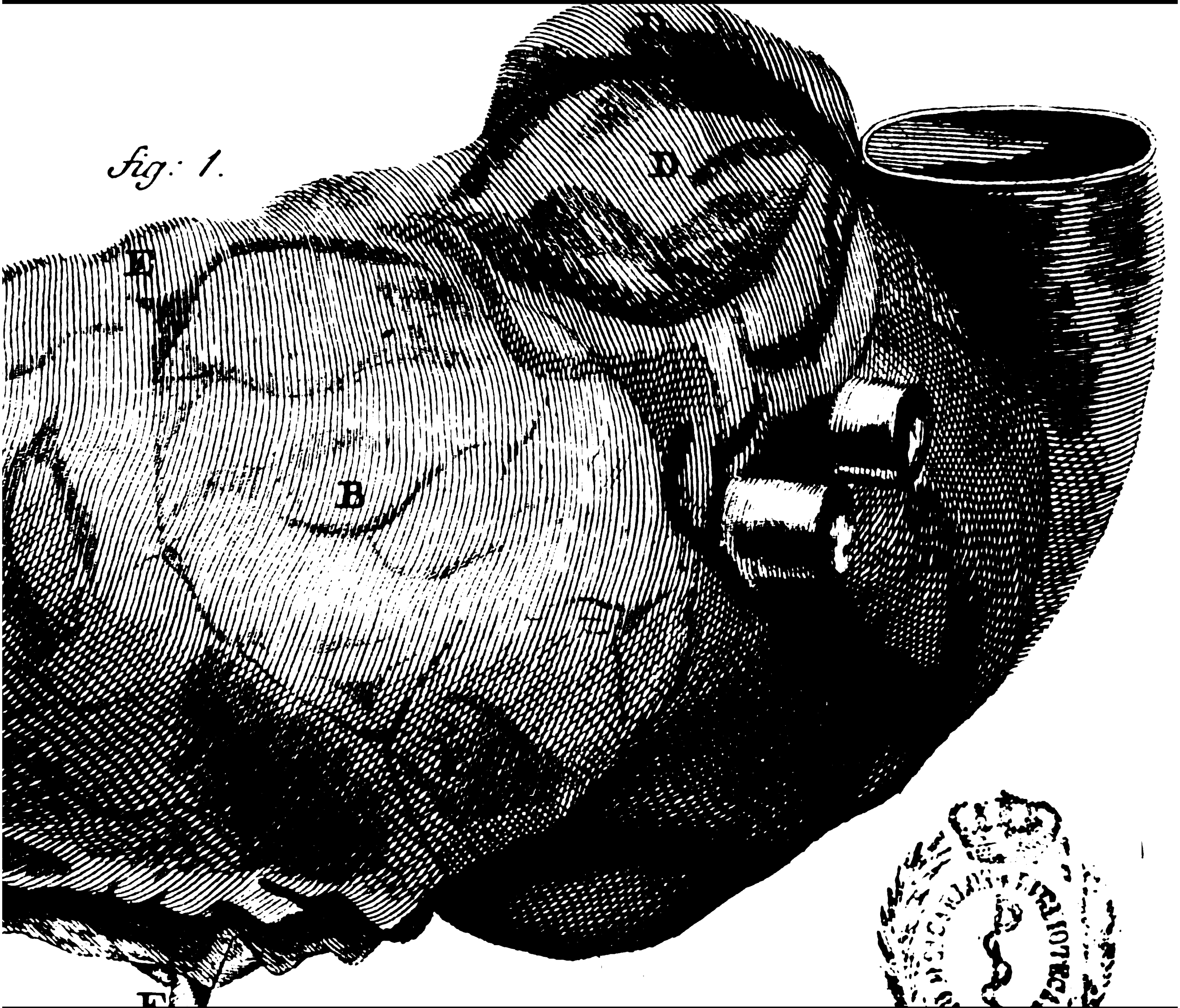


Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis ...

Academia Scientiarum
Imperialis Petropolitana (San Petesburgo)

COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE.

TOMVS VI.

AD ANNOS cIↄIↄccxxxii. & cIↄIↄccxxxiii.

PETROPOLI,
TYPIS ACADEMIAE. cIↄIↄccxxxviii.

INDEX
COMMENTARIORVM
IN CLASSE MATHEMATICA.

Leonh.

IN CLASSE PHYSICA.

IN

IN CLASSE HISTORICA ET CRITICA.

IN OBSERVATIONIBVS ASTRON.

CLASSIS PRIMA.

CONTINENS

MATHEMATICA.

OBSERVATIO SOLSTITII AESTIVI, FACTA ANNO MDCCXXX. PETROPOLI, à

Georgio Wolffg. Krafft.

§. 1.

Tab.

AEstas feruida, quam hoc anno transegimus, cum Astronomis quam Agricolis magis propitia esset, ac praecipue circa Solstitii dies Solem per aliquot septimanas fere semper purum et ab omni nube liberum ostenderet: facile coeli cultoribus persuasit, vt serenitatem hanc aëris in Astronomiae commoda traherent, et maxime momento exacto Solstitii aestiui insidiarentur. Factum id scio summa cum cura et diligentia in Obseruatorio Imperiali. Volui tamen et ego eo, quo licuit vti, minori instrumentorum apparatu, eundem hunc scopum mihi proponere. Qua vero ratione, et qua via, rem meam exegerim: praesenti scripto hoc explicare constitui.

§. 2. Instrumenta quibus antiquiores maximam Solis declinationem obseruare laborarunt, copiose describit Proclus in lib. I. Hypotyp. Astron. Posit. Gnomones praecipue in hanc rem adhibiti fuerunt; qualem Lacedaemone erexit Anaximander, referente Strabone, lib. I. et Diog. Laërt. lib. II. Maximam celebritatem inter hos acquisiuit à Pythea erectus Massiliae, cuius obseruationem idem Strabo recenset, nec non Gassendus in vita Peirescii. Consenserunt in eandem methodum recentiores, maxime Cassinus, qui praeclaro suo Gnomone Bononiae statuto inuenit, altitudines Solstitiales, saepe dimidio fere minuto primo diuersas fuisse: cuius rei varias caussas adducit in Memoires de la Mathem. et Physique. 1693.

§. 3. Tutiores autem longe eas esse Obseruationes, quae circa aestiuum Solstitium fiunt, merito iudicat Dau. Gregorius, in locis nempe, quae ab Aequatore versus Polum Boreum sita sunt; quia ob maiores Solis altitudines non adeo turbant subtile negotium refractiones. Quamuis autem hoc sequaris monitum, non tamen insignes difficultates euitabis, nisi Instrumenta ad manus sint, de quorum magnitudine ac fide nihil desideres. Heuelius cap. IV. Prodr. Astron. propria experientia edoctus statuit, Solstitia, licet optimis et maximis Instrumentis, etiam ab omnium exercitatissimo Obseruatore deprehendantur, nequaquam tamen posse in ipsis minutissimis determinari.

§. 4. Variis hisce impedimentis non deterritus, sequente consilio rem aggressus sum. Adhibui Quadrandrantem ferreum, cuius limbus orichalco obductus singula minuta prima lineis transuersalibus exhibet, radius vero est duorum pedum Parisinorum cum $2\frac{1}{4}$ digitis. Quadrans hic in Anglia primum fabricatus, eandem plane correctionem passus est, quam ille quem describit Clariss. *De l'Isle* in Tomo II. horum Commentar. pag. 497. seqq. adeoque eius vlteriore descriptione non opus est. Quolibet porro die post acquisitam solis altitudinem meridianam ad notas quasdam correctorias eius errorem indagaui; interiecto autem tempore summa industria caui, ne tactu aliquo rudiori telescopium lateri affixum è situ suo dimoueretur, nihilque eorum omisi, quae subtilitas talis Instrumenti requirere potest.

§. 5. Quamuis itaque non haberem, cur fidem Instrumenti in dubium vocare possem: malui tamen, vt in re tam subtili etiam minutias sectarer, vlteriorem adhuc adiicere diligentiam. Primo quidem cogitaui, in Instrumento huius magnitudinis non facile committi errorem in diuisione illorum graduum, qui totum Quadrantis limbum in partem dimidiam, tertiam, quartam etc. secant, adeoque posse diuisiones graduum 45, 30, 15, etc. aut in genere quintum quemlibet gradum pro maxime tutis assumi; praeterea, ne quid suspicionis relinquerem, hos gradus ope circini alicuius maioris denuo examinaui per chordas è dato radio computatas, quibus omnibus has diuisiones legitime factas inueni. Cum itaque memor essem methodi illius, quam in horum Commentariorum Tom. IV.

pag. 115. §. 6. propoſui, qua ex datis duabus altitudinibus quibuscunque, vna cum diſtantiis veris à meridie, altitudo aſtri meridiana elici poteſt: propoſui mihi hanc viam ſequendam; idque eo magis, quia mutationes Declinationis, quibus illa methodus in Sole ſubiecta eſt, circa Solſtitii dies admodum paruae ſunt in ſpatio 5 vel 6 horarum; quas tamen non omnino neglexi, vti in ſequentibus apparebit. Hinc Solem bis obſeruaui in altitudinibus quantum licuit talibus, de quarum fide certus eram; atque deinde ex temporibus ope horologii oſcillatorii exacte ad meridiem compoſiti acquiſitis, altitudinem ſolis meridianam calculo ſatis improbo et moleſto venatus ſum, eamque cum inuenta in ipſo meridie per Quadrantem comparaui, vt hoc modo de altitudine ſolis meridiana quouis die obtenta eo magis certus eſſe poſſim. Verum quoniam tempora etiam maxime in conſiderationem hic venire video: neceſſe eſt, vt exponam qua ratione meridiem obſeruauerim, atque ad illum horologium meum direxerim.

§. 6. Cum aſſuetus eſſem illi methodo, qua Clariſſimus *De l'Isle* meridiem obſeruare ſolet exactiſſime, ope meridianae alicuius capillaris, quam imago Solis in conclaue obſcuratum per foramen immiſſa percurrit: facile iudicaui, exactiorem viam vix inueniri poſſe. Sed denegabant mihi circumſtantiae eiusmodi conclaue, in quo feneſtris clauſis noctem efficere poſſem. Igitur cura mentem ſubiit, an fortaſſe in muſeo à Sole illuminato idem efficere liceat, ſalua rei exactitudine.

dine. Quapropter in hunc finem parieti lapideo fenestrae illius conclauis in quo obseruare datur, infixi horizontaliter cylindrum orichalcinum cauum, cuius apertura aequat 7 lineas pedis Paris. cui aperturae immisi cylindrum alium solidum, in priori cauitate horizontaliter volubilem, semper tamen firmum, qui in extremitate sua annulum affixum gerit, cui vitrum politum commode inseri potest. Ex pluribus vitris selegi tale, quod imaginem Solis exceptam in distantiam 5 vel 6 pedum proiiceret distinctam, et vtroque limbo exactissime terminatam; effeci autem vt cylindrus hic mobilis gyrari possit in immobili, vt varias altitudines Solis meridianas sequi semper possem, et imago inde procreata quouis anni tempore in charta perpendiculariter obiecta rotunda exacte appareret. Porro huic machinae opposui capillum tenuissimum verticaliter extensum in distantia trium pedum, superius atque inferius firmatum; quibus omnibus non sine voluptate obtinui, vt imaginis solaris appulsum ad vmbram huius capilli in dimidio quoque minuto secundo horologii propinqui notare potuerim, etiam in conclaui non obscurato, sed à sole illuminato. Quo facto per obseruationes altitudinum aequalium Solis ante et post meridiem multis diebus repetitas deprehendi, meridianam hanc verticalem ostendere meridiem $49\frac{1}{2}$ secundis iusto citius, atque adeo ab omni meridie per eam inuento subtrahi debere haec minuta, vt verus habeatur. His itaque subsidiis negotium meum peregi; et praeterea Refractionum Tabulam vsurpaui eam, quam Cel. Cassinus in Commentariis Acad. Scientiar. Paris. Anno

1714.

1714. publicauit, quaeque eadem est cum illa, quam exhibuit in Tractatu, cui titulus est: Les Elemens de l' Astronomie verifiès par etc. Vt vero quoque altitudini meridianae per calculum inuentae adiicere vel demere possim partem conuenientem, quam Declinatio interea temporis subiit: adiicio hic laterculum, ex quo illa apparet. Erat nempe altitudo vera centri Solis meridiana per Quadrantem inuenta

		°	'	"
Iunii	8 - - -	53	31	24
	9 - - -	—	32	0
	10 - - -	—	32	15
	12 - - -	—	32	0
	13 - - -	—	31	5

§. 7. Cum igitur methodus illa, qua ex duabus altitudinibus Solis, vna cum tempore vero, obseruatis, altitudo Solis meridiana quaeritur, cautioni Declinationis subiecta sit: non possum non indicare quoque, qua medela vsus fuerim ex hac parte. Repraesentet in hunc finem DBAE Meridianum, CP Aequatorem, obseruetur altitudo Solis in K; si iam in eodem parallelo IKOLH Sol pergeret constanter moueri: obseruaretur tempore BAL in loco L; sed auxit interea temporis suam declinationem, adeoque eodem tempore BAL obseruatur in N, quasi in alium parallelum remotus esset. Sed in triangulo LMN, quod ob paruitatem pro rectilineo haberi potest, latus LN, quod est augmentum declinationis à prima obseruatione ad secundam, admodum paruum est; angulus MLN

Fig. 1.

in

in meridie euanescit plane, adeoque circa meridiem est admodum paruus, consequenter eo magis LMN recto appropinquat; adeoque ML, NL latera ad sensum sunt aequalia; porro ob angulum LBO valde paruum, latera MB, NB, fere etiam aequalia sunt; hinc $LB - NB = LB - MB = LM = LN$; vnde $LB = NB + LN$, aut $QL = 90° - LB = 90° - NB - LN = RN - LN$; ex quo apparet, quod ab altitudine propius ante meridiem inuenta subtrahi tantum debeat augmentum Declinationis quod Sol ab obseruatione matutina ad sequentem acquisiuit, vt habeatur quam proxime illa, quam Sol eodem tempore habiturus fuisset, si semper in eodem parallelo motus fuisset; illud vero augmentum elicitur ex collatione duarum altitudinum meridianarum, adeoque ex immediatis obseruationibus, supponendo nempe, quod in distantia non valde magna KN Declinationes temporibus proportionaliter crescant. Reducta itaque altitudine inuenta RN ad altitudinem QL in eodem parallelo HLOKI, calculus instituitur, ac si Sol nullam Declinationis mutationem passus fuisset, et obtinetur altitudo meridiana ficta DH, quae deinde, adiecta ad ipsam parte proportionali pro interuallo temporis ab obseruatione prima ad meridiem FH, mutatur in altitudinem meridianam veram DF.

§. 8. Igitur die 8 Iunii styli veteris, obseruaui temporibus veris ante meridiem sequentes altitudines veras centri Solis, nempe

H	′	″		°	′	″
6	41	7	- - -	25	15	33
9	25	53	- - -	44	44	57

ex quibus, adhibita correctione praecedentis paragraphi, inuenta fuit altitudo vera meridiana centri Solis eiusdem diei $53^{\circ}\ 31'\ 20''$. Die 9 Iunii nactus fui sequentes obseruationes

H	′	″		°	′	″
6	36	52	- - -	24	43	51
9	25	49	- - -	44	44	57

ex quibus calculus produxit altitudinem meridianam sequentem $53^{\circ}\ 31'\ 54''$. Pro Iunii 10 non potui praefata commoditate vti, adeoque coactus fui altitudinem meridianam in Quadrante inuentam retinere. Quoniam autem video, altitudines duas calculatas minores esse per Quadrantem obseruatis $4''$ et $6''$, hinc assumo mediam inter has differentias $5''$, eamque ab altitudinibus in Quadrante repertis subtraho, vt adeoque altitudines veras centri Solis habeam sequentes:

Iunii	8	- - -	53	31	20
	9	- - -	—	31	54
	10	- - -	—	32	10
	12	- - -	—	31	55
	13	- - -	—	31	0

ex quibus Solstitii momentum poterit definiri.

§. 9. Sequar autem primo methodum Celeb. Halleii, quam exposuit in Transact. Anglic. A. 1695, repetiit deinde Dau. Gregorius in Astron. Phys. et Geometr.

metr. Elementis pag. 221. Edit. Oxon. eamque applicabo ad caſum illum, quem altitudines tres priores exhibere poſſunt. Referat idcirco DHM Tropicum Fig. 2. Cancri, et curua EFGH illam lineam, quam Sol motu ſuo proprio circa Solſtitium deſcribit. Quoniam puncta E, F, G, non multum diſtant a puncto Solſtitiali H, erunt lineolae GB, CF, ED, vti quadrata arcuum HG, HF, HE, vel vti quadrata his proxime aequalium BH, CH, DH, aut GI, FK, EL, per Lemma XI. Principp. Newtoni. Quare curua EFGH erit quam proxime Parabola communis Apolloniana; atque, pro inueniendo puncto H, data erunt ſequentia, DC, CB, diſtantiae obſeruationis primae et ſecundae, ſecundae et tertiae; LK, KI, differentia altitudinis primae et ſecundae, ſecundae et tertiae. Ponantur ergo $DB = a$, $CB = b$, $LI = m$, $KI = n$, $BH = x$, $HI = y$, et vocata Parabolae parametro $= p$, eſt I. $py = x^2$, vel $p = \frac{x^2}{y}$. II. $py + pn = b^2 + 2bx + x^2$; III. $py + pm = a^2 + 2ax + x^2$. Subſtituto valore ipſius p in II. fit $\frac{nx^2}{b^2 + 2bx} = y$; in III. fit $\frac{mx^2}{a^2 + 2ax} = y$; hinc aequatis valoribus ipſius y, eſt $x = \frac{a^2n - b^2m}{2bm - 2an}$.

§. 10. Quodſi iam applicatio fiat ad obſeruationes §. 8. allatas, erit $a = 2$, $b = 1$, $m = 50$, $n = 16$, adeoque $x = \frac{7}{18} = 9^h\ 20'$, vnde concludo Solſtitii momentum fuiſſe Petroburgi die 10 Iunii ſt. v. $9^h\ 20'$, poſt meridiem temporis veri; quo tempore Tabulae Hireanae exhibent locum Solis in ♊ $29^\circ\ 59'\ 29''$, qui à vero Solſtitio non niſi 31'' differt. Poſſem quoque alias tres altitudines aſſumere, atque ex iis momentum Solſtitii reperire: ſed quia nullis magis fido, quam tribus prioribus, in his acquieſco.

