{a+nb}{a+ib} = \frac{c}{b} ln$ (euanescente a) dabit summam terminorum ab $\frac{c}{a+ib}$ vsque ad $\frac{c}{a+nib}$. Quia autem huius summae limites supra assignauimus erit $\frac{c}{b} ln$ maior quam $\frac{2(n-1)c}{(n+1)b}$ atque minor quam $\frac{(n^2-1)c}{2nb}$, seu $ln > \frac{2(n-1)}{n+1}$ atque $ln < \frac{n^2-1}{2n}$.

§. 7. Infra ostendemus quantitatem illam constantem C esse finitam, eamque definire conabimur. Euanescet

nescet ergo C in summa, fietque progressionis $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a+b}$ $- - - - -$ $\frac{c}{a+(i-1)b}$ existente terminorum numero infinito $= i$, summa $= \frac{c}{b} l(a+ib) = \frac{c}{b} li$. Quamobrem summa erit vt logarithmus numeri terminorum, hincque infinities minor quam radix quantumuis magnae potestatis ex numero terminorum; nihilo tamen minus est infinite magna.

§. 8. Ex hac consideratione innumerabiles oriuntur series ad logarithmos quorumuis numerorum designandos. Sumamus primo hanc progressionem harmonicam $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc. pro qua fit $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$. Differentia igitur inter hanc seriem $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ $- - - - \frac{1}{i}$ ad terminum indicis i continuatam, et eandem $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - - - - - \frac{1}{ni}$ ad terminum indicis ni continuatam, erit $= ln$. Quare illa series ab hac subtracta relinquit ln. Quia autem huius seriei numerus terminorum est n vicibus maior quam illius, ab n terminis seriei $1 + \frac{1}{2} - - - - - - - \frac{1}{ni}$ subtrahi oportet vnicum alterius seriei $1 + \frac{1}{2} - - - - - - \frac{1}{i}$, quo subtractio in infinitum eodem modo possit perfici. Quare erit

$$\begin{array}{l} ln = 1 + \frac{1}{2} - - - - - - - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - - - - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - - - - - \frac{1}{3n} + \text{etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -1 \qquad\qquad\qquad\quad -\frac{1}{2} \qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{1}{3} \end{array}$$

Si igitur inferioris seriei singuli termini a supra scriptis terminis superioris seriei actu subtrahantur, et pro n numeri integri scribantur $2, 3, 4$ $- - -$ etc. successiue sequentes logarithmorum series obtinebimus.

$$l2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{12} \text{ etc.}$$
$$l3 = 1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{2}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{2}{12} \text{ etc.}$$
$$l4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{3}{12} \text{ etc.}$$
$$l5 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{4}{10} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{12} \text{ etc.}$$
$$l6 = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{5}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{6}{12} \text{ etc.}$$

etc. etc.

Vnde pro cuiusuis numeri logarithmo facile ſeries conuergens inuenitur.

§. 9. Ex his ſeriebus aliae eiusdem formae, quae ſummam habeant rationalem, poſſunt deriuari, Nam, quia ſeriei $= l2$ duplum aequale eſt $l4$, ſi ſeries $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4}$ etc. ſubtrahatur ab hac $2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4}$ etc. reſiduum, nempe haec ſeries $1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{3}{6}$ etc erit $= 0$, ſeu $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{5}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{3}{10}$ etc. Similiter ſi ſeries $l6$ exhibens ſubtrahatur a ſumma ſerierum $l2$ et $l3$ exhibentium, reſiduum, nempe $1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{2}{9} - \frac{1}{10}$ etc. erit $= 0$ ſeu $1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{2}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{2}{9} + \frac{1}{10}$ etc. Pari modo huiusmodi ſeries innumerabiles poterunt inueniri.

§. 10. Series illae logarithmos exprimentes conuergunt quidem, ſed admodum tarde, quare, quo earum ope logarithmi commode erui queant, requiritur aliquod ſubſidium. Ad quod inueniendum notari oportet eas ſeries non aequabiliter progredi, ſed certas habere reuolutiones, quae tot terminis abſoluuntur, quot n habet vnitates, tot igitur terminos ſimul ſumtos vnum ſeriei membrum vocabo. Ita in ſeriei pro $l2$ duo termini conſtituent vnum membrum, in ſerie pro $l3$, tres, in ſerie pro $l4$ quatuor et ita porro. Membra igitur iſta aequabilem constituent seriem, et ad logarithmos inueniendos oportet aliquot membra addi. Ponamus iam m membra esse addita ad logarithmum binarii inueniendum; poteritque loco omnium sequentium addi $\frac{1}{4m}$, id quod eo propius accedet, quo maior fuerit numerus m. Ad $l\,3$ ininueniendum ad m membra iam addita loco omnium sequentium addatur $\frac{1}{9m}$. Similiter pro $l\,4$ addi debet $\frac{1}{16m}$ et ita porro. Fluunt haec ex modo summandi (§. 6) adhibito, in quo cum m debeat esse quantitas valde magna, neglexi in differentiali numeros ipsi m adiectos, ne integratio a logarithmis pendeat.

§. 11. Quo autem seriei $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}----\frac{1}{i}$ summa, etiamsi infinita accurate determinetur, singulos terminos sequenti modo exprimo.

Est $1 = l\,2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$ etc.

atque $\frac{1}{2} = l\frac{3}{2} + \frac{1}{2.4} - \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} - \frac{1}{5.32}$ etc.

$\frac{1}{3} = l\frac{4}{3} + \frac{1}{2.9} - \frac{1}{3.27} + \frac{1}{4.81} - \frac{1}{5.243}$ etc.

$\frac{1}{4} = l\frac{5}{4} + \frac{1}{2.16} - \frac{1}{3.64} + \frac{1}{4.256} - \frac{1}{5.1024}$ etc.

.

.

.

$\frac{1}{i} = l\frac{i+1}{i} + \frac{1}{2.i^2} - \frac{1}{3.i^3} + \frac{1}{4.i^4} - \frac{1}{5.i^5}$ etc.

His seriebus additis prodibit

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-----\frac{1}{i} = l(i+1) + \frac{1}{2}(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ etc.) in infin.

$-\frac{1}{3}(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+$ etc.)

$+\frac{1}{4}(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}-+\frac{1}{256}+$ etc.

etc.

Quae

Quae ſeries, cum ſint conuergentes, ſi proxime ſummentur prodibit $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - - - \frac{1}{i} = l(i+1) + 0,577218$ Si ſumma dicatur s, foret, vt ſupra fecimus, $ds = \frac{di}{i+1}$, ideoque $s = l(i+1) + C$. Huius igitur quantitatis conſtantis c valorem deteximus, quippe eſt $C = 0,577218$.

§. 12. Si ſeries $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - - - - - - \frac{1}{i}$ vlterius in infinitum continuetur, et in membra diuidatur, quorum quodvis vt ipſa ſeries i terminos contineat; erit membrum inter $\frac{1}{i}$ et $\frac{1}{2i}$ contentum $= l2$, ſequens $= l\frac{3}{2}$, tertium $= l\frac{4}{3}$, etc. Atque cum ipſius ſeriei ſumma ſit log. infiniti, poterit ad analogiam poni $l\frac{1}{0}$. Hocque modo ſequens ſchema obtinebimus non parum curioſum

Series.	$1 + \frac{1}{2} - - - \frac{1}{i}$	$- - - - \frac{1}{2i}$	$- - - - \frac{1}{3i}$	$- - - \frac{1}{4i}$	$- - - \frac{1}{5i}$	etc.
Summae	$l\frac{1}{0}$	$l\frac{2}{1}$	$l\frac{3}{2}$	$l\frac{4}{3}$	$l\frac{5}{4}$	

§. 13. Difficile quidem videatur has easdem proprietates progreſſionum harmonicarum et logarithmorum expreſſiones analytice, eoque modo, quem alibi ad ſeries ſummandas tradidi, inuenire. At rem attentius perpendenti hoc non ſolum fieri, ſed multo generalius etiam fieri poſſe deprehenſum eſt. Confidero enim non ſimplicem progreſſionem harmonicam, ſed cum geometrica coniunctam, cuiusmodi eſt $\frac{cx}{a} + \frac{cx^2}{a+b} + \frac{cx^3}{a+2b} + \frac{cx^4}{a+3b}$ etc. Huius ſummam pono s, et vtroque per $bx^{\frac{a-b}{b}}$ multiplicato erit $bx^{\frac{a-b}{b}} s = \frac{bcx^{\frac{a}{b}}}{a} + \frac{bcx^{\frac{a+b}{b}}}{a+b} + \frac{bcx^{\frac{a+2b}{b}}}{a+2b}$ Sumtisque differentialibus habebitur $bD.x^{\frac{a-b}{b}} s = dx(cx^{\frac{a-b}{b}}$

 +

$+cx^{\frac{a}{b}}+cx^{\frac{a+b}{b}}+$ etc.$)=\frac{cx^{\frac{a-b}{b}}dx}{1-x}$ Sumtisq; iterum integralibus erit $bx^{\frac{a-b}{b}}s=c\int\frac{x^{\frac{a-b}{b}}dx}{1-x}$ atque $s=\frac{cx^{a-b}}{b}\int\frac{x^{\frac{a-b}{b}}dx}{1-x}$

Ab hac ſerie iam ſubtraho hanc $\frac{fx^m}{g}+\frac{fx^{2m}}{g+h}+\frac{fx^{3m}}{g+2h}$ etc. cuius ſumma ſit t. Multiplicetur per $\frac{h}{m}x^{\frac{m(g-h)}{h}}$ erit $\frac{h}{m}x^{\frac{m(g-h)}{h}}t=\frac{fhx^{\frac{mg}{h}}}{mg}+\frac{fhx^{\frac{m(g+h)}{h}}}{m(g+h)}+\frac{fhx^{\frac{m(g+2h)}{h}}}{m(g+2h)}$ etc.

Sumtisque differentialibus fiet $\frac{h}{m}D.\,x^{\frac{m(g-h)}{h}}t=dx(fx^{\frac{mg-h}{h}}+fx^{\frac{m(g+h)-h}{h}}+fx^{\frac{m(g+2h)-h}{h}}$ etc.$)=\frac{fx^{\frac{mg-h}{h}}dx}{1-x^m}$.

Quare habebitur $t=\frac{fm}{hx^{\frac{m(g-h)}{h}}}\int\frac{x^{\frac{m(g-h)}{h}}dx}{1-x^m}$. Ideoque $s-t=\frac{c}{bx^{\frac{a-b}{b}}}\int\frac{x^{\frac{a-b}{b}}dx}{1-x}-\frac{fm}{hx^{\frac{m(g-h)}{h}}}\int\frac{x^{\frac{mg-h}{h}}dx}{1-x^m}$. Subtractio vero ita debet fieri, vt a termino indicis m ſeriei s ſubtrahatur terminus primus ſeriei t, et a termino indicis $2m$ illius, terminus ſecundus huius ſeriei et ita porro.

§. 14. Quo noſtras ſeries logarithmicas eruamus, ſit $a=b$ et $g=h$. Quo facto erit $s=\frac{c}{b}\int\frac{dx}{1-x}=\frac{c}{b}l\frac{1}{1-x}$ et $t=\frac{f}{h}\int\frac{mx^{m-1}dx}{1-x^m}=\frac{f}{h}l\frac{1}{1-x^m}$. Ergo $s-t=$

$l(1-$

$l\frac{(1-x^m)^{\frac{f}{b}}}{(1-x)^{\frac{c}{b}}}$. Quo autem haec expressio fiat finita facto $x=1$, debebit esse $\frac{f}{b}=\frac{c}{b}$, hanc ob rem fiant omnes hae litterae $=1$, eritque $s-t=l\frac{1-x^m}{1-x}=l(1+x+x^2 \text{-----} x^{m-1})$ Quae expressio dat differentiam inter has series $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}$ etc. et $\frac{x^m}{1}+\frac{x^{2m}}{2}+\frac{x^{3m}}{3}$ etc. Quare si $m=2$ erit $l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+$ etc. si $m=3$, erit $l(1+x+x^2)=x+\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{2x^6}{6}+$ etc. similique modo $l(1+x+x^2+x^3)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+$ etc. In his si fiat $x=1$, prodibunt eaedem series pro logarithmis numerorum naturalium, quas ante dedimus.

§. 15. Si $b=2g$, erit $t=\frac{fx^{\frac{m}{2}}}{b}\int\frac{mx^{\frac{m-2}{2}}dx}{1-x^m}$. Ponatur $x^m=y$, erit $t=\frac{f\sqrt{y}}{b}\int\frac{dy}{(1-y)\sqrt{y}}=\frac{f\sqrt{y}}{b}l\frac{1+\sqrt{y}}{1-\sqrt{y}}=\frac{fx^{\frac{m}{2}}}{b}l\frac{1+x^{\frac{m}{2}}}{1-x^{\frac{m}{2}}}$. Si praeterea sit $a=b$ erit $s=\frac{c}{b}l\frac{1}{1-x}$. At s est summa huius seriei $\frac{cx}{a}+\frac{cx^2}{2a}+\frac{cx^3}{3a}$ etc. atque $tx^{\frac{-m}{2}}=\frac{f}{b}l\frac{1+x^{\frac{m}{2}}}{1-x^{\frac{m}{2}}}$ dat hanc seriem $\frac{fx^{\frac{m}{2}}}{g}+\frac{fx^{\frac{3m}{2}}}{3g}+\frac{fx^{\frac{5m}{2}}}{5g}$ + etc. Sit $a=1$ et $g=1$ erit $s-tx^{\frac{-m}{2}}=cl\frac{1}{1-x}-$

$\frac{f}{2} l \frac{1+x^{\frac{m}{2}}}{1-x^{\frac{m}{2}}} = l \frac{(1-x^{\frac{m}{2}})^{\frac{f}{2}}}{(1-x)^c (1+x^{\frac{m}{2}})^{\frac{f}{2}}}$. Quae expreſſio quo fiat finita ſi $x = 1$ oportet ſit $\frac{f}{2} = c$ ſeu $f = 2c$. Sit igitur $c = 1$, et $m = 2n$ erit ſerierum $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$ etc. et $\frac{2x^n}{1} + \frac{2x^{3n}}{3} + \frac{2x^{5n}}{5}$ etc. differentia $= l \frac{1-x^n}{(1-x)(1+x^n)}$. Ponatur $n = 2$ erit differentia haec $= l \frac{1+x}{1+x^2}$ factoque $x = 1$, erit ea $= 0$, quare haec ſeries $1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{3}{6} + \frac{1}{7}$ etc. erit $= 0$, vt iam ſupra inuenimus.

§. 16. Huiusmodi ſeries ſummam rationalem habentes nunc ex hac ipſa forma $l \frac{1+x}{1+xx}$, infinitae aliae poſſunt inueniri, aſſumendis aliis formis ſimilibus quae facto $x = 1$ euaneſcant. Ex hac enim forma $l \frac{1+x}{1+x^2}$ ſi per ſeries exprimatur ſtatim reſultat ſeries inuenta. Eſt nimirum $l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} -$ etc. Atque $l(1+x^2) = \frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^{10}}{5} -$ etc. Haec igitur ſeries a ſuperiore ſubtracta relinquit hanc $\frac{x}{1} - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{3x^6}{6}$ etc. cuius ſumma erit $l \frac{1+x}{1+x^2}$. Similiter $l \frac{1+x}{1+x^3}$ dabit hanc ſeriem $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{2x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} - \frac{2x^9}{9}$ etc. Ergo poſito $x = 1$ erit $0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{2}{9}$ quam eandem iam §. 9. inuenimus.

§. 17. Hac ratione omnium huiusmodi irregularium ſerierum, quae tamen ſecundum membra regulariter procedunt, ſummae poterunt inueniri, ſemper enim vt differentiae duarum ſerierum ſunt aeſtimandae. Vt ſit propoſita haec ſeries $1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{2}{8}$ etc. Haec eſt differentia harum ſerierum $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

$+ \frac{x^4}{4}$

$+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}$ etc. et $\frac{3x^2}{2}+\frac{3x^5}{5}+\frac{3x^8}{8}$ etc. facto $x=1$. Illius autem summa est $l\frac{1}{1-x}$, huius vero summa est $\int\frac{3x\,dx}{1-x^3}$ seu $l\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}l(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{-3}}{2}l\frac{2x+1-\sqrt{-3}}{2x+1+\sqrt{-3}}-\frac{\sqrt{-3}}{2}l\frac{1-\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$. Hac igitur ab illa subtracta factoque $x=1$ prodibit $-\frac{1}{2}l3+\frac{\sqrt{-3}}{2}l\frac{3+\sqrt{-3}}{3-\sqrt{-3}}-\frac{\sqrt{-3}}{2}l\frac{1+\sqrt{-3}}{1-\sqrt{-3}}$, pro summa progressionis propositae. Est vero $\frac{\sqrt{-3}}{2}l\frac{3+\sqrt{-3}}{3-\sqrt{-3}}$ peripheria circuli diuisa per $\sqrt{3}$ posito diametro $=1$ et $\frac{\sqrt{-3}}{2}l\frac{1-\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$ huius dimidium. Quare seriei summa quam proxime erit 0,3576.

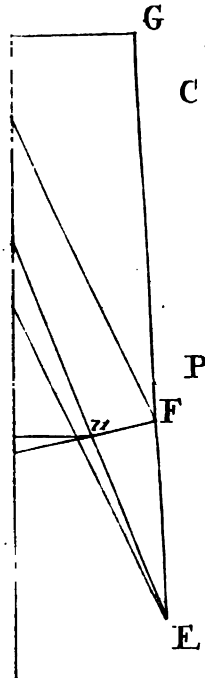
§. 18. At si etiam ipsa membra non vniformiter incedunt difficilius summa assignatur. Sumamus hanc seriem $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{3}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}-\frac{4}{14}$ etc. Haec est differentia inter has series $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}++\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\text{------}\frac{1}{i(\frac{i+3}{2})}$ et $\frac{2}{2}+\frac{3}{5}+\frac{4}{9}+\frac{5}{14}\text{------}\frac{i+1}{i(\frac{i+3}{2})}$ ita in infinitum continuatas, vt extremi termini eundem habeant denominatorem $i(\frac{i+3}{2})$. Harum serierum prioris summa est $C+li+l(i+3)-l2$, denotante C constantem §. 11. inuentam, nempe 0,577218. Altera series subtrahenda in has duas resoluitur $\frac{2}{3}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\text{----}\frac{1}{i})$ et $\frac{4}{3}(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\text{------}\frac{1}{i+3})$. Illius summa est $\frac{2}{3}C+\frac{2}{3}li$; huius vero $\frac{4}{3}C-\frac{22}{9}+\frac{4}{3}l(i+3)$. Quae ambae ab illa summa $C+li+l(i+3)-l2$ subtractae relinquunt $-C+\frac{22}{9}-l2$ seu 1,173078 quam proxime pro summa seriei propositae.

Danielis Bernoulli

DEMONSTRATIONES THEOREMATVM SVORVM DE OSCILLATIONIBVS CORPORVM FILO FLEXILI CONNEXORVM ET CATENAE VERTICALITER SVSPENSAE.

I.

Tabula IX DEdi nuper theoremata de oſcillationibus corporum filo flexili connexorum: demonſtrationes autem, quas tum non vacabat in ordinem redigere, nunc paullo plus otii nactus eo libentius cum publico communicabo, quod multorum aliorum ſimilium problematum ſolutio inde peti poſſit, eorum praeſertim in quibus motus partium non ſunt inter ſe paralleli. Inter huiusmodi problemata facillimum eſt atque a multis iam diu ſolutum, quod circa centra oſcillationis inueniendis verſatur. Ad ea quoque pertinet problema de motu mixto determinando, quo corpus ex pluribus diuerſae grauitatis ſpecificae partibus compoſitum in fluido deſcendit: pertinent porro theoremata, quae in Commentar. Tom. II. p. 200. a Patre cum publico communicata fuerunt: Praeſertim autem methodus, quam mox exhibebo, cum ſucceſſu adhibetur, quando in ſyſtemate corporum plurium lege aliqua inter ſe connexorum, ſitus vnius ex ſitu alterius cognito non poteſt immediate determinari,



1.

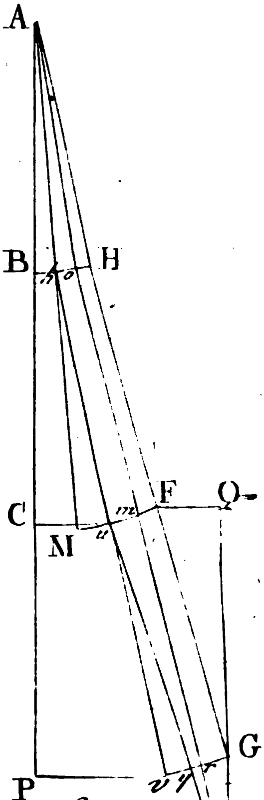


Fig: 2

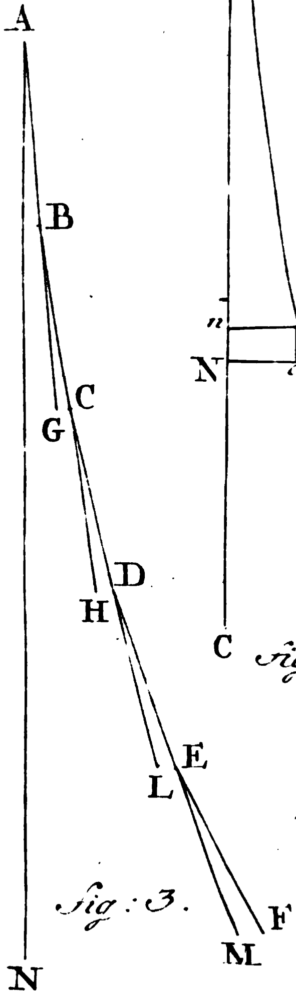


Fig: 3.

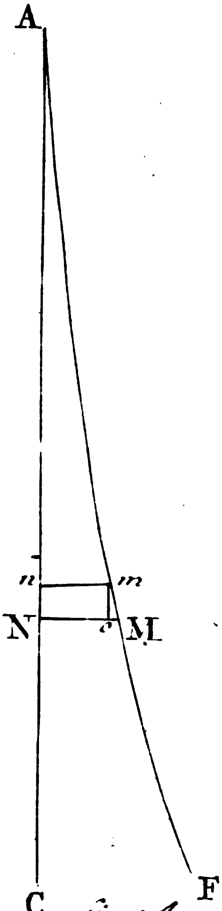


Fig: 4.

nari, veluti cum corpus ſuper hypothenuſa trianguli in horizonte mobilis deſcendit; hic enim ſi vel noueris ſitum corporis in hypothenuſa, ipſius tamen trianguli ſitus in horizonte incognitus manebit niſi hunc aliunde determinare ſcias. Problema hoc poſtremum aliquando Patri meo propoſueram et plane inter ſe conuenerunt ſolutiones noſtrae; Eam, quae a Patre profecta eſt, Academia Commentariis ſuis inſeri curauit, vid. Tom. V. p. 11. Quae ad hanc claſſem pertinent, nouam mechanicae partem efficiunt: Principium autem, quo vti ſoleo ad huiusmodi problemata ſoluenda, tale eſt:

Puta in ſyſtemate ad momentum temporis corpora ſingula a ſe inuicem ſolui, nulla facta attentione ad motum iam acquiſitum, quia hic de acceleratione ſeu mutatione motus elementari tantum ſermo eſt: ita quolibet corpore ſitum ſuum mutante, ſyſtema aliam accepit figuram, quam non-ſolutum habere debebat: Igitur finge cauſam mechanicam quamcunque ſyſtema in debitam figuram reſtituentem atque, rurſus inquiro in mutationem ſitus ab hac reſtitutione ortam in quolibet corpore; et ex vtraque mutatione intelliges mutationem ſitus in ſyſtemate non ſoluto, indeque accelerationem retardationemue veram cuiusuis corporis ad ſyſtema pertinentis obtinebis.

Quomodo haec regula ad praeſens noſtrum de oſcillationibus corporum filo flexili ligatorum aut catenae verticaliter ſuſpenſae determinandis, negotium applicanda ſit, hic docebo, alia occaſione idem fortaſſe etiam monſtraturus in problematis aliis partim iam a Patre meo tractatis partimque nouis.

Figura 1. II. Sit filum AHF grauitatis expers, duobus oneratum ponderibus in H et F, e puncto fixo A ſuſpenſa: faciant corpora oſcillationes veluti infinite paruas, ſintque eorundem diſtantiae a linea verticali AC, vt $2Ml$ ad $mL - ml + ML + Ml \pm \surd(4mMLL + (ml + ML + Ml - mL)^2)$. Demonſtrandum eſt, oſcillationes in vtroque corpore fore iſochronas. Valores litterarum m, M, l et L infra dabuntur.

Erunt oſcillationes iſochronae, ſi fuerint vires acceleratrices in corporibus vt diſtantiae eorundem a linea verticali; nec enim differunt diſtantiae hae ab arcubus deſcribendis: Has igitur vires acceleratrices definiemus: ponatur pars fili HF extendi facillime, ita vt corpus F nihil amplius retineat: accelerabitur corpus iſtud verticaliter deorſum a grauitatis vi naturali: finge ita accelerari vt perueniat dato tempuſculo ex F in E, dum eodem temporis puncto alterum corpus filo AH alligatum arculum HL deſcribit: ductae iam intelligantur horizontales LB et EC, quae quamuis ceu infinite paruae conſiderentur, ſint tamen arculo LH infinities maiores. Apparet ex mechanicis et theoria infinite paruorum, fore $HL = \frac{BL}{LA} \times FE$. Poſitis igitur corporibus in L et E ductisque rectis AL et LE, erit quidem filum AL inuariatae longitudinis, alterum autem LE iam maioris erit longitudinis quam fuerat in ſitu HF: concipiatur igitur cauſa, quae filum LE contrahat ad ſuam lon-

longitudinem naturalem: dico ab iſta contractione corpus ex E eleuatum iri vsque in u, alterúmque retractum ex L in n: ſpatiola Eu, Ln determinabimus, poſtquam monuero, quod, ducta minima recta Fu, verae accelerationes, quae durante aſſumto tempuſculo acceſſerunt, ſeu ipſae etiam vires acceleratrices rationem habiturae ſint in corporibus H et F vt Hn et Fu. Sed vt ratio intelligatur inter Hn et Fu, faciemus AH ſeu AL $= l$: HF ſeu $nu =$ L: maſſa in corpore ſuperiori $= m$; in inferiori $=$ M. Producatur AL et ex E in illam perpendicularis ED demittatur. Denique ducantur horizontalis HG et verticalis FG: erit Fu ad nu perpendicularis cenſenda atque triangulum minimum FEu triangulo HFG ſimile, ipſaque Eu lineolae FE aequalis: vnde ſi ponatur BL $= 1$; DE $= x$; erit MC $= 1 + \frac{L}{l}$, EC $= x + 1 + \frac{L}{l}$; HG $=$ CE $-$ BL $= x + \frac{L}{l}$; hinc

$$Fu = \left(\tfrac{1}{l} + \tfrac{x}{L}\right) \times FE:$$

Supereſt vt definiatur Hn: Notetur quod filum LE, dum contrahitur, corpus E directe ſurſum trahit; dum corpus alterum L oblique ad directionem ſuam Ln retrahit: hoc igitur titulo erit Ln ad Eu vt DE ad LE ſeu vt x ad L: ſed eſt praeterea Ln ad Eu reciproce vt maſſa corporis L ad maſſam corporis E, id eſt, directe vt M ad m: compoſita ratione erit Ln:Eu $=$ Mx : mL; vnde poſita FE pro Eu, erit L$n = \frac{Mx}{mL} \times$ FE; et quia H$n =$ HL $-$ Ln, ſequitur fore

$$Hn = \left(\tfrac{1}{l} - \tfrac{Mx}{mL}\right) \times FE:$$

ſint igitur vires acceleratrices in corporibus H et F, vt $\frac{1}{l}+\frac{x}{L}$ ad $\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL}$: ponantur hae vires ad iſochronismum obtinendum proportionales ſpatiis deſcribendis LB et EC, ſeu fiat $(\frac{1}{l}+\frac{x}{L}):(\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL})=1:(x+1+\frac{L}{l})$, atque reperietur facta reductione

$$x=\frac{mL-ml-ML-Ml\pm\sqrt{[4mMLL+(ml+ML+Ml-mL)^2]}}{2ML}$$

Huic autem ſi addatur MC ſeu $1+\frac{L}{l}$, habebitur

$$CE=\frac{mL-ml+ML+Ml\pm\sqrt{[4mMLL+(ml+ML+Ml-mL)^2]}}{2Ml}\times BL,$$

plane vt habet in parte huius argumenti prima theorema tertium Prop. 7.

III. Poſitis iisdem, erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni aequalis

$$\frac{2mLl}{mL+ml+Ml+ML\mp\sqrt{[4mMLL+(ml+ML+Ml-mL)^2]}},$$

cuius rei rationem intelliges ex eo, quod ſi pendulum ſimplex longitudinis AH ſeu l conſideretur, ſit vis acceleratrix in hoc pendulo ſimplici ad vim acceleratricem corporis H in pendulo noſtro compoſito vt Hl ad Hn, id eſt, vt $\frac{1}{l}$ ad $\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL}$: ſunt autem longitudines pendulorum iſochronorum in reciproca ratione virium acceleratricium; Erit igitur longitudo penduli quaeſiti ad longitudinem AH vt $\frac{1}{l}$ ad $\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL}$: vnde inuenitur longitudo penduli iſochroni $=\frac{mLl}{mL-Mlx}$, et poſito valore pro x ſupra inuento, erit eadem longitudo, vt dictum eſt, aequalis

$$\frac{2mLl}{mL+ml+Ml+ML\mp\sqrt{[4mMLL+(ml+ML+Ml-mL)^2]}}$$

Figura 2. IV. Si filum AG ſit tribus oneratum corporibus in H, F et G, oſcillationes facientibus valde paruas et iſochrochronas, ponaturque massa corporis supremi $= m$; medii $= M$ et infimi $= \mu$: distantia $AH = l$; $HF = L$; $FG = \lambda$: distantia corporis H a linea verticali $AP = x$; distantia vero corporis F ab eadem linea verticali $= s$; erit

$$((MMl\lambda + M\mu l\lambda)ss + mMl\lambda + m\mu lL - mML\lambda - MMl\lambda - MML\lambda + m\mu l\lambda - M\mu l\lambda - M\mu L\lambda)s - m\mu l\lambda - mMl\lambda) \times ((Ml\lambda + \mu l\lambda)s - mL\lambda - Ml\lambda - ML\lambda - \mu l\lambda - \mu L\lambda + mlL) = mm\mu llLLs.$$

Distantia autem corporis infimi a linea verticali erit pro quauis radice ipsius s aequalis

$$\left(\frac{MM\lambda}{m\mu L} + \frac{M\lambda}{mL}\right)ss + \left(1 + \frac{\lambda}{L} + \frac{M\lambda}{\mu L} - \frac{M\lambda}{\mu l} - \frac{MM\lambda}{m\mu L} - \frac{MM\lambda}{m\mu l} - \frac{M\lambda}{mL} - \frac{M\lambda}{ml}\right)s - \frac{M\lambda}{\mu L} - \frac{\lambda}{L}.$$

Haec vt demonstrentur, ponatur rursus filum infimum FG facillime extendi atque sic corpus G vi grauitatis naturali acceleratum, assumto aliquo tempusculo infinite paruo verticaliter descendere ex G in s, dum interea ambo corpora superiora accelerentur, vti in figura prima, faciendo arculos suos Hn et Fu. Patet autem, si Gs in figura secunda aequalis ponatur descensui FE in figura prima, fore pariter arculos Hn et Fu idem in vtraque figura; erit igitur per praecedentem paragraphum $Hn = (\frac{1}{2} - \frac{Mx}{mL}) \times Gs$ et $Fu = (\frac{1}{2} + \frac{x}{l} \times Gs$, intelligendo per x lineolam uM perpendiculariter ad prolongatam An ductam, prouti deinceps per y intelligemus lineolam yv, quae perpendicularis est ad prolongatam nu: iam ducantur horizontalis FQ ac verticalis QG, sumtaque

ſumtaque $uy = FG$, ducatur Gy. His ita ad calculum praeparatis, nunc rurſus ſingendum eſt, rectam us, in priſtinam longitudinem FG contrahi: ita eleuabitur corpus ex s in y vel in r (eſt autem yr nulla prae Gy); corpora autem ſuperiora iterum retrahentur ex n in o et ex u in m: atque ſic tandem patet fore vires acceleratrices in ſingulis corporibus ſecundum directiones ſuas naturales ad vim grauitatis naturalem, vt ſe habent Ho, Fm et Gy ad Gs: ſupereſt igitur vt ſingula haec elementa exprimantur, probe obſeruato arculos Hn, Fu etc. nullos eſſe prae diſtantiis corporum a linea verticali. Inuenietur autem recte inſtituto calculo $FL = \frac{\lambda}{l} + \frac{\lambda}{L} x + y$: et quia $FG : FQ = Gs : Gy$, erit

$$Gy = \left(\frac{1}{l} + \frac{x}{L} + \frac{y}{\lambda}\right) \times Gs.$$

Iam porro quaerendum eſt, quantae futurae ſint retrogradationes corporum in u et n poſitorum, quae fiunt, dum corpus infimum ex s in y aut in r eleuatur. Notetur potentiam filum us contrahentem vbique aequaliter diffundi. Erit igitur rurſus vt in ſuperiori paragrapho um ad sy ſeu ad Gs in ratione compoſita ex vy ad uy et maſſae μ ad maſſam M: vnde inuenitur $um = \frac{\mu y}{M\lambda} \times Gs$, qua ſubtracta ab Fu ſeu ab $\left(\frac{1}{l} + \frac{x}{L}\right) \times Gs$, oritur

$$Fm = \left(\frac{1}{l} + \frac{x}{L} - \frac{\mu y}{M\lambda}\right) \times Gs.$$

Denique quia ab eo, quod corpus medium ex u in m cedit, nihil patitur corpus ſupremum, erit, vt antea, no ad ys ſeu Gs in ratione compoſita ex Mu ad un et maſſae μ ad maſſam m; vnde $no = \frac{\mu x}{ML} \times Gs$: hacque ſub-

sublata ab nH seu ab $(\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL})\times Gs$, fiet.

$$Ho=(\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL}-\frac{\mu x}{mL})\times Gs.$$

Postquam sic accelerationes corporum singulorum in veris suis directionibus inuenimus, erunt hae distantiis suis ab linea verticali yP, uC et nB seu quantitatibus $(1+\frac{L}{l}+\frac{\lambda}{l}+x+\frac{\lambda}{L}x+y)$, $(1+\frac{L}{l}+x)$ et (1) proportionales faciendae isochronismi ergo: Ita duae aequationes obtinebuntur valores x et y determinantes: atque si deinde ponatur $1+\frac{L}{l}+x=s$, inuenietur aequatio pro s eadem, quam supra recensuimus, quamque demonstrandam suscepimus.

V. Acceleratio corporis H expressa per Ho seu per $(\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL}-\frac{\mu x}{mL})\times Gs$ est ad accelerationem eiusdem corporis, absentibus duobus inferioribus expressam per $\frac{1}{l}\times Gs$, vt $\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL}-\frac{\mu x}{mL}$ ad $\frac{1}{l}$, seu vt $mL-Mlx-\mu lx$ ad mL. Sequitur inde longitudinem penduli isochroni esse.

$$\frac{mLl}{mL-Mlx-\mu lx}$$

Hanc autem non differre ab illa, quae in parte prima, propositione decima tertia data fuit, videbis si ibi, prouti factae a nobis denominationes postulant, intelligas per x, quod hic per s seu per $1+\frac{L}{l}+x$.

VI. Sint iam plura et quotcunque volueris corpora, veluti B, C, D, E, F producantur singula fila designenturque sinus angulorum BAN (AN est verticalis) CBG, DCH, EDL, FEM per p, q, r, s, t; massae autem corporum per ipsas litteras iisdem appositas denotentur, Figura 3.

 dico

dico posita vi grauitatis naturali $=1$, vires acceleratrices corporum secundum suas directiones fore vt sequitur.

$$\text{in } B = p - \frac{C+D+E+F}{B} q,$$
$$\text{in } C = p + q - \frac{D+E+F}{C} r,$$
$$\text{in } D = p + q + r - \frac{E+F}{D} s,$$
$$\text{in } E = p + q + r + s - \frac{F}{E} t,$$
$$\text{in } F = p + q + r + s + t;$$

Veram hanc esse virium acceleratricium legem, percipies si sextum corpus suo filo inferius adhuc appendi ponas, calculumque deinde instituas, vt fecimus ratione trium corporum paragrapho quarto, fingendo scilicet, corpus infimum naturali grauitatis vi verticaliter deorsum accelerari, reliquis interim secundum suam indolem vibratis, idemque corpus mox a contractione fili iterum eleuari: ita enim legem hanc accelerationum nunc expositam a quinque corporibus ad sex, et inde ad septem atque sic quousque libuerit recte continuari videbis.

Ex assumtis autem singulorum angulorum sinibus, deducuntur corporum a linea verticali distantiae, ac si quamuis distantiam vi acceleratrici respondenti proportionalem facias, habebis tot aequationes quot incognitas, sic vt omnia denique desiderata inde recte definiri possint.

VII. Puta nunc corpora esse numero infinita et Figura 4 aequalia, distantiis minimis et aequalibus a se inuicem posita: ideam habebis catenae vniformis ab vna extremitate suspensae, qualis est AC vel AF: In hac elemenmentum consideretur infinite paruum Mm vel Nn, ductis MN et mn ad AC perpendicularibus et mo eidem AC parallela: ponatur Am vel $An = s$ (nec enim differunt quia infinite parum distant); mM vel $nN = ds$, quod elementum constans assumatur: longitudo catenae integrae $AF = l$; $mn = y$; $Mo = dy$: erit (posita vi grauitatis naturali $= 1$) per praecedens theorema vis acceleratrix in m aequalis summae omnium sinuum angulorum contactus, qui sunt inter A et m, diminutae tertia proportionali corpusculi in m, summae omnium corpusculorum in MF et sinus anguli contactus in M: sic igitur habetur vis acceleratrix in $M = \int \frac{ddy}{ds} - \frac{(l-s)\,d\,dy}{ds^2}$. Quia vero isochronismus postulat, vt vis acceleratrix sit proportionalis applicatae MN, erit assumta n pro constante $\int \frac{ddy}{ds} - \frac{(l-s)\,ddy}{ds^2} = \frac{y}{n}$: sumatur integrale termini primi sine additione constantis, quia hic nulla sumenda est: sic fiet $\frac{dy}{ds} - \frac{(l-s)ddy}{ds^2} = -\frac{y}{n}$. Denique ponatur $l-s$ seu FM aut $CN = x$, et erit $\frac{-dy}{dx} - \frac{xddy}{dx^2} = \frac{y}{n}$, siue

$$n\,dy\,dx + n\,x\,ddy = -y\,dx^2,$$

quae aequatio denotat naturam curuae AF: quoniam vero integralis eius non apparet, posui

$$y = \alpha - \beta x - \gamma xx - \delta x^3 - \varepsilon x^4 - \text{etc.},$$

$$dy = -\beta dx - 2\gamma x dx - 3\delta xx dx - 4\varepsilon x^3 dx - \text{etc.}$$

$$ddy = -2\gamma dx^2 - 2.3.\delta x dx^2 - 3.4.\varepsilon xx dx^2 - \text{etc.}$$

Hisque valoribus substitutis diuisaque deinde aequatione per dx^2, oritur

$$-\beta - 2\gamma x - 3\delta xx - 4\varepsilon x^3 - \text{etc.}$$
$$-2\gamma x - 2.3\delta xx - 3.4\varepsilon x^3 - \text{etc.} = 0,$$
$$+\frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n}x - \frac{\gamma}{n}xx - \frac{\delta}{n}x^3 - \text{etc.}$$

cui aequationi ſatisfit ponendo $\alpha = 1$; $\beta = \frac{1}{n}$; $\gamma = \frac{-1}{4nn}$; $\delta = \frac{1}{4.9n^3}$; $\varepsilon = \frac{-1}{4.9.16n^4}$ etc. vnde

$$y = 1 - \frac{x}{n} + \frac{xx}{4nn} - \frac{x^3}{4.9n^3} + \frac{x^4}{4.9.16n^4} - \text{etc.}$$

vbi per 1 intelligenda eſt diſtantia puncti infimi F a verticali: et quia poſita $x = l$, eſt $y = 0$ erit ſimul

$$1 - \frac{l}{n} + \frac{ll}{4nn} - \frac{l^3}{4.9n^3} + \frac{l^4}{4.9.16n^4} - \text{etc.} = 0;$$

Hinc deriuandus eſt valor litterae n, qui exprimet longitudinem ſubtangentis in F. Haec demonſtrant veritatem theorematis, quod in praecedente diſſertatione octauum eſt.

VIII. Vt habeatur longitudo penduli iſochroni, quaerenda eſt vis acceleratrix in puncto F, quae per §. VI. erit aequalis ſummae ſinuum omnium angulorum contactus ab A vsque in F, id eſt $= \int \frac{-ddy}{dx}$ ſeu $= \frac{-dy}{dx}$, ponendo ſimul $x = 0$; et hinc fit $\frac{-dy}{dx} = \frac{-1}{n}$. Eſt itaque vis acceleratrix in F ad vim acceleratricem naturalem vt 1 ad n: ſi vero pendulum ſimplex longitudinis l habeatur, erit vis acceleratrix in illo $= \frac{1}{l}$ ſub eadem diſtantia à linea verticali; ergo vis acceleratrix in extremitate catenae eſt ad vim acceleratricem in pendulo ſimplici eiusdem longitudinis, vt l ad n: Hincque erit longitudo penduli ſimplicis cum catena ſimul vibrantis $= n$, vt habet theorema nonum in praemiſſa diſſertatione.

IX.

IX. Theoremata autem decimum et vndecimum vnice pendent à debitae constantis additione, eaque proinde ceu nimis nunc facilia hic non attingam: sed duodecimum ex §. VI rursus, hunc in modum deducetur.

Corpuscula nunc considerentur infinita et aequalibus distantiolis à se inuicem posita, sed inaequalis ponderis: ita habebitur idea catenae pro lubitu inaequaliter crassae; sit haec ita formata, vt longitudini FM (x) pondus respondeat ξ, denotante ξ functionem qualemcunque ipsius x: Erit (per §. VI.) vis acceleratrix in $M = \int \frac{-ddy}{dx} - \frac{\xi ddy}{d\xi dx} = \frac{y}{n}$, vel quia dx constans, erit $\frac{-dy}{dx} - \frac{\xi ddy}{d\xi dx} = \frac{y}{n}$, aut $n d\xi dy + n\xi ddy = -y d\xi dx$, vel denique

$$\frac{-n\xi dy}{dx} = \int y dx,$$

vt fert theorema duodecimum, de quo sermo erat: demonstratio magis fiet intelligibilis, si simul conferatur paragraphus septimus.

DE INFINITIS CVRVIS EIVSDEM GENERIS.

SEV METHODVS INVENIENDI AEQVATIONES PRO INFINITIS CVRVIS EIVSDEM GENERIS.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Curuas eiusdem generis hic voco tales curuas, quae a se inuicem non differunt nisi ratione lineae cuiusdam constantis, quae alios atque alios valores assumens eas curuas determinat. Linea haec constans a *Cel. Hermanno* modulus est vocatus, ab aliis parameter: quia autem parametri nomen ambiguitatem creare potest, moduli vocabulum retinebo. Est itaque modulus linea constans et invariabilis, dum vna infinitarum curuarum quaecunque determinatur; varios autem habet valores et ideo variabilis est, si ad diuersas curuas refertur. Sic si in aequatione $y^2 = ax$ sumatur a pro modulo, ex variabilitate ipsius a innumerabiles oriuntur parabolae super eodem axe positae et communem verticem habentes.

§. 2. Infinitae igitur curuae eiusdem generis omnes vnica aequatione exprimuntur, quam modulus qui nobis

nobis ſemper litera a indicabitur, ingreditur. Huic enim modulo, ſi ſucceſſiue alii atque alii valores tribuantur, aequatio continuo alias dabit curuas, quae omnes in vna aequatione continentur. Aequationem hanc modulum continentem cum *Hermanno* modularem vocabimus; in qua igitur praeter alias conſtantes et eiusdem valoris in omnibus curuis quantitates inſunt modulus a et duae variabiles ad curuam quamlibet pertinentes, cuiusmodi ſunt vel abſciſſa et applicata, vel abſciſſa et arcus curuae, vel area curuae et abſciſſa etc. prout problema ſoluendum poſtulat.

§. 3. Sint igitur quantitates variabiles x et z, quae cum modulo a aequationem modularem ingrediuntur. Perſpicuum eſt, ſi detur aequatio algebraica inter x et z et a, pro vnica curua, in qua a vt conſtans conſideratur, eandem fore ſimul modularem, ſeu ad omnes curuas pertinere, ſi modo a fiat variabilis. At ſi inter x et z non poterit aequatio algebraica dari, difficile erit aequationem modularem inuenire. Nam ſit $z = \int P\,dx$, vbi P in a, z et x, quomodocunque detur, ſeu $dz = P\,dx$, in qua aequatione a vt conſtans conſideratur; intelligitur aequationem modularem haberi, ſi integralis aequationis $dz = P\,dx$ denuo differentietur, poſito etiam a variabili. Sed cum integrationem perficere non liceat, eiusmodi methodus deſideratur, qua differentialis aequatio, quae prodiret, ſi integralis denuo differentietur poſita etiam a variabili, inueniri poſſit.

§. 4.

§. 4. Ad construendas quidem et cognoscendas curuas aequatio $dz = Pdx$ sufficit. Nam, dato ipsi modulo a certo valore construetur aequatio $dz = Pdx$, quo facto habebitur vna curuarum infinitarum, eodemque modo aliae reperientur aliis ponendis valoribus loco a. Sed si in his curuis certa puncta debeant assignari prout problema aliquod postulat, talis aequatio $z = \int Pdx$ non sufficit sed requiritur aequatio a signis summatoriis libera in qua si non est algebraica, etiam differentialia ipsius a insint. Ex data igitur aequatione differentiali pro vnica curua $dz = Pdx$ in qua a vt constans consideratur, quaeri oportet aequationem differentialem, in qua et a sit variabilis, haecque erit modularis. Haec vero modularis interdum erit differentialis primi gradus, interdum secundi et altioris, interdum etiam penitus non poterit inueniri.

§. 5. Quo igitur methodum tradam, qua ex aequatione differentiali $dz = Pdx$, in qua a est constans, modularis possit inueniri, quae a vt variabilem contineat; pono primo P esse functionem ipsarum a et x tantum, vt $\int Pdx$ saltem per quadraturas exhiberi possit. Erit igitur $z = \int Pdx$, in integratione ipsius Pdx, a pro constanti habita. Quaeritur nunc differentiale ipsius $\int Pdx$ si etiam a vt variabilis tractetur; quo inuento ipsique dz aequali posito habebitur aequatio modularis. Differentiale autem ipsius $\int Pdx$ habebit hanc formam $Pdx + Qda$, eritque $dz = Pdx + Qda$ aequatio modularis, si modo valor ipsius Q esset cognitus.

§. 6.

§. 6. Ad inueniendum autem valorem ipſius Q ſequens inſeruit theorema. *Quantitas* A *ex duabus variabilibus t et u vtcunque compoſita, ſi differentietur poſito t conſtante, hocque differentiale denuo differentietur poſito u conſtante et t variabili, idem reſultat ac ſi inuerſo ordine* A *primo differentietur poſito u conſtante hocque differentiale denuo differentietur poſito t conſtante et u variabili.* Vt ſit $A = \sqrt{(t^2 + nu^2)}$, differentietur poſito t conſtante, habebitur $\frac{nudu}{\sqrt{(t^2+nu^2)}}$. Hoc denuo differentietur poſito u conſtante et prodibit $\frac{-ntudtdu}{(t^2+nu^2)^{\frac{3}{2}}}$. Iam ordine inuerſo differentietur $\sqrt{(t^2+nu^2)}$ poſito u conſtante, eritque differentiale $\frac{tdt}{\sqrt{(t^2+nu^2)}}$, quod denuo differentiatum poſito t conſtante dabit $\frac{-ntudtdu}{(t^2+nu^2)^{\frac{3}{2}}}$, id quod congruit cum prius inuento. Atque ſimilis conuenientia in quibusque aliis exemplis cernetur.

§. 7. Quamuis autem huius theorematis veritatem exercitati facile perſpiciant, demonſtrationem tamen ſequentem adiiciam ex ipſius differentiationis natura petitam. Cum A ſit functio ipſarum t et u, abeat A in B ſi loco t ponatur $t+dt$; at poſito $u+du$ loco u abeat A in C. Poſito autem ſimul $t+dt$ loco t et $u+du$ loco u mutetur A in D. Ex his perſpicuum eſt, ſi in B ſcribatur $u+du$ loco u prouenire D; ſimilique modo ſi in C ponatur $t+dt$ loco t proditurum quoque D. His praemiſſis, ſi differentietur A poſito t conſtante prodibit C−A, nam poſito $u+du$ loco u abit A in C, differentiale autem est $C-A$. Si porro in $C-A$ ponatur $t+dt$ loco t prodibit $D-B$, quare differentiale erit $D-B-C+A$. Inuerso nunc ordine posito $t+dt$ loco t in A habebitur B, eritque differentiale ipsius A posito tantum t variabili $B-A$. Hoc differentiale posito $u+du$ loco u abit in $D-C$, quare eius differentiale erit $D-B-C+A$, id quod congruit cum differentiali priori operatione inuento. Q. E. D.

§. 8. Istud autem theorema hoc modo inseruit ad valorem ipsius Q inueniendum. Cum P et Q sint functiones ipsarum a et x, sit $dP = A\,dx + B\,da$ et $dQ = C\,dx + D\,da$, atque z cum sit $= \int P\,dx$, erit quoque functio ipsarum a et x, positum autem est $dz = P\,dx + Q\,da$. Iam secundum Theorema differentietur z posito x constante, eritque differentiale $Q\,da$ hoc porro differentiatum posito a constante dabit $C\,da\,dx$. Altera operatione differentiale ipsius z posito primo a constante est $P\,dx$, huius vero differentiale posito x constante est $B\,da\,dx$. Quare vi theorematis aequalia esse debent $C\,da\,dx$ et $B\,da\,dx$, ex quo fit $C = B$. Datur autem B ex P; differentiale enim ipsius P posito x constante diuisum per da dat B. Cum igitur sit $dQ = B\,dx + D\,da$, erit $Q = \int B\,dx$, si in hac integratione a vt constans consideretur.

§. 9. Ex his ergo habebitur $dz = P\,dx + da \int B\,dx$, existente $dP = A\,dx + B\,da$. Si igitur $B\,dx$ integrari poterit, desiderata habebitur aequatio modularis. At si integrari non potest aeque inutilis est haec aequatio ac

prima

prima $z = \int P\,dx$, vtraque enim inuoluit integrationem differentialis, in qua a vt constans debet considerari, id quod est contra naturam aequationis modularis, quippe in qua a aeque variabile esse debet ac x et z.

§. 10. Quando autem $B\,dx$ integrationem non admittit: non tamen aequatio inuenta vt inutilis omnino est negligenda. Nam si integratio ipsius $B\,dx$ pendeat a $\int P\,dx$ aequatio modularis poterit exhiberi. Si enim fuerit $\int B\,dx = a\int P\,dx + K$ existente K functione ipsarum a et x algebraica, erit ob $\int P\,dx = z$, $\int B\,dx = az + K$ et $dz = P\,dx + \alpha z\,da + K\,da$, quae aequatio re-uera erit modularis. Quoties igitur $B\,dx$ vel reipsa poterit integrari, vel ad integrationem ipsius $P\,dx$ deduci, aequatio habebitur modularis, quae erit differentialis primi gradus. At si $P\,dx$ est integrabile, ne hoc quidem opus est: sed $z = \int P\,dx$ erit simul aequatio modularis.

§. 11. Si autem $\int B\,dx$ neque algebraice exhiberi neque ad $\int P\,dx$ reduci potest, dispiciendum est, num $\int B\,dx$ ad integrationem alius differentialis, in qua a non inest, possit reduci. Tale enim integrale in qua a non inest non turbat aequationem modularem, cum si libuerit per differentiationem tolli possit. Atque eodem iure, si $\int P\,dx$ reduci poterit ad aliud integrale, quod a non continet, nequidem hac ipsius Q determinatione opus est, sed $z = \int P\,dx$ statim dat aequationem modularem, vt si sit $\int P\,dx = b\int K\,dx$ data b per a et K per x tantum, erit aequatio modularis $z = b\int K\,dx$ seu $dz = \frac{z\,db}{b} + K\,b\,dx$.

§. 12. Si autem haec omnia nullum inueniant locum indicio eſt, aequationem modularem primi gradus differentialem non dari. Quamobrem in altioris gradus differentialibus quaeri debebit. Ad hoc differentio denuo aequationem $dz = P\,dx + da\int B\,dx$. Pono autem $dB = E\,dx + F\,da$, quo facto erit ipſius $\int B\,dx$ differentiale $B\,dx + da\int F\,dx$. Differentiatione igitur peracta et loco $\int B\,dx$ eius valore ex eadem aequatione nempe $\frac{dz}{da} - \frac{P\,dx}{da}$ poſito, habebitur $ddz = P\,ddx + dP\,dx + \frac{dz\,dda}{da} - \frac{P\,dx\,dda}{da} + B\,da\,dx + da^2\int F\,dx$. Erit igitur $\int F\,dx = \frac{ddz}{da^2} - \frac{dz\,dda}{da^3} - \frac{P\,ddx}{da^2} - \frac{dP\,dx}{da^2} + \frac{P\,dx\,dda}{da^3} - \frac{B\,dx}{da}$. Cum autem ſit $\int B\,dx = \frac{dz}{da} - \frac{P\,dx}{da}$ et $\int P\,dx = z$, ſi $\int F\,dx$ reduci poterit ad integralia $\int B\,dx$ et $\int P\,dx$ vel ſi reipſa poterit integrari, habebitur aequatio modularis, quae erit differentialis ſecundi gradus. Vt ſi fuerit $\int F\,dx = \alpha\int B\,dx + \beta\int P\,dx + K$, datis α et β vtcunque per a et conſtantes, et K per a et x conſtantes, erit aequatio modularis haec $\frac{da\,ddz - dz\,dda - P\,da\,ddx + P\,dx\,dda - dP\,da\,dx}{da^3} - \frac{B\,dx}{da} = \frac{\alpha\,dz - \alpha P\,dx}{da} + \beta z + K$. At B et F ex dato P facile reperiuntur.

§. 13. Si $\int F\,dx$ quod autem rariſſime euenit vel non amplius in ſe contineat a, vel ad aliud poſſit reduci, in quo a non inſit, aequatio inuenta differentialis ſecundi gradus pro legitima modulari poterit haberi. Sed ſi haec omnia nondum ſuccedant, adhuc differentiatio eſt inſtituenda, in qua differentiale ipſius $\int F\,dx$ erit $F\,dx + da\int H\,dx$ poſito $dF = G\,dx + H\,da$. Quo facto videndum eſt vel an $\int H\,dx$ re ipſa poſſit exhiberi, vel an pendeat a praecedentibus $\int F dx$, $\int B dx$ et $\int P dx$, vel an poſſit ex ſigno ſummatorio a eliminari. Quorum ſi quod obtigerit, habebitur aequatio modularis differentialis tertii gradus; ſin vero nullum locum habuerit, continuanda eſt differentiatio ſimili modo donec ſigna ſummatoria potuerint eliminari.

§. 14. His generalibus praemiſſis ad ſpecialia accedo, caſus euoluturus, quibus functio P quodammodo determinatur. Sit igitur P functio ipſius x tantum, a prorſus non inuoluens, quam littera X deſignabo, erit ergo. $dz = X dx$, quae quidem aequatio quia non continet a, ad vnicam videtur curuam pertinere, neque ad modularem praebendam apta eſſe. Sed cum in integratione conſtantem addere liceat, poterit eſſe $z = \int X dx + na$ ſeu differentiando $dz = X dx + n da$, quae eſt vera aequatio modularis. Eadem aequatio prodiiſſet, ſi iuxta regulam X differentiaſſem poſito x conſtante, vnde prodit $B = o$ et $\int B dx = n$ conſtanti, orta igitur eſſet aequatio modularis $dz = X dx + n da$ cuius loco potius integralis $z = \int X dx + na$ vſurpatur.

§. 15. Sit nunc $P = AX$, exiſtente A functione ipſius a, et X ipſius x tantum. Cum igitur ſit $z = \int P dx$ erit $z = \int AX dx$ ſeu quia in integratione a vt conſtans debet conſiderari, $z = A\int X dx$. Quae aequatio ſeu eius differentialis $A dz - z dA = A^2 X dx$ erit aequatio modularis quaeſita. Loco A quidem cum ſit functio ipſius a tantum, poni poteſt ipſe modulus a: nam loco moduli eius functio quaecunque eodem iure pro modulo haberi poteſt.

§. 16. Sit $P = A + X$ litteris A et X eosdem vt ante retinentibus valores. Erit ergo $dz = A dx + X dx$ atque $z = Ax + \int X dx$, quae aequatio iam est modularis; quia modulus A non est in signo summatorio inuolutus. Si quem autem $\int X dx$ offendat, differentialem aequationem $dz = A dx + x dA + X dx$ pro modulari habere potest.

§. 17. Simili ratione modularem aequationem inuenire licet, si fuerit $P = AX + BY + CZ$ etc. vbi A, B, C sunt functiones quaecunque ipsius moduli a, et X, Y, Z functiones quaecunque ipsius x et constantium excepta a. Namque ob $dz = AX dx + BY dx + CZ dx$ erit $z = A\int X dx + B\int Y dx + C\int Z dx$, quae simul est modularis, cum modulus a nusquam post signum summatorium reperiatur.

§. 18. Sit $P = (A + X)^n$ seu $z = \int dz (A + X)^n$. Differentiale ipsius P posito x constante est $n(A + X)^{n-1} dA$ id quod per da diuisum dat superiorem valorem B vid. §. 8. Erit igitur $dz = (A + X)^n dx + n dA \int (A + X)^{n-1} dx$ seu $\int dx (A + X)^{n-1} = \frac{dz - (A + X)^n dx}{n dA}$. Cum igitur sit $\int dx (A + X)^n = z$, si haec duo integralia a se inuicem pendeant, vel $\int dx (A + X)^{n-1}$ algebraice etiam exprimi poterit, habebitur quod quaeritur. Si neutrum contingat denuo differentiatio est instituenda. Est autem differentiale ipsius $\int dx (A + X)^{n-1} = dx (A + X)^{n-1} + (n - 1) dA \int (A + X)^{n-2} dx = \text{Diff.} \frac{dz - (A + X)^n dx}{n dA}$

Erit

Erit itaque $\int dx(A+X)^{n-2} = -\frac{1}{(n-1)dA}$ Diff. $\frac{dz-(A+X)^n dx}{ndA}$ $-\frac{dx(A+X)^{n-1}}{(n-1)dA}$. Quare videndum eſt an $\int dx(A+X)^{n-2}$ poſſit vel integrari vel ad priora integralia reduci.

§. 19. Si n fuerit numerus integer affirmatiuus aequatio modularis erit algebraica. Nam $(A+X)^n$ poteſt in terminos numero finitos reſolui, quorum quisque in dx ductus integrari poteſt, ita vt modulus a in ſignum ſummatorium non ingrediatur. Erit autem aequatio modularis haec $z = A^n x + \frac{n}{1}A^{n-1}\int X dx + \frac{n.n-1}{1.2}A^{n-2}$ $\int X^2 dx$ etc. Examinandum igitur reſtat quibus caſibus ſi n non fuerit numerus integer affirmatiuus, ſupra memoratae conditiones locum habeant.

§. 20. Sit primo $X = bx^m$, vbi b etiam ab a pendere poteſt; erit ergo $z = \int(A+bx^m)^n dx$. Haec formula primo ipſa eſt integrabilis, ſi $m = \frac{1}{i}$ deſignante i numerum quemcunque affirmatiuum integrum: deinde etiam ſi $m = \frac{-1}{n+i}$. His igitur caſibus aequatio modularis fit algebraica. At ſi $m = -\frac{1}{n}$, vbi b ab a non pendere poteſt illa quidem aequatio integrationem non admittit ſed ſequens $dz = (A+bx^{\frac{-1}{n}})^n dx + ndA\int dx(A+bx^{\frac{-1}{n}})^{n-1}$ euadit integrabilis, fitque aequatio modularis differentialis primi caſus.

§. 21. Non ſolum autem, quicunque valor ipſi m tribuatur aequatio modularis differentialis primi gradus haberi poteſt, ſed etiam ſi fuerit $z = \int x^m dx(A+bx^k)^n$. Fiet enim $dz = x^m dx(A+bx^k)^n + ndA\int x^m dx(A+bx^k)^{n-1}$

Sed

Sed est $\int x^m dx(A+bx^k)^n = \frac{x^{m+1}(A+bx^k)^n}{m+nk+1} + \frac{nkA}{m+nk+1}$ $\int x^m dx(A+bx^k)^{n-1}$, seu $\int x^m dx(A+bx^k)^{n-1} = \frac{(m+nk+1)z}{nkA} - \frac{x^{m+1}(A+bx^k)^n}{nkA}$. Consequenter habebitur aequatio modularis haec $Akdz = (A+bx^k)^n (Akx^m dx - x^{m+1} dA) + (m+nk+1)zdA$. Simili modo modularis esset inuenta, si fuisset $z = B\int x^m dx (A+bx^k)^n$ alia enim non prodiisset differentia nisi quod loco z scribi debuisset $\frac{z}{B}$, et loco dz, $\frac{Bdz-zdB}{B^2}$ si quidem B ab a etiam pendeat.

§. 22. Missis autem huiusmodi litterae P determinationibus, quippe quae minus late patent, ad alias accedo, quae multo saepius vsui esse possunt. Continentur hae determinationes ea functionis cuiusdam propositae proprietate, qua functio eundem vbique tenet dimensionum quantitatum variabilium numerum. *Tales* enim functiones peculiari modo differentiationem admittunt. Vt sit u functio nullius dimensionis ipsarum a et x, cuiusmodi sunt $\frac{a}{x}$, $\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}$ aliaeque similes, in quibus ipsarum a et x dimensionum numerus in denominatore aequalis est numero dimensionum numeratoris. Det autem talis functio u differentiata $Rdx + Sda$, dico fore $Rx + Sa = o$. Nam si in functione u ponatur $x = ay$, omnia a sese destruent et in ea praeter y et constantes nulla alia littera remanebit. Hancobrem in differentiali post hanc substitutionem aliud differentiale praeter dy non reperietur. Cum autem sit $x = ay$ erit

erit $dx = ady + yda$, ideoque $du = Rady + Ryda + Sda$ Debebit ergo esse $Ry + S = o$, *seu* $Rx + Sa = o$.

§. 23. Sin vero fuerit u functio m dimensionum ipsarum a et x, atque $du = Rdx + Sda$; *erit* $\frac{u}{x^m}$ functio ipsarum a et x nullius dimensionis. Differentietur igitur $\frac{u}{x^m}$ et prodibit $\frac{xdu - mudx}{x^{m+1}}$ seu $\frac{Rxdx - mudx + Sxda}{x^{m+1}}$. Quod cum sit differentiale functionis nullius dimensionis erit $Rx^2 - mux + Sax = o$, seu $Rx + Sa = mu$. Quare si fuerit u functio m dimensionum ipsarum a et x; atque ponatur $du = Rdx + Sda$ erit $Rx + Sa = mu$ ideoque $du = Rdx + \frac{da}{a}(mu - Rx)$ seu $adu = Radx - Rxda + muda$.

§. 24. His praemissis in $dz = Pdx$ seu $z = \int Pdx$ sit P functio n dimensionum ipsarum a et x, erit igitur z talis functio dimensionum $n+1$. Quare si ponatur $dz = Pdx + Qda$, erit $Px + Qa = (n+1)z$. Ex quo valor ipsius Q substitutus dabit aequationem modularem $dz = Pdx + \frac{da}{a}((n+1)z - Px)$ seu $adz - (n+1)zda = Padx - Pxda$. Quae tantum est differentialis primi gradus. Cum autem generaliter erat $Q = \int Bdx$, erit hoc casu $(n+1)\int Pdx = a\int Bdx + Px$. Ex quo perspicitur hoc casu integrale $\int Bdx$ semper reduci ad $\int Pdx$.

§. 25. Eadem aequatio modularis proueniet ex consideratione solius P. Posito enim $dP = Adx + Bda$, erit $nP = Ax + Ba$. Cum autem sit $dz = Pdx + da$

$\int B\,dx$, erit $dz = P\,dx + \frac{da}{a}\int(nP\,dx - Ax\,dx)$ in qua integratione a constans habetur. Erit igitur $\int nP\,dx = nz$, et $\int Ax\,dx = Px - \int P\,dx$ ob $\int A\,dx = P$. Habebitur itaque $dz = P\,dx + \frac{da}{a}((n+1)z - Px)$, id quod prorsus congruit cum praecedentibus.

§. 26. Retinente P suum valorem n dimensionum. Sit $z = \int APX\,dx$, vbi A sit functio ipsius a et X ipsius x tantum. Erit igitur $\frac{z}{A} = \int PX\,dx$. Posito $dP = A\,dx + B\,da$, (in quo littera A cum altera quae est functio ipsius a tantum non est confundenda) erit $nP = Ax + Ba$. Ipsius PX differentiale igitur posito x constante erit $BX\,da$. Consequenter habebitur d. $\frac{z}{A} = PX\,dx + da\int BX\,dx = PX\,dx + \frac{da}{a}\int(nPX\,dx - AXx\,dx)$. Est vero $\int nPX\,dx = \frac{nz}{A}$ et $\int AXx\,dx = PXx - \int PX\,dx - \int Px\,dX$. Quare fiet d. $\frac{z}{A} = PX\,dx - \frac{PXx\,da}{a} + \frac{(n+1)z\,da}{Aa} + \frac{da}{a}\int Px\,dX$. Nisi igitur $\int Px\,dX$ reduci poterit ad $\int PX\,dx$ vel prorsus integrari, aequatio modularis differentialis primi gradus dari nequit.

§. 27. At si fuerit $z = R\int P\,dx$, existente R functione quacunque algebraica ex a, x et etiam ex z constante, at P functione ipsarum a et x dimensionum n. Quia est $\frac{z}{R} = \int P\,dx$ erit d. $\frac{z}{R} = P\,dx + \frac{da}{a}(\frac{(n+1)z}{R} - Px) = \frac{R\,dz - z\,dR}{R^2}$ seu $Ra\,dz - za\,dR - (n+1)Rz\,da = PR^2a\,dx - PR^2x\,da$. In vniuersum autem teneatur, quoties $z = \int P\,dx$ ad aequationem modularem reduci possit, toties etiam $z = R\int P\,dx$ ad aequationem modularem reduci posse. Nullum aliud enim discrimen aderit,

rit, nisi quod in illo casu erat z, hoc casu debeat esse $\frac{z}{R}$. Quare si R fuerit vel quantitas algebraica, vel talis transcendens, vt eius differentiale posito etiam a variabili possit sine summatione exhiberi, aequatio modularis per praecepta data reperietur. Quamobrem in posterum tales casus, etiamsi latius pateant praetermittere licebit.

§. 28. Ponamus esse $z = \int (P+Q)dx$, seu $z = \int P dx + \int Q dx$ et P esse functionem ipsarum a et x dimensionum $n-1$, Q vero functionem earundem a et x dimensionum $m-1$. Cum igitur differentiale ipsius $\int P dx$ sit $\frac{P(adx - xda)}{a} + \frac{da}{a} \int n P dx$ et differentiale ipsius $\int Q dx$ sit $\frac{Q(adx - xda)}{a} + \frac{da}{a} \int m Q dx$; erit $dz = \frac{(P+Q)(adx - xda)}{a} + \frac{da}{a} (n \int P dx + m \int Q dx)$. Ponatur $\frac{adz - (P+Q)(adx - xda)}{da} = u$, eritque $u = n \int P dx + m \int Q dx$. Si igitur porro differentietur erit $du = \frac{(nP+mQ)(adx - xda)}{da} + \frac{da}{a} (n^2 \int P dx + m^2 \int Q dx)$. Posito igitur $\frac{adv - (nP+mQ)(adx - xda)}{da} = t$ erit $t = n^2 \int P dx + m^2 \int Q dx$. Eliminatis nunc ex his tribus aequationibus ipsarum z, u et t integralibus $\int P dx$ et $\int Q dx$, prodibit haec aequatio $mnz - (m+n)u + t = 0$. Quae aequatio, si loco u et t valores assumti substituantur, erit modularis quaesita.

§. 29. Simili modo si fuerit $z = \int (P+Q+R)dx$ et P functio $n-1$, Q functio $m-1$ et R functio $k-1$ dimensionum ipsarum a et x. Ponatur $u = \frac{adz - (P+Q+R)(adx - xda)}{da}$ et $t = \frac{adu - (nP+mQ+kR)(adx - xda)}{da}$, et $s = \frac{adt - (n^2P+m^2Q+k^2R)(adx - xda)}{da}$

 Quo

Quo facto erit aequatio modularis haec: $kmnz-(km+kn+mn)u+(k+m+n)t-s=0$.

§. 30. Sit porro $z=\int(P+Q)^k dx$, vbi P sit functio n dimensionum, Q vero functio m dimensionum ipsarum a et x. Quando igitur est $dP=A\,dx+B\,da$ et $dQ=C\,dx+D\,da$, erit $nP=Ax+Ba$ et $mQ=Cx+Da$. Differentiale autem ipsius $(P+Q)^k$ posito x constante diuisum per da est $k(B+D)(P+Q)^{k-1}$ Hanc ob rem erit $dz=(P+Q)^k dx+\frac{k\,da}{a}\int(P+Q)^{k-1}(Ba+Da)dx$. Cum autem sit $Ba=nP-Ax$ et $Da=mQ-Cx$, et $A\,dx=dP$ et $C\,dx=dQ$ ob a in hac integratione constans, erit $dz=(P+Q)^k dx+\frac{da}{a}\int(P+Q)^{k-1}(nP\,dx+mQ\,dx-x\,dP-x\,dQ)$, seu

$$dz=\frac{(P+Q)^k(a\,dx-x\,da)}{a}+\frac{da}{a}\int(P+Q)^{k-1}((nk+1)P\,dx+(mk+1)Q\,dx).$$

Ponatur $\frac{a\,dz-(P+Q)^k(a\,dx-x\,da)-z\,da}{k\,da}=u$ erit $u=\int(nP\,dx+mQ\,dx)(P+Q)^{k-1}$. Quare si integrale $\int(nP\,dx+mQ\,dx)(P+Q)^{k-1}$ pendet ab integrali $\int(P+Q)^k dx$ habebitur aequatio modularis differentialis gradus primi; sin minus differentiatio est continuanda. Fit autem $du=(nP\,dx+mQ\,dx)(P+Q)^{k-1}+\frac{u\,da}{a}-\frac{da}{a}(nP+mQ)(P+Q)^{k-1}x+\frac{da}{a}\int(kn^2P^2dx+(2kmn+n^2-2mn+m^2)PQ\,dx+km^2Q\,dx)\int(P+Q)^{k-2}$.

Et posito $t=\frac{a\,du-u\,da-(nP+mQ)(P+Q)^{k-1}(a\,dx-x\,da)}{da}$ erit $t=\int(kn^2P^2dx+(2kmn+n^2-2mn+m^2)PQ\,dx+km^2Q^2dx)(P+Q)^{k-2}$.

§. 31.

§. 31. Cum igitur habeantur tria integralia videndum eſt, num ea a ſe inuicem pendeant, hoc enim ſi fuerit, habebitur aequatio algebraica inter t, u et z, quae dabit loco t et u ſubſtitutis aſſumtis valoribus aequationem modularem differentialem ſecundi gradus. Quo autem facilius in caſibus particularibus perſpici poſſit, an pendeant a ſe inuicem, ad alias formas eas reduci conuenit. Cum igitur ſit $z = \int (P + Q)^k dx$ erit $u = mz + (n - m) \int (P + Q)^{k-1} P dx$ et $t = (2km + n - m) u - (km^2 - m^2 + mn) z + (n - m)^2 (k - 1) \int (P + Q)^{k-2} P^2 dx$. Quaerendum itaque eſt an $\int (P + Q)^{k-2} P^2 dx$ reduci poſſit ad haec $\int (P + Q)^{k-1} P dx$ et $\int (P + Q)^k dx$ Vel an ſit $\int (P + Q)^{k-2} P^2 dx = \alpha \int (P + Q)^{k-1} P dx + \mathfrak{E} \int (P + Q)^k dx + V$ deſignante V quantitatem algebraicam quamcunque per a et x datam, et α ac $\mathfrak{E}$ ſunt coefficientes ex conſtantiſſimis et a compoſitae.

§ 32. Fiat igitur $V = T (P + Q)^{k-1}$ huius differentiale poſito a conſtante ſit $dT (P + Q)^{k-1} + (k - 1)(T dP + T dQ)(P + Q)^{k-2}$. Prodibit ergo ſequens aequatio $P^2 dx = \alpha P^2 dx + \alpha PQ dx + \mathfrak{E} P^2 dx + 2 \mathfrak{E} PQ dx + \mathfrak{E} Q^2 dx + P dT + Q dT + (k - 1) T dP + (k - 1) T dQ$, quae per dx diuidi poterit. At T ita debet accipi, vt termini repondentes ſeſe deſtruant, ſumtis ad hoc idoneis pro α et $\mathfrak{E}$ valoribus.

§. 33. At ſi per $\int P dx$ non abſolute determinetur z ſed quantitas $\int Q dz$, data Q vtcunque per a et z, atque P per a et x; habebitur iſta aequatio $Q dz = P dx$ in qua indeterminatae x et z ſunt a ſe inuicem

 ſepa-

ſeparatae. Modularis vero aequatio hoc modo inuenietur: Quia eſt $\int Q\,dz = \int P\,dx$ differentietur vtrumque membrum ponendo etiam a variabili ope $dP = A\,dx + B\,da$ et $dQ = C\,dz + D\,da$. Erit ergo $Q\,dz + da\int D\,dz = P\,dx + da\int B\,dx$ ſeu $Q\,dz = P\,dx + da(\int B\,dx - \int D\,dz)$. Quae aequatio, ſi $\int B\,dx$ et $\int D\,dz$ poterunt eliminari, dabit modularem quaeſitam.

§. 34. Sit P functio $^{m-1}$ dimenſionum ipſarum a et x, et Q functio $^{n-1}$ dimenſionum ipſarum a et z. His poſitis erit Diff. $\int P\,dx = \frac{m\,da\int P\,dx + P(a\,dx - x\,da)}{a}$, et Diff. $\int Q\,dz = \frac{n\,da\int Q\,dz + Q(a\,dz - z\,da)}{a}$. Ex quo eruitur iſta aequatio $(m-n)\int P\,dx = \frac{Q(a\,dz - z\,da)}{da} - \frac{P(a\,dx - x\,da)}{da}$ ob $\int P\,dx = \int Q\,dz$. Quare ſi fuerit $m = n$, erit $Qa\,dz - Qz\,da = Pa\,dx - Px\,da$. quae eſt aequatio modularis, ſeu $\frac{da}{a} = \frac{Q\,dz - P\,dx}{Qz - Px}$.

§. 35. Sin vero m et n non ſint aequales, aequatio modularis erit differentialis ſecundi gradus. Nam cum ſit $(m-n)\int P\,dx = \frac{Q(a\,dz - z\,da) - P(a\,dx - x\,da)}{da}$ erit Diff. $\frac{Q(a\,dz - z\,da) - P(a\,dx - x\,da)}{da} = \frac{m(m-n)\,da\int P\,dx}{a} + \frac{(m-n)P(a\,dx - x\,da)}{a} = \frac{mQ(a\,dz - z\,da) - nP(a\,dx - x\,da)}{a}$. Quae aequatio eſt modularis quaeſita.

§. 36. Si in aequatione propoſita $dz + P\,dx = 0$ indeterminatae non fuerint a ſe inuicem ſeparatae, ita vt P ſit functio involuens x et z et a; debebit per quantitatem quandam R multiplicari, quo formula $R\,dz + PR\,dx$ vt differentiale integralis cuiusdam S poſſit conſiderari. Erit itaque $dS = R\,dz + PR\,dx = 0$, ideoque

ideoque $S = \text{Const}$. Sed ad quantitatem R inueniendam, sit $dP = A\,dx + B\,dz$ et $dR = D\,dx + E\,dz$, vbi a tantisper pro constante habemus. His positis erit $d.PR = (DP + AR)\,dx + (EP + BR)\,dz$, quocirca debet esse $D = EP + BR$. At ob $D = \frac{dR - E\,dz}{dx}$ fiet $E\,dz + EP\,dx + BR\,dx = dR$. Cum vero sit $dz + P\,dx = o$, habebitur $dR = BR\,dx$, et $lR = \int B\,dx$. Cognita vero est B ex dato P, et quia B et z et x inuoluit, $B\,dx$ integrari debet ope aequationis $dz + P\,dx = o$, si quidem fieri potest. Sit itaque $\int B\,dx = K$, eritque $R = e^K$ posito $le = 1$.

§. 37. Cum igitur sit $dS = e^K dz + e^K P\,dx = o$, ad aequationem modularem inueniendam sit $dK = F\,dx + G\,dz + H\,da$, eritque $de^K = e^K(F\,dx + G\,dz + H\,da)$. Sumatur deinde integrale ipsius $e^K H\,dz$ posito tantum z variabili, x vero et a constantibus, quo facto erit aequatio modularis $e^K dz + e^K P\,dx + da \int e^K H\,dz = o$, seu diuiso per e^K haec $dz + P\,dx + e^{-K} da \int e^K H\,dz = o$. Alia aequatio modularis inuenitur, posito $dP = A\,dx + B\,dz + C\,da$, erit enim ipsius $e^K P$ differentiale posito x et z constante hoc $e^K(C\,da + PH\,da)$. Integretur $e^K dx(C + PH)$ posito tantum x variabili, quo facto erit aequatio modularis $dz + P\,dx + e^{-K} da \int e^K dx(C + PH) = o$. Sed huiusmodi aequationes modulares nisi R possit sine aequatione proposita $dz + P\,dx = o$ determinari, nullius fere sunt vsus.

§. 38. Consideremus igitur casus particulares, sitque in aequatione $dz + P\,dx = o$, P functio nullius dimen-

sionis

sionis ipsarum x et z, non computatis constantibus et modulo a. Formula vero $dz + Pdx$ integrabilis semper redditur si diuidatur per $z + Px$, quamobrem erit $S = \int \frac{dz + Pdx}{z + Px} = $ Const. Fit autem $\int \frac{dz + Pdx}{z + Px} = l(z + Px) - \int \frac{xdP}{z + Px}$. Deinde posito $z = tx$, fiet P functio ipsius t tantum quae sit T. Quare erit $S = l(z + Px) - \int \frac{dT}{t + T}$ quod per quadraturas potest exhiberi.

§. 39. Ad aequationem modularem igitur inueniendam nil aliud est agendum, nisi vt $\int \frac{dz + Pdx}{z + Px}$ differentietur posito quoque modulo a variabili. Ponatur igitur $dP = Adx + Bdz + Cda$, vbi erit $Ax + Bz = 0$. Differentietur nunc coefficiens ipsius dx, nempe $\frac{P}{z + Px}$ posito tantum a variabili, erit eius differentiale $\frac{Czda}{(z + Px)^2}$. Deinde integretur $\frac{Czdx}{(z + Px)^2}$ tantum x pro variabili habita, quo facto erit aequatio modularis quaesita $dz + Pdx + (z + Px)da\int \frac{Czdx}{(z + Px)^2} = 0$. Simili modo ex coefficiente ipsius dz qui est $\frac{1}{z + Px}$ prodit haec aequatio modularis $dz + Pdx - (z + Px)da\int \frac{Cxdz}{(z + Px)^2} = 0$, in qua integratione z tantum pro variabili habetur. Siue etiam haec $dz + Pdx = (z + Px)da\int \frac{Ddt}{(t + T)^2}$ in qua C et T per solum t et a dantur.

§. 40. Praetermittere hic non possum, quin generalem aeqnationum homogenearum, vti a *Cel. Ioh. Bernoulli* vocantur, quae omnes hac aequatione $dz + Pdx = 0$ continentur, resolutionem adiiciam. Namque reperitur ex (§. 38) $l(z + Px) = \int \frac{dT}{t + T} = l(t + T) - \int \frac{dt}{t + T}$ vbi $t = \frac{z}{x}$ et $T = P$. Prodibit igitur $lx + \int \frac{dt}{t + T} = 0$ seu adiecta

iecta constante $l\frac{c}{x}=\int\frac{dt}{t+T}$. Vt si proposita sit aequatio $nxdz+dx\sqrt{(x^2+z^2)}=0$ fiet $P=\frac{\sqrt{(x^2+z^2)}}{nx}$, positoque $z=tx$, erit $T=\frac{\sqrt{(1+tt)}}{n}$ ideoque $l\frac{c}{x}=\int\frac{ndt}{nt+\sqrt{(1+tt)}}$ fiat $\sqrt{(1+tt)}=t+s$ erit $t=\frac{1-ss}{2s}$ et $dt=\frac{-ds(1+ss)}{2ss}$. Quare erit $l\frac{c}{x}=\int\frac{-nds(1+ss)}{(n+1)s-(n-1)s^3}=\frac{-n}{n+1}ls+\frac{n^2}{n^2-1}l((n-1)s^2-n-1)$.

§. 41. Quo tamen vsus calculi §. 36 in casu speciali appareat, sit aequatio proposita $dz+pzdx-qdx=0$, in qua p et q vtcunque in a et x dantur. Quae aequatio cum illa generali $dz+Pdx=0$ collata dat $P=pz-q$, ex quo fiet $B=p$, et $lR=\int pdx$ seu $R=e^{\int pdx}$. Cum igitur $\int pdx$ per quadraturas possit assignari, cognitus est valor ipsius R, ideoque aequatio proposita per $e^{\int pdx}$ multiplicata fit integrabilis: erit igitur $e^{\int pdx}dz+e^{\int pdx}pzdx-e^{\int pdx}qdx=0$ huiusque integralis $e^{\int pdx}z=\int e^{\int pdx}qdx$ seu $z=e^{-\int pdx}\int e^{\int pdx}qdx$. Differentiari itaque debet $e^{-\int pdx}\int e^{\int pdx}qdx$ positis et a et x variabilibus, et differentiale ipsi dz aequale poni, quo facto habebitur aequatio modularis. Positis igitur $dp=fdx+gda$ et $dq=hdx+ida$ prodibit ista aequatio modularis $dz=-e^{-\int pdx}(pdx+da\int gdx)\int e^{\int pdx}qdx+qdx+e^{-\int pdx}da\int e^{\int pdx}(idx+qdx\int gdx)$, seu posito breuitatis gratia $\int e^{\int pdx}qdx=T$ erit $dz=-e^{-\int pdx}Tpdx+qdx+e^{-\int pdx}da\int e^{\int pdx}idx-e^{-\int pdx}da\int Tgdx$. Ex qua operatione intelligi potest, ad aequationem modularem inueniendam id maxime esse efficiendum, vt in aequatione proposita indeterminatae a se inuicem separentur.

ADDITAMENTVM AD DISSERTATIONEM DE INFINITIS CVRVIS EIVSDEM GENERIS.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

IN ſuperiore diſſertatione, in qua methodum tradidi aequationem pro infinitis curuis eiusdem generis inueniendi, ipſius Q valorem in aequatione $dz = Pdx + Qda$ determinare docui, ex data aequatione $z = \int Pdx$. Namque ſi P ex x, et a cum conſtantibus vtcunque fuerit compoſitum; manifeſtum eſt ſi $\int Pdx$ differentietur poſito non ſolum x ſed etiam a variabili, prodituram eſſe huius formae aequationem $dz = Pdx + Qda$, in qua valor ipſius Q neceſſario a quantitate P, quae eſt cognita, pendebit. Demonſtraui ſcilicet, ſi differentiale ipſius P poſito x conſtante fuerit Bda, fore ipſius Q differentiale poſito a conſtante, Bdx, ex quo pendentia ipſius Q a P ſatis perſpicitur.

§. 2. Cum autem inuentus fuerit valor ipſius Q, aequatio $dz = Pdx + Qda$ exprimet naturam infinitarum curuarum ordinatim datarum, quarum ſingulae ſeorſim continentur aequatione $dz = Pdx$, a ſe inuicem vero diffe-

differunt diuerſitate parametri ſeu moduli a. Et hanc ob rem aequationem $dz = Pdx + Qda$ in qua modulus a tanquam quantitas variabilis ineſt, cum *Cel. Hermanno* aequationem modularem vocaui.

§. 3. Si Pdx integrationem admittit, ſeu ſi curuae ordinatim datae omnes ſunt algebraicae aequatio $z = \int Pdx$ ſimul erit modularis; nam quia nulla adſunt differentialia, modulus a aeque variabilis ac x et z poterit conſiderari Sin autem Pdx integrari nequit, aequatio etiam modularis non erit algebraica, exceptis caſibus quibus eſt $P = AX + BY + CZ$ etc. exiſtentibus A, B, C etc. functionibus ipſius a et conſtantium, atque X, Y, Z etc. functionibus ipſius x et conſtantium tantum, modulo a ipſas non ingrediente. Etiamſi enim ipſa aequatio $dz = Pdx$ ſit differentialis, tamen aequatio modularis $z = A\int Xdx + B\int Y dx + C\int Z dx$ etc. inſtar algebraicae eſt conſideranda.

§. 4. Niſi autem P talem habuerit valorem aequatio modularis vel erit differentialis gradus primi vel altioris gradus. Differentialis quidem primi gradus erit, ſi Q vel erit quantitas algebraica, vel integrale ipſius Pdx inuoluet, hoc enim caſu z loco $\int Pdx$ ſubſtitutum tollet quoque ſignum ſummatorium, ita vt aequatio modularis differentialis pura ſit proditura.

§. 5. Deprehendi vero in ſuperiore diſſertatione, Q toties algebraicum habere valorem quoties P talis fuerit ipſarum a et x functio, vt numerus dimenſionum, quas a et x conſtituunt ſit vbique idem atque -1, ſeu quoties Px vel Pa fuerit functio ipsarum a et x nullius dimensionis. Deinde etiam obseruaui, quoties in P litterae a et x eundem tantum vbique constituant dimensionum numerum, toties Q ab integratione ipsius Pdx pendere. Ex quo, cum tam eximia consequantur subsidia ad aequationes modulares inueniendas, maxime iuuabit inuestigare, num forte aliae dentur huiusmodi functiones ipsius P, quae iisdem praerogatiuis gaudeant. Has igitur a priore inuestigare constitui, quo simul methodus tales functiones inueniendi aperiatur.

§. 6. Si P est functio ipsarum a et x dimensionum -1, seu z functio ipsarum a et x nullius dimensionis, ostendi fore $Px+Qa=0$, seu $Q=-\frac{Px}{a}$. Sumamus igitur esse $Q=-\frac{Px}{a}$ et quaeramus, qualis sit P functio ipsarum a et x. At si $Q=-\frac{Px}{a}$ erit $dz=Pdx-\frac{Pxda}{a}$. Quamobrem P talis esse debebit functio ipsarum a et x, vt $dx-\frac{xda}{a}$ per eam multiplicatum euadat integrabile. Hic autem per integrabile non solum intelligo, quod integratione ad quantitatem algebraicam, sed etiam quod ad quadraturam quamcunque reducitur. Si igitur generaliter inuenerimus quantitatem, in quam $dx-\frac{xda}{a}$ ductum fit integrabile, ea erit quaesitus valor ipsius P, eius proprietatis, vt sit $Q=-\frac{Px}{a}$.

§. 7. Fit autem $dx-\frac{xda}{a}$ integrabile si multiplicatur per $\frac{1}{a}$, integrale enim erit $\frac{x}{a}+c$, designante c quantitatem constantem quamcunque ab a non pendentem. Quocirca, si $f(\frac{x}{a}+c)$ denotet functionem quamcunque

cunque ipsius $\frac{x}{a}+c$, fiet quoque $dx-\frac{xda}{a}$ integrabile, si multiplicetur per $\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$. Qui valor cum sit maxime generalis, erit $P=\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$, et $Q=-\frac{Px}{a}$. Est vero $f(\frac{x}{a}+c)$ functio quaecunque ipsarum a et x nullius demensionis. Quamobrem quoties Pa fuerit functio nullius dimensionis ipsarum a et x, toties erit $Q=-\frac{Px}{a}$, ideoque aequatio modularis $dz=Pdx-\frac{Pxda}{a}$.

§. 8. Sit $Q=A-\frac{Px}{a}$, et A functio quaecunque ipsius a et constantium; erit $dz=Pdx+Ada-\frac{Pxda}{a}$ seu $dz-Ada=Pdx-\frac{Pxda}{a}$. In qua aequatione cum $dz-Ada$ sit integrabile, debebit $Pdx-\frac{Pxda}{a}$ quoque esse integrabile. Hoc autem per praecedentem operationem euenit si $P=\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$. Tum igitur erit $Q=A-\frac{x}{a^2}f(\frac{x}{a}+c)$. Simili ratione intelligitur si fuerit $P=X+\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$, denotante X functionem ipsius x tantum, fore $Q=A-\frac{x}{a^2}f(\frac{x}{a}+c)$, vbi vt ante $f(\frac{x}{a}+c)$ exprimit functionem quamcunque ipsarum a et x nullius dimensionis.

§. 9. Sit $Q=-\frac{nPx}{a}$, vbi n indicet numerum quemcunque; erit $dz=Pdx-\frac{nPxda}{a}$. Debebit ergo P talis esse quantitas, quae $dx-\frac{nxda}{a}$ si in id multiplicetur, reddat integrabile. Fit autem $dx-\frac{nxda}{a}$ integrabile, si ducatur in $\frac{1}{a^n}$, integrale enim erit $\frac{x}{a^n}$. Quare generaliter erit $P=\frac{1}{a^n}f(\frac{x}{a^n}+c)$. Atque quoties P talem habuerit valorem erit $Q = -\frac{nx}{a^{n+1}} f(\frac{x}{a^n} + c)$. Intelligitur etiam si fuerit $P = X + \frac{1}{a^n} f(\frac{x}{a^n} + c)$, fore quoque generalius $Q = A - \frac{nx}{a^{n+1}} f(\frac{x}{a^n} + c)$. Vbi vt ante et in posterum semper f denotat functionem quamcunque quantitatis sequentis. At A est functio quaecunque ipsius a, et X functio quaecunque ipsius x tantum.

§. 10. Quo igitur dignosci queat, an datus quispiam valor ipsius P in formula inuenta contineatur, poni debebit $a = b^{\frac{1}{n}}$, quo facto videndum est, an Pb fiat functio ipsarum b et x nullius dimensionis, vel an prodeat aggregatum ex functione quadam ipsius x tantum, et tali functione. Quod si deprehendetur, habebit P proprietatem requisitam, eritque Q aequale huic ipsi functioni in $-\frac{nx}{a}$ ductae vna cum functione quacunque ipsius A. In vniuersum autem notandum est quantitatem P functione ipsius x vt X, et Q functione ipsius a vt A posse augeri. Nam si fuerit $dz = Pdx + Qda$ aequatio modularis, talis quoque erit aequatio $dz = Pdx + Xdx + Qda + Ada$. Posito enim du loco $dz - Xdx - Ada$ habebitur $du = Pdx + Qda$, quae cum priore prorsus congruit. Hancobrem superfluum foret in posterum ad valorem ipsius Q assumtum, functionem A ipsius a adiicere. Quare hanc apparentem generalitatem negligemus.

§. 11.

§. 11. Sit nunc $Q = PE$ denotante E functionem quamcunque ipsius a. Erit itaque $dz = Pdx + PEda$ et P talis quantitas, quae reddit $dx + Eda$ integrabile. At si $P = 1$ fit integrabile hoc differentiale, integrale enim erit $x + \int Eda$. Quamobrem erit $P = f(x + \int Eda)$ et $Q = Ef(x + \int Eda)$. Siue si ponatur $\int Eda = A$, fueritque $P = f(x + A)$ erit $Q = \frac{dA}{da} f(x + A)$. Num autem datus ipsius P valor in hac formula contineatur, hoc modo est inuestigandum, ponatur $x = y - A$. et quaeratur, an pro A talis accipi queat functio ipsius a et constantium, vt P fiat functio solius y et constantium, quam modulus a non amplius ingrediatur.

§. 12. Ponamus esse $Q = PY$, vbi Y sit functio quaecunque ipsius x modulum a non inuoluens. Quo posito erit $dz = Pdx + PYda$, et P talis functio quae efficiat $dx + Yda$ integrabile. Posito autem $P = \frac{1}{Y}$, fit $z = \int \frac{dx}{Y} + a = X + a$, si ponatur $\int \frac{dx}{Y} = X$. Quamobrem erit $P = \frac{1}{Y} f(X + a)$. Quoties ergo P huiusmodi habuerit valorem erit semper $Q = f(X + a)$.

§. 13. Sit nunc generalius positum $Q = PEY$ erit $dz = Pdx + PEYda$, vbi vt ante E denotat functionem ipsius a, Y vero ipsius x Perspicuum est, si fuerit $P = \frac{1}{Y}$ formulam istam differentialem effici integrabilem, prodiret enim $z = \int \frac{dx}{Y} + \int Eda$, seu $z = X + A$ posito $\int \frac{dx}{Y} = X$. Quamobrem erit $P = \frac{1}{Y} f(X + A) = \frac{dX}{dx} f(X + A)$ hisque in casibus fiet $Q = \frac{dA}{da} f(X + A)$. Comprehenduntur in his formulis etiam logarithmici ipsarum A et X valores, vt si sit $X = lT$ et $A = -lF$, erit $P = \frac{dT}{Tdx} f \frac{T}{F}$ et $Q = \frac{-dF}{Fda} f \frac{T}{F}$.

§. 14.

§. 14. Perſpicitur igitur omnes has formulas locum habere, ſi aequatio propoſita fuerit vel $dz = dX\, f(X+A)$ vel $dz = \frac{dX}{X} f \frac{X}{A}$. Quoties ergo aequatio propoſita ad has formas poterit reduci, ſubſtituendis X pro functione quacunque ipſius x et A pro functione quacunque ipſius a, toties aequatio modularis poterit exhiberi: erit enim priore caſu $dz = dX f(X+A) + dA f(X+A)$ in poſteriore vero caſu $dz = \frac{dX}{X}, f \frac{X}{A} - \frac{dA}{A} f \frac{X}{A}$. Id quod quidem in his vniuerſalibus exemplis facile perſpicitur, in ſpecialioribus vero multo difficilius. Quocirca maximum poſitum erit ſubſidium in reducendis caſibus particularibus ad has generales formas, id quod, ſi quidem talis reductio fieri poteſt, non difficulter praeſtatur.

§. 15. Si ponatur $Q = PR$, deſignante R functionem quamcunque ipſarum a et x, erit $dz = Pdx + PR da$. Ad inueniendum nunc valorem ipſius P, ſumatur formula $dx + R da$, ſeu aequatio $dx - R da = o$ conſideretur, et quaeratur quomodo indeterminatae a et x a ſe inuicem poſſint ſeparari, ſeu quod idem eſt, per quamnam quantitatem $dx + R da$ debeat multiplicari, vt fiat integrabilis. Sit haec quantitas S et ipſius $S dx + RS da$ integrale T erit $P = S f T$. Hisque in caſibus erit $Q = RSfT$. Haec operatio latiſſime patet et omnes caſus complectitur, quibus Q cognitum et a z non pendentem habet valorem.

§. 16. Progrediamur autem vlterius et in eos ipſius P valores inquiramus, in quibus Q non ſolum a P ſed etiam

etiam a $\int P dx$ seu a z pendet. Ponatur igitur primo $Q = \frac{nz}{a} - \frac{Px}{a}$, denotante n numerum quemcunq;. Erit ergo $dz = P dx + \frac{nzda}{a} - \frac{Pxda}{a}$, seu $dz - \frac{nzda}{a} = P dx - \frac{Pxda}{a}$. Multiplicetur vtrinque per $\frac{1}{a^n}$, quo prodeat haec aequatio $\frac{dz}{a^n} - \frac{nzda}{a^{n+1}} = \frac{Pdx}{a^n} - \frac{Pxda}{a^{n+1}}$, in qua prius membrum est integrabile. Debebit ergo etiam integrabile esse alterum membrum $\frac{Pdx}{a^n} - \frac{Pxda}{a^{n+1}}$, ex quo idoneus ipsius P valor est quaerendus. Euenit hoc si $P = a^{n-1}$, erit enim integrale $\frac{x}{a} + c$. Quare erit vniuersaliter $P = a^{n-1} f(\frac{x}{a} + c)$, id quod contingit si $\frac{P}{a^{n-1}}$ est functio ipsarum a et x nullius dimensionis seu P functio ipsarum a et x dimensionum $n-1$. Hoc igitur casu est $nz = Px + Qa$ vt in superiore dissertatione ostendimus.

§. 17. Sit $Q = \frac{nz}{a} + PEY$, vbi E ex a, et Y ex x vtcunque est compositum. Erit itaque $dz - \frac{nzda}{a} = P dx + PEY da$, et $\frac{dz}{a^n} - \frac{nzda}{a^{n+1}} = \frac{Pdx}{a^n} + \frac{PEYda}{a^n}$. Quam obrem P ita debet accommodari, vt $\frac{dx + EYda}{a^n}$ per id multiplicatum euadat integrabile. Fit hoc autem si $P = \frac{a^n}{Y}$, quo casu integrale est $\int \frac{dx}{Y} + \int E da$ seu $X + A$ posito $\int \frac{dx}{Y} = X$ et $\int E da = A$. Quare debebit esse $P =$

$\frac{a^n dX}{dx}$ f$(X+A)$, et in his casibus erit $Q = \frac{a^n dA}{da}$ f$(X+A)+\frac{nz}{a}$. Si X et A a logarithmis pendeant prodibit P huius valoris $\frac{a^n dX}{X dx}$ f $\frac{X}{A}$ cui respondebit $Q = \frac{nz}{a} - \frac{a^n dA}{A da}$ f $\frac{X}{A}$.

§. 18. Si ponatur $Q = Fz + PEY$, et F et E functiones sint ipsius a, Y vero ipsius x. Tum erit $dz - Fz da = P dx + PEY da$. Ponatur $\int F da = lB$, ita vt B sit functio ipsius a, et diuidatur per B habebitur $\frac{dz}{B} - \frac{z dB}{B^2} = \frac{P dx}{B} + \frac{PEY da}{B}$. Cum igitur prius membrum sit integrabile, et alterum tale effici debet. Fit hoc si $P = \frac{B}{Y}$ tumque erit integrale $\int \frac{dx}{Y} + \int E da$ seu $X+A$. Quocirca erit ipsius P valor quaesitus $\frac{B dX}{dx}$f$(X+A)$, Q vero erit $\frac{z dB}{B da} + \frac{B dA}{da}$ f$(X+A)$. Perspicitur quoque si fuerit $P = \frac{B dX}{X dx} f \frac{X}{A}$ fore $Q = \frac{z dB}{B da} - \frac{B dA}{A da} f \frac{X}{A}$.

§. 19. Latissime patebit solutio si ponatur $Q = Fz + PR$ et R fuerit functio ipsarum a et x. Erit enim $dz - Fz da = P dx + PR da$. Posito $\int F da = lB$ diuidatur per B habebitur $\frac{dz}{B} - \frac{z dB}{B^2} = \frac{P}{B}(dx + R da)$. Sit iam S functio efficiens $dx + R da$ integrabile sitque $\int (S dx + SR da) = T$. Quo inuento erit $P = BS$ f T huic respondet $Q = \frac{z dB}{B da} + BRS$ f T.

§. 20. Possunt praeterea plures huiusmodi valores ipsius P coniungi, hocque modo multo latius extendi

vt

vt si ponatur $P = \frac{BdX}{dx} f(X+A) + \frac{BdY}{dx} f(Y+E)$ erit $Q = \frac{zdB}{Bda} + \frac{BdA}{da} f(X+A) + \frac{BdE}{da} f(Y+E)$. Atque simili modo numerus terminorum quantum libuerit, poterit augeri. In his igitur casibus omnibus aequatio modularis differentialis primi casus inuenitur. Quamobrem his expeditis pergo ad eos casus inuestigandos, inquibus aequatio modularis primi gradus differentialis non datur, sed qui tamen ad aequationem modularem differentio-differentialem perducuntur.

§. 21. Si igitur Q neque algebraice per a et x neque per z potest exprimi, ii inuestigandi sunt casus quibus differentiale ipsius Q poterit exhiberi. Est autem $Q = \frac{dz - Pdx}{da}$, ergo $dQ = d\frac{dz - Pdx}{da}$. Quare si differentiale ipsius Q vel per sola a et x vel per haec et Q vel etiam simul per z poterit exprimi, habebitur aequatio modularis, quae erit differentialis secundi gradus. Ostensum autem est superiore dissertatione si ponatur $dP = Ldx + Mda$ fore $dQ = Mdx + Nda$, ita vt haec differentialia communem literam M inuoluant. Quia autem ex dato P etiam M datur, nil aliud requiritur, nisi vt N determinetur. Quamobrem in eos inquiremus casus, quibus N vel algebraice, vel per Q vel per Q et z exprimi potest. Tum enim habebitur aequatio modularis $Mdx + Nda = d.\frac{dz - Pdx}{da}$, posito in N loco Q eius valore $\frac{dz - Pdx}{da}$.

§. 22. Ex praecedentibus satis intelligitur, si N per sola a et x determinetur, fore $M = \frac{dX}{dx} f(X+A)$ et $N = \frac{dA}{da} f(X+A)$, seu $M = V + \frac{dX}{dx} f(X+A)$ et N

 =I

$= \mathrm{I} + \frac{dA}{da} f(X + A)$ denotante V functionem quamcunque ipsius x et I ipsius a. Ex dato itaque P quaeratur M, differentiando P posito x constante, et differentiali inuento per da diuidendo. Quo facto quaeratur an valor ipsius M in formula $V + \frac{dX}{dx} f(X + A)$ contineatur. Quod si fuerit compertum et X et A et V definitae, erit $V dx + dX f(X + A) + I da + dA f(X + A) = d. \frac{dz - P dx}{da}$ aequatio modularis desiderata. Notandum est in posterum semper loco $\frac{dX}{dx} f(X + A)$ poni posse aggregatum ex quotuis huiusmodi formulis $\frac{dX}{dx} f(X + A) + \frac{dY}{dx} f(Y + B) +$ etc. At loco $\frac{dA}{da} f(X + A)$ tunc poni debebit $\frac{dA}{da} f(X + A) + \frac{dB}{da} f(Y + B)$ etc. Hoc igitur monito in posterum tantum vnica formula $\frac{dX}{dx} f(X + A)$ eique respondente $\frac{dA}{da} f(X + A)$ vtemur.

§. 23. Pendeat N simul etiam a Q sitque $N = R + DQ$, vbi D sit functio ipsius a, et R functio ipsarum a et x ex conditionibus sequentibus determinanda. Erit igitur $dQ - DQda = M dx + R da$, sit $D da = \frac{dH}{H}$ et diuidatur vtrinque per H prodibit $\frac{dQ}{H} - \frac{Q dH}{H^2} = \frac{M dx + R da}{H}$. In qua aequatione, cum illud membrum sit integrabile, tale quoque hoc $\frac{M dx + R da}{H}$ est efficiendum. Fiet igitur per praecedentem methodum $M = \frac{H dx}{dx} f(X + A)$ et $R = \frac{H da}{da} f(X + A)$. Quare si in exemplo quopiam proposito ex P reperiatur M talis valoris, erit $N = \frac{H dA}{da} f(X + A) + \frac{dH}{H da^2}(dz - P dx)$ posito $\frac{dH}{H da}$ loco D et $\frac{dz - P dx}{da}$ loco Q. Atque hinc in promptu erit aequatio modularis.

§. 24.

§. 24. Si N non a Q sed a z pendeat, ita vt sit $N = R + Cz$, denotante C functionem ipsius a quamcunque; erit $dQ - Czda = Mdx + Rda$. At quia est $dz - Qda = Pdx$, addatur huius multiplum $Fdz - QFda = PFdx$, existente F functione ipsius a, quo facto orietur aequatio $dQ - QFda + Fdz - Czda = (M + PF) dx + Rda$. Ponatur $Fda = \frac{dB}{B}$ et $\frac{Cda}{F} = \frac{dG}{G}$, ita vt sit $F = \frac{dB}{Bda}$ et $C = \frac{dBdG}{BGda^2}$. Perspicuum itaque est $dQ - QFda$ integrabile reddi si diuidatur per B seu multiplicetur per $\frac{1}{B}$, $Fdz - Czda$ autem fit integrabile, si multiplicetur per $\frac{1}{FG}$. Quare quo idem factor summam horum differentialium reddat integrabilem debebit esse $FG = B$ seu $\frac{GdB}{Bda} = B$, vnde fiet $G = \frac{B^2da}{dB}$. Hancobrem alterum quoque membrum per B diuisum est integrabile efficiendum scilicet $\frac{(M+PF)dx + Rda}{B}$. Quocirca facio $R = \frac{BdA}{da} f(X + A)$ et $M + PF = \frac{BdX}{dx} f(X + A) = M + \frac{PdB}{Bda}$. Inuestigari igitur debet proposito exemplo, an loco A, B et X tales functiones inueniri queant, quae exhibeant formulam $\frac{PdX}{dx} f(X + A)$ aequalem ipsi $M + \frac{PdB}{Bda}$. Hisque inuentis erit $N = \frac{BdA}{da} f(X + A) + \frac{zdBdG}{BGda^2}$ existente $G = \frac{B^2da}{dB}$, qui valor in aequatione $Mdx + Nda = d. \frac{dz - Pdx}{da}$ substitutus dabit aequationem modularem.

§. 25. Sit nunc generalissime $N = R + DQ + Cz$, tenentibus R, D et C iisdem quibus ante valoribus. Erit ergo $dQ - DQda - Czda = Mdx + Rda$, addatur ad hanc aequatio $Fdz - FQda = PFdx$, quo habeatur $dQ - DQda - FQda + Fdz - Czda = (M + PF) dx +$

 R da

$R\,da$. Positis autem vt ante $D\,da = \frac{dH}{H}$, $F\,da = \frac{dB}{B}$, et $\frac{C\,da}{F} = \frac{dG}{G}$, fit $dQ - DQ\,da - FQ\,da$ integrabile si ducatur in $\frac{1}{HB}$, et $F\,dz - Cz\,da$ integrabile fit ductum in $\frac{1}{FG}$. Quare debebit esse $HB = FG = \frac{G\,dB}{B\,da}$ et $G = \frac{B^2 H da}{dB}$. Atque $\frac{(M + PF)\,dx + R\,da}{HB}$ reddendum est integrabile: fiet ergo facto $HB = E$, $R = \frac{E\,dA}{da} f(X + A)$ et $M + PF = \frac{E\,dX}{dx} f(X + A)$. Quocirca in casu proposito A, X, E et F si fieri potest ita debent definiri, vt $\frac{E\,dX}{dx} f(X+A)$ aequale fiat ipsi $M + PF$. Hocque inuento erit $N = \frac{E\,dA}{da} f(X + A) + \frac{dH}{H\,da^2}(dz - P\,dx) + \frac{Fz\,dG}{G\,da}$, vnde aequatio modularis reperitur.

§. 26. At si nequidem differentialis secundi gradus aequatio modularis obtineri poterit; ad differentialia tertii gradus erit procedendum. Fiet ergo $N = \frac{d\left(\frac{dz - P\,dx}{da}\right) - M\,dx}{da}$ atque hinc posito $dN = s\,dx + t\,da$, erit $s\,dx + t\,da = d\left(\frac{d\left(\frac{dz - P\,dx}{da}\right) - M\,dx}{da}\right)$. Datur autem s ex M, cum sit $s\,da$ differentiale ipsius M, quod prodit, si x ponatur constans. Quamobrem t tantum debebit inuestigari. Sit ergo $t = R + EN + DQ + Cz$, ideoque $dN - EN\,da - DQ\,da - Cz\,da = s\,dx + R\,da$. Cum sit autem $dQ - N\,da = M\,dx$ et $dz - Q\,da = P\,dx$, addantur horum multipla ad illam aequationem, vt prodeat haec aequatio $dN - EN\,da - FN\,da + F\,dQ - DQ\,da - GQ\,da + G\,dz - Cz\,da = (s + MF + PG)\,dx + R\,da$. Sit $E\,da + F\,da = \frac{df}{f}$, $\frac{D\,da + G\,da}{F} = \frac{dg}{g}$ et $\frac{C\,da}{G} = \frac{dh}{h}$, fiatque $f = Fg = Gh$.

$= Gb$. Quo facto aequationis inuentae prius membrum fit integrabile diuisum per f; hanc ob rem et $\frac{(s+MF+PG)dx+Rda}{f}$ efficiendum est integrabile. Ponendum igitur est $R = \frac{fdA}{da} f(X+A)$ et $s+MF+PG = \frac{fdX}{da} f(X+A)$. In aequatione ergo proposita, quia s et M ex P dantur, debent F, G et f et X ex hac aequatione determinari. Quo facto sumatur $g = \frac{f}{F}$ et $h = \frac{f}{G}$, et $C = \frac{Gdh}{hda}$, et $D = \frac{Pdg}{gda} - G$ et $E = \frac{df}{fda} - F$. Atque ex his cognita erit aequatio $t = R + EN + DQ + Cz$, ex qua aequatio modularis facile conflatur. Simili modo ex his intelligitur quomodo pro altioribus differentialium gradibus operatio debeat institui, vt ad aequationes modulares perueniatur.

§. 27. In compendium nunc, quae hactenus tradidimus, redigamus tum quo facilius quaeuis aequatio proposita reduci queat, tum quo processus ad cuiusque gradus differentialia clarius perspiciatur. Proposita igitur aequatione $dz = Pdx$, ponatur x constans et a tantum variabile sitque $dP = Mda$, $dM = pda$, $dp = rda$ etc. Sit porro $Q = \frac{dz - Pdx}{da}$, $N = \frac{dQ - Mdx}{da}$, $q = \frac{dN - pdx}{da}$ et $s = \frac{dq - rdx}{da}$ etc. vbi dQ, dN, et dq, etc. sunt differentialia ipsorum Q, N et q, quae ex valoribus $\frac{dz - Pdx}{da}$, $\frac{dQ - Mdx}{da}$ et $\frac{dq - rdx}{da}$, inueniuntur positis a, x et z variabilibus. Hanc igitur ob rem cognitae erunt M, p, r etc. ex solo P, ex his vero habebuntur Q, N, q etc. Sint praeterea A, B, C, D, E, F etc. functiones ipsius a et constantium, et X, Y etc. functiones ipsius x non inuoluentes a.

§. 28. His praemissis si fuerit P talis functio ipsius x et a, vt BP comprehendatur in hac forma $\frac{dX}{dx}f(X+A)$ seu plurium huiusmodi formularum aggregato, semper dari poterit aequatio modularis differentialis primi gradus. Namque erit $PdAdx = z\frac{dBdX}{B} + Q\,dadX$ seu $BPdAdx = zdBdX + BQdadX$. Quae aequatio ob datum Q est modularis respondens aequationi propositae.

§. 29. Deinde si P talis sit functio ipsarum a et x vt $BP + CM$ aequalis fieri possit $\frac{dX}{dx}f(X+A)$ seu quotcunque huiusmodi formularum aggregato, aequatio modularis ad differentialia secundi gradus ascendet. Erit enim $BPdAdx + CMdAdx = zdBdX + BQ\,dadX + QdCdX + CNdadX$. Quae est aequatio modularis quaesita, et inuoluit differentialia secundi gradus, quia eam littera N ingreditur, quae per dQ ideoque per ddz, ddx et dda determinatur.

§. 30. At si fuerit $BP + CM + Dp$ aequalis huic formulae $\frac{dX}{dx}f(X+A)$ vel aggregato quotcunquae huiusmodi formularum; aequatio modularis erit differentialis tertii gradus, prodibit enim ista aequatio $BPdA\,dx + CMdAdx + DpdAdx = zdBdX + BQdad\,X + QdCdX + CNdadX + NdDdX + DqdadX$. Quemadmodum ex ante traditis colligere licet, si modo quantitates ab a tantum pendentes ad has formulas accommodantur.

§. 31. Simili modo ad altiora differentialia progressus facile absoluitur. Nam si $BP + CM + Dp$ $+ Er$

$+ Er$ aequetur formulae $\frac{dx}{dx} f(X + A)$ vel talium plurium formularum aggregato, orietur aequatio modularis ista $BPdAdx + CMdAdx + DpdAdx + ErdA dx = zdBdX + BQdadX + QdCdX + CNdadX + NdDdX + DqdadX + qdEdX + EsdadX$ quae erit differentialis quarti gradus. Atque hoc modo quousque libuerit hae operationes facile continuantur ex sola allatarum inspectione.

§. 32. His autem omnibus perspectis maxima tamen difficultas saepenumero posita erit in dignoscenda functione P, an in his expositis generibus contineatur et in quonam genere. Etiam si enim generales ipsius P valores, qui ex assumtis formulis obtinentur nihil difficultatis in se habere videantur, tamen exemplis particularibus propositis accommodatio saepissime erit difficillima. Cuius rei ratio nequaquam methodo traditae est tribuenda, sed imperfectae functionum cognitioni, quae adhuc habetur. Quamobrem non solum in hoc negotio, sed in plurimis etiam aliis casibus maxime vtile foret, si functionum doctrina magis perficeretur, et excoleretur.

§. 33. Quantum quidem mihi hac de re meditari licuit, eximium subsidium inueni, si P statim ad huiusmodi formam $\frac{dX}{dx} f(X + A)$ vel ~~huiusmodi~~ formularum aggregatum reducatur, id quod sequenti modo facillime praestatur, Prima aequatio proposita non constituatur inter z et x sed inter z et y, ita vt aequatio ad modularem perducenda sit $dz = T dy$, existente T

 functione

functione ipsius y et moduli a. Tum accipiatur pro x talis functio ipsarum a et y, quae transmutet T in functionem ipsarum a et x contentam in formula $f(X + A)$, vel pluribus huic similibus, earumque multiplis, in quibus X est functio ipsius x tantum, et A ipsius a. Hoc igitur facto prodeat aequatio $dz = S\,dx\,f(X + A)$ vbi S sit quantitas tam simplex quam fieri potest. Quare P erit $Sf(X + A)$ ideoque cum M, p etc. coniuncta facilius cum generalibus formulis comparatur. Inuenta autem hoc modo aequatione modulari, valor ipsius x in a et y assumtus, vbique loco x, loco dx autem differentiale huius valoris positis a et y variabilibus substituatur. Quo facto habebitur aequatio modularis inter a, y et z, quae quaerebatur.

§. 34. Ad pleniorem quidem methodi hactenus traditae cognitionem maximam lucem afferrent exempla et problemata, quorum solutio istam methodum requirit. Sed quia ipsorum problematum dignitas peculiarem tractationem postulat, in aliud tempus, ne hoc tempore nimis sim longus, eam differo.

CLAS-

CLASSIS SECVNDA

CONTINENS

PHYSICA.

CIRCA
STRVCTVRAM THYMI,
NOVAE OBSERVATIONES.

AVCTORE
Ioh. Georg. Du Vernoi.

§. 1.

VT in Veri inuentione adiuuemur ac quae doctrinae Anatomicae fundamenta sunt iacta minus ignoremus, eo primum annitendum est, vt quicquid seu nostra seu prisca aetate in Maiorum et iuniorum exemplaribus quae de Re Anatomica sunt conscripta, ab aliis est pertractatum et illustratum, animo probe impressum teneamus et eius memoriam diligentissime seruemus. Nam sine istiusmodi fundamentis, in cuiuslibet partis disquisitione, facile est, vt mihi aut aliis qui inuenta ignorant, quicquid oculis obuersabitur, nouum spectaculum esse credatur. Anatome vero, inquis, hac aetate ad eiusmodi lapsus minus est propensa. Ita fateor existimandum videretur, si aliter non esset compertum, eo argumento et specimine, quod iam tradere animus est.

§ 2. Thymus vulgo *Lactes*, vt apud nostrae aetatis Anatomicos est delineatus, tametsi neque fabrica neque vsus ea delineatione sit satis illustratus, cuius videlicet historia, vt hodie traditur, haud plura continet quam nomen, situm, extensionem, figuram, connexionem, vasa communia, dissensiones et coniecturas parum vtiles de ductu excretorio, humore, etc. non obstat, quin ea quantum ad cognitionem inuentorum et obseruationum ab initio Anatomes vsque in hoc tempus institutarum spectat, omni ex parte absoluta et perfecta meo iudicio censeretur. Ea profecto ratione, ante me, vt credebam, structura interior Thymi penitus delitescebat: Quod tamen iudicium, re melius perspecta et pro studio veritatis improbaui, postquam apud *Thomam Bartholinum* primum, hinc apud *Petrum Dionysium* praefatam structuram iam indicatam, a Iunioribus vero omissam fuisse haud sine admiratione cognouerim *Thomas Bartholinus* Anatom. quintum renov. Lib. II. Cap. VI. *Cauitatem in medio Thymi* Hafniae 1652. manifesto a se obseruatam esse primus testatur: Quae, inquit, etiam postea visa *Graesio* humore limpido repleta. *Petro Dionysio* obseruante, *Anatomie de l'homme troisieme edition, seixieme demonstration des parties de la Poitrine. La Fagoue est une Glande conglomerée .... on remarque quelle a dans sa partie moyenne une cavité qui est pleine de Lymphe.*

§. 3. Si primum *Thymi* exteriorem conformationem contemplemur, Is triplici glandula in foetu vt *Thomas Bartholinus* l. c. indicat, vel melius tripartito in omni aetate distinguitur. Iudicii enim ratio, cur is vt

tri-

triplex glandula creditur, est adhuc, opinor, nimis incerta, vt aliquid tuto definire liceat. *Lobos* appellare eas diuisiones magis rationi consonum est. 2. Quam *Verbeyenius*, vt rem apparentem tradit, videlicet praefatorum Loborum subdiuisionem in minores lobulos, est profecto realis et sensui manifesta compositio e plurimis lobulis eiusdem figurae, videlicet oblongae, quam post detractum commune seu exterius inuolucrum attingere procliue est, si quae praefatis lobulis intercepta sunt interstitia seu membranas tenuissimas pellucidas eos disiungentes animaduertendo, hinc facta leui incisione distrahendo, in aqua limpida perlustraueris; Qua ratione totam superficiem externam Thymi, parallelis et a se inuicem disiunctis lobulis coagmentatam esse conspexi.

§. 4. Porro praefata interstitia singula ramis vasculosis per ea excurrentibus sunt occupata, vnde ad lobulos incredibilis copia minimorum ramulorum propagatur. Quam vasorum hic luxuriantium multitudinem et ordinem haud sine magna admiratione sum contemplatus. His, vt est visum, accedit substantia quaedam alba lobulorum parietibus interposita: Facile enim est vnum colorem ab altero internoscere, quia color lobulorum est opacus ad rubedinem vergens. An sint nuda, an potius pinguedine permixta vasa? in dubio relinquitur. Caeterum memini, Thymum e Cadauere optimo exsectum, hinc vasi super ignem imposito iniectum, vt pinguedinem, calore solutum et liquefactum fuisse.

§. 5.

§. 5. Haud vna extensionis ratio in praefatis lobulis est obseruata. Sunt qui 9. lin. longitudinem acquant, sed latitudine parum a se inuicem discrepant, vid. 3. lin. quos postremo propria membrana tenuissima pellucida obuolutos esse haud praetermittendum est.

§. 6. Dixi praefatis lobulis et interstitiis totam superficiem externam loborum coagmentatam esse, docente primum *Verheyenio*. Num vero tota moles Thymi ex omni parte istiusmodi lobulorum sit compages? numque corpus densum et vacui expers sit nec ne? id quidem hactenus fuit incompertum: Nam praefata moles a Veteribus vt *corpus Glandosum*, a Iunioribus vt Glandula conglomerata, et quod hinc consequitur, vt corpus haud sinuosum sed solidum, est proposita: Quam structuram interiorem Thymi, si obseruationibus nostris minus sum deceptus, haud in ea particularum ratione, sed in re longe diuersa nuper a me inuenta, positam esse didici: Cuius tamen inuentionis laudem, ante me *Bartholino*, et post illum, *Dionysio* debitam esse, supra lubens testatus sum.

§. 7. Itaque Thymus interius ampla cauitate seu sinu pollicem fere admittente est instructus, vt obseruationes nostrae primum institutae fidem faciunt. Hunc supra memorata involucra videlicet membrana extima, hinc lobulorum substantia carnis speciem aemulans exterius ambiunt eumque terminant. Postquam praefata substantia ad ambitum cauitatis peruenit, tametsi vlterius ad extremum Thymi prolongetur, haud istiusmodi sinu est instructa, sed compressa, et cauitatis expers est. Caeterum,

rum, quando ſemel ac iterum inſignem cauitatem in Thymo conſpexi, propterea haud exiſtimandum eſt, in omnibus et ſingulis cadaueribus eam inueniri: quam ſi contemplari ſemper procliue eſſet, Eius inuentio vt videtur haud ad hoc tempus dilata fuiſſet.

§. 8. Quam difficultatem profecto haud nouam eſſe, iam ſatis ex Anatome eſt compertum, imprimis in partium cauitatibus, quae mutationibus frequenter ſunt obnoxiae; ſed, inquis, ſi Thymo cauitas naturaliter eſt conceſſa, eius ad minimum ſubobſcura veſtigia adhuc internoſcere procliue erit: Quod iudicium, inter alia Glandulae Renales *Euſtachii* confirmant; Sinum enim peramplum, quo eas Natura indubie inſtruxit, interdum prima inſpectione inuenies: Nonnunquam deliteſcit et fere obliteratur, referens videlicet, corpus denſum et ſolidum cauitatisque expers, quod tamen exercitatum Anatomicum minus vetat, quin impreſſiones ſubobſcuras obliterati ſinus nonſolum perſpiciat, verum etiam diſtractione parietum eundem reſtituat.