§. 11. Quodſi ex iisdem datis inquiratur in Solſtitii momentum iuxta methodum b. *Maieri* noſtri, in T. II. Commentar. Academiae huius publicatam p. 185. erit, ſubtracta altitudine prima à reliquis duabus, ſeries altitudinum 0. 34. 50. dierum vero 0. 1. 2. poſito itaque dierum numero x, erit formula pro exhibendis altitudinibus $43x - 9x^2$, cuius differentiale aequatum nihilo, ex methodo de maximis et minimis, exhibebit $43dx - 18xdx = 0$, vel $x = 2\frac{7}{18}$, vnde additis diebus 8 ab initio ſubtractis oritur Solſtitii momentum Iunii $10\frac{7}{18}$ idem quod ante ex methodo Halleii; id quod ex tribus aſſumtis altitudinibus neceſſario ſemper fiet, cum vterque in hoc caſu per tria data puncta Parabolam communem deſcribat. Cum vero in Halleiana Solutione non liceat plura ſimul quam tria puncta eligere, vtpote per quae Parabola ordinaria determinatur: id ſingulare habet methodus Maieriana, quod ex pluribus ſimul quam tribus punctis Solſtitium determinare poſſit. Verum enim vero in tali caſu neceſſe eſt, vt Curua motus Solaris EFGH ſtatuatur eſſe Parabola altioris generis, non vero ordinaria, id quod demonſtrationi Halleianae, quod nempe Curua EFGH ſit Parabola vulgaris, contrariari videtur.

§. 12.

§. 12. Quod ad altitudinem Solſtitialem attinet, ea ex methodo Halleiana deducitur fuiſſe $53^{\circ}\ 32'\ 11''$. Sin igitur aſſumam Obliquitatem Eclipticae in Tomo II. horum Commentar. pag. 512. à Clariſſ. *De l'Isle* publicatam, $23^{\circ}\ 28'\ 30''$, eruitur exinde Eleuatio Aequatoris Petropolitana $30^{\circ}\ 3'\ 41''$, quae non male congruit cum eâ, quae media eſt inter vtramque loco cit. repertam, nempe $30^{\circ}\ 3'\ 58''$.

DE VNGVLIS CYLINDRORVM VARII GENERIS,

AVTHORE *Georgio Wolffg. Krafft.*

§. 1.

INueniuntur paſſim apud ſuperioris ſeculi Geometras Theoremata de Vngulis variorum Cylindrorum, quas quilibet eorum propria ſibi methodo, et magno ingenio, examinauit. Praecipuam ſibi laudem in hac materia comparauit *Gregorius à Sancto Vincentio*, qui integro tractatu egit de Vngula Cylindri Circularis atque Parabolici, vbi omnes earum proprietates acute admodum eruit, ita vt mira ſit ibi copia Propoſitionum, quae Calculi Integralis hodie imperio ſubſunt, cuius feliciſſimae inuentioni ille ingenio ſuo propius quaſi Tab. II. et III.

praelusit. Occurrunt subinde alia inuenta huius generis *Roberualli*, *Wallisii*, aliorumque, quaelibet Auctorum suorum acumine digna; ostenditque Cel. *Halleius* physicum aliquem earum vsum, in exhibendo proportionali gradu caloris Solaris, quamdiu in loco aliquo dato Sol est supra horizontem. Vid. Transact. Anglic. 1693. pag. 878. Triplici autem cura omnes circa haec corpora versati sunt, dum alii soliditatem eorum, alii superficiem, alii vero vtrumque, examinauerunt; methodo autem non vna omnes vsi fuerunt, sed quilibet talem sibi selegit operam, in qua maxime versatus esset. Fateor, negotium nostra aetate non amplius, quâ tum, difficultate premi: dedi tamen operam, vt in hoc scripto, ope methodi à recentioribus inuentae, et hodie pulcherrime excultae, eidem filo inuentionis diuersorum labores innectam, adiiciamque praeterea Cylindros hucusque non examinatos, in quorum Vngulas, earumque soliditatem inquiro. Quamuis enim via ad hoc Propositionum genus culta admodum hodie sit, et strata: non eam tamen ob id minus frequentandam esse censeo; quippe quae inuenta est, non vt impediret, sed vt adiuuaret Geometriam, eiusque nobis foecunditatem indicaret.

§. 2. Notissima est *Euclidis* Definitio Cylindri, quod nempe sit, solidum ortum ex rotatione rectanguli circa latus alterutrum pro axe assumtum. Cum vero haec Definitio non comprehendat nisi Cylindros Circulares: melius pro meo instituto assumam descriptionem Sereni, qui, assumto plano horizontali circulari,

lari, ſupponit, illud ſurſum moueri motu ſibi ſemper parallelo. Prout igitur motus hic perpendiculariter procedit ad planum horizontale pro baſe aſſumtum, aut inclinate, Cylindrus vel Rectus, vel Obliquus exexſurgit. Ad hanc itaque imitationem aſſumam planum horizontale pro baſe, loco Circuli curua quacunque definitum, ſurſum motu ſibi ſemper parallelo moueri; qua ratione Cylindri diuerſi, pro diuerſa natura Curuae in plano aſſumtae, oriuntur. Atque Obliquorum quidem Cylindrorum tractationem peculiarem praeteribo, quoniam quicquid de Rectis demonſtratur, debito modo adhibito ad Obliquos facile poteſt applicari. Itaque appellabo Vngulam, ſolidum ortum ex ſectione Cylindri cuiuscunque ad axem eius oblique factâ, et inchoata in alterutra eiusdem Cylindri baſe.

§. 3. Leui autem attentione patet, duplici ſectionis modo poſſe erui ex Cylindro Vngulam, prout nempe ſectionis initium ſit aut in ordinata aliqua, aut vero in ipſo Axe, baſis Cylindricae. Illas vocabo Vngulas per Ordinatam, has vero Vngulas per Axem. Ita ex. gr. poſito axe AB, applicata normali BC, eſt ABCH ſemi-vngula per Ordinatam; ſed ABCH ſemi-vngula per Axem; vtque habeantur Vngulae integrae, ibi addenda eſt aequalis ſemi-vngula ex parte ipſius AB, hic vero ex parte ipſius BC. Videbimus mox, has Vngulas inter ſe eſſe diuerſiſſimas; quamuis haec diſtinctio apud citatos Auctores non occurrat; vtpote qui modo hanc modo illam elegerunt, prout vnam alterâ commodiorem methodo adhibendae iudicarunt.

Tab. II. Fig. 1.

Fig. 2.

§. 4.

§. 4. In qualibet ſectione Cylindri cuiuscunque efficitur noua Curua, in ſuperficie Cylindri terminata, quae primo loco erit examinanda. Sit igitur ſemicylindrus ABCDEF, cuius baſes ſunt ABC et DEF, Fig. 1. plana terminata curua quacunque AC, DF; transeat primo ſectionis planum per ordinatim applicatam BC, quae ſit normalis ad Axem AB, vt exinde oriatur ſemi-vngula per ordinatam BCKHIBA. Apparet itaque, ex hac ſectione ortam eſſe nouam Curuam CKH, cuius axis idem eſt cum axe ſectionis, HB. Per planum noua hac ſectione terminatum intelligatur transire baſis LIGKM; parallela baſibus Cylindri, et communis ſectio planorum ſit IK; ſtatim, intelligitur, duas hasce curuas communem habere ordinatim applicatam IK, abſciſſas vero GI et HI eſſe in ratione rectarum conſtantium AB, BH, ob triangula HGI, et HAB ſimilia; adeoque abunde patet, curuam ex tali ſectione oriundam dimenſionem baſeos ſuae nunquam mutare, ſed ad eandem indeterminatarum dimenſionem aſſurgere, ad quam curua pro baſe aſſumta aſſurgit. Ita ex. gr. ſi baſis ſit Parabola Apolloniana, cuius aequatio, vocata Parametro p, eſt $p.GI = IK^2$, erit, ob $GI : HI = AB : HB$, $GI = \frac{HI \times AB}{HB}$, et aequatio alterius curuae HKC haec: $\frac{p.AB}{HB} \times HI = IK^2$, quae habebit Parametrum $\frac{p.AB}{HB}$, vti illa habuit ſolam p. Atque hoc eſt quod demonſtrat *à Sancto Vincentio*, ex ſectione Cylindri Parabolici rurſus emergere Parabolam, ſed diuerſae Parametri. Referri huc etiam poteſt inuentum Sereni, qui inter Veteres primus docuit, Ellipſin produci quoque

quoque posse ex sectione Cylindri; talis enim sectio producit curuam vngularem, quae, vti ostensum est, à dimensione baseos suae nunquam recedit. Idem plane ratiocinium est in Curua tali orta è sectione per axem AEH. Est enim et hic DE $=$ PM, et abscissa noua HD ad priorem CP in ratione constanti ipsius HB ad CB.

§. 5. Indagare nunc igitur oportet formulas generales harum Vngularum, et primo quidem earum, quarum sectio incipit in ordinatim applicata BC ad axem baseos AB normali, et continuatur sub angulo ABD quocunque oblique ad axem Cylindri BF vsque in D. Sit in hunc finem semi-cylindrus rectus quilibet, ortus ex descensu figurae ABC per perpendicularem ADE. Curuae AMC axis sit AB, orthogonaliter applicatae PM, BC, et fiat sectio per ordinatam BC, terminetur que in D, vt inde exsurgat semi-vngula ABCD. Ducatur applicata quaeuis PM, cum alia infinite propinqua pm; ex punctis M, m, P, p, demittantur perpendiculares MN, mn, PO, po, et coniungantur puncta ON, on, vt habeatur Elementum Vngulae dimidiae Pn. Positis itaque $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$, $BP = x$, $PM = y$, erit Elementum areae $PpmM = ydx$; ex analogia $AB(a) : AD(c) = PB(x) : PO(\frac{cx}{a}) = MN$, fiet elementum semi-vngulae per ordinatam, quam exprimam per $dV = \frac{cyxdx}{a}$; sed Integrale ipsius ita sumi debet, vt facto in eo $x = 0$, fiat $V = 0$. Eadem fere formula fit semi-vngulae per axem. Sit enim et hic $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AP = x$, $PM = y$.

Tabula II. Fig. 3.

C Ex

Ex similitudine triangulorum PMN et BCD orietur analogia haec: BC (b) : CD (c) = PM (y) : MN $(\frac{cy}{b})$; ergo area PMN, quae est $=\frac{cy^2}{2b}$, ducta in elementum Pp vel dx, exhibebit elementum semi-vngulae per axem sectae, quam exprimo per $du=\frac{cy^2dx}{2b}$, cuius Integrale ita sumendum, vt facto $y=o$, u euanescat.

§. 6. In iisdem Figuris eruitur quoque elementum superficiei vtriusque semi-vngularis. Nempe ex prio-
Fig. 3. ribus habetur $Mm=\sqrt{}(dx^2+dy^2)$, adeoque pro semi-vngulis per ordinatam NM $\times$ $Mm=\frac{cx\sqrt{}(dx^2+dy^2)}{a}=dS$, quae formula erit pro determinandis superficiebus semi-vngularum per ordinatas esectarum; eius vero Integrale ita sumendum, vt facta $x=0$, fiat $S=0$. Pro superficiebus vero semi-vngularum per axem factis, erit
Fig. 4. $Mm\times MN=\frac{cy\sqrt{}(dx^2+dy^2)}{b}=ds$, cuius Integrale ita sumendum, vt facta $y=0$, fiat $s=0$.

§. 7. Accedam nunc his praemissis propius ad excutiendas variorum Cylindrorum Vngulas, et primo quidem ad eas, quae originem suam debent Cylindro com-
Tabula III. Fig. 1. muni, seu Circulari. Sit igitur semi-cylindrus Circularis AF, atque esecetur ex eo Vngula dimidia BOD, positis $BP=x$, $PM=y$, $BA=a$, $BO=b$, CA radio circuli $=r$, erit $AP=a-x$, atque $PK=2r-a+x$, vnde, ob $PM^2=AP\times PK$, erit $y=\sqrt{}(2ar-a^2+2ax-2rx-x^2)$, vnde fit $\frac{adV}{c}=yx\,dx=x\,dx\sqrt{}(2ar-a^2+2ax-2rx-x^2)=(x\,dx-\overline{a-r}.dx)\sqrt{}(2ar-a^2+2ax-2rx-x^2)+\overline{a-r}.y\,dx$. Quae formu-

formula si integretur sic, vt facto $x = o$, fiat $V = o$, oritur $V = \frac{c(b^3 - y^3)}{3a} + \frac{c.\overline{a-r}}{a}$ PBOM; vnde patet, generalem totius vngulae Cubaturam dependere à Quadratura spatii Circularis PBOM. Si vero sectio intelligatur fieri per ipsum centrum baseos C, tum fiet $a = r$, $b = r$, quo facto membrum superius non-integrabile euanescit, fitque $V = \frac{c(r^3 - y^3)}{3r}$. Pro tota Vngula dimidia obtinenda ponatur $y = o$, vel $x = a$, eritque $V = \frac{cr^2}{3}$, hoc est: semi-vngula per ordinatam Cylindri Circularis, cuius sectio transit per centrum Circuli C, aequalis est Pyramidi quadrangulari, cuius basis est Quadratum radii CA, et altitudo AD.

§. 8. Pro eruenda soliditate semi-Vngulae per axem eiusdem Cylindri, assumi debet AP pro abscissa; quare retentis reliquis prioribus, et vocata abscissa $AP = x$, erit nunc $y^2 = 2rx - x^2$, et $\frac{2bdu}{c} = y^2\, dx = 2rx\, dx - x^2\, dx$, cuius Integrale sumtum ita, vt posito $x = o$ euanescat u, est $u = \frac{crx^2}{2b} - \frac{cx^3}{6b}$, vnde patet, hanc Vngulam per axem absolute integrabilem esse. Si ponatur $x = a$, erit semi-vngula integra $= \frac{cra^2}{2b} - \frac{ca^3}{6b}$; si vero sit $a = r$, erit etiam $b = r$, quare soliditas Vngulae per axem hoc casu erit $\frac{cr^2}{3}$, eadem quae prioris Vngulae per ordinatam in eodem casu.

§. 9. In eodem Cylindro Circulari, positis omnibus vti in §. 7. eruitur $\surd(dx^2 + dy^2) = \frac{r\,dx}{\surd(2ar - a^2 + 2ax - 2rx - x^2)} = \frac{r\,dx}{y}$, vnde fit $\frac{ads}{ar} = \frac{x\surd(dx^2 + dy^2)}{r} = \frac{x\,dx - \overline{a-r}.\,dx}{\surd(2ar - a^2 + 2ax - 2rx - x^2)}$

C 2 +

$+\frac{\overline{a-r}.\,dx}{y}$, quae aequatio integrata sic, vt posito $x=o$, et consequenter $y=b$, fiat $S=o$, abit in hanc $S=\frac{bcr-cry+c.\overline{a-r}.OM}{a}$, ex quo patet, Quadraturam generalem spatii vngularis dependere à rectificatione arcus circularis OM. Si vero ponatur rursus sectio transire per Centrum C, erit $a=r$, et $b=r$, quo casu fit $S=cr-cy$, et abeunte x in r, hoc est, facto $y=o$, erit spatium integrum semi-vngulare ODA $=cr=$ Rectangulo $AD\times AC$; vel denique posito $c=r$, erit idem spatium ODA $=r^2$, id est, aequale Quadrato radii; quod Theorema *Pascalio* adscribitur in Comment. Acad. Scient. Paris. Anni 1707, pag. 330. Edit. Paris. occurrit vero idem quoque in *Gregorii à Sancto Vincentio* Tractatu de Vngulis Cylindricis Prop. LV. *Pascalius* quidem Theorema pronunciauit de summa sinuum omnium rectorum totius Quadrantis ab arcu AO perpendiculariter demissorum: sed facile est demonstrare, sinus hoc modo demissos superficiem Vngularem modo explicatam efficere in tali Cylindro.

§. 10. Pro superficie semi-vngulari per axem secta, fit iuxta ductum §. 8. $y=\sqrt{(2rx-x^2)}$, et $\sqrt{(dx^2\,dy^2)}=\frac{rdx}{y}$, quare $\frac{bds}{c}=y\sqrt{(dx^2+dy^2)}=rdx$, et facta integratione sic vt abeunte x in o, et consequenter $y=o$, fiat $s=o$, prodit $s=\frac{crx}{b}$, atque talis superficies absolute est quadrabilis. Posito igitur $x=a$, est superficies integra $=\frac{acr}{b}$, facta $a=r$, et consequenter $b=r$, eadem superficies est cr, et posito denique $c=r$, eadem est $=r^2$; hoc est, eadem cum illa, quae exsurgit ex Vngula per ordinatam hoc modo secta.

§. 11.

§. 11. Sit Cylindrus Parabolicus ABOEGF, ponantur in eo $AB=a$, $BO=b$, $AD=c$, $BP=x$, $PM=y$, parameter $=1$, erit $AP=a-x$, atque pro infinitis Parabolis erit $AP=PM^m$, aut vero $a-x=y^m$, vnde deducitur $\frac{adV}{c}=yxdx=my^{2m}dy-amy^m dy$, quae aequatio integrata sic vt posito $x=o$, consequenter $y=b$, fiat $V=o$, dabit hanc: $V=\frac{acm^2 b^{m+1}+(\overline{m+1}.y^m-\overline{2m+1}.a)mcy^{m+1}}{(2m+1)(m+1)a}$ quia nempe est etiam $a=b^m$. Ponatur $x=a$, aut quod eodem recidit $y=o$, habebitur soliditas integrae semi-vngulae $ABOD=\frac{cm^2 b^{m+1}}{(2m+1)(m+1)}$. Igitur pro Parabola ordinaria, in qua $m=2$, obtinebitur soliditas semi-vngulae per ordinatam $\frac{4abc}{15}$, hoc est, aequalis Pyramidi quadrangulari, cuius basis est Rectangulum $AB \times BO$, altitudo autem $\frac{4}{5}AD$. Fig. 2.

§. 12. Pro eiusdem Cylindri Parabolici Vngula per axem, assumenda erit aequatio sequens $x=y^m$, quare $\frac{2bdu}{c}=y^2 dx=my^{m+1}dy$, quae aequatio integrata sic vt posito $y=o$, fiat quoque $u=o$, dabit $u=\frac{cmy^{m+2}}{2b(m+2)}$; posito $y=b$, emergit soliditas semi-vngulae per axem integrae $=\frac{cmb^{m+1}}{2.(m+2)}$. Fit ergo pro Parabolis ordinariis, in quibus $m=2$, soliditas semi-vngulae per axem $=\frac{cb^3}{4}=\frac{abc}{4}$ ob $a=b^2$, hoc est, aequalis Pyramidi quadrangulari, cuius basis est Rectangulum

AB×BO, altitudo autem $\frac{3}{4}c$. Est itaque Vngula prior ad hanc in ratione 16 ad 15.