§. 9. Itaque parietes Thymi leniter diſtrahendo, manifeſto obſeruaui, illam quoque ſubſtantiam, quam cauitatis expertem et compreſſam ſupra credebam, paulatim dehiſcere, nihilque aliud eſſe quam ſinum iam obliteratum, Cauitatisque ſupra memoratae continuationem. Porro in aliis Cadaueribus, quorum Thymus iſtiusmodi manifeſta cauitate haud erat inſtructus, primum difficile erat veſtigium ſinus internoſcere; Spatio tamen aliquot dierum, laxata eius compage, exiguum interſtitium obſeruabam, cuius diſtractione, coepi manifeſto animaduertere, istiusmodi verum et regulare interstitium, totum tractum Thymi longe lateque penetrare, idque nihil aliud esse quam sinum contractum et iam obliteratum, vt e quarumdam partium Anatome alias compertum est.

§. 10. A Lobulis praefatam cauitatem circumambientibus, efformata sunt innumera spatiola in toto ambitu cauitatis conspicua, colore opaco subrubro notata ac interstitiis candido corpore repletis interstincta, vt vel prima inspectione intellexi. E praefati corporis, quo interior superficies magna parte est contexta, lucente albedine, et arearum diuersae magnitudinis subrubente colore et multitudine, species corporis maculati seu cancellati efficitur. An e nudis vasculis, vel permixto adipe, album corpus sit contextum nec ne? in re tam difficili et obnubilata definire minus procliue est. Vascula, quantum assequi potui, sub velo praetenui posita, canaliculorum fere vniformium, breuium, ½ lin. latorum, ac sese mutuo inosculantium congeriem, hinc arearum seu cancellorum irregularis figurae et magnitudinis incredibilem numerum efformant. Quod praefato operi est superextensum tenuissimum velum, in eo solertiae et opificii admirabilis specimen sum contemplatus: videlicet, haud membranam seu telam, sed genus vermicularium et exilissimorum canaliculorum, totam interiorem superficiem vt filamenta subtilissima perreptantium: Nam superaffusa aqua, depressi prius et complicati canaliculi, vi aquae eos explicante et eleuante, innatare visi sunt. Quam structuram ante singulas areas admirabile reticulum efformantem, tametsi vltra areas super interstitia sit propagata, propter

eiusdem

eiusdem insignem albedinem, quae interstitiis quoque est concessa, in his minus facile, quam in illis internoscere potui.

§. 11. Istiusmodi areis reticulatis, nonnulla corpuscula esse appensa, de quibus iam dicendum est, anim aduertisse mihi visus sum. Ad quinarium, earum arearum numerus erat limitatus: Caeterae enim omnes areae quas diu multumque contemplabar, sensu iudice, praefatis corporibus carebant. Quum stylo leuiter admoto, oculisque intentis, istiusmodi corpusculorum indolem inuestigarem, e medio ac super vnam quamque praefatarum quinque arearum quae a se inuicem longe distabant, vnum corpusculum egredi eique implantari, et styli agitationi tam facile obsequi, vt hinc inde eius motum obseruarem, plane ac indubie perspexi; Et quum eandem agitationem saepe instituissem, cognoui, haud sub areae reticulo, sed supra et extra reticulum, corpusculum positum esse, hinc in cauitate quam supra descripsi libere fluctuare. Ei, vt porro animaduerti, incredibilis tenuitatis filamentum erat annexum, quod altero extremo in areae fundo penetrare indeque ortum trahere videbatur, sicuti in singulis constanter sum contemplatus.

Caeterum, tam exili mole ea corpuscula constant, vt tametsi in cauitate fluctuent, in ea incidere minus procliue sit, quorum propterea inuentionem, cuidam colori eis proprio debitam esse fatendum est. Nam, quia carnis colorem aemulantur, ex aduerso interstitia vt supra indicaui, albo colore sunt praedita, ea ratione multum diuque peruestigando, rem felicissime sum assecutus. Porro oualem figuram, et laeuigatam superficiem iisdem corporibus concessam esse, iam supra obseruaui.

§. 12. Ductu filamenti, quod e profundo areae emergere, et cum corpusculo nexum habere dixi, interiorem conditionem et compositionem lobulorum, fundum areae occupantium, attingere conatus sum. Vtcunque ea de re sit, coloris similitudine, tam Lobuli, quam Corpuscula praefata, plane conuenire visa sunt, videlicet subrubente carneo colore, vt vel prima inspectione intellexi. Quos lobulos, et praefata corpuscula, si haud plane deceptus sum, vnum idemque corpus esse, iam absque haesitatione compertum habeo. Quae enim corpuscula intra cauitatem Thymi fluctuare prius obseruaui, ea sunt distractae et quasi auulsae, et filamento supra memorato *lobulis* annexae, hinc supra areas eminentes particulae; Lobuli autem eaedem sunt particulae, sed profundius sitae, in vnamque aream collectae, vt in plexibus glandulosis tenuium intestinorum. Num, cum intestinorum crassorum solitariis glandulis, altera corpuscula quae a lobulis sunt auulsa, recte conferantur nec ne? Alii viderint. Postremo haud pluribus, quam vno plano praefatorum corpusculorum, vt clare perspexi, singuli lobuli erant compositi, quod planum vero in nonnullis latius et longius, in aliis contractius et minus oblongum apparebat: In illius plani tam interna quam externa facie, exilissima corpuscula vesiculis seu globulis similia, propterea que vesicularem superficiem conspexi, vt duo videlicet haemisphaeriola vtrinque protuberantia.

DE

DE ASPECTV ET CONFORMATIONE VARIA VASORVM SANGVINEORVM IN DIVERSIS PARTICVLIS VENTRICVLI, Obſeruationes.

AVCTORE

Ioh. Georg. Du Vernoi.

§. 1.

Non ſolum in functionis Nobiliſſimae Machinae, in qua Alimenta intra breve temporis ſpatium, in ſomno aeque ac extra ſomnum, in ſuccum alibilem conuertuntur; verum quoque in eiusdem deprauationum iudicio, ſumma diligentia in hoc inquirendum eſt, num quando in defunctis rubicunda facies ventriculi vt plurimum eſt extincta, eiusdemque fibrae et membranae ſunt albae et pallidae, id propterea Vaſa ſanguinea hic *minus* abundare, vere indicet nec ne? Porro eo ſtudio et diligentia ea de re eſt tractandum, vt non ſolum generaliter caudices vaſorum, quam quidem cognitionem generalem haud improbo, ſed eam praecipue indolem aſſequamur, quam vaſa progrediendo acquirunt, ſuper vnum quodque planum tunicarum, iuxta ordinem et ſeriem, qua in fabrica ventriculi ſeſe inuicem excipiunt.

§. 2. Duplicem vasculosum contextum in ventriculo dari *Thomas Villis* primus est Auctor. *Vasa sanguifera* inquit *quamplurima ad ventriculum pertingunt, quod plane cernitur, si* Hominis, *canis, aut porci stomachus, vasis coeliacis primo ligatis et resectis eximatur, et orificiis constrictis infletur, tunc enim iucundissimo spectaculo videbis, minores venarum et arteriarum truncos partim ventriculi summitati et partim fundo eius insertos, qui mox in ramos minores et deinde in ramusculos et propagines minimas diuisi sibi inuicem occurrunt et quaquaversus expansi totum stomachi ambitum perreptant et veluti coma fruticosa obducunt.* Haec *vasa sanguinea introrsum tendentia, in tunica intima neruosa terminantur, cuius interiorem superficiem prae densitate punctorum, in quo vasa desinunt, rubore inficiunt et quasi cruentant.* Hoc *manifesto liquet, si quando post stomachi immersionem in aqua feruenti, tunica villosa separetur, tunc enim tunica nervea ob densissimas vasorum terminationes quodam quasi reticulo sanguineo obtecta videbitur.*

§. 3. Possem hic Cl. Virorum de istiusmodi vasis ventriculi obseruationes in medium afferre, videlicet de ratione vasorum in exteriore et interiore superficie, vti dictum est. Verum, maiori Rei Anatomicae emolumento, praestat rationem ostendere, qua inter duos praefatos terminos, et quod hinc consequitur, in singulis tunicis circulariter ventriculum ambientibus, tam multiplicationem incredibilem vasorum, quam diuersitatem admirabilem contextuum vascularium Natura sit molita. Nam, si obseruationibus nostris haud plane sumus decepti, alia aliaque

textura,

textura, alius reptatus, aliae ramificationes vasorum inter sese discrepantes, in conspectum veniunt. Postremo, eam ordinis serieique rationem, inter praefatos contextus vasculares obseruasse mihi visus sum, vt contextus minus subtilis vel crassior, a subtiliore, subtilior a crassiore vice mutua exciperetur.

§. 4. Ac primo, in extima tunica, Caudices vasorum in summa et ima regione cursum instituere, ac suo tumore extus prominere totumque ventriculum instar coronae cingere obseruantur. A praefatis caudicibus, magno numero tum super anteriorem quam super posteriorem faciem memoratae tunicae, vasa crassiora vsque ad medium, fluminum more decurrentia propagantur, quae postquam eo peruenerunt, arbusculi breuioris formam assumunt; Hinc series duplex istiusmodi arbusculorum, super vtramque faciem ventriculi efformatur, altera vertice deorsum, altera sursum spectante, quorum extrema, ultra praefatum terminum haud progredientia, mutuis inosculationibus copulantur.

§. 5. Sub memorato contextu, Nouum et plane diuersum opificium vasorum, in tunica cellulosa apparet, vt in tunicis adiposis C. H. Haud enim ductus seu canales ampli, longe lateque excurrentes hic sunt positi, verum quanta est cellularum congeries et subtilitas, tanta est multiplicatio et tenuitas vasculorum minimorum illas perreptantium, quae in modum subtilissimi et admirabili artificio elaborati reticuli inuicem sunt nexa et concatenata.

§. 6.

§. 6. Iam ſuper proxime ſequentem tunicam carnoſam, duplici ſerie fibrarum compoſitam, iterum vaſa alia lege incedere, conſpectumque plane mutare ſunt viſa: Etenim, in longum et latum, vaſa breuia, rectilinea, ramoſa, regulari ſerie, et certa diſtantia, vt ſurculi arboris breuiores truncati ac decuſſati, et quod hinc conſequitur, formam crucis mentientes, ſunt poſita, iuxta duplicem ſeriem fibrarum, quarum directionem ſequuntur: Vnde prima inſpectione, haud vt ſurculi ſingulares et cruciati, verum vt vas geminum decuſſatum viſa ſunt. Poſtremo, apices ſeu extrema praefatorum ſurculorum ſubito attenuata, minimis propaginibus terminantur, quae cum ſurculis vtrinque adſitis vltimo copulantur.

§. 7. Quarta ſubſequens Tunica ſub Muſculari ſita, vt multiplicatione, ſic ſubtilitate et fabrica vaſculorum minimorum eius cellulas perreptantium, eſt verum exemplar ſecundae ſupra deſcriptae: Nam ambae ſunt *adipoſae*, vt in optimis Cadaueribus eſt perſpicuum: Vnde hic, eius ſolum modo cum priore ſimilitudinem absque inutili repetitione annotaſſe ſufficit.

§. 8. Detracto eo velo adipoſo ſubtiliſſimo, aliud admirabile opificium vaſorum aduertendum eſt, a quo totum ventriculum ex omni parte obtectum eſſe manifeſto conſpeximus. Id quatuor antecedentibus, cum fabrica tum amplitudine vaſorum, nequaquam reſpondet. Sunt videlicet 1) ductus breuiores valde conſpicui, ampla eaque conſtanti diametro inſtructi, hinc arcuati, et vtroque extremo cum eiusdem generis ductibus inoſculati. vid. *Comment. Acad. Scient. Tom. IV.* 2) Per iſtiusmodi compagem,

pagem, et fabricam, opus regulare efficitur, ex quo innumera ſpatiola ſeu foueae, vt alueoli, efformantur. Idcirco, vtrumque eſt admiratione dignum, videlicet, incrementum ſubitaneum ſeu amplitudo vaſorum eo in tractu ventriculi, porro eorundem fabrica cancellatum opus referens, proxime attingens intimam ſeu poſtremam tunicam cauum ventriculi efformantem, de qua iam poſtremo agendum eſt.

§. 9. Vt hactenus memoratae tunicae ventriculi, nihil aliud fere ſunt quam congeries vaſculorum cum intermixtis partim cellulis adipoſis, partim fibris carneo tendineis; ſic interiorem vulgo neruea‍m tunicam, *Williſio* et *Rhuyſchio* primum obſeruante, tam in C. H., quam in nonnullis quadrupedibus, aeque inſigni copia vaſorum Natura inſtruxit: Quicquid enim neruorum his intertextum eſt, haud profecto nomine Nerueae tunicae eſt dignum, de quibus vid. *Comment. Acad. Imper. Tom. IV.* Conditio vel aſpectus vaſorum ſuper hancce tunicam ſic oblatus eſt. Vt in praecedente contextu, vaſa rariora grandioraque, et ramuſculorum capillarium ad ſenſum expertia, ex aduerſo ſuper hanc, mirum in modum ſunt extenuata, multiplicata et diuiſa, ac tanta ſolertia mutuo implicata, vt vel toto Corpore Humano, ullum opificium hactenus exſtare dubites, quod Diuini Artificis ſapientiam magis demonſtret.

CONTINVATIO OBSERVATIONVM ANATOMICARVM.

AVCTORE
Ioh. Georg. Du Vernoi.

Obs. 1.

AD Ossis Hyoidis, quod in cantu, loquela, et deglutitione, haud momenti expers est, perfectiorem notitiam, operae pretium est, inquirere, num, vt hic est obseruatum, ambo eius Cornua sint inaequalia? num eo in casu, id e constanti Naturae instituto, an potius ex Naturae diuersa operandi ratione de qua vid. *Aduers. Anat.* 1. *Animadu.* 28. *et Aduers.* 2. *Anim.* 29. Species profecto disparitatis Cornuum Ossis Hyoidis, in variis cadaueribus, haud solum super diu asseruata et exsiccata, sed etiam recentia et cruda, leuiore tamen in his discrimine, manifesto est obseruata: constanter enim, eodem latere, videlicet dextro, cornu breuius et contractius, sinistrum longius est visum.

Obs. 2. De Ductu insigni Appendicis Glandulosae super Thyroidem cartilaginem positae, hic rarum exemplum est oblatum. Is erat ita plenus et distentus, vt crassitiem digiti exaequaret. Liquor albumen oui referebat. Caeterum, vtcunque ea de re sit, tametsi ductus ac praefatus

fatus liquor comprimeretur, aerque vi impelleretur, tam ſupra quam infra, cauitas nulla ad ſenſum apparebat.

Obſ. 3. Si, iuxta alias obſeruationes, in praefatam appendicem, inflicto leui vulnere, aer per tubulum fortius adigitur, canalis haud raro apparet, vltra fiſſuram Thyroidis cartilaginis ad concauam baſin oſſis Hyoidis, et, vt frequenter eſt obſeruatum, ſiniſtrorſum tendens. Qua obſeruatione, forte in ſuſpicionem cuiusdam ductus, multi ſunt adducti. Nunc aliter, vt videtur, de praefatae appendicis natura eſt iudicandum: nam in duobus Cadaueribus, fibrarum carnearum planum, vt continuata iſthmi ſubſtantia dextrorſum produci videbatur. Hae fibrae ab vno extremo ad alterum parallelae, faſciculum inaequalem, qui ad baſin Oſſis Hyoidis oblique ſcandens, ibi in tendinem terminari viſus eſt, producebant. Is faſciculus, muſculo thyrohyoideo ſic erat connexus, vt eius pars videretur. In quadam muliere, vnica, tenuis, et carnea fibra, nullumque aliud veſtigium appendicis apparebat.

Obſ. 4. Cui vſui praefata Appendix ſit comparata? Cur ſiniſtrorſum, ad latus muſculi thyrohyoidei, ſuper fiſſuram Thyroidis aſcendens, in caudam tendineam deſinit, quae in baſin concauam Oſſis Hyoidis implantari viſa eſt? ea de re forſan aliquid coniiciendi facultas erit, ſi cornuum Oſſis Hyoidis in prima Obſeruatione memorata conditio, ſpecialioribus Obſeruationibus confirmata eſſet: Quibus, ſi, vt alias eſt traditum, inter Os hyoidis, et glandulam thyroideam nexus, isque in ſinistra colli parte, et quod hinc consequitur, ad sinistrum cornu ossis hyoidis, rarius dextrorsum sit positus, minus esset alienum suspicari, num ad vsum praefatae glandulae thyroideae, excessus longitudinis cornu sinistri Ossis Hyoidis, spectet nec ne? num forte in vocis, vel loquelae, vel deglutitionis actibus, molem corporis glandulosi sustentet, aut Laryngis ascensum promoueat etc. Nunc de Larynge nonnulla.

Obs. 5. Petiolum Epiglottidis, quod interius e Thyroidis media fere parte ortum trahit, vt processus immediatus, sed mobilis, absque ligamento enasci visum est. Figura tereti, qua est ab initio, per 4. fere linearum longitudinem, vt et soliditate et crassitie, per medium Epiglottidis, est extensum, qua soliditate et duritie fouearumque defectu, a reliqua substantia Epiglottidis manifesto distinguitur, ac propterea *acuta ac prominens interior pars Epiglottidis*, *quae veluti in oblongam aciem componitur*, recte a Celeb. *Santorino* est appellatum: cuius descriptioni adhuc adiiciendum est, quod nonsolum interiore, verum etiam exteriore parte, linguam respiciente, praefata acies promineat, et figura sinuata seu flexuosa instructa sit. Vtroque eius latere, scissurae profundae semicirculares sunt conspicuae, quibus substantia Epiglottidis, pari numero scissurarum semicircularium accreta est, vnde in vtraque Epiglottidis facie, foveae seu foramina a Celeb. *Morgagno* primum annotata efformantur. Ea enim Epiglottidis substantia, exiguarum cartilaginum, vt totidem fragmenta, intermedia quadam materia disiunctarum congeries est, quarum nonnullae oblongae, aliae orbicu-

orbiculares ſunt viſae, omnes vero ſinuatae, quibus efficitur, vt media ſubſtantia foueis, vt iam dictum eſt, excauata, eius vero ambitus exterior, inciſus et laciniatus appareat.

Obſ. 6. Quam foueis interiectam, minimasque cellulas inuicem copulantem materiam indicauimus, ea, vt obſeruationes noſtrae fidem faciunt, primum exterius, in cauo Thyroidis ſuper petioli radicem, paulo largius et craſſius eſt aggeſta, vnde pars globoſa *Verbeyenii* efficitur, hinc ſuper vtramque Epiglottidis faciem diffuſa et propagata intra cellulas ſeſe recipit, pars denique tenuiſſima cum minimorum vaſculorum ſanguineorum inſigni copia, ſpeciem Reticuli efformare viſa eſt: Quam materiam profecto, quoniam ab altera ſubſtantia Glandulоſa, de qua Celeb. *Morgagnius*, longe discrepat, ac vt videtur, pinguedini potius reſpondet, quam porro circa iſtiusmodi cartilagineas partes haud omiſſam fuiſſe conſtat, cur animaduerſione indignam hic cenſeremus? Vtrum, communi humore e glandulis ſtillante, duris aeque ac mollibus, interioribus et exterioribus partibus Laryngis, an potius, materia propria iſtiusmodi partium conditioni accommodata, cartilaginibus Laryngis, Natura ſapienter proſpexit, vt Illuſtr. *Morgagnius*, poſt diligentem indaginem memoratae Laryngis, primum ſuſpicatus eſt? quod iudicium tamen Doctiſſimo Viro minus poſtea placuit, propter quaepiam quae explicare haud neceſſe Ei viſum eſt: Propterea, iudicio noſtro haud fidentes, ad illuſtrationem fabricae interioris Cartilaginum praefatae Laryngis, a Celeb. Viris iam detectae, nonnulla adhuc, duce Anatome ſunt exponenda, vnde Naturae conſilium facile intelligitur.

Obſ. 7. Vel prima inſpectione, detracto involucro membranaceo externo, Laryngis cartilagines, vt prius ſuper Epiglottidem eſt obſeruatum, reticulari fabrica minimorum vaſculorum rubentium, cum admixta tenui adipoſa materia obduci, intelligitur. Si porro Arytaenoidum extrema quorum vtrumque bicorne nobis eſt viſum, per medium iuxta longitudinem diuidas, tametſi cellulae ob exilitatem ſint inconſpicuae, quoddam coloris et ſubſtantiae diſcrimen in medio, vt diploe, manifeſto apparet. Corpus ſeu baſis, annotante primum Celeb. *Morgagnio*, celluloſa, liquore medullari turget: nam iuxta noſtras obſeruationes, duo hic ſunt animaduertenda interſtitia ſeu cauernae, ſubſtantiae ſpongioſae oſſium ſimiles, et ſucci medullaris flaueſcentis quasdam particulas continentes, vna in baſi, eaque amplior, altera parua orbicularis, paulo altius verſus ſuperficiem lunatam poſita. Caeterum, inter vtramque concauitatem nulla communicatio, ſenſu iudice, eſt inſtituta, ſi quosdam porulos excipias, cuiusmodi alias in cartilaginum ſubſtantia ſunt conſpicui.

Obſ. 8. In Cricoide cartilagine, nonſolum ea parte, qua ſinui Arytaenoidis inarticulatur, parte videlicet poſtica, verum etiam verſus anteriora, inſignis et circularis Zona cauernoſa, quae poſterius ad transuerſi digiti latitudinem eſt ampla, in cauo et medio thyroidis contractior, manifeſto apparet. In ea porro, vt in cellulis maiorum oſſium, copiam medullaris olei collectam eſſe perſpicuum eſt, vt ex preſſione intelligitur.

Obſ. 9. Poſtremo in Thyroide, fabricam mixtam e ſubſtantia celluloſa et cartilaginea obſeruare procliue eſt: nam, tametſi alarum ſubſtantia e pura cartalagine ſit conflata, quaedam tamen diploe ſtrictior et compactior e cellulis minutiſſimis contexta, conſideranti patet. Iſtiusmodi autem fabrica cauernoſa imprimis perſpicua eſt circa margines poſticos, et circa proceſſus inferiores, qui cricoidis anticae parti inarticulantur.

OBSER-

OBSERVATIONES ANATOMICO-PRACTICAE,

A

Io. Fredr. Schreiber

communicatae.

Obſeru. 1.

Tab. X. et XI. EST curioſa magis, quam vtilis. Dabo tamen illam, quia tali oſſe caruit rariorum oſſium theſaurus *Rauianus*. Etenim, aperiundo cadauer hominis, modo ſani, a fumo enecti, cuius quam maxume turgidus ventriculus, ſiniſtram Thoracis cameram coarctans, figuram 1. Tab. I. ad impetus *Cantianos* optume exprimebat; Dum et caput reſerarem, Os verticis ſiniſtrum dextro, poſteriora verſus, productius, latius, atque interiore ſui parte curuum magis, hinc et altius, miratus ſum. Cranium, a poſtica conſpectum, obliquum ideo adparuit totum. Hemiſphaerium ſiniſtrum cerebri pariter ſe habebat ad dextrum.

Obſ. 2. Vir ſanus, aliquot, ſupra triginta, annos natus, atque ebrius, cadendo ex alto in plateam, ſtratam lapidibus, vulnus ingens ſuo impreſſerat capiti. Namque, vbi os verticis dextrum cum oſſe occipitis fere coniungitur, integumenta capitis fuere contuſa; quibus ablatis, cranium nudum viſum, atque fiſſura duplex: altera, vnciam longa, atque vertici propinquior: altera, dexterio-

ribus

ribus propior, vsque in futuram dexteram, quae cum finistra A Graecorum aemulatur, continuabatur. Vnde suturae huius in se mutuo immissi denticuli ab arctiore amplexu recesserant. Vtraque fissura vero a sutura, cui a sagitta nomen, fere aequidistabat vbique. Aeger hic, per omnem morbi decursum, mente constitit; nullis symptomatis adstantes terruit; quietus semper; rogatusque; omnia sibi dolere; regessit. Ast debilitas, quae corpus hominis, modo sani, adeo subito incesserat, erat oppido ingens. Quam, tam repentinam, dum meditarer; vt et statum aegri, inter cadendum ebrii; locum vulneris; fissuram geminam; atque impetum, quo cranium durum in renitentes lapides, adcelerato motu, impegerat: fusum, extra vasa, sub cranio, cruorem mente concepi facile. Salutis spem tantum non amputabat cerebelli vicinia ad loca fissa; nec non illa debilitas. Quocirca, trepanationis famae intempestiue parcens, ab aliis adeo commendatam medendi viam incedere constitui.

Illico igitur, ex secta vena, tantum sanguinis fusum est, quantum per debilitatem aegri licuit: capitique conuenientia adplicata sunt, et fomenta, et emplastra. Die morbi altero exhibitum fuit ex ialappae radice purgans forte; quod tamen ter tantum aluum soluit. Eodem, omnem adparatum, adplicatum capiti, abripere incepit decumbens. Die tertio, repetita fuit venae sectio: sed non adeo multus potuit extrahi sanguis. Versus vesperam, cibum potumque rogauit aeger. Die quarto, deglutiuit purgans, priori fortius. Sed immota stitit aluus; atque vulneratus, hora post meridiem quarta, quadam cum conuulsione ventriculi, exstinguebatur.

Aperui cadauer. Ac primo quidem ab integumentis vndique liberato cranio, fissuram illam duplicem spectaui. Illa, quam longiorem dixi, suturam deferens, pergebat ingens per totum dexterum latus ossis occipitis. Ceterum nullibi alia fissura exterius. Resecto cranio, supra duram matrem, sub fissurarum locis, plurimum erat extra vasa cruoris, *adeo congelati, et inspissati, vt durae matri, instar picis seu resinae, adglutinatus fuerit, vixque ferramentis et multo conatu hinc deradi ac remoueri potuerit.* Lustraui quoque integre perruptum magnum durae matris vas. Per omnem fusi cruoris plagam cerebrum complanatum erat, quasi manu illud complanasses. Cerebelli hemisphaerium dexterum quoque tegebatur concreto cruore: qui illud et compresserat aliquantum, et plane flaccidum reddiderat. Reliqua Εγκεφάλου bona. Visa hic iterum in caluariae intimis illa magna descripta fissura, per dextrum ossis occipitis latus, in vicinia ossis petrosi, procedens, illudque, vsque per dextrum magni occipitalis foraminis latus findens. In cranio autem interno alia fissura nulla. Thorax apertus nihil inconsueti monstrauit. Ast, recluso abdomine, cuius integumenta vndique sana conspiciebantur atque candida; mox in oculos incurrerunt dextrum corporis latus, sub illaeso iecinore, occupantia contusa intestina; atque ipse musculus Ψοας magnus dexter contusus. Ren dexter vero sanus erat. Arteriae totae erant cruore vacuae: sed in venis sanguis.

Ex qua historia, pace medicinam facientium, sequentes, non inutiles, deducam propositiones.

1.) A compreſſione aliqua cerebelli debilitatem toti induci corpori. Quia cor inde fit debile.

2.) Debilitatem in homine, prius ſano, iam caput vulnerato, malum conſtituere ſignum; fereque notare fuſum, ſupra cerebelli partem, cruorem; ſi fuſi ſanguinis ſigna de cetero adfuerint.

3.) In vulneribus capitis pleraque adlegari ſolita extrauaſati cruoris ſigna abeſſe poſſe: eo tamen extra vaſa haerente.

4.) Circa effuſorum humorum in viuo corpore reſorptionem monenda quaedam eſſe; ſiue inſpiratura vaſa cogites; ſiue humorem inſpirandum. Venae inſpirant ſolae. Ad reſorptionem igitur innumerarum requiritur praeſentia: hauriunt enim oribus, ob paruitatem inuiſibilibus. Hae venae porro ſint bibaces. Tales fiunt euacuatae: nam repleta vena non bibit. Sed et in venarum villos ſufficiens neruei liquidi copia influere debet, per quod fiat impetus in venas; indeque in hauſta. Etenim vena mortua, vacua licet, humorem vel adtenuatiſſimum non haurit, niſi ad certum terminum, aeque, ac tubus capillaris. In has venas plerumque inſpirari debet effuſus cruor. Qui ergo ita adtenuandus, vt, roris, non ſanguinis, ſpecie, oſcula venarum, globulum rubrum capere neſcia, introire queat. Hic ſcopus eſt fomentorum atque emplaſtrorum adtenuantium, extra vaſa fuſis humoribus adplicatorum, ſemperque adplicandorum. Eamdem ob cauſſam, facillima fit in abdomine reſorptio: omnia enim ibi haerent in balneo naturae. Vid. *Obſ.* LXVI. *Ruyſchiana in Centuria*.

Quibus pensitatis, et cum praesente historia collatis, ex alius errore proficiant Medici, inque faciunda medicina propositionibus determinatis pretium statuere tandem incipiant. Quod si multas venas ad resorptionem requiri intellexeris; impossibilem illam dices, cruore supra duram matrem fuso. Venae enim ibi sunt paucissimae, respectu aliorum locorum corporis. Sunt tamen plures in suturae vicinis. In cerebri intimis ideo fit facilior extrauasati receptio. Quare studendum certis signis, per quae noscas effusum supra duram matrem sanguinem. Sed et venae huius aegri non potuerunt satis bibulae reddi. Etenim primo prohibuit ingens debilitas, quo minus satis euacuarentur; siue per sectionem venae; siue per purgans. Vena secta hominis robusti facilius magisque euacuatur, quam infirmi. Sed purgans, magna quamquam virtute praeditum, non soluet sanguinem, nisi vi vitae fuerit actum. In debili ergo non agit, quod speraras: eoque agit minus, quo fuerit potentia validius. Quae omnia a priori certa sunt. Certe; die altero purgans minus aluum ter laxauit: maius autem, ipso emortuali die (quo vis vitae sensim decrescebat, donec nihilo aequaretur) exhibitum, eamdem ne quidem tetigit. Secundo; quamquam omnia ad resorptionem adcommodata hoc in aegro fingantur: debilior tamen spirituum in venas influxus eamdem impediuisset. Vltimo; in cranio est calor minimus; frigusque, debilitatis comes, non potuit satis adtenuare fusum vel in abdominalibus cruorem. Amo febrem, quam alii adeo pauent, succedentem contusioni; si modo non fuerit. Est enim singulare naturae institutum, quo effusos humores adtenuet, venasque ad bibendum incitet. Nec umquam resoluta sunt contusa, sine quadam febre.

5.) Ita-

5.) Itaque, humoribus in corpore, quacumque de caussa debili, effusis; venae sectione atque purgando nil proficimus.

6.) Trepanum igitur fuisse adplicandum aegro descripto. Licet et ab hoc dubia fuisset spes; cum, quod cruor supra cerebelli partem haeserit; tum, quod arctissima concreti cruoris ad duram matrem adhaesio *trepanationis* censeatur *difficultas*.

7.) Doctrinam de *contrafissura* hoc exemplo non confirmari.

8.) Intima corporis contusa esse posse, nullo signo externo conspicuo. Hanc non vna didici obseruatione. Circumspectum igitur se gerat Medicus.

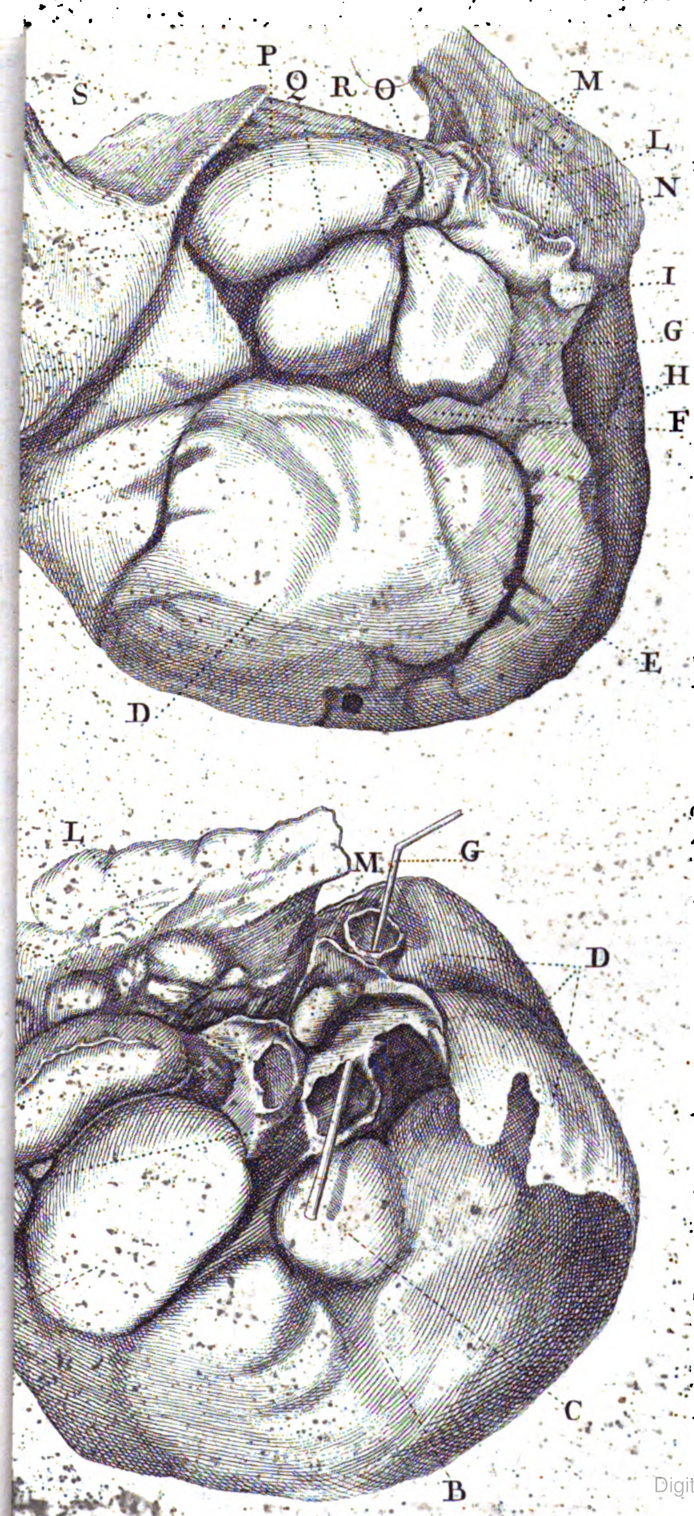
9.) Quodsi suspicio adfuerit cruoris, a percussu extra vasa in caput fusi; e. g. ob magnitudinem ictus; locum vulneris etc., nec tamen sequantur valde compressi cerebri effecta: signum haberi certum stagnantis supra duram matrem sanguinis: sustinetur tunc sanguis a membrana, in arcum extensa. Vnde et alius durae matris vsus noscitur; cur illa potius caluariae data sit membrana, quam cerebro? Immo; obseruationes eiusmodi elaterem membranae illius annon probant?

Obs. 3. Dissecui cadauer hominis, repente, vt aiebant, defuncti. In thorace pulmones vndequaque adnatos contuitus sum ac contrectaui, e quorum superficie plurima, eaque sat magna, surrexerant tubercula, materiem continentia calcariam. Ad asperam arteriam erat anterius, praecise sub initio ossis pectoris, cartilagini exterius adcretus tumor, nucis moſchatae figura et magnitudine, ſimilique foetus calciformi materie. Fini tumoris continuabatur bronchialis glandula. Diaphragma vero ipſum, inter pulmonem dextrum, illi continuum, atque iecur, totum tangebatur cartilagineum, vel oſſeum. Profecto; flexum frangebatur, cum ſonitu.

Obſ. 4. Homo, haud ita diu hydropicus, repente cadebat exanimis. Spectaui et huius interiora. In abdomine ſtatim occurrit praeuiſa aqua. Et pectus occupabat hydrops; pulmonesque vbique adfixi erant membranae, ſuccingenti coſtas; et quidem, ope fibrarum, albarum, elegantiſſimarum; raro viſarum *Lanciſio*. Filamenta talia, pulmones illi membranae coniungentia, ſaepenumero obſeruaui in cadaueribus, quorum thorax aqua ſcatebat. Peruentum ad cor; certe ingens! Huius diſciſſa capſa, craſſitie dimidiam minimi digiti craſſitiem aequans, atque intus plurimis, iisque non exiguis, ſteatomatibus obſita, tantum capiebat cruenti laticis, quantum poterat. Cor ipſum paruum erat et maceratum; atque, ad locum medium ventriculi dextri, adnatum pericardio, carnis auxilio fungoſae, trianguli formam habentis, atque ex corde ſurgentis: forte non abſimilis illi, qua cordis mucronem defenſum viderat *Haruaeus*. *De generat. animal, exercit.* LI. In cauitatibus cordis erant polypi, per vaſa ſanguinea protenſi, vt vlnas metiri potuiſſes.

Repentinae huius mortis cauſſa ſat manifeſta.

Obſ. 5. Quod numquam inſpexit *Veſalius*, *iecur humanum in fibras aliquo pacto diuiſum*; ſemel inſpexi, dum,


S
P
Q
R
O
M
L
N
I
G
H
F
E
D
L
M
G
D
C
B

dum, aperiens cadauer hominis adulti, modo ſani, et a temone, velocius decidente, lethaliter tacti, in manifeſtos lobos diſtinctum epar et contrectaui. Id patet ſequentis adiectarum tabularum explicatione diſtincta.

TABULA I.

anteriorem epatis faciem repraeſentat.

A notat *portionem diaphragmatis*, *cum adnexo peritonaeo* reflexam, ſupra aliam, quae S ſignatur.

T notat *ligamentum*, quo diaphragmati adhaeret epar.

B eſt *lobus primus*, triangulum mixtilineum ſuperficie ſua exhibens, cuius curua βασις ſub ſepti transuerſi parte, quam littera S indicaui, deliteſcit. A vicinis lobis diſtinctus eſt per ſciſſuras admodum profundas.

C *lobus ſecundus*, eiusdem fere cum primo figurae, ſeiunctus a lobis ceteris per inciſiones, ſuum verſus apicem profundas.

D *lobus tertius*; ſeu; *caput extorum*; variae, vt adparet figurae. Ad dextrum latus profundos obtinuerat limites.

E *lobus quartus*, ſiniſtram epatis partem fingens, qui, cum *quinto*, G, confluens, excurrit in *lobum ſextum*, F, μαχαιραν, pugionis vel cunei inſtar, immiſſum lobis, quos litteris, D et R, ſignaui.

H notat *veſicam bilis* inflatam, anterius aliquantum prominulam.

I eſt *locus inſertionis ligamenti vmbilicalis*, in figura obſcurius aliquantum propoſitus.

L eſt

L est *lobus septimus*; isque *aliformis*.

M est pars diaphragmatis atque peritonaei abscissi, vsque ad ligamentum vmbilicale excurrens.

N *lobus octauus*, e cuius medio enatum diaphragma, littera M indicatum. Pars media altera hic latet sub eleuato lobo L.

O *lobus nonus*; exiguus; ονυξ.

P *lobus decimus*; τραπεζα: cuius vera figura data, nisi, quod latera eius, versus lobos B et O, rectilinea magis fuerint, quam depicta habentur.

Q *lobus vndecimus*.

R *lobus duodecimus*; qui altera τραπεζα.

TABULA II.

Sic dictam concauam epatis faciem sistit.

L est *lobus alaris* Tab. I., cum eminentiis suis plurimis, ab inferiore parte spectatus. Immittit se sub vesicula fellis. Sique ipsum ab hac parte integre prenses: ad eumdem pertinere arbitraberis lobos, in Tab. I. depictos, atque designatos litteris, G, N, O, R.

H est *vesicula bilis*, turgida flatu.

A est *lobus inferior primus*; isque *mammiformis*.

E est *lobus quartus* Tab. I., ab hac parte visus.

B *lobus secundus*; maxumus. *Caput extorum*.

C *lobus tertius*. Τραπεζα.

D *Pars diaphragmatis et peritonaei*. In Tab. I. hanc notauit litera S.

G *Si-*

G *Sipho, per venam cauam traiectus*, viam huius per epar designans.

F *Venae portarum*, quae membranae pinguetudinosae adcreta vndique, ingressus in epar.

I *lobulus exilis*; quasi vna porta.

M *lobulus alius*. An porta altera? A vena portarum certe seiunctus spectatur, atque venae cauae valdopere adnatus, vt huius potius porta haberi possit, quam venae portarum.

Homo viuus de epate conquestus fuerat numquam; quantum rescire potui. Idemque, cultro diuisum, omnimode sanum sum arbitratus. An, in hoc epate, singularis fuit vasculorum directio, aliusque decursus, quam obtinere solet? Felix id reuelare potuisset iniectu. Talis modi epar, in scholis, inter malae conformationis opera refertur. Peruersus biliariae vesicae situs id poscit, inter alia. *Lusus naturae* vocatur talis productio ab iis, qui ludunt cum vocabulis. De cetero liquet, et antiquorum inquisitioni se offerre potuisse talia epata: aduersus quos acriter disputauit *Vesalius de hum. corp. fab.* Lib. V. Cap. VII.

Obs. 6. Situm *intestini duodeni* optume descripsit, suis in *obseruationibus Anatomicis, Santorini*. Sed, qui eumdem omnimode constantem existimant, siue repletus fuerit ventriculus, siue vacuus; siue denique sana fuerint ventriculus vel duodenum, siue morbis quibusdam obsessa: ii falluntur etiam atque etiam. Scribam, quae meis vsurpaui oculis. Principium duodeni adscendit, atque superius eſt pyloro ventriculi, vel vacui, vel parum repleti. Contra; ventriculo repletiſſimo, fundus huius e diametro oppoſitus eſt ſpinae dorſi, atque duodeni initium eſt in plano, ad ſpinam dorſi orthogonio. Adcurate hoc videas in Fig. 1. Tab. I. ad *impetus Anatom. Cantianos*. Sic natum inteſtinum, flexuoſo ductu, ſe immittit quaſi in cauum quoddam, factum, ſiniſterius, a parte omenti, a ventriculo ad epar euntis; ſuperius, a parte concaua iecinoris, praeciſe infra ligamenti vmbilicalis inſertionem in epar; et, quoad circumferentiam dexteriorem, a veſicula fellis, colo, atque rene dextro. Tumque, renem deſerens, incedit incuruum ſupra muſculum ψοας magnum, truncum venae cauae, atque venam emulgentem dexteram. Dein progreditur tranſuerſim. Vbi fere ad ſpinam dorſi peruenit, caudicem venoſum meſeraicum, ad epar euntem, incumbentem ſibi ſentit. Hunc ſemel vidi confectum a duabus venis, ad acutum ſibi iunctis, quarum ſiniſterior erat arctior dextra. Anguli huius vertici inſerebatur vena exigua, a ventriculo deſcendens, ex quo exiuerat bifida. Haec omnia vere viſa ſunt atque elegantius, quam exhibentur quodammodo a *Veſalio* (*a*). Hunc eumdem caudicem alias vidi genitum a tribus ramis, bifurcatis omnibus, atque poſt in infinitum diuiſis, quorum medius erat capaciſſimus, ſiniſter autem dextro capacior. Magnus hic venae portarum ramus, ita confectus adſcendit, donec eum oculis ſubducat το παγκρεας. Hoc enim deſcriptum caudicem, ſupra duodenum, conſtanter amplectitur, figura ſemicirculari. Quam *circumferentiam pancreatis* emenſus ramus, venam lienarem adcipit,

(*a*) Fig. XII. Lib. V. infra K.

cipit, posteaque, venae portarum titulo, sub initio duodeni, atque fine ventriculi, ad iecur transit. Duodeno intestino incumbunt porro, iuxta sinistrum latus descripti caudicis, rami superioris arteriae mesaraicae; quales aliquando quatuor numeraui (*b*). Intestinum a spina dorsi postea demittitur in cauum sinistrum abdominis, per eamdem spinam diuisi. In quo adscendens, mesocolon mox transit, nomenque mutat. Initium duodeni fere semper deprehendi a vesicae bile flauum.

Diuersum intestini duodeni situm offendi alias. Vomitus, fere continuus, nulla arte sedandus, enecabat hominem, phthisici speciem exacte qui referebat. Huius in cadauere, ventriculus spectabatur oblongus, sed coarctatus, solum sinistrum hypochondrium, situ normali, occupans: prout quandoque obseruatus est in voracibus. Ex hoc enatum duodenum adscendebat pyloro superius; tunc aliquantum procedebat, recta via, epatis dextram versus: dein magis adscendens, inflectebatur; descendebat; posteaque via, rursum recta, pertingebat ad vesiculam bilis; tandemque, consueta curuatura absoluta, solitum iter prosequebatur. Quae plura obseruabantur, addam; licet ad argumentum de duodeno non pertineant. In ventriculo offendi scissuram, quam cultro factam esse, sacramento pernegabat prosector, expertus, atque fide dignus. In abdomen saltim nihil effluxerat ex ventriculo. Id est certissimum, ventriculum hunc manifeste fuisse erosum, ac praecipue in parte, opposita fundo. Erosiones autem hae non erant, nisi retrocessiones membranarum, intimae atque nerueae. Rem expertus sum liquidam, ope scul-

 pelli.

(*b*) *Vesal.* l. c. litt. ζ, in *delineatione aortae*.

pelli. Inde, ad erosa loca, rugae nullae: intacta vero tegebantur copiosissimis.

Obs. 7. In cadauere hominis, asthmate, per biennium, qui laborarat; praeter serum, in caput, (vnde cerebri erosio) vtramque pectoris cauitatem, atque pericardium, largiter fusum; abdomen distentum erat, quasi a capto veneno. Ventriculus, cibum complexus, atque duodenum siderata conspiciebantur. Sed ventriculum, epar non contingentem, numquam lustraueram ante. Nempe, inter vtrumque viscus, sese insinuauerat magna inflati coli pars.

DE

DE MVTATIONIBVS CALORIS ET FRIGORIS AQVAE FLVENTIS OBSERVATIONES.

AVTORE

Iosia Weitbrecht.

I. INSTITVTI RATIO.

ANimus est, experiri, quaenam incrementa et decrementa patiatur aqua naturalis, intra alueos ex. gr. fluuii Neuae fluens. Notum est: aquam vi ignis ad constantem gradum caloris deduci posse; sed diminui illum iterum, et frigere aquam, cum aeri exponatur, vel artificiale refrigerium excitetur similiter ad gradum aliquem, cuius limites si frigus excedat, aqua non amplius aqua manet, sed in glaciem conuertitur. Non dubitandum igitur, quin aqua pro diuersa constitutione aeris incumbentis, illamque nonnumquam voluentis et miscentis, aliquibus mutationibus obnoxia sit. Quantae autem istae mutationes sint, nondum determinauerunt, quantum noui, Physici. Prima quidem fronte apparet, tale experimentum praeter simplicem cognitionem huius variae affectionis, nil vtilitatis afferre: Cum vero aqua talis, qualis in hoc nostro flumine continetur, etiam ita frigide hausta plurimorum vsui inseruiat, et corporis humani viscera, queis ingeritur, miris caloris et frigoris vicis-

 situ-

situdinibus subiecta sint: crediderim, laborem non inutilem fore Physico, et si nil aliud, cautelas certe quasdam, in vsu frigidae obseruandas suppeditaturum, et caussas reuelaturum exactius, quare haustus frigidae vel balnea nonnumquam tam miros effectus in corpore nostro producant.

Thermometrum, quo vtor, suppeditauit mihi Cl. *Dn. Pr. De L'Isle* sua methodo confectum (*). Constat autem ex cylindro vitreo ampliore, in tubum angustiorem longum desinente, et repleto Mercurio qui ad minimum attactum vel halitum satis sensibiliter ascendit et descendit. Haec diuersa altitudo ad ducentos gradus est redacta numerando ab altitudine summa ad imam. Gradus vltimus denotat contractionem maximam Mercurii, quam passus est hieme praeterita d. $\frac{16}{28}$. Ian. hora sept. mutat. 1733; primus autem denotat calorem, quem accepit Mercurius ex aqua bulliente.

Methodus experiundi haec est: Obseruo tribus vicibus quotidie, Sole orto, circa Meridiem, et sub vesperam primo quae sit altitudo Mercurii in tubo, dum expositus est aeri quieto, in loco, aperto quidem, sed quo nec Sol, nec ventus tam facile penetrat: deinde aufero Machinam, et appendo ad brachium, cuiusdam Trabis portatilis vt a solo aere ambiri possit, et si ventus est, similiter illi directe expono. Etiam solis splendentis nonnumquam vires experior. Quo facto instrumentum immergo aquae, cuius gratia foramen proprium glaciei incidi curaui, quod quantum possibile est, apertum seruo. Cumque res ad eundem laborem recidat, ad tempestatis quoque variationes attendo.

II. OB-

(*) Vid. eius Memoires pour servir a l'histoire & au progres de l'Astron. de la Geogr. & de la Physique pag. 267.

II. OBSERVATIONES.

D. 9. Febr. 1734. Mane ſereno, Ventus NW. Mercurius erat altus in aere quieto gr. 166; in aere libero poſt horam gr. 161. vento expoſitus gr. 166. aquae immerſus aſcendit ad gr. 152. ſiue machinam totam ſiue ad partem immerſerim, aqua erat paulum glacie obducta, vt purgare opus eſſet. Extracto thermometro humiditas adhaerens momento in glaciem verſa eſt.

Meridies ſerena, ventus fortis. Mercurius in aere quieto gr. 155. vento expoſ. gr. 166. aquae immerſus gr. 152. nec vlterius aſcendit cum per aliquot minuta ſoli exponeretur in aere quieto. Humiditas denuo in cruſtam verſa. Flumen altum iterum decreſcit.

Sub occaſum ſerenum, ventus non tantus. Mercurius in aere quieto gr. 165. in aere libero gr. 168. in aqua gr. 152. Fluuius receſſit.

D. 10. Febr. Sub ortum non adeo ſerenum Mercurius in aere quieto gr. 175. vento leni W. expoſ. gr. 176. aqua immerſ. gr. 152. Quia gradus caloris aquae ſemper idem, volebam experiri, an non in tubo circa illum locum reſiſtentiae quicquam eſſet: pepuli igitur in loco calido mercurium ad gr. 80, et ita immerſi aquae: deprehendi autem labi iterum mercurium vsque ad gr. 152. hoc tamen cum diſcrimine, vt mutatio ex calido in frigidius multo tardior eſſet, quam ex frigido in calidius, ſiue citius aſcendit mercurius in aqua, quam deſcendit. Experimenta deinde feci in loco magis aprico, ſed phaenomena erant eadem omnia.

Sole

Sole medio, seren. Thermometrum in aere quieto indicat gr. $155\frac{1}{2}$. vento expos. W. mediocri gr. 170. aquae immers. gr. 152.

Vespera serena, aer quietus, Thermometrum in aere quieto gr. 170. in libero gr. 173. in aqua gr. 152.

D. 11. Febr. Mane Coelum nubilum, Thermometrum in aere quieto gr. 168. in libero $168\frac{1}{2}$, vento expositum gr. 170. aquae immers. gr. 152.

Meridie, sol vix penetrat, subinde nubila, ventus O. fortis; Therm. in aere quieto 162. vento expos. per semihoram gr. 165. in aqua gr. 152. Vesperi non obseruaui, erat autem frigus ventusque vehemens.

D. 12. Febr. Mane. Ventus NO. paucus. Therm. in aere quieto gr. 168. in libero gr. 170. in aquam immers. gr. 152.

Meridie, in aere quieto Therm. gr. 166. in libero gr. 167. in aqua gr. 152.

Nocte hora nona et decima erat Mercurii altitudo in aere quieto 170. in libero 173. in aqua 152. Coelum serenum, lux borealis magna.

D. 13. Febr. Mane spissa est nebula, Thermom. in aere quieto gr. 180, in aperto gr. 181. post semihoram autem 179. in aqua autem gr. 152.

Meridie disiecta nebula maximam partem, sol transparet; Thermometrum in aere quieto gr. 154. in libero gr. 155. vento expos. gr. 157. aquae immers. gr. 152.

Vesperi

Vesperi, Thermom. in aere quieto gr. 170. post horam gr. 176. Nox frigidissima, vt nolim experimentum in aqua capere.

D. 14. Febr. Mane nubes, cum niue pauca. Mercurius in Thermom. in aere quieto. gr. 170. in libero gr. 167. in aqua 152.

Meridie in aere quieto gr. 164. in libero $164\frac{1}{2}$. in aqua gr. 152.

Vesperi, Thermometrum in aere quieto gr. 162. in libero gr. 163. in aqua gr. 152.

D. 15. Febr. fere toto die ningit, ventus nullus, Thermometrum in aere quieto gr. 158. in libero gr. 157. in aqua gr. 152.

Meridie, Thermometrum in aere quieto gr. 155. in libero gr. 156. in aqua gr. 152.

Vesperi, Thermometrum in aere quieto et libero est ad gr. 156. in aqua autem gr. 152.

Perstitit Mercurius in Thermometro in aqua ad gr. 152. vsque ad illud tempus, quo fluuius glacie sua liberabatur, quod factum d. 16. 17. 18. Aprilis; postmodum vero incepit mutari sensim sensimque, ita vt d. 26. 27. 28. April. esset circiter gr. 148. 149.

D. 1. Mai. Therm. in aqua erat ante meridiem, gr. 148. coelo nubilo, imbres nonnumquam spargente, in aere 135. grad. Post meridiem venit glacies ex lacu ladoga, tanta vi, vt pontem nouum rumperet, aer erat vesperi 144. gr. Experiri erat animus, num haec glacies mutationem quandam afferret, et deprehendi aquam gr. 151. et si quando frustum glaciei in viciniam instrumenti affueret, erat gr. 151$\frac{1}{2}$. hoc est, quam proxime accessit ad frigus summum, cuius aqua hyeme capax erat.

D. 2. Maii. Thermom. in aere quieto est gr. 142, in libero 140. aer est tranquillus sine omni vento, coelum nubilum rorem pluuiosum spargens, glacies continuat, sed prope ripam alteram. Ceterum circa ripam natant quaedam glaciei particulae, et adhuc dum est aqua gr. 151. circa decimam surgit Ventus W.

Circa meridiem serenat, Therm. in aere *quieto* gr. 132. In Sole gr. 119. in aqua, cui adhuc glacies innatabat, gr. 151.

D. 3. Maii. Thermom. in aere quieto mane 130, in sole 122. circa meridiem in aere quieto gr. 123. in sole gr. 116. in aqua gr. 150. NB. Dies *serenus*, circa meridiem nubes pluuiosae vagantes, Ventus *fortis S.* Glacies circa sextam matutinam desiit fluere. Vesperi coelum obscurum, Therm. in aere libero gr. 135.

D. 4. Maii. Mane, pluuiola, Ventus nullus, Therm. in aere libero gr. 138. in aqua gr. 149. mox ingruit pluuia. Thermom. in aere pluuioso gr. 136. pluuia continuat ad meridiem vsque cum vehementi vento ex W. ita vt fluuius ad quatuor pedes altior cresceret, cecidit interea Mercur. in Thermometro ad quartam horam vsque ad gr. 142. vesperi post occasum ad gr. 144. in loco quieto; in aqua eodem tempore erat gr. 148. citius enim ob altitudinem fluminis accedere non poteram.

D. 5.

D. 5. Maii. Serenum, Therm. in aere quieto gr. 140. in libero vento W. expos. gr. 142. in aqua gr. 148.

Circa meridiem nubila vagantur, Thermom. in aere gr. 130. in sole gr. 125. in aqua, flante NO. paruo, gr. 147.

Vesperi in media pluuia gr. 140.

Sub occasum gr. 145. in aqua gr. 147.

D. 6. Maii. Ventus W. nubes vagantes. Thermom. in aere quieto gr. 145. in libero et vento expos. gr. 146. in sole gr. 135. in aqua gr. 147.

NB. Cum hodie in platea veherer versus solem, ille me vehementer vrebat, a tergo autem grando cadebat.

Meridie in aere quieto 138. in libero aere gr. 139. in sole gr. 129. in aqua aestuante a vento W. et alta gr. 146.

Post occasum, Ventus W. desinit, surgit NO. Thermom. in aere quieto gr. 145. in aqua satis placida gr. 146.

D. 7. Maii. Mane, ventus nullus. Thermom. in aere quieto gr. 142. in libero, septentrionem versus gr. 144. in aqua gr. 147. in sole per nubeculas vix non transparente gr. 132.

Meridie in aere quieto (vento S W. pauco) Therm. gr. 127. in aere septentrionali gr. 137. in aqua gr. $146\frac{1}{2}$. in sole gr. 117.

Vesperi in aere libero gr. 140. in aqua 147.

D. 8. Maii. Therm. in aere quieto 132. in libero gr. 133. in aqua gr. 148.

Meridie in aere quieto gr. 125. in sole gr. 117. in aqua gr. 148. Pomeridie in sole gr. 123. sed sol transparet per aerem nebulosum in aqua gr. 148.

Dum miror, quare aquae calor decrescat, cum tamen aer sit placidus, tranquillus, calidus sine omni cruditate, ventus lenis S W. et in caussam inquiro: obseruo destructam esse machinulam.

Postquam alia parata fuit, redii ad labores meos, et inueni

D. 7. Iunii. Therm. in aere aprico, nubibus sparsis, vento forti N O. humili aqua, gr. 115. in aqua gr. $127\frac{3}{4}$.

D. 8. Iunii, nebulosae nubes tranquillae, hora octaua Therm. in aere quieto aperto gr. 129. in sole transparente continuo per semihoram gr. 109. in aqua $128\frac{3}{4}$.

Post meridiem, hora secunda, Ventus aliqualis W, coelo clarificato, Therm. in aere quieto gr. 108. in sole per duo minuta gr. 103, in aere vento expos. sine sole per tria minuta gr. 118. in aqua gr. 128.

Post occasum, horizonte septentrionali valde nubilo, Therm. in aere aprico gr. 128. in aqua gr. $128\frac{1}{2}$.

D. 9. Iunii. hora octaua, Vento S O. Coelo nubilo, Therm. in aere quieto gr. 121. in sole gr. 120. in aqua gr. $128\frac{1}{2}$.

Meridie, ventulus S W. pluuiola, Therm. in aere libero gr. $120\frac{1}{2}$. in aqua gr. 128.

Pome-

Pomeridie continuo haeret circa gr. 122, mox supra mox infra. Hora octaua gr. 123. in aqua gr. 127$\frac{3}{4}$.

D. 10. Iunii. Summo mane, extra solem erat Therm. gr. 123$\frac{1}{2}$. hora octaua, coelo vdo, sereno, tranquillo gr. 115. in aqua gr. 128.

Meridie in sole gr. 100. in aere sine sole gr. 110. in aqua gr. 127.

Pomeridie extra solem versatur intra 115. et 120. in aqua 126$\frac{2}{3}$.

Vesperi in aere Therm. gr. 125. in aqua gr. 127.

D. 11. Iunii. Mane hora sexta coelum sudum, sine vento. Therm. in aere aprico gr. 110. in aqua 127.

Hora vndecima Therm. in aere libero, sine sole gr. 100. in aqua gr. 126. Hora duodecima, nubes sparguntur, quae traiectum solis nonnumquam impediunt, cadit igitur Therm. in aere libero ad gr. 105. Hora prima, in sole gr. 95. mox redeuntibus nubibus ad gr. 107. surgit ex S. ventus mox in NW. mutatus.

Vesperi post occasum, coelo nebuloso Therm. in aere gr. 125, in aqua gr. 126. Ambo dies calidissimi.

D. 12. Iunii. nocte antecedente pluit, mane nebulosum pluuiosum, Therm. in aere libero gr. 132. in aqua gr. 126$\frac{1}{2}$.

Meridie, Ventus N. fortis surrexit, nubes, pluuiola, Therm. in aere quieto gr. 130$\frac{1}{2}$. in aqua gr. 126.

Auctum est frigus pomeridie sensim sensimque vt esset vesperi hora octauo Therm. gr. 134. in aqua gr. 126. Ventus N. Nil igitur de calore amisit aqua.

D. 13. Iunii. hora ſeptima Therm. in aere quieto gr. 125. NB. aer reuera temperatior eſt, coelum potiſſimam partem purum, in aere libero poſt ſemihoram gr. 122. in aqua gr. 128.

NB. Si inſtrumentum aqua eximo, cadit adhuc Mercurius, tam dum teneo in aere ſupra aquam quam intra domum. Sine dubio ille aer adhuc frigus ſuum retinuit ab heſterna die, nec ſolis energiam expertus eſt, vti ille, in quo Thermometrum obſeruare ſoleo.

Meridie, Therm. in aere quieto gr. 115. in ſole gr. 110. in aqua gr. 127. ſi adhucdum eximo, cadit. Ventus fortis W. vt creſcat aqua.

Veſperi, Thermom. vento expoſ. magno W. gr. 130. in aqua gr. 128.

D. 14. Iunii. Mane, ventus W. fortis, nubes vagantes, Therm. in aere quieto erat gr. 128. in aere ſupra aquam vento expoſ. gr. 132. in aqua gr. 129. neceſſe igitur poſt extractionem iterum cadit. Bene attendendum igitur mihi in poſterum ad calorem aeris ſuper aquam.

Meridie, W. continuat, nubibus vagantibus, Thermometrum in aere quieto gr. $120\frac{3}{4}$. in aere ſeptentrionali vento expoſ. cadit intra minutum dimidium ad gr. 127. intra horam gr. $131\frac{1}{2}$. in aqua gr. $128\frac{1}{2}$.