§ 13. Pro superficiebus harum Vngularum resumatur aequatio §. 11. $a-x=y^m$, ne autem calculus euadat nimis molestus, assumamus tantum, pro Parabola vulgari, $a-x=y^2$, erit itaque $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dy\sqrt{(4y^2+1)}$, hinc $\frac{ads}{c} = x\sqrt{(dx^2+dy^2)} = (ady-y^2dy)\sqrt{(4y^2+1)} = \frac{(ady-y^2dy)(4y^2+1)}{\sqrt{(4y^2+1)}} = \frac{(4a-1)y^2dy-4y^4dy+ady}{\sqrt{(4y^2+1)}}$; cuius Integrale vt habeatur, pono illud appariturum esse sub hac forma $(\alpha y-\beta y^3)\sqrt{(4y^2+1)}+\gamma\int\frac{dy}{\sqrt{(4y^2+1)}}$; facta differentiatione huius expressionis, et terminis homologis comparatis, inuenitur $\alpha=\frac{16a-1}{32}$, $\beta=\frac{1}{4}$, $\gamma=\frac{-16a+1}{32}$, quibus substitutis oritur: $S=\frac{c}{a}(\frac{16a-1}{32}y-\frac{1}{4}y^3)\sqrt{(4y^2+1)} - \frac{c(16a-1)}{32a}\int\frac{dy}{\sqrt{(4y^2+1)}}$ + constante aliqua. Sed notum est, membrum huius aequationis inintegrabile dependere à Quadratura Hyperbolae; quare etiam superficiei huius Vngularis Quadratura ab eadem pendet.

§. 14. Pro superficie vero Vngulae Parabolicae per axem assumo $x=y^2$, vnde $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dy\sqrt{(4y^2+1)}$, et $\frac{bds}{c} = y\sqrt{(dx^2+dy^2)} = ydy\sqrt{(4y^2+1)}$, quae aequatio sic integrata, vt posito $y=0$ fiat $s=0$, efficit sequentem: $s=\frac{c(4y^2+1)^{\frac{3}{2}}-c}{12b}$; ex quo apparet, hanc Vngulam per axem Geometricam habere superficiem, quae, posito $y=b$, integra euadit $=\frac{c(4b^2+1)^{\frac{3}{2}}-c}{12b}$.

§. 15.

§. 15. Assumamus nunc Cylindrum Ellipticum A GKEF, in quo sit Ellipseos semi-axis maior $AC = m$, semi-axis minor $CG = n$, $AB = a$, $BO = b$, $BP = x$, $PM = y$, eritque $AP = a - x$, $PK = 2m - a + x$, atque ex nota Ellipseos proprietate habebitur $\frac{my}{n} = \sqrt{(ae + fx - x^2)}$ positis nempe $2m - a = e$, atque $a - e = f$, vnde orietur $\frac{madV}{cn} = xdx\sqrt{(ae + fx - x^2)} = (xdx - \frac{1}{2}fdx)\sqrt{(ae + fx - x^2)} + \frac{1}{2}fdx\sqrt{(ae + fx - x^2)} = (xdx - \frac{1}{2}fdx)\sqrt{(ae + fx - x^2)} + \frac{mf}{2n}ydx$; cuius Integrale ita sumtum, vt posito $x = o$ euanescat V, dabit $V = \frac{a^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}}cn - cn(ae + fx - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3am} + \frac{f}{2a} \times PBOM$, ex quo patet, generalem Cubaturam huius Vngulae per ordinatam dependere à Quadratura spatii Elliptici PBOM, et consequenter à Quadratura Circuli. Si vero ponatur $f = o$, hoc est, $a = e$, si scilicet supponatur, sectionem transire per ipsum centrum Ellipseos, quo casu est $m = a$, $n = b$, tum euanescet membrum aequationis non-Integrabile, eritque $V = \frac{m^3cn - cn(m^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3m^2}$; itaque si x abeat in m, inuenietur soliditas talis Vngulae dimidiae integra haec $\frac{mcn}{3}$, hoc est, in Cylindro Elliptico semi-Vngula per ordinatam, cuius sectio transit per centrum, par est Pyramidi quadrangulari, cuius basis est Rectangulum $AC \times CG$, altitudo vero AD. Tabula III. Fig. 1.

§. 16. Si quaeratur eiusdem Cylindri Elliptici Vngula per axem, tunc erit, vocata iam AP, x, manentibus

tibus reliquis vt modo ante, $y^2 = \frac{n^2(2mx - x^2)}{m^2}$, vnde $\frac{2bdu}{c} = y^2\, dx = \frac{2mn^2xdx - n^2x^2dx}{m^2}$, cuius Integrale debito modo sumtum efficit: $u = \frac{cmn^2x^2 - \frac{1}{3}cn^2x^3}{2m^2b}$, ex quo perspicitur, talis Vngulae Cubaturam absolutam dari. Abeunte x in a ergo, erit soliditas talis semi-Vngulae per axem integra $= \frac{cmn^2a^2 - \frac{1}{3}cn^2a^3}{2bm^2}$; et si sectio terminetur in centro Ellipseos, hoc est, si fuerit $a = m$, $b = n$, erit $u = \frac{mcn}{3}$, hoc est, aequalis Pyramidi quadrangulari, cuius basis est rectangulum AC×CG, altitudo vero AD. Superficies autem harum Vngularum, cum non nisi prolixo calculo eruantur; nec non Vngulas Hyperbolicas, cum facile ex Ellipticis, mutatis tantum signis, deducantur; breuitati studens, lubens praetereo.

§. 17. Examinatis itaque Vngulis quae ex Cylindris sectionum Conicarum oriuntur, transeo ad alias quasdam Curuas; vbi quidem primo praeterire non possum illam Curuam, cuius Celeberr. *Ioannes Bernoulli* mentionem facit in Actis Lipf. Anni 1695. p. 550. et quae exprimitur aequatione differentiali hac $x^2\, dx + y^2\, dx = a^2\, dy$; cuius Indeterminatae separari nequeunt. Docet ibidem Celeberr. Vir inuenire aliam Curuam, quae per puncta flexus omnium Curuarum aequationi allegatae competentium transeat. Eandem curuam admittere quoque Integrationem absolutam Vngulae suae per axem, statim in oculos incurrit. Est enim in ea $\frac{cy^2dx}{2b} = \frac{a^2cdy - cx^2dx}{2b} = du$, consequenter $u = \frac{a^2cy - \frac{1}{3}cx^3}{2b} + A$.

§. 18.

§. 18. Sit Ciſſois AMK, cuius circulus generator ANEB. Poſitis $AP = t$, $PM = y$, $AB = 2r$, fiat ſectio per ordinatam HK, ita vt ſint $AH = a$, $HK = b$; atque erit, ex natura Ciſſoidis, aequatio $t^3 = 2ry^2 - ty^2$; vocata igitur $HP = x$, vt formulae noſtrae natura requirit, orietur $\frac{adV}{c} = yx\,dx = \frac{(a-x)^{\frac{3}{2}} x\,dx}{\surd(2r-a+x)}$. Ponatur denuo $a - x = t$, et ſubſtituatur hic valor in expreſſione inuenta, erit $\frac{adV}{c} = \frac{t^{\frac{3}{2}}(tdt - adt)}{\surd(2r-t)} = \frac{t^3dt - at^2dt}{\surd(2rt-t^2)}$. Quia autem praeuideo, Integrale huius formulae habiturum eſſe hanc faciem generalem, $(\alpha t^2 + \beta t + \gamma)\surd(2rt - t^2) + \delta \int \frac{dt}{\surd(2rt-t^2)}$, comparo terminos homologos poſt factam differentiationem, et inuenio $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = \frac{3a-5r}{6}$, $\gamma = \frac{3ar-5r^2}{2}$, $\delta = \frac{5r^3-3ar^2}{2}$, quibus ſubſtitutis, et expreſſione ſic ordinata, vt abeunte t in a, fiat $V = 0$, habetur Integrale completum $\frac{aV}{c} = (\frac{3ar-5r^2}{2} + \frac{3a-5r}{6}t - \frac{1}{3}t^2)\surd(2rt-t^2) - (5r-3a)NCI - \frac{4ar-15r^2+2^2}{6}\surd(2ar-a^2)$; vnde patet, Cubaturam generalem huius Vngulae per ordinatam dependere à rectificatione arcus Circularis NI. Si deſideretur ſoliditas ſemi-vngulae integra, ponatur $t = 0$, quo facto fiet $NCI = ACI$, atque habebitur $V = \frac{15r^2-a^2-4ar}{6a}c\surd(2ar-a^2) - \frac{5r-3a}{a}c \times ACI$. vnde ſi ponatur $a = 2r$, erit $V = \frac{cr \times AIBC}{a}$, hoc eſt, ſi $c = a$; erit haec vngula aequalis Cylindro, cuius baſis eſt Circulus generator, altitudo radius AC. Cum vero recta BF, perpendicularis ad Diametrum AB, ſit Aſymptotus Ciſſoidis AK, euidens eſt ſemi-vngulam talem, cuius ſectio fit iuxta ordinatam BF, por- Tabula III. Fig. 3.

 rigi

SOLVTIO SINGVLARIS CASVS CIRCA TAVTOCHRONISMVM.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula IV. Cum ante annos tres Clariss. *Bernoulli* methodum innumeras curuas tautochronas in vacuo inueniendi proponeret, mentionem fecit problematis non parum elegantis, cuius solutionem hac scheda daturus sum. Difficillimum quidem eo tempore videbatur hoc problema, et propterea parum studii ad id soluendum impendebam. Postmodum vero cum diligentius in tautochronas pro fluidis inquisiuissem, vniuersalem detexi methodum problemata huiusmodi omnia soluendi, quae etiam me ad solutionem problematis illius manuduxit.

Fig. 1. §. 2. Problema autem hoc est: *Datae curuae* A NB *in* B *adiungere curuam* BMC *eius proprietatis, vt omnes descensus grauis alicubi in curua* BMC *incipientes vsque ad imum punctum* A *fiant temporibus aequalibus.* Oportet ergo inueniri curuam BMC, ex hac conditione, vt sumto in curua BMC pro lubitu puncto M tempus descensus per MBNA sit constans, neque pendeat

deat a loco puncti M. Seu tempus descensus per M BNA aequale esse debet tempori descensus per curuam datam BNA; qui est casus incidente puncto M in B.

§. 3. Descendat ergo corpus ex puncto M, et quaeramus descensus tempus per arcum MB et BMA. Ducta verticali BP, ponatur $BP = a$, quae igitur litera, quia locum puncti M definit, in expressione temporis per MBA inesse non potest. Curuae datae altitudo AD sit $= c$. Assumantur in vtraque curua applicatae quaecunque QN, et XY iisque proximae qn et xy. Dicantur $AQ = t$, $AN = r$ et $BX = x$, $BY = s$; quarum inter t et r aequatio est data, inter x et s desideratur. Celeritas quam corpus in N habebit est $\sqrt{(a + c - t)} = \sqrt{(PB + DQ)}$. Adeoque tempus quo arcus AN absoluitur est $= \int \frac{dr}{\sqrt{(a + c - t)}}$. Quod integrale ita debet accipi, vt fiat $= 0$, si sit $t = 0$.

§. 4. Deinceps si ponatur $t = c$, habebitur tempus per integram curuam datam BNA, quod igitur erit expositum formula ex a et constantibus composita. Nonnullos computaui casus speciales, et vidi tempus descensus per curuam BNA initio descensus posito in M, semper exponi posse sequente serie $k - \alpha a - \beta a^2 - \gamma a^3 - \delta a^4 -$ etc. $- \zeta \sqrt{a} - \eta a \sqrt{a} - \theta a^2 \sqrt{a} -$ etc. cuius in quolibet casu speciali coefficientes α, β, etc. et k poterunt determinari. Hoc tempus igitur additum ad descensus tempus per MB, constans esse debet: atque vt in summa omnes termini litera a affecti sese tollant, necesse est.

§. 5. Ad tempus descensus per curuam MB inueniendum, est celeritas in $Y = V(a-x)$ et elementum temporis $= ds : V(a-x)$. Huius integrale ita assumtum, vt fiat $= o$ si $x = o$ dabit tempus descensus per YB, in quo ergo si ponatur $x = a$ prodibit descensus tempus per MB, quod cum priore constantem quantitatem ab a liberam conficere debet. Si punctum M incidit in punctum B, i. e. si a euanescit, integrum tempus descensus erit tempus descensus per curuam BMA, quod ex superiore formula euadit $= k$. Hanc ob rem etiam tempus descensus per MBNA debet esse $= k$. Proinde tempus per MB debebit esse $= \alpha a + \beta a^2 + \gamma a^3 +$ etc. $+ \zeta V a + \eta a V a + \theta a^2 V a +$ etc.

§. 6. Hoc vt fiat assumo pro curua quaesita sequentem aequationem $ds = A dx V x + B x dx V x + C x^2 dx V x +$ etc. $+ E dx + F x dx + G x^2 dx +$ etc. Tempus ergo descensus per arcum MB erit $= \int \frac{A dx \surd x}{\surd (a-x)} + \int \frac{B x dx \surd x}{\surd (a-x)} + \int \frac{C x^2 dx \surd x}{\surd (a-x)} +$ etc. $+ \int \frac{E dx}{\surd (a-x)} + \int \frac{F x dx}{\surd (a-x)} + \int \frac{G x^2 dx}{\surd (a-x)} +$ etc. scilicet si integralibus his ita sumtis vt fiant $= o$ si $x = o$ ponatur vbique $x = a$. Determinentur ergo coefficientes A, B, C, etc. ita, vt sint $\int \frac{A dx \surd x}{\surd (a-x)} = \alpha a$; $\int \frac{B x dx \surd x}{\surd (a-x)} = \beta a^2$, $\int \frac{C x^2 dx \surd x}{\surd (a-x)} = \gamma a^3$ etc. et $\int \frac{E dx}{\surd (a-x)} = \zeta V a$; $\int \frac{F x dx}{\surd (a-x)} = \eta a V a$; $\int \frac{G x^2 dx}{\surd (a-x)} = \theta a^2 V a$ etc. Assumsi vero istum loco ds valorem, vt litterae A, B, C, etc. non ab a pendentes determinentur.

§. 7. Integratio huius $\frac{A dx \surd x}{\surd (a-x)}$ pendet a quadratura circuli; At si ope logarithmorum imaginariorum integretegretur vt decet, atque ponatur $x = a$ prodibit $\frac{1}{2} A a \sqrt{-1} . l - 1$ quod aequale esse debet αa sit ergo $A = \frac{2 . \alpha}{1 . \sqrt{-1} . l - 1}$. Simili modo, $\frac{Bxdx\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$ integratum dabit $\frac{1 . 3}{2 . 4} B . a^2 \sqrt{-1} . l - 1 = \beta a^2$, sit igitur $B = \frac{2 . 4 . \beta}{1 . 3 \sqrt{-1} . l - 1}$. Atque porro prodibit $C = \frac{2 . 4 . 6 . \gamma}{1 . 3 . 5 . \sqrt{-1} . l - 1}$, et $D = \frac{2 . 4 . 6 . 8 . \delta}{1 . 3 . 5 . 7 . \sqrt{-1} . l - 1}$ etc. Datis ergo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. quae ex curua BNA nota inueniuntur, determinantur coefficientes pro curua quaesita A, B, C, D, etc.

§. 8. Pro altera parte, quae est rationalis, esse debet $\int \frac{Edx}{\sqrt{(a-x)}} = \zeta \sqrt{a}$; sit autem $\int \frac{Edx}{\sqrt{(a-x)}} = 2 E \sqrt{a}$, ex quo prodit $E = \frac{\zeta}{2}$. Deinde $\int \frac{Fxdx}{\sqrt{(a-x)}}$ fit $= \frac{2}{3} . 2 F a \sqrt{a}$, idque aequari debet huic $\eta a \sqrt{a}$, reperitur ergo $F = \frac{3 . \eta}{2 . 2}$, similiter proueniet $G = \frac{3 . 5 . \theta}{2 . 4 . 2}$; atque $H = \frac{3 . 5 . 7 . \iota}{2 . 4 . 6 . 2}$ et ita porro. Hac igitur ratione determinatis A, B, C, D, etc. cognita erit aequatio pro curua quaesita $ds = A dx \sqrt{x} + B x dx \sqrt{x} + C x^2 dx \sqrt{x} +$ etc. $+ E dx + F x dx + G x^2 dx +$ etc. Quae quanquam in infinitum plerumque continuetur, tamen fieri potest, vt saepe eius summa possit definiri, sicque inueniatur aequatio finita pro curua quaesita.

§. 9. Sit ANB linea recta ad horizontem inclinata ita vt sit $AN : AQ = n : 1$ seu $r = nt$ et $dr = ndt$. Fig. 2.
Ex quo fit $\int \frac{dr}{\sqrt{(a+c-t)}} = \int \frac{ndt}{\sqrt{(a+c-t)}} =$ Const. $- 2 n \sqrt{(a+c-t)}$ Constans vero haec est $= 2 n \sqrt{(a+c)}$ ponatur iam $t = c$ prodit tempus descensus per $BA = 2 n \sqrt{c} + \frac{1 . 2 n a}{2 \sqrt{c}} - \frac{1 . 1 . 2 n a^2}{4 . 2 c \sqrt{c}} + \frac{1 . 1 . 3 . 2 n a^3}{8 . 2 . 3 . c^2 \sqrt{c}} - \frac{1 . 1 . 3 . 5 . 2 n a^4}{16 . 2 . 3 . 4 . c^3 \sqrt{c}} +$ etc. $- 2 n \sqrt{a}$, in seriem $\sqrt{(a+c)}$ resoluta. Comparetur

retur haec forma cum hac $k - \alpha a - \beta a^2 - \gamma a^3 - \delta a^4$ — etc. $- \zeta \sqrt{a} - \eta a \sqrt{a}$ — etc. prodibit $k = 2n\sqrt{c}$, $\alpha = \frac{-1.2n}{2\sqrt{c}}$, $\beta = \frac{1.1.2n}{4.2.c\sqrt{c}}$, $\gamma = \frac{-1.1.3.2n}{8.2.3.c^2\sqrt{c}}$, $\delta = \frac{1.1.3.5.2n}{16.2.3.4.c^3\sqrt{c}}$ etc. et $\zeta = 2n$, $\eta = 0$, $\theta = 0$, $2 = 0$ etc.

§. 10. Cognitis his valoribus prodibunt A, B, C, etc. vt sequuntur. $A = \frac{-2n}{\sqrt{-c}.\,l-1}$, $B = \frac{2n}{3c\sqrt{-c}.\,l-1}$, $C = \frac{-2n}{5c^2\sqrt{-c}.\,l-1}$, $D = \frac{2n}{7c^3\sqrt{-c}.\,l-1}$ etc. $E = n$, $F = 0$, $G = 0$ etc. Pro curua igitur quaesita BMC inuenitur ista aequatio, $ds = \frac{-2ndx\sqrt{x}}{1.\sqrt{-c}\,l-1} + \frac{2nxdx\sqrt{x}}{3c\sqrt{-c}.\,l-1} - \frac{2nx^2dx\sqrt{x}}{5c^2\sqrt{-c}.\,l-1} +$ etc. $+ ndx$, cuius integralis haec est $s = nx - \frac{Anx^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-c}.\,l-1}\left(\frac{1}{1.3} - \frac{x}{3.5.c} + \frac{x^2}{5.7.c^2} - \frac{x^3}{7.9.c^3} + \text{etc.}\right)$. Facilius autem erit aequationem differentialem in expressionem finitam transmutare, est autem ea haec $ds = ndx - \frac{2ndx}{\sqrt{-c}.\,l-1}\left(\sqrt{x} - \frac{x\sqrt{x}}{3c} + \frac{x^2\sqrt{x}}{5c^2} - \frac{x^3\sqrt{x}}{7c^3} + \text{etc.}\right)$. Quae series exprimit arcum circuli, cuius tangens est $\sqrt{x}$ posito radio $\sqrt{c}$, hanc ob rem erit $ds = ndx - \frac{ndx}{l-1}\, l\, \frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}}$.