Veſperi in aere ſeptentr. vento expoſito, ventus W. fortis Therm. gr. $132\frac{1}{4}$. aqua gr. $128\frac{1}{4}$.

D. 15. Iunii. Mane hora ſexta Thermom. in aere quieto gr. 135. poſt horam, gr. 128. ſuper aqua per minutum gr. 130. in aqua gr. $128\frac{1}{2}$. Ventus W. nubes multae vagantes.

Meri-

Meridie, Thermometrum in loco quieto gr. 118. in aere meridionali aperto, ſed extra ſolem gr. 121. verſo instrumento in ſole per 7. minuta aſcendit ad gr. 115. in loco ſeptentrionali vento W. expoſitum per ſemihoram gr. 129. in eodem loco, ſed a vento verſum gr. 130, alio loco ſeptentr. ſed quieto gr. 128½. in aqua gr. 128. Iam ventus mutatur verſus S.

Veſperi, Therm. in aere quieto ordinario eſt ad gr. 131. in libero meridionali gr. 130. in aqua gr. 128½. Ventus S W. ſed paululum ſenſim minuitur.

D. 16. Iunii. Mane hora ſeptima, Therm. in loco quieto gr. 128¾. in loco a ſole irradiato, ſed a ſole verſum Thermometrum per ſemihoram gr. 128. in aere ſuper aqua gr. 128. ſuper aqua, ſed in longiore a ripa diſtantia gr. 128½. in aqua gr. 129.

Meridie in loco quieto gr. 111. in irradiato auerſim gr. 115. in ſole gr. 110. ſuper aqua gr. 128½. in aqua gr. 128.

Veſperi in loco quieto gr. 127½. ſuper aqua gr. 128½. in aqua gr. 128. Tota dies amoena, quieta, ſerena.

D. 17. Iunii. Mane, S W. Therm. in loco quieto gr. 116. ſuper aqua gr. 126½. in aqua gr. 128¼. Mane clarum.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 110. ſuper aqua gr. 126. in aqua gr. 128.

Veſperi in loco aperto gr. 115. ſuper aqua gr. 124. in aqua gr. 127¾. Tota dies amoena ſerena.

D. 18.

D. 18. Iunii. Pluuia. Therm. mane in loco quieto gr. 125. ſuper aqua gr. 126. in aqua gr. $127\frac{3}{4}$.

Poſt meridiem hora tertia Therm. in loco quieto gr. 117. ſuper aqua gr. 122. in aqua gr. 127. S W. ſerenaſcit.

Veſperi in loco quieto Therm. gr. 125. ſuper aqua gr. 125-126. in aqua gr. $127\frac{2}{3}$. Seren. Tranquill.

D. 19. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 123. in loco irradiato, auerſim gr. 123. ſuper aqua gr. 129+. in aqua gr. $128\frac{1}{2}$. ventus NO. frigidiuſculus. Seren.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 111. ſuper aqua gr. 126. in aqua gr. $127\frac{1}{2}$.

Veſperi ante ſolis occaſum in loco aperto Therm. gr. 127. ſuper aqua gr. 126. in aqua gr. $127\frac{1}{4}$.

Tota dies maximam partem ſerena & tranquilla.

D. 20. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. $114\frac{1}{2}$, in loco irradiato, ſed auerſim gr. 108. ſuper aqua gr. 124. in aqua gr. 127. Coelum ſerenum, tranquillum.

Poſt meridiem hora quinta Therm. in loco quieto gr. 115. ſuper aqua gr. 120. in aquà gr. $125\frac{1}{2}$.

Veſperi in loco quieto gr. 124. ſuper aqua gr. 127, in aqua gr. $125\frac{1}{2}$.

Pomeridie toto ventus magnus W. zu N. qui aeſtum aeris inſignem paululum repreſſit.

D. 21. Iunii. Mane ſereno Therm. in loco quieto gr. 118. in aqua gr. 126.

Pomeridie in loco quieto gr. 105. in ſole per quinque minuta gr. 95. in aqua gr. 125.

D. 23.

D. 23. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 115. in aqua gr. $124\frac{1}{4}$. ventus O. seren.

Meridie in loco quieto gr. 108. in sole gr. 100, extra solem gr. 115. in aqua gr. $123\frac{1}{4}$. Seren. sed ventus O. facit aerem frigidiusculum.

Vesperi in loco quieto Therm. gr. 125. super aqua gr. 125. in aqua gr. $123\frac{1}{2}$.

D. 24. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 115. in aqua gr. 124. serenat. Ventus paruus SW.

Meridie in loco quieto gr. 108. super aqua gr. 121. in aqua gr. $123\frac{1}{2}$. aer frigidiusculus ventus W. zu S. fortior. Coelum nubibus sparsis non adeo serenum.

Vesperi in loco quieto gr. 123. super aqua gr. 122. in aqua gr. $123\frac{3}{4}$.

D. 25. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 118. super aqua gr. 125. in aqua gr. $124\frac{1}{4}$.

Meridie in loco quieto gr. 99. in sole per semihoram gr. 94. super aqua vltra gr. 116. in aqua gr. $122\frac{1}{2}$.

Aestus intensissimus. Nubes fere nullae. Ventus N O. vtut vix perceptibilis nihilominus tamen refrigerium gratissimum affert.

D. 26. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 103. hora nona, super aqua circa gr. 120 in aqua gr. 122. Aestus summus, coelum sudum, sine nube.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 99. in sole per semihoram gr. 92. super aqua circa gr. 116. in aqua gr. $121\frac{1}{2}$.

Vesperi, Therm. in loco aperto gr. 121. super aqua gr. 121. in aqua ipsa gr. 122.

D. 27. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 108. ſuper aqua circiter gr. 120. in aqua gr. 122.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 96. in ſole gr. 89. ſuper aqua gr. 113. ad 114. in aqua gr. 121.

Veſperi, Therm. in loco quieto gr. 116. ſuper aqua gr. $118\frac{1}{2}$. in aqua gr. 121.

Totus dies aeſtuoſiſſimus, ſtriae nubeculoſae hinc inde apparent, ſine vento. Veſperi nubes vel potius nebulae ſpiſſiores ſurgunt cum ſole rubro.

D. 28. Iunii. Mane, hora ſexta, Therm. in loco quieto gr. 116. hora ſeptima gr. 112, hora octaua gr. 108. ſuper aqua gr. 119. in aqua gr. $120\frac{5}{6}$.

Veſperi in loco quieto gr. 117. ſuper aqua gr. 119. in aqua gr. $119\frac{1}{4}$. hodie ventus W. fortior, ſeren.

D. 29. Iunii. Mane, hora nona, Thermom. in loco quieto gr. 112. ſuper aqua gr. 118. in aqua gr. $121\frac{1}{4}$. ſeren. ſed frigidior heſterno aere, Ventus tamen S.

Meridie, Nubes pluuioſae, Ventus fortis SW. Therm. in loco quieto gr. 107. ſuper aqua gr. 114-115. in aqua gr. $120\frac{5}{6}$.

Poſt meridiem pluuia ingens exſurgit cum Tonitru vnico. Thermom. in aere, pluuiae expoſitum gr. 119. Poſt pluuiam per tres horas gr. $118\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. $118\frac{1}{2}$. in aqua gr. 121. veſperi in loco aperto gr. $117\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. 119. in aqua gr. $121\frac{1}{2}$. Coelum quietum. Aer adhucdum calidiuſculus.

D. 30. Iunii. Mane pluuioſum. Ventus NO. deinde verſus ad N. Therm. in loco quieto gr. 123. pluulae uiae expositum et vento septentrionali gr. 127. super aqua gr. 127. in aqua gr. $121\frac{1}{4}$.

Meridie cum paululum inclarescere videretur, Thermom. in loco aperto gr. 123. cum denuo plueret gr. 127.

Vesperi hora quarta in loco aperto gr. 126. super aqua gr. 126. in aqua gr. $121\frac{1}{4}$. Ergo per 24. horas, nimium aucto frigore, et aere mutato ad gradus 10. nil immutatus tamen aquae calor est.

Post occasum in loco quieto Therm. ad gr. $126\frac{1}{2}$. super aqua gr. 125-126. in aqua gr. $121\frac{1}{2}$. serenascit. Ventus minor quantitate, sed idem plaga.

IVLIVS.

D. 1. Iulii. Mane, Thermometrum in loco quieto gr. 118. super aqua gr. 123. in aqua gr. 122. Ventus O. sed nubes contrario ordine.

Meridie eodem vento totum coelum serenum, mox nubes pomeridie vagantes. in loco quieto Therm. gr. 114. super aqua gr. 119. in aqua gr. $121\frac{1}{2}$.

Vesperi, Therm. in loco quieto gr. 125. super aqua gr. 125. in aqua gr. 122. Malacia.

D. 2. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 115. super aqua gr. 126. in aqua gr. $122\frac{1}{2}$. Tranquillus et serenus aer.

Ante meridiem surgunt nubes.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 111. super aqua gr. 123-124. in aqua gr. $122\frac{1}{4}$. ventus lenis NO.

Vesperi, Therm. in loco quieto gr. 125. super aqua gr. 124. in aqua gr. 122.

D. 3. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 125 super aqua gr. 124-125. in aqua gr. $123\frac{1}{4}$. Aer tranquillus frigidiusculus vti in autumno esse solet, nebulosus. Toto antemeridiano tempore sol hinc inde per nubila splendet.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 114. mox oritur nubes pluuiosa cum tonitru. Therm. est gr. 120. super aqua gr. 125. in aqua gr. 123.

Obseruo ex perpetua circumgestatione machinulae vincula tubuli relaxari, vt non ad eandem altitudinem semper consistat. Curaui igitur, vt inferius repagulum affigeretur, ne altitudo tubi quicquam immutari postea posset.

Postquam recepi instrumentum, ad obseruationes redeo.

D. 8. Iulii. Vesperi, Ventus O. exiguus. Coelum serenum Therm. in loco aperto gr. 125. super aqua gr. 124. in aqua gr. 121.

D. 9. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 116. in loco septentrionali aperto gr. 122. super aqua gr. $121\frac{1}{2}$. in aqua gr. $121\frac{1}{4}$. Ventus N. Post summam serenitatem spissae nubes ex N. veniunt.

Meridie in loco quieto erat Therm. gr. 114. Oritur pluuia, cessante vento. In pluuia Therm. gr. 121. post pluuiam gr. 118. in aqua gr. $120\frac{1}{2}$.

Vesperi, Coelo tranquillo nubeculis tecto Therm. in loco aperto gr. $123\frac{3}{4}$. in loco septentrionali gr. $123\frac{1}{2}$. super aqua gr. $123\frac{1}{2}$. in aqua gr. $120\frac{3}{4}$. ventulus N. exurgit.

D. 10.

D. 10. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 118. ſuper aqua gr. 123. in aqua gr. 121. Coelum nubilum. Ventus N. aer frigidiuſculus.

Poſt meridiem, Therm. in loco quieto gr. 115. ſuper aqua gr. 122+ in aqua gr. $120\frac{2}{3}$. Aer frigidiuſculus ob ventum fortem NO. Nubes ſpiſſae pluuioſae, ſerenitatem interrumpentes.

Veſperi, Therm. in loco quieto gr. 124. ſuper aqua gr. $123\frac{1}{2}$. in aqua gr. 121. ſerenum, crudus aer, ventus NO.

D. 11. Iulii. Mane, Thermometrum in loco quieto gr. 114. ſuper aqua gr. 122-123. in aqua gr. $121\frac{1}{2}$. Tempeſtas heſterna, Ventus O.

Meridie, Thermometrum in loco quieto gr. 112. ſuper aqua gr. 122. in aqua gr. $121\frac{1}{4}$. Tempeſtas paulo mitior, ventus O. lenis, nubes pluuioſae ſerenum coelum hinc inde tegentes.

Veſperi, Therm. in loco quieto gr. 123. ſuper aqua gr. $122\frac{1}{2}$. in aqua gr. $121\frac{1}{4}$. Tempeſtas eadem.

D. 12. Iulii. Mane, Thermometrum in loco quieto gr. 124. ſuper aqua gr. $123\frac{1}{4}$. in aqua gr. $121\frac{1}{2}$. ventus nullus, aer frigidiuſculus, pluuiola.

Poſt meridiem, Therm. in loco quieto ordinario gr. 106. ſuper aqua gr. 117. in aqua gr. $120\frac{1}{4}$. Toto hoc die ventus lenis SW. ſed nubes, tonitru praegnantes curſu contrario ambulant. Obſeruo etſi aer ſit calidior aqua, mercurium tamen, momento quo extraho, paulum cadere, id vero ſine dubio a dilatatione vitri dependere debet.

Vesperi, Thermom. in loco quieto gr. 123-24. super aqua gr. 120. in aqua gr. 120¾. Coelum varium.

D. 13. Iulii. Mane, Therm. in aere quieto gr. 122. super aqua gr. 121-122. in aqua gr. 121½. Nebula sine vento. Hora octaua nebula discutitur, et Therm. in sole per minuta tria gr. 105. Meridies calidissima.

Vesperi, Therm. in aere quieto gr. 118. super aqua gr. 119. in aqua gr. 121. Vesper placidissimus.

D 14. Iulii. Mane, seren. ventus S W. Therm. in aere quieto gr. 112. super aqua gr. 119. in aqua 120¾.

Post meridiem, hora quarta, Therm. in loco quieto gr. 108. super aqua gr. 117. in aqua gr. 119⅔. serenitas, W. nubes vagantes.

Vesperi, Therm. in loco aperto gr. 118. super aqua gr. 118. postquam immersum fuerat aquae, et exemptum denuo sibi relictum gr. 120. circiter; in aqua gr. 120. ventus deficit.

Ex hac obseruatione video, me numquam satis accuratum gradum caloris aeris super aqua expiscari posse, sed, dum Thermometrum suo ligno affixum est, semper adhuc aliquem calorem a ligno accipit, si illud antea in aere sicco aut plane irradiato constiterat. Si vero lignum aquae immersum fuit, tum et illud suum pristinum calorem in aqua amittit, nec quicquam Thermometro communicare potest.

D. 15. Iulii. Mane, post nubila serenitas tranquilla, Thermometrum in loco quieto gr. 116. super aqua gr. 119-120. in aqua gr. 120⅔.

Meridie,

Meridie hora ſecunda, Therm. in loco quieto gr. 104. ſuper aqua gr. 115. in aqua gr. 119$\frac{1}{4}$. nubes, aer non adeo purus, hinc aeſtus ſolis per vapores eo penetrantior. Ventulus S.

Veſperi poſt occaſum, Therm. in loco quieto gr. 116$\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. 117. in aqua gr. 119$\frac{5}{6}$. ſuper aqua etiam omnes eosdem gradus 118. 119. etc. retinet, quos in aqua obtinet, ſi ſucceſſiue extraxeris et immerſeris.

D. 16. Iulii. Mane hora ſeptima ſerenum, tranquillum, Therm. in loco quieto gr. 116. ſuper aqua gr. 117. in aqua gr. 120$\frac{1}{6}$.

Aeſtus intenſus, ventulus S. Nubes interdum ſolem occultantes.

Meridie, hora ſecunda, Therm. in loco quieto gr. 99. ſuper aqua gr. 112$\frac{1}{2}$. in aqua gr. 118$\frac{2}{3}$. in ſole gr. 87.

Ventulus variat, nunc auſtralis, nunc occidentalis. Therm. hora ſexta gr. 118$\frac{1}{3}$.

Veſperi Nubes coelum plane obducunt, ventulus idem, Therm. in loco aperto gr. 117. ſuper aqua gr. 117. in aqua gr. 118$\frac{2}{3}$.

D. 17. Iulii. Mane, hora ſeptima nubes, ventulus SW. Therm. in loco quieto gr. 120. ſuper aqua gr. 120. in aqua gr. 119$\frac{1}{2}$. Hora nona, nubes hinc inde diſpereunt. Therm. in loco aperto gr. 110. ſuper aqua gr. 118. in aqua gr. 119$\frac{1}{4}$.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 106. ſuper aqua gr. 118. in aqua gr. 118$\frac{1}{3}$. Ventus SW. fortior. Nubes, ſol.

Pomeridie ventus fortis W.

Veſpe-

Vesperi ventulus S. deficit sensim, Therm. in loco quieto gr. 118. super aqua gr. 121-122. in aqua gr. 118$\frac{3}{4}$.

Dies aestuosus, ni ventus temperasset aerem.

D. 18. Iulii. Mane, hora sexta, Coelum nubilum, ventus W. Therm. in loco quieto gr. 122. super aqua gr. 122$\frac{1}{2}$, in aqua gr. 120.

Post meridiem, Therm. in loco quieto gr. 112. super aqua gr. 118. in aqua gr. 118$\frac{3}{4}$. ventulus W. frigidiusculus.

Vesperi, nubes coelum tegunt, Therm. in loco quieto gr. 120. super aqua gr. 120. in aqua gr. 119$\frac{1}{2}$.

D. 19. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 115. super aqua gr. 122. in aqua gr. 120. nubes pereunt, coelum serenum, calidum.

Meridie, hora tertia, Therm. in loco quieto gr. 107. super aqua gr. 111-112. in aqua gr. 118. nubes redeunt. Hora quinta oritur subito turbo vehementissimus ex W. nubes infimae sequebantur eius directionem, superiores autem retinebant adhucdum cursum ex SW. Remisit sensim ventus, et terminatus est pluuia. Therm. sensim cecidit, vt esset

Vesperi, hora octaua, Therm. in loco aperto gr. 121$\frac{1}{2}$. super aqua gr. 121$\frac{1}{2}$. in aqua gr. 118$\frac{1}{2}$.

D. 20. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 120. post horam in sole gr. 100. in aere septentrionali gr. 122. super aqua gr. 124. in aqua gr. 119. Ventus frigidus N. aer serenus, flumen altum.

Meridie,

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 96. ſuper aqua gr. 113. in aqua gr. 117$\frac{3}{4}$. flumen altum.

Veſperi poſt occaſum, Therm. in loco aperto gr. 130. ſuper aqua gr. 126. in aqua gr. 118$\frac{1}{2}$. aqua cecidit. Ventus plane remiſit.

D. 21. Iulii. Mane, hora nona, Therm. loco quieto gr. 113. ſuper aqua gr. 121-122. in aqua gr. 119. Ventus O. Seren. Nubes.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 107. in ſole gr. 101. in aere ſeptentrionali gr. 118. ſuper aqua gr. 121. in aqua gr. 118$\frac{3}{4}$. Ventus O. aeſtum ſolis reprimit. Seren.

Veſperi, hora ſexta, Therm. in loco quieto gr. 120. ſuper aqua gr. 121. in aqua gr. 118$\frac{1}{2}$. Ventus O. Nocte Therm. gr. 124.

D. 22. Iulii. Therm. in loco quieto gr. 118. ſuper aqua gr. 122. in aqua gr. 120. Ventus O. frigidiuſculus ſeren.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 105. in ſole gr. 100. ſuper aqua gr. 110. in aqua gr. 118$\frac{1}{2}$. Ventus O. ſeren. nubes ſpiſſae, vagantes.

Veſperi, Therm. in loco quieto gr. 118. ſuper aqua gr. 118$\frac{1}{2}$. poſtquam extractum erat ex aqua, gr. 120$\frac{1}{2}$, in aqua ipſa gr. 119. aer placidus, mitior, coelum ſerenum.

D. 23. Iulii. Mane, hora ſexta, Therm. in loco quieto gr. 124. ſuper aqua gr. 125. in aqua gr. 120. Coelum ſerenum tranquillum.

Post meridiem, Therm. in loco quieto gr. 105. in loco septentrionali gr. 112. in sole gr. 95. super aqua gr. 116$\frac{1}{2}$. in aqua gr. 118. Ventus NO. fumum ex syluis ardentibus super vrbem pellit.

Vesperi, Therm. in loco quieto gr. 118. super aqua gr. 120-121. in aqua gr. 118$\frac{1}{4}$. Ventus remittit.

D. 24. Iulii. Mane, hora octaua, Therm. in loco quieto gr. 106. super aqua gr. 120. in aqua gr. 118$\frac{1}{2}$. Aer serenissimus, Ventulus ONO. placidissimus.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 99. in sole, sed a subtili fumo impedito gr. 94. in loco septentrionali gr. 115$\frac{1}{2}$. super aqua gr. 116$\frac{1}{2}$. in aqua gr. 117$\frac{2}{3}$. Dies aestuosissimus.

Vesperi, hora septima, Therm. in loco *quieto* gr. 115. super aqua gr. 118. in aqua gr. 117$\frac{1}{3}$. hora nona, Thermometrum in loco quieto gr. 116. super aqua gr. 119. in aqua gr. 117$\frac{1}{2}$.

D. 25. Iulii. Mane, hora septima, Therm. in loco quieto gr. 109. super aqua gr. 120. in aqua gr. 118. Mane serenum, placidum, fumosum.

Meridie, hora tertia, Therm. in loco quieto gr. 96. in sole gr. 94. non altius propter fumum, in loco septentrionali gr. 108. super aqua gr. 115. in aqua gr. 116$\frac{3}{4}$. Aer serenus, fumosus, propter Ventum ONO.

Vesperi, Thermometrum in loco aperto gr. 119. super aqua gr. 118$\frac{1}{2}$. in aqua gr. 117.

D. 26. Iulii. Mane, Coelum nubilum, hora septima, Therm. in loco quieto gr. 115$\frac{1}{2}$. mox ingruente

pluuia

pluuia gr. 121½. post pluuiam gr. 121. super aqua gr. 121. in aqua gr. 117½. aer nubilus, tranquillus, refrigerans, aequalis. SO.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. 116. transeunte pluuia in sole gr. 100. sole tecto gr. 106. in loco septentrionali gr. 110. super aqua gr. 115. in aqua gr. 117. SO.

Vesperi, Therm. in loco aperto gr. 118. super aqua gr. 118. in aqua gr. 117.

D. 27. Iulii. Mane, Therm. in pluuia gr. 122. in aqua gr. 117½. SSO.

Meridie, nubila disiecta, Therm. in loco quieto gr. 110. super aqua gr. 115. in aqua gr. 117¼.

Vesperi, Thermom. in loco quieto gr. 117. super aqua gr. 117. in aqua gr. 117½.

D. 28. Iulii. Mane, Thermom. in loco quieto gr. 115. in loco septentrionali gr. 118. super aqua gr. 120. in aqua gr. 117½.

Post meridiem, hora quinta, Thermom. in loco quieto gr. 111. super aqua gr. 112. in aqua gr. 117. Hoc die sereno satis, ventus ex SO, sensim mutatur in SSW. et W. nubibus interim ex SO. currentibus.

D. 29. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 112. in loco septentrionali gr. 115. super aqua gr. 118. in aqua gr. 117¼. Ventus denuo SO. seren.

Meridie, hora duodecima, Therm. in loco aperto gr. 110½. super aqua gr. 114½. in aqua gr. 117. in sole gr. 84.

Pomeridie, hora quarta, post solis aestum nubes spissae ex oriente surgunt, Ventus O. Thermom. in loco aperto gr. 112. in aqua gr. $116\frac{1}{2}$.

Hora quinta surgit pluuia ingens cum tonitru, Therm. in loco exposito pluuiae gr. 115. Ventus varius. O. NO. N. NW. N. O.

Vesperi, Therm. in loco ordinario gr. 120. in aqua gr. 117.

D. 30. Iulii. Mane, nebula, quae sensim dissipatur, seu altius ascendit. Therm. in loco aperto ab hora sexta ad septimam a gr. 121-117. super aqua gr. 118. in aqua gr. 118.

Meridie, in sole gr. 82. hora tertia in loco aperto gr. 110. super aqua gr. 114-115. in aqua gr. $116\frac{1}{2}$.

Vesperi in loco aperto gr. 120. super aqua gr. 121. in aqua gr. $116\frac{3}{4}$. O. Dies serenus, sparsis nubibus.

D. 31. Iulii. Mane, hora septima gr. 120. in loco aperto, super aqua gr. 121. in aqua gr. 118. Dies serenus, sparsis nubibus.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. 106. super aqua gr. 117. in aqua gr. $116\frac{1}{2}$. Ventus O. mutatur in W.

Vesperi, Therm. in loco aperto gr. 121. super aqua gr. $120\frac{1}{2}$. in aqua gr. $116\frac{3}{4}$. Ventus denuo O.

AVGVSTVS.

D. 1. August. Mane, Therm. in loco aperto gr. 121. super aqua gr. $119\frac{1}{2}$. in aqua gr. 118. O. seren.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. 116. super aqua gr. 118. in aqua gr. $117\frac{1}{2}$.

Vesperi,

Vesperi, Therm. in loco aperto gr. 120. in aqua gr. 118. Hodie, licet Ventus O. fluuius tamen altus. Post meridiem serenum.

D. 2. August. Mane, Therm. in loco aperto gr. $120\frac{1}{2}$. super aqua gr. $120\frac{1}{2}$. in aqua gr. 118. flumen altum.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. 99. in sole gr. 84. super aqua gr. 115. in aqua gr. $116\frac{3}{4}$. horis pomeridianis fluuius cecidit.

Vesperi, Therm. in loco aperto gr. 114. super aqua gr. 118. in aqua gr. $117\frac{1}{4}$. Totus dies serenus, Ventus ONO.

NB. Quamuis per meridiem et vesperam sit aestus summus, nihilominus noctu et mane aer est frigidus.

D. 3. August. Mane, Thermom. in loco ordinario gr. 124. super aqua gr. 125. in aqua gr. 118. Coelum nubilum frigidum. V. ONO.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. $119\frac{1}{2}$. super aqua gr. 121. in aqua gr. 118. Coelum incipit clarescere. Ventus ONO. fortis et frigidus.

Vesperi, Therm. in loco aperto gr. 121. super aqua gr. $120\frac{1}{2}$. in aqua gr. 118. Coelum serenum, aer paulo mitior. Ventus remittit. flumen cediderat ad 4. pedes.

D. 4. Aug. Mane, Coelum serenum, sed aer frigidus, ita vt nocte antecedente multum sudarent fenestrae. Ventus O. Therm. in loco aperto et septentr. hora sexta gr. 126. hora nona gr. 123. super aqua gr. 124. in aqua gr. 120.

Meridie, Therm. in ſole gr. 104. ſuper aqua gr. 119. in aqua gr. 118¾. aqua adhuc ad tres pedes creuit. O. exiguus.

Veſperi in loco aperto, Therm. gr. 121. ſuper aqua gr. 121. in aqua gr. 119.

D. 5. Auguſt. Totus dies nubilus. Mane, Therm. in loco aperto gr. 125. meridie gr. 115. ſuper aqua poſt meridiem gr. 118. in aqua gr. 120¼. ſine Vento.

D. 6. Auguſt. Totus dies nubilus ſine vento. Mane, Therm. in loco aperto gr. 124. meridie gr. 116. ſuper aqua poſt meridie gr. 120. in aqua gr. 121.

D. 7. Auguſt. Mane nubilum, ventulus N. Therm. in loco aperto gr. 124½. ſuper aqua gr. 124. in aqua gr. 121½.

Meridie, Coelum nubilum, ſed aer paullo clementior tamen, forte ob mutatum ventum in W. *Therm.* in loco aperto gr. 118. ſuper aqua gr. 122. in aqua gr. 122½. dum Thermometrum extrahis, mercurius adhucdum cadit fere ad 122½. deinde demum iterum aſcendit ad gr. 122. hoc partim fit ob dilatationem vitri in aere aqua calidiore; partim fortaſſe propterea, quod aquae guttulae vitro adhaerentes in aere libero expanſae exhalent et frigidiores fiant, vnde et ☿ refrigeratur: haec autem refrigeratio eſt tanto ſenſibilior, quo magis frigus aquae et aeris inter ſe aequantur, quo calidior aer eo minus ſenſibilis lapſus, ita, vt tandem in ſola quiete mercurius ſubſiſtat; quo frigidior contra aer, eo celerius mercurius labitur, quando extrahitur. Denuo etiam obſeruo, mercurium non ad eam labi altitudinem, quando Machina

ex

ex aere aperto ſuper aqua tenetur, ad quam labitur, quando per momentum vnum vel alterum in aquam immerſa fuit; idque ob rationes iam ſupra allatas. d. 14-15. Iul.

Poſt meridiem coelum paulum clareſcit.

Veſperi, Therm. in loco aperto gr. 120. ſuper aqua gr. 124. in aqua gr. $122\frac{1}{2}$.

D. 8. Auguſt. Mane, Coelum ſerenum, ventulus WSW. Therm. in loco aperto ſeptentrionali gr. $122\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. 123. ſed mox extract. ex aqua gr. $123\frac{1}{2}$. in aqua gr. $123\frac{1}{2}$.

Meridie, Serenitas, Nubibus ſparſis ex ſeptentrione oriundis. Therm. in loco ſoli expoſito gr. 84. in loco aperto ſeptentrionali gr. 112. ſuper aqua propter ſolem non experiunda altitudo, in aqua gr. 123. Ventulus WSW.

D. 9. Auguſt. Mane, nubila, mox pluuia ingens, Ventulus S. inde quoque nubes Thermom. in loco aperto gr. 127. in pluuia et ſuper aquam gr. 128. in aqua gr. $123\frac{1}{8}$.

Meridie in pluuia gr. 122. in ſole transmicante gr. 110. ſuper aqua gr. 125. in aqua gr. 123.

Poſtmeridiem, coelum clareſcit, ſolis radii aquae incumbunt, ventus nullus.

Veſperi, Therm. in loco aperto gr. $127\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. $127\frac{1}{2}$. in aqua gr. $122\frac{1}{2}$.

D. 10. Auguſt. Nocte antecedent epluuiae ingentes. Ventus W. frigidior. Therm. in loco aperto gr. 125. ſuper aqua vltra gr. 126. in aqua gr. 123.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. 119. ſuper aqua gr. 119. in aqua gr. $122\frac{3}{4}$.

Veſperi,

Veſperi, Therm. in loco aperto gr. 125. ſuper aqua gr. 126. in aqua gr. 123.

D. 11. Auguſt. Mane, nubes, hora nona ſerenaſcit, Therm. in loco aperto gr. 120. ſuper aqua gr. 128. in aqua gr. 123. Ventus O.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. 115. ſuper aqua gr. 124. in aqua gr. $122\frac{1}{2}$. Ventus O. fortior. Nubes ſparſae.

Veſperi, Thermom. in loco aperto ſeptentrionali gr. 128. ſuper aqua gr. $127\frac{1}{2}$. fortaſſe propterea, quod aqua iam exhalet, et accumbenti aeri calorem ſuum communicet; in aqua gr. $122\frac{1}{2}$.

D. 12. Auguſt. Mane, hora ſeptima, Therm. in loco aperto gr. 132. in alio aperto ſeptentrionali gr. 132. ſuper aqua gr. $129\frac{1}{2}$. in aqua gr. $123\frac{1}{4}$. Ventus O. frigidus, nubibus ſparſis coelum obductum.

Propter excurſionem Peterhofiam factam, *obſeruationes* per dies aliquot omiſſae ſunt.

Fuit autem d. 13. 14. Aug. tempeſtas turbida et pluuioſa, d. 15. coelum clareſcere quidem coepit, ſed vento flante O. frigido, forti. interea

D. 15. Auguſt. Poſt meridiem, Therm. in aqua fuit gr. 126.

D. 16. Auguſt. Mane ſereno, tranquillo, Therm. in loco aperto gr. 130. ſuper aqua gr. 128. in aqua gr. 128. Sed NB. quamuis mercurius ad eandem altitudinem ſtabat, extracto tamen Thermometro ſtatim deſcendit ad gr. 129. quod confirmat theſin de guttulis aqueis adhaereſcentibus.

Cur

Cur nunc aer ſuper aquam non aeque frigidus aut frigidior eſt quam in loco aperto et ſeptentrionali? an propter aquam calidiorem nunc exhalantem? vid. d. 11. 12. Aug.

Poſt meridiem, Therm. in loco aperto gr. 127. vento fortiſſimo NO. expoſitum gr. 129. ſuper aquam gr. $127\frac{1}{2}$. in aqua gr. $127\frac{1}{2}$. poſt extractionem ſuper aqua ad gr. 130.

Ob valetudinem, quae me intra conclaue detinuit, iterum omiſſa obſeruatio: interea fuit tempeſtas mediocris.

D. 21. Auguſt. Poſt meridiem, Therm. in ſole gr. 95. ſuper aqua quo ſol nondum penetrauerat, gr. 127. in aqua gr. 128 ſine vento.

D. 22. Auguſt. Mane, nebula, Thermom. in loco aperto gr. 132. poſt horam in loco ſeptentrionali gr. 128. ſuper aqua gr. $127\frac{5}{6}$. in aqua gr. $128\frac{1}{2}$. iterum ſuper aqua gr. $128\frac{2}{3}$. Ventus nullus.

Poſt meridiem, hora prima in ſole, coelo non ſatis claro, gr. 98. extra ſolem in loco ſeptentr. gr. 117. ſuper aqua gr. 119. in aqua gr. $127\frac{1}{2}$. iterum ſuper aqua gr. 123. Ventus nullus; vel certe paruulus SW.

D. 23. Auguſt. Mane, nebula, ſine vento, aer frigidiuſculus. Therm. in loco aperto gr. 130. in aqua gr. 128.

D. 27. Auguſt. antecedentibus diebus pluuioſis duobus, mane, nebula, Therm. in loco aperto gr. 130. ſuper aquam gr. 128. in aqua gr. $127\frac{1}{2}$. denuo in aqua gr. 129. ſine vento.

Tota dies pluuioſa, nubibus a ſole nonnumquam diuiſis.

Veſperi, Therm in loco aperto gr. 125. in aqua gr. 127. ſuper aqua gr. 126.

III. COROLLARIA DEDVCTA EX OBSERVATIONIBVS.

Aquae Calor, dum sub glacie tecta fluxit illa, nec decrementum passus est nec incrementum, sed per totam hyemen idem permansit, et quidem ita, vt mercurius in Thermometro, quo vsus eram, semper haeserit circa gradum (152) centesimum quinquagesimum secundum, quotiescunque in aquam intrudebatur instrumentum; qualemcunque deinde faciem aer induxerit. Non igitur ingruente gelu frigidior vmquam facta est aqua, nec mitiore et remittente tempestate calidior. Et ne quis putet, resistentiam forte quandam in tubo ipso fuisse, qua impeditus erat Mercurius, ne altius ascenderet, experimentando dubium omne sustuli. Transtuli enim in locum calidum instrumentum, et mercurium facili negotio ad gradum 80. pepuli. Apparuit hinc non modo filum mercuriale in Tubo, aequale et continuum, sed et mox in aqua frigida ad pristinum suum gradum 152. delapsum est. Vnde de phaenomeno certissimus esse poteram.

Quando Mercurius in aere libero expositus haerebat circa gradus 152-156. ille gradus caloris adhuc aptus erat, vt nix in eo descenderet ac consisteret, vti videre est. d. 4. 8. 9. 10. 17. 28. 30. Martii. Quando autem ascendit ad gr. 150, 148. et vltra: nix mox liquescebat.

Haec memorata phaenomena confirmant ea, quae iam ante de calore aquae nota fuerunt. Est nimirum certus aliquis gradus, vltra quem si descendit, aqua non amplius

amplius aqua manet, sed in glaciem conuertitur, et quidem breuissimo temporis spatio; non enim aqua sensim sensimque compactior fit, et congelascit, vti alia quaedam liquida, vt cera, adeps, et omnia olea. Determinauit *Cel. Boerhaue* in Chymia sua hunc gradum, ad altitudinem Mercurii in instrumento *Fahrenheitiano* gr. 32-33. in instrumento nostro autem indicatur gr. 152. qui quidem gradus quam proxime inter se concordant, postquam proportio inter *Boerhauianum* et nostrum instrumentum innotuit; et quia in nostro Thermometro mercurius in 10000 partes aequales diuisus esse supponitur: sequitur volumen mercurii in aqua feruente esse ad eiusdem volumen in aqua gelascente, vt 10000: 9848. (9850.)

Necessario igitur aquae fluens sub glacie hunc eundem infimum gradum caloris constanter conseruat. Id quidem iam nunc ex obseruatione luculenter constat; sed potest quoque haec veritas per ratiocinium facile erui; nam si velles, vt minueretur, tunc necessario in glaciem conuerteretur; si vero increscere debeat, id vicinia accubantis glaciei impediet. Nam quia duo vicina corpora tamdiu mutationem caloris secum communicant, donec ad aequilibrium peruenerint; aqua fluente calidior fieri non poterit. Imo nulla est ratio, vnde calor ille augeatur. Sunt enim non nisi duo corpora, quae hoc augmentum afferre possent, Sol nimirum, et aer. Quamdiu autem glacies incumbens aquae, horum duorum corporum virtute non mutatur, tam diu nec aqua ipsa subterlabens mutationem persentiscet.

Quia idem aquae calor persistit, donec fluuius ab omni glacie liberatur: sequitur, falsam est hypothesin illorum, qui rationem reddere satagentes, quare soluta hyeme, glacies, cuius altitudo ad duos tresve pedes vsque excreuerat, Mensibus Martio et Aprili tandem minuatur et fragilis fiat? caussam allegare soleant, illam iam nunc consumi tam superne quam inferne, superne propter actiuitatem solis, inferne, quod aqua calidior glaciem liquefaciat. At vero aqua semper aeque frigida manet, nihil igitur decedit glaciei dum aquae accubat, nisi per motum et frictionem, vti experientia comprobat. Nam si foramen rotundum in glaciem inciditur, illius ora inferior, quam aqua lambit, successu temporis obliqua fit, secundum directionem aquae fluentis. Motus autem aquae et frictio non solis mensibus dictis, sed tota hyeme locum habet. A radiante igitur Sole et aere tepidiore, vel et a pluuia calidiore et copiosa omnia vnice dependent.

Quando instrumentum ex aqua extrahebatur, ros aqueus cylindro vitreo adhaerens statim in glaciem conuersus fuit, quamdiu aeris calor inferior erat calore aquae. Illi igitur, qui in hisce regionibus, rigente bruma, ex balneis calidissimis, mox in fluminis aquam sub glaciem se praecipitare solent: tantam mutationem corpori suo non inducunt, quam qui immediate ex balneo in aerem liberum se conferunt.

Postquam aqua glacie liberata erat, vt liber aditus aeri pateret, calor aquae increscere coepit, ita vt primo Maii die mercurius ad gradum 148. ascenderet. Differentia igitur erat intra duas hebdomadas, 4. graduum.

Factum

Factum est autem, vt illis ipsis Calendis Maii, glacies ex lacu Ladoga adueheretur. Cum igitur denuo in calorem aquae haec occasione inquirere animus erat, deprehendi mercurium labi ad gr. 151. et si quando frustum glaciei in vicinia instrumenti flueret, ad gr. 151½. Mutationes igitur caloris aquae, in qua experimenta capiuntur, non tam dependent a mutatione aeris incumbentis in loco obseruationis, quam potius a temperatura omnis illius aeris, sub quo aqua per omnem suam viam defluxit. Non enim in exemplo hoc putandum est, aquam denuo tam subito frigefactam esse, sed illa ad hunc gradum frigida vna cum glacie illa noua affluxit, in cuius vicinia energia solis et aeris in aquam penetrare nondum poterat.

Circa obseruationes aestate factas varia inciderunt incommoda, quae laborem difficilem reddiderunt, quamuis omnem industriam adhibuerim, quae in re numquam hactenus tentata posci potest.

Ante omnia quam clarissime apparuit, Thermometra nostra plane non idonea esse ad expiscandum caloris verum gradum in aere generaliter, sed, si duo obseruatores in locis non adeo longe dissitis instrumentis aequalibus ad mutationem caloris attendant eodem tempore, numquam tamen phaenomena notata concordatura esse. Huius defectus culpa non in instrumento, sed in ipsa natura caloris quaerenda est, quippe qui omnibus corporibus inhaeret, et tam diu se cum aliis vicinis communicat, quamdiu haec frigidiora sunt. Necessario igitur aer, in vicinia corporum calidiorum aut intra loca angusta et quieta delitescens calidior esse debet, quam ille, qui aut longe ab aliis corporibus

 distat,

diſtat, aut plane liber eſt. Inde accidit, vt vno eodemque tempore, alium caloris gradum notari a Mercurio deprehenderim, in loco quieto in vicinia domuum, vbi ventus non adeo libere vndique accedere poterat, alium in loco aperto, alium in loco ſine ſole, alium in loco a ſole irradiato, alium in plaga ſeptentrionali, alium in meridionali; alium denique ſuper terra, alium ſuper aqua fluente, ex. gr. d. 13. 14. 15. Iunii. alio tempore parum differebat, imprimis poſt pluuiam, vt d. 9. Iulii. Quae quidem inconſtantia quamuis impediat, ne accurate ſciam relationem inter calorem aeris et aquae: non tamen prohibet, quominus varias differentias caloris aquae ipſius ac temperaturae aeris inter ſe expiſcari poſſim.

Inſtitutum quidem erat, ab initio, ad calorem aeris quieti, et liberi attendere; inſequentibus vero temporibus, et quidem d. 13. Iunii didici, oportere me probe etiam notare calorem aeris ipſi aquae immediate *incumbentis*, ni vellem decipi in indagando calore aquae. Vidi enim tum temporis, poſtquam inſtrumentum ex aqua extraxeram, Mercurium adhucdum notabiliter cadere, cuius quidem rei nulla alia cauſſa ſubeſſe poterat, quam quod aer incumbens multo frigidior eſſet quam aqua, et aer ille, in quo alias Thermometrum obſeruare ſolebam.

Multum impedimenti quoque attulit diuerſa fluminis altitudo aut profunditas, itemque motus aquae ex vento aeſtuans. Illud enim in cauſa fuit, vt non accedere poſſem ad diſtantiam requiſitam; iſtud, vt non ſatis promte poſt extractionem gradum mercurii obſeruare mihi liceret, ſed nunc maiorem nunc minorem, pro diuerſitate aeris incum-

incumbentis, propter moram adipiſcerer; hoc, vt inſtrumentum fluctuaret, nec aequabiliter ab aqua lamberetur.

Imprimis oportebat, vt celeritate, qua potui, dexterrima ad gradus reſpicerem, poſtquam extractum erat inſtrumentum; Nam vel parciſſima mora, imprimis ſi calor aquae et aeris incumbentis multum differebat, varias incommoditates peperit: ſiquidem mercurius poſt extractionem nonnumquam paululum cadebat, mox vero aſcendebat, nonnunquam vero poſt lapſum aliquantulum quieſcebat, et tum demum aſcendebat, vt d. 12. 14. 15. Iul. d. 7. 11. 16. Aug. quod ſine dubio inde prouenit, partim, quod cylindrus vitreus in aerem calidiorem delatus, ſecundum generalem regulam de vi caloris expanſiua, prior extendebatur, vt hinc mercurius ſpatioſiorem capacitatem nactus neceſſario paululum laberetur; partim, quod guttulae aqueae cylindro extracto adhaerentes, in aere, etſi calidiore, exhalarent, hinc quadantenus refrigeſcerent, et refrigerium ſuum cum mercurio intus contento communicarent. Ex quibus omnibus apparet, quam circumſpecta ſolertia opus fuerit in negotio, quod ab initio facile videbatur, ſed perplexo tamen, quia natura vbique etiam in minimis, leges ſibi impoſitas conſtanter obſeruat. Hinc raro vnico experimento contentus eram, ſed plerumque tribus quatuorue vicibus rem repetii, vt de obſeruatione facta certus eſſem.

Phaenomena autem, quae in mutatione caloris aquae fluentis per aeſtatem occurrerunt, praecipua haec ſunt:

1.) Calor aquae lente creuit, ita vt ſummum incrementum vno die d. 25. Iun. factum, eſſet duorum

duorum graduum; deinde d. 20. 23. Iun. item d. 16. et 19. Iul. incrementa erant ad gr. $1\frac{1}{2}$. Qui quidem dies etiam omnium erant aestuosissimi.

2.) Quicquid de die accessit, illius saltim dimidium noctu iterum decessit; si quidem illae frigidiores essent, et longiores, vento septentrionali simul flante. Vt d. 16. 17. 18. Iul.

3.) Noctes breuissimae mense Iunio, siquidem calidae erant, vt d. 27. Iunii. parum vel nihil immutarunt.

4.) Incrementa caloris incidebant plerumque in horas pomeridianas, queis et aer et aqua solis radios et energiam experiebantur, vt toto mense Iulio et imprimis d. 29. Iul.

5.) Aqua caloris gradum adeptum pertinaciter retinuit, nec ita facile tempestate alia ingruente, nisi post aliquot dies, illum dimisit, vt vltimo Iun. *item* d. 8. 9. 10. 11-16. Iul.

6.) Calor aquae summus erat mane, d. 29. Iul. $117\frac{1}{4}$. gr. nec non d. 25. 30. 31. Iul. et 1. 2. 3. Aug. 118. grad. Meridie autem, d. 30. Iul. $116\frac{1}{2}$. gr. vt igitur augmentum totum caloris aquae hac aestate fuisset, $35\frac{1}{2}$. grad.

7.) D. 3. August. calor aquae vltima vice summum gradum 118. attigerat; ex quo tempore iterum lentis gradibus decreuit.

DE

Fig. A.

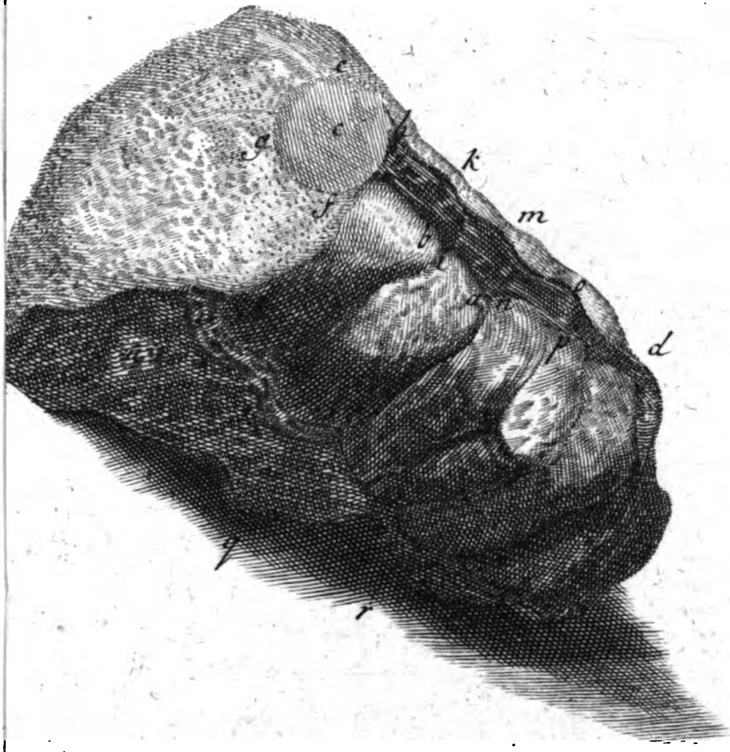
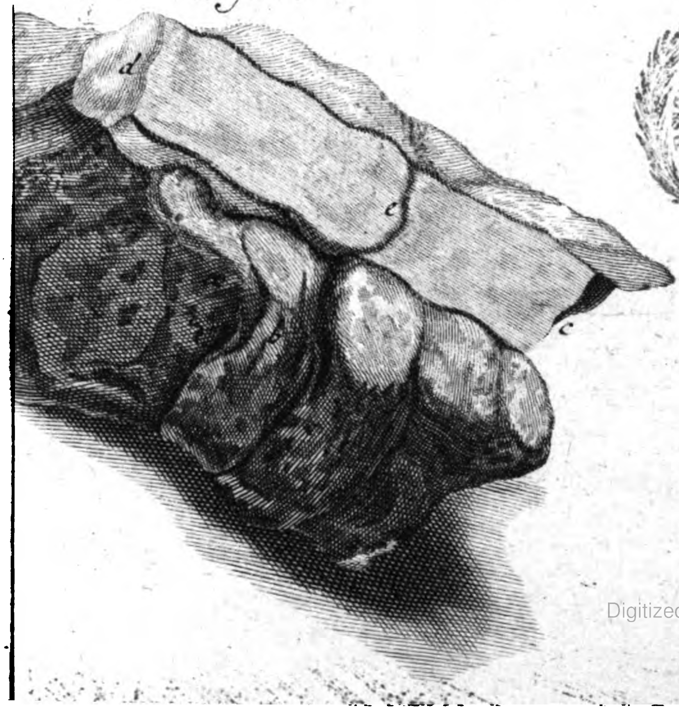


Fig. B.



DE DVOBVS LAPIDIBVS FIGVRATIS.

AVCTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

CVm mense Augusto, anni superioris 1733, in *Liuonia* prope littora *Sinus Finnici* versarer, atque inter alia etiam castellum aliquod dirutum, quod *Tolisburgum* vocatur, spectarem: accidit forte vt ibi, inter multos hinc et inde sparsos lapides arenosos, inuenirem duos *Figuratos*, quorum primus aspectus ideam statim illorum lapidum animo meo reuocauit, quorum pereruditam descriptionem et explicationem *Cl. Gmelinus* noster *Tom. III. Commentariorum* inseruit. Multum laetatus ego, quod ex hoc qualicunque meo reperto assertis citato loco explicatis accedere forsan aliquid posset, lapides huc attuli, traditurus eos *Cl. Gmelino* tanquam suos; is vero cum iam profectus hinc esset, hoc meo proposito excidi. Quamuis itaque in hoc studiorum genere me non adeo versatum esse ingenue fatear: malui tamen, quid in re noua possim, periclitari, quam haec, qualiacunque demum sint, plane supprimere. Tabula XII.

§. 2. Littora maris eo in loco, vbi lapides hosce reperi, munita sunt longo tractu collium haud leuiter asſurgentium, ita tamen vt a radice collium planities adhuc aliqua ſuperſit verſus mare ipſum, repleta vbicunque fere ſterili arena; huic arenae interſperſi ſunt lapides quamplurimi ex eadem arena concreti, et quaſi tantum collecti, qui ſolius etiam manus agitatione in priſtinam arenam conteri facile poſſunt. Iacebant mei non multum inter ſe diſſiti, et liberi, in ſuperficie arenae, atque aliud quiddam inueſtiganti ſponte ſe obtulerunt, vtrumque vero quamuis ſine opera obtinuerim, plures tamen poſtea, ex induſtria quaerens, inuenire non potui.

§. 3. Tota exterior figura horum lapidum ita comparata eſt, vt facile perſuadere ſibi quis poſſet, ortum illos ſuum debere ſpinae dorſi cum inſerta medulla, animalis cuiusdam aquatici; attentius vero eos conſideranti diſtingui merentur in iis quatuor praecipue 1. *Patellae*, 2. *Alueolus*, 3. *vtrique horum adhaerens Materia teſtacea*, et 4. *Lapis communis toti maſſae affixus*. *Patellae*, ab vna parte ſunt concauae, conuexae ab altera, et vtrumque circulariter, ad ſenſum, ita quidem vt in Figura A recta concauitatem ſubtendens ſit 130 partium milleſimarum pedis Rhenani, quas in ſequentibus quoque adhibeo; in Figura B autem 152. Interuallum, quo vna patella ab altera diſtat, *ba*, eſt vbique fere idem, et in vtroque 40 partium. In Figura B, in cuius originali patellas *a* et *b* ſeparaui a reliquo lapide, vti paulo poſt dicetur, diſtinctius videre licet teſtae cuiusdam reliquias, valde tenues, leues, et albicantes: extracto quoque alueoli fruſto *c* exacte patet, quod hac materia teſtacea integra patellae concauitas et conuexitas fuerint inductae et obductae.

§. 4.

§. 4. Perforatae conspiciuntur hae patellae, in earum peripheria *Alueolo* in rectam extenso, rotundo, conico. Nempe in Figura A inueni diametrum huius alueoli maiorem apud *c* 50. sed apud *d* 47. partium, ita vt haec diameter a loco *c* vsque ad *d* in longitudine 211. partium, aliquantum decrescat. Ipse vero hic alueolus *circularis* non est, sed *Ellipticus* in ratione axis maioris *ef* ad minorem *gb* vti 16. ad 15. sed in figura B diameter maior apud *c* est 56. apud *d* vero 46. partium, ita vt hic alueolus in longitudine 214. partium multo magis decrescat, quam prior. Erit ergo alueolus Figurae A si aequaliter a base *ebfg* porrectus esset $3\frac{1}{2}$ pedum Rhenan. in Figura B autem multo breuior, nempe $1\frac{1}{5}$. pedis Rhen. Id vero commune est vtrique lapidi, quod alueolus a concauitate patellae ad conuexitatem ipsius progrediatur decrescendo. In Exemplari Figura B repraesentato, conuexitatem cylindricam atterendo adimi iussi, vt alueolo planities 96. partes lata inducta fuerit; quo facto alueolum in *e* diffractum inueni ita, vt adhibita aliqua opera, potuerit eius pars *de* extrahi, simul etiam duo patellarum *a* et *b* fragmenta auferri. Extracto igitur hoc alueoli frusto, obseruaui in eius parte inferiori, qua per patellas transit, non modo vestigia distincta linearum ellipticarum, quae iuncturis patellarum exacte respondent; sed praeterea quoque residuum alicuius materiae testaceae adhaerescentis, quae facile abradi potest. Perspicitur etiam, quod haec materia testacea circa alueolum constituerit tubum transuersim per patellas transeuntem, id quod non minus ex originali Figurae A concludi potest, vt pote in cuius extremitate *c*, quam simi-

 liter

liter atterendo in planitiem reduci curaui, facies elliptica alueoli peripheria lutei coloris cincta est, quam nihil aliud esse puto, nisi peripheriam extimam eiusdem tubuli testacei alueolum ambientis. Apparent quoque in Figura A, in cuius dorso cylindrico alueolus prominet, lineolae transuersae *k i*, vel *m n*, *o p*, corpuscula transuersa vocatae a *Cl. Gmelino Dissertationis suae* §. 7. quas vero nihil aliud esse credo, quam continuationes, aeris iniuria non nihil deformatas, antecedentium linearum ellipticarum, patellarum iuncturis respondentium, quas in extracta alueoli parte *e d* Figura B detexi.

§. 5. *Lapidis communis* massa informis affixa est vtrique nostro lapidi in parte Figurarum A et B auersa, qua sine dubio, prout ex *Dissertationis Gmelinianae* §. 16. patet, aliis olim lapidibus fuerunt annexi, casu vero quodam, successu temporis, ab iisdem abrupti. Apparet haec massa lapidis communis in Figura A sub literis *t q r v*, et in Figura B sub literis *f g h*.

§. 6. De *materia testacea* iam dixi, eam in quibusdam locis distinctam apparere, non solum circa massam lapideam alueoli, sed etiam in concauitate et conuexitate patellarum: quibus hoc vnicum addo, quod in Figura B frustulum aliquod satis paruum facile separauerim, quod manifeste testaceae cuiusdam materiae faciem et naturam tenet, crassitiem vero habet 2 partium millesimarum pedis Rhenani.

§. 7. Vtriusque lapidis magna cura etiam examinaui *pondus*, atque inueni lapidis A fuisse pondus in aere

4455.

4455. granorum, in aqua vero tantum 2764. gr. ita vt in aqua amiserit 1691. gr. lapidis vero B pondus inueni in aere 4495. gr. in aqua autem 2758. gr. qui ergo amisit in aqua 1737. gr. vnde deduxi densitatem lapidis A = 2.63; lapidis vero B densitatem = 2.58 posita densitate aquae = 1.00. Vt comparationem aliquam instituere possem, examinaui quoque lapidis campestris vulgaris pondus in aere pariter et aqua, atque illud inueni 6822. gr. hoc vero 4229. gr. quod iacturam ponderis indicat 2593. gr. et densitatem huius lapidis commonstrat 2.63. praecise eandem, quam Fig. A exhibuit: vnde et Figuratum lapidem A, et campestrem hunc, ex eadem materia lapidea concretos esse credendum est. Concham deinde quandam vniualuem, mediae magnitudinis, eodem modo librae examini subieci, et inueni pondus eius in aere 919. gr. in aqua 527. gr. ita vt decrementum ponderis fuerit 392. gr. ex quibus eius densitas prodit 2.34. supposita vbique eadem, quae ante, aquae densitate.

§. 8. Conueniunt haec omnia cum iis, quae *Cl. Gmelinus* de his lapidibus tradidit, quare eo minus dubito eidem sententiae accedere, quam de origine horum lapidum fouet, hancque iure maximo adscribi posse puto *Nautilorum* generi, cuius, per medium horizontaliter secti, elegantissimam delineationem dedit *Clariss. Ioh. Philippus Breynius Med. Doctor* in Dissertatione Physica de *Polythalamiis*. Omnia enim et singula, quae circa patellas testae obductas, et alueolum eadem testa circumdatum, in praecedentibus enarraui, aptissime ad hoc conchyliorum genus

 quadrant,

quadrant, vtpote cuius thalami, fracta eo in loco, vbi lapis communis adhaeret, testa exteriori, lapidea materia fuerunt repleti, testa naturali superstite adhuc alicubi, alibi vero exesa, et temporum successu detrita; ita vt hi lapides omnino *formati sint in cauitatibus Nautili sub terra, tum externam Nautili figuram, tum internam organicam fabricam referentes*; quam *Nautilitarum* definitionem *Cl. Breynius* exhibet *l. c. Cap.* III. §. 29. Itaque etiam conuenientissime citatus *Clar. Auctor* lapides hosce *Gmelinianos*, qui iidem sine dubio sunt cum meis, *Orthoceratitis* accenset, speciei Polythalamiorum *l. c. Cap. VI.* §. 59. quamuis non negare velim, eos etiam sic dictis *Lituis*, alteri *Polythalamiorum* speciei, posse accommodari.

§. 9. Recenset *Cl. Gmelinus*, lapides tales figuratos inuentos in *Insula Oelandia*, quos possidet *Reuer. Iacobus a Melle*; repertos in Silesia, testante *Volckmanno, in Silesia subterranea*; extractos in *Borussia*, teste *Helwingio* in *Lithographia Angerburgica*; effossos in *Ingria*, ab *ipso*: annumero his repertos meos ad littora *Sinus Finnici prope Reualiam*; quibus adiicio *Nautilitas* varii generis, repertos in Ducatu Wärtembergico, quos possidet *Cl. Breynius*; nec minus etiam eos, quos *Cl. de Jussieu* inuenit in *Gallia*, descriptos in *Commentariis Academiae Scientiarum Parisinae Anno* 1722. *pag.* 319. *Editionis Batauae.* Accedit insuper tantus *Cornuum Ammonis numerus*, quae per totam Europam inueniuntur, et huic *Polythalamiorum* generi subiacent. Totam igitur Europam hoc lapidum genus in locis subterraneis continere, atque id magnae inundationi maris alicuius, in quo hoc con-

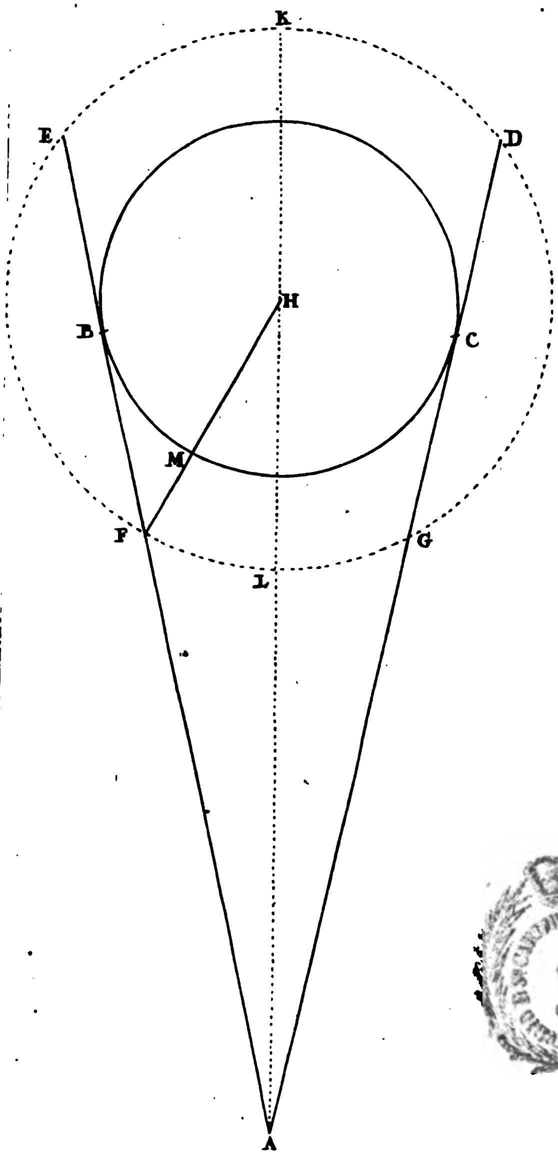
chylio-

chyliorum genus reperitur, deberi, merito indicandum est. Incolis vero suis talia Conchylia annumerat, quantum constat, solum *Mare Indicum*, quod *Nautilos* alit, quorum concha est articulata, et in thalamos diuisa, qualia specimina petrefacta sunt nostri lapides; quos enim *Nautilos* producit *Mare Adriaticum* et *Mediterraneum*, ab *Aristotele* et *Plinio* allegatos, illi articulatione et thalamis carent, nec nisi vnica testa continua et contorta constant, eaque adeo tenui, vt hinc *Papyraceorum* nomine veniant. Ex *Maris Indici* igitur excursu, totam Europam peruadente, lapidum nostrorum originem cum *Cl. de Iussieu* repetere fas est, neque mirandum, quod talia conchylia, quorum exuuiae circa littora *Maris Baltici* reperiuntur, in ipso mari non amplius supersint; aut statuendum, quod ea in morem piscium et cancrorum pristinam sedem suam deseruerint: nunquam enim ibi fuerunt, sed ex *Indico Mari*, tanquam ex patria sede, vi fluctuum iactata, in nostras terras, quasi in exilium, sunt pulsa.