§. 11. Aequatio haec inuenta $ds = ndx - \frac{ndx}{l-1}\, l\, \frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}}$ potest integrari, proditque post integrationem haec aequatio $s = nx - \frac{2n\sqrt{cx}}{\sqrt{-1}.\,l-1} - \frac{n(c+x)}{l-1}\, l\, \frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}}$. Hic ipsius s valor ope rectificationis circuli construitur sequente modo.
Fig. 2. Fiat circuli quadrans cuius radius $AC = c$, ducatur tangens $AT = \sqrt{cx}$ et secans TMC, erit $s = \frac{n.AB.AT^2 + n.AT.AC^2 - n.AM.CT^2}{AC.AB}$. Namque ex natura circuli est $AB = \frac{cl-1}{2\sqrt{-1}}$ et $AM = \frac{c}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}}$, vnde data constructio facile sequitur.

§. 12. Ex aequatione $ds = ndx - \frac{ndx}{l-1}\, l\frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}}$ apparet esse $ds < ndx$ nisi in casu $x = o$, quo est $ds = ndx$: habebunt enim curuae AB et BC semper in B tangentem communem. Ex quo apparet curuam quaesitam esse concauam versus axem BP, atque eousque scilicet in C ascendere, quoad eius tangens fiat verticalis, in eoque puncto C curuam habere cuspidem. Altitudo igitur huius curuae BE inuenietur, si in aequatione ponatur $ds = dx$. In nostro ergo casu, quo curua data est linea recta, dabit x altitudinem BE ex aequatione $(n-1)\, l-1 = n\, l\frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}}$ seu hac $-1 = (\frac{\sqrt{c}+\sqrt{-x}}{\sqrt{c}-\sqrt{-x}})^{\frac{n}{n-1}}$ siue hac $(\sqrt{c}+\sqrt{-x})^{\frac{n}{n-1}} + (\sqrt{c} - \sqrt{-x})^{\frac{n}{n-1}} = o$. Vel etiam sumatur arcus $AM = \frac{n-1}{n}$ AB, et ducta eius tangente AT erit $\frac{AT^2}{AC}$ altitudo curuae quaesitae. Fig. 1. Fig. 2.

§. 13. Si aequatio differentialis inuenta denuo differentietur posito dx constante prodibit aequatio haec $dds = \frac{ndx^2\sqrt{c}}{(c+x)\sqrt{-x}.l-1}$, quae posita ratione peripheriae ad diametrum $\pi : 1$ congruit cum hac $dds = \frac{-\eta dx^2\sqrt{c}}{\pi(c+x)\sqrt{x}}$. Ex hac aquatione casus, quo $c = o$ et $n = \infty$, ita tamen, vt sit $n\sqrt{c} = \sqrt{b}$, facile cognoscitur. Euenit hoc, si recta data est infinite parua et angulum infinite paruum cum horizonte constituit, ita vt tempus descensus per eam tamen sit finitum nimirum $= 2\sqrt{b}$. Erit igitur $AM = AB$, ideoque tangens AT infinita respectu radii c, abibit ergo $c+x$ in x, atque curua quaesita hanc habebit aequationem $dds = \frac{-dx^2\sqrt{b}}{\pi x\sqrt{x}}$ seu $ds = \frac{2dx\sqrt{b}}{\pi\sqrt{x}}$

atque $s = \frac{4bx}{\pi}$. Hanc ob rem curua quaesita erit cyclois, vt natura rei requirit.

§. 14. Si curua data hanc habuerit aequatione $dr = t^n dt$, erit elementum temporis $\frac{bt^n dt}{V(a+c-t)}$, ponatur $a+c=f$ et $f-t=z^2$, erit $t=f-z^2$ et $t^n = f^n - \frac{n}{1} f^{n-1} z^2 + \frac{n.n-1}{1.2} f^{n-2} z^4 - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.} f^{n-3} z^6 +$ etc. et $\frac{bdt}{V(f-t)} = -2bdz$. Hinc prodibit $\int \frac{bt^n dt}{V(a+c-t)} =$ Const. $-2bf^n z + \frac{2bn}{1.3} f^{n-1} z^3 - \frac{2bn.n-1}{1.2.5} f^{n-2} z^5 + \frac{2bn.n-1.n-2}{1.2.3.7} f^{n-3} z^7 -$ etc. Quod cum facto $t=o$ seu $z=Vf$ euanescere debeat, erit Const. $= 2bf^n Vf(1 - \frac{n}{1.3} + \frac{n.n-1}{1.2.5} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.7} +$ etc.). Ponatur deinde $t=c$ seu $z=Va$, prodibit tempus descensus per $BA = 2bf^n Vf(1 - \frac{n}{1.3} + \frac{n.n-1}{1.2.5} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.7} +$ etc.) $-2b(f^n Va - \frac{n}{1.3} f^{n-1} aVa + \frac{n.n-1}{1.2.5} f^{n-2} a^2 Va -$ etc.)

§. 15. Ponamus breuitatis causa $1 - \frac{n}{1.3} + \frac{n.n-1}{1.2.5} -$ etc. $= p$, erit substituto $a+c$ loco f descensus per $BA = 2bpc^{n+\frac{1}{2}} + \frac{n+\frac{1}{2}}{1} 2bpc^{n-\frac{1}{2}} a + \frac{n+\frac{1}{2}.n-\frac{1}{2}}{1.2} 2bpc^{n-\frac{3}{2}} a^2 +$ etc. $-2bc^n Va = \frac{2n}{3}. 2bc^{n-1} aVa - \frac{2n.2n-2}{3.5} 2bc^{n-2} a^2 Va - \frac{2n.2n-2.2n-4}{3.5.7}. 2bc^{n-3} a^3 Va -$ etcet. Haec forma comparata cum forma §. 4. data $k - \alpha a - \beta a^2 - \gamma a^3 -$ etc. $- \zeta Va - \eta a Va - \theta a^2 Va -$ etc. erit $k = 2bpc^{n+\frac{1}{2}}$, $\alpha = -\frac{(n+\frac{1}{2})}{1} 2bpc^{n-\frac{1}{2}}$, $\beta = -\frac{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})}{1.2} 2bpc^{n-\frac{3}{2}}$,

$2bpc^{n-\frac{3}{2}}$, $\gamma = -\frac{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})}{1.\ 2.\ 3} 2bpc^{n-\frac{5}{2}}$ etc. atque $\zeta = 2bc^n$, $\eta = \frac{2n}{3}.\ 2bc^{n-1}$, $\theta = \frac{2n.2n-2}{3.\ 5}\ 2bc^{n-2}$, $\iota = \frac{2n.\ 2n-2.\ 2n-4.}{3.\ 5.\ 7}\ 2bc^{n-3}$. etc.

§. 16. Inuenientur igitur litterae A, B, C, etc. vt sequitur $A = -\frac{2b(2n+1)pc^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{-1}.l-1}$, atque $B = -\frac{2b(2n+1)(2n-1)pc^{\frac{n-3}{2}}}{1.\ 3.\ \sqrt{-1}.l-1}$, $C = -\frac{2b(2n+1)(2n-1)(2n-3)pc^{\frac{n-5}{2}}}{1.\ 3\ 5.\ \sqrt{-1}.l-1}$ etc. Atque $E = bc^n$, $F = \frac{bnc^{n-1}}{1}$, $G = \frac{b.n.(n-1)}{1.2.}c^{n-2}$, $H = \frac{b.n.(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}c^{n-3}$ etc. Pro curua itaque quaesita reperitur ista aequatio $ds = \frac{-2bpdx\sqrt{x}}{\sqrt{-1}\ l-1}\left(\frac{2n+1}{1}c^{\frac{n-1}{2}} + \frac{(2n+1)(2n-1)}{1\ 3}c^{\frac{n-3}{2}}x + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{1.\ 3.\ 5}c^{\frac{n-5}{2}}x^2 + \text{etc.}\right) + bdx(c^n + \frac{n}{1}c^{n-1}x + \frac{n.(n-1)}{1.\ 2}c^{n-2}x^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}c^{n-3} + \text{etc.}) = b(c+x)^n dx - \frac{2bpc\ dx\sqrt{x}}{\sqrt{-1}.l-1}\left(\frac{2n+1}{1.\sqrt{c}} + \frac{(2n+1)(2n-1)x}{1.\ 3.\ c\sqrt{c}} + \frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)x^2}{1.\ 3.\ 5.\ c^2\sqrt{c}} + \text{etc.}\right)$

§. 17. Quanquam hic pro curua data haec tantum aequatio $dr = bt^n dt$ est assumta, tamen ad omnes prorsus curuas exemplum hoc accommodari potest. Sit enim curua data ista exposita aequatione $dr = At^\alpha dt + Bt^\beta dt + Ct^\gamma dt +$ etc. Tum quaeratur aequatio pro curua quaesita primo ex hac tantum aequatione $dr = At^\alpha dt$, et sit aequatio resultans $ds = Pdx$. Deinde sumatur aequatio $dr = Bt^\beta dt$ proueniatque aequatio $ds = Qdx$. Similiter ex aequationibus $dr = Ct^\gamma dt$,

$dr = Dt^{\delta} dt$ etc. emergant istae $ds = R dx$, $ds = S dx$ etc. erit aequatio pro curua quaesita haec $ds = (P + Q + R + S + \text{etc.}) dx$, si scilicet curua data habuerit aequationem $dr = At^{\alpha} dt + Bt^{\beta} dt +$ etc.

§. 18. Apparet etiam ex aequatione §. 16. si fuerit $n = -\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ etc. seriem abrumpi, atque statim haberi aequationem finitam; sit $dr = bt^{-\frac{1}{2}}$, curua scilicet data cyclois, erit $n = -\frac{1}{2}$ atque $ds = \frac{bdx}{\sqrt{(c+x)}}$ Ex quo cognoscitur curuam superiorem annexam cum data inferiore eandem curuam continuam nimirum cycloidem constituere.

DE SUPERFICIEBUS AD AEQUATIONES LOCALES REVOCATIS, VARIISQUE EARUM AFFECTIONIBUS.

AUTHORE

Iacobo Hermanno.

Tabula IV.

GEometrae de aliis Superficiebus quam de planis, aut etiam de his quae ex reuolutione figurae cuiusque curuilineae circa lineam quandam in gyrum actae, vix cogitarunt subinde; tametsi infinities infinita genera dantur, ad quae species illae reuocari non possunt. Aequationes locales, quibus omnium superficierum indoles exponi debet, tres omnino indeterminatas inuoluunt, cum tamen aequationes ad lineas curuas

curuas in plano ductas ordinarie duas tantum indeterminatas, coordinatas nempe curuae, complectantur. Accessio vero tertiae indeterminatae ad duas illas, quae figuris quibusuis sufficiunt, calculum saepe prolixum efficit. Et haec calculi prolixitas probabilis causa est, propter quam Geometrae a contemplatione nouorum generum superficierum animum abstinuerunt.

In iis vero quae sequentur, nonnullas superficies quatenus aequationibus localibus exprimi possunt, contemplabimur, earumque aequationes quae sese primum nobis fortuito obtulerunt excutiemus, ostensuri quomodo Maximae aut Minimae applicatae inter superficies illas et subiectum aliquod planum duci, tum etiam plana superficies tangentia inueniri, aut quomodo in superficie ipsa inter duo data puncta linea breuissima determinari debeat.

I. Si superficies quaecunque gibba vel caua EGFH super plano horizontali YCZ, extet, et in hoc plano horizontali ducta sit pro lubitu recta indefinita YZ, hanc posthac *directricem* vocabimus, eum in finem, vt ex quolibet superficiei puncto D, demissa perpendiculari DC, et alia CB ex C in directricem YZ, natura superficiei exponi possit per aequationem, quae relationem, quas indeterminatae $AB = x$, $BC = y$, et $CD = z$, inter se seruant, indicat. Ad id autem punctum quoddam fixum A in directrice assumi debet, a quo abscissae initium ducant. Caeterum Directrix et in ea punctum fixum A pro lubitu poni possunt prout ma- Fig. 3.

gis commodum videbitur. Tres illae indeterminatae z, y, et x, in aequationes locales ſemper ingrediuntur, paucis exceptis caſibus, cum ſuperficei natura non pendet ab indeterminata illa quae in aequatione ſuperficiei abeſt. Sed ſepoſitis exceptionibus illis, diſpiciendum quomodo aequationes locales tres indeterminatas inuoluentes tractari debeant. Aſſumamus primum aliquot ex ſimpliciſſimis earum, ſintque adeo aequationes examinandae eae quae ſequuntur.

I. $az+by+cx-e^2=o$. III. $z^2-xy=o$.
II. $z^2-ax-by=o$. IV. $z^2-ax^2-bx-cy^2-ex-fy=o$
V. $az^2+byz+cy^2-exz+fx^2+gz-hx=o$.
VI. $u^2-y^2-x^2=o$.

Aequatio I. $az+by+cx-e^2=o$.

II. Haec aequatio eſt Locus plani, cuius poſitio ex aequatione eſt indicanda. Ad id ponamus primum $y=o$, et $x=o$, remanebit aequatio $az-e^2=o$, quae praebet $z=\frac{e^2}{a}$. Hinc ſi in puncto fixo A ad horizontis planum perpendicularis AF excitetur $=\frac{e^2}{a}$, erit punctum F in plano optato. Faciendo deinde in eadem aequatione $z=o$, $y=o$, remanebit $cx-e^2=o$, quae dat $x=\frac{e^2}{c}$. Capiendo ergo in directrice YZ, partem AE$=\frac{e^2}{c}$, punctum E erit aliud punctum in plano quaeſito. Tertio factis $z=o$, et $x=o$, inuenietur $by-e^2=o$, atque adeo $y=\frac{e^2}{b}$, quare ducendo AH perpendicularem ad AE et $=\frac{e^2}{b}$, punctum H dabit tertium punctum in plano quaeſito; propterea pla-

Fig. 4.

num

num, quod per tria puncta F, E, H transit, est locus aequationis propositae $az + by + cx - e^2 = o$.

Per quoduis punctum D plani FHE planum IGB transire intelligatur plano FHA parallelum, eritque DC horizonti normalis in plano IGB et parallela ipsis IB et FA. Dicantur $AB = x$, $BC = y$, et $CD = z$. Triangula similia EAH, EBG, praebebunt $BG = \frac{e^2 - cx}{b}$ adeoque $CG = \frac{e^2 - cx - by}{b}$, et Triangula similia FAH, DCG, dant $DC = \frac{e^2 - cx - bx}{a} = z$, atque adeo $az + by + cx - e^2 = o$. Q. E. I.

Est ergo HE sectio plani inclinati FHE et horizontis, ductoque per FA plano FKA quod rectae EH ad angulos rectos occurrat, angulus FKA indicabit inclinationem horum planorum alterius ad alterum, et sinus huius anguli inuenietur esse ad sinum totum, vt $\sqrt{(b^2 + c^2)}$ ad $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$.

III. Si indeterminatae, quae in aequationem positionem plani FHE indicantem ingrediuntur, non in subiecto horizontis AHE plano iaceant, sed in plano inclinato FHE: vt, si $FI = t$, $ID = u$, erunt $x = \frac{e^2 t}{cf}$ $y = \frac{e^2 u}{bg}$, existentibus $FE = f$, et $FH = g$; Quibus in $z = \frac{e^2 - cx - by}{a}$ suffectis, prouenit $z = \frac{(fg - gt - fu)e^2}{afg}$. Hoc vsum suum aliquando habere potest, cum figura ex plano horizontali proiici debet in planum FHE, aut viciffim.

IV. Ex consideratione sola Pyramidis EAFH omnia problemata, quae circa triangula sphaerica re- Fig. 4.

ctangula

ctangula occurrant expediri possunt. Vertex enim E refert centrum Sphaerae, anguli FEA, HEA bina crura circa angulum rectum, et angulus HEF hypothenusam, angulus vero rectus est, quem plana FAE, HAE continent, et reliqui anguli sunt, qui planis AHE, FHE, et AFE, HFE intercipiuntur. His positis:

1. Si ex datis duobus cruribus circa angulum rectum, id est, datis angulis FEA, HEA inuenire oporteat angulum K alteri cruri vel angulo HEA adiacentem, res sine vllo ad Sphaeram respectu, facillima est. Nam in Δ:to AKE ad K rectangulo, est AK.AE:: sin. AEK. sin. tot., et in $\Delta$to. rectangulo FAE habetur, AE.AF::sin. tot., tang. AEF, quare ex aequo AK.AF::sin. tot.. tang. K::sin. AEK. tang. AEF. Hinc conficitur: *Vt sinus cruris ang. quaesito adiacentis, ad sin. tot., ita tang. cruris alterius, ad tang. anguli quaesiti.*

2. Si datis crure FEA et hypothenusa FEH inuenire oportet angulum cruri oppositum K. Bina $\Delta\Delta$ AKE et FEK subministrant hanc regulam seu analogiam, *vt tang. hypothenusae ad tang. cruris dati, ita sin. tot., ad Cosin. anguli quaesiti* K.

3. Si datis hypothenusa FEH et angulo K quaerantur crura AEH et AEF. Idem par triangulorum FEK et AEK suppeditat has duas analogias in quaestionis solutionem, nempe: *Vt sin. tot. ad cosin. ang dati, ita tang. hypothenusae, ad tang. cruris dato angulo adiacentis*: deinde *vt sin. tot. ad sin. ang. dati, ita sin. hypothenusae ad sin. cruris dato angulo oppositi.*

Reli-

Reliqua problemata triangulorum rectangulorum ex hisce facile quoque soluuntur.

V. Quod ad Triangula Sphaerica obliquangula attinet, eadem Pyramis eorum resolutioni inseruit, modo angulus FAH iam sit obliquus, manentibus tamen angulis FAE, HAE, rectis. Quod vnico exemplo ex difficilioribus ostendam; nempe cum datis angulis FEA, HEA, HEF, quaeritur angulus FAH, quem plana FAE, HAE comprehendunt; quod in Trigonometria Sphaerica redit ad illud, vt ex datis tribus lateribus trianguli inueniantur anguli. Fig. 4.