§. 10. Caeterum natura soli *Ingrici*, quam *Clar. Gmelinus* ope terebrae metallicae inuentam, recenset, vbi terra primo deprehensa est *duas*, lapis calcarius, cui nostri lapides figurati immixti sunt, *octo*, lapis scissilis *vnam*, et arena *multas*, perticas profunda, apprime confirmat naturam soli etiam illius *Liuonici*, quo iuxta littora maris protenditur. Animaduerti enim ex itineris totius, vsque ad *Tolisburgum*, cursu, quod, habito interspersorum montium respectu, veniatur semper in loca magis humilia, ita vt relicta vrbe *Narua*, terra, quae in *Ingria* duarum

duarum tantum perticarum profunditatem habet, fere amplius nulla superſit, ſed ibi omnia lapide calcario ſtrata quaſi ſint; vlterius deinde proficiſcenti, et ad ipſa littora maris accedenti, patuit, me quoque lapidis huius calcarii, octo perticas profundi, terminum inferiorem attigiſſe, atque in eum locum, vbi profundum arenae ſtratum incipit, deſcendiſſe; ita vt credi poſſit, ſtratum illud lapideum, continua maris alluuie exeſum et fractum, lapides noſtros temporis ſucceſſu a vinculis liberatos reliquiſſe; eosque hac ratione ſubiacenti arenae expoſitos fuiſſe.

DE


K
E
D
H
B
C
M
F
G
L
A

DE INVENIENDA DISTANTIA MACVLARVM SOLARIVM A SOLE.

AVCTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

EX diligenti macularum Solarium obseruatione cognitum fuit, *citius eas discum Solis nobis conspicuum permeare, quam alterum à nobis auersum.* Inseruit hoc phaenomenon Theoriae harum macularum duplici ex capite. Primo enim per id manifestum fit, *maculas istas non inhaerere ipsi Solis superficiei*, vt quibusdam visum est; ex hoc enim sequeretur, maculas eodem tempore aduersam et auersam solis partem percurrere debere, cum, ob ingentem Solis a Terra distantiam, semper dimidiam eius partem sensibiliter intueamur. Secundo ex obseruatis temporibus quibus macula aliqua in Sole conspicua est, et deinde post eum delitescit, *distantia quoque illius maculae a Sole Geometrice deduci potest*, quod a pluribus quidem generaliter annotatum, a nemine vero ipso calculo comprobatum inuenio. Tab. XIII.

§. 2. Sit corpus Solis BC, et moueatur macula in circulo concentrico EDGF, ducantur deinde ex oculo spectatoris in terra A duae tangentes Solem lineae ACD et ABE; euidens eſt, maculam tantum conſpicuam fore in diſco Solis, dum arcum FG percurrit, reliquo toto periodi ſuae tempore inuiſibilis erit nobis. Nam dum arcum GD aut FE percurrit, ob ſuam obſcuritatem in Solis atmoſphaera videri nequit; cauſa enim cur in arcu FG nobis viſibilis fiat vnica eſt, quod obſcuritate ſua lucidi diſci Solaris particulam obtegat. Dum vero arcum DE percurrit, eam ob cauſam videri nequit, quod poſt corpus Solis deliteſcit. Igitur haec macula per totum arcum FEDG inuiſibilis ſit, neceſſe eſt; qui cum euidenter maior ſit arcu FG, patet ex hoc phaenomeno ſequi, quod maculae non in ipſa Solis ſuperficie circumducantur.

§. 3. Si ergo ponamus maculas in circulis *Soli* concentricis aequabiliter moueri circa Solem, erunt arcus FG, et FEDG proportionales temporibus quibus *iſti* arcus deſcribuntur; poterunt igitur arcus ipſi inueniri, ſi dentur duo tempora, quorum vnum indicat moram maculae in arcu FG viſibilis, alterum vero moram maculae in altero arcu FEDG inuiſibilis. Ducatur recta AH ex terra per centrum Solis, et radius HF, biſecabit illa in L et K arcus FG et FEDG; erit itaque tempus dimidium apparitionis per LF ad tempus dimidium occultationis per FEK vti angulus FHL ad angulum FHK, qui eſt 180°, minus angulo FHL; et componendo, erit tempus dimidium apparitionis plus tempore dimidio occultationis, hoc eſt, tempus dimidium periodi totius ad tempus dimidium apparitionis, vel quod eodem recidit, tempus periodi integrae ad tempus apparitionis integrae, vti 180. gradus ad angulum FHL. Ex hac analogia itaque inuenitur angulus FHL ex obſeruatione. Sed in triangulo FAH dantur praeterea latus AH diſtantia Solis a Terra, et angulus FAH, qui eſt ſemidiameter apparens Solis; igitur ex his poterit inueniri latus FH, a quo ſi ſubtrahatur radius corporis Solaris, remanebit MF diſtantia maculae a Solis ſuperficie.

§. 4. Exemplo inſeruire poteſt celebris illa obſeruatio *Godofredi Kirchii*, qui Lipſiae 1684. a 26. Aprilis vsque ad 7. Iulii maculam eandem aliquoties reducem obſeruauit, atque inuenit, tempus apparitionis fuiſſe 12 dierum, occultationis vero 15. dierum. Pro abſoluendo autem hoc calculo ante omnia determinari debet ſemidiameter vera corporis Solaris. In hunc finem aſſumo diſtantiam Solis a Terra mediam Hirianam 34377. ſemidiam. Terrae. Semidiametrum apparentem Solis mediam $16' 5''$, atque infero, vti ſinus totus (10 000 000) ad diſtantiam Solis a Terra (34377) ita ſinus ſemidiametri Solis apparentis (46784) ad ſemidiametrum corporis Solaris (160. 829. ſemid. terr.) Poſita igitur hac ſemidiametro corporis Solaris, fiat per inuentam regulam: vti tempus integrum periodi (27. dies) ad tempus integrae apparitionis (12. dies) ita 180. gradus ad 80. gradus, quos continet angulus FHL. Tempore obſeruationis erat ſemidiameter Solis apparens $15' 54''$, et Logarithmus diſtantiae Solis a Terra 4.00504, poſita diſtantia media 10000; numerus illius Logarithmi eſt 10116.74, facta igitur reductione ad diſtantiam mediam aſſumtam 34377 ſemidiametr. terr. fuit eo tempore diſtantia Solis a Terra 34778.317 ſemid. terr. Soluto igitur triangulo FHA ex datis angulis $FAH = 15' \, 54''$, $FHA = 80^{\circ} \, 0' \, 0''$ et latere $AH = 34778.317$, inuenietur FH diſtantia maculae a centro Solis 163.204 ſemid. terr. a qua diſtantia ſi ſubtrahatur ſemidiameter Solis ſuperius ſtabilita, remanebit diſtantia maculae a ſuperficie Solis 2.375 ſemid. terr. vel ſumta ſemidiametro Terrae pro 860 milliaribus Germanicis, quorum 15 gradum aequatoris efficiunt, erit diſtantia maculae a ſuperficie Solis $2042\frac{1}{2}$ milliar. Germ.

§. 5. Inter magnam macularum copiam, quas in annis 1728, 1729 et 1730 obſeruaui, non niſi vnicam vidi, de qua certus eſſe poteram quod redux ſit. Obſeruaui de ea, eam ſpatio 13 dierum in diſco Solis apparuiſſe, 14 dies autem poſt Solem latuiſſe. Cum autem Diarium illarum Obſeruationum anno 1732 incendio mihi perierit, neſcio amplius dies illarum obſeruationum vel annum; quare nec conuenientem ſemidiametrum nec diſtantiam a Terra Solis pro calculo exinde ducendo aſſumere poſſum. Si vero retineantur diſtantia Solis a Terra, et ſemidiameter Solis apparens, mediae, inuenietur, diſtantiam illius maculae a Solis ſuperficie fuiſſe 1501.56 milliar. Germ.

DE

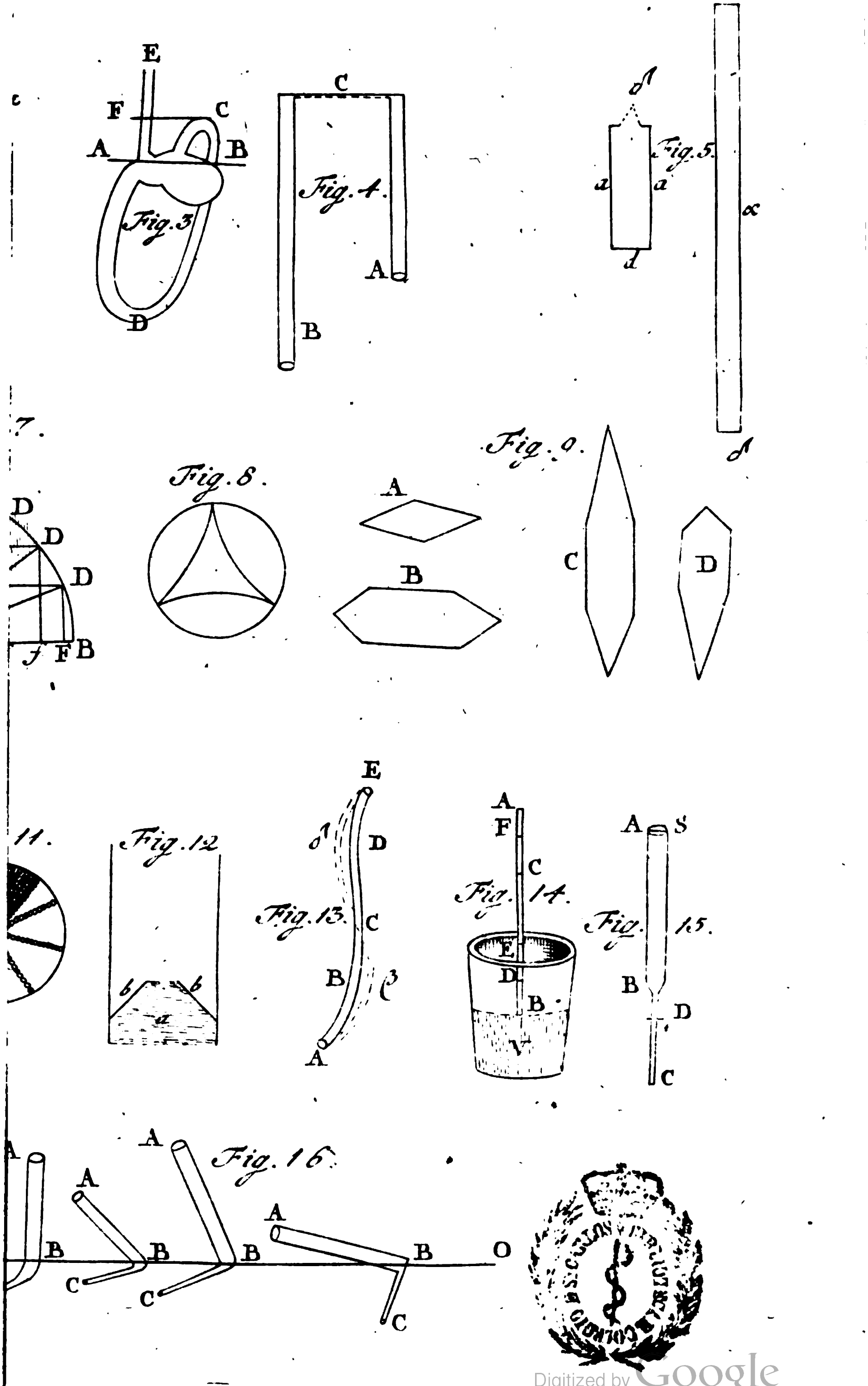


Fig. 3
E
F
C
A
B
D
Fig. 4.
C
A
B
Fig. 5.
δ
a
a
d
α
δ
7.
D
D
D
F
B
Fig. 8.
Fig. 9.
A
B
C
D
11.
Fig. 12
b
b
a
Fig. 13.
E
D
C
B
A
Fig. 14.
A
F
C
E
D
B
V
Fig. 15.
A
S
B
D
C
Fig. 16.
A
B
C
O

DE CIRCVLATIONE SANGVINIS COGITATIONES PHYSIOLOGICAE.

AVTORE
Iosia Weitbrecht.

CAP. II. (*)

Examen virium, quae motum Sanguinis producunt.

Prolegomena.

§. 1.

QVando corpus quodcunque mouetur, illud cum velocitate quadam locum suum mutat. Hanc autem velocitatem concepit a vi quadam, et illa quidem, vel innata, vel aliunde accedente. Recte igitur *Pecquetus* Sanguinem vel proprio ruere incitabulo vel alieno impelli, enunciat. Tabula XIV.

§. 2. Nulla autem alia vis hactenus inter physicos cognita est, quae motum producere potest externe accedens, nisi aut vis grauitatis, aut vis magnetica vel attractiua, aut vis alius corporis moti, certa velocitate in corpus mouendum irruentis vel impetum facientis.

§. 3. Non adeo difficile erit, haec adplicare ad sanguinem, cuius motum supponimus. Sunt enim tria

Oo 3 potissi-

(*) Cap. I. vid. Tom. VI. p. 276.

potiſſimum corpora, quae experimentis et obſeruationibus moueri docemur, & quorum motu perfecte ſublato, motus quoque ſanguinis tollitur: cor ipſum, quatenus duobus ventriculis terminatur; cordis auriculae; et arteriae. Non dubium eſt igitur, quin tria haec corpora potentiae illae mouentes ſint, quae motum Sanguini imprimunt. An vero illa Sola ſint, an vero grauitas quoque Sanguinis ad ſui motum quicquam conferat; item, an vaſorum capillarium ſumma anguſtia vim attractiuam cum effectu ſpecioſo exerceat? id quidem eſt, quod alii in dubium vocant, alii autem aſſeuerant, et de quo in ſequentibus diſpiciemus.

§. 4. Materia ergo ipſa per ſe in quinque ſectiones diſpeſcitur, vt primo de grauitatione Sanguinis, deinde de actione cordis, porro de actione arteriarum, tandem de actione auricularum, et denique de attractione vaſorum capillarium in hoc capite agamus.

Sectio I.

De Grauitatione Sanguinis.

§. 5. Sanguinem grauem eſſe, quia ponderat, quin ſupponamus, nihil eſt, quod impedit. Omne autem graue deorſum tendit, et vi huius tendentiae preſſionem in ſubiecta corpora exercet, quae preſſio grauitatio quoque dici ſolet.

§. 6. Non mirum eſt igitur, dari phyſicos, qui ſanguini preſſionem ſimilem (§. 5.) tribuere velint. Atque id quidem recte; partim vi legitimae conſequentiae; partim, ſuffragante experientia.

§. 7.

§. 7. Non autem circa generalia iſta (§. 5. 6.) verſatur praeſens noſtra conſideratio; ſed magis determinate ſcire oportet: an grauitatio ſanguinis motum ſui in vaſis promoueat? ſiue, an motus huius liquoris celerior fiat ex eo, quod grauitate ſua deorſum tendat?

§. 8. Maioris dilucidationis ergo non inutile erit praemittere, quid alii, et quibus rationibus de hoc (§. 7.) problemate diſſeruerint. Quaeſitum enim fuit: an arteriae iunctae cum venis (Cap. I. §. 12.) pro ſiphone vel tubis communicantibus haberi poſſint? an igitur ſanguini in his vaſis contento idem accidat, quod aliis liquoribus, e. gr. aquae in iſtis tubis accidere deprehenditur? Atque hanc quidem quaeſtionem adeo firmiter coniunxerunt cum praecedente (§. 7.), vt qui hanc vltimam aſſeuerarunt, eo ipſo primam quoque ſtabilire crederent; qui vero primam negare contenderunt, ſatisfeciſſe ſcopo autumarent, ſi vltimam deſtruxiſſent. Exemplo ſint *Pecquetus* et *Guilielmini.* Ille ſanguinem ſuo proprio pondere moueri negauit ex eo, quod vaſa ſanguiveha rationem ſiphonis non habeant, atque hanc diſſimilitudinem argumentis quinque adſtruxit. 1.) Quia in ſiphone transitus liquoris ex vno crure in aliud fiat tempore eodem: in vaſis autem diuerſo; 2.) quia ligata vena iugulari ſanguis nihilominus ſupra ligaturam accurrat; 3.) quia in cadauere venae turgeant euacuatis arteriis; 4.) quia vena cruralis ligata euacuetur verſus cor; 5.) quia arteria cruralis ligata euacuetur verſus extrema. *Guilielmini* contra, grauitatem ſanguinis motum ſui adiuuare aſſerit ex eo, quod ſecundum naturam fluidorum partim aequilibrium in vaſis inferioribus

tamquam

tamquam in ſiphone recuruo conſeruet, partim in vena ſuperiore proprio pondere ex capite verſus cor relabatur, et ſui regreſſum promoueat.

§. 9. Dum, vt propius ad rem accedamus, circuitum ſanguinis aſſerimus, transitum illius ex vno vaſe in aliud dicimus (Cap. I. §. 1.); arteriae igitur et venae inter ſe cohaerent (Cap. I. §. 12.). Praeterea in erecto homine vaſa ſitum perpendicularem, vel perpendiculo proximum, et ad illud facile reducendum ſeruant. Nihil igitur ex parte ſitus impedit, quo minus arterias cum venis ſuis correſpondentibus pro tubis communicantibus habeamus. Quapropter quicquid fluido cuiuis accidit, quatenus iſtiusmodi tubis continetur: id omne quoque ſanguini accidere eatenus debere neceſſe eſt. Atqui in tubis communicantibus fluida vtrinque ad altitudinem ab horizonte in ratione denſitatum inuerſa diſtantem, vi ponderis quieſcunt: nulla igitur eſt ratio, quare ſanguis poſitis iisdem, aequilibrium ſimile non ſeruet? Eadem ratione ſanguis ex tubo breuiore effluit, ſi longior vltra libellam repletur. Similiter in tubo communicante inuerſo omnia ſe habent cum ſanguine, vti cum aliis fluidis modo ſimili.

§. 10. Nihil igitur peccat *Guilielmini*, dum aequilibrium ſanguinis ex ſiphonum conuenientia adſtruit: quicquid contradicant argumenta *Pecqueti*, quae (conceſſa tantiſper illorum veritate) tum demum ſuo ſtarent robore, ſi grauitatio ſanguinis pro ſolo principio motus, non autem pro adiumento tantum venditaretur. Verum enim vero nimis praeceps mihi videtur et minus legitima illatio, tis, ob positam illam conuenientiam, sanguinem grauitate sua promoueri atque adiuuari ita nude et simpliciter ponamus. Ita alter bonam caussam male defendit, alter in abusum vertit.

§. 11. Quaeramus veritatis limites, et videamus, quatenus experimenta artis cum phaenomenis naturae conueniant. Quae omnia vt dilucide distinguantur et explicentur, attendendum erit potissimum ad diuersam positionem vasorum, quae in genere duplex est; siue enim illa ita inter se connexa sunt, vt repraesentari animo possint ceu tubi descendentes, quorum crura tubo communicanti insistunt, seu ceu tubi ascendentes, qui suis ipsi cruribus insistunt. Cum his aequiparare solent arterias et venas superiora petentes; cum illis arteriam magnam et venam cauam cum annexis suis in partibus inferioribus. Deinde, aliae erunt apparitiones, si siphones *vacuos* statuamus; aliae, si consideremus, illos iam esse *impletos*.

§. 12. Sint igitur duo tubi A et B, quorum communicans C est capillaris. Ponamus tubos vacuos. Impleatur tubus, A, aqua pura, quo facto remotis obstaculis, videbis, aquam per tubum capillarem C transire celerrime, in tubo B ascendere, et in A descendere eousque et tam diu, donec altitudo aquae vtrinque aequalis fuerit; tum vero aquam quiescere. Affundatur aqua denuo in tubum alterutrum A: Similiter columna breuior tam diu augebitur, donec massa iterum ad aequilibrium et quietem fuerit redacta. Si vero tubus B breuior erit, quam A, ex illo tam diu efluet, donec idem effectus obtineatur. Quo subtilior est tubus capillaris, eo plus temporis insumitur transitu aquae totali, non Figura 2.

 obstan-

obstante illa celeritate in principio transitus; et quo altior euadit columna aquea, eo longiore mora altitudo aequalis obtinebitur. Pressio enim, quam aqua in istis tubis grauitans exercet, iuxta communes regulas hydrostaticas ex facto altitudinis in basin aestimari debet.

§. 13. Haec experimenta ad motum sanguinis adplicita (§. 12.) sequentia docent: 1.) Si supponamus vasa *vacua* (§. 11.), et iam nunc implenda: omnino fiet, vt sanguis arteriis infusus, remoto etiam omni impetu a vi cordis concepto, sua propria grauitate tandem per extremitates capillares aliosue ductus communicantes, ceteris paribus, in venarum alueos transeat. Quamuis enim non negandum sit, arterias capillares, quales structura corporis animalis nobis exhibet, longe subtiliores esse, quam vt vlla arte illarum angustias imitando obtinere possimus: manent illae tamen nihilominus tubi peruii penetrabiles, et hinc ad obtinendum effectum quaesitum idonei. Atque in hoc casu assentiendum omnino erit *Guilielmino*. At vero 2.) si sanguis grauitatione sua vna semel vice angustias capillarium superauit, atque ad aequilibrium perductus est: tum grauitas in aeternum nihil amplius ad motum eius confert; sed quiescet ille, vi huius ipsius naturae grauitantis in venis tam diu, donec altitudo eius in arteriis per nouam additionem aucta fuerit. Atque haec proprietas constans manet, etiamsi, eadem manente venae capacitate, arteriae diameter ad varias distantias extendatur; siquidem nihil in aequilibrio fluidi mutatur, etiamsi Figura 2. tubum B α respectu tubi A vel centies amplicaueris. Tantum igitur abest, vt sanguis grauitate sua se promoneat, tetat, posito semel aequilibrio, vt potius motum sui in venis ob eandem caussam impediat.

§. 14. Quoniam vero vasa naturaliter non sunt inania, sed *plena*, et nos scire oportet, quid in homine perfecto reuera accidat, non, quid accidere possit? omnis quaestio eo reducitur, vt sciatur, an tubus venosus breuior sit, quam arteriosus, et hinc sanguis, quum aorta vltra libellam repletur, ex vena in cor delabatur, et quanto temporis spatio hoc peragatur? Sit igitur aequilibrium sanguinis tam venosi quam arteriosi circa terminum insertionis venae in cor, ad lineam A B. Augeatur sanguis arteriosus additione noua, vndecunque illa facta fuerit, vsque ad angulum aortae C. Quodsi grauitas vllo modo aliquid contribuere potest ad motum sanguinis, id omne a solo hoc excessu altitudinis, C B, proueniat, necesse est. Cum vero experimenta doceant (§. 12.), quo subtiliores sint tubi capillares, et quo altiores sint columnae fluidi, eo difficiliorem esse transitum, eoque longiorem moram trahi; cum praeterea sanguis tenacitate sua multo vehementius resistat, quam aqua, et hinc motus lentissimus efficiatur, qui cum celeritate motus cordis minime respondet; cum porro basis capillarium in quam pressio exercetur, minima sit; cum denique in homine perfecto et sano circa lineam A B aequilibrium fingere absurdum sit, siquidem sanguis in vasis A D et A E continuus, et longe supra libellam A B et F C, eleuatus sit: ita subducendus mihi calculus videtur, vt enunciandum sit, sanguinis transfusionem grauitatione sua aut plane nihil, aut certe adeo parum promoueri, vt haec vis respectu aliarum potentiarum insigni celeritate agentium pro insensibili et nulla habenda sit. Figura 3.

§. 15. Ne vero huic sanguinis grauitationi omnem suam vtilitatem denegemus; non negligenda erit conditio, quam hactenus vasis nostris communicantibus (§. 12.) tacite affinximus. Considerauimus nempe effectus, quasi cum tubis rigidis res nobis esset, qui tamen in animalibus elastici sunt (Cap. I. §. 9.) et extensiles. Quamuis igitur probabile non videatur (§§. 13. 14.), per illam promoueri posse transfusionem per extremitates capillares, aut effusionem in cor: tamen, quia sanguis non solum in basin vasorum, sed et ad latera illorum (Cap. I. §. 6. 9.) premit: eatenus haec pressio promotionem sanguinis in aorta descendente adiuuare censenda est, quatenus latera eius extendere nititur, et capacitatem pro sanguine recipiendo ampliorem reddit.

§. 16. Restat, vt examinemus, quid de tubis ascendentibus (§. 11.) dici possit. Verum quidem est, si tubi A et B, per capillarem C cohaerentes aqua impleantur, fore vt haec effluat ex tubo longiore, B, etiamsi tubulus C capillaris fuerit: vnde sequeretur, rationem sufficientem adesse circulationis per vasa capillaria cephalica, imprimis, quia paullo inferior venae insertio in cor huic opinioni plurimum fauere videtur. At vero, primo, vt experimentum succedat, supponi debet, tubos esse repletos: ergo sanguis in arterias *vacuas* numquam ascendet. Deinde, si ille quoque per aliam quamcunque potentiam non solum ascenderit, sed et capillares tubulos iam transiuerit, vt in venis suo solo pondere descendere posset: id tamen numquam propter similitudinem vasorum cum siphone sed alias ob caussas eueniet. Quia enim ratio physica experimenti in pressione

Figura 4.

aeris

aeris a grauitante humore adiuta, atque in alterutro tubo ſuperata conſiſtit; in venis autem et arteriis nullus ſeparatus aer cum atmoſphaera externa communicans, ſed aut plenitudo aut vacuum (Cap. I. §. 10.) locum habet: hinc, poſita plenitudine, ſanguis haerebit; poſito autem vacuo cordis antro poſt ſyſtolem, omnino quicquid in venis eſt, deſcendet ob grauitationem ſuam naturaliter deorſum tendentem, non autem, quia ille in tubo communicante longiore continetur. Atque his ſub limitationibus ſpecioſae *Guilielmini* argumentationes verae quidem eſſe videntur; ſed ſi ſcapham ſcapham dicere velimus, figmenta potius quam ſolida adiumenta ſunt. Quid enim lucri denique fecimus? Nihil ſane. Deſcendat enim ſanguis grauitate ſua in venis: quia ſimiliter in arteriarum tractu nulla atmoſphaerae preſſio ob allegatam cauſſam locum habet, nullus quoque ſanguis ſurſum premetur, qui deſcendentem a tergo ſequi poſſit. Vt taceamus de inſigni ſubtilitate tubulorum capillarium in cerebro, quae neceſſario per hanc preſſionem ſuperari deberet, ſi experimentum hoc ſub initium huius Paragraphi allegatum ad exponendam cauſſam tranſitus ſanguinis per vaſa ſuperiora applicari poſſet.

§. 17. Qui denique perpendit, conditionem poſitionis vaſorum perpendicularis, quae neceſſario ſupponi debet, ſi aliqua ex grauitatione vtilitas redundet, (§. 11.) adeo particularem eſſe, vt non ſolum in homine non ſemper erecto, ſed cubante, nullum locum habeat, ſed et in pluribus animalibus plane exulet; cum tamen in omni hoc caſu nihilominus ſanguinis motus aeque bene et commode procedat; quemadmodum plura animalia situm quemcunque e gr. declinationem capitis in pascuo, sine turbatione circuli *Haruciani* feliciter affectare possunt: ille penitus conuictus erit, quam parum virium in sanguinis grauitatione pro motu eius facilitando, quaerendum sit.

§. 18. Ponderatis itaque et excussis vtrinque momentis, sequentes emergunt propositiones:

1.) *Sanguis in arteriis et venis inferioribus deorsum tendit, in se vicissim grauitat, et aequiponderat* (§. 5.12.).

2.) *Sanguis in arteriis superioribus et venis inferioribus grauitate sua motum sui impedit* (§. 5.13.16.).

3.) *Sanguis in venis superioribus suo pondere, concesso loco, descendit, sed non post se trahit sanguinem arteriosum* (§. 5 16.).

4.) *Grauitatio sanguinis mutua aequilibrium producens* (§ 18.1.) *est minima*, ob basin capillarium infinite paruam, respectu altitudinis vasorum.

5.) *Grauitatio sanguinis actionem suam exserit potius in latera vasorum; quam in extremitates capillares* (§. 15.). Nam pressio grauium aestimatur ex facto altitudinis in basin: atqui in capillaribus basis est infinite parua: ergo haec pressio in basin, respectu pressionis ad latera est nulla.

6.) *Grauitatio sanguinis non potest annumerari viribus, quarum actione ille ipse in vasis inferioribus promouetur et transfunditur*; siue: *vis grauitatis ratione reliquarum potentiarum motum sanguinis generantium est nulla* (§. 7. 14.). Aequilibrium enim non producit motum, sed quietem (§. 13.).

Sectio

Sectio 2.

De actione et viribus Cordis.

§. 19. Dum in caussam, quae sanguinem ex corde expellit, inquirimus: sedulo abstinebo, ne considerando momenta hypothesium explosarum de ebullutione, fermentatione, flammula cordis etc. tempus inutiliter teram, quod meditationis genus pro peccato philosophico semper habendum duxi. Est enim modus alius magis rationalis, qui accuratius expendi meretur, et qui in actione cordis consistit.

§. 20. *Cordis* autem *actio* hac fere ratione se habet, vt ventriculorum latera, quibus cauitates illius ad plenitudinem vsque repletae terminantur, propius ad se accedant, et harum ipsarum cauitatum capacitatem minorem efficiant, quam vt pristina sanguinis quantitas in illis contineri queat: cuius effectus igitur proximus ille est, vt id, quod contineri non potest, extra cauitates cordis aliorsum exprimatur.

§. 21. Haec *actionis* idea (§. 20.) non nisi phaenomenis superstructa a nemine in dubium vocatur: sed ex diuerso considerandi modo diuersae quoque aestimationes virium illam actionem producentium obortae sunt, quas satis graphice Iurinus perstrinxit, quarumque defectus praecipuos indicauit. Ceterum si *nostra* methodus ad veritatem et naturam magis accesserit, *aliorum* sententiis damnandis ac refutandis immorari eo ipso supersedebimus.

§. 22.

§. 22. Nullus autem datur motus, qui maiorem similitudinem habet, et facilius comparari potest cum praedicta contractione cordis et inde producta expulsione sanguinis (§. 20.), quam motus fluidi intra canalem aliquem seu tubum contenti, ab vrgente embolo superficiei alterutri applicito in motum concitati. Nam dum Embolus truditur, capacitas tubi continuo minuitur, et tantum fluidi extra tubum eiicitur, quantum in spatio, quod embolus sensim sensimque occupauit ac transiuit, poterat contineri. Cum igitur quantitas fluidi expulsi dependeat praecise ab angustata tubi capacitate: perinde erit, quomodocunque capacitas minuatur, siue trudendo embolum, siue, applicando ad se propius latera canalis: et, si decrementum cauitatis aequale est in vtroque casu, eodem tempore; volumen expulsi fluidi eodem tempore etiam aequale futurum est.

§. 23. Quando embolus in fluidum oppositum agit: tum vis tota emboli quouis momento adplicita quouis momento iterum consumitur, totum fluidi volumen in motum ciendo; et quo momento embolus agere cessat, motus quoque fluidi intra canalem contenti sistitur, et sola illa fluidi pars, quae proiecta fuit, motum suum data velocitate continuat. Quando igitur motus totius fluidi per datum tempus durare debet; vis quoque illa tota, quouis tempusculo, siue integro illo tempore denuo et continuo instaurari ac repeti debet. Contra vero se res habet in percussione corporum solidorum; si enim corpus solidum, A, vi data, in aliud solidum, B, impingit, illique omnem, quo polluit, motum communicat: tunc

cor-

corpore A in quiete subsistente, nihilominus totum corpus B motum suum, pro virium excitatarum quantitate continuat. Actio igitur cordis non in percussione, vel simplici quodam ictu consistit: sed nulla commodiore et magis propria appellatione, quam *Trusionis* voce insigniri potest; quae quidem *Trusio*, *est continuata et temporibus infinite paruis per summam spatiolorum infinite paruorum repetita emboli ad fluidum (siue, facta applicatione, laterum cordis ad sanguinem) mouendum applicatio*; *et quantitas Trusionis est quantitas et summa omnium ictuum*, *quibus vis cordis per spatium datum*, *tempore dato*, *sanguinem oppositum in motum egit*. Si quis autem est, cui haec trusionis vocula non arridet, et qui *pressionem* substituere malit; illi non refragabor: modo per illam non intelligatur nuda et mortua sollicitatio ad motum, sed per quam motus actu producatur talis, qualis in data definitione nostra determinatur ac restringitur.

§. 24. Quando cor actionem suam exerit (§. 20.), illius volumen secundum omnem dimensionem decrescit; absoluta autem actione ad pristinam extensionem reducitur. Atque haec dimensionum variatio reciproca per vicissitudines aequabiliter ad sensum continuatur. Ea autem proprietas, qua fibrae certa vi dilatatae seu tensae, sublata illa vi ad pristinam figuram redeunt, non aliunde prouenire scitur, quam ex eo, quod sint elasticae. *Vis* igitur *cordis est Elasticitas cordis*.

§. 25. Quia Cordis actio in eo consistit, vt latera ventriculorum propius ad se accedant, atque iterum dimoueantur (§. 20.); *Vis ventriculi cuiuslibet est elasticitas* *laterum*; haec autem *elasticitas laterum* est *aequalis summae elasticitatum* huc conspirantium singularum *fibrarum*, *ex quibus latera* ventriculi *componuntur*.

§. 26. *Quantitatem* Virium cordis si determinare velimus: ante omnia aequiuocas et vagas significationes semouere oportet: quaestio enim triplici sensu proferri, atque in tres alias diuidi potest, quae bene inter se distingui debent, si sufficienter respondere velis. *Primum* enim problema hoc est: Quanta est vis seu elasticitas cordis absoluta; siue: quanta celeritate latera ventriculorum ad se accedunt, sublata omni resistentia? *Altera* quaestio haec est: si cor agit tota elateris sui intensitate, et sanguis expressus per medium non resistens traiici debet; quanta est illa vis, qua sanguis exprimitur? siue, quanta est celeritas, qua sanguis cordis ventriculos egreditur? *Tertius* problematis sensus hic est: si sanguis per medium resistens traiici debet; quanta est illa vis cordis, *quae sanguinem in vasis promouet*? siue, quanta celeritate sanguis mouetur in arteriis elasticis, plenis, vi cordis?

§. 27. Facile patet intelligentibus, quod sensus problematis *primi* (§. 26.) proprie inuoluat *vim* cordis *absolutam*, subiectiuam, et cordi ipsi inhaerentem, essentialiter consideratam, et ab omni effectu abstractam; patet porro, quod haec vis subiectiua maneat constans et semper eadem, mutatis vtcunque conditionibus aliunde accedentibus; patet denique, quod aequalis sit illi vi, qua sanguis iuxta sensum problematis secundi et tertii eiici debet ex corde per medium siue resistens, siue non resistens. Si igitur huius Vis seu Elasticitatis quantitas assignari posset fet mensura quadam, omnia dicta problemata facile resoluta forent. Vbi enim Vis est eadem; ibi effectus quoque idem erit quantitate, et nonnisi diuerso applicandi modo differentiens. Agedum igitur, et prosequamur, vsque dum licet institutum, inuestigando et comparando proprietates illas, quae ex speciali elasticitatis consideratione atque applicatione possint deduci. En autem sequentes.

§. 28. Fibra eadem elastica diuerso tempore varios elateris gradus possidere potest, qui quidem maxime ab eius laxitate aut rigiditate pendent. Vis autem cordis est elasticitas cordis (§. 24.): *Crescente* igitur hoc *elatere*, cuius fibrae laterum (§. 25.) capaces sunt, *aut decrescente*, *vis cordis augetur vel minuitur.*

§. 29. Fibra elastica eadem diuerso tempore magis et minus tendi ac produci potest. Idem accidere potest fibris duabus aequalibus, eodem tempore. Fibra autem tensa et producta vires maiores adquirit, quo magis producitur, et aucta elateris intensitate augetur virium quantitas. *Vis* igitur *cordis* pro tensione fibrarum suarum, siue pro intensitate elateris sui *varie intendi*, minui atque augeri *potest*; et *duo corda* fibrarum *elasticitate aequalia* eodem tempore *diuersa* elasticitatis et *virium intensitate* possint gaudere.

§. 30. Experientia constat, cordis actionem esse nunc celeriorem nunc tardiorem; nunc fortiorem, nunc debiliorem. Actu igitur euenire discimus, cuius possibilitas ex natura rei (§. 28. 29.) elucescit: quod videlicet *Vis cordis sua patiatur augmenta et decrementa.*

§. 31. Quia variante intenſitate virium cordis numerus fibrarum latera ventriculi componentium conſtans manet: vis elaſtica cordis non a fibrarum numero ſolo producitur, ſed aliunde fibris ſuperadditur. *Non igitur vis cordis eſt in ratione maſſae*, niſi ſingulae fibrae elaſticitatibus reſpectiuis et correſpondentibus, tam quoad magnitudinem et gradum elateris (§. 28.) quam quoad intenſitatem (§. 29.) aequalibus gaudeant.

§. 32. Intenſitas virium cordis ſequitur intenſitatem elateris fibrarum, ex quibus latera ventriculorum componuntur: intenſitas autem elateris fibrae ſequitur rationem virium, quibus tenditur, ſeu producitur. Quo magis igitur ventriculorum latera a ſe inuicem remouentur, eo maior eſt vis, qua ad ſeſe accedere nituntur. In eo autem temporis puncto, quo fibra tenſa a vi producente ſibi relinquitur, vis producens omnium antecedentium eſt maxima, hinc et intenſitas elaſticitatis omnium praecedentium maxima. Quapropter, quando *in ſyſtole Cor* agere et contrahi incipit, *celeritate maxima mouetur*, quam intenſitas elateris in antecedente diaſtole concipere poterat.

§. 33. Si vires, quibus latera producuntur, tantae ſunt numero vel quantitate, vt, ſi fibrae tenſae vlterius producerentur, elaſticitatem ſuam plane amitterent: erit ille gradus intenſitatis ſummus; ſiue, tunc erit *vis cordis* omnium poſſibilium *maxima*. Si contra vires tendentes tam exiguae ſunt, vt, ſi vlterius minuerentur, plane nulla laterum productio oriretur: erit ille *gradus* intenſitatis *minimus*. Similia accidunt, ſi fibrae aut ſumme robuſtae ſunt, funt, aut fumme debiles, vnde gradus elafticitatis maximus aut minimus oritur (§. 28.).

§. 34. *Cor* femper *agit vi tota*, *qua animatum* feu vigoratum *eft*: Sed non gaudet femper elatere, cuius capax eft, (§. 28.) maximo aut minimo; neque agit femper elafticitatis, quam poffidet, intenfitate omnium posfibilium maxima aut minima (§. 29. 33.); imo fortaffe numquam ad hos duos gradus extremos peruenitur, nifi in acutiffima febre, et in articulo mortis.

§. 35. Ex hactenus defcripta (§. 25 - 34.) Cordis *Elafticitate* fecundum omnes fuas proprietates et circumftantias confiderata haec emergit Vis fubiectiuae (§. 27.) et abfolutae definitio: *Eft Vis cordis in ratione compofita ex numero fibrarum confpirantium* (§. 31.), *quantitate Elateris* (§. 28.), *et intenfitate eius* (§. 29.). Quemadmodum vero nulla vis fecundum effentiam fuam et genefin confiderata menfuram admittit, fed haec demum ex comparatione effectuum obtinetur: ita etiam praefens noftra virium Cordis defcriptio ad vlteriorem aut vberiorem cognitionem viam non aperit. Nemo enim numerum fibrarum elafticarum, nemo magnitudinem aut intenfitatem Elateris, faltim generaliter, affignare poteft, vt cum effectibus inde fequentibus comparatio inftitui poffit. Praeterea in fibris elafticis fibi relictis actio Elateris tota eft fubita et quafi momentanea eft igitur *actio cordis libera*, abfoluta, fiue *congreffus* laterum, fublatis omnibus refiftentiis *momentaneus*, vt nullam temporis rationem in hoc negotio habere liceat. Iftiusmodi igitur proprietates, etfi fcopo noftro quodammodo

 fauent,

fauent, certe non satisfaciunt. Quapropter videamus, quo. vsque in indaganda virium aestimatione per *effectus* penetrare possimus.

§. 36. *Effectus* autem *proximus* is est, vt sanguis in ventriculi cauitate contentus extra illam protrudatur (§. 20.); qui quidem iam eiectus aut cursum suum emetitur per medium non resistens, aut corporibus resistentibus (§. 26.) obiicitur. Illam *Velocitatem* sanguinis, qua per medium non resistens, transfertur, dicemus velocitatem *absolutam*; alteram vero, velocitatem *respectiuam*.

§. 37. In huius celeritatis *absolutae* (§. 37.) aestimatione perpendenda potissimum occurrunt sequentia. 1.) *Capacitas ventriculi*, et *Massa sanguinis* quae omnino tanta assumi potest, quanta in ventriculo non ad summum gradum (§. 34.) extenso continetur. 2.) *Sectio orificii*, per quod illa Massa eiicitur. 3.) *Tempus*, quo *motus* cordis absoluitur; quibus quidem datis, celeritate ista sanguinis absoluta determinatu nihil facilius est. Consideretur
Figura 5. enim Massa sanguinea in ventriculo contenta, tamquam figurae regularis, cuius volumen efficiat cylindrum datae altitudinis a ac diametri siue sectionis $d = a\,d$. Quia motus sanguinis ex ventriculo cordis in aortam sequitur leges motus fluidi in cylindro vi emboli trusi (§. 22.), erit *Celeritas sanguinis* per orificium fluentis ad velocitatem eius in ventriculo *in ratione sectionum reciproca*: et volumen illud cylindricum in ventriculo $= a\,d$ mutabitur exeundo per orificium, in volumen aliud $= \alpha\,\delta$, cuius basis est sectio orificio $= \delta$, altitudo autem $= \alpha = \frac{a\,d}{\delta}$ in ratione directa voluminis cylindrici intra ventriculum, et inuersa sectionis

nis orificii. *Celeritas* igitur *totius massae sanguineae extra cor proiectae* ea est, vt in tempore, quo cor contrahitur emetiatur spatium $= ad:\delta$, quod est ad altitudinem cylindri sanguinei in corde, vti est huius cylindri sectio ad sectionem orificii; et *vis cordis* (§. 35.) *tanta* est, *quanta* requiritur, vt massa proiicienda cum dicta celeritate feratur.

§. 38. Sed haec omnia (§. 37.) nimis generalia sunt, et calculum istum numero determinato, et cum phaenomenis naturae congruente exprimere, omnino impossibile. Quamuis enim primo loco videatur, massam eiiciendam assumi posse tantam, quantam ventriculus non ad summum gradum tensus capit: id tamen pro certo affirmare non licet; quia non constat, an contractio laterum absoluta, sublatis omnibus resistentiis exercita omnem plane cauitatem tollat? multo minus experimentando res in tuto collocari potest. Deinde nec tempus sciri potest, quo motus iste absoluitur. Quemadmodum enim dici non potest, illum fore momentaneum, pari modo, ac si latera coeuntia nullam resistentiam (§. 35.) paterentur: ita nec tempori, quo systole talis, qualis in corpore animali reperitur, peragitur, aequiparari potest. Sola sectio orificii patet scrutinio anatomico, quae quidem ibi quaeri debet, vbi valuularum semilunarium radices sunt applantatae, et semper constans manet, quia sanguini exeunti nihil resistere supponitur.

§. 39. Fac autem conditiones in hoc casu secundo (§. 37.) omnes esse datas: dolendum tamen est, illum a natura abhorrere. Non enim sanguis e corde proiectus vacuum

vacuum transilit; ſed ſtatim, atque orificium egredi annititur, pluribus reſiſtentiis obiicitur. Praecipuum igitur *Problema* (§. 26.) *de* determinanda *celeritate* ſanguinis *reſpectiua* adhuc remanet; quod quidem eo difficilius reſolutu ſemper fuit, quo minus illarum *reſiſtentiarum* menſura cognita fuit; ſine qua tamen in aeſtimatione virium per effectus multum proficere impoſſibile eſt. Videlicet Cor in ſanguinem arterioſum non agit immediate, ſed portioni tantum intra ventriculos ſuos contenti atque exeunti motum certum imprimit, qualem concipere (§. 37.) docuimus, et qui deinde cum reliqua maſſa extra cor ſubſiſtente communicatur. In aeſtimando autem motu portionis exeuntis non ſolum denuo ad omnia illa adtendendum eſt, quae (§. 37) monuimus, et conſtantia manent; ſed praeterea id, quod differentiam inter motum eius abſolutum et reſpectiuum (§. 36.) conſtituit, cognitum eſſe, et omnium *reſiſtentiarum* differentiam iſtam conſtituentium exacta *ſcientia* haberi debet.

§. 40. Ante omnia autem ſollicitos nos eſſe oportet, *quaenam* illa obiecta ſint, quae verae *reſiſtentiae* dici poſſint, ne de non-entis alicuius affectionibus verba facere videamur. Et inter has quidem absque omni dubio primo loco *valuulae ſemilunares* ad principia arteriarum collocatae (Cap. I. §. 15.) conſiderandae ſunt; quae quidem non ſui ipſarum mole reſiſtunt, ſed eatenus exitum ſanguini truſo negant, quatenus ſanguis in aorta contentus, et ab antecedente arteriae contractione valuulas verſus directus his ipſis inſiſtit, et ſuo pondere (§. 18. n. 2.) ſibi apprimit.

§. 41.

§. 41. Inter *resistentias* cordi obiectas porro numerari solet *omnis* reliqua *massa sanguinea* in omni *arteriarum* tractu delitescens: adeo immisericordes fuere hactenus Virium aestimatores, vt tantum oneris mouendi exili cordis potentiae hactenus imponerent. Siquidem isti fere omnes, (si *Morlandum* excipias, cui tamen id *Iurinus* vitio vertere velle videtur) tamquam indubitatam veritatem assumserunt, actione cordis totam massam sanguinis arteriosam eodem tempore in motum cieri, et sanguinem propterea systoles tempore in venas traiici. Equidem in Capite primo (§. 36. 37. 43.) adstruere conatus sum, sanguinis transfusionem ex arteriis capillaribus in venas non fieri tempore systoles cordis, vnde sequeretur, actionem cordis non esse illam, quae totius massae sanguinis arteriosae motum immediate producat, non igitur vim cordis necessario esse tantam, vt huic motui producendo par sit. Quodsi praeterea considero: contrariae sententiae Fautores illam aut precario assumere, aut argumentis quidem, at plane non idoneis, qualia Bellinus suppeditauit, fulcire; neque minus illa posita omnem rationem tolli, quare aut arteriae dilatentur, aut quare arteriae et venae non simul, imo venae prius et tum arteriae dilatentur, et sanguis eodem tempore quo ventriculum sinistrum exit, non in dextrum (Cap. I. §. 41.) delabatur? Haec mea sententia, quod *non totus sanguis arteriosus actione cordis moueatur eodem tempore*, etsi nondum plenarie euoluta aut mathematice demonstrata; tanta tamen euidentia radiat, vt facile auderem illam pro principio in sequentibus adhibere. Sed ne molestus eiusdem rigorosis quibusdam examinatoribus; malo illam, vt nondum iudicatam relinquere, et ex vlterioribus meditationibus circa modum, quo sanguis e corde proiectus sanguini arterioso motum communicat, tamquam corollarium deducere.

§. 42. De *arteriis* non satis conuenit inter scriptores. Alii enim similiter illas numerant inter *resistentias*, cordis viribus obiectas, et impedientes, ne sanguis vbique eadem celeritate progrediatur: alii autem in ipsis inueniunt principium motus sanguinis continuandi. Proueniunt sine dubio propositiones istiusmodi contrariationis speciem prae se ferentes, ab ideis vagis, ne dicam, falsis. Studeamus igitur singulis terminis assignare valorem suum iustum ac determinatum.

§. 43. Quodcunque corpus A alii corpori B, siue moto, siue ad motum vi quacunque sollicitato ita obiicitur, vt aut huius B motus minuatur, aut plane cesset, manente aut mutata eius directione, illud corpus A huic corpori B resistere dicitur. Haec resistentia corporis A proficiscitur a conatu in statu suo perseuerandi, qui conatus motui corporis B contrarius a physicis plerumque vocatur *Reactio*. Atque haec reactio semper aequalis est actioni siue quantitati impetus, quam corpus in obiectum irruens consumit, illam resistentiam superando. Quodsi igitur latera arteriae sunt *rigida*, vt reactio illorum aequalis sit toti pressioni, quam sanguis exercet; in hoc casu arteria quidem quam maxime resistit, sed tamen ita, vt non nisi directio ad latera mutationem patiatur, motus autem progressiuus nullam plane celeritatis iacturam (sepositis frictionibus) faciat. Haec igitur *resistentia*, quae in illo temporis momento locum habet, quando arteria satis dila-

dilatata (§. 33.) eſt, non niſi *imaginaria* eſt; quod quidem Dynamices gnaris absque vlteriore deductione luculenter patet. Sint autem latera arteriae *elaſtica*, determinata quadam vi producenda: tum illa irruenti ſanguini tam diu reſiſtunt, donec vis elaſtica a vi illa determinata ſuperata fuerit; quo facto extenduntur, cedunt, et fugiunt quaſi ſanguinem. Haec igitur *laterum extenſibilitas* ſiue vis elaſticae oppreſſio pro *reſiſtentia* et reactione *vera* haberi meretur, partim, quatenus in cauſa eſt, cur ſanguis directionem ſuam verſus latera retineat, et progreſſum verſus extremitates arteriarum negligat aut ſuſpendat, partim, quatenus portio determinata virium extendendis lateribus conſumitur, et ſanguis corde expulſus minore maſſa et minore celeritate, id eſt, tota impetus quantitate, quam a cordis impetu conceperat, diminuta progrediatur. Sin latera extenſa *in* ſui *reſtitutionem* nitantur, et hinc non modo reactione ſua totalem ſanguinis impetum deſtruant, ſed etiam *exceſſu virium* elaſticitatis illi nouum *motum imprimant*, tunc adeo nullam reſiſtentiam in hoc caſu fingi aut concipi oportet, quin potius haec *reactio* pro *adiumento* motus circulatorii haberi debeat. Denique, quia aliunde, vt demonſtratum aſſumitur, vaſorum capillarium anguſtias magnam remoram obiicere fluido tranſeunti, vaſa autem arterioſa in extremitatibus ſuis adeo anguſta ſunt, vt vix vnico ſanguineo globulo minimo ſimul tranſitum concedat: igitur haec extremitatum *anguſtia* inter *reſiſtentias* ſanguini arterioſo obiectas ſemper *habita* fuit. Atque hanc quidem *normam* in ſequentibus ſeruandam putem, ſi veram *virium* reſiſtentium *aeſtimationem* inuenire velimus. Sed ad rem propius accedamus.

§. 44. *Resistentiam* igitur *primam* (§. 40.) sanguini extra cor proiiciendo obiiciunt *valuulae* cum super incumbente sanguine, cuius quidem vis dupliciter considerari potest, quatenus suae propriae massae pondere resistit, et quatenus ab aorta in sui contractionem nitente valuulis apprimitur. Huius autem molis quantitas assumitur tanta, quanta comprehendi concipitur sub basi, quae aequalis est sectioni aortae proxime ad valuulas, et sub altitudine a valuulis vsque ad summam arteriarum cohaerentium fastigium mensurata. Etsi enim tanta praecise quantitas valuulis actu non incumbat: tamen, quando ista massa vt quiescens et non nisi suo pondere resistens supponitur, huic *mensurae indicatae*, quae in omnibus fluidis grauitantibus obseruatur, necessario locus concedi debet.

Figura 6. §. 45. Dum valuulae clausae *a* sibi inuicem accumbunt, illarum orae *b* triangulum formant, et a *lateribus* aortae *d* quam longissime distant. Est igitur *illarum* inclinatio ad aortam minima, et angulus incidentiae filorum sanguineorum valuulis insistentium ACB *acB* maximus, hinc et pressio illorum maxima. Concipiatur iam valuula propius ad aortam accedere, et eius inclinatio
Figura 7. crescere, vt in ACD: tum Basis Cylindrica (§. 44.) dicta diminuitur in ratione, quae est vt CB (=CD): ED; neque minus pressio sanguinis deorsum pellens valuulam eleuatam CD, est ad pressionem, qua valuulae infimo loco positae CB innititur, in ratione CF (=ED): CD et similiter decrescit. Quo magis igitur valuulae aperiuntur, eo minus resistentiae ab incumbente cylindro sanguineo patiuntur. Et hoc *resistentiae decrementum* aestimari

potest

potest *in ratione quadrata sinuum* E D *angulorum inclinationis* E C D.

§. 46. Haec ex *vna* superficie (§. 45.) valuularum accidunt. Videamus, quid fiat ex *altera*. Sunt autem per omnia eadem. Quo magis valuulae eleuantur, eo minus sanguinis impetu directo in illas impingere potest. Decrescunt enim similiter bases CF, C*f*. in ratione eorundem sinuum angulorum inclinationis E D (§.45.). Porro, quo propius valuulae inclinantur ad arteriarum latera, eo debilior etiam fit impetus sanguinis in illas, seruando itidem rationem (in quacunque virium hypothesi illam aestimare velis) quantitatis sinuum eorundem angulorum. Quo magis igitur valuulae aperiuntur, eo minus virium ad illas eleuandas applicatur. Figura 7.

§. 47. Quamuis autem resistentia a sanguine valuulis inclinationem suam mutantibus (§. 45.) incumbente producta minuatur: tamen non putandum est, hoc resistentiae decrementum inferre totalem eius abolitionem. *Sola applicatio* hic mutatur. Dum enim valuulae aperiuntur, a se inuicem discedunt, et foramen quoddam formant, per quod sanguis aut ex ventriculo in arterias, aut ex ventriculo in arterias, aut ex his vicissim in ventriculum labi possit. Quantum igitur basis columnae sanguineae valuulis insistentis decrescit; tantum accedit basi columnae, quae huic fienti foramini insistere fingi debet.

§. 48. *Resistentia* igitur, sanguini extra cor prorumpere nitenti, *a massa* istius columnae (§. 44.45.) *opposita semper manet eadem*, et aequalis ponderi cylindri sanguinei, cuius mensuram (§. 44.) indicauimus.

§. 49. Similiter, quamuis impetus sanguinis in valuulas irruentis diminuatur, partim ob decrementum massae allabentis, partim ob mutatum angulum incidentiae (§.46.): non tamen inde totalis quies infertur. Quo magis enim valuulae a se discedunt inuicem, eo maius foramen in sui medio relinquunt. *Quo minus* igitur *sanguinis in valuulas irruit, eo plus per foramen amplificatum erumpere* conatur.

§. 50. Quia autem valuulae aperiuntur sensim, siue quia non in instanti foramen illud (§ 47.) fieri supponitur: *Sanguis* concipi potest, quasi *erumpat* per illud *sub forma*
Figura 8 *pyramidis* cuiusdam triangularis, cuius latera sunt quodammodo concaua. Neque sectio huius pyramidis Fig. 8. melius comparari potest, quam cum sectione gladii cuiusdam tripennis. Qualis autem sit ratio inter diuersas eius diametros, id quidem scitu difficilimum, imo plane impossibile est; siquidem illius infinitae variationes esse possunt,
Figura 9. ex. gr. A. B. C. D quarum determinatio partim a quantitate virium cordis, illarumque applicatione, partim a flexilitate valuularum, partim a constitutione aortae tam quoad eius elasticitatem, quam capacitatem, dependet, et quae per experimenta nullo modo indagari aut definiri potest.

§. 51. Patet ex propositis (§.44-50.), *Vim cordis* (§. 35.) per effectus consideratam (§. 39.), generaliter dici posse *tantam*, *vt sanguis in Corde contentus et expulsus certam velocitatem* (§. 37.) *nanciscatur*, *qua pars feratur in valuulas* (§.44.), *illasque superato pondere incumbentis sanguinis ad latera aortae admoueat*, *pars vero per rimam datam intra columnam sanguineam tamquam cuneus traiiciatur*, *et diuerticulum sibi efficiat*. Nondum licet

licet determinare ſtrictius, *quale* ſit illud diuerticulum, et quomodo fiat? nondum enim reliquas reſiſtentias omnes examinauimus. Interim operae pretium videtur, *methodum* qua haec omnia peraguntur, quantum licet, propius examinare.

§. 52. Diximus (§. 50.), ſanguinem e corde prorumpere per datam valuularum rimam *ſub forma pyramidis* cuiusdam. Haec autem rimula ſub initium motus neceſſario quam minima eſt, vt non niſi guttula ſola, apicem pyramidis conſtituens transmittatur. Iſta ſanguinis guttula impetum facit in ſanguinem arterioſum quieſcentem velocitate data, et duos imprimis effectus praeſtat, partim vt guttulas ſanguineas in prima ſectione f. 10. 1. aortae contentas dirimat, partim, vt ſeruata directione ſimiliter per ſectionem ſecundam, tertiam &c. viam ſibi paret, idque tam diu, donec vires ſuae abſumtae ſunt. Videmus enim, ſi in vas fluido repletum, aliud fluidum homogeneum ex altitudine data guttatim decidat, illud non in ſuperficie in momento contactus cohaerere, ſed ad certam quandam profunditatem pertingere, donec vis ſua cadendo ſub finem lapſus acquiſita iterum euaneſcat. Figura 10.

§. 53. Dum igitur *prima* ſectio diuiditur, omnibus globulis in area ſectionis illius contentis motus communicatur, et dum locum cedere irruenti globulo coguntur, ſibi ipſi nouum ſpatium, quo ſe proripiant, quaerere annitantur. Exercent autem preſſionem tam ad latus aortae, quam in ſuperincumbentem ſanguinis maſſam, a quibus viciſſim duplicem reactionem patiuntur. Etiamſi autem ſuperincumbens maſſa non niſi ſuo pondere reſiſtat, Figura 11.

et

et tamquam vis mortua absque vlla velocitate consideranda sit: tamen, quia (sublata extensibilitate arteriarum) vi impenetrabilitatis suae (Cap. I. §. 6.) illa loco cedere non potest, quin et totalis massa sanguinis tam arteriosi quam venosi antecedens simul promoueatur; non modo prima illa pyramidis guttula, sed et tota sectio respectu massae sanguineae vniuersae, pro infinite parua, et vis sua, qua columnam reliquam impetit pro nulla, aut certe non pro tanta haberi potest, quanta ad superandam reactionem requiritur. Columna igitur ipsa in hoc casu immota persistit. At vero longe alia ratio est inter aream primam sanguineam, et sectionem lateris elastici aortae ipsius. Quia enim aorta plena vbique est, et hinc perimeter ipsius sanguini vbique arcte accumbat; nullum punctum in illa perimetro concipi potest, quod non ab accumbente sanguine pressionem sustineat. *Vis* igitur *omnis*, *quam area ista a prima guttula concepit*, *in extendenda perimetro aortae consumitur*, quae extensa locum concedit guttulae, quem superincumbens massa denegabat.

§. 54. Quae huic *primae* guttulae (§. 52.) circa primam sectionem (§. 53.) accidunt; ea omnia, ceteris paribus in *secunda*, *tertia* etc. Sectione repetuntur, eousque, donec omnis guttulae vis sit consumta. Neque putandum est, postquam haec guttula primam sectionem transgressa fuerit, perimetrum aortae statim iterum contrahi atque coarctari. Dum enim immediate proximae pyramidis guttulae antecedentem primam a tergo insequuntur, illae diametrum aortae iam dilatatam non solum in eo statu seruant sed etiam pro ratione quantitatis vlterius dila-

dilatant; quod omne de reliqua pyramidis portione, verum esse putandum est. Haec autem dilatatio laterum aortae tam diu durat, donec aut vis sanguinis irruentis ipsa minuatur, aut aorta vlteriorem expansionem non ferat, sed elatere suo speciem rigiditatis induat, aut vtrumque fiat, et proiectioni sanguinis terminus figatur.