Dicantur nunc AF$=a$, AH$=b$, AE$=c$, EF$=e$, EH$=f$, cosinus anguli dati FEH$=g$, et cosinus anguli quaesiti FAH$=u$, inuenietur in Δ^{lo}. FAH latus FH$=\sqrt{}(a^2+b^2-2abu)$, et in Δ^{lo}. FEH, idem latus reperitur, $=\sqrt{}(a^2+b^2+2c^2-2efg)$, quare $a^2+b^2-2abu=a^2+b^2+2c^2-2efg$, ex qua deriuatur $u=\frac{efg-c^2}{ab}$. Dicantur praeterea sinus angulorum FEA, HEA, l et m, eorum cosinus λ, μ, et sinus totus 1, erunt $a=el$, $b=fm$, $c-e\lambda=f\mu$, quibus in $u=\frac{efg-c^2}{ab}$ suffectis, reperitur $u=\frac{g-\lambda\mu}{lm}$. Sit praeterea sinus dimidii anguli quaesiti FAH$=s$, erit $u=1-2s^2$, et $s^2=\frac{lm+\lambda\mu-g}{2lm}$ quod si praeterea sit sin. $(\frac{1}{2}\text{AEF}+\frac{1}{2}\text{FEH}+\frac{1}{2}\text{AEH}-\text{AEF})=p$, et sin. $(\frac{1}{2}\text{AEF}+\frac{1}{2}\text{FEH}+\frac{1}{2}\text{AEH}-\text{AEK})=q$, per generales sinuum proprietates inuenietur $lm+\lambda\mu-g=2pq$, quod in praecedenti aequatione surrogatum, praebet $s^2=\frac{pq}{lm}$. Atque sic inopinatò incidimus in pulcerrimam regulam ab aliis iam passim traditam soluendi triangulum quodcunque sphaericum, datis tribus eius lateribus, ita vt non necesse sit ducta perpendiculari triangulum propositum in duo triangula rectangula diuidere.

Atque pauca haec sufficiunt ad ostendendum, quomodo ex consideratione Pyramidis vniuersa Trigonometria Sphaerica, absque vlla ad Sphaeram attentione, tradi possit.

Aequatio II. $z^2 - ax - by = o$.

Tab. V. Fig. 1. VI. Haec aequatio inuenietur esse ad superficiem cunei Parabolico Cylindrici.

1. Nam si $z = o$, habemus $-ax - by = o$, quae aequatio est locus lineae rectae ita construendae: Sit VT directrix, et punctum A origo abscissarum x, ducatur recta indefinita HAI hac lege, vt vbique AB sit ad BH, vt b ad a. Haec recta HAI communis erit sectio superficiei et horizontis.

2. Si $y = o$, superficiei aequatio praebet $z^2 = ax$, Parabolae aequationem, quare sectio verticalis solidi per directricem BAE est parabola parametrum habens $= a$.

3. Si $x = o$, superficiei aequatio abit in $z^2 = by$, quae est alius parabolae aequatio, quo cognoscitur quod sectio AGF cum horizonti tum directrici VT ad normam insistens quoque sit Parabola, sed cuius Parameter $= b$.

4. Omnis sectio BEDC plano AGF parallela est Parabolae portio, cuius parabolae vertex est in H, et quae

parametrum habet $= b$. Item omnis ſectio FCDG plano ABE parallela eſt portio Parabolae, cuius vertex eſt in eadem recta HA nempe in I, cuiusque parameter $= a$.

5. Omnis ſectio ſolidi per planum horizonti parallelum eſt linea recta parallela lineae HAI atque ex hoc cognoſcitur, quod ſolidum EEACDGA ſit Cuneus parabolico Cylindricus, nempe baſin habens parabolicam, cuius parameter $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$ et planum tum rectae HI tum horizonti perpendiculare ſit, et per punctum A transeat.

VII. Si in ſuperficie AD maxima applicata, ſi quam habet, indagari debeat, ſequenti modo procedendum erit. Differentiata aequatione ſuperficiei poſitis primum z et y manentibus orta inde aequatio poſtquam per dx diuiſa fuerit, ſignetur A.

Differentiata deinde eadem aequatione ſuperficiei poſitis z et x inuariatis, orta poſt diuiſionem per dy, aequatio ſignetur B. Ope aequationum A et B elicientur aeſtimationes indeterminatarum x, et y per quantitates datas, vel per tales et tertiam z, quibus in aequatione ſuperficiei ſurrogatis, orietur noua aequatio magnitudinem ordinatae maximae aut minimae z definiens. Sed ſi aequationes A, B nullam indeterminatam inuoluunt, indicio eſt, ſuperficiem propoſitam nullam maximam minimamue capere.

Si iam aequationem $z^2 - ax - by = o$, iuxta praecepta modo tradita tractemus, inuenientur aequationes A.. $a = o$, et B.. $b = o$, quae cum nullam indeterminatam inuoluant, concluditur ſuperficiem nullam maximam, minimamue applicatam z admittere.

Fig. 2. VIII. Quantum ad plana tangentia attinet per data in quibusuis ſuperficiebus puncta, quarum aequationes datae ſunt, ducenda: methodus huc faciens, ita habet. Ducatur primum tangens curuae ED, quae eſt ſectio ſuperficiei ad horizontem recta et directrici normalis; ſit haec tangens DH, et ſubtangens CH. Poſtea ducatur tangens DI ad curuam GD, quae eſt communis ſectio plani ſecantis horizonti normalis et paralli directrici, ipſiusque ſuperficiei curuae; et planum per duas tangentes DH et DI tranſiens, ſuperficiem in D continget.

Praxis autem haec eſt: Differentietur aequatio ſuperficiei $z^2 = ax + by$, poſita primum x manente, erit $2zdz = bdy$, quare CH $\left(= \frac{zdy}{dz}\right) = \frac{2z^2}{b} = \frac{2ax+2by}{b}$. Differentietur porro eadem aequatio ſed poſita y manenti, fiet $2zdz = adx$, et CI $\left(= \frac{zdx}{dz}\right) = \frac{2z^2}{a} = \frac{2ax+2by}{a}$. Inuentis vero CH et CI reliqua facile expedientur. Nam ſubtangens parabolae HED pertinens ad punctum D eſt $= 2$ CH, et ſubtangens Parabolae EGD in eodem puncto D eſt 2 CI, quare communis ſectio plani tangentis et horizontis fiet parallela lineae HI, et ipſum planum ſuperficiem non modo in puncto D, ſed in tota linea recta quae in ſuperficie cylindrica duci poteſt eidem HI parallela, continget.

Inuen-

Inuento plano tangente facile est superficiei in D perpendicularem ducere, alio enim opus non est quam vt in puncto contactus D plano tangente perpendicularis ducatur. Saepe tamen praestat per methodum directam ducere perpendiculares ad superficies, absque praesupposita notitia modi ducendi plana tangentia.

IX. Hic modus directus duobus verbis exponi potest. Perpendicularis enim ad superficiem est breuissima distantia inter punctum horizontis, in quo perpendicularis ipsi occurrit et superficiem propositam. Hanc ob causam perpendicularis in quacunque superficie per methodum de maximis seu minimis inuestigari potest. Sit ergo P punctum illud in plano horizontis ex quo breuissimam lineam ad superficiem ducere oportet, ex quo perpendicularis PM in directricem VT demissa sit. Deinde ex puncto D superficiei etiam demissa sit DC orthogonaliter in horizontem, ductisque ex C duabus CB et CN, hac ad VT, illa vero ad PM parallelis, dicantur $CN = BM = m$, $NP = n$, $DC = z$, et $PD = p$, inuenietur $p = \sqrt{(m^2 + n^2 + z^2)}$, quae *minima* esse debet. Quare differentiando aequationem $p^2 = m^2 + n^2 + z^2$, posita primum m constanti, fit $ndn + zdz = pdp = o$, vel propter $MP = y + n$ inuariatam necesse est, vt sit $dy + dn = o$, vel $dn = - dy$, $- ndy + zdz = o$, adeoque $n = \frac{zdz}{dy}$. Sed aequatio superficiei $z^2 = ax + by$, cum x manens est, praebet $2zdz = bdy$, adeoque $\frac{zdz}{dy} = \frac{1}{2}b$, quare $n = \frac{1}{2}b$. Fig. 3.

Similiter differentiata $p^2 = m^2 + n^2 + z^2$ posita n constanti praebet $mdm + zdz = pdp = o$, et quia AM

 $= x$

$= x + m$, inuariata manet, fit $dm = -dx$, adeoque $-mdx + zdz = o$, et $m = \frac{zdz}{dx}$. Aequatio vero $z^2 = ax + by$, in qua nunc y inuariata maneat, differentiata suppeditat $2zdz = adx$, et $\frac{zdz}{dx} = \frac{1}{2}a$, consequenter habemus $m = \frac{zdz}{dx} = \frac{1}{2}a$. Ad ducendum igitur perpendicularem DP sequens est constructio: In recta CN parallela VT capiatur interuallum $CV = \frac{1}{2}a$, ductaque NP parallela BC capiatur interuallum $NB = \frac{1}{2}b$, recta DB iungens punctum datum D superficiei et inuentum punctum P in plano horizontis superficiei propositae ad angulos rectos occurret, et minima erit omnium earum quae ex puncto P ad superficiem duci possunt.

Aequatio III. $z^2 - xy = o$.

X. Haec aequatio praeter monem spem et opiniocem ostendetur esse ad Conum. Factis enim $x = mt$, et $y = nt$, in quibus m et n sunt magnitudines inuariabiles, dum t est variabilis, et suffectis hisce in aequatione, proueniet $z^2 = mnt^2$, et $z = t\sqrt{mn}$, quae est aequatio ad lineam rectam, docens, quod communis sectio plani cuiusque ad horizontem recti, et superficiei ipsius, sit linea recta, nempe cum planum secans per originem abscissarum x, id est, per punctum A transit, ex quo omnino sequitur quod superficies illa sit Conica verticem in puncto A, habens. Ducatur praeterea AZ directrici VT normalis et inuenietur quod omnis sectio Fig. 4. ipsi AZ parallela, qualis est BCD sit Parabola verticem habens in recta VA et parametrum $= AB$. Item quod

quod omnis ſectio FCD directrici VT parallela ſit alia Parabola verticem in recta AZ et parametrum $= AF$ habens. Sed ex hiscs nondum cognoſcitur qualis ſit Conus cuius ſuperficies propoſita aequatione exponitur. Indaganda eſt ergo baſis huius Coni. Hunc in finem ſit VA directrix, MH linea per quam transit baſis Coni ad horizontem inclinata angulo, cuius ſinus eſt ad ſinum totum vt r ad 1. Ducatur ex origine abſciſſarum A, recta AE perpendicularis ad MH. Sit punctum C proiectio puncti D ſuperficiei in planum horizontis, et ducatur per C recta HL parallela EA, et CB perpendicularis ad MV. Dicantur $AV = a$, $VE = b$, $AE = c$, indeterminatae $AB = x$, $BC = y$, $HE = u$, $CH = st$, vbi $s = V(1 - r^2)$; erit $z = rt$, nam indeterminatae t et u ſunt coordinatae in plano inclinato ſitae. Similitudo vero $\Delta\Delta^{rum}$. AME et LBC ſuppeditat $y = -\frac{au}{c} - \frac{bst}{c} + b$, et $x = +\frac{bu}{c} - \frac{ast}{c} + a$, quibus in aequatione $xy - z^2 = 0$, ſuffectis, et rt pro z, reſultabit

Fig. 5.

$$\frac{-abu^2}{c^2} + \underset{-\frac{b^2 s}{c^2}}{\frac{a^2 s}{c^2}} tu + \underset{-\frac{c^2 r^2}{c^2}}{\frac{abs^2}{c^2}} t^2 - \frac{2abst}{c} + ab = 0,$$

vt haec aequatio fiat Circuli aequatio, cuius circuli diameter in planum horizontis proiecta coincidat cum AE, pono $a^2 s - b^2 s = 0$, adeoque $a = b$, adeoque $c = aV2$, deinde $abs^2 - c^2 r^2 = -ab$, quod propter $a = b$, praebet $s^2 - 2r^2 = -1$, et $r^2 = \frac{2}{3}$, $s^2 = \frac{1}{3}$, quare praecedens aequatio abit in $-\frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{2ast}{\sqrt{2}} + a^2 = 0$, vel $u^2 = -t^2 - 2atV\frac{2}{3}, + 2a^2$, quae ſequenti modo conſtruitur: In fig. 6. capiatur $AV = VM = VE = a$, iungatur ME et producatur in N vsque dum ſic $EN = EM = AE$

Fig. 6.

$= AE = a\sqrt{2}$, erigatur deinceps AH ad angulos rectos super plano horizontis, et fiat $= 2a$, iungatur HE et in hac situm erit centrum circuli, sit $EO = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, erit O centrum quaesitum, et $OH = OM = ON = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, radius circuli, et pars coni MHAN eminens supra planum horizontis est locus aequationis $z^2 - xy = o$.

Nam si in aequatione basis coni $+u^2 + t^2 + 2at\sqrt{\frac{2}{3}} - 2a^2 = o$, pro t sufficiatur $-y\sqrt{\frac{3}{2}} - x\sqrt{\frac{3}{2}} + a\sqrt{6}$, et pro u quantitas $-y\sqrt{\frac{1}{2}} + x\sqrt{\frac{1}{2}}$, quae ex aequationibus $y = \frac{-au}{c} - \frac{bst}{c} + b$, et $x = \frac{+bu}{c} - \frac{ast}{c} + a$, factis in iisdem $b = a$, $c = a\sqrt{2}$, et $s = \sqrt{\frac{1}{3}}$ deriuatae sunt, et pro t^2, u^2 quantitatum illarum quadrata, proueniet aequatio, quae per 2 diuisa praebebit $-y^2 + xy - x^2 + 4ay + 4ax - 4a^2 = o$.. A. Deinde $z^2 (= r^2 t^2) = \frac{2}{3}t^2$, producit $y^2 + x^2 - 4ay - 4ax + 4a^2 - z^2 = o$.. B. Additis vero aequationibus A et B, resultat omnino $xy - z^2 = o$, vel $z^2 - xy = o$. Q. E. D.

Aequatio IV. $z^2 - ax^2 - bxy - cy^2 - ex - fy = o$.

XI. Haec aequatio est ad superficiem alicuius Conoidis, cuius basis exponitur aequatione $cy^2 + bxy + ax^2 + fy + gx = o$, quae pro diuerso habitu coefficientum, ad singulas sectiones conicas spectat. Altitudo conoidis supra planum horizontis est $= \sqrt{\left(\frac{af^2 - bef + ce^2}{b^2 - 4ac}\right)}$.

Altitudo ista inuenitur per methodum de Maximis et Minimis supra §. VII. expositam. Nam differentiata aequatione proposita, positis z et y manentibus,

bus, oritur $2ax + by + e = 0$..A. Postea eadem aequatione differentiata, cum z et x manentes sint, prouenit $2cy + bx + f = 0$..B. Ex binis vero aequationibus A et B eliciuntur $x = \frac{2ce - bf}{b^2 - 4ac}$, $y = \frac{2af - be}{b^2 - 4ac}$, quibus in aequatione proposita surrogatis inuenietur Maxima applicata $z = \sqrt{(\frac{af^2 - bef + ce^2}{b^2 - 4ac})}$.

XII. Idem per communem Algebram quoque inueniri potest: aequatio enim quae propositae aequipollet $cy^2 = -bxy - ax^2 - fy - ex + z^2$, duas radices habet, nempe

$$2cy = -bx - f + \sqrt{(\overline{b^2 - 4ac}.x^2 + \overline{2bf - 4ce}.x + f^2 + 4cz^2)}.$$
$$2cy = -bx - f - \sqrt{(\overline{b^2 - 4ac}.x^2 + \overline{2bf - 4ce}.x + f^2 + 4cz^2)}.$$

In casu Maximi hae radices, quae generaliter inaequales sunt, aequales fieri debent, quare fiunt $2cy = -bx - f$, vel $y = \frac{-bx - f}{2c}$, et $\overline{b^2 - 4ac}.x^2 + \overline{2bf - 4ce}.x + f^2 + 4z^2 = 0$, ista vero etiam duas radices habet,

$$(b^2 - 4ac)x = 2ce - bf + \sqrt{(4acf^2 - 4bcef + 4c^2e^2 \overline{-b^2 + 4ac}.4cz^2)}.$$
$$(b^2 - 4ac)x = 2ce - bf - \sqrt{(4acf^2 - 4bcef + 4c^2e^2 \overline{-b^2 + 4ac}.4cz^2)}.$$

Aequalitas harum radicum praebet $x = \frac{2ce - bf}{b^2 - 4ac}$, $y (= \frac{-bx - f}{2c}) = \frac{2af - be}{b^2 - 4ac}$, et $4acf^2 - 4bcef + 4c^2e^2 - b^2 + 4ac.4cz^2 = 0$, et haec vltima desinit in $z^2 = \frac{af^2 - bef + ce^2}{b^2 - 4ac}$, et $z = \sqrt{(\frac{af^2 - bef + ce^2}{b^2 - 4ac})}$, prorsus vt ante.

Positio plani superficiem in quolibet eius puncto D tangentis, per methodum §. VIII. traditam inueniatur, si in Tab. V. Fig. 2. huic exemplo applicata capiatur

piatur CH $\left(=\frac{adz}{dz}\right)=\frac{2z^2}{bx+2cy+f}$, et CI $\left(=\frac{adx}{dz}\right)=\frac{2z^2}{2ax+by+e}$, et per binas rectas DH, DI suas respectiuis curuis tangentes planum transire intelligatur, planum istud superficiem in puncto dato D continget.

Aequatio V. $az^2+byz+cy^2-exz+fx^2+gz-bx=0$.

XIII. Haec aequatio est superficiei conoidis Elliptici vel subinde etiam Coni Elliptici. Nam facta $z=0$, aequatio remanens $cy^2+fx^2-bx=0$ est aequatio basis Conoidis, quam apparet esse Ellipsin, cuius axis transuersus $=\frac{b}{f}$, et eius coniugatus $=\frac{b}{\sqrt{cf}}$.

Vertex Conoidis inuenitur vt in exemplo § praecedentis, aequationes vero A et B in praesenti exemplo sunt A. $bz+2cy=0$, et B. $ez-2fx+b=0$, et suffectis aestimationibus hisce elicitis, proueniet $(bf^2-4acf+ce^2)z^2=(4cfg-2ceb)z-cb^2$, aequatio magnitudinem maximae applicatae z definiens.

Tabula VI. Fig. 1. Porro circa directricem AZ descripta sit Ellipsis AFG, in qua AGF, in qua AG $=\frac{b}{f}$; Sit VP $=k=$ maximae applicatae z, atque adeo V vertex Conoidis, demissaque normali BZ in directricem quantum opus est productam, dicantur AZ $=l$, et PZ $=m$. Substitutisque in aequationibus supra inuentis A et B, pro z, x et y, litteris k, l, et m, inuenientur $b=\frac{2cm}{k}$, vbi signum priuatiuum denotat punctum P situm esse in opposita parte directricis intuitu puncti F, et $e=\frac{2fl-b}{k}$, tertia vero aequatio $(bf^2-4acf+ce^2)z^2=$ etc. praebet $g=\frac{cm^2-afk^2+fl^2}{fk}$. Videa-

Videamus nunc qualis sectio nascitura sit, cum planum secans per VP transit. Per punctum F ducatur ordinata FE ad diametrum AG, et alia quaecunque CB parallela FE. Nominentur AE $= p$, FE $= q$, AB $= x$, BC $= y$, FC $= u$, et tandem PF $= n$, fiantque breuitatis causa $r = l - p$, $s = m \pm q$, eruntque $x = p + \frac{ru}{n}$, et $y = q - \frac{su}{n}$, et suffectis hisce eorumque quadratis et factis in aequatione ad superficiem, orietur aequatio sectionis optatae, in qua etsi p, q, r, s in se spectatae variantes sunt, intuitu tamen indeterminatarum x, y, z et u, manentes sunt, est vero aequatio ea quae sequitur, $az^2 - \left(\frac{bs+er}{n}\right)uz + \left(\frac{cs^2+fr^2}{n^2}\right)u^2 + (bq - ep + g)z - \left(\frac{2cqs - 2fpr + hr}{n}\right)u + cq^2 + fp^2 - hp = 0$. Compendii causa coefficientes secundi, tertii, quarti et quinti terminorum, dicantur β, γ, δ, ε, Φ, aequatio mutabitur in $az^2 - \beta uz + \gamma u^2 + \delta z - \varepsilon u + \Phi = 0$. Haec autem aequatio pro diuerso habitu coefficientium est ad singulas sectiones Conicas, vel subinde etiam ad lineam rectam.

Cum est ad lineam rectam, Conoides abit in Conum Ellipticum. Hoc autem specialius ostendere libet, non quidem ope aequationis modo inuentae, sed naturalius ope aequationis propositae Conoidis. Extrahantur ergo ex hac aequatione radices, tractando y tanquam incognitam, erit $2cy = -bz \pm \sqrt{(-4cfx^2 + 4cexz + b^2 - 4ac.z^2 + 4chx - 4cgz)}$. Dicatur pars surda huius aequationis $= R$, eritque $2cy + bz = \pm R$, seu facta $\frac{2cy+bz}{c} = \frac{2qv}{k}$, existente $v = k - z$, obtinetur

 $\frac{2cqv}{k}$

$\frac{2cqv}{k} = \pm R$. Sed $-4cfx^2 + 4cexz + \overline{b^2 - 4ac}.z^2 + 4cbx - 4cgz = R^2$, praebet $fx^2 = exz + \frac{b^2 - 4ac}{4c} z^2 + bx - gz - \frac{1}{4c} R^2$, et extrahendo radices $2fx = ez + b \pm \sqrt{}(e^2 + \frac{b^2 f - 4acf}{c} z^2 + \overline{2eb - 4fg}. z + b^2 - \frac{f}{c} R^2)$. Sit nunc $\frac{ce^2 - 4acf + b^2 f}{c} = \frac{\overline{2fg - eb}^2}{b^2}$, et ſubſtituatur hoc in ſuperiori aequatione $(ce^2 - 4acf + b^2 f) z^2 = (4cfg - 2ceb) z^2 - cb^2$, inuenietur $(\frac{2fg - eb}{b})^2 z^2 - 2(2fg - eb) z + b^2 = 0$, et extrahendo radicem $\frac{2fg - eb}{b} z - b = 0$, quare $k = \frac{b^2}{2fg - eb}$, et $2fg - eb = \frac{b^2}{k}$, propterea fit $\frac{ce^2 - 4acf + b^2 f}{c}$ $(= \frac{(2fg - eb)^2}{b^2}) = \frac{b^2}{k^2}$, qui ſupra in $\sqrt{}(\frac{ce^2 - 4acf + b^2 f}{c} z^2 + \overline{2eb - 4fg}. z + b^2 - \frac{f}{c} R^2)$ ſubſtituta, producunt $2fx = ez + b \pm \sqrt{}(\frac{b^2 z^2}{k^2} - \frac{2b^2 z}{k} + b^2 - \frac{f}{c} R^2)$, et propter $v = k - z$, fit $2fx - ez - b = \pm \sqrt{}(\frac{b^2 v^2}{k^2} - \frac{fR}{c})$. In hac vero poſita $\frac{2fl - b}{k}$ pro e, et deinceps ſtatuatur $bx - lz = pv$, aequatio abit in $\frac{2fpv - bv}{k} = \pm \sqrt{}(\frac{b^2 v^2}{k^2} - \frac{fR^2}{c})$, et quadrando $\frac{4f^2 p^2 v^2}{k^2} - \frac{4fbpv^2}{k^2} + \frac{b^2 v^2}{k^2} = \frac{b^2 v^2}{k^2} - \frac{fR^2}{c}$, quare deletis delendis et reducta aequatione inuenitur $R^2 = \frac{4bpv^2 - 4fp^2 v^2}{k^2} c = \frac{4c^2 q^2 v^2}{k^2}$, quare diuiſa hac aequatione per $\frac{4cv^2}{k^2}$, reſultat vtique $cq^2 = bp - fp^2$, aequatio ad Ellipſin, exiſtentibus $AE = p$, et $EF = q$.

Binae vero aequationes $2cky + bkz = 2cqv$, et $kx - lz = pv$, ſunt ad lineam rectam VF ex Coni vertice V ad punctum baſis F ductam. Agatur enim DC parallela VP, et DS aequidiſtans FP; habebimus DC.VP::FC.FP,::EB.EQ, id eſt DC (z). VP(k)::EB $(x-p)$. EQ$(l-p)$: haec analogia praebet $kx - lz = pv$.

Pariter

Pariter (PT$(m+q)$. PR$(m+y)$ :: (FP. CP :: VP(k).VS(v), quare $km+ky=mv+qv=km-mz+qv$, adeoque $qv=ky+mz$ (propter $m=\frac{bk}{2c}$) $=\frac{2cky+bkz}{2c}$, quare $2cqv=2cky+bkz$, adeo vt ex hisce appareat, binas aequationes $p=\frac{kx-lz}{k-z}$, et $q=\frac{2cky+bkz}{2ck-2cz}$, reuera indicare lineam rectam VF, vbicunque in peripheria Ellipsis punctum F assumtum fuerit. Ex hisce ergo cognoscitur quod aequatio $az^2+bzy+cy^2-exz+fx^2+gz-bx=0$, sit locus superficiei conicae, si coefficientibus aestimationes, quas supra indicauimus, tribuantur.

In cono recto vbi VP incidit in centrum Ellipsis, inueniuntur $a=\frac{f-2c}{4c^2k}b^2$, $b=0$, $e=\frac{f-c}{ck}b$, $g=\frac{b^2}{2ck}$.

In cono recto circulari $a=\frac{-b^2}{2ck}$, $b=0$, $e=0$, et $g=\frac{b^2}{2ck}$.

XIV. Aequatio $az^2-bxz-cyz+ey^2=0$, est etiam ad superficiem conicam, quae tamen ad planum horizontis alium situm habet, quae in casu §. praecedentis. Sit $y=mx$, vbi m est constans respectu indeterminatarum x, y, et z, et aequatio mutabitur in hanc alteram $az^2=(cm+b)xz-em^2x^2$, adeoque $2az=(cm+b)x+\sqrt{(c^2-4ae.\ m^2x^2+2bcm+b^2.\ x^2}=(cm+b+\sqrt{(c^2-4ae.\ m^2+2bcm+b^2})x$, haec aequatio verò est ad lineam rectam. Si $m=0$, erit $z=\frac{bx}{a}$ vel $=0$, indicat quod conus planum horizontis per totam directricis longitudinem contingat, et $z=\frac{bx}{a}$, quod sectio plani verticalis per directricem ducti et superficiei conicae sit linea recta inclinata ad directricem angulo cu-eius sinus est ad cosinum vt b ad a. Et cum x et z simul ab o incipiant, inde concludendum, verticem coni in ipso plano horizontis et origine abscissarum situm esse.

Si vero $m = \frac{bc \pm 2b\sqrt{ae}}{4af - c^2}$, plana horizontalia quae insistunt locis $y = mx$, superficiem coni contingunt; nam quia m geminum habet valorem propter signum ambiguum $\pm$ in numeratore, ideo aequatio $y = mx$, duas diuersas lineas denotat.

Fig. 2. XV. Praeterea positio basis circularis huius conicae superficiei sequenti modo indagari debet. Sit VL directrix in plano horizontis et EH linea quaecunque referens sectionem plani secantis HF, et horizontis. Ducatur AEG perpendicularis ad HE, sitque EF sectio plani verticalis horizonti, rectae AE insistentis, et plani inclinati HF, eritque adeo FEG inclinatio plani HF ad horizontem. Ex quolibet puncto D plani inclinati demissa sit in horizontem perpendicularis DC $= z$, et in plano HE, perpendicularis DF in EF, quae DF proinde aequidistans erit HE, cadet item FG perpendicularis in horizontem, et linea CG iungens puncta C et G, ipsis HE, et DF parallela erit; sit pariter CB perpendicularis ad VE, et dicantur VB $= x$, CB $= y$, EF $=$ HD $= t$, DF $=$ CG $=$ HE $= u$, DC $=$ FG $= z$, VE $= b$, VA $= f$, AE $= g = \sqrt{(f^2 + b^2)}$. Sinus anguli FEG $=$ DHC $= r$, eius cosinus $= s = \sqrt{(1 - r^2)}$. His positis triangula similia AVE, LEH et LCB praebent $y = \frac{bu + fst}{g}$, $x = \frac{-fu + bst + gb}{g}$, et triang. FEG, facit, vt sit $z = rt$.

$z = rt$. Suffectis hisce in locum indeterminatarum x, y, et z in aequatione proposita coni, inuenietur aequatio $eb^2u^2 + 2efstu + ag^2r^2t^2 - bg^2brt = 0$, iam vt haec

$$\begin{matrix} & +bfgr & -bgrs & \\ & -cgbr & -cfgrs & \\ & & +ef^2s^2 & \end{matrix}$$

aequatio sit ad circulum, fiant $eb^2 = ag^2r^2 - bgbrs - cfgrs + ef^2s^2$, et $2efbs + bfgr - cgbr = 0$. Nam aequatio tunc abit in $u^2 + t^2 - \frac{bg^2r}{eb}t = 0$, quae est ad circulum cuius diameter $= \frac{bg^2r}{eb}$, et haec diameter coincidet cum EF. His positis quia $s^2 = 1 - r^2$, aequatio $2efbs + bfgr - cgbr = 0$, praebet $r^2 = \frac{4e^2f^2b^2}{(b^2f^2 - 2bcfb + c^2b^2)g^2 + 4e^2f^2b^2}$, et altera aequatio $ag^2r^2 - bgbrs -$ etc. $= eb^2$, dat $r^2 = \frac{4e^2fb^4}{(b^2f^3 - 2bcb^3 + 4aefb^2)g^2}$ $\begin{smallmatrix} +2b^2 \\ -c^2 \end{smallmatrix}$

quare aequatis his aestimationibus, inuenietur $(b^2f^4 - e^2b^4 + 4aef^2b^2)g^2 = 4e^2f^2b^4$; quod si pro g^2 sub-
$\begin{smallmatrix} +b^2 \\ -c^2 \end{smallmatrix}$

stituatur $f^2 + b^2$, nascetur $b^2f^6 + 4aef^4b^2 + 4aef^2b^4$
$\begin{smallmatrix} +2b^2 \\ -c^2 \end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix} +b^2 \\ -2c^2 \\ -4e^2 \end{smallmatrix}$

$-c^2b^6 = 0$, aut facta $f^2 = b^2T$, inuenietur $b^2T^3 + 4aeT^2 + 4aeT - c^2 = 0$, inuenta autem T ope-
$\begin{smallmatrix} +2b^2 \\ -c^2 \end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix} +b^2 \\ -2c^2 \\ -4e^2 \end{smallmatrix}$

huius aequationis cubicae, innotescet etiam $f = b\sqrt{T}$.

Pona-

Ponatur praeterea $S^2 = T^2 + 1$, inuenietur diameter quaesita $\frac{bg^2 r}{eb} = \frac{2bbS\sqrt{T}}{\sqrt{(b^2S^2T + c^2S^2 + 4e^2T - 2bcS^2\sqrt{T})}}$, et finus inclinationis circuli ad horizontem, i. e. $r = \frac{2e\sqrt{T}}{\sqrt{(b^2S^2T + c^2S^2 + 4e^2T - 2bcS^2\sqrt{T})}}$. Atque fic omnia ea quae ad pofitionem et magnitudinem bafis circularis coni indicandas inferuiunt ex aequatione locali ipfius coni elicuimus.

XVI. Ex hisce iam confequitur folutio maxime naturalis Problematis, quod *Cartefii* aeuo fummorum Geometrarum induftriam exercuit: *Nempe datis pofitione et magnitudine quacunque fectione Conica* Parabola, Hyperbola *aut* Ellipfi, *et puncto extra planum earum, inuenire pofitionem et magnitudinem circuli, qui bafis fit Coni, ex quo hae figurae fecari poffunt.*

Fig. 2. Sit generaliter aequatio fectionis datae $u^2 + qt^2 - pt = o$, in qua coefficientes p et q datae funt, dein axis datae fectionis conicae fit EF, angulus FEG inclinationem plani fectionis ad horizontem, qui angulus propter datam pofitionem figurae datus eft, fit eius finus l et cofinus $m = \sqrt{(1 - l^2)}$, producatur deinceps GE in A, et demittatur perpendicularis VA. Dicantur $VE = b$; $VA = i$, $AE = k$, et omnes hae lineae datae funt, quare in aequatione §. praecedenti inuenta $eb^2u^2 + 2efbstu +$ etc. $= o$, tantummodo pro f et g fuf- — etc.
ficienda i et k, item l et m pro r et s, et habebitur aequatio fequens

$$+eb^2u^2 + \begin{array}{l} 2ebimtu \\ +bikl \\ -cbkl \end{array} + \begin{array}{l} ak^2l^2t^2 - \\ +bbklm \\ -ciklm \\ +ei^2m^2 \end{array}$$

bbk²lt

$bbk^2lt = o$. Iam vt haec aequatio formam propositae induat, oportet vt fiant $2ebim + bikl - cbkl = o$, $ak^2l^2 - bbklm - ciklm + ei^2m^2 = eb^2q$, et $bbk^2l = eb^2p$, ex quibus elicientur $a = \frac{ekmp + eb^2q + ei^2m^2}{k^2l^2}$, $b = \frac{ebp}{k^2l}$, $c = \frac{eip + 2ekim}{k^2l}$. Surrogatis deinde his aestimationibus litterarum a, b, c, in aequatione Cubica supra inuenta

$$b^2T^3 \begin{array}{l} +4ae \\ +2b^2 \\ -c^2 \end{array} T^2 \begin{array}{l} +4ae \\ +b^2 \\ -2c^2 \\ -4e^2 \end{array} T - c^2 = o,$$

et in reliquis determinationibus circuli, eiusque inclinationis ad horizontem; et inuenta sunt, quae inuenienda erant.

XVII. Haec solutio ad omnes tres sectiones conicas ex aequo se extendit. Nam si sectio data est *Ellipsis*, quam aequatio $u^2 + qt^2 - pt = o$, indicat coefficiens q debet esse affirmatiua, si *Hyperbola* eius signum tantum mutari debet in aestimatione literae a, et denique membrum illud in quo q inest prorsus est delendum, cum sectio data est *Parabola*.

Solutionem huius problematis adducere placuit, vt vsum theoriae superficierum ad aequationes suas locales reuocatarum in solutionibus problematum difficiliorum ostenderem. Caeterum *Cartesius* in Epist. 75. Part. 3. Epistolarum primus aliquam huius Problematis solutionem exhibuit. Ille propositionem ibi in tres casus distinguit, quorum primus est, cum data sectio est Ellipsis et centro eius datum punctum perpendiculariter incumbit; secundus est; cum perpendicularis a puncto dato cadit alibi in axem Ellipseos, aut vtilibet in axem datae hyperbolae aut parabolae; tertius denique cum extra axes cadit. Pro duobus prioribus constructiones geometricas ibi tradit, et pro solutione tertii, quem in parabola tantum aggressus est, aequationem Cubicam inuenit, et circa Ellipsin aut Hyperbolam aliquanto longiorem et prolixiorem fore fatetur, aequationem tamen quartum gradum non esse excessuram. *Illustris Hospitalius* hoc idem quoque Problema excussit n. 441. Tractatus sui Analitici de Sectionibus Conicis, et circa *Parabolam* et *Hyperbolam* datas in aequationes Cubicas itidem incidit. Via vero quam in solutionibus suis iniuit à *Cartesiana* et multo magis à nostra differt.

Aequatio VI. $u^2-x^2-y^2=o$.

XVIII. Haec aequatio ad omnis generis solida rotunda spectat. Per u enim designatur quantitas vt libet
Fig. 3. composita ex tertia indeterminata z et constantibus. Sit enim circulus AHL basis solidi, eiusque centro F perperpendiculariter incumbat axis FE circa hunc axem vero descripta sit curua quaecunque EDFH, sit diameter basis AL directrix, et dicantur $FB=x$, BC quae directrici perpendicularis $=y$, et CD axi parallela $=z$, ductaque DG parallela CF dicatur $=u$, eritque adeo $CH(DG)=u$. Triangulum vero rectangulum CBF praebet $u^2=x^2+y^2$, adeoque $u^2-x^2-y^2=o$, est locus solidi rotundi orti ex reuolutione figurae EDHF circa axem EF.

Si

Si $u^2 = a^2 - \frac{a^2 z}{b}$, abit aequatio solidi in $x^2 + y^2 + \frac{a^2 z}{b} = a^2$, aequationem Conoidis Parabolici existentibus AF $= a$, EF $= b$. Si $u^2 = a^2 - \frac{a^2 z^2}{b^2}$, aequatio mutatur in $x^2 + y^2 + \frac{a^2 z^2}{b^2} = a^2$, aequationem Conoidis Elliptici, quod in sphaeram mutatur cum $a = b$. Est ergo $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ aequatio superficiei sphaericae.

XIX. Eadem aequatio $u^2 - x^2 - y^2 = o$, etiam omnis generis solida conoidea basi obliqua exponit modo axis ad horizontem obliquus sit, vt in Tab. VI. Fig. 4. et applicatae DC $= z$, huic axi EF parallelae sint: etsi enim sectiones per axem EAF et EDHF inaequales sunt, earum tamen aequationes eandem omnes formam seruare possunt. Fig. 5.