§. 55. Missa autem ista consideratione, aliqua etiam ponderatione opus est *moles sanguinis quauis systole e corde proiecti.* Plerique scriptores physiologi, circa determinationem virium cordis occupati, quantitatem sanguinis in ventriculo contenti et eiecti vnam eandemque audacter statuunt, et in calculis suis vnciam vel vnam vel duas adhibent, et hinc ventriculos totaliter depleri aut aperte affirmant, aut tacite supponunt. At vero fateor mihi omnia suspecta videri et dubia, quae in istiusmodi rebus nondum satis expositis, absque demonstrationibus ac precario pro veritatibus stabiliuntur. Nemo igitur vitio mihi vertet, si hypothesin istam, quae quantitatem sanguinis eiecti ad capacitatem ventriculi mensurat, falsitatis arguere audeam. Non nego, omnem sanguinem in ventriculo contentum in motum ciri, id enim ex natura systoles (§. 20. 22.) necessario sequitur; sed de eo dubito, *an omnis ille sanguis* etiam *vnica systole exterminetur?*

§. 56. Nondum quidem locus est, integram demonstrationem veritatis, quaecunque illa denique fuerit, hic intexere: quia tamen nihil eorum in hoc capite omittendum censeo, quae ad mensuram virium cordis quodammodo facere possunt; relictis iis, quae de intensitate illarum (§. 28-35.) dicta huc transferri possent, vnicum momentum indi-

 cabo,

cabo, quod consideratio memoratae pyramidis (§. 50.) sanguineae nobis suppeditat. Supponimus nimirum, vim sanguinis e corde irruentis tantam, vt resistentias tam a grauitatione columnae sanguineae, quam aliunde obortas vincere possit. Non dubium est, quin haec duo in se inuicem reagentia (§. 40-43.) sub finem systoles ad aequilibrium primo reducantur, mox vero impetus ille sanguinis a resistentiis dictis vicissim superetur. Quodsi igitur vel maxime probaueris, ventriculorum latera exactissime claudi tempore systoles: cessante tamen illa nihil est, Figura 12. quod sanguinem *a* intra limites valuularum *b* consistentem vlterius protrudere possit. Quapropter si nullus alius, *ille* saltim *sanguis tempore diastoles in ventriculos relabitur.*

§. 57. Diu fateor haesit meditatio nostra circa vnicum hunc angulum (§. 40.); quae tamen vel hoc solo nomine fertilissima dici meretur, quod tam foecundas et omnino vtiles considerationes nobis suppeditauit: *siquidem* inter alia denuo luculenter patet tam necessitas quam ratio iam aliquoties allegati phaenomeni *Harueiani* (Cap. I. §. 18.); quod nimirum in momento systoles cordis aorta proxime applantata dilatetur, vnde iam diuerticulum illud (§. 51.) quadantenus innotescit. Quamuis autem facile concedam, naturam multo citius negotium suum absoluere, quam nos aut cogitando aut scribendo legendoue assequi valeamus: hoc tamen etiam neutiquam erit diffitendum, illam, etsi velocissime, non tamen per saltus, sed pedetentim procedere, et hinc eo cautiores pedissequos poscere, quo facilius in tanta festinatione ab ipsius via vera declinare, et in errorum labyrinthum delabi possimus.

ſimus. Iam vero promoueamus pedem aliquantulum, et preſſius inſiſtamus arteriarum dilatationi, indagaturi, *quousque illa eodem ſyſtoles ſynchronismo ſecundum tractum ramorum terminetur?* Ad hanc enim quaeſtionem ſi ſufficienter reſpondere poſſimus, facile erit diiudicatu, quomodo diſputatio illa (§. 41.) de quantitate maſſae a corde mouendae, dirimi debeat. Ad quem ſcopum vt pertingamus, duo imprimis problemata ſimul nobis enodanda occurrunt, quae autem omnia mirifice inter ſe cohaerent; nempe: *an arteriae omnes et ſingulae in toto corpore ſimul dilatentur, vi eadem cordis vnica? et quanta in genere dilatatio eſſe ſoleat?*

Sectio 3.

De actione Arteriarum.

§. 58. Sepoſita tantisper quaeſtione prima reſpiciamus ad alteram; *quanta* nimirum *dilatatio* eſſe ſoleat? Sine omni dubio generatim reſpondendum eſt, illam eſſe *tantam, quanta requiritur, vt moles ſanguinis e corde proiecti locum ſufficientem nanciſcatur* (Cap I. §. 17.). Quodſi igitur arteriae omnes ſimul pulſant eodem temporis momento, quo, vi cordis, iſte ſanguis proiicitur: neceſſario nulla arteria eſt, quae non aliquantam illius maſſae portionem intra cauitatem ſuam tum temporis dilatatam recipiat. Sanguis igitur proiectus, ceteris paribus, per totum ſyſtema arterioſum aequaliter diſtribuetur. Quodſi igitur data fuerit quantitas proiecti ſanguinis, maſſaque ſanguinis arterioſi, et arteriarum capacitas: quantitas quoque dilatationis, ſiue differentia diametrorum non difficilis erit determinatu.

§. 59. Liceat autem loco infinitarum diuiſionum aortae aſſumere vnum canalem arterioſum, eiusdem vbi-que capacitatis, et tantae longitudinis, quanta requiritur, a tota maſſa ſaguinis arterioſi; quod ad calculum facili-tandum nemo non concedet. Porro aeſtimabimus maſſam ſanguinis arterioſi, quando arteriae in ſtatu dilatato eſſe concipiuntur, ad minimum quinque librarum, ſiue $= 60$ vnciam; vncia autem ſanguinis occupat ſpatium $1\frac{1}{2}$ digi-torum. Sunt igitur vnciae ſanguinis $60 = 90$ digit. $= 90000$ lin. Diameter aortae dilatatae iuxta pleraſque obſeruationes eſt $= 10$ lin. erit igitur ſectio eius $= \frac{314}{4}$ lin. et conſequenter longitudo canalis arterioſi, qui quinque li-bras ſanguinis continet $= 1146\frac{156}{314}$ lin. $= 11$ ped. 4 dig. $6\frac{156}{314}$ lin. quae longitudo, ſiue arteria dilatetur, ſiue con-trahatur, conſtans eſt, vt cuiuis attendenti facile patet. Quodſi iam concedere velim, quod maſſa ſanguinis pro-iecti aequalis ſit duabus vnciis (§. 56.): erit maſſa ſanguinis arterioſi, tempore contractionis $= 60$ vnc. $- 2 = 58$ vnc. $= 87000$ lin. et differentia diametrorum $= 10 - \sqrt{96\frac{4}{9}}$ lin. $= 10 - 9\frac{4}{5}$ lin. quam proxime; ſi vero maſſam ſanguinis proiecti vnciae aequalem ponas, quod magis veroſimile eſt, erit differentia diametrorum $= 10 - \sqrt{98\frac{1}{3}} = 10 - 9\frac{24}{25}$. lin. Sin denique vna ſyſtole dimidiam vnciam proiici ſtatuas, quod omnium maxime probabile eſt: differentia diame-trorum vix erit aſſignabilis.

§. 60. Quis autem eſt, qui non primo quoque obtutu videat, hanc differentiam, quae in primo caſu vix $\frac{1}{5}$ lineae, in altero circiter $\frac{1}{25}$ lineae, in tertio vero propemodum ni-hilo aequalis eſt, adeo paruam eſſe, vt plane non reſpondeat

ideae,

ideae, quam communiter de pulſu et dilatatione arteriarum concipimus. Si enim conſideramus vehementiam pulſus in arteriis carpi, et temporum, quae propemodum minimae ſunt illarum, quas tactu explorare ſolemus; harum ipſarum ditatio maior omnino eſſe videtur. Quodſi autem vaſa minora iſtum terminum transgrediuntur, quanto magis vaſa maiora ampliabuntur. Non igitur erramus, ſi differentiam diametrorum canalis arterioſi contracti et dilatati vni lineae aequalem ponamus. Quapropter ſit diameter minima canalis arterioſi $= 9$ lin. erit ſectio eius $= \frac{25434}{400}$ lin. quae ducta in longitudinem ſupra indicatam $= 1146\frac{156}{314}$ lin. dabit maſſam ſanguineam in arteria contracta contentam $= 72900$ lin. $= 72\frac{9}{10}$ dig. differentia igitur maſſarum erit $= 17100$ lin. $= 17\frac{1}{10}$ dig. $= 11\frac{2}{5}$ vnc. ſanguinis, quae aequalis eſt portioni ſanguineae, quae vna ſyſtole in aortam proiici debebat. Iam vero magis vero ſimile eſt, in tractu arteriarum multo plus ſanguinis contineri, quam quinque libras et fortaſſe non erraueris, ſi illam maſſam decem libris aequalem ſtatuere velis; in quo caſu, ſi diameter aortae ſit $= 10$ lin. erit longitudo canalis arterioſi $= 22$ ped. 9 dig. $2\frac{312}{314}$ lin. Sit autem diameter minor $= 9$ lin. tum ſectio arteriae $= \frac{25434}{400}$ ducta in hanc longitudinem dabit volumen ſeu maſſam minorem ſanguinis $= 145800$ lin. quae quantitas a decem libris ſeu 120 vnciis $= 180$ dig. $= 180000$ lin. ſubducta, relinquet differentiam $= 34200$ lin $= 34\frac{1}{5}$ dig. $= 22\frac{4}{5}$ vnc. ſang. At vero cum impoſſibile ſit, (ſiue iam quinque ſiue decem libras ſanguinis in arteriarum tractu contineri aſſumſeris,) vt vel maximum, quod homini dari poteſt, cor tantam quantitatem ſanguinis, nimirum vncias vndecim aut viginti duas capere, nedum in aortam traiicere queat, et praeterea a vera massa, quanta probabiliter (§. 56.) transfundi potest, vehementer differat: haec tria necessario inde sequuntur: *Aut* enim *pulsus et dilatatio arteriarum non fit in omnibus arteriis simul*; *aut idea pulsus*, *qualem hactenus vulgo concepimus*, *falsa est idea*; *aut hoc vtrumque locum habet.*

§. 61. *Pulsus*, definientibus ita praecipuis scriptoribus, *est perceptio impetus arteriae in digitum tangentem*; aestimamus huius impetus quantitatem ex robore et impressione, quam in partem tangentem fieri persentiscimus. Absit, vt negem phaenomenon; omni iure differentiam diametrorum arteriae contractae et dilatatae vni lineae aequalem supra (§ 60.) posuimus, ita enim reuera apparet: sed caussam phaenomeni vt admittam, vix mihi patior persuaderi. Videlicet, aut arteria tota pulsat, aut pars eius; vtroque modo potest obtineri effectus idem, phaenomenon idem. Demonstrauimus autem (§.60.), si pars arteriae pulsat, hoc est, si latera eius diducuntur, hanc apparentem diametri augmentationem impossibilitatem inuoluere. Non igitur solum latus arteriae esse potest, cuius impetum digitus tangens sustinet, sed in ipsa arteria tota quaeri effectus et phaenomeni ratio debet, id igitur, quod pulsare sentimus, non est nisi arteria tota, loco suo mota, et digito exploranti propius applicita. Quibus rite perpensis apprime fauet ipsa arteriarum figura, quae tortuosis flexionibus suis vbique mire se insinuant, et in quas irruptio sanguinis potissimum fieri debet. Quando igitur sanguis in arteriam
Figura 13. intruditur, canalis ABCDE turgescit, et figuram aliam

AβC,

A β C δ E induit, ſi vero pulſum exploras in β, non putandum eſt, diametrum canalis A B C a B creuiſſe vsque in β; ſed potius totum vas translatum eſt ex A B C in A β C, et ex C D E in C δ E; et viciſſim, quando vas iterum reſtituitur, ex A β C δ E in ſitum A B C D E denuo transfertur. Atque haec reciproca arteriae translocatio motum quendam vibratorium, et micationem producit; quae pro varia arteriarum poſitione ac vicinia efficit, vt vas vibrans hic in ſitu A β C, illic in ſitu A B C ſentias, hic igitur productio, illic reſtitutio arteriae perceptionem pulſus tibi ingeneret.

§. *62.* Hactenus (§. 58-61.) *ſimultaneum* omnium arteriarum *pulſum* ſuppoſuimus: videamus, quatenus haec hypotheſis admitti poſſit. Arterias ſingulas ſimul dilatari qui autumant, ad experientiam prouocant, iudicem in hoc caſu non tam fallacem, quam minus intelligibilem. Certe interualla pulſationum adeo breuia ſunt, vt indubia experimenta capere res praeceps ſit ac difficilis. Non igitur hoc argumentandi genus ita perfunctorie admittendum eſt, niſi certus ſis, obſeruatorem omni poſſibili cautela vſum fuiſſe; quamquam, ſi in animalibus viuis experimenta inſtituere velis, velocitas pulſus beſtiae ligatae et anhelantis omnem fere diligentiam eludat, vt hac methodo parum proficere poſſimus. Iam quod ad me attinet, illa ipſa experientia in meo corpore capta conuictus in ſententiam contrariam trahor; deprehendo enim ex. gr. pulſum arteriae iugularis non eſſe ſimultaneum cum pulſu arteriae carpi. Quia autem ex noſtra deſcriptione pulſationis (§. 61.) accidere poteſt, illam tunc quoque ſentiri poſſe, quando arteria

in

in priſtinam ſuam figuram reſtituitur: ſequitur ex hac differentia temporis nihil certi poſſe concludi. Qui vero tempus ſyſtoles cordis et pulſus arteriarum inter ſe conferre ſatagunt, ſimiliter rem ſumme arduam adgrediuntur, quia arterias in puncto pulſare, cor autem motum protractiorem exercere perſentiſces, nec quodnam punctum ſyſtoles puncto pulſationis reſpondeat, facile determinaueris. Certum eſt quidem, momentum illud temporis, quo apex cordis latera pectoris ferit, non coincidere cum appulſu arteriae carpi aut carotidis: ſed eo ipſo, quia ſyſtole cordis non fit in inſtanti, nec ergo ſciamus, an illud momentum ſit principium, an medium, an finis ſyſtoles; inde inferre non licet, ſyſtolem cordis et pulſum arteriarum non eſſe ſimultaneum; quemadmodum viciſſim ex ſimultaneitate ſyſtoles et pulſus ex. gr. arteriae carpi non ſequitur, quod cor ſanguinem vsque ad arteriam illam eodem momento in motum cieat, quia alia quaedam cauſſa huius ſimultaneitatis, ipſa videlicet variata *pulſationis* perceptio, ſubeſſe poteſt. Interea, quia tempora interuallorum, queis tam pulſationes inter ſe, quam ſyſtole et pulſationes differunt, non adeo inſignia ſunt, vt alternatiua et vtrinque aequali menſura ſe inuicem ſubſequantur; quia etiam arteriarum ſociarum, ex. gr. carotidum, in carpo, temporibus, pede, pulſatio exacte correſpondent, quod fieri non poſſet, niſi ab vna eademque potentia communi vrgerentur; quia porro accelerato aut retardato motu cordis pulſationes arteriarum coincidentes eodem momento ſimiliter accelerantur aut retardantur, quod ſimiliter non fieri poſſet, niſi ſanguis in arteriis immediate a corde impelleretur: *veroſimile eſt* omnino, *pulſum*, *etſi non eodem*

tempo-

temporis momento, tamen eodem vnius systoles synchronismo per omnem arteriarum tractum continuari. Denique sanguis grauitatione sua in latera vasorum premit, et extensionem illorum adiuuat (§. 15.): augetur haec pressio, aucta mole, et quidem in instanti; in systole autem sanguinis arteriosi moles augetur: tempore igitur systoles latera arteriarum per sanguinem auctum et grauitate sua prementem ad maiorem extensionem ac dilatationem sollicitantur, et quidem in instanti ac secundum omnem tractum arteriarum, quousque sanguis grauitans pertingit. Nostra igitur sententia, quod *arteriarum pulsus cum systole cordis* coincidat, ex his rationibus probabilior euadit ac corroboratur.

§. 63. Demonstraui alio loco, dari in tubis capillaribus resistentiam aliquam, non a vi attractiua aut fluido contraponderante, sed ab illorum angustia deriuandam, quae humana industria adeo augeri possit, vt ad insignem altitudinem superincumbens fluidum in quiete seruetur. Vasa autem capillaria in corpore animali omni imaginatione subtiliora atque angustiora sunt: ergo illorum resistentia similiter se habet. Pressio autem est in ratio baseos et altitudinis fluidi; si igitur sectio arteriolae capillaris minima est, quae pro basi haberi debet; tum resistentia erit maxima, et infinitae altitudinis columna superincumbens immota haeret.

§. 64. Considera igitur: dilatationem tuborum arteriosorum incipere in principio aortae (§. 35.); et continuari per omnem tractum arteriarum (§. 62.); per illam vero nihil intendi a natura, nisi vt locus concedatur eiecto ex corde ſanguini (§. 55. 56. 58.); hunc ſanguinem per omnes arteriarum anfractus aequaliter et commode diſtribui (§. 58.); conſidera praeterea, eam eſſe inter aortam et arteriae ramos maiores et inter extremitates vltimas capillares proportionem, vt hae minimam portionem illius maſſae diſtribuendae ſortiantur, huius igitur portiunculae vim eſſe minimam, reſiſtentiam contra anguſtiarum capillarium eſſe maximam (§. 63.); An non magis magisque veroſimile videtur, has extremitates capillares quaſi pro clauſis haberi poſſe, et motui ſanguinis terminum in illis figi, donec haec reſiſtentia a viribus maioribus aliunde accedentibus ſit ſuperata? *nullum* igitur *ſanguinem tempore ſyſtoles cordis in venas transfundi* (§. 41.) *vi cordis*?

§. *65*. Arteria dilatata, plena, elaſtica in reſtitutionem ſui nititur: ſublata igitur vi extendente contractio actu ſequitur; quia igitur hoc modo capacitas vaſis minuitur, vt tantum ſanguinis denuo expellatur quantum a corde ſuſceptum fuit (Cap. I. §. 23.): non dubium eſt, quin haec ipſa vis ſe contrahendi pro principio haberi debeat, vnde hic traiectus deriuandus ſit; de cuius actionis natura et quantitate paucis nunc nobis erit diſpiciendum.

§. *66*. Quia contractio arteriarum effectus eſt elaſticitatis illarum: tota etiam haec actio iisdem legibus ſubiecta eſt, quas natura elaſticitatis requirit, quasque ſupra, cum de vi cordis ageremus (§. 28 - 34.), commemorauimus. Et quidem generaliter elaſticitas arteriarum dependet a robore ac firmitate fibrarum, ex quibus illae componuntur. Quo robuſtiores igitur fibrae, eo maioris elaſticitatis ſunt capaces: quo debiliores fibrae, ad eo mi-

norem

norem gradum ſe patiuntur extendi. Neque minus arteria robuſta maiorem virium extendentium impetum ſuſtinet; arteria debilis minorem. Porro intenſitas ipſa virium elaſticarum arteriae, queis in ſui reſtitutionem nititur, ſequitur intenſitatem virium, queis ipſa fuit extenſa ſeu producta. Atqui haec extenſio prouenit ab augmento ſanguinis certa velocitate irruentis, augmentum et celeritas ſanguinis a vi cordis illum intrudente. *Vis* igitur *arteriae*, qua ſe contrahit, *eſt in ratione compoſita numeri fibrarum conſpirantium*, *quantitate elateris*, *et intenſitate eius*; ac reſpondet vi cordis, quatenus haec per excitatum ſanguinis irruentis impetum effecit arteriae extenſionem. Quo intenſior igitur actio cordis, quo maior dilatatio arteriae: eo fortior quoque eſt illarum contractio; e contra, quo languidior actio cordis eſt, eo minor dilatatio, eo debilior quoque contractio arteriae erit. Haec et plura ſimilia theoremata abſque vlteriori argumentatione ex natura elaſticitatis fluunt, atque experientia confirmantur; ſiquidem plura adhuc corollaria inde deduci poſſent, quae ad illuſtrandas veritates phyſiologicas ac pathologicas facerent, ni nimium a propoſito noſtro deflecteremur. Haec igitur generaliter dicta ſatis ſunto.

§. 67. Quodſi iam magis praeciſe in quantitatem virium, queis arteriae in ſanguinem expellendum agunt, inquirere velimus, tanta ſollicitudine opus non eſſe putauerim, quanta vires cordis indagare oportuit. Quia enim intenſitas actionis illarum dependet ab actione cordis (§. 66.): quantitas virium, queis arteriae ſe contrahunt, facile determinari a priori poteſt, ſi cognita fuerit quantitas virium cordis, quae in arteriis dilatandis impenduntur ac consumuntur. Ex effectu autem, si illa concludi debet, dicendum est in genere: vim arteriarum sese contrahentium tantam esse, vt portio sanguinis per systolem cordis in ipsas intrusa denuo terminis suis eiiciatur, antequam systole sequente noua nouus quoque sanguis irrumpat. Ad quod problema strictius soluendum oportet nosse, 1.) quanta sit massa mouenda? quae pro capacitate arteriarum, et pro hypothesi pulsus varia esse potest. 2.) Qua celeritate motus fiat? quae quidem, quamuis itidem varia est pro ratione interuallorum temporis inter duas pulsationes, in hoc tamen constans est, vt semper dimidium interualli tempus receptione sanguinis, alterum dimidium expulsione illius consumi licite supponamus. Via autem, quam massa mota emetitur, partim a modo, quo contractio arteriae atque sanguinis eiectio fit, partim a quantitate sanguinis actu expellendi (§. 56.), partim ab orificiorum, per quae exit, constitutione deriuari debet.

§. 68. Haud difficile foret, ad melius intelligendum ea, quae paragrapho antecedente diximus, omnia ea, quae de similitudine siphonis (§. 22. 23.) commentati sumus, ad actionem arteriarum applicare. Sed alia succurrit methodus, quae expiscandae mensurae virium tam cordis quam arteriarum apprime fauet, et quae in omni casu adhiberi potest, siue arterias simul omnes, siue successiue (§. 62.) agere supposueris. Videlicet loco vasis arteriosi, elastici, dilatabilis finge vas rigidum, et in locum fluidi, soliditatis speciem intra canalem induentis impenetrabilis, suppone fluidum elasticum. Sit vas plenum clau-

clausumque firmiter vndequaque. Quodsi iam plus fluidi addideris, massa prior in volumen minus comprimetur, vt noua portio locum necessarium nanciscatur; et ambae simul sumtae volumen pristinum constituent. Facta compressione elater fluidi augetur in ratione massarum. Auferatur vis comprimens, siue cesset quomodocunque illius actio, vas autem clausum maneat eiusdem capacitatis, ne fluidi compressi volumen quicquam mutetur: tum fluidum suas vires conceptas habebit et elateris sollicitationes ad motum. Aperiatur iam vas ex aliquo latere; tum viribus istis mortuis succedent viuae, quae motum fluidi actu producent; fluidum igitur prosiliet pro quantitate virium pellentium; sunt autem hae in ratione elateris aucti, et hoc augmentum in ratione vis comprimentis. Fluidum igitur mouebitur pro quantitate virium, queis compressum fuerat.

§. 69. Videmus, re hac methodo considerata eundem effectum obtineri, ac si vas elasticum, fluidum vero rigidum fuerit. Fluidum elasticum colligitur in spatium minus, quantum videlicet requirit fluidum denuo accedens, et plus massae quidem adest, sed sub eodem volumine; Hoc vero idem est, ac si fluidum non elasticum volumine auctum reciperetur in vas elasticum, dilatatum et ampliatum. Neque minus: quodsi fluidum elasticum compressum iterum se expandit, et vi sua locum sibi extra vas per datam portam quaerit; non illud totum effluit, sed tantum, quantum denuo accesserat; et spatium, quod prius occupauerat, adhuc adimpletum permanebit; siue: continebitur massa prior fluidi sub volumine pristino. At vero idem fiet, si vas elasticum se contrahit; expellendo enim portionem, quantam receperat, capacitas ipsius ampliata ad pristinos terminos deducitur, vt nil nisi massa pristina spatio pristino contineatur. Quodsi igitur sub nomine vasis intellexeris tractum totum arteriarum pulsantium, et sub nomine fluidi sanguinem arteriosum in omni illo tractu dilatato contentum: possibile erit determinare vim elasticam arteriarum, et celeritatem sanguinis in venas proiiciendi, quae omnino tanta erit et esse debet, vt resistentiae ab extremitatibus capillaribus (§. 63.) obiectae, et si quae aliae occurrant, vinci possint.

Sectio 4.

De actione Auricularum.

§. 70. Auriculas in perpetuo motu reciproco esse cum ventriculis cordis, et hunc motum in dilatatione et contractione consistere, obseruationibus discitur certissime. Illas igitur ad potentias sanguinis circuitum *promouentes* pertinere (§. 3.), nemo dubitat. De quantitate *actionis huius* nemo, de modo autem pauci, et ii quidem non nisi generaliter structuram eius muscularem allegando, quicquam commemorauere. Omnes in eo versantur, et mire se dilacerant, vt rationem reddant, quare auricula dextra capacior sit sinistra? quam quisque proferre et stabilire conatur systemati suo conuenienter.

§. 71. Nostrum est, non fingere hypotheses, sed ex indubitatis phaenomenis et veritatibus ea, quae sequuntur, explicare, quae non sequuntur, relinquere. Ad scopum igitur nostrum obtinendum postulamus concedi sequentia:

1.) Pa-

1.) Patere viam sanguini ex vtraque caua tam in auriculam dextram quam ventriculum eiusdem lateris; et patere viam ex vena pulmonali in auriculam et ventriculum lateris sinistri.

2.) Sanguinis motum in vena caua inferiore esse lentissimum.

3.) Sanguinem in vena caua superiore indesinenter descensum et lapsum aut in auriculam aut in ventriculum, qua via patet, affectare.

4.) Sanguinis descendentis motum esse quidem acceleratum, sed tamen ob breuitatem temporis pro aequabili habendum esse; hinc nullam vim ei inesse, nisi pressionem a grauitate ortam.

5.) Sanguinem in venae pulmonalis ramis illis, qui ex superioribus pulmonum partibus versus cor descendunt, similem continuam pressionem et motum exercere vi grauitatis suae.

6.) Pulmonem in perpetua actione et voluminis sui variatione esse.

7.) Sanguinem ex vena pulmonali in auriculam sinistram et ventriculum non sola pressione a grauitate sua orta, illabi: sed impetu concepto ex actione pulmonum, vi viua irruere.

8.) Sanguinis motum nullam pati moram, actionem igitur potentiarum non debere officio suo deesse, sed indefessam continuari temporibus et rhythmis determinatis.

9.) In ventriculis et auriculis post systolem suam vacuum existere respectu totius capacitatis suae.

10.) La-

10.) Latera ventriculorum in diastole non nisi ad certum gradum relaxari, et hinc vi quadam extranea vlterius extendi debere, vt apta fiant ad nouam systolen.

Omnes hae propositiones partim ex iis, qua in Capite primo, et in hoc secundo iam stabilivi, partim ex adscititiis principiis anatomicis ita facile possunt demonstrari, vt earum ampliori deductione supersedeam. Properemus igitur ad conclusiones.

§. 72. Quando Cor in systole esse incipit; contractio auricularum finita est. Si igitur tum auricularum latera velles diducta, necessario vacuum haberes. Vbi autem vacuum est, ibi resistentia est nulla. *Sanguis* igitur *ex vtraque Caua in auriculam dextram, et ex vena pulmonali in auriculam sinistram celeritate qualicunque influit*, et illarum capacitates adimplet, ac *dilatat.*

§. 73. Auricula dilatata, elastica in sui restitutionem nititur. Vis huius nisus est in ratione numeri fibrarum ad contractionem correspondentium, quantitatis, et intensitatis elateris sui. Hac vi sua ingenita, *exprimunt sanguinem, finita actione cordis, in ventriculos respectiuos vacuos.* Quantitas massae determinatur a capacitate auricularum, non neglectis iis cautelis, quas in determinanda quantitate sanguinis e corde prorumpentis (§. 56. 57.) itemque in Capite I. §. 27. 28. 29. allegauimus. Celeritas autem, qua in latera ventriculorum irruit, a celeritate, qua musculi auricularum se contrahunt, et ab orificio, quo auricula in ventriculum hiat, dependet, et ex idea emboli, capacitatem tubi minuentis (§. 22. 23.) simili modo deduci potest.

§. 74.

§. 74. Laxata ventriculorum latera vi extranea dilatari debent (§. 75. n. 8. 10.). Quia autem motus in vena caua inferiore est lentissimus (n. 2.), et eius celeritas minima; neque minus, quia vis sanguinis, descendentis (n. 4.) in sola pressione consistit: *patet hinc necessitas auriculae dextrae, vt nisu suo se restituendi motum nouum imprimat sanguini*, non solum suo, sed et alteri ex vena caua vtraque (n. 1.) allabenti, quae vtraque massa iunctim sumta, celeritate concepta, in laxata ventriculorum latera irruit, et illa subito, quantum necesse est (n. 10.), extendit. Neque minus *patet necessitas auriculae sinistrae, vt* nimirum *latera ventriculi sinistri* per sanguinem velocitate concepta iniectum *subito extendantur*; quia circulatio sanguinis moram non patitur.

§. 75. Quia sanguinis motus in cauis est lentus (§. 75. n. 2. 4.): igitur *omnis* eius *acceleratio a sola actione auriculae dextrae proficisci debet.* Quia e contrario sanguis ex pulmone in cor sinistrum vi viua et cum celeritate (n. 7.) irruit: igitur omnis *vigoratio*, qua *ventriculo sinistro* opus est, *non a sola auricula sinistra ingeneratur, sed* illa *a quantitate* impetus sanguinis *ex auricula et vena pulmonali* prorumpentis *aggregata* proficiscitur. En veram caussam physicam et finalem, quare auricula dextra capacior et fortior sit et esse debeat, quam sinistra. Qui ad rationem huius inaequalitatis reddendam, densitatem et (contradictorie plane) fluiditatem maiorem sanguinis, quam in pulmone nanciscitur, somniant, illi tenebris circumfusi caligant, et oleum ac operam, quam inanem ludebant, perdidere.

Sectio 5.

De Attractione vasorum capillarium.

§. 76. Saepe accidit, vt, qui in explicandis phaenomenis naturae occupati sunt, tales causas in medium producant, quae non nisi speciem quandam veri habent: cuius quidem erroris nulla alio ratio est, quam quod nec effectus nec caussae ideam distinctam habeant, sed sola speciosa aliqua similitudine partiali, quae tamen nihil ad rhombum facit, decipi se patiantur, vt miros paralogismos committendo et sibi et aliis fucum vendant. Horum ex numero sunt illi, qui postquam generaliter intellexerunt, aquam in tubulo capillari sursum ascendere, hanc legem ad motum sanguinis explicandum applicari posse autumantes, statim concludunt: Ergo extremitates capillares venarum sanguinem attrahunt; Ergo hac attractione sanguis ex arteriis in venarum alueos facilitatur. Sed si distincte quaesiuerimus ex natura, illa quoque distincte respondebit.

Figura 14. §. 77. Sit Tubus capillaris A B, qui superficiem aquae, in vase V tangens, replebitur supra libellam vsque ad altitudinem BC; si remoueris tubum ab aqua; illa portio recepta et attracta in spatio BC immota haerebit.

Si profundius immerseris tubum ad altitudinem BD, tum et aqua in tubo ascendet vsque ad altitudinem F, ita vt sit BC=DF, et BD=FC; (si nimirum angustia tubi vbique sibi aequalis est, quod ad facilius intelligendum experimentum supponimus). Si extraxeris tubum, aqua iterum descendet, donec ad pristinam altitudinem BC peruenerit.

Si

Si tubum AB inuertas, vt extremitas B ſurſum ſpectet: aqua in cauitate CB haerens deſcendit ex BC vsque in EA, et reliquum ſpatium BE = AC aqua vacuum relinquit.

Sit Tubus AB maioris diametri AS, qui deſinat in tubulum capillarem BC, cuius attractio tanta ſit, vt, ſi ſuperficiem aquae tangat, fluidum in illo aſcendat et haereat ad altitudinem DC. Si repleueris totum hunc tubum AC fluido, tum illud deſcendet, et effluet per foraminulum C, tam diu, donec ſuperficies fluidi ſuperior AS peruenerit vsque ad terminum D; et ex tota maſſa fluidi nihil remanebit reſiduum, niſi quantum anguſta tubi capillaris capacitas CD virtute attractionis capere et retinere poteſt. Figura 15.

Procedit hoc experimentum, ſiue Tubi AC repleti extremitas C ſuperficiem aquae tangat, ſiue totus tubus liber ſit circumquaque.

Idem erit phaenomenon, ſi tubus capillaris BC cum tubo maiori AC non in directum iaceat, ſed illi ad angulum quemcunque ita inclinentur, vt capillaris BC in ſitu infra horizontem HO depreſſo, maior autem AB in ſitu ſupra horizontem eleuato conſeruetur. Figura 16.

§. 78. Ex his experimentis (§. 71.) ſequitur: 1.) *vim attracticem non agere niſi ad certum aliquem terminum, quem numquam transgrediatur*; 2.) hanc *vim non eſſe tantam, vt ſuperincumbentem aliam maſſam ſuſpenſam tenere poſſit*, ſed potius ſuperatam illius maſſae ſuperincumbentis pondere, *deſcenſum cedere illi*, donec retinendae portioni ſuae determinatae reſiduae denuo par ſit. 3.)

Tantum igitur abesse, vt tubus capillaris vltra debitam altitudinem repletus, et altero orificio immissus fluido cuidam, plus vltra recipiat, vt potius, quae superflua sunt et onerosa, demittat.

§. 79. *An igitur extremitates capillares venarum sanguinem sugunt, et motum eius facilitant? id quidem*, ex demonstratis (§. 71. 72.) puto *nemo intelligens concesserit.* Attrahant illae quidem per me sanguinem, si vacuae fuerint, attrahant ad ingentem altitudinem, quousque propter angustiam vasorum licebit. Quia venae naturaliter plenae sunt, et iam vltra terminum altitudinis fixum repletae: ista vis attractiua adeo non plus attrahet, aut sustinebit sanguinem venosum, vt potius descensum concederet, quam ascensum iuuaret, si nulla alia vis in corpore adesset, quae huic descensui valide resisteret. Qui igitur phaenomena ista de applicatione emplastrorum, cataplasmatum, vnguentorum, quorum partes aquosas, oleosas, spirituosas, *a superficie* corporis absorberi experimur, explicare aggrediuntur, ad principia longe alia, ex hydraulicis eruenda confugere debent; quia in attractione tubulorum capillarium parum solatii inuenient.

OBSER-

Fig. 2.

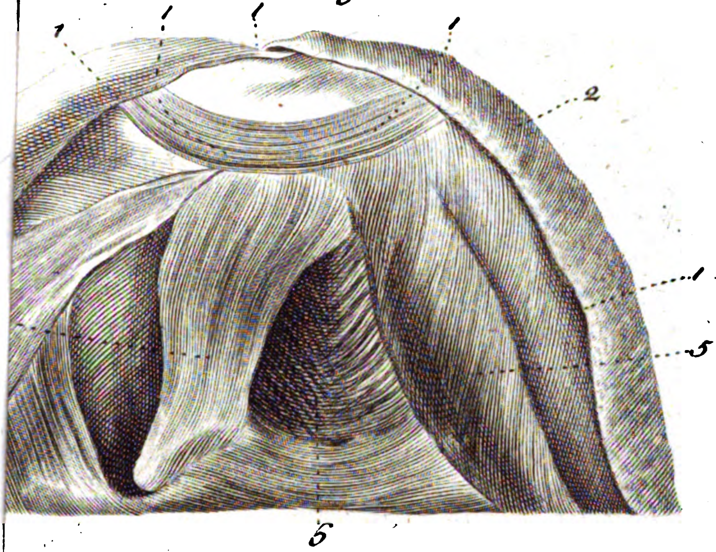
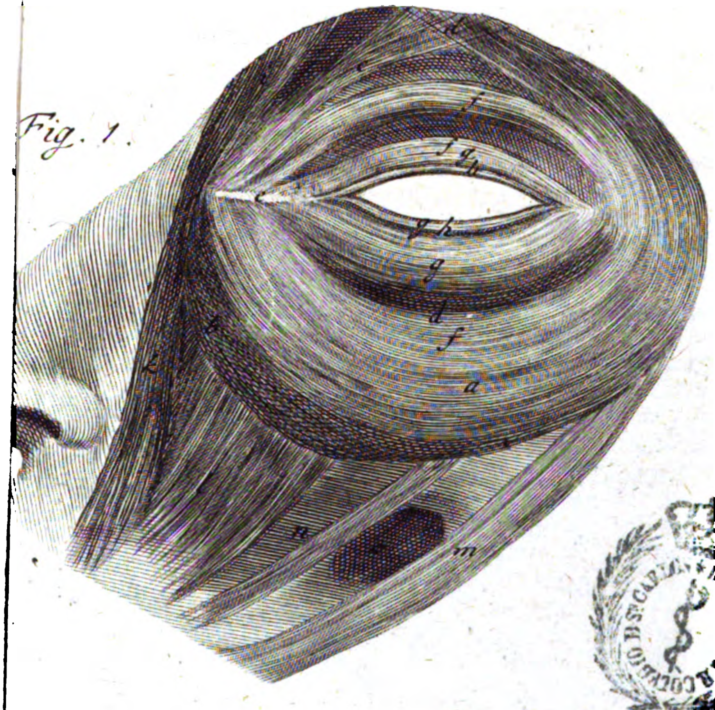


Fig. 1.



OBSERVATIONES ANATOMICAE AD HISTORIAM ET ACTIONEM MVSCVLORVM FRONTALIVM, OCCIPITALIVM, PALPEBRARVM, FACIEI *pertinentes.*

AVTORE
Iosia Weitbrecht.

MVsculi *frontales*, *superciliorum* et *palpebrarum* ita inter se nectuntur, vt de vno nihil exacte referri queat, quin et simul alterius mentio fiat. Sed nec de *frontalibus* atque *occipitalibus* quicquam stabile dici potest, quin accurata incumbentium ac substratarum membranarum cognitio praemittatur: in quarum recensione omnium accuratissime *Cel. Winslowius* se gessit, vt pauca adiicienda supersint; quae tamen prorsus negligenda non sunt, quia determinatio situs, actionis ac nexus musculorum dictorum inde dependet. Tabula XV.

II. Subter pinguedinem cuti caluariae immediate accumbentem detegitur tunica aliqua singularis, quam vel cum *Vesalio* panniculum carnosum, vel cum *Winslowio membranam pellicularem* dixeris, perinde est; quamuis posteriorem denominationem cum idea rei ipsius magis conuenire fatear. Haec *membrana* in tota exteriore superficie sua plurimas fibras disiicit, quae ipsam massam pinguedinis penetrant, illam in cellulas diuidunt, et ſubinde *arctiſſimam*, cum ea atque ipſa cute, *connexionem*, imprimis *in vertice* ſecundum longitudinem ſuturae, efficiunt. Obtegit illa porro omnem amplitudinem capitis in regione frontali, temporali, verticali atque occipitali; *nec* tamen *eandem* vbique *craſſitiem* ſeruat.

III. Membranam pellicularem (II.) ſubſequitur *Galea aponeurotica* ex *duabus laminis*, per tunicam cellularem diſtinctis conſtans, et ſimiliter toti caluariae ita obducta, vt etiam ad orbitae crepidinem vsque continuari, imo et lamellam aliquam ſuper ipſam palpebram ſuperiorem proiicere videatur. *Tenuior* eſt ſupra muſculum temporalem, ad cuius circumferentiam inſertionis circularem firmiter accreſcit; *tenuiſſima* autem ſub muſculis frontalibus, et circa inferiora temporum, vbi verſus os Zygomaticum demittitur.

IV. Integumentorum numerum complet *perioſtium*, ſimiliter ex *duplici* tunica contextum, quarum *exterior* laxa et mobilis muſculum temporalem externe obducit, *interior* vero cranio ipſi ſtrictiſſime inhaeret.

Figura 1. V. Muſculi *occipitales* paullo ſupra lineam acutam transuerſalem (lit. *a*.) e regione ſinus cruciformis oſſi occipitis adnaſci ſolent. Vtplurimum maſſa illorum carnea *quadrilatera* eſt, ita vt linea inſertionis vtriusque (lit. *b. c.*) non eandem directionem ſeruet, ſed quadantenus verſus ſe inclinentur (lit. *d.*). Oblique ſurſum progreſſi proiectiones ſuas *tendineas* laminae *exteriori* galeae aponeuroticae (III.) intexunt, vel potius, vbi crebriores ſunt, *ipſiſſimam* hanc *laminam* conſtituunt. Propter ſitum et progreſſum muſculorum obliquum fibrae iſtae tendineae vtrin-

vtrinque verfus mediam atque elatiorem mufculorum temporalium fedem *diuergunt* (lit. *e*), tantum abeft, vt, quod *Santorinus* perperam pofuit, circa verticem .fe decuffent. Eidem huic laminae exteriori innafcuntur aponeurofes mufculorum *eleuatorum auris*, inter quarum texturam fibrae *occipitalium* denique definunt.

VI. Mufculi *frontales* cum Galea aponeurotica nihil commune habent, nifi folam *contiguitatem*, et forte fibrofitates quasdam cellulares interiectas Immediate enim fub cutis pinguedine ita intexuntur ipfiffimae illi *membranae pelliculari* (II), vt vnam eandemque maffam in regione frontali conftituant; vnde fequitur, illos galeae fimpliciter *infterni* non autem complicari. Porro *nullibi offi* alicui innafcuntur; fed, quemadmodum de membrana diximus, illam fibris disiectis cum pinguedine commifceri: ita etiam hi mufculi frontales tota fuperficie fua externa fecundum omnem latitudinem cum eadem pinguedine, et confequenter cum *cute ipfa* committuntur. Fibrarum mufcularium extremitates *fuperiores* fenfim in membrana omnem carnofitatem deponunt. *Inferiorum* autem aliquae, quae *circa mediam frontem* fedem fuam nactae funt, *profundius* diductae cum *pyramidalibus* narium coalefcunt; *reliquae* circa *depreffores* fuperciliorum et *orbicularem* palpebrarum plane euanefcunt; de qua connexione inferius (X.) plura afferemus.

VII. Relictis iis, quae de *inceffu* et *quantitate* fibrarum in mufculis *frontalibus* vulgo difputantur, et a *Morgagno*, *Santorino*, *Winslowio* fatis difcuffa funt: eam tantummodo quaeftionem examinabimus, quae ad *actionem*

tam

tam *frontalium*, quam *occipitalium* pertinet: *an* nimirum *musculi digastrici sint? an* igitur *ad eandem actionem conspirent, et se adiuuent? an* vero *diuersimode agant?* Musculorum digastricorum, ex. gr illorum, qui ad maxillam inferiorem et os hyodes pertinent, et si quos alios, qui tendineas inscriptiones habent, huc referre velis, *ea* proprietas est, vt *duo ventres* carnei *per vnum* in medio interiectum *tendinem communem* connectantur, et quidem ita, vt tendo ille medius vtrinque in fibris carneis evanescat. At vero *talis* connexio inter musculum *frontalem* atque *occipitalem nullibi* conspicitur, quippe *duabus* distinctis (VI.) *tunicis* intexuntur; neque quisquam aponeurosin *occipitalis* in *frontalis* carnem modo indicato desinere demonstrauit. Sed ne de solo nomine disputare videamur: concedamus esse *digastricos*; quia non negamus, aliqualem saltim inter illos connexionem intercedere, quippe *membrana pellicularis et* musculus *frontalis* galeae aponeuroticae, vt stratum super stratum, imponitur. *At vero* exinde non sequitur, illos in actionibus suis conspirare, quod tamen de aliis digastricis dici potest. Hoc eo clarius patebit, si in *singulorum* actiones separatim inquirimus. Musculi enim *frontales nulli adnascuntur ossi*. Ergo, quando fibrae illorum contrahuntur, ambo illorum extrema versus mediam partem appropinquant; ergo *cutis*, cui adnascuntur, in *elatiore* fronte *descendit*, circa *supercilia* autem *ascendit*, et in *media* fronte in angustius spatium coaceruatur, id est, *corrugatur*. Atque haec actio non solum ex *situ*, et *connexione* musculorum *frontalium* (VI.) per *generales regulas*, quas de motu musculari in Commentar. Tom. IV. indicauimus, per legitimam consequentiam

tiam determinatur; ſed et *experientia* comprobatur: quippe in *corrugatione* frontis tam ſupercilia *tolli*, quam elatiorem cutis ſedem non capillatam *deorſum trahi*, oculis cernimus; imo ſi cutim illam manu ſurſum cogere tentaueris, in ipſo corrugationis actu illam manifeſto fortius deduci, et reſiſtentiam a digitis factam ſuperari experieris. Contra vero muſculi *occipitales* altero ſui extremo firmiter *oſſi innaſcuntur*, atque hoc modo punctum motus *fixum* nanciſcuntur: ergo, ſi agunt, aponeuroſes illorum tendineae neceſſario *verſus radicem* illam *fixam* appropinquant, et cutim, ſi quidem obſequitur, ſecum *verſus occiput* retrahunt. Tantum igitur abeſt, vt, ſi *frontales* et *occipitales ſimul* eodem temporis momento contrahuntur, in eadem actione *conſpirent*, vt potius ſibi mutuo *reſiſtant*, quia *illi* cutim *verſus frontem*, *hi* vero *verſus occiput*, directione plane *contraria* traherent. Non quidem negandum eſt, in frontis contractione, etiam in vertice et ſyncipitis elatiore ſede cutis ipſius diductionem ſentiri. Verum *primo non* de eo quaeritur, *an cutis trahatur?* ſed *an* haec tractio a muſculis *occipitalibus* proueniat, et *an hi* etiam ſimul cum *frontalibus* contrahuntur? quod certe tactu plane nequit explorari; neque etiam vnum ex altero conſequitur. *Deinde galea* iſta *aponeurotica* multo *ſtrictius* caluariae obducta eſt, quam vt tam vagas et *laxas* cutis *motitationes* producere aut *pati* poſſet. Denique illa ipſa *tractio* et motitatio cutis, *circa verticem*, *ſynciput* et *occiput*, nos conuincit, illos muſculos non *coadiutores*, ſed potius *antagoniſtas* eſſe; quia in *corrugatione* frontis omnem cutem in memoratis regionibus ſimiliter *versus frontem* trahi persentiscimus, quae motus *directio actioni* musculorum *occipitalium* plane *contraria* est.

VIII. Qualis *effectus actionis* musculorum *occipitalium* sit, propius determinare non audeo. Quapropter, *quid suspicer*, breuibus edisseram. Aut enim *cutim* in corrugatione frontis versus anteriora tractam, *laxatis* musculis *frontalibus retrorsum* ducunt, aut contractione sua *aponeurosin* et *galeam*, qua musculi *temporales* obducuntur, firmiter *tendunt*; hos musculos quadantenus *comprimunt*, atque ita illorum actioni *velificantur*; quemadmodum experimur, virtutem musculi per *ligaturas* multum corroborari: aut fortasse *vterque vsus* locum habere potest.

IX. In Galea aponeurotica iuxta musculum occipitalem plerumque tantum non horizontaliter versus auriculam decurrit *lacertus* aliquis *musculosus*, teres et carnosus, et in tunica concham externe inuestiente terminatur. Nullus dubito, quin hic sit *occipitalis minor Santorini*; interim vero nullatenus confundi debet cum aliis *auriculae* musculis *posticis* seu *retractoribus*, quippe qui non in galea, aut certe non in lamina eius exteriore, sed multo *profundius* periostio ipsi (IV.) innascuntur, et quos saepissime in *tres* socios a natura diuisos (propemodum, vt a *Veslingio* pinguntur) deprehendi; vt *nimis durum* mihi videatur, si *Cl. Winslowius* illis autoribus, qui *tres* musculos et notarunt et delinearunt, ita nude et simpliciter imputare velit, quasi illi diuisiones istas *soli scalpello* suo deberent.

X. Vix

X. Vix vllus alius mufculus tam varias diuifiones paffus eft atque Mufculus *Orbicularis palpebrarum*; quae omnes etiam eo minus inter fe concordant, quia pro lubitu tantummodo affumtae nullo ftabili fundamento nituntur. Sequar tamen in examine *ordinem Winslowii.* Huius quidem mufculi portio *prima* (lit. *a*.), feu fibrarum, quae quam longiffime a palpebris diftant, *ordo extimus* omnino circa canthum externum in orbem fertur, et quemadmodum in *Santorino* et *Walthero* delineatus eft, fuper os malae, eadem fere latitudine *reflectitur*, atque vsque ad *ligamentum ciliare* (lit. *e*.) dictum, *coarctatis* fibris afcendit. Hic ordo in media malae regione per *acceſſorium lacertum* nigricantem (quem *inferiorem* dixero (lit. *b*.),) corroboratur, cuius *pars* cum pyramidali narium (lit. *k*) commiffa ligamentum fuperfcandit et cum frontalibus (lit. *i*.) defcendentibus confunditur, *pars* autem *fub ligamento* abfconditur et in vicinia terminatur. Quod vero *inceſſum* et *connexionem* fibrarum huius ordinis in *elatiſſima orbitae fede* attinet: meas quidem obferuationes neque cum *Santorino* neque cum *Winslowio* conuenire intelligo. Non cum *Santorino*, qui *hunc ordinem in Tabula fua lit*. C. ita pingit, quafi *fubter frontalem* fubduceretur, atque ita defcribit §. VI. quafi tumentes *corrugatoris fuperciliorum* lacertuli ex illo componerentur: non cum *Winslowio*: qui *hoc* eodem *ordine* mufculum *frontalem tegit*, ordinem autem *fecundum* inter corrugatorem et frontalem locat; qui quidem *fitus Santoriniano* plane *contrarius* eft atque inuerfus. Videlicet, vbi *ordo primus* in dicto loco ad mufculi *frontalis* fibras peruenit, eius progreffus quidem omnino *interrumpi*, neque ad angulum internum continuari

Figura 2.

videtur. Sed eius loco alius singularis *lacertus accessorius* (quem *superiorem* (lit. *c*.) vocabo) ex hoc angulo ortus *ad eandem* orbitae sedem oblique surgit, et cum *ordine primo* facta manifesta fibrarum *decussatione* (lit. *d.*) ita confunditur, vt alter versus tempora, alter versus frontem directione seruata *in cute obliterentur*. *Frontalis* autem in hoc occursu ita immiscetur atque euanescit, vt *nec supra*, *neque infra* orbicularem progredi dici queat. Neque minus *corrugator superciliorum* subiacens adeo *ab ordine primo* et *lacerto* isto *superiore* distat, vt *per* interspersam *pinguedinem* sufficienter distinguantur.

XI. *Ordo tertius* (lit. *g*.), seu fibrarum illa series, quae *palpebris* proprie incumbit, omnino ductu magis elliptico incedit, atque angulum *externum* flexura quadam acutiore ambit; in cantho autem *interno* communionem adeo manifestam inter se non habet, sed per interiectum *ligamentum ciliare* distinguitur. Hic autem ordo, non in superiore sed, in inferiore palpebra et *latior* et *densior* est; quippe in illa inter ordinem secundum et tertium notabile aliquod *interuallum* fibris carneis destitutum relinquitur.

XII. Huius ordinis *tertii* fibrae, quo magis ad palpebrarum limbum appropinquant, eo magis directe et *parallele* incedunt, eoque magis illarum connexio in angulo externo obliteratur; vnde *ordo quartus* (lit. *h*.) emergit. Hae fibrae omnes, quamuis in genere crassiores sint, quam vulgo delineantur: *vnicus* tamen *lacertus* insigni quadam *turgescentia* prae aliis conspicuus est, qui cum ipso tarsi margine extremo *parallele* excurrit, ciliorum radices tegit, et iuxta canales lacrymales versus ligamentum ciliare produciducitur. Atque iste lacertulus mea quidem opinione Musculum illum *ciliarem Riolani* constituit, qui semper adest, modo disquisitio subtili cultello instituatur: quicquid contradicant *Dom. de Marchettis*, *Blasius*, *Diemerbroek*, *Santorinus*, qui hunc musculum nuspiam adesse, nec a quoquam facile demonstratum iri contendunt.

XIII. Totus hic *apparatus musculosus* ad palpebram pertinens (XXI. XII.) circumquaque quidem tam cuti quam pinguedini adnascitur: sed *in angulo interno* imprimis insertionem *fixam* nactus est. Non autem, vt recte *Santorinus* monet, in vnum punctum omnes fibrae cohaerent; sed in tota anguli vicinia diffunduntur. Imprimis *ordo primus* et *secundus* cum *lacertis* suis *adscititiis* (superiore et inferiore X.) partim in *ligamento ciliari* ipso, quam late illud patet, partim *subter illud* in osse nasali, et sacculi lacrumalis tunicae implantantur. Ordinis *tertii* autem fibrae quaedam etiam *in margine orbitae* obliterari videntur. *Ligamentum* autem istud (lit. *e.*), vulgo *ciliare* dictum, et a *Santorino* ac *Walthero* per asteriscum indicatum, plane non *tendo communis* est, in quem omnes istae fibrae vniuntur, *neque* etiam pro *productione* aut colligatione *cartilaginum* tarsi, et palpebrarum haberi debet; sed re ipsa nil nisi *verum ligamentum cutaneum* est, siue *productio* alba, et *tenax*, qua *cutis* ipsa *ossi* nasali firmiter adnascitur. Atque hoc prudenti naturae consilio factum esse arbitror, vt hac ratione, *fixa cute*, omnis ille *apparatus* in illud insertus etiam simul *figeretur*, atque in motu suo determinaretur. Inde enim accidit, vt, quando *orbicularis* sese contrahit, orbem Figura 8.

 angu-

angustiorem efficiat, et ipsa cutis, qua orbita et palpebrae tectae sunt, *versus* angulum *internum* maxime trahatur; imprimis vero, quando oculum *claudimus*, *lacertus adscititius inferior*, cutem *malae*, lacertus autem *superior* cutem *superciliorum* versus hunc insertionis locum ducit et corrugat.

Figura 2. XIV. Musculus *Zygomaticus minor Santorini* (lit. *n.*), si non perpetuo adest et perfectus: semper tamen *aliqua* eius *vestigia* deprehenduntur; id quod nemini mirum videbitur, si infinitae facierum varietates considerantur. Interdum inueni et *maiorem* et *minorem* ex eadem sede, tamquam radios *ex centro* oriri: alio tempore loco minoris ex medio Zygomatico maiore vidi *fasciculum* insignem oblique sursum ferri, versus incisorium, illique innasci. *Zygomaticum maiorem* si quidem denominatio aliqua a functione assignanda est, neque Eleuatorem labiorum, neque Abductorem solum, sed *Diductorem* rimae oris, vel cum *Heistero risorium* nominare mallem; quia reuera *actio* eius est, *rimam* et angulum oris *diducere*, atque *oblique sursum tollere*, quem motum *inter ridendum* fieri obseruamus.

XV. Musculum aliquando inueni, *risorio Santorini*, vt ouum ouo similem. Saepe autem fibrae tantum vestigia eius mentientes adfuere, quarum origo ita comparata mihi videbatur, vt omnino pro *quadrati colli* sobole haberi possent, quod et ipsum *Santorinum* quadantenus *suspicatum* esse, non tamen plane affirmasse, ex eius Paragrapho XXXIV. apparet.

XVI. Me-

XVI. Meminit *Santorinus* Cap. I. §. 23. *Triangularem labiorum* aliquando longioribus fibris, quae mento proximiores ſunt, *vlterius* prolatis *in aduerſum* latus ferri, et compari ſuo ita occurrere, vt *vna* habeatur *eademque* fibrarum *continuatio* ab vno ad alium oris angulum, nullo interiecto diuiſionis ſigno. Apparent huius combinationis veſtigia etiam in Tabulis Euſtachianis XXXI. et XXXVI. Ego illam tantum non ſemper deprehendi, quotiescunque circa has partes ſtudioſius inquiſiui. Iacet nimirum immediate ſub cute *faſciculus muſcularis* elegans, *planus*, ex vno maxillae latere verſus aliud, proxime infra mentum *in orbem ductus* (lit. *g.*), qui non ſolum triangulares inter ſe committit, ſed et imprimis *digaſtricos* in ſua inſertione *tegit* et cohibet. Tam *creberrima* huius muſculi obſeruatio, quam *ſitus* eius ab *Euſtachiano* discrepans et *profundior* me determinarunt, vt illum delineari curarem, et cum Academia communicarem. Figura 3.

Expli-

Explicatio Figurarum.

TABVLA XV.

Fig. 1.

a. Linea horizontalis situm prominentiae acutae ossis occipitis indicans.
b. Linea insertionis Musculi occipitalis dextri.
c. Linea insertionis - - sinistri.
d. Angulus inclinationis musculorum.
e. Directio fibrarum muscularium.

Fig. 2.

Exhibet Musculum orbicularem palpebrae sinistrae cum vicinia.

a. Musculi orbicularis portio prima *Winslowii*.
b. Lacertus accessorius inferior.
c. Lacertus accessorius superior.
d. Decussatio portionis primae, et lacerti accessorii superioris.
e. Ligamentum cutaneum, seu ciliare *Santor.* seu, tendo ligamentosus *Winslowii*.
f. Portio Orbicularis secunda *Winsl.*
g. Portio tertia.
h. Portio quarta, seu musculus ciliaris *Riolani*.
i. Portio musculi frontalis ad nasum descendentis.
k. Pyramidalis narium.
l. Musculus incisorius.
m. Musculus Zygomaticus maior.
n. Musculus Zygomaticus minor.
o. Fouea, vtplurimum pinguedine turgens.

Fig. 3.

a. Limbus maxillae inferioris.
b. Cutis reflexa.
c. Portio platysmatis myoidis.
d. Digastricus dexter ad maxillam tendens.
e. Digastricus sinister.
f. Mylohyoides subiacens.
g. Fasciculus muscularis planus, infra mentum circulariter subductus, et commissuram musculorum triangularium labii constituens.

CLAS-

CLASSIS TERTIA
CONTINENS
HISTORICA.

[...]MENTA CALMUCICA

i	o	u	ö	ü
i	o	u	ö	ü
ni	no	nu	nö	nü
caret	cho	caret	caret	chü
ki	caret		kö	kü
[...]ret		gu	caret	gü
ngi	caret		ngö	ngü
bi	bo	bu	bö	bü
mi	mo	mu	mö	mü
li	lo	lu	lö	lü
di	do	du	dö	dü
ti	to	tu	tö	tü
ssi	sso	ssu	ssö	ssü
schi	scho	schu	schö	schü
tschi	tscho	tschu	tschö	tschü
zi	zo	zu	zö	zü
ri	ro	ru	rö	rü
ji	jo	ju	jö	jü
caret			kö	kü
wi	wo	wu	wö	wü
pi	po	pu	pö	pü

Kalmadski ini Lobsano Lechi Orusski Kriuchtschenu ine Basili Timofei Sow.

ELEMENTA CALMVCICA.

AVCTORE

T. S. Bayer.

SVperioribus in Commentariis litteraturam Mangiuricam explicatam dedi. Nunc de Calmucica quaedam adiicienda iudicaui, tantummodo vt illius ab Mangiurica diuersitas cognoscatur. Primum Calmucica quaedam in *Nicolai Vuitsenii* opere inueni. Deinde *Fridericus Grossius*, collega noster, quem honoris caussa nomino, a legato Principis populi Songar elementa litteraturae huius Moscuae impetrauit et ad me Petropolin transmisit. Ad extremum nactus sum haec elementa *Grossianis* ferme congruentia, scripta manu *Lobsang Ischi.* Is quondam scriba apud Songarenses fuit, inde captus a Russis christianae religioni sese tradidit; ex quo nomen ei Basilius Timothei filius, nunc est. Vltima littera *p*, omissa a Basilio, a legato autem descripta, plane est Tangutana. Finales quoque adiectae sunt in Schemate. Cetera ex collata litteratura Mangiurica facile suppleri poterunt. Nomen Basilii subieci, hoc modo: *Kalmatski ime* (Calmucicum nomen) *Lobsang Ischi*, *Orofki* (Russice) *krischtschona* (baptizati) *ime* (nomen) *Basili Timofeicf* (Basilius Timothei filius). Haec Russica sunt, scripta litteris Calmucicis.

DE VENEDIS, ET ERIDANO FLVVIO.

AVCTORE

T. S. Bayer.

QVoniam ex Herodoto Eridanum et Venedos his locis ad Balticum mare posui, eius rei rationem vt reddamus, tempus est. His autem verbis eius, vt ita faceremus, commoti sumus (*a*): οὔτε γὰρ ἔγωγε ἐνδέκομαι Ἠριδανὸν καλέεσθαι πρὸς βαρβάρων ποταμὸν, ἐκδιδόντα ἐς θάλασσαν τὴν πρὸς βορέην ἄνεμον, ἀπὸ τοῦ τὸ ἤλεκτρον φοιτᾶν λόγος ἐστὶ, οὔτε νήσους οἶδα κασσιτερίδας ἐούσας, ἐκ τῶν ὁ κασσίτερος ἡμῖν φοιτᾷ. Τοῦτο μὲν γὰρ Ἠριδανὸς αὐτὸ κατηγορέει τὸ οὔνομα, ὡς ἐστὶ Ἑλληνικὸν καὶ οὔτι βαρβαρικὸν, ὑπὸ ποιητῶν δέ τινος ποιηθέν. οὔτε δὲ οὐδενὸς αὐτόπτεω γενομένου, οὐ δύναμαι ἀκοῦσαι τοῦτο μελετῶν ὅκως θάλασσά ἐστὶ τὰ ἐπέκεινα Εὐρώπης. ἐξ ἐσχάτης δ᾽ ὦν ὁ κασσίτερος ἡμῖν φοιτᾷ καὶ τὸ ἤλεκτρον. *Neque enim*, inquit, *mihi persuasum est; Eridanum vocari apud barbaros fluuium, qui se praecipitet in septemtrionale mare, vnde succinum perferri dicunt: neque insulas noui Cassiteridas, vnde stannum ad nos perferri praedicant: nam quod Eridanum attinet, ipsum illud nomen opinionem famamque rei euertit, Graecum enim est, non barbaricum, a poetarum aliquo confictum. Neminem*

(*a*) Lib. III. Cap. 115.

minem ſane cognoui, qui eas viderit terras, neque, cum id maxime agerem intelligere potui, quem in modum mare ad vlteriorem Europam ſe habeat. Id vtique conſtat, ab extrema Europa et ſtannum et ſuccina ad nos perferri. Duo acceperat Herodotus, primum (ſuccina et ſtannum ab extrema Europa et oceano ſeptemtrionali perferri, quod vel ipſo iudice, ſine contrauerſia erat, mercatoribus Ionicis et Ponticis,) Adriaticis et Atticis referentibus: alterum, fluuium a quo ſuccinum perferatur Eridanum et inſulas vnde ſtannum Caſſiteridas appellari; quod Herodotus veretur ne ex vano hauſtum ſit et a poetis confictum. Cauſſa ea eſt, quod Ἠριδανὸς ϗ Κασσιτερίδες νῆσοι nihil barbari ſonant; ſed Graeci ſermonis vocabula ſunt. Nam Κασσιτερίδες παρὰ τὸ κασσίτερος, *a ſtanno*, Graece dicebatur: itaque etiam Ἠριδανὸν putabat eo genio eſſe, cum praeſertim ſonus oris Graii ſe quaſi ſorex proderet. Nec fallitur in primo. Nam Pontici mercatores, cum ſtannum ex inſulis extremae Europae acciperent, nec nomen tamen regionis gentisque cognoſcerent, ipſi finxerunt a ſtanno, vt eorum poſteri ab ſitu ad occidentem Europae Heſperidas dixerunt. Sic Dionyſius Afer

αὐτὰρ ὑπ' ἄκρην
Ἱερὴν, ἣν ἐνέπουσι κάρην ἔμμεν Εὐρώπης
Νήσους θ' Ἑσπερίδας, τόθι κασσιτέροιο γενέθλη
Ἀφνειοὶ ναίουσιν ἀγαυῶν παῖδες Ἰβήρων.

at ſub promontorio
Sacro, quod dicunt caput eſſe Europae,
Atque ſub inſulis Heſperidibus, (vbi ſtanni origo,)
Diuites habitant filii illuſtrium Iberorum.

Ex hoc loco certum est, eum insulas nullas quam Britanniam dicere, quamquam quae adhuc inscitia erat, Britannicas insulas ab his distinguit, et Rheno praetendit. De Eridani vocabulo autem dicam postea. Nam mihi nunc excitandus quasi est lector, vt quod verum rectumque in hac narratione est, illud stabilitum plane et confirmatum in animo gerat. Hoc dico, quod plane ab septemtrione et succinum et stannum aduectum sit in Graeciam, quodque vt stannum omnino ex insula Europae extremae subiecta, et illis testibus et natura ipsa suffragante, allatum fuisse oportuit, vt deinde succinum ab hoc mari Baltico, quod plerique septemtrionale dicebant, ita aequum non est, iis, qui haec omnia tam vera prodiderunt, in vno fidem derogare, quod a flumine perferri dicunt Eridano, qui se in oceanum illum septemtrionalem, seu Balticum mare praecipitet.

Hic fluuius, quoniam extra orbis noti vias situs erat, satis opportunus est visus Graecis ad fabulas, quae praesertim succini, gemmae pretiosissimae, memoriam complecterentur. Auctori Theogoniae Hesiodae res nondum matura fuit fictionibus: tantummodo de fluuio Eridano iam audiuerat. Eum enim cum aliis Scythicis et septemtrionalibus fluuiis recenset, quam Thitys Oceano pepererit (*b*). Idem ille Electras quidem duas, alteram Thaumantis et Oceani, alteram Iouis et Thetydos filiam commemorat, sed nihil illud adhuc ad succinum, cum tamen stannum nouit, quod etiam a septemtrione aduehebatur nihil item ille de Heliadibus. Possis itaque suspicari, iam Thaletis Milesii temporibus, cum illa theogonia est edita et stannum

(b) Lib. III. Cap. 115. v 338.

rum et fuccinum allata fuiffe in Graeciam. Illius temporis aut paullo vetuftior videtur fuiffe auctor *Batrachomyamachias*, qui παρ' ὄχθαις Ἠριδανοῖο Phyfignatum ranam editam fuiffe canit. At *Phaethon* Solis et *Clymenes* filius Homero ignotus fuit, *Hefiodus Phaethontem* canit, at illum *Cephali* et *Aurorae* filium. Nondum igitur ante *Thaletum Milefium* fabula illa de *Phaethonte* et *Electridibus* et fuccino exculta fuit. *Hyginus* quidem ait (*c*): *Earum Heliadum lachrymae, vt Hefiodus indicat, in electrum funt duratae.* Sed quis is eft *Hefiodus*? qui hodie exftat, nihil de illis nouerat. Ne Onomacritus quidem in Argonauticis quidquam de Eridano et Phaethonte veluti notis fabulis. Primus, qui Eridani fabulas tangeret, *Aefchylus* fuit et fecundum eum, vt *Plinius* annotauit (*d*) *Philoxenus*, *Nicander*, *Euripides*, *Satyrus*. Euripides in Hippolyto Stephanephoro nondum perfectam habet fabulam (*e*), vbi chorus:

Ἠλιβάτοις ὑπὸ κευθμῶσι γενοίμαν·
Ἵνα με πτερῦσσαν ὄρνιν
Θεὸς ἐν ποταναῖς ἀγέλησιν θείη,
Ἀρθείην δ' ἐπὶ πόντιον κῦμα
Τᾶς Ἀδριηνᾶς ἀκτᾶς,
Ἠριδανοῦ δ' ὕδωρ
Ἔνθα πορφυρέαν σταλάσσουσιν
Εἰς οἶδμα πατρὸς τριτάλαιναι
Κόραι, Φαέθοντος οἴκτῳ, δακρύων
Τὰς ἠλεκτροφαεῖς αὐγάς.

Vtinam

(*c*) p. 224. ed. Munkeri. (*d*) Lib. XXXVII. Cap. 2. (*e*) v. 732.

Vtinam sub altissimis recessibus versarer
Vbi me volucrem pennatam
In volucribus gregibus Deus esse iuberet,
Et tollerer super maris fluctibus
Adriatico in littore
Eridanique in fluentis,
Vbi stillant purpuream
In aquam, patris ter miserae
Puellae, Phaethontis miseratione, lacrumarum
Electrum aemulantores splendores.

Filias Euripides dicit, quas sorores fuisse post eum alii cecinerunt, veluti id aptius fabulae instruendae esset. Inter extremos *Apollonius Rhodius* excolendae fabulae artifex qui Eratostheni condiscipulo in Alexandrina bibliotheca successit sub Ptolemaeo Euergete. Aratus Solensis et Eratosthenes aequales fuere. Vter alterius exemplo Eridanum in catasterismis posuerit, non liquet. Vterque sane habet (*). *Apollonius Rhodius* autem in Argonauticis (f) λείψανον Ἐριδανοῖο πολυκλαύςυ ποταμοῖο, fabulis iam ita adultis vt non modo Phaethontis sororum, sed etiam Apollinis ipsius lacrumas succina esse dicerent, Electridas insulas et Eridanum ad septemtrionem collocat.

ἱερὴν ἠλεκτρίδα νῆσον
Ἀλλάων ὑπάτην, ποταμȣ̃ σχεδὸν Ἠριδανοῖο
sacram Electride insulam
Omnium extremam, iuxtra Eridanum fluuium

Isthic ait Argonautas penetrasse vsque in Eridanum ἵνα τ' εἰσὶ πύλαι καὶ ἐδέθλια νυκτός, *vbi portae et cubilia noctis*

(* Anatus in phoenomenis v 359. V. Nonnu in Dionys. l. 23. v. 240. l. 38. 90. seq. v. 430. seq. Dion. Afer v. 290. seq. (f) Lib. IV. v. 507.

ctis sunt, hoc eſt ſub vltimo borea. Attamen Eridanum cum Rhodano et Pudo miſceri addit. Malo id ex ſcholiaſtae eius verbis intelligere te, quam ex Apollonii ipſius verſibus: Ῥοδανὸς ποταμὸς Κελτικῆς τῷ Ἠριδανῷ συμμιγνύμενος καὶ σχιζόμενος, τῇ μὲν εἰς ὠκεανὸν φέρεται, τῇ δὲ καὶ εἰς τὸν Ἰόνιον κόλπον, τῇ δὲ εἰς τὸ Σαρδόνιον πέλαγος. *Rhodanus fluuius Celticae Eridano miſſus ac rurſus in diuerſa ita abit*, *vt partem in oceanum* (ſeptemtrionalem) *partem in Ionium* ſeu *Adriaticum*, *partem in Sardonum* hoc eſt Liguſticum *exoneretur*. Iſthic ad Eridanum ait Apollonius Phaethonta ſemiuſtulatum caeleſtibus flammis in lacus profundiſſimi oſtium ab caelo cecidiſſe. Lacum teterrimum odorem ſpirare, circa eum autem lacum Heliadas in αἰγείρους ſeu populos (vt Plinius et Hyginus in fabulis interpretantur) mutatas flere: lacrumas ab humo exceptas ſole aeſtuante ſiccari cum lacus inundat terram, ſuccina deuolui in Eridanum. Alii adhuc illud fabulae adiiciunt, Celtas narrare, Apollinem cum ad Hyperboreos accederet caelo, ob iurgia cum Ioue, relicto, quod Aſſilepius Apollinis e Coronide filius a Ioue eſſet fulmine ictus, aut, vt ſcholiaſta Apollonii addit, cum Apollo ob Cyclopum eaedem cogeretur coelo exulare iſthic apud Hyperboreos, nec ediſſe, nec bibiſſe, ſed ſua fleuiſſe ſuccina.

Iam velim mecum conſideretis, quod veriſſimum ſit in his fabulis, atque quibus ab cauſſis veris admiſta fuerint tum vana, tum obſcura. Eridanum dico Dunam eſſe fluuium prope Rigam. Nam quae nunc Duna, ea olim Ῥοῦδων *Rhudon*, ita vt abiecto principio, extremum vocabuli ad hoc vsque tempus perſeuerauerit. *Marcianus Heracleota*: μετὰ δε τὰς ἐκβολὰς τȣ̃ Ὀυιςȣ́λα ποταμȣ̃ ἐκδέχονται Χρόνȣ ποταμȣ̃, ἑξῆς εἰσι Ῥȣδῶνος ποταμȣ̃ ἐκβολαὶ. Ὁ δὲ Ῥȣ́δων ποταμὸς ἐκ τȣ̃ Ἀλαύνȣ ὄρȣς Φέρεται. *Viſtulae*, *Chroni*, *Rhudonis oſtia ſe deinceps excipiunt. Rhudon ex Alauno monte fertur Claudius Ptolemaeus*:

Τȣ̃ Ὀυιςȣ́λα ποταμȣ̃ ἐκβολαὶ	με	νς
Χρόνȣ ποταμȣ̃ ἐκβολαὶ	ν	νς
Ῥȣ́βωνος ποταμȣ̃ ἐκβολαὶ	νγ	νζ
Τȣρȣ́ντȣ ποταμȣ̃ ἐκβολαὶ	νϛL'	νηL'

Viſtulae oſtia - -	45.	56.
Chroni oſtia - -	50.	56.
Rhubonis oſtia -	53.	57.
Turunti oſtia - -	56.½	58.½

Rhubonem perperam dicit, vt ex Marciano intelligis. Quamquam autem ſecundum Ptolemai rationes orientalior eſt Rhudon quam Duna, tamen ab eodem littus omne maris ſeptemtrionalis, vt illi dicebant, ſeu Baltici magis ad orientem ſummouetur. Nec adeo conſtare poterat Ptolemaeo longitudinis et latitudinis exacta ratio. Sed ſi Viſtulae ſitum cum Rhudonis oſtiis comparamus, nihil eſt manifeſtius, quam Dunam eſſe Rhudonem veterem. Scio quid hic *Olaus Rudbeckius* tumultuatus ſit, ſed huic mihi videor alibi ſatisfeciſſe (*g*), nec tanti eſt, vt hoc loco quidquam amplius dicam. Quod autem *Marcianus* dicit, Rhudonem ex Alauno monte fluere, id nos etiam confirmat. Nam a veteribus Boryſthenis quoque fontes po-

(g) De numo Rhodio p. 11.

ponuntur in Alaunicis montibus. Non quod aliqui isthic montes sunt, vnde Danapris fuit, sed quod viri boni e montibus plerumque flumina oriri nouerant, eo, montes isthic collocarunt, vbi Danapris fontes esse accipiebant. Iam nec Duna ex monte aliquo Alauno praecipitatur: attamen ex iisdem fere paludibus, ex quibus Bonysthenes. Hoc prisci homines acceperant. Hi vero barbarum vocabulum Rhudonis, in Eridanum mutarunt, vt aptius esset ori Graeco. Eridano constituto, iam cetera in vado sumus. At, inquies, nullum ad Dunam succinum est. Nempe prisci mortales tantum mercatus succini ad Eridanum institui acceperant, vt *Herodotus* ait: ἀπό τευ ἤλεκτρον φοιτᾶν λόγος ἐστί, *a quo Eridano succinum perferri*, fama est. Hoc satis erat ad longam de Eridano fabulam cudendam veluti illic succina legerentur. Haec autem ratio mercatus docet, succina primum a populis ad Eridanum transmissa esse ad Scytas et secundo Borysthene ad cataractas, hic excepta esse a Borysthenitis Graecis, qui se Olbitas dicere malebant. Mea enim sententia, vt nunc est, Olbitae vltra cataractas non nauigarunt. Nam primum ex *Constantino Porphyrogenneta* de administrando imperio satis apparet, quae cataractarum illarum natura et quam impenetrabiles illis temporibus atque ea ruditate nauigandi Graecis fuerint. Tum vero *Herodotus* testatur, solos quadraginta dies Borysthenem nauigari potuisse. Quod si recte consideres aduerso flumine spatium fuit intra cataractas et tametsi aliter sensi olim, in eo me nunc ipse reprehendo. Cetera quae in fabulis illis sunt ad mercatum antiquissimum et naturam succini, vt tunc explicari poterat, refero. Hoc insigniter posset confirmari si exstaret is scriptor, ex quo Eustathuis ad *Dionysium Afrum* v. 311. de Panticape, qui supra cataractas fluit, habet, ad eum fluuium ὑδυφανὴς ἤλεκτρος μήνης ἀερχομένης ἄυξεται, ὅιάτις αὐγή. De arboribus succiniferis etiam *Sotacus* apud *Plinium* (*b*). *Sotacus credidit in Britannia arboribus effluere, quas electridas vocauit.* Male hoc *in Britannia.* Ceterum tametsi *Harduinus* ex Manusc. legit: *petris effluere*, tamen potius crediderim Sotacum illum peruulgatae opinionis de arboribus, quam nouae sententiae de petris auctorem fuisse. Orta est opinio ex coniectura. Videbant enim succina resinae similia esse et incendi et fluere et olere resinosum. Inde nihil aliud in mentem veniebat, quam ab arboribus succina stillare, vt in Prussia quoque multorum iudicium fuit. Phaethontem aliquando suspicatus sum Graecum fuisse ciuem e Ponticis coloniis, qui cum mercatus succinarii causa septemtrionem versus profectus euersa naue in aquis perierit: *Heliades* autem sorores seu socios illius mercatus casum illum doluisse. Sed forte verius etiam hoc totum ad naturae commentationem traducas, cum videretur sol ὁ ἥλιος φάεθων aut radii solares, tamquam filius aliquis solis matura facere in arboribus succina, idcirco erimi fabulae auctores non sorores sed filias *Phaethontis* prodidere *Heliadas*. Niceas apud *Plinium*, *solis radiorum succum intelligi voluit: hos circa occasum credit vehementius in terram actos, pinguem sudorem in ea parte oceani relinquere, deinde aestibus in Germanorum littora eiici.*

Veriora aliquantum comperit *Pytheas Massiliensis* *Plinius* sic ait: *Pytheas Guttonibus Germaniae genti auoli aestua-*

(*b*) Lib. XXXVII. Cap. 2.

aestuarium oceani Mentonomon nomine, ſpatio ſtadiorum ſex millium: ab hoc diei nauigatione inſulam abeſſe Abalum: illuc vere fluctibus aduehi et eſſe concreti maris purgamentum: incolas pro ligno ad ignem vti eo, proximisque Teutonis vendere. Huic et Timaeus credidit, ſed inſulam Baltiam vocauit. Haec poſtea interpretabimur. Id enim propoſito noſtro ſatis eſt, quod intelligimus iam tum, hoc eſt, ante *Philippum Amyntae* Macedonem ſuccinarium a Tutonis exercitum fuiſſe. Is quoque *Plinius* auctor eſt, Romanos primum ſuccina accepiſſe a Venetis ad Adriam, ſed oſtendi, cum de numis Romanis in agro Pruſſico repertis dicerem, antea Tarentinos iam cognouiſſe. Haec ſunt illa tempora cum maxime ſuccinaria fabula eſt conflata: et quoniam ad Padum mercatus illius gemmae inſtituerentur a Tarentinis, is fluuius nomen Eridani commeruit. Ab Italis Alexandrini acceperunt. Nam etiam nomen Italicum *fuuini* vulgatum eſt in Aegypto, vt ex *Clementis Alexandrini Stomatis* colligo (*i*). Τὸ δάκρυον, inquit, τοῦ σύχιον ἐπισπᾶται τὰ κάρφη καὶ τὸ ἤλεκτρον τὰς ἀχυρμὰς ἀνακινεῖ. Cum in honore eſſet Alexandriae, βερονίνη dici coepit (vnde *vernicem* adhuc dicimus) et corruptum ex eo βερνικάριον. *Nicomedes* in gloſſis: βαρνικάριον νίτρον ἐρυθρὸν, οἱ δὲ ἤλεκτρον, οἱ δὲ βερονίκην. Credo a *Beronice Ptolemaei* et *Arſinoes filia Ptolemaei Soteris* coniuge, cuius crines *Conon Samius* et *Callimachus* conſecrarunt, *deuotas flaui verticis exuuias*, vt *Catullus* loquitur. Quod exemplum Nero Caeſar imitatus, quodam in carminae Pappaeae crines ſuccina vocauit. Et ſic *Nonnus Panopolita* (*k*).

Zz 3 ἐς

(*i*) f. 370. (*k*) Dionyſ. Lib. XLII. 25.

ἐις σε κομίσω
Δῶρα διαςίλβοντα φεραυγέος Ἠριδανῖο
Ἡλιάδων δ' ὅλον ὄλβον ἐπαισχύνει σέο μορφὴ
Λευκὶν ἐρευθιόωσα, βολαῖς δ' ἀντιέρροπος ἠοῦς
Ἴκελος ἠλέκτρῳ Βερόης ἀμαρύθεται αὐχήν.

ad te feram
Munera lucida lucidi Eridani,
Heliadum tamen omnes diuitias pudore suffundit tua forma
Candidum rubens radiis verum contra splendens aurorae
Similis electro Beroes resplendet ceruix.

Mirum igitur non eſt, vt dixi antea, ſi Padum, vnde ſuccina Tarentini et Alexandrini accipiebant, illum Eridanum eſſe putauere. Scholia in Aratea Germanici: *ab Arato et Pherecyde Eridanus Padus eſſe putatur.* Marcianus Capella: *Italia etiam Pado flumine memoranda, quem Graecia dixit Eridanum.* L. Ampelius: *Eridanus et Tiberinus in Italia.* Sed quid per obſcura nomina incedimus, cum habemus Polybium (*l*) ὁ πάδος ποταμὸς, ὑπὸ δὲ τῶν ποιητῶν Ἠριδανὸς θρυλλούμενος. *Theophraſtus* quoque (*m*) ἐπεὶ καὶ τὸ ἤλεκτρον λίθος, καὶ γὰρ ὀρυκτὸν τὸ περὶ λυγγιστὴν. *Theophraſtus in Liguria effodi dixit*, inquit *Plinius.* Sic alii apud Plinium. Nemo tamen eos lepidius exagitauit quam Lucianus Samoſatenſis. Erant enim ſuccina teſte Plinio etiam apud Macedonas Syros in honore. Lucianus autem (*n*) ita ridet, vt adpareat hominem ob ſuccini luxuriam ab Nerone ante ſe natum inuectam, non ignoraſſe, vnde ſuccina perferentur. Itaque fingit, ſe profectum naui ad Eridanum, ſe Padum Italiae, id vnum ſpectaſſe, quomodo explicato ſinu cadentes Heliadum lacrumas exciperet,

ὡς

(*l*) Lib. II. Cap. 16. (*m*) περὶ λίθων §. 6. (*n*) Tom. II. p. 369.

ὡς ἤλεκτρον ἔχοιεν, vt et ipſe ſuccina, rem adeo pretioſam haberet. Sed cum proficiſceretur aduerſo flumine, nec arbores iſtas ſuccini feraces vsquam locorum vidiſſe, nec electrum nec notum Phaethontis nomen et adeo carminibus celebratum apud *Patauinos* inaudiuiſſe: quaerentem etiam ex nautis, quando tandem ad illa feracia ſuccinis loca peruenturi eſſent, irriſum inſuper interrogatumque fuiſſe, quae ſibi ſuccina diceret, quem Eridanum? Narraſſe ſe fabulam omnem veluti ad gnaros: tum vero illos ſciſcitatos eſſe, quis impoſtor haec tam manifeſte vana ipſi narraſſet: neque enim ſe aurigam caelo lapſum audiuiſſe, neque eiusmodi arbores: ſi quid eius rei apud ſe naſceretur, nae ſe non duorum mercede obolorum remigaturos, cum poſſent e collectis arborum lacrumis opes vel regias comparare. Itaque ſe perturbatum ſpe omni peregrinationis excidiſſe, veluti ſuccinum mox ſinu excipiendum, rem adeo caram et pretioſam aliquis excuſſiſſet, cum iam ſecum computaſſet, quantus ex vna re fructus ſibi rediturus eſſet. Sic ille Graeculos naſo adunio ſuſpendebat.

Alii cum animaduerterent Rhodanum in Iberia aliquid eiusmodi habere, quod Eridano conueniat, hic putarunt ſe ſuccina reperturos. In eorum numero, nec dicam poetas, *Theophraſtus* quoque fuit. *Theophraſtus* inquit *Plinius*, *oceano id exaeſtuante, ad Pyrenaei promontorium eiici: quod et Xenocrates credidit, qui de iis nuperrime ſcripſit.* *Athenaeus* (o) *Hieronem* Syracuſanorum regem in naui aedificanda ſcribit aliam ex Italia materiam, aliam ex Iberia petiiſſe, κάνναβίν τε καὶ κίττον ἐκ τοῦ

(o) Lib. V. Cap. 10.

τȢ Ἠϱιδανȣ̃ ſic enim legit *Euſtathius*, cum *Caſſaubonus* e codice ſuo edidit Ῥοδανȣ̃ τȣ̃ ποταμȣ̃.

Hae cum tam diſcrepantes eſſent ſententiae, acceſſit *Apollonius Rhodius*, qui omnes inter ſe conciliaret. Credidit enim Eridanum tribus alueis et in ſeptemtrionalem oceanum et in *Adriaticum Liguſticumque* mare effundi. *Rhodanum* dicit et *Padum* et illum ignotum, at illuſtrem poetarum monumentis Eridanum. Coniectura haec erat nixa fide vanorum hominum, nec niſi poetae condonanda. Argute ſane *Plinius*: *faciliorem veniam facit ignorati ſuccini, tanta orbis ignorantia.*

Alia quoque cauſſa eſt, quamobrem Eridanum crederent eſſe Padum. Audiuerant ab Eridano perferri ſuccina, audiuerant quoque a Venetis perferri. Iam Veneti ad Padum erant, idcirco in opinione ſua confirmabantur. Sed nos in his obſtinati ſumus. Scilicet audiuerant, ſuccina legi a Venedis. Venedae igitur in his ſucciniferis regionibus coluere et ſuccina transmiſere ad Rhudonem ſeu Eridanum. *Scylax Caryandenſis*: μετὰ δὲ Κελτȣ̀ς Ἐνετόι εἰσιν ἔθνος ϗ ποταμὸς Ἠϱιδανὸς ἐν αὐτοῖς. Non ſatis apparet inaudiueritne Scylax aliquid de Venetis Circumpadanis, an de Venedis noſtris. Nam profecto ne dicam Scylaci, Herodoto quoque littus omne Adriatici maris ita ignorabatur, vt huius Baltici. Celtas autem dicebant etiam veteres non modo populos ad Rhenum, verum etiam omnes Germanos et Ephorus id nomen protendebat vſque ad Viſtulam. Inde rurſum noui errores. Pauſanias (*p*) Eridanum per Gallos volui ait, ſerius autem

(*p*) f. 10.

tem Gallos vocatos, qui antea Celtae dicerentur. (*Scholia Hesiodi* Theog. v. 338. Ἠριδανὸς ποταμὸς Κελτῶν.)

In his tennibus sane vestigiis consecutus sum Venedas coluisse antiquissimis temporibus a Vistula admodum ad Dunam fluuium. Hic ergo Electrides quoque insulae feuere. Credo Graecos de Sembia et vtraque Neringia in Prussiae littoribus inaudiuisse, fortassis etiam de insulis, quae Liuoniae praetenduntur. *Plinius* de Electridibus: vanitatis certissimum documentum: *adeo, vt quas earum designent Graeci, haud vmquam constiterit.* Saluae e contrario nunc res sunt, vbi situs locorum insulas continenti praetentas omnium oculis obiicit. Hic succina proueniunt, hic Electrides sunt.

Postquam Venedas suis in locis constituimus, quae gens, vnde orta sit, quaeremus. Habet suos Venetos *Homerus* in Paphlagonia (*q*). Prolixus in iis est pro sua consuetudine *Homerus* et ad Eustathium et ad Periegetem. In quibus id quoque est, veteres Ὀυενετίαν quinque syllabis pronunciatiasse, suo tempore Βενετίαν dici. Nihil dicam de his, quae de Venetis ad Padum illorum e Cappadocia colonis referuntur. Nihil enim facilius est, quod *Grotius* prudenter monuit, quam vt in longe dissitarum gentium nominibus, si forte aliquo sono congruant, decipiamur. De his nostris Venedis dicam. *Iornandes* sic ait: *ab vna exorti stirpe tria nunc nomina reddidere Veneti,*

(q) Il. B. 852. Schol. Apoll. ad Lib. II. v. 358.

neti, *Antes*, *Sclaui.* Leibnitius in miſcellaneis Berolinenſibus Antes et Vendos eosdem eſſe opinatus eſt et ſola pronunciatione differre, *littera w*, (*vt paſſim fit*) *nunc praepoſita*, *nunc omiſſa.* In eo ego deliberandum cenſeo, propendet tamen in diuerſa animus. Sed qui poſſunt eiusdem ſtirpis et Venedae et Sclaui eſſe, qui toto genere linguae discreparunt. *Hartenochius* Sclauonice fuiſſe locutos contendit, quod nunc Vinidi eo ſermone vtantur. Verum enim vero ſi rem explorari ab ſtirpe oportet, Venedae nequaquam Sclauonice ſunt locuti. Nam illi qui adhuc in agro Luneburgico ſuperſunt, medii inter Germanos, adſciuerunt quidem quaedam Germanica, ſed totum adhuc ſermonem *Prutenicum* quaſis olim fuit Lituanicum Curonicum conſeruant, vt eorum lingua tantum differat a Slauonica, quantum Luſitanica ab Islandica et Romana a Graeca. Id alias pluribus oſtendam, cum cognatas linguas inter ſe conferam in tabula, ad conſtituendam populorum Scythicorum neceſſitudinem. Nunc tantum preces ſanctiſſimas domini deique noſtri ex *Io. Georgii Eccardi* hiſtoria ſtudii Etymologici in teſtimonium producam. Caue ſcopulum (v. Leib. Collect. etym.). Sunt in his plurima Germanica, quaedam Sclauonica, quod Venedae inter eas gentes coluerunt, at manent adhuc veſtigia veteris linguae Scythicae, quae non niſi ab antiquiſſima ſtirpe. Niſi qui dicere malit, et Scythas et Sarmatas in vnum corpus confluxiſſe. Id vero ipſum nomen

men Venedarum indicare videtur. Nam *Venden* his, quas dixi linguis significat *societatem colligere*, quod verosimilius est ἔτυμον, quam *Matthaei Praetorii*, qui quasi *Panaitas*, *rerum dominos dictos* putauit. Sed Venedi in Hexapoli Lusatiae ob longum vsum linguae Sclauonicae magis adhuc degenerarunt. Venedas autem Sarmatici corporis non fuisse, etiam *Cornelius Tacitus* audiuerat: *Venedi multum a moribus Sarmatarum traxerunt: nam quidquid inter Peucinos Fennosque syluarum ac montium erigitur, latrociniis pererrant: hi tamen inter Germanos potius referuntur, quia et domos figunt et scuta gestant et pedum vsu ac pernicitate gaudent, quae omnia diuersa Sarmatis sunt, in plaustro equoque viuentibus.*

DE
CONFVCII LIBRO
Chūn çiēu.

AVCTORE
T. S. *Bayer.*

EX omni copia Sinicorum librorum pauci quidam publica auctoritate et legibus imperii ſic comprobati fuerunt, vt ſecundum eos iuuentus erudiatur, proueсti aetate ſtudiisque litterarum examinentur et pro portione cognitionis eorum ſcientiaeque, dignitatum gradus conſequantur, denique, vt quidquid ad morum diſciplinam, ad rempublicam adminiſtrandam, contemplandam naturam, vetuſtiſſimam rerum geſtarum memoriam proponatur, ex iisdem diiudicari oporteat. Hos *libros* Miſſionarii omnium ordinum percommode *claſſicos* vocitarunt, vt quondam ciues Romani claſſici fuerunt dicti, qui in prima claſſe propter facultates ſuas cenſebantur, cum *infra claſſem* dicerentur, ſecundae ceterarumque ciues, qui minorem ſummam aeris apud cenſores profiterentur, proletarii et capite cenſi in extrema conſiſterent, aut potius nullo loco haberentur. Eum in modum, librorum Sinicorum quatuor claſſes conſtituere mihi videor poſſe, vt in prima ſint *Kīm.* *Kīm*, propriē, *fila recta in opere textorio*, ſeu *ſtamen*, ſignificat, vt *Goey*, *tranſuerſa fila*, ſeu *ſubtemen*. Inde illarum vocum notatio ad caelum relata fuit, vt *kīm* dicantur *ſtellae fixae*, *auſter et ſeptemtrio*,

Tabula XVI. Figura [1.]

緯[1]五[2]經易[3]經書[4]經詩[5]經禮[6]記春[7]秋四[8]書大[9]

學中[10]庸論[11]語孟[12]子性[13]理大全通[14]鑑[15]眘治夏[16]

商[17]周[18]國[19]列[20]國輿地之圖說[21]傳[22]稱武王克商。

光有天下姬[23]姓爵[24]五品。而土三等。公侯百

里。伯七十里。子男五十里。周[25]室既衰轉相

吞滅。數百年間。列國耗盡。春秋之世。見於

經傳者總一百二十四國。王[26]城燕[27]吳[28]韓[29]郝

小[31]邾越[32]莒[33]許[34]魯[35]隱[36]公桓[37]莊[38]閔[39]僖[40]文[41]宣[42]成[43]

trio, ſeu *latitudo aſtronomica*: *gvéy* econtrario, *planetae*, *oriens et occidens*, ſeu *longitudo aſtronomica*. Relata quoque fuit ad alias res, eſtque *kim*, *norma*, *ratio regulaque*, ſecundum quam aliquid exigatur. Iam cauſſa appa- Tabula XVI
ret, cur *V kim*, *quinque libri*, et quaſi *Pentateuchus* nun- Figura [2].
cupentur, qui primum dignitatis gradum tenent atque hoc
ordine recenſentur. Primum eſt *Te kim* deinde *Xu kim*, [3] [4.]
poſtea *Xi kim*, tum *Ly ki*, et quinto loco *Chun çieu*. [5.] [6.] [7.]
Altera in claſſe ſunt libri *Su xu*, ſeu *quatuor libri* et quaſi [8.]
Tetrateuchus. Tres, inquam, Confuciani, *Ta hio*, *Chum* [9.]
yûm, et *Lun yú*: quarto loco ſcripta *Mem çu*, ſeu *Mem*- [10. 11. 12.]
cii philoſophi, qui annis centum et octo poſt Confucii mortem natus eſt (*a*). Hi libri ſic paullo minori in dignitate ſunt, quam *V kim*, vt ceteroqui ſint in ſumma. Idcirco *V kim* et *Su xu* communi nomine dicuntur *Lo kim*, id eſt, *ſex Kim*, ſeu *ſex libri claſſici* (*b*). Intra has duas claſſes Philippus Coupletus et ex eadem Societate ceteri omnes conſtiterunt, praeter vnum *Nicolaum Longobardum*. Hic commotus teſtimonio *Michaelis* Doctoris Sinici, ſed, qui Chriſtianum nomen profeſſus fuit (*c*), non modo illos, quos dixi, libros, ſed eorum quoque veteres interpretes et philoſophiam *Sim ly* et annales *Tum kién* claſſicis inſeruit. Antonius de S. Maria, Miſſionariorum ex familia Franciſci praefectus (*d*), eosdem

(*a*) Ante A C 372 (*b*) Videatur Philippi Coupleti declaratio Proëmialis ad Confucium p 15. (*c*) p 25, inter epiſtolas Leibnitianas Tomo II. ed Kortholti, vbi pro *Tien kien* legi oportet *Tum kien*. (*d*) Perperam ibi quoque *Ta civen ſing ly*.

eadem auctoritate esse contendit, qua sint antea a me commemorati libri. Coupletus, neque interpretes qui fuerint, reticuit, neque quae illa philosophia naturalis *Sim ly ta civen*, quanta denique eorum omnium apud Sinos sit auctoritas, dissimulauit. Neque eo inficias, cum historicorum multitudo exstet prope infinita, annales *Tum kién*, qui multis voluminibus omnium memoriam aetatum complectuntur, quorumue maxima pars ex officina *Çu chí* in bibliotheca Regis Prussiae Berolini est reposita, ceteris chronicis fama et existimatione eruditorum longe anteire. Itaque nihil me vetat, hosce libros, quod et ipsi publica auctoritate sunt confirmati, in classe ponere, attamen tantummodo in tertia. Proletarii denique nobis erunt quarta in classe, cum priuati sint omnes et quasi sine censu. At Iesuitae cum classicos tantummodo appellant *Lo kîm*, seu *sex volumina*, quae in prima classe et in secunda recensuimus, tum Sinorum iudicio, tum suo quodam iure agunt. Vt in Romanorum ciuium *classibus* census grauis aeris, sic in hac controuersia, antiquitas decernit. Recepti sunt igitur omnes hi libri, at dignitate fortunaque diuersa. Non potuerunt vel Nicolaus Longobardus, vel Antonius de S. Maria, vel Nauarreta, ceterique Iesuitarum aduersarii diffiteri, illam de natura commentationem, auspiciis *Tum lo* Imperatoris, circiter A. C. 1415 promulgatam fuisse. Interpretum Sinicorum, item vt auctorum chronici *Tum kien* diuersae fuerunt aetates, vniuersi tamen, Sinis ipsis testantibus, Confucio multo recentiores exstiterunt. Itaque Iesuitae, cum hos vel a priscorum Sinorum sententia, vel alioqui a vero aberrasse deprehendant, non admittunt tamquam classicos, hoc

Tabula XVI. Figura 13

[14.]

[15.]

hoc eſt, quod cuiuis licet ſapienti homini, ab eorum opinionibus ad vetera monumenta prouocationem ſibi dari poſtulant. Vt ſi de Ariſtotelis philoſophia diſceptatio oriatur, non modo Conimbricenſes, et Scholaſticos, ſed etiam Porphyrium ceteroſque interpretes Graecos, tametſi priſcos, non huius faciemus, vbi in Ariſtotele mens erecta et ſubtilis omnia alia reperiet. At Sini peregrinos homines vetera monumenta ſuae gentis eorum arbitratu explicare non ferent, non patientur. Ne iſthuc quidem in Ariſtotele ſtatui aequo animo paſſi ſunt Scholaſtici, tamen vis veritatis tempuſque, quantum potuerint, non obſcurum eſt. Irriſus eſt a Bonzio aduerſario *Matthaeus Riccius*, vt *Longobardus* teſtatur, econtrario collaudatus idem eſt a litteratiſſimis inter Sinas viris, neque vnquam Ieſuitis fraudi fuit, ab omnium interpretum ſententia diſſenſiſſe, cum praeſertim aliis in diſciplinis demonſtraſſent, quantum Europaei et ingenio et ſcientia Sinos antecellant. Sed tametſi hi libri claſſici tanta in auctoritate ſunt, attamen eorum non eadem ſemper fuit conditio. Nam liber *Chun çieu* ſero ad ſummum gradum eſt euectus, cum quidam ex philoſophis, vt *Tu yu*, dignum iudicaſſent, qui ceteris *Kim* aequiperetur, immo cum *Lieu chi ki* antiquitate quoque cum *Xu kim* comparaſſet. Receptus eſt denique in primam claſſem ſub dynaſtia *Sy Hia*, quae vt ad R. P. Stephanum Soucietum (*e*) relatum fuit, in *Xen Sy* ceteriſque occidentalibus prouinciis extra moenia regnauit, cum dynaſtia *Sum* orientales teneret, donec *Sy Hia* circiter A. C. 1226. a Gingiſiane debellata et deleta fuit.

(*e*) *Obſervations Mathematiques Aſtronomiques* etc. Tomo II. p. 2.

fuit. Sed omnium librorum classicorum tantum fragmenta habemus. Nam Imperator *Xi Hoam ty* anno ante C. N. 213. omnes libros toto imperio, quod primus omnium Imperatorum summo dominatu rexit, moenibusque ad septemtrionem et occidentem cinxit, opere, nisi adhuc exstaret, ad posteritatem incredibili, omnes igitur libros, praeter medicos et iuridicos mandato seuerissimo conquisitos exussit. Tantó eorum flagrauit odio, vt *anno* post, litteratos homines complures viuos sub terra defoderet, credo, quod simul cum chartis ipsam rerum sententiarumque, quas in iisdem damnabat, memoriam in his eruditis viris superstitem, exstinctam vellet, ne aliquando ex ea libri ipsi ab obliuione atque interitu vindicari possent. Annis post, tribus et septuaginta *Vu Ty*, ex dynastia *Hia* regnare coepit, Imperator, quemadmodum Sini iudicarunt, ita fortissimus rebusque gestis clarissimus, vt singulari fuit sapientia. Is vndique *toto imperio* fragmenta librorum maximo cum discrimine occultata congessit, partem etiam ex doctorum hominum memoria requisiuit. Illius etiam studio iterum digesti emendatique sunt prisci libri, et commentariis illustrati: qui interpretes sub familia *Hia*, omnium, qui eos consecuti sunt, duces et antesignani fuerunt. Item igitur his in libris euenit, quod Romae post exustum ciuili inter optimates et Marianam factionem bello Capitolium, Sibyllinis carminibus accidit. Nam quaesitis Samo, Ilio, Erythris, per Africam quoque ac Siciliam et Italicas colonias Cumaeae Sibyllae ceterarumque, si quae fuerunt aliae, carminiminibus, datum sacerdotibus et eorum magistris negotium est, *quantum humana ope possent, vera discernere* (*f*). Vereor autem, ne idem deinde Sinicis libris quoque acciderit, quod Sibyllinis, quibus non modo ita integris, sed etiam vitiatis suspectisque postea vsi sunt Romani, quamobrem a C. Tiberio Caesare accepimus (*g*), *quia multa vana sub nomine celebri vulgabantur, sanxisse Augustum, quem intra diem ad praetorem vrbanum deferrentur, neque habere priuatim liceret.*

Venio nunc ad Confucii *Chun çieu* speciatim recensendum. Is liber historiam multorum annorum complectitur. Enimuero neque de ea historia, neque de toto libro dicere me posse sentio, priusquam explicatum a me sit, qui status imperii Sinici et antea fuerit, et illis temporibus, quae liber *Chun çieu* comprehendit. Tres dynastiae seu familiae Imperatoriae, quae in Sinis primae fuerunt, sibique successerunt, maxima feruntur fama, quod earum res partem in *Xu kim*, partem in *Chun çieu* ceterisque libris classicis traduntur: sed multo, vt opinor, maxime, quod status imperii, qui tam fuit, a *Xi Hoam Ty*, quem supra commemoraui, penitus sublatus, neque vmquam, imminuta Imperatorum maiestate, restitutus, immensum sui desiderium, apud obstinatos libertatis recordatione animos, et nullam imperii, etiam multo sapientius, iustius clementiusque et secundissima ex merito gloria gerendi gestique felicitatem, extra illam libertatis conditionem, satis aeque adsensu ferentes, reli-

(*f*) Tacitus Annalium Lib. VI. Cap. 12. (*g*) Tacitus ibidem.

reliquit. Miraculo ſimile eſt, potuiſſe tantum imperium ruinam atque interitum poſt tot ſecula effugere, in quo libri ſint legum auctoritate confirmati, quos vniuerſi in caelum fere laudibus, explicent publice, priuatim ediſcant, quos Imperatores ipſi in deliciis honoreque habeant, ex quibus ſibi ſuisque exempla ad imitandum proponant, in quibus tamen ſeditionum foecundae ſint ſegetes, cum in primis liceat licueritque impune, formulam illam imperii, quam hi libri produnt, vti optimam commendare, quae, niſi euerſa Imperatorum maieſtate, aut ſaltem magnopere imminuta, exiſtere non poſſit. Neque vero obſcurum eſt, res Sinici imperii ex annalibus recordanti, nihil adeo tot domuum Imperatoriarum ruinam acceleraſſe, quam animum populi, illius vetuſtiſſimi ſtatus deſiderio et exſpectatione imbuti. Ea quoque cauſſa fuiſſe videtur, quamobrem Confucius, qui naſcentem aetate ſua et ad id faſtigium, quod deinde conſecuta eſt, adſpirantem, *ſed libratam* adhuc mutua principum aemulatione *potentiam* ferre non poſſet, et magiſtratu euerſus fuerit et ad mortem quaeſitus, vt diu cum egeſtate conflictatus, nusquam tutum fortunis ſuis locum reperiret, ac denique vel maritimo curſu, vel terreſtri itinere ad barbaros fugiendi conſilium caperet. Habebat ille multa, quae in ſeculo ſuo, iure meritoque redargueret, virtutis, neque ita impenſe, vt cupiebat Confucius, neque quantum ea ſuperiorem aetatem floruiſſe exiſtimabat, ſtudioſo, tametſi etiam olim foeda exempla haud minus, quam Confucii ſeculo, ſtatuta fuerant. Sed iſthuc apparet, eum potiſſimum reprehendiſſe, quod priſtinus imperii ſtatus conuelleretur, cum etiam minimis in caeremoniis nihil nouari mallet, quae

prae-

praecepta destinato principum consilio vehementer aduersabantur. Idcirco *Xi Hoam Ty* cum tandem optata ceterorum principum, et maxime maiorum domus suae impetrasset, oppressisque tot regulis, solidum imperium plena potestate gubernaret, hanc cum philosophorum tum historicorum seditioni nimis seuere repressit. Sed videbat, monarchiam consistere non posse, nisi infinita pristini status, vtcumque turbulenti et in commune perniciosi, existimatio ex animis hominum vi maxima illata exstirparetur.

Principio Sinae multo minoribus terminis circumscriptae fuerunt, quam nunc sunt. Confucii aetate fere intra hos limites, quos nunc sub borea et occidente murus Sinicus definit, et florentissima quidem pars earum intra fluuios *Hoam* et *Kiam* atque regnum *Xan tum* comprehensa fuit. *Quam tum et Quam sy* regna sub austro maxima annis denique centum et septuaginta ante C. N. huic imperio sese subiecerunt, cum ab omni aeuo sui iuris fuissent. Sed neque imperii, ea quae nunc est, diuisio locum inuenit, neque ea vel prouinciarum vel vrbium, fluuiorum, montium, quae hodie celebrantur nomina exstiterunt. Quotiescunque *Philippus Coupletus* in vetustissima memoria regionum locorumque, quae nunc sunt, nomina adhibet, historicorum recentiorum auctoritatem sequitur, qui pro obsoletis substituerant noua. Nam vt apud nos veteri in Latio et Graecia omnique veteris orbis geopraphia antiquariorum industria elaborauit, ne quem ex prisca memoria locum, vbi nunc situs sit, quoue nomine nuncupetur, ignoraremus, ita eodem in studio Sinenses occupatos fuisse inuenio, vt id ipsum in orbe suo posteritati non lateret. Fuerunt deinde multi principatus, qui ad sui defensionem et ad populorum commune vinculum vni alicui summam rerum sine successione eius domus committerent. Tandem quod hi principatus haereditarii essent, placuit, vna in domo summam dignitatem transferri ad seros nepotes. Sic orta est prima dynastia

Tab. XVI. F. [16] [17.] Imperatorum *Hia*, hac euersa, successit secunda *Xam*,

[18.] et huic oppressae tertia *Cheu*, sub qua Confucius vixit.

[19.] Ceteri principatus etiam Confucii aeuo dicebantur *que*, quod vocabulum siue *regnum* siue *principatum* interpreteris, haud magno in discrimine ponam. Reguli igitur illi ex prosapia *Hoam Ty* (*b*) item vt Imperatoriae domus orti, agros suos ex haereditate tenebant, at legibus et institutis ex foedere cum Rege deuincti erant, et ad maiestatem eius tuendam et ad omnem vim externam mutuis auxiliis opibusque propulsandam. Propter hanc consociationem dicta fuerunt *Liě quě*, seu *distributa atque coniuncta regna*. Eorum, mea in editione libri *Chūn çieū* tabula geographica exstat, inscripta: *Liě quě*

[20.] *yu ty chi tu*, *distributorum regnorum geographica tabula*. Fuit haec sane, quod ex monumentis constat, antiquissima publicarum rerum forma, satis ad totius corporis hominum in societate viuentium conseruationem apta, donec tempus et multitudo mortalium et vicinorum populorum conditio, necessitatem eam imposuit, vt publica res, nisi sub vnius dominatu, salua esse non posset. Vetus

(*b*) Confer omnino *Tabulam Genealogicam trium familiarum Imperialium monarchiae Sinicae* ex Sinico Latine editam a P. Coupleto.

tus illa Sinicae rei publicae formula istiusmodi vtique fuit, qualem apud diuinum Mosen in Genesi, vetustissimo omnium exemplo discriptam reperimus in Kedorlaomare rege Elamita regulisque ei dicto audientibus (*i*), ne nunc alia quoque sanctissimae scripturae monumenta in testimonium producam. Et apud Graecos bello Troiano ille regum rex Agamemnon ceterique reges haud dissimili conditione fuerunt. Apud Sinos vero regum regis maiestatem in his fere maxime sitam fuisse reperio, quod regulos ad comitia vocandi et de communi re consulendi potestatem haberet, quod iis in comitiis sublimi loco praesideret, quod quaedam sacra solus perageret, quae ceteros regulos peragere ius fasque non fuit, quod denique quibusdam aliis honoribus caeremoniisque ante ceteros regulos coleretur, quorum omnium quaedam in *Li ki* ad memoriam supersunt. Quemadmodum in principum consensione maiestatis eius cardo versabatur, ita in dissensionibus vis principum maiestate fuit potior. Inde paullatim nihil praesidii in communem vniuersorum salutem coepit esse, si praesertim rex iniuste atque immoderate sese gereret, aut principum aliqui virium fiducia insolescerent. Sic dynastia *Hia* deleta est, cum *Tam* regulus, iniuria accepta, ab octingentis regulis populoque contra postremum regem voluptatibus immersum concitatus, arma sumsisset. Is auctor fuit dynastiae Imperatoriae *Xam*. At haec dynastia, vt potentiam domus suae muniret, ad extremum coepit regulos atterere, donec postremus tam principes, quam populum crudelitate et superbia offendit. Sic enim

 regu-

(*i*) Geneseos Cap. XIV.

regulo *Ten* principatus, qui ea in regione fuit, quam Pequinenſi regno nunc accenſent, tam felici eſſe contigit, vt ſumma rerum potiretur. Victor regulas *Fa*, nomine abrogato, quod ei antea fuerat, *Vu Vam*, quaſi *Ptolemaeum regem* dici ſe voluit, dynaſtiamque Imperatoriam, quam in domo ſua exorſus eſt, *Cheu* nominauit. Vt Sini chronologi, qui nunc ſunt, a nobis flagitant, (nam tota illorum temporum chronologia res eſt admodum incerta) ab anno ante C. N. 1122 per 873 annos, Imperatores ex hac domo 35 exſtiterunt.

Hunc *Vu Vam* Imperatorem annales Sinici impenſe laudant, neque minus Abdallah Abu Said Beidaccaeus (*k*), qui hiſtoriam Sinicam ex ore quorundam philoſophorum Sinenſium, qui ante hos quadringentos et ſexaginta annos cum Hulacu Chano fuerunt, commentatus eſt Perſice. Et laudem vero illam ab iuſtitia, clementia ſapientiaque conſecutus eſſe dicitur: credo tamen munificentia et priſtino regni ſtatu reſtituto vniuerſos ſibi vel maxime deuinxiſſe. Nam cum quaedam regulorum familiae a dynaſtia *Xam* de gradu deiectae, aliae oppreſſae eſſent, et illas poſtliminio ad dignitates reduxit et bene de optimo publico meritos ex inferiori loco ad ſimilem ſplendorem euexit.

Igitur in mea editione libri *Chun çieu*, tabulae geographicae, de qua ſupra dixi, *xue* ſeu *praefatio*, de meritis
Tabula XVI. Figura 21. eius et de ſtatu imperii, qui tum fuit, ſic retulit:

Chuén

(*k*) p. 26. vocat cum جو فرا ونك *Giu Fra Vang*. At ſcribae alicuius hic error fuit, quem Andreas Muller non ſuſtulit totum. Apparet, ſcriptum fuiſſe a Beidauaeo چو فو وانك *Tſcheu Vu Vang*, i. e. *Cheu*, (vt recepto more ſcribimus, *Tſcheu*) dynaſtiae rex, nomine *Vu Vam*.

Tabula XVI. Figura 22.

Chuén *Dilatauit sapienter*
chim *et ponderauit vnius cuiusque merita*
Vu Vam } *Vu Vam Imperator,*
ke *qui vicit et subegit*
Xam. *dynastiam imperii secundam Xam.*
Quam yeu } *Ad solis instar illustrauit*
tien hia. } *terrarum orbem, seu, Imperium Sinicum.*

Postquam deinde narrauit, quemadmodum quindecim fratres huiusce *Vu Vam* et quadraginta ex *kì sim*, seu *ki* coniugis eius familia, regnis aucti fuerint, ita deinceps fatus est auctor: [23.]

Cio *Officiorum dignitatumque cum adsignatis reditibus (fuerunt)* [24.]
u *quinque*
pin *ordines:*
eulh *et*
tu *terrarum (adsignatarum fuerunt)*
san *tres*
tem. *species.*
Cum, *Eius qui Cum dicebatur,*
Heû *(et eius) qui Heû dicebatur,*
pe *centum*
li. *stadia Sinica fuerunt.*

Pě,

Pě, *Eius, qui Pě apellabatur*
cie
xe } 70
ly. *ſtadia Sinica fuerunt.*
Çú, *Eius, qui Çu vocabatur,*
Nân, *et eius, qui Nân appellabatur*,
u
xe } 50
ly. *ſtadia Sinica fuerunt.*

Poſſimus *Cūm* vocare *Regulum*, *Heû* vero *ethnarcham*, *Pě*, *Ducem*, nam reuera *ducem belli* ſignificat, *Çu*, *dynaſtam* et *Nân*, *Praeſidem*, vt apud Romanos, prouinciarum fuerunt praeſides. Summam deinde horum a dynaſtiae *Chēu* conditore adſignatorum *qve*, ſeu principatuum colligit 1800. At vero, inquit:

Tabula XVI. Figura 25.

Chēu *ſub Chēu*
xě, *familia*,
ki
xuai } *paullatim facta ſunt debilia (regna)*
Chuen *inuerterunt*
Siám *formam ſtatus*
tūn
mie. } *et ſeſe mutuo deuorarunt.*
So *Numerando*
pe *centum*
nien *annos*
kiēn, *intra*,

hi

lie *distributa*
qve *regna*
mâo *penitus*
cín. *fidelia fuerunt.*
Chūn / *çieū* / *chi* — *Libri Chūn çieū*
xí, *aetate,*
kién *scilicet*
yū / *kim* — *in hoc libro (commemoratae)*
chuèn / *che* — *dignitates cum prouentibus ad posteros haereditate propagatae*
çúm *in summa sunt*
ye / *pe* / *eulh* / *xe* / *su* — 124
qve. *regna.*

Quemadmodum igitur reguli et principes minores intra centum annos in fide Imperatoris et obsequio perstiterunt, post autem eidem refragari atque inter se simultates serere, et foedera passim ferire coeperunt, ita *Y Vam* Imperator ex familia *Cheu* nonus, qui 228 annis post conditam familiam imperio potitus est, tum ob mentis debilitatem, tum, quod regulis, qui ad comitia veniebant, nimium concedebat, maieſtatem imperii publico ludibrio expoſuit. Eius filius labantem iam crudelitate et impotentia animi amplius concuſſit, nepos vero *Siven vam* prudentia inſigni ſuffulciuit. Iterum vniuerſorum animos abs ſe abalienauit eiusdem pronepos *Yeu Vam.* Sic ad imperium peruenit *Pim vam* huius filius, tertius et decimus iſtius familiae. *Vu Vam* ſedem imperii conſtituerat in vrbe, quae nunc *Sy gan fu* vocata, in *Xen ſy* ſita eſt. At Tabula XVI. Figura 26. *Pim vam* eam in *Vam chim* vrbem transtulit: ſita illa fuit in prouincia, quae nunc *Ho nan* dicitur. Hoc conſilium vt prudenter captum fuiſſe videtur, propior enim nunc regulis maxime florentibus erat Imperator, ſic audaciores reddidit regulos, qui iam impune inter ſe foedera faciebant et bella ſerendo poteſtatem in dies magis magisque augendi cupiditate flagrabant et Imperatori dicto audientes non erant.

Inter tot principatus duodecim maxime fuerunt inſignes, tum propter opes, tum ob diuturnitatem ſucceſſionis. Succeſſionem regulorum illis in dynaſtiis eruditus editor Sinus ad ſingulos annos in *Chun çieu* diligentiſſime annotauit, regiones in tabula deſcripſit. Et tantum potuit vis obfirmatorum antiqui ſtatus ſtudio animorum, vt non minus quam Imperatoriam dynaſtiam *Cheu*, hos quoque regulos rebelles aſteriſſimis inſereret poſteritas. In *Xan tum*, vt nunc quidem prouincia vocatur, fuerunt, *Lu*, *Ci*, et *Ki*, in *Ho nan*, *Guéy*, *Sum*, *Chim* et *Chin*, in *Hu quam*, *Çù*, in *Pe kim*, *Çí* et *Çâo*, in *Xen ſy*, *Çin*, in *Xan ſy*, *Çin*. Sed multo plures principatus, praeci-

praecipue in *Xam tum* exstiterunt non obscuri, in pri- Tabula XVI. F. [27.] [28.]
mis vero *Ten*, *V Han Chu Siao chu Tve Kiu Pie* [29.] [30.] [31.] [32.] [33.] [34.]
et alii. Non erit inconsulte factum, si regulos ex duodecim dynastiis praecipuis, qui ad aetatem libri *Chun çieu* pertinent, hic ordine suo ponam.

I. *Lù* reguli, qui omnes a dignitate in imperio vocati sunt *Cum* (*l*). [35.]

Yn cum, cuius annus primus congruit cum anno 49. Imperatoris *Pim Vam* et cum 56. cycli XXXIII. seu, cum A. ante C. N. 722. inde vsque a vere, a qua auctumnitate omnes omnium regulorum cunctis in dynastiis anni et quidem semper absoluti numerantur. [36.]

Huon cum, ab A. ante C. N.			711. annos		18.	[37.]
Chuam cum,	-	-	693.	-	32.	[38.]
Min cum,	-	-	661.	-	2.	[39.]
Hy cum,	- -	-	659.	-	33.	[40.]
Vên cum,	- -	-	626.	-	18.	[41.]
Siven cum,	-	-	608.	-	18.	[42.]
Chim cum,	-	-	590.	-	18.	[43.]
Siâm cum,	-	-	572.	-	31.	[44.]

(*l*) Idcirco in tabula Sinicorum characterum tantum in primo nomine (num. 36.) posuimus *Cum*, ne eadem in littera saepius repetenda frustra fatigaremus operas.

Tabula XVI. Figura 45. *Chao cūm*, - - 541. - 32.

[46.] *Tym cūm*, - - - 509. - 15.

[47.] *Gāi cum*, - - - 494. - —

In eius 14. anno definit liber *Chūn çieu.*

[48.] II. *Çi*, reguli, qui omnes dicuntur *Cūm.*

[49.] *Hi cūm.* Eius nonus annus congruit cum primo anno *Yn cūm*, in *Lu*, 33. annus, quo obiit, cum A. ante C. N. 698.

[50.] *Siām cūm*, ab A. ante C. N. 697. annos 12.

[51.] *Hûon cūm*, - - 685. - 43.

[52.] *Hiáo cūm*, - - 642. - 10.

[53.] *Chāo cūm*, - - 632. - 24.

[54.] *Hóei cūm*, - - 608. - 10.

[55.] *Kim cūm*, - - 598. - 17.

[56.] *Lim cūm*, - - 581. - 28.

[57.] *Chuām cūm*, - - 553. - 6.

[58.] *Kìm cūm*, - - 547. - 58.

[59.] *Gān yú S. Gān infans*, - 489. - 1.

[60.] *Taó cūm*, - - 488. - 4.

[61.] *Kièn cūm*, - - 484. - —

In eius 4. anno definit liber *Chūn çieu.*

III.

III. *Çin*, cuius dynastiae reguli partim *Heu*, partim *Cum* fuerunt. Tabula XVI. Figura 62.

O *heu.* Eius annus secundus congruit cum primo anno *Yn cum* in *Lù*, 6. quo obiit, cum A. ante C. N. 718. [63.]

Gai heu,	ab A.	ante C. N.	717.	annos	9.	[64.]
Siao çu heu,	-	-	708.	-	4.	[65.]
Miên heu,	-	-	704.	-	28.	[66.]
Hién cum,	-	-	676.	-	26.	[67.]
Hôei cum,	-	-	650.	-	16.	[68.]
Ven cum,	-	-	633.	-	7.	[69.]
Siam cum,	-	-	627.	-	7.	[70.]
Lim cum,	-	-	620.	-	14.	[71.]
Chim cum,	-	-	606.	-	7.	[72.]
Kim cum,	-	-	599.	-	19.	[73.]
Ly cum,	-	-	580.	-	8.	[74.]
Cum cum,	-	-	572.	-	15.	[75.]
Pim cum,	-	-	557.	-	26.	[76.]
Chao cum,	-	-	531.	-	6.	[77.]
Kim cum,	-	-	525.	-	14.	[78.]
Tim cum,	-	-	511.	-	—	[79.]

In eius 31. anno *Chun çieu* desinit.

Tabula XVI. Figura 80. IV. *Gvéy*, cuius reguli omnes *Cūm*.

[81.] *Hûon cūm.* Eius 13. annus congruit cum primo anno *Ỳn cūm* in *Lù*: 16, quo a suis occisus est, cum A. ante C. N. 719.

[82.]	*Sīvēn cūm*, ab A. ante C. N.			718.	annos	19.
[83.]	*Hoēi cūm*,	-	-	699.	-	31.
[84.]	*Ȳ cūm*,	-	-	668.	-	9.
[85.]	*Vên cūm*,	-	-	659.	-	25.
[86.]	*Chîm cūm*,	-	-	634.	-	35.
[87.]	*Mǒ cūm*,	-	-	599.	-	11.
[88.]	*Tīm cūm*,	-	-	588.	-	12.
[89.]	*Hién cūm*,	-	-	576.	-	33.
[90.]	*Sīam cūm*,	-	-	542.	-	9.
[91.]	*Lîm cūm*,	-	-	534.	-	42.
[92.]	*Chō cūm*,	-	-	492.	-	—

In cuius 12. anno liber *Chūn çieū* desinit.

[93.] V. *Çí*, cuius reguli *Cūm* dicti.

[94.] *Sīvēn cūm.* Eius 28. annus congruit cum primo anno *Ȳn cūm* reguli in *Lù*: 35. annus, quo mortuus est, cum A. ante C. N. 715.

[95.]	*Hûon cūm*, ab A. ante C. N.			714.	annos	20.
[96.]	*Gāi cūm*,	-	-	694.	annos	20.
Tabula XVII Figura 1.	*Mǒ cūm*,	-	-	674.	-	29.
[2.]	*Chuām cūm*,	-	-	645.	-	34.