Methodus ducendi plana tangentia ad huius generis superficies obliquas eadem est cum ea, quam supra exposuimus; nam si ducatur CK directrici AL parallela et $= \frac{quz}{x}$, vbi $q = \frac{du}{dz}$, postea BC et producatur in I et fiat CI $= \frac{quz}{y}$, planum quod per puncta K, D, I transit superficiem in puncto D continget. Et quoniam (constr.) CK.CI $(:: \frac{quz}{x} . \frac{quz}{y} :: y . x) ::$ BC. BF, liquet lineam FC productam alteri KI puncta K, I iungenti ad angulos rectos in L occurrere. Sunt enim $\Delta\Delta$. CKI et CBF similia, quare angulus I $=$ BFC $=$ ang. KCL, et ang. BCF $=$ ang. LCI, adeoque ang. CLI $=$ ang. CBF $=$ recto. Hinc ergo sequitur, quod recta LD puncta L et D iungens curuam EDH in puncto D contingat.

 Huc-

Hucusque ſuperficies tantum planas, cylindricas, conicas aut conoideas contemplati ſumus, ideo quod aequationes quas pro lubitu maxima ex parte aſſumſimus tales ſuperficies indicent, imo varias ſectiones horum ſuperficierum breuitatis cauſſa ſilentio praeteriimus, quae tamen conſiderari merebantur alia fortaſſe occaſione reſumendas. Nunc excutiendae eſſent adhuc nonnullae ſuperficies, quae ad ſpecies praecedentium referri non poſſunt. Sed quia hoc ſchediasma iam nimis longum videbitur, vnicum tantum Cono-Cuneum *Wallisii* examinabimus.

Fig. 5. XX. Eſt autem Cono-Cuneus ſolidum terminatum rectangulo GF, quod in radio AF plano quadrantis circuli AEF ad angulos rectos incumbit, triangulo rectangulo GAE, quadrante AEF, et ſuperficie curua ELFHG, ita comparata, vt ducto ex quolibet quadrantis puncto L recta LK, parallela radio EA, et ex K, KI parallela AG vel FH, linea recta LI iungens puncta L, I, ſuperficiei per totam ſuam longitudinem congruat. Quaerenda eſt primum aequatio localis huius ſuperficiei.

Ex quolibet eius puncto D demiſſa ſit in planum quadrantis perpendicularis $DC = z$ et ex C perpendicularis CK in radium AF, planum ILK transiens per DC et CK eſt triangulum rectangulum per naturam huius ſuperficiei. Dicantur $AE = AF = a$, $AG = FH = b$, et CB parallela $AF = y$, $AB = x$, erit

IK =

$LK = \sqrt{(a^2-y^2)}$, et $LC = -x + \sqrt{(a^2-y^2)}$, et $\Delta\Delta$ ſimilia LCD, LKI praebent aequationem $(b-z)\sqrt{(a^2-y^2)} = bx$ ſuperficiei propoſitae, quae aequatio a ſurditate liberata fit, $y^2z^2 - 2by^2z - a^2z^2 + b^2y^2 + b^2x^2 + 2a^2bz - a^2b^2 = 0$. Ex aequatione vero $(b-z)\sqrt{(a^2-y^2)} = bx$ cognoſcitur.

1. Quod omnis ſectio Cono-Cunei horizontis plano aequidiſtans, ſit Quadrans Ellipſis, exceptis duobus caſibus, cum $z = 0$, tunc enim ſectio abit in quadrantem Circuli AEF, qui Cono-Cunei baſis eſt, deinde cum $z = b$, tunc enim ſectio contrahitur in lineam rectam GH.

2. Quod omnis ſectio plano AH parallela ſit figura quarti gradus, exceptis caſibus cum $x = 0$, tunc enim ſectio abit in rectangulum GF, et cum $x = a$, hoc caſu enim ſectio euaneſcit in punctum E.

3. Quod omnis ſectio plano EGA parallela ſit triangulum, excepto caſu quo $y = a$, tunc enim ſectio euaneſcit in lineam rectam HF.

4. Quod omnis ſectio, cum planum ſecans tranſit per GA, ſit linea quarti gradus, cuius aequatio eſt $(b-z)\sqrt{(a^2n^2 - m^2t^2)} = bt$, exiſtente $n = \sqrt{(m^2+1)}$. Exceptis caſibus cum tranſit per AF vel AF.

5. Quod, ducta qualibet MN parallela EA, et alia NQ vtcunque obliqua ad GA, et plano ſecante tranſeunte per MN. et NQ, ſectionis MPQN aequatio futura ſit, $(afb - aeb)\sqrt{(b^2-t^2)} = bb^2u$, vocando

$GN - HZ = e$, $GN = f$, $NZ = b$, $NO = t$, et $OP = u$. Curua MPZ habebit punctum flexus contrarii in P, Capiendo NO aequalem subtensae arcus sub tripli eius cuius subtensa est $= \frac{fb}{e}$, et radius $= b\sqrt{\frac{1}{2}}$.

6. Si in producta BC capiatur $CV = \frac{xy^2 - a^2x + (a^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{xy}$ planum per puncta D, L, V transiens superficiem in puncto D continget.

7. Portio superficiei inter rectas EG, LI pendet partim à quadratura circuli, partim etiam a quadratura curuae, cuius applicata $= \sqrt{\left(\frac{c^2 - u^2}{au - u^2}\right)}$ et abscissa u, et $GE = c$.

Plura alia circa Cono Cuneum annotari potuissent nisi breuitati esset consulendum. Ceterum *Wallisius* integrum Tractatum circa hoc solidum conscriptum ad calcem suae Algebrae edidit.

Possunt eiusmodi Cuno-Cunei excogitari, quorum bases non quadrans circuli, sed aliae curuae essent. Restat vt paucis adhuc agamus

De Linea breuissima in quacunque superficie proposita inter duo data puncta ducenda.

Fig. 6. XXI. Si in superficie quacunque curua inter duo data puncta E et F breuissima linea EDF ducenda sit, aliud non videtur agendum, quam vt ex medio P lineolae EF data puncta E, F indefinite vicina iungentis, ad hanc lineolam breuissima perpendicularis quaeratur, quae inter superficiem et hanc lineolam intercipi

cipi possit, occursus enim huius perpendicularis et superficiei videtur indicare punctum medium D lineae breuissimae EDF.

Principium tamen istud non esse admittendum vel ideo patet, quod linea PD ex puncto quidem medio P, sed superficiei ipsi non vero lineolae EF perpendiculariter ducta praebeat lineolas ED, DF, quarum summa minor sit summa lineolarum priore modo ductarum. Ad hoc probandum ducatur in Schemate separato EF aequalis lineolae data puncta in superficie data iungentis, cuius puncto medio P ipsi ad normam insistat PH aequalis breuissimae perpendiculari ad EF quae inter hanc et superficiem duci potest; et PG aequalis illi lineolae quae ex puncto P perpendiculariter in superficiem cadit. Eritque PG minor quam PH; nam quia PG quippe aequalis illi quae ex P perpendiculariter in superficiem cadit minima est linea omnium earum quae ex eodem puncto P ad superficiem duci possunt, et PH diuersa est à PG, quippe quae aequat illam quae non superficiei sed rectulae EF perpendicularis est; Quare ductis EG, EH et FG, FH, erit $EG + FG < EH + FH$, et hoc quidem in hypothesi quod lineola PD quae perpendiculariter in superficiem cadit, simul etiam ad EF perpendicularem esse: verum tale quid raro contingit, sed plerumque lineolae EF obliqua est. Sit ergo in altera parte figurae 7. triangulum EDF illud ipsum triangulum quod producitur in fig. 6. cum PD perpendiculariter in superficiem cadit et lineolae EF obliqua est; et ostendam quod $ED + FD < FG + FG$ adeoque adhuc $< EH + FH$. Fig. 7.

Est

Eſt enim $a^4+2a^2p^2-4a^2m^2p^2+p^4 < a^4+2a^2 p^2+p^4$, vel ſumtis radicum duplis $2V(a^4+2a^2p^2-2a^2p^2+p^4) < 2a^2+2p^2$, quicquid a, m, et p ſignificent, addatur vtrinque $2a^2+2p^2$, eritque $2a^2+2p^2+2V(a^4+2a^2p^2-2a^2m^2p^2+p^4) < 4a^2+4p^2$, et ſumtis radicibus $V(a^2+2amp+p^2)+V(a^2-2amp+p^2) < 2V(a^2+p^2)$. Quare ſi dicantur $EP=FP=a$, $PG=PD=p$, ſin. ang. $PDL=m$, et radius $=1$, erunt $FD=V(a^2+2amp+p^2)$; $ED=V(a^2-2amp+p^2)$ et $EG=FG=V(a^2+p^2)$, fit $FD+ED < FG+EG < FH+EH$. Quod erat demonſtratum.

Fig. 8. XXII. Quod ſi vero ſolutionem problematis ita velimus tentare, vt in curua MN quae communis eſt ſectio plani horizonti paralleli et ſuperficiei propoſitae, quaeratur punctum D hac lege, vt ſumma rectarum ED FD euadat minima, res quidem effectu erit facillima, alio enim ad id non opus eſt quam, vt quod vt iam inuentum conſideramus, alterum d viciniſſimum aſſumamus et ductis deinceps lineolis Ed, Fd, centrisque E et F arculis De et df, incrementum ed lineolae ED aequale faciamus decremento Df alterius FD. Nam ducta tangente IK ad curuam in D, demiſſisque ex E et F perpendiculis EI, FK in hanc tangentem reſultabunt inde duo triangulorum ſimilium paria, nempe EID, Ded, et FHd, dfD, quae praebent $ED.DI::Dd.ed$, et $DF.DH::Dd.Df$, quare propter $Df=ed$; fit $ED.DI::DF.DH$, ex quo conficitur quod ratio DE ad DI ſit vbique eadem, ex quo principio deinceps aequatio differentialis curuae illius quae eſt proie-

ctio praetensae breuissimae lineae superficiei in planum horizontis facile inueniri potest.

Sed etiam hoc principium fallax est: Nam demissis in planum curuae MN perpendiculis EG, FH, si hae aequales sint, planum GMN secabit lineolam EF data puncta iungentem in eius medio P, et lineola ex puncto D ad P ducta, quae sita est in plano curuae MN horizonti parallelo, superficiei non potest perpendicularis esse, ideo per praecedentia summa linearum ED, FD maior est quam summa lineolarum ED, FD, in fig. 6.

XXIII. Ex hisce ergo, quae in duobus §§. praecedentibus ostensa sunt, vltro sequitur, quod summa lineolarum ED, FD futura sit minima, cum DP quae per medium lineolae EF transit superficiei curuae perpendicularis est, vel quod eodem redit, cum planum tangens in D et planum trianguli EDF sibi inuicem ad angulos rectos occurrunt. Fig. 5.

Ponamus ergo hoc ita esse, demissisque ex punctis E, F, D et P perpendicularibus in planum horizontis EG, FH, DC et PQ, productaque DP vsque ad occursum O cum horizonte; puncta C, Q, O erunt in vna eademque linea recta CO: lineae enim DC, PQ in eodem sunt plano verticali DCO, rectaque GO communis est sectio huius plani et horizontis. Iungantur GC, HC, ductisque ad directricem AT perpendicularibus GI, HK, CB et QT; ducantur praeterea

 GL,

GK, CM, CN parallelae AB, nec non ON parallela CB, hisque praeparatis, dicantur $AI = x$, $IG = y$, $EG = z$, $GL = dx$, $LG = dy$, $EG - DC = dz$, erunt $CS = -\frac{1}{2} ddx$, $SQ = \frac{1}{2} ddy$, et recta PR parallela CO, $DR = \frac{1}{2} ddz$. Et quia DPO (hyp.) ad superficiem perpendicularis est, dicantur $CN = m$, $ON = n$, et $CO = p$. His positis $\Delta\Delta$ similia CSQ, CNO, nec non DPR et DCO, praebent $ddx = \frac{-m\,ddz}{z}$, $ddy = \frac{nddz}{z}$. Sint lineolae GC, HC proiectiones elementorum ED, FD lineae breuissimae inter duo puncta E et F in planum horizontis, et radius osculi curuae GCH in G, dicatur r, et habebimus generaliter $r\,dx\,ddy - r\,dy\,ddx = ds^3$, in qua si in locum elementorum ddx, ddy substituantur $\frac{m\,ddz}{z}$ et $\frac{n\,ddz}{z}$, proueniet $nr\,dx\,ddz + mr\,dy\,ddz = z\,ds^3$, existente $GC = ds$, quare $ddz = \frac{zds^3}{nrdx + mrdy}$; propterea fient $ddx = \frac{-mds}{nrdx + mrdy}$, et $ddy = \frac{nds}{nrdx + mrdy}$. Haec generalia sunt pro omni superficie in qua planum tangens angulum rectum continet cum plano trianguli EDF; sed si idem planum tangens superficiem in D angulum quemcunque obliquum formare debeat cum plano trianguli EDF, cuius sinus sit $= g$, et cosinus $= h$, erunt quidem, vt paulo ante, $ddx = \frac{-m\,ds^3}{nrdx + mrdy}$, et $ddy = \frac{nds^3}{nrdx + mrdy}$, sed aestimatio elementi ddz alia inuenietur, nempe $ddz = \frac{(gz + hp)\,pds^3}{(gp - hz) \times (mdy + ndx) r}$; ad abbreuiandum, fiant $E = gz + hp$, $F = gp - hz$, et $du = mdy + ndx$, erunt ergo $ddx = \frac{-mds^3}{rdu}$, $ddy = \frac{nds^3}{rdu}$, $ddz = \frac{Epds^3}{Frdu}$.

Sit $dz = A\,dy + B\,dx$ aequatio differentialis superficiei propositae, in qua A, B significant magnitudines

vt

vt libet datas per x, y et z; quae ad secundas differentias reducta praebet, $ddz = Addy + Bddx + \alpha dy^2 + \beta dx^2$, vbi α et β significant fractiones $\frac{dA}{dy}$, $\frac{dB}{dx}$. Suffectis ergo in aequatione hac differentio-differentiali $\frac{-mds^3}{rdu}$, $\frac{nds^3}{rdu}$, et $\frac{Epds^3}{Frdu}$, pro ddx, ddy et ddz, et reductione aequationis resultantis inuenietur aestimatio litterae r, nempe $r = \frac{(Ep - AFn + BFm)ds^3}{(\alpha dy^2 + \beta dx^2)Fdu}$. Est etiam $r = \frac{ds^3}{dxddy - dyddx}$, quare $\frac{Ep - AFn + BFm}{(\alpha dy^2 + \beta dx^2)Fdu} = \frac{1}{dxddy - dyddx}$, hinc habetur $dxddy - dyddx = \frac{(\alpha dy^2 + \beta dx^2)(mdy + ndx)F}{Ep - AFn + BFm}$, aequatio differentialis curuae GCH, quae quidem ita generaliter sumta irreducibilis est, nec nisi particularibus quibusdam casibus ad aequationem differentialem primi gradus reuocari potest. Priusquam vero reductio eius tentetur, sufficienda est in ea aestimatio tertiae indeterminatae z per y, x et constantes ex aequatione data superficiei. Sunt praeterea $m = Bz$, $n = Az$, $p = Cz$, existente $C = \sqrt{(A^2 + B^2)}$, nec non $\alpha dy^2 = dAdy$, $\beta dx^2 = dBdx$, quare $dxddy - dyddx = \frac{(dAdy + dBdx)\times(Bdy + Adx)F}{EC - A^2F + B^2F}$.

METHODVS GENERALIS SVMMANDI PROGRESSIONES.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

PRopoſui anno praeterito methodum innumeras progreſſiones ſummandi, quae non ſolum ſe ad ſeries algebraicam ſummam habentes extendit, ſed earum etiam, quae algebraice ſummari nequeunt, ſummas a quadraturis curuarum pendentes exhibet. Synthetica tum vſus ſum methodo; generalibus enim aſſumtis formulis quaeſiui ſeries, quarum ſummae iis formulis exprimerentur. Hocque modo plurimas ſeries generales adeptus ſum, quarum ſummas poteram aſſignare. Propoſita igitur quapiam progreſſione ſummanda, neceſſe erat eam cum illis formulis comparare, et indagare, num in aliqua earum contineatur. Potuiſſem autem numerum earum generalium ſerierum in infinitum multiplicare, et propterea ſaepius mihi ſeries occurrerunt, quae etiamſi in datis generalibus non comprehenderentur, ipſa tamen methodo poterant ſummari. Quo igitur facilius magisque in promtu ſit ſeriei cuiuscunque propoſitae ſummam, ſi quidem fieri poteſt, inuenire, communicabo hic methodum analyticam, qua ex ipſius ſeriei natura terminum ſummatorium exuere licet. Latiſſime ea patet; non ſolum enim omnium earum ſerierum, quarum ſummae tot diuerſis modis iam ſunt erutae, ſed infini-

tarum

tarum aliarum ſummas ſimili et facili operatione inuenire docet.

§. 2. Si aequè eſſet facile dato termino generali inuenire ſummatorium, ac inuerſe ex ſummatorio generalem maximum hoc eſſet ſubſidium in ſummatione ſerierum. Poteſt quidem inter terminum ſummatorium et generalem dari aequatio, at quia ex infinitis conſtat terminis, ex ea non multum adiuuamur. At tamen inſigne inde naſcitur compendium, ad progreſſionum algebraicarum ſummas exhibendas. Sit terminus generalis ſeu is, cuius exponens eſt n in progreſſione quacunque t, et terminus ſummatorius ſeu ſumma omnium terminorum a primo vsque ad $t = s$; erit $t = \frac{ds}{1\,dn} - \frac{dds}{1.2.dn^2} + \frac{d^3s}{1.2.3.dn^3} - \frac{d^4s}{1.2.3.4.dn^4} +$ etc. in qua aequatione poſitum eſt dn conſtans. Transmutari autem haec aequatio poteſt in hanc $s = \int t\,dn + \alpha t + \frac{\beta\,dt}{dn} + \frac{\gamma\,d^2t}{dn^2} + \frac{\delta\,d^3t}{dn^3}$ + etc. in qua coefficientes α, β, γ etc. ſequentes habent valores, $\alpha = \frac{1}{2}$; $\beta = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{6}$; $\gamma = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{24}$; $\delta = \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24} - \frac{1}{120}$; $\varepsilon = \frac{\delta}{2} - \frac{\gamma}{6} + \frac{\beta}{24} - \frac{\alpha}{120} + \frac{1}{720}$; etc. Fiet autem $s = \int t\,dn + \frac{t}{2} + \frac{dt}{12\,dn} - \frac{d^3t}{720\,dn^3} + \frac{d^5t}{30240\,dn^5}$ etc. Quoties igitur t eiusmodi habet valorem, vt ſeries s praebens vel alicubi abrumpatur, vel fiat ſummabilis, tum ope huius aequationis reperietur s ex t. Euenit autem illud, ſi t eſt functio algebraica rationalis ipſius n, et praeterea ſi eſt fractio, modo n non in determinatorem ingrediatur. E.g. ſit $t = n^2 + 2n$, erit $dt = 2n\,dn + 2\,dn$, $ddt = 2\,dn^2$, $d^3t = 0$ etc. Erit ergo $s = \int (n^2 + 2n)\,dn + \frac{n^2 + 2n}{2} + \frac{2n + 2}{12} = \frac{n^3}{3} + \frac{3n^2}{2} + \frac{7n}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 7n}{6}$.