Ven

穆[1]莊[2]文[3]景[4]靈[5]滅[6]悼[7]公東[8]國昭[9]成[10]鄭[11]莊[12]莊[13]

文[14]穆[15]襄[16]成[17]僖[18]簡[19]定[20]獻[21]聲[22]曹[23]桓[24]莊[25]昭[26]共[27]文[28]

宣[29]成[30]武[31]平[32]悼[33]聲[34]隱[35]靖[36]陽[37]陳[38]桓[39]厲[40]莊[41]宣[42]穆[43]

共[44]靈[45]成[46]哀[47]惠[48]懷[49]閔[50]杞[51]武[52]靖[53]共[54]惠[55]成[56]桓[57]孝[58]

文[59]平[60]悼[61]僖[62]閔[63]宋[64]穆[65]和[66]殤[67]莊[68]閔[69]桓[70]襄[71]成[72]昭[73]

文[74]共[75]平[76]元[77]景[78]秦[79]文[80]寧[81]出[82]子武[83]德[84]宣[85]成[86]穆[87]

康[88]共[89]桓[90]景[91]哀[92]惠[93]悼[94]楚[95]武[96]王文[97]堵[98]敖成[99]穆[100]莊[101]

共[102]康[103]郟[104]敖靈[105]平[106]昭[107]惠[108]秦[109]戰[110]國奎[111]壁春[112]三月。

[115] [116] [117] 鄭伯使宛來歸祊。庚寅。我入祊。天[113]王三[114]月。

Tab. XVIII. Figura 3.

Ven cum, - - 611. - 20.

Kim cum, - - 591. - 49. [4.]

Lim cum. - - 542. - — [5.]

Illius anno 12. siue A. ante C. N. 531.
mie, exstincta est haec familia. [6.]

Tao cum, tum qve seu, *Tao cum restituit* regnum *Çi*, quod ei ex haereditate debebatur, 521. - 3. [7.] [8.]

Chao cum, - - 518. - 28. [9.]

Chim cum. - - 490. - — [10.]

Eius in anno 10. *Chun çieu* desinit.

VI. *Chim*, Reguli dicti *Cum*. [11.]

Chuam cum. Eius 22. annus congruit cum 1. anno *Yn cum*, reguli in *Lu*. 43. quo mortuus est, cum A. ante C. N. 701. [12.]

Chuam cum, ab A. ante C. N. 700. annos 28. [13.]

Ven cum, - - 672. - 45. [14.]

Mo cum, - - 627. - 23. [15.]

Siam cum, - - 594. - 20. [16.]

Chim cum, - - 584. - 14. [17.]

Hi cum, - - 570. - 5. [18.]

Kien cum, - - 565. - 49. [19.]

Tim

Tab. XVII. Figura 20.

	Tím cūm,	- -	529.	- 16.
[21.]	*Hién cūm*,	- -	513.	- 13.
[22.]	*Xīm cūm*,	- -	500.	- —

In eius 20. anno definit *Chūn çieu.*

[23.] VII. *Çào*, cuius reguli *Cūm*.

[24.] *Huôn cūm.* Eius annus 23. congruit cum anno primo *Yǹ cūm* dynastae in *Lù*: annus eiusdem 55. quo mortuus est, cum anno ante C. N. 702.

[25.] *Ghuām cūm*, ab A. ante C. N. 701. annos 40.

[26.]	*Chāo cūm*,	- -	661.	- 9.
[27.]	*Cūm cūm*,	- -	652.	- 35.
[28.]	*Vên cūm*,	- -	617.	- 23.
[29.]	*Siēn cūm*,	- -	594.	- 17.
[30].	*Chìm cūm*,	- -	575.	- 23.
[31.]	*Vu cūm*,	- -	554.	- 27.
[32.]	*Pìm cūm*,	- -	527.	- 4.
[33.]	*Táo cūm*,	- -	523.	- 9.
[34.]	*Xīm cūm*,	- -	514.	- 5.
[35.]	*Yǹ cūm*,	- -	509.	- 4.
[36.]	*Cím cūm*,	- -	505.	- 4.
[37.]	*Yâm cūm*,	- -	501.	- —

Eius anni 21. definit liber *Chūn çieu.*

VIII.

VIII. *Chin*, cuius reguli *cum* dicti fuere. Tab. XVII. Figura 38.

Huon cum. Eius annus 23. congruit cum primo anno *Yn cum* reguli in *Lu*: annus 38. quo anno est mortuus, cum A. ante C. N. 707. [39.]

Ly cum, ab A. ante C. N.			706.	annos	7.	[40.]
Chuam cum,	-	-	699.	-	7.	[41.]
Siven cum,	-	-	692.	-	45.	[42.]
Mo cum,	-	-	647.	-	16.	[43.]
Cum cum,	-	-	631.	-	18.	[44.]
Lim cum,	-	-	613.	-	15.	[45.]
Chim cum,	-	-	598.	-	30.	[46.]
Gai cum,	-	-	568.	-	35.	[47.]

dynastia *Chin*, post 35. *Gai cum* annum aut potius eo ipso *mie*, *deleta est.*

Hoei cum eam restituit		-	529.	-	24.	[48.]
Hoai cum,	-	-	505.	-	4.	[49.]
Min cum.	-	-	501.	-	—	[50.]

In eius 21. anno definit in *Chun çieu.*

IX. *Ki.* Eius dynastiae reguli dicti *Cum.* [51.]

Vu cum. Eius 29. annus congruit cum anno primo *Yn cum* reguli in *Lu*: annus 47. quo obiit, conuenit cum A. ante C. N. 704. [52.]

Tabula XVII Figura 53.	*Cím cūm*,	ab A. ante C. N.	703.	annos	23.
[54]	*Cūm cūm*,	- -	680.	-	8.
[55]	*Hoei cūm*,	- -	672.	-	18.
[56]	*Chim cūm*,	- -	654.	-	18.
[57]	*Hûon cūm*,	- -	636.	-	70.
[58]	*Hiao cūm*,	- -	566.	-	17.
[59]	*Ven cūm*,	- -	549.	-	14.
[60]	*Pim cūm*,	- -	535.	-	18.
[61]	*Táo cūm*,	- -	517.	-	12.
[62]	*Hì cūm*,	- -	505.	-	19.
[63]	*Mìn cūm*,	- -	486.	-	—

Eius in anno 6. desinit *Chūn çieū.*

[64] X. *Súm.* Eius dynastiae reguli dicti sunt *Cūm.*
[65] *Mò cūm.* Sed ipso in Confucio (*m*) vocatur Hò,
[66] vel *Hô.* Quem vero errorem vel typi, vel potius euanidae veteri in cortice litterae esse opinor: nam paullò post ètiam in Confucio *Mò cūm* reperio. Eius 7. annus congruit cum anno primo *Yn cūm* in *Lù*: Annus eiusdem postremus cum A. ante C. N. 720.

[67]	*Chuām cūm*,	ab A. ante C. N.	719.	annos	10.
[68]	*Chuām cūm*,	- -	709.	-	18.

Min

(m) Lib. II. p. 13.

Tabula XVII Figura 69.

Min cum,	-	-	691.	-	10.	
occisus est.						
Huôn cum,	-	-	681.	-	31.	[70]
Siam çum,	-	-	650.	-	8.	[71]

Ab hoc 8. anno nullam interpres Sinicus mentionem facit regulorum *Súm*, neque caussam, vt solet, in tabulis posuit.

Chim cum,	-	-	636.	-	17.	[72]
Chao cum,	-	-	619.	-	9.	[73]
occisus est.						
Ven cum,	-	-	610.	-	22.	[74]
Cum cum,	-	-	588.	-	13.	[75]
Pim cum,	-	-	575.	-	44.	[76]
Tven cum,	-	-	531.	-	15.	[77]
Kim cum,	-	-	516.	-	—	[78]

Illius in anno 36. desinit *Chun çieu*.

XI. *Çin*, eius dynastiae reguli dicti sunt *Cum*. [79]

Ven cum. Eius 44. annus congruit cum anno primo *Yn cum* in *Lu*: 50. qui vltimus eius fuit, cum A. ante C. N. 716. [80]

Nym cum, ab A. ante C. N. 715. annos 12. [81]

Cho çu,	-	-	703.	-	6.	[82]
Vu cum,	-	-	697.	-	20.	[83]
Te cum,	-	-	677.	-	2.	[84]
Siven cum,	-	-	675.	-	12.	[85]

Tabula XVII Figura 86.	*Chim cum*,	-	-	663.	-	4.
[87.]	*Mo cum*,	-	-	659.	-	39.
[88.]	*Cam cum*,	-	-	620.	-	12.
[89.]	*Cum cum*,	-	-	608.	-	4.
[90.]	*Hûon cum*,	-	-	604.	-	28.
[91.]	*Kim cum*,	-	-	576.	-	40.
[92.]	*Ngai cum*,	-	-	536.	-	36.
[93.]	*Hóei cum*,	-	-	500.	-	9.
[94.]	*Taó cum*,	-	-	491.	-	—

In eius anno 11. desinit *Chun çieu.*

[95.] XII. *Çù*. Eius reguli ausi sunt sese nuncupare *Vam*, quemadmodum ipsi Imperatores.

[96.] *Vu Vam*. Eius 19. annus cum anno primo *Tu cum*, in *Lu* congruit: annus 51. quo obiit, cum A. ante C. N. 690.

[97. 98.]	*Ven* { *Vam*, ab A. ante C. N. 689. annos 15.					
	Ven { *Vam*,	-	-	674.	-	3.
[99.]	*Chim vam*, occisus est.	-	-	671.	-	46.
[100.]	*Mo vam*,	-	-	625.	-	12.
[101.]	*Chuam vam*,	-	-	613.	-	23.
[102.]	*Cum vam*,	-	-	590.	-	31.
[103. 104.]	*Cam vam*, {	-	-	559.	-	15.
		-	-	544.	-	4.
[105.]	*Lim vam*, occisus est.	-	-	540.	-	12.

Pim

Pim vam,	-	-	528.	-	13.	Tabula XVII Figura 106.
Chao vam,	-	-	515.	-	27.	[107.]
Hôei vam,	-	-	488.	-	—	[108.]

Eius in anno 8. *Chun çieu* desinit.

Hoc rerum statu, non potuerunt Imperatores vel factiones tollere, vel vniuersos regulos, praecipue potentiores ad obsequium adigere, donec dynastia *Cheu* extincta fuit et quarta *Çin*, successit. Haec est orta ex dynastia, quam vndecimo loco posui, et quae pristinum nomen retinuit in Imperatoria domo. Anno ante C. N. 478. dynastia *Chin*, quam octauo loco commemoraui, a regulo *Çù* euersa est, postquam per annos 645 quatuor et viginti principes ex successione habuerat. Annis admodum quinque post, regnum *ù*, quod 650 annis sub 20 regulis fuerat, a regulo *Tvë* subuersum est. Sed in primis ab anno ante C. N. 425 atrocius incendium coortum est, quod bellum trecentos admodum annos summa vi gestum fuit. Haec epocha a Sinis *Chen qve, bellantia regna*, dicitur. Tum euersa sunt, A. ante C. N. 376 regnum *Çin*, quod tertio loco posui, cum annos 741 sub 38 principibus fuisset; anno post regnum *Chim*, ordine nostro sextum, quod intra annos 432 dynastis 23 subiectum fuerat: anno 286 regnum *Súm*, quod ab annis 381 dynastas 32 habuerat: eodem fere tempore regnum *Lù*, quod 34 regulos numerauerat et regnum *Gvéy*, quod 37 principes ex successione habuerat. Potentissimi

[109.] [110.]

ex ceterorum oppreſſione euaſerant, reguli dynaſtiae *Çi*, in noſtra recenſione ſecundo loco poſitae et dynaſtiae *Çin*, quae denique ſub *Hiao Ven Vam* A. ante C. N. 249. Imperatoria familia *Cheu* deleta, ſummo imperio potita eſt. Tres tantummodo dies felicitati ſuae ſuperfuit *Hiao Ven Vam*. Ei filius *Chuam ſiam vam* ſucceſſit, qui 37 eius domus fuit. Tertio anno poſt etiam is, extremus familiae *Çin* fato functus, haeredem imperii ex adoptione reliquit *Xi Hoam Ty*. Hic intra annos 37 quos regnauit, regulis *Hân*, *Gvéy*, *Çù*, *Tēn*, *Chao*, *Çî*, qui ſoli, vel ex ſucceſſione, vel reſtitutis poſtliminio dynaſtiis ſupererant, penitus de medio ſuſtulit, ſtatumque imperii, dynaſtiarum et nomine et dignitate conditioneque reliqua abrogatis, reformauit, vt 36 prouinciae ſub abſoluta monarchia praefectos ſuos deinceps acciperent.

Nunc inoffenſo pede ad librum *Chūn çieu*, qui earum rerum partem aliquam attigit, accedere poſſumus. Libri illius duas editiones ad manum habeo. Vna in bibliotheca Auguſta exſtat, forma maiori, *Vam Lie* Imperatore, anno 33. cycli LXXII. ſeu A. C. 1596 ſeptimo anni menſe impreſſa, ſine officinae nomine. Alteram editionem minori forma dono R. P. Dominici Parrenini poſſideo, ex officina *Qvēy pie* ad omnem vſum accommodatiorem. Itaque de hac potiſſimum dicemus. Totus liber annos complectitur 242 inde ab A. ante C. N. 722. ad verem anni ante C. N. 481. Mea editio octo codicillis conſtat et in triginta *kiven* ſeu libros diuiſa

Tabula XVII Figura III.

uisa est: altera vno in codicillo in quatuor tantummodo *kiven* dispertita est. Natus fuerat Confucius in regno *Lù* A. 47. cycli XXXVI. ante C. N. 551. obiit 480 anno ante C. N. vno post finitum librum *Chun çieu.* In eodem regno *Lù* magistratum gessit, quo se 55. aetatis anno abdicauit. Fuit igitur eadem aetate, qua apud Graecos Solon, Theognides, Thales Milesius, Anaximander, Anaximenes et ex historicis Pherecydes, sed ita vt omnibus iis minor esset natu, aequalis fere Pythagorae et Democrito. Illius item vitae temporibus Iudaei ex Babylone redierunt et Coss. Romani regibus vrbe pulsis rem publicam administrarunt. Quae ea caussa commemoranda duxi, vt, qui tam reliquo in orbe sapientiae fuerit cultus, quae memoriarum veterum prodendarum studia viguerint, cum Confucius suo in orbe illa exerceret, simul hoc loco recordaremur. Sed cum Confucii vita iis annis circumscribatur, vt principium libri centum annis et septuaginta ante eum annum quo natus est, exordiatur, iam per se quisque sentiet, eum quae ante se seque puero, adolescente, fortassis et iuuene gesta fuerunt, aliunde repetiisse. Itaque mihi videtur aliquis qui in regno *Lù* magistratum gesserit, a primo anno *Yn cum,* reguli in *Lù* hoc negotium consignandi res suae aetatis suscepisse, hos vero commentarios alii deinceps videntur continuasse, donec Confucius eosdem nactus paene ad exitum vitae suae perduxit. In regno *Lù* auctores libri extitisse conieci, quod ante omnes dynastias praecipuus ab iis huic regno honor est habitus, quod ex tota dispositione libri, de qua postea dicam, obscurum esse non potest.

Et

Et retinuisse Confucium superiorum auctorum ipsa verba, vno ex loco demonstrabo. Ad octauum annum *Yn cum*, id est, ad A. ante C. N. annis ante Confucium natum amplius centum et sexaginta, sic est in *Chun çieu* relatum (*n*):

Tabula XVII Figura 112.

Chun.	*Vere.*
San	*Tertio*
Yve.	*mense.*
Chim	*Dynastiae Chim*
pe	*ducis*
fú	*minister*
Yvēn	*nomine Yven* (*o*)
lây	*venit*
qvēy	*et recepit se*
Fām.	*in Fām* (*p*).
kèm yn.	*die 27 cycli dierum sexagenarii.*
Ngo	*Ego*
ge	*profectus sum*
Fām.	*in Fām.*

In dispositione totius operis, nullum cycli vel annorum vel mensium vestigium reperitur, quod cum etiam in

(*n*) Lib. III. p. 1. (*o*) Addit commentator: *ta fu*, seu ex maioribus magistratibus eum fuisse. (*p*) Commentator: *Fem* dynastiae *Chim* oppidum fuit.

in ceteris *Kīm* obſeruauerim, reticere me propter veterem Sinici populi chronologiam non oportet. Neque hic ſecundum Imperatorum, ſed ſecúndum regulorum in *Lù* annos digeſtus eſt liber. Et quamquam complures *Cūm*, ſeu reguli aequali dignitate fuerunt, tamen quotiescumque ſine dynaſtiae nomine *Cūm* dicitur, regulum *Lù* dici apparet. Hoc eſt, quod dixi, me mouere, vt credam, auctorem primum huius libri ceterosque deinceps, ita vt ipſum Confucium ex hoc regno fuiſſe ortos atque in eodem magiſtratus geſſiſſe. Imperatoris cuiusdam nomen nusquam toto in libro occurrit. Si qua vel mortis eius vel alia cauſſa, Imperatoris mentio incidat, tantum ſine nomine certo *Tiēn Vâm*, *Caeli* vel *Caeleſtis Rex* dicitur, Tab XVII. Figura 113.
quod modeſtiae cauſſa factum videtur, vt adhuc apud Sinos fieri aſſolet. Cum autem de eo ſermo incidit, peculiaria ſaepenumero vocabula adhibentur. Soli Imperatores dicuntur *pūm*, cum *mortui* fuerint. Vt ad 15. annum *Hûon cūm* reguli in *Lu*, cum de morte *Huôn Vâm* Imperatoris refertur, ita proditum eſt (q): *ſan yve*, *yĕ vi*, *tiēn vâm pūm*: *tertio menſe*, *yĕ vi ſeu* 32. *die* [114.]
cycli ſexagenarii, *Caeleſtis Rex obiit*. De ceterorum regulorum morte quoties proditur, alia et littera et vox eſt. Nam reguli dicuntur *būm*, qui magiſtratus minores geſſerant, *çŏ* ſcilicet hoc item vt alia eiusmodi, ad priſcas gentis caeremonias pertinet, cum is honor Imperatoribus haberetur, vt de iis aliter loquerentur, quam vel de ceteris in dignitate viris, vel de priuatis. [115.] [116.]

(q) Lib. VI. p. 8.

Anni deinde regum *Lù*, si non ita pauci sint, iterum in *Xam*, *priores*, *chum*, *medios* et *hia*, *postremos* diuiduntur, annorum numeris et recensione, non interrupta serie procedentibus. Interpres Sinus mea in editione minoribus litteris et Imperatorum dynastarumque nomina et singulorum annos et anni eiusdem ex cyclo sexagenario appellationem subiecit. Quamuis mea in editione numeri passim vitiose sint exarati, tamen errores ex successionibus perpetuis facile possunt animaduerti. Hinc cognouimus, primum annum *Yn cum* in *Lu*, cum 49.
Tab. XVII. Figura 117. anno *Pim Vam* Imperatoris et cum 56 anno Cycli XXXIII. componendum esse, vnde in calculo annus ante C. N. 722. exiit, quem tamquam verum recipimus, licet chronologia Sinica nondum satis excussa sit. Nam cum cyclus annorum et mensium sexagenarius Confucii aetate fuerit nullus, quidquid aliquot post seculis eruditi chronologi sub dynastia *Hia*, ex regum successione, dierum cyclo, eclipsibus, forte et tabulariis publicis in tanta monumentorum clade, hic effecerunt in cyclo annorum superioris aeui, non maiorem firmitatem habere potest, quam vel Fabii Pictoris, vel Catonis, vel Terentii Varronis in A. V. C. regibus, consulibus, praetoribus disponendis impensa sedulo opera. Tametsi enim in his chronologiae Romanae triumuiris, diuersitas, quae inter eos intercedit et aliorum dissensio, falli eorum vnumquemque potuisse, non plane demonstraret, tamen infinita sunt ab eruditis nostra memoria superiorique seculo retecta et proposita, ex quibus eorum errores redarguantur. Vnusquisque annus cuiuscumque reguli a primo die veris recensetur, so-

lidusſiduſque ad eundem pertinet, quacumque anni parte deceſſerit. *Chao cūm* reguli in *Lù* initia ponuntur in vere, cum initio anni ante C. N. 541. Et ſic Confucius ipſe (*r*): *Chūn, vâm chim yvĕ, Cūm cié gvéy Vere, Imperatorio primo menſe, Regulus auſpicatus eſt regnum.* Attamen Confucius (*s*) ſuperiori libro, de *Siam cum* patre huius *Chao cūm*, dixerat: *Tūm, xe yvĕ, qvèi yèu çam ngo kiūn Siām cūm. Hyeme, decimo menſe, qvèi yèu ſiue* 10. *die cycli ſexagenarii ſepultus eſt noſter venerabilis regulus* (*quem proceres et populus venerati ſunt*) *Siām cūm.* Hoc ipſum in tota Chronologia Philippi Coupleti ab vnoquoque haud aegre animaduerti poterit. Neſcio an hoc ſeculo aliquid in eo ſit mutatum, aut an haecce ratio non ex more recepta fuerit a chronologis, ſed compendii cauſſa aut per inaduertentiam. Nam cum calendarium A. 1723. iam eſſet excuſum typis inſcriptumque *Ta Cim Kam Hi lo xe eulh nien*, *Magnae dynaſtiae Çim Kam Hi Imperatoris* 62 *anno*, Imperatore eo anno defuncto, meo in exemplari penicillo adſcriptum fuit *lo xe eulh nien, cie gvey Tum chim yven nien*, 62 *anno* ſcilicet *Kam Hi* Imperatoris, *ineuntis imperii Ium Chim primo anno.* Calendarium proximi 1724. anni iam typis exprimit eiusdem *Tum chim* ſecundum annum.

Tab. XVII. Figura 118.

[119.]

Annis illum in modum ordinatis, vnumquemque auctores libri in quatuor tempeſtates, *verem*, *aeſtatem*, *autumnum* et *hiemem* diſpeſcuerunt, quae tempora vbique

(*r*) Lib. XXIV. p. 2. (*s*) Lib. XXIII. p. 10.

primo loco ponuntur. Sic Thucydides annos belli Peloponensiaci secundum aestatem atque hiemem distribuit, γέγραπται δ' ἑξῆς ὡς ἕκαστα ἐγίγνετο κατὰ θέρος καὶ χειμῶνα. Nihil igitur vero est similius, quam *Chun çieu*, id est, *Verem* et *autummum* librum dictum fuisse a duabus ex his tempestatibus, vt, si Thucydidis historia inscriberetur θέρος καὶ χειμών. Nam quae *Philippus Coupletus* de hoc nomine sensit (*t*), ea sunt quidem mihi, ὡς ἐν αἰνίγμασι. *Titulum operis sui*, inquit, *petiuit ab vere et autumno*, *propterea quod cum virtute sapientiaque Principis efflorescat amoenissimi veris instar respublica*, *vti e contrario cum eiusdem stultitia et improbitate*, *ceu autumnali caelo frondes ac flores diffluere totam*, *marcescere et consenescentis instar*, *tandem emori necesse est.* Illa quidem argute eleganterque dicta si cui magis allubescent, quam mea haec opinio, non pugnabo: nam mea me delectat simplicitas. Menses deinde subiecti sunt singulis auctumnitatibus quaterni, sic vero, vt numeri mensium vsque ad duodecimum procedant, neque ex cyclo sexagenario designentur. Dicuntur *chim yve*, *eulh yve*, *sun yve* et *xe*
Tab. XVII. Figura 120. *yve*, *decimus mensis*, deinde *xe yéu yĕ yve*, *decimus et primus mensis* et *xe yéu eulh yve*, *decimus atque secundus mensis*. Primus veris mensis semper nuncupatur *Vam*
[121.] *chim yve*, *Imperatorius primus mensis*. At si forte ille non exstet, alter similiter *Vam eulh yve*, *Imperatorius secundus mensis*, et si hic quoque desit, tertius vocitatur *Vam san yve*. Hoc enim Imperatorum honori tributum fuit, vt qui *Tien Vam*, *Caeli reges* viderentur esse. Bis occur-

(*t*) In proëmiali declaratione p. 19.

occurrit *Yun yue*, *intercalaris menſis*, A. 37. cycli XXXV. hieme, poſt decimum menſem et A. 48. cycli XXXVII. etiam hieme. Sed neque autumnitates illae, neque menſes ponuntur, niſi ſi quid memoria dignum annotari oportuerit. Sunt quidem nonnumquam et menſes et menſium quoque dies appoſiti, vacuo deinde ſpatio, ſed hoc lacunam indicat, quam in hiſce fragmentis non ſunt auſi ſupplere interpretes. Hac de re ſic *Martinus Martinius* in Hiſtoria Sinica (*u*): *Sed eorum ſeruandi mirabilem modum reperio. Aiunt enim quandam anum librorum amantem, Confutii Mentiique, nec non aliorum nonnullorum libros diuiſis paginis ad domus parietes agglutinaſſe. Nondum ea tempeſtate papyrus erat in vſu, ſed arborum corticibus ac foliis animi decreta mandabant, vt nunc Indi ſolent. Et quoniam erant e materia ſolida candidaque calce obliti, non difficulter latuere, quoad exſtincta Cina ſtirpe, ab haeredibus vetulae ſunt ex prompti factique iuris publici. Quamquam aliquot litterae vel tempus vel corticis humeſcentis culpa legentium oculis ſe ſubduxerant, praeſertim in Confucio. Quas litteras licet, quales fuerint aut eſſe debeant, non ignorent, cum tamen illius libros recudunt, eas inſerere non audent, ſed notant in margine. Tanta enim eſt Confucii librorum aeſtimatio, vt aliquid in iis etiam aperte mutilatum emendare nefas putent.* Litteras vetuſtate euanidas vel putredine quas ſciant Sini quales fuerint, tamen non audere reponere, non ita, vt res ſe habet, pronunciatum eſt, verum vt locus daretur argutae ſententiolae, quae iis verbis ſubiicitur, et a nobis, vtpote quae huc non pertineat, praetermiſſa eſt.

Tab. XVII. Figura 122.

(*u*) Lib. VI. p. 240. ed. Amſtel. 1659.

Quae cum dico, excuſatum vt maxime cupio *Martinum Martinium*. Nam cum, quod mihi conſtat, ex ſchedis eius ſimpliciter planeque ſcriptis, Monachienſis collegii diſertiſſimi viri, quibus hoc negotium datum fuit, hanc hiſtoriam Sinicam magnificentiori elegantiorique cultu inſtruerent, multum ex remotarum rerum inſcientia peccarunt, ſaepe coniecturas ſuas et meditata non minus conſectati ſunt, quam Martinii fidem. Emendatos ſub dynaſtia *Han* Confucii libros fuiſſe et quantum potuit, induſtria ſumma reſtitutos, ne Sini quidem diffitentur: neque enim religioni ſibi duxerunt, quae vera eſſe recordabantur, ea reſtituere. At quae quidem lacunae ſunt, nihil prorſus inibi meminerant, quid olim fuerit ſcriptum. Quod autem de margine commemoratur, iſthuc profecto *Martino Martinio* numquam potuit ſcribenti in mentem venire. Monachienſes ſcilicet credebant, Sinicis in libris id poſſe confieri, quod nobis licet in noſtris facere: quippe viri cetera eruditi, earum vero rerum non item ſcientes, *quid* dicerent non videbant. Docti Sinorum interpretes bene videntur de Confucio meriti, cum multa eius verbis, ſubiecerint minoribus exarata litteris, quae lumen obſcuritati praeferant: in his vero locis, vbi lacunas eſſe dixi, etiam interpretes ſiluerunt vacuaque reliquerunt ſpatia, quod argumento eſt, eos iam tum ſub dynaſtia *Han*, cum primum repararentur libri quid olim iisdem in locis fuerit ſcriptum, ignorauiſſe.

Reliquum eſt, vt de diebus quoque dicamus. Et illi non ſemper quidem, nihilo ſecius haud raro occurrunt, non niſi cyclo ſexagenario notati. Hos dies cum

cum tempestatibus annorum mensibusque, praesertim intercalaribus et eclipsibus comparatos, forma annorum illo aeuo quae fuerit, patefacere posse auctumo, vt mirer, Sinos ipsos, eam formam cognosci alicunde posse, desperare. Eclipses solares, hae enim solae eo in libro locum inueniunt, in prioribus annis minime fuerunt accurate recensitae. Tum vero ab A. 58. Cycli XXXIII. vsque ad annum 9. Cycli XXXIV. et ab eo anno vsque ad 23. a 23. vsque ad 42. et a 54. vsque ad 3. Cycli XXXV. magnis interuallis occurrunt nullae, ne quid de aliis defectibus dicam, quos deinde astronomi sub dynastia *Han* expleuerunt calculi ope. Posterioribus annis, quibus Confucius manum admouit, maiorem accurationem deprehendo. Dies eclipsium a Philippo Coupleto in Chronologia Sinica praetermissi fuerunt, vna quoque eclipsis omissa, alia anno non suo, errore fortassis typi adscripta fuit. Eam ob caussam omnium eclipsium in *Chun çieu* catalogum consignaui, quem hic inserere constitueram, nisi deinde egregia doctissimi viri, *Antonii Gaubilii* opera (v) me ab hoc consilio, vtpote superuacaneo absterruisset; nam vniuersas ex *Chun çieu* eclipses exhibuit, interpretum Sinicorum calculos examinauit, suos denique ex Europaeis tabulis initos adiecit. Pauca hic bona eius venia monebo. Prima eclipsis in *Chun çieu* notata est ad 3. annum *Yn Cum* in *Lù*, qui annus cum A. 58. Cycli XXXIII. et A. ante C. N. 720 conuenit, hunc in modum: *Chun*, *Vàm eulh yve*, *kì sú*, *ge yeu xe chi*. *Vere*, *Imperatorio* Tab. XVII Figura 123.

(v) Tom. II. p. 156. Tom. III. p. 235. seq.

torio secundo mense (Imperatorius dicitur secundus, quod illo anno primus mensis non occurrit) *die dicto kì sú*, (seu die 6. cycli sexagenarii dierum) *Solis fuit eclipsis.* Altera obseruata est ad A. 9. Cycli XXXIV. seu A. ante C. N. 709. aut, vt in *Chūn çīeu* est, ad A. 3. *Huôn cūm* in *Lù*, et relata his verbis: *Çīeu, cie yve, gîn xîn,*
Tab. XVIII. Figura 1. *jŏ, ge yeu xe chi, ki. Autumno, septimo mense, die gîn xîn*, (seu 9. cycli dierum) *nouilunium fuit, solis fuit eclipsis, eaque totalis.* R. P. Gaubilius (*x*): *Autumno, primo mense, primo eius die gîn xîn, eclipsis totalis*, et ex calculo *Him yun lu octauo mense, eius primo die, gin xîn dicto.* Ipse denique in calculo suo octauum mensem ponit. Ego *septimum mensem* ex duabus editionibus *Chūn çīeu* accurate edidi, quidquid deinde eius rei sit, quamobrem ab eo discedatur. Aliquoties deinde etiam R. P. *Gaubilius* adiecit, quotus mensis dies fuerit, qui ex cyclo sexagenario tantum indicatur in *Chūn çīeu.* Eclipsis A. ante C. N. 481. quam veluti postremam ex *Chūn çīeu* ponit, in libro non occurrit. Eclipsis aestate contigit: at *Chūn çīeu*, initio veris desiit. Denique obseruari velim, nonnumquam superioribus in annis, vt ad Annos ante C. N. 709. 669. 668. 664. 655. 612. 575. 574. 559. 553. nouilunia quoque notari, eum in modum, vt supra in secunda eclipsi verba proposui ab A. autem 553. non interrupta serie, ad vnamquamque eclipsin, notatur primo loco, *nouilunium fuisse.* Hoc vero istius aetatis rudi-

(*x*) L. c. Tom. III. p. 239. Ib. p. 245. pro A. 592. errore typorum est 692 quod per se quisque facile animaduertet.

巳日有食之秋七月壬辰朔日有食之既

癸亥晦日有食之

隱公上 元年

元年春王正月三月公及邾儀父盟于蔑

夏五月鄭伯克段于鄢秋七月天王使宰

咺來歸惠公仲子之賵九月及宋人盟于

宿冬十有二月祭伯來公子益師卒二年

春公會戎于潛夏五月莒人入向無駭帥

ruditatem demonstrare videtur, cum existimarint, fieri posse, vt eclipsis solaris etiam contingat alia in phasi lunae. Experiundi caussa, a Confucio diligentius, quam alias, nouilunia ecliptica obseruata fuerunt, quod quis adeo reprehendat? verum nihil magis ad scientiam Astronomicam, vel in Confucio vel in vniuerso illo aeuo requiri oportere sentio, quam notationem eorum, quae de caelo obseruata sint. Iam astronomi, qui multis post seculis fuerunt, eadem in persuasione exstiterunt posse eclipses etiam extrema in phasi euenire. Itaque in Annalibus passim ita occurrit, vt in celebri illa eclipsi *Quamuutiana*, annales *Tum kien* (y) habent, *Qvèy hài*, *boéi*, *ge yeu xe chi*. *Die qvèi hài*, *postrema lunae phasi*, *solis fuit eclipsis*. Sed hunc errorem eiusque caussam, R. P. Gaubilius diligenter copioseque retexit. Tab. XVIII. Figura 2.

Ita igitur temporum notatio atque dispositio operis sese habet in libro *Chun çieu*. Sed, si res eodem in libro traditas videamus, placere potest antiquitatis simplicitas, sapientiam qualemcunque aut lumina orationis, aliaque vel maiora, vel cultiora, frustra requisiueris. Praemissa sunt mea in editione, vt apud nos quoque quibusdam in libris fieri solet, summorum virorum de *Chun çieu* testimonia, de quibus alias dicam, cum de interpretibus huius libri tractabo. Magnifica ista sunt quidem, sed iudicio ab immensa magistri existimatione corrupto prolata. Scilicet sunt hi commentarii, quales passim apud nos

(y) Lib. XLII. p. 12. b.

nos ciues honesti atque agrestes quoque homines memoriae iuuandae caussa consignant, quo die eclipsis animaduersa sit, quo quis principatum adierit, quo sit natus, mortuus, occisus, submersus, sepultus, quo die praelium commissum sit, vel proximus arserit Vcalegon, vel terrae motus exstiterit, aut procella et insolita pluuiae copia, eluuiones, locustae, vredines. Sic prisci Romanorum Graecorumque annales fuerunt, teste *M. Tullio*, cuius locum, tametsi prolixum, non grauabor totum hic ponere (z): *Atqui, ne nostros contemnas, Graeci ipsi sic initio scriptitarunt, vt noster Cato, vt Pictor, vt Piso. Erat enim historia nihil aliud nisi animalium confectio, cuius rei memoriaeque publicae retinendae caussa, ab initio rerum Romanarum vsque ad P. Mucium Pontificem Maximum res omneis singulorum annorum mandabat litteris. Pontifex Maximus efferebatur in album et proponebat tabulam domi, potestas vt esset populo cognoscendi: ii qui etiam nunc annales maximi nominantur. Hanc similitudinem scribendi multi secuti sunt, qui sine vllis ornamentis monumenta solum temporum, hominum, locorum gestarumque rerum reliquerunt. Itaque qualis apud Graecos Pherecydes* (is Pherecydes, quem supra diximus aetate Confucii fuisse) *Hellanius, Acusilaus fuit aliique permulti: talis noster Cato et Pictor et Piso, qui neque tenent, quibus rebus ornatur oratio, et dum intelligatur quid dicant, vnam dicendi laudem putant esse breuitatem.* Quare id quoque nostrum de *Chũn çieu* iudicium oportebit esse, quod, *Sempronius Assellio Numantini* belli scriptor de priscis

(z) De Oratore Lib. II. p. 355.

ſcis Romanorum annalibus tulit (*a*): *annales libri tantum, quod factum quoque anno geſtumue ſit, id demonſtrabant, id eſt, eorum quaſi, qui diarium ſcribunt, quam Graeci ἐφημερίδα vocant: nobis non modo ſatis eſſe video, quod factum eſſet, id pronunciare, ſed etiam quo conſilio quaque ratione geſta eſſent demonſtrare. Nam neque alacriores ad rem publicam defendendam, neque ſegniores ad rem perperam faciundam annales libri commouere quidquam poſſunt.* Nunc id agam videlicet, operamque dabo, vt ne quis meo iudicio fidem derogare, contra ea, vt pro ſe quisque, quemadmodum de hoc libro iudicari oporteat, ſtatuere ſecum poſſit. Nam poſtquam bonam eius libri partem Latine conuerti, in quo labore non inficior interpretes Sinos mihi vt maxime adiumento fuiſſe, et exilitas rerum et taedium inanis operae, temporisque fructuoſius collocandi diſpendium, impetum animi mei ſuſtinuit, vt deinde reliquos codices et poſteriores in primis, quos Confucius elaborauit ſic tantummodo euoluerem vt certo conſtare mihi poſſet, quod iam tum ſuſpicabar, ceteros nulla cultura priores antecellere. Igitur ſatis erit, ſi de mea verſione tantum excerpam, quantum lectores mei ad cognitionem et vel ad ſatietatem a me requirent.

Chun çieu, yvên kivèn, ſeu primus libellus.

Tab. XVIII. Figura 3.

Yn Cum	*Yn Cum, ſeu, Yn Reguli in Lu*
Xam.	*primi anni.*
Yven	*Primus*

[4]

Fff 2 *nien.*

(*a*) Apud A. Gellium Lib. IV. Cap. 18.

	nien.	*annus.*
Tab. XVIII. Figura 5.	*Chun.*	*Vere.*
[6.]	*Vâm*	*Imperatoris*
	chim	*primus*
	yve.	*mensis.*

Nihil ad hunc mensem annotatum est.

[7.]	*San*	*Tertius*
	yve.	*mensis.*
[8.]	*Cūm*	*Regulus, scilicet in Lu, nomine Yn*
	kiĕ	*et*
	Chū	*Chu dynastiae regulus*
	Y Fù	*Y fù*
	mîm yū	*iurarunt seu foedus icerunt*
	miĕ.	*in Miĕ.*

Fù, hoc accentu scribendum monet Commentarius Sinicus, cum alioqui etiam *fú* pronuncietur. Ex eodem teneo, *Mie*, regionem fuisse in *Lu* sitam. Iurare autem solebant prisci mortales in Sinis, epoto animantis sanguine: animantem defodiebant et sanguine scribebant iuramenti formulam in cortice.

[9.]	*Hiá*	*Aestate*
[10.]	*u*	*Quintus*
	yve.	*mensis.*

Chim

Tab. XVIII. Figura 11.

Chim pe	*Chim pe, seu Chim regni Dux*
ke tuón yū	*occupavit particulam*
Yèn.	*terrae seu regionis Yèn.*

Scholiasta Sinus, *Yèn* monet hoc accentu legendum esse, regionemque in regno *Chim*

Cieu.	*Autumno.*	[12.]
Cie	*Septimus*	[13.]
yve.	*mensis.*	
Tien Vâm	*Imperatoris (scilicet, Pim Vam, nomine)*	[14.]
sú	*minister*	
çui hivèn	*dictus, Çai hivèn*	
lây	*venit*	
qvēy	*et recepit se*	
Hoéi,	*ad* Hoéi,	
Cūm	Reguli *Yn Cūm, in Lu*	
chúm	*alterum ex tribus*	
çu chi	*filium,*	
Fúm.	*in Fúm.*	

Çai hiven, proprie significat, *gubernatorem seu praefectum magni nominis*, videturque hic titulus honoris magistratui cuidam tributus fuisse. Ad *Fúm* scholiasta addit: 反 鳳 方 賵 *Fúm*, *fām fūm fúm fān*. *Fúm*, *fuit pars Fúm regionis rebellis*.

Tab. XVIII. Figura 15.

Tab. XVIII. Figura 15.	*kieu*	*Nonus*
	yve.	*mensis.*
[16.]	*kie*	*Etiam*
	Súm	*Súm*, *reguli*
	gin	*minister*
	mîm / *yū*	*iurauit*
	Siēu.	*et Siēu regulus.*

Scholiasta explicat: *Lu*, *Súm*, *Siēu*, *san que*, *cūm gvey mim*. *Lu*, *Súm et Siēu*, *tria regna*, *inter se foedus icerunt.*

[17]	*Tūm.*	*Hieme.*
[18.]	*xe* / *yeu* / *eulh*	*duodecimus*
	yve.	*mensis.*
[19.]	*Çi* / *pe*	*Çi pe*, *seu*, *Çi dynastiae Dux*
	lây	*venit.*

Addit

Addit Scholiaſta, *y Lù, ſ. ad regulum Lù.*

Cum *Reguli Yn cum in Lu* Tab XVIII. Figura 20.

çù *Çu, ſeu, dynaſta regionis cuiusdam*

Ye ſui *Ye ſui, nomine*

ço. *mortuus eſt.*

Sui, proprie dignitatis nomen. Scholiaſta: *Ye ſiii, Lu* 大夫 *ta fū, in regno Lù, fuit ex maioribus ſenatoribus, qui regulo proponere ſolebant promouendos ad dignitates.*

Eulh *Secundus* [21.]

nien. *annus, ſcilicet Yn Cūm, reguli.*

Chun. *Vere.* [22.]

Cūm *Regulus Lu* [23.]

hoéi fio yū *amice congreſſus eſt cum dynaſta Sio,*

Cien. *in Cien.*

Scholiaſta: *Sio chi,* 近 *kin y Lu che ye. Sio in vicinia regni Lu fuit.* Et, *Cien, Lu ty. Cien* (vbi conuenerunt) *eſt terra in regno Lu.*

Hia. *Aeſtate.* [24.]

u *Quintus* [25.]

yve. *menſis.*

Kü

Tab. XVIII. Figura 26.

Kiù	*Kiù, dynaſtae*
gîn	*miniſter*
ge	*adiit*
Hiām.	*dynaſtam Hiām, ſ. venit in Hiām.*

Interpres Sinus: *Hiām ſiao qve. Hiām, eſt paruum regnum.* Simul monet, hic ipſum huius regni principem intelligendum eſſe.

Vû	*Vû*
Hâi	*Hâi*
Súi.	*Mandarinus fuit.*
Súi	*Mandarinus*
ge	*adiit*
kie.	*regionem kie.*

Mandarinos Luſitani vocant omnis generis magiſtratus in Sinis aliisque regnis, non a Luſitanica aliqua voce, vt plerique exiſtimant, ſed a *Malabarico Mándiri, Miniſter*, vt me R. R. Miſſionarii Danici monuerunt (*b*). Eodem nomine hic vtar, tamquam noto. Scholiaſta: *Kie, fú yûm qve. Kie, fuit paruum regnum.*

[27.]	*Çiēu.*	*Autumno.*
[28.]	*Pa*	*Octauus*
	yve.	*menſis.*
[29.]	*kèm xîn.*	*die, kèm xîn, ſ. 17. die cycli ſexagenarii.*

Cum

(*b*) Epiſtola Scripta Trangambariae 1735. 30. Dec.

Cūm	Dynaſta Lù	Tab XVIII. Figura 30.
kiě	et	
Siŏ	dynaſta Sio	
mîm yū	foedus icerunt	[31.]
Tâm.	in Tâm.	

Scholiaſta: Tâm, regio in Lù.

Kieu	Nonus	
yvě.	menſis.	
Kì	Praefectus ki, (Ta fu, fuiſſe Scholiaſta monet)	
Lỳ ſiū	nomine Ly ſiū	[32.]
lây	venit	
Ym̆ niù.	vt Ym̆ duceret vxorem.	

Scholiaſta docet in Lỳ ſiū, ſecundum characterem ſiù pronunciari oportere: nam etiam tĕû efferri poteſt.

Tūm.	Hieme.	[33.]
Xĕ	Decimus	[34.]
yvě.	menſis.	
Pĕ kì	Pĕ kì (reguli Lu coniux, vt Scholiaſta monet)	[35.]

qvēi } *recipit ſe*
yū }
Ki *ad Ki praefectum.*

Addit Scholiaſta: 者逆戶斤編裂 *lie ſiu ſo Ym che, ſcidit ornatum,* (neſcio quem,) *muliebrem quem Ym habuit.* Videtur caeremonia indicari, qua regina aut deſpondit virginem et elocauit, aut nouis nuptis honorem exhibuit.

Tab. XVIII. Figura 36.
Ki } *Idem Ly ſiu, in Ki dignitate*
çù }
pe *Dux*
kiu } *et dynaſta Kiù*
çù }
mîm } *foedus iniuerunt*
yū }
Mie *in Mie.*

Interpres: *Mie* 邑莒 *kiu ye. Mie eſt in dynaſtia Kiu, villa moenibus circumdata.*

[37] *Xe* } *duodecimus*
yeu }
eulh }
yve. *menſis.*

[38] *Te* } *die 52. cycli ſexagenarii.*
mào. }

[39.] *Fu* } τὸ *Fu gin*
gîn }

ſi

çù }
xi } *çù xi, (secundus natu filius)*

hum. *mortuus est.*

Scholiasta: *Çù xí,* 也子仲 *Chum çù yè. filius natu secundus fuit.*

Chim. *Dynastiae Chim.* **Tab. XVIII. Figura 40.**

gîn *populus*

fa *vicit*

Gvéy. *regulum Gvéy.*

San *Tertius* [41.]

nien. *annus reguli Yn cum, in Lù.*

Chun. *Vere.* [42.]

Vâm *Imperatorius* [43.]

eulh *secundus*

yve. *mensis.*

kà }
sú. } *sexto die cycli sexagenarii.*

Ge *solis*

yeu *fuit*

xe }
chi. } *eclipsis.*

san *Tertius* **Tab. XIX. Figura 1.**

yve. *mensis.*

Tabula XIX. Figura 2.

	Kèm sio		47. *die cycli sexagenarii dierum*
[3.]	*Tien Vâm*	*Caeli Rex.*	Imperator, sc. *Pim Vam.*
	pum.	*obiit.*	
[4.]	*Hia.*	*Aestate.*	
[5.]	*Sù yve.*	*Quartus mensis.*	
[6.]	*Siñ mào.*		28. *die cycli sexagenarii.*
[7.]	*Yùn xí,*		*Yùn xí,*
	ço.	*mortuus est.*	

Interpres: *Tien çu ta fu.* *Imperatoris mandarinus ex maioribus magistratibus.*

[8.]	*Çieu.*	*Autumno.*	
[9.]	*Vu xí çu*		*Vu xí dynasta, qui,* (teste Scholiasta,) *apud Imperatorem, Ta fū, fuit,*
	lay	*venit,*	
	kieu	*vt seu peteret, seu exigeret*	
	fú.	*sumptus ad funus.*	

Forte Imperatorium. Nondum enim vacauit interpretis commentarium hoc loco excutere.

[10.]	*Pa yve.*	*Octauus mensis.*

Kèm

之三月庚戌天王崩夏四月辛卯尹氏卒
秋武氏子來求賻八月庚辰宋公和卒冬
十有二月齊侯鄭伯盟于石門癸未葬宋
穆公　隱公四年春王二月莒人伐
杞取牟婁戊申衛州吁弒其君完夏公及
宋公遇于清宋公陳侯蔡人衛人伐鄭秋
翬帥師會宋公陳侯蔡人衛人伐鄭九月
衛人殺州吁于濮冬十有二月衛人立晉
五年春公觀魚于棠夏四月葬衛桓公秋

Kèm xîn	17. die cycli sexagenarii	Tabula XIX. Figura 11.
Súm	Súm, dynastiae	[12.]
Cum	regulus	
Hô	Hô, nomine	
ço.	mortuus est.	
Tum.	Hieme.	[13.]
Xe yeú eulh	duodecimus	[14.]
yve.	mensis.	
Çi	Çi	[15.]
heû	ethnarcha	
Chim	et dynastiae Chim	
pe	Dux	
mîm yū	foedus inierunt	
Xe muen	in Xe muen.	

Commentarius: regionem in regno Çi, fuisse declarat.

qvèi ví	die 20. cycli sexagenarii	[16.]
çam	sepultus est	[17.]
sum	sum dynastiae regulus	

Mo }
cūm } *Mo cūm.*

Is ipſe, qui paullo ante dicebatur alio charactere *Ho cūm.*

Chūn çieu kiven chi eulh, ſeu ſecundus libellus.

Tabula XIX. Figura 18.	*Yn Cum*	*Yn Cum, reguli in Lu*
	chum.	*media aetas.*
[19.]	*Sù*	*Quartus*
	nien.	*annus.*
[20]	*Chūn,*	*Vere,*
[21.]	*Vâm*	*Imperatoris*
	eulh	*ſecundus*
	yve.	*menſis.*
[22.]	*Kiù*	*Dynaſtiae Kiù*
	gîn	*miniſter*
	fa	*vicit*
	Kì	*Kì regulum*
	ciù	*occupauitque*
	Mêu lêu.	*Mêu lêu*

Scholiaſta: *ye*, ſeu villam in regno *Kì* fuiſſe refert.

Vi

Tabula XIX. Figura 23.

Vú xin	45. *die cycli sexagenarii*
Gvey	*Gvéy* regulum (*nomine*, Hûon *Cūm*) [24]
Cheu biu	*Cheu biu*
xí,	*occidit,*
kī	*qui*
kiun	*partes suas perfecte impleuerat*
buôn	*et conseruauerat* (*populum*)

Interpres tradit, eum fuisse *Gvéy cūm çù*, *Gvéy reguli dynastam.*

Hia	*Aestate* [25.]
Cum	*Regulus in Lu*, (*Yn Cum*) [26.]
kie	*et*
Sum Cum	*regulus in Sum*, (*Chuam cum*, *nomine*)
yú yū	*sine caeremoniis consuetis conuenerunt*
Cim.	*in Cim.*

Scholiasta: *Cim*, *villa in dynastia Gvey.*

Sum Cum,	*Sum dynastiae regulus*, (*nomine*, *Chuam Cum*) [27.]
Chin Heû,	*Chin dynastiae etnarcha*, (*nomine*, Hûon *Cum*)

Çi

	Çi gîn	Çi dynastiae minister, (nomine Siven, quo nomine etiam regulus ipse dicebatur)
	Gvéy gîn	et Gvéy dynastiae minister (ille, Cheu bii quem supra nominauerat)
	fa	superarunt
	Chim.	Chim regulum.
Tabula XIX. Figura 28.	Çieu.	Autumno.
[29]	Hoei siu,	Hoei siu,
	siu.	Mandarinus factus est.
[30.]	Hóei	Congressi sunt
	Sum Cum	Sum regulus,
	Chin Heu	Chin ethnarcha,
	Çi gîn	Çi dynastiae minister,
	Gvéy gîn	Gvéy dynastiae minister,
	fa	et superarunt
	Chim.	Chim regulum.
[31.]	Kieu	Nonus
	yve.	mensis.
[32.]	Gvéy gin	Gvéy dynastiae minister

xa

xà } *damnauit Cheu hiu*
Cheu
hiu
yu
Po *in Po*

Scholiasta: *Po, regio in dynastia Chin.*

Fum *Hieme.* Tabula XIX. Figura 33.

Xe } *duodecimus* [34.]
yéu
eulh
yve. *mensis.*

Gvéy } *Guey dynastiae minister* [35.]
gin
lie *firmauit et stabiliuit*
Çin. *Cin dynastiam.*
ù *Quintus* [36.]
nien. *annus.*
Chūn. *Vere.* [37.]
Cum *Regulus Lu, (Yn Cum)* [38.]

qvōn } *diligenter inspexit pisces, seu piscaturam*
yû
yū
Tam. *in Tam.*

Scholiasta: *Tam, regio in Lu.*

Tabula XIX. Figura 39. *Hia.* *Aestate.*

[40.] *Sù* *Quartus*
yve. *mensis.*

[41.] *çam* *sepultus est*
Gvéy *dynastiae Gvéy regulus*
Huôn Cum. *Huôn cum.*

[42.] *Çieu.* *Autumno.*

[43.] *Gvéy* *Gvéy dynastiae*
sii *Mandarinus*
ge *profectus est*
Chim. *in Chim.*

Scholiasta: *Chim*, *paruum quoddam regnum*

[44.] *Kieu* *Nonus*
yve. *mensis.*

[45.] *Lao chum çu* *Lao secundus natu filius*
cūm, *circuiuit domum*,

[46.] *ço* *incepit*
biēn *offerre*
lo *sex*
yù. *alas auium.*

Videtur vtrumque aliquid ex ritibus Sinicis continere, quod explanandi mihi non est data copia.

[47.] *Chū* *Chū dynastiae*

gin

gîn	*minister*
Chîm	*et Chîm dynastiae*
gîn	*minister*
fă	*vicerunt*
Súm.	*regulum Súm.*
Mîm.	*Parui vermes, qui segetes nascentes corrodere et corrumpere solent, (scilicet, illo tempore in regno Lu, cladem segeti intulerunt.)* Tabula XIX. Figura 48.
Tūm.	Hieme. [49.]
Xĕ yéu eulh	*duodecimus* [50.]
yvĕ.	*mensis.*
Siñ sú.	*octuodecimo die cycli sexagenarii* [51.]
Cūm	Reguli in Lu [52.]
çù	*çù, seu dynasta*
Kēu	*nomine Kēu*
çŏ.	*mortuus est.*
Súm	*Súm reguli* [53.]
gîn	*minister*
fă	*vicit*
Chîm.	*regulum Chîm*
Gvêy	*Venatio fuit*

	Cham co	apud Cham co

Scholiasta: *Cham co villa in dynastia Chim.*

Tabula XIX. Figura 54.	*Lo*	*Sextus*
	nien.	*annus.*
[55.]	*Chun.*	*Vere.*
[56.]	*Chim*	*Reguli Chim*
	gin	*minister*
	lay	*venit*
	Xŭ *pim*	*in Xŭ pim.*
[57.]	Hia.	*Aestate.*
Tabula XX. Figura 1.	*V*	*Quintus*
	yve.	*mensis.*
[2.]	*Sin* *yèu.*	58. *die cycli sexagenarii.*
[3.]	*Cum*	*Regulus in Lu*
	hoéi	*amice congressus est*
	Çi Hêu,	*cum etnarcha in Çi,*
	mîm *yu*	*foedus inierunt*
	y.	*in Y.*

Scholiasta: *Y regio dynastiae Çi*

çieu

[1]五月[2]辛酉[3]公會齊侯盟于艾[4]秋[5]七月[6]冬[7]宋
人取長葛[8]七年[9]春[10]王三月[11]叔姬歸于紀[12]滕
侯卒[13]夏[14]城中[15]丘齊侯使其弟年來聘[16]秋[17]公
伐邾[18]冬[19]天王使凡伯來聘[20]戎伐凡伯于楚
丘以歸[21]隱公下[22]八年[23]春[24]宋公衛侯遇于垂
[25]三月[26]鄭伯使宛來歸祊[27]庚寅[28]我入祊[29]夏[30]六
月[31]己亥[32]蔡侯考父卒[33]辛亥[34]宿男卒[35]秋[36]七月
[37]庚午[38]宋公齊侯衛侯盟于瓦屋[39]八月[40]葬蔡

çieu.	*Autumno.*	Tabula XX. Figura 4.
cie	*Septimus*	[5.]
yve	*mensis.*	

Nihil annotatum est.

Tum	*Hieme*	[6.]
Sum	*Sum reguli*	[7.]
gîn	*minister*	
ciu	*occupauit*	
Cham co	*Cham co.*	

Scholiasta: *Cham co, villa in dynastia Chim.*

cie	*Septimus*	[8.]
nien.	*annus.*	
Chun.	*Vere.*	[9.]
Vâm	*Imperatoris*	[10.]
san	*tertius*	
yve.	*mensis.*	
xo kò	*xo kò*	[11.]
qvēi yū	*recepit se ad*	
Kò.	*Kò.*	

Interpres scribit, fuisse hanc *xo ki* 娣 *ty*, *sororem natu minorem*, reginae *Pe ki* de qu item, vt de hoc *Ki*, supra dictum est.

Tabula XX. Figura 12.	*Tem*	*Dynastiae Tem*
	bêu	*etnarcha*
	ço.	*mortuus est.*
[13.]	*Hia.*	*Aestate.*
[14]	*Chim*	*Moenia ducta vel renouata sunt*
	Chum Kieu }	*in Chum kieu,*

Interpres: *Chum kieu, villa in regno Lù.*

[15.]	*Çî beû* }	*Çî ethnarchae*
	su	*Mandarinus*
	kī	
	ty	
	nien	
	lây	*venit*
	Pim.	*in Pim*
[16.]	*Çiēu.*	*Autumno.*
[17.]	*Cūm*	*Regulus in Lù*
	fa	*vicit*
	Chū.	*dynastam Chu.*
[18.]	*Tūm.*	*Hieme.*

Tien

Tabula. XX. Figura 19.

Tien Vâm	*Imperatoris*
sú	*minister*
sân pe	*Fan pe praefectus*
lay	*venit*
Pim.	*in Pim.*

Interpres: *Fan Pe, terra sub ditione Imperatoris*

Sio	*Sio dynasta*	[20.]
fa Fân pe yū	*vicit Fân Pe praefectum*	
çu	*Çu dynasta*	
kiēu y	*in kiēu y*	
qvēi.	*se recepit.*	

Chun çieu kiven chi san, seu tertius libellus.

Yn Cum	*Yn cum, reguli in Lu*	[21.]
bia	*extrema aetas.*	
pa	*Octauus*	[22.]
nien.	*annus.*	

Chun

Tabula XX. Figura 23.	*Chun.*	*Vere.*
[24.]	*Sum* *Cūm*	*Sūm regulus*
	Gvéy *heú*	*et Gvéy etnarcha*
	yú *yū*	*sine caeremoniis conuenerunt*
	Chui.	*in Chui.*

Interpres: *Chui, regio in regno Gvéy*

[25.]	*San*	*Tertius*
	yve.	*mensis.*
[26.]	*Chim* *pe*	*Chim ethnarchae*
	sú	*Mandarinus*
	Yvēn	*Yvēn nomine*
	lây	*venit*
	qvēy	*et recepit se*
	Fām.	*in Fām.*

Interpres: *Fām villa in Chim*

[27.]	*Kèm* *yn*	*27. die Cycli sexagenarii.*
[28.]	*Ngo*	*Ego*
	ge	*profectus sum*
	Fām.	*in (eandem villam Fām.)*

Hist.

Tabula XX. Figura 29.

Hiá.	*Aestate.*	
Lo	*Sextus*	[30.]
yve.	*mensis.*	
kì hái.	36. *die cycli sexagenarii.*	[31.]
Çi	*Çi*	[32.]
bêu	*ethnarcha*	
lào fù	*venerabilis senex*	
ço.	*mortuus est*	

Interpres monet, sermonem esse de *Sivēn cūm*, regulo in *Çi.*

Sin hái	48. *die cycli sexagenarii.*	[33.]
Siéu Nân	*Siéu dynastiae praeses*	[34.]
ço.	*mortuus est.*	
Çieu.	*Autumno.*	[35.]
Cie	*Septimus*	[36.]
yve.	*mensis.*	
Kèm ù.	*septimo die cycli sexagenarii,*	[37.]
Súm cūm,	*Súm regulus,*	[38.]
Çì bêu	*et Çì ethnarcha*	

	Gvéy bêu	et Gvéy ethnarcha
	mîm yū	coniurarunt
	Và vo.	in Và vo

Interpres: Và vo, in regno Cheu

Tabula XX. Figura 39.	Pa	Octauus
	yve.	mensis.
[40.]	çam	sepultus est
	Çi	Çi dynastiae regulus
	Sivēn Cūm.	Sivēn cūm nomine.
[41.]	Kieu	Nonus
	yve.	mensis.
[42.]	Sin̄ mào.	28. die cycli sexagenarii
[43.]	Cūm	Regulus in Lù
	kie	et
	Kiù gîn	Kiù dynastiae minister
	mîm yū	coniurarunt
	Feû lây	in Fêu lây

Interpres: Fêu lây, villa in regno Kiù.

Min

Mím.	*Vermes segetem nascentem corroderunt.*	Tabula XX. Figura 44.
Tūm	Hieme.	[45.]
xe / *yeu* / *eulh*	*duodecimus*	[46.]
yve.	*mensis.*	
Vu / Hiái	*Vu* Hiái	[47.]
ço.	*mortuus est.*	
Kieu	Nonus	[48.]
nien.	*annus.*	
Chūn.	*Vere.*	[49.]
Tiēn / *Vam*	*Imperatoris*	[50.]
sù	*minister*	
Nân / *ki*	*nomine* Nan *ki*	
lây	*venit.*	
Pim.	*in* Pim.	
San	*Tertius*	[51.]
yve.	*mensis.*	
quèi / *yèu*	*die* 10. *cycli sexagenarii*	[52.]
Ta	*Magna*	[53.]
Yú	*pluuia*	

ſive *et nix.*

Tabula XX. Figura 54. Hiĕ *Hiĕ*

çŏ. *mortuus eſt.*

Interpres: *Hiĕ, reguli in Lù, ta fu.*

[55.] *Hia.* *Aeſtate.*

[56.] *Chim* *Moenia ducta ſunt*

Lâm. *circa Lâm*

Interpres: *Lâm., villa in Lu.*

[57.] *Çiēu.* *Autumno.*

[58.] *Cie* *Septimus*

yve. *menſis.*

Nihil additur.

[59.] *Tūm.* *Hieme.*

[60.] *Cūm* *Regulus Lu*

hoéi *amice congreſſus eſt*

Çì

heû *cum Çì ethnarcha*

yū

Kēm *in Kēm*

Interpres: *Kēm terra in dynaſtia Sum.*

JETE 5