§. 3. Methodus autem, quam hic ſum expoſiturus, ita ſe habet, vt progreſſio propoſita certis quibusdam operationibus vel ad aliam ſimpliciorem, quae ſummari poteſt, vel iterum ad ſe ipſam reducatur; vtroque enim modo ſumma progreſſionis propoſitae conſtabit. Operationes, quibus in hisce transformationibus vtor, ſunt vel vulgares vt additio, ſubtractio etc. vel ex altiori analyſi, ſumtae vt differentiatio et integratio. Illa quidem aliis ſeriebus non inſeruiunt, niſi quarum ſummatio iam eſt cognita et algebraice aſſignari poteſt; His vero etiam progreſſionum ſummas algebraicas non habentium ſummae a curuarum quadraturis pendentes reperiuntur. Omnes autem ſeries ad quas haec methodus accommodari poteſt, in ſe complectuntur progreſſionem geometricam, et huiusmodi habent formam $\alpha x^a + \beta x^{a+b} + \gamma x^{a+2b} + \delta x^{a+3b} +$ etc. Id quod non impedit, quo minus progreſſio quaecunque in hac forma contineatur.

§. 4. Vt a ſimpliciſſimis incipiam, ſit progreſſio propoſita geometrica, $x^a + x^{a+b} + x^{a+2b} + x^{a+3b} + - - - - - - - - x^{a+(n-1)b}$, in qua extremus terminus eſt is cuius index eſt n, atque hoc in ſequentibus ſemper notetur, terminum vltimum eſſe eum, cuius index eſt n, ne opus habeam indices adſcribere; et proinde etiam ſemper ſummam vsque ad terminum indicis n exhibebo. Ponatur ſumma progreſſionis propoſitae s, erit $s = x^a + x^{a+b} + x^{a+2b} - - - - - + x^{a+(n-1)b}$ tunc fiet $s - x^a = x^{a+b} + x^{a+2b} - - - - - + x^{a+(n-1)b}$, addatur vtrinque x^{a+nb} et diuidatur per x^b, prodibit $\frac{s - x^a + x^{a+nb}}{x^b} =$

$= x^a$

$= x^a + x^{a+b} - - - - - - x^{a+(n-1)b} = s$. Habemus igitur aequationem $s - x^a + x^{a+nb} = s x^b$, ex qua inuenitur $s = \frac{x^a - x^{a+nb}}{1 - x^b}$; quae eſt ſumma progreſſionis geometricae propoſitae. Eſt ergo hoc exemplum, quo progreſſio propoſita in ſe ipſam transmutatur. Si fuerit x fractio vnitate minor et n numerus infinite magnus, erit $x^{a+nb} = o$ atque $s = \frac{x^a}{1 - x^b}$, ſummam praebebit progreſſionis geometricae $x^a + x^{a+b} + x^{a+2b} - - - -$ etc. in infinitum continuatae. Si fuerit $x = 1$ patet eſſe $s = n$, id vero difficilius apparet ex aequatione $s = \frac{x^a - x^{a+nb}}{1 - x^b}$, quia numerator et denominator euaneſcunt. Vt vero valor hoc in caſu inueniatur, ponatur $x = 1 - \omega$, denotante ω quantitatem infinite paruam, erit $x^a = 1 - a\omega$, $x^{a+nb} = 1 - (a + nb)\omega$ et $x^b = 1 - b\omega$. Hincque fit $s = \frac{nb\omega}{b\omega} = n$. Apparet etiam ſi terminus generalis ſeriei fuerit $\alpha x^{a+\overline{n-1}.b}$ fore terminum ſummatorium $\frac{\alpha x^a - \alpha x^{a+nb}}{1 - x^b}$.

§. 5. Sit nunc propoſita iſta progreſſio $x^a + 2 x^{a+b} + 3 x^{a+2b} + - - - - - - + n x^{a+(n-1)b}$, cuius ſumma ponatur s. Erit $s - x^a = 2x^{a+b} + 3x^{a+2b} - - - n x^{a+(n-1)b}$ addatur ſequens terminus $(n+1) x^{a+nb}$ et diuidatur per x^b, erit $\frac{s - x^a + (n+1) x^{a+nb}}{x^b} = 2 x^a + 3 x^{a+b} - - - - (n+1) x^{a+(n-1)b}$. Subtrahatur ab hac ſerie prior ſcilicet

cet ipsa proposita prodibit $\frac{s-x^a+(n+1)x^{a+nb}}{x^b}-s=$ $x^a+x^{a+b}+x^{a+2b}\ldots\ldots x^{a+(n-1)b}=\frac{x^a-x^{a+nb}}{1-x^b}$. Ex hac inuenitur $s=\frac{x^a-(n+1)x^{a+nb}}{1-x^b}+\frac{x^{a+b}-x^{a+(n+1)b}}{(1-x^b)^2}$ $=\frac{x^a-(n+1)x^{a+nb}+nx^{a+(n+1)b}}{(1-x^b)^2}=\frac{x^a-x^{a+nb}}{(1-x^b)^2}-\frac{nx^{a+nb}}{1-x^b}$ Qui est terminus summatorius respondens termino generali $nx^{a+(n-1)b}$. Si fuerit $x<1$ et ponatur $n=\infty$ prodibit seriei propositae in infinitum continuatae summa $=$ $\frac{x^a}{(1-x^b)^2}$. Si autem fiat $x=1$ prodire debet summa progressionis $1+2+3+4\ldots\ldots n$, hic vero eadem, quae ante oritur difficultas, numeratore et denominatore euanescentibus; pono igitur iterum $x=1-\omega$ erit $1-x^b=b\omega$; $x^a=1-a\omega+\frac{a(a-1)\omega^2}{2}$; $x^{a+nb}=1-(a+nb)$ $\omega+\frac{(a+nb)(a+nb-1)\omega^2}{2}$ et $x^{a+(n+1)b}=1-(a+(n+1)b)$ $\omega+\frac{(a+(n+1)b)(a+(n+1)b-1)\omega^2}{2}$ fitque $s=\frac{(n^2b^2+nb^2)\omega^2}{2b^2\omega^2}=$ $\frac{nn+n}{2}$. Praeterea si terminus generalis sit $\mathfrak{B}nx^{a+(n-1)b}$ erit terminus summatorius $=\frac{\mathfrak{B}x^a-\mathfrak{B}x^{a+nb}}{(1-x^b)^2}-\frac{\mathfrak{B}nx^{a+nb}}{1-x^b}$.

§. 6. Simili modo inuenientur termini summatorii, si termini generales sint $n^2x^{a+(n-1)b}$, $n^3x^{a+(n-1)b}$ etc. semper enim summatio reducitur ad summationem seriei gradus inferioris. Ex quo intelligitur hac ratione inueniri posse generaliter terminum summatorium spon-

ſpondentem termino generali $(\alpha + \beta n + \gamma n^2 + \text{etc.})$ $x^{a+(n-1)b}$. In his autem abſoluendis longius non immoror, quia iam dudum ſatis ſunt cognita. Ideo haec tantum attuli, vt methodi vis etiam per vulgares operationes pateſcat. Progredior igitur vltra, et quaenam ſeries ope differentiationis et integrationis in ſummam redigi queant, inueſtigabo. Primo quidem etiam progreſſiones algebraicae modo tractatae ſummantur, et ſummae inueniuntur a iam datis non differentes; attamen earum inuentio per has operationes videtur facilior et breuior. Hanc ob rem ab his iterum incipio.

§. 7. Sit progreſſio ſummanda $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 - - - nx^n$ ponatur ea $= s$; diuidatur per x et multiplicetur per dx, erit $\frac{sdx}{x} = dx + 2xdx + 3x^2dx - - - - nx^{n-1}dx$, ſumtisque integralibus habetur $\int \frac{sdx}{x} = x + x^2 + x^3 - - - - x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}$. Ex aequatione igitur $\int \frac{sdx}{x} = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}$ differentiata inuenietur s. Erit enim $\frac{sdx}{x} = \frac{dx - (n+1)x^n dx + nx^{n+1}dx}{(1-x)^2}$, vnde prodit $s = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$, vt ante §. 5. ſi ibi loco a et b ſcribatur 1. Ex hoc intelligi poteſt quomodo progreſſionis $ax^\alpha + (a+b)x^{\alpha+\beta} + (a+2b)$ $x^{\alpha+2\beta} + - - - (a+(n-1)b)x^{\alpha+(n-1)\beta}$ ſumma ſit inuenienda. Ponatur enim haec ſumma quaeſita s, et multiplicetur per $x^\pi dy$, erit $x^\pi s dy = ax^{\alpha+\pi}dy + (a+b)$

 $x^{\alpha+\beta+\pi}$

$x^{\alpha+\beta+\pi}dy$ - - - - $(a+(n-1)b)x^{\alpha+(n-1)\beta+\pi}dy$. Fiat iam $x^{\alpha+\pi}=y^{a-1}$, et $x^{\alpha+\beta+\pi}=y^{a+b-1}$; erit $x^{\beta}=y^{b}$ et $x=y^{b:\beta}$. Hincque fiet $x^{\alpha+\pi}=y^{(\alpha+\pi)b:\beta}=y^{a-1}$. Ergo erit $\pi=\frac{\beta a-\alpha b-\beta}{b}$. Atque $x^{\alpha+(n-1)\beta+\pi}=y^{a+(n-1)b-1}$. His positis erit $x^{\frac{\beta a-\alpha b-\beta}{b}}s\,dy=ay^{a-1}dy+(a+b)y^{a+b-1}dy+$ - - - $(a+(n-1)b)y^{a+(n-1)b-1}dy$, sumtisque integralibus $\int x^{\frac{\beta a-\alpha b-\beta}{b}}s\,dy=y^{a}+y^{a+b}+$ - - - - $+y^{a+(n-1)b}=\frac{y^{a}-y^{a+nb}}{1-y^{b}}$. Qua vero est $y^{b}=x^{\beta}$; erit $y=x^{\frac{\beta}{b}}$ et $dy=\frac{\beta}{b}x^{\frac{\beta-b}{b}}dx$, hisque substitutis $\frac{\beta}{b}\int x^{\frac{\beta a-\alpha b-b}{b}}s\,dx=\frac{x^{\frac{a\beta}{b}}-x^{\frac{a\beta+nb\beta}{b}}}{1-x^{\beta}}$. Haec eadem aequatio potest facilius sine permutatione variabilis x inueniri hoc modo: Multiplicetur progressio proposita per $px^{\pi}dx$, erit $px^{\pi}s\,dx=pax^{\alpha+\pi}dx+$ - - - - - - $p(a+(n-1)b)x^{\alpha+(n-1)\beta+\pi}dx$. Determinentur p et π ita vt sit $\alpha+(n-1)\beta+\pi=p(a+(n-1)b)-1$ seu $\alpha+\pi+(n-1)\beta=ap+(n-1)bp-1$. Ex qua, quia p et π ab n pendere nequeunt, duae resurgunt aequationes $\beta=bp$ et $\alpha+\pi=ap-1$, vnde prodit $p=\frac{\beta}{b}$ et $\pi=\frac{a\beta-\alpha b-b}{b}$. His substitutis, et integralibus sumtis, proueniet vt ante $\frac{\beta}{b}\int x^{\frac{a\beta-\alpha b-b}{b}}s\,dx=x^{\frac{a\beta}{b}}+x^{\frac{a\beta+b\beta}{b}}$ - - - $+x^{\frac{a\beta+(n-1)b\beta}{b}}=\frac{x^{\frac{a\beta}{b}}-x^{\frac{a\beta+nb\beta}{b}}}{1-x^{\beta}}$.

§. 8. Sit progressionis propositae terminus ordinis n, hic $(an+b)(cn+e)x^{\alpha+(n-1)\beta}$; ponatur huius terminum minus summatorius s: erit $s = (a+b)(c+e)x^{\alpha} + (2a+b)(2c+e)x^{\alpha+\beta} + \text{------} + (an+b)(cn+e)x^{\alpha+(n-1)\beta}$, multiplicetur per $px^{\pi}dx$, fiet $psx^{\pi}dx = p(a+b)(c+e)x^{\alpha+\pi}dx + \text{------} + p(an+b)(cn+e)x^{\alpha+(n-1)\beta+\pi}dx$. Sit $pcn + pe = \alpha + n\beta - \beta + \pi + 1$, debebit esse $p = \frac{\beta}{e}$ et $\pi = \frac{\beta e + \beta c - \alpha c - c}{c}$. Ergo sumtis integralibus erit $\frac{\beta}{c}\int \pi^{\pi} s\,dx = (a+b)x^{\alpha+\pi+1} + \text{----} (an+b)x^{\alpha+(n-1)\beta+\pi+1}$. Multiplicetur denuo per $qx^{\rho}dx$, erit $\frac{\beta}{c}qx^{\rho}dx\int x^{\pi}s\,dx = q(a+b)x^{\alpha+\pi+\rho+1}dx + \text{------} q(an+b)x^{\alpha+(n-1)\beta+\pi+\rho+1}dx$, fiatque $anq + bq = \alpha + n\beta - \beta + \pi + \rho + 2$, hinc erit $q = \frac{\beta}{a}$ et $\rho = \frac{\beta b - \alpha a + \beta 2 - \pi a - 2a}{a} = \frac{\beta bc - ac - \beta 2e}{ac}$. Sumtisque integralibus proueniet $\frac{\beta^2}{ac}\int x^{\rho}dx\int x^{\pi}s\,dx = x^{\alpha+\pi+\rho+2} + \text{----} + x^{\alpha+(n-1)\beta+\pi+\rho+2} = \frac{x^{\alpha+\pi+\rho+2} - x^{\alpha+n\beta+\pi+\rho+2}}{1-x^{\beta}}$ seu haec aequatio $\frac{\beta^2}{ac}\int x^{\frac{\beta bc - \beta 2e - ac}{ac}}dx\int x^{\frac{\beta e + \beta c - \alpha c - c}{c}}s\,dx = \frac{x^{\frac{\beta(c+b)}{a}} - x^{\frac{\beta(a+b+na)}{a}}}{1-x^{\beta}} = x^{\frac{\beta(a+b)}{a}}\left(\frac{1-x^{n\beta}}{1-x^{\beta}}\right)$. Simili modo operatio est instituenda, si plures duobus factores fuerint in termino generali, ex quo simul apparet, tot prodire signa integralia, quot sunt factores in coefficiente termini generalis.

§. 9. Si fuerit progressionis summandae terminus generalis $\frac{x^{\alpha+(n-1)\beta}}{an+b}$, operatio a priori in hoc tantum differt, quod hic differentiatione absolui debeat, quod ibi integralibus ſumendis perficiebatur. Sit igitur terminus ſummatorius quaeſitus s, erit $s = \frac{x}{a+b} + \cdots + \frac{x^{\alpha+(n-1)\beta}}{an+b}$, atque $px^{\pi}s = \frac{px^{\alpha+\pi}}{a+b} + \cdots + \frac{px^{\alpha+(n-1)\beta+\pi}}{an+b}$. Sumantur differentialia prodibit px^{π} $ds + p\pi x^{\pi-1} s dx = \frac{p(\alpha+\pi)x^{\alpha+\pi-1}dx}{a+b} + \cdots + \frac{p(\alpha+n\beta-\beta+\pi)x^{\alpha+(n-1)\beta+\pi-1}dx}{an+\beta}$. Fiat $p\alpha + pn\beta - p\beta + p\pi = an + b$, erit $p = \frac{a}{\beta}$ et $\pi = \beta - \alpha + \frac{b\beta}{a}$. Ergo $\frac{ax^{\beta-\alpha+\frac{b\beta}{a}}ds + (a\beta - a\alpha + b\beta)x^{\beta-\alpha+\frac{b\beta}{a}-1}sdx}{\beta dx}$ $= x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}} + \cdots + x^{\frac{n\beta+b\beta-a}{a}} = x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}}$ $\left(\frac{1-x^{n\beta}}{1-x^{\beta}}\right)$. Seu $\frac{a}{\beta}x^{\frac{a\beta-a\alpha+b\beta}{a}}s = \int x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}}dx\left(\frac{1-x^{n\beta}}{1-x^{\beta}}\right)$ vel $s = \frac{\beta}{a}x^{\frac{a\alpha-a\beta-b\beta}{a}}\int x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}}dx\left(\frac{1-x^{n\beta}}{1-x^{\beta}}\right)$. In hac formula integrale ita debet accipi vt poſito $x=0$, ipſum euaneſcat. Si deſideretur ſumma ſeriei propoſitae in infinitum continuatae, fiet $n=\infty$ et $s = \frac{\beta}{a}x^{\frac{a\alpha-a\beta-b\beta}{a}}$ $\int\frac{x^{\frac{a\beta+b\beta-a}{a}}dx}{1-x^{\beta}}$. Si ſit $x=1$. in expreſſione quidem ſumma s, quia differentialia inſunt, non poteſt poni $x=1$, ſed poſt integrationem fiat $x=1$. Attamen perinde eſt

est quales numeri locò α et β substituantur, sit igitur $\alpha = \beta = 1$. Erit $s = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a+b} - - - + \frac{1}{na+b} = \frac{1}{a x^{\frac{a}{b}}} \int x^{\frac{b}{a}} dx \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$. Atque post integrationem fieri debet $x = 1$. Quemadmodum in dissertatione de summationibus initio citata inueneram.

§. 10. Sit proposita progressio, cuius terminus ordine n est $\frac{x^n}{(an+b)(cn+e)}$, assumo hic tantum x^n loco $x^{\alpha+(n-1)\beta}$ tum compendii ergo, tum quia haec potentia in illam facili negotio potest transmutari. Sit terminus summatorius s, erit $p x^\pi s = \frac{p x^{\pi+1}}{(a+b)(c+e)} + - - - - - + \frac{p x^{\pi+n}}{(an+b)(cn+e)}$. Adeoque $\frac{\text{diff: } p x^\pi s}{dx} = \frac{p(\pi+1)x^\pi}{(a+b)(c+e)} + - - - - - \frac{p(\pi+n)x^{\pi+n-1}}{(an+b)(cn+e)}$. Fiat $p\pi + pn = an + b$, erit $p = a$ et $\pi = \frac{b}{a}$. Ergo habetur $\frac{a d(x^{\frac{b}{a}} s)}{dx} = \frac{x^{\frac{b}{a}}}{c+e} + - - - - - - + \frac{x^{\frac{b}{a}+n-1}}{cn+e}$. Multiplicetur denuo per $p x^\pi$, erit $\frac{a p x^\pi d(x^{\frac{b}{a}} s)}{dx} = \frac{p x^{\frac{b}{a}+\pi}}{c+e} + - - - - - - + \frac{p x^{\frac{b}{a}+n+\pi-1}}{cn+e}$. Hincque prodit $\frac{apd(x^\pi d(x^{\frac{b}{a}} s))}{dx} = \frac{p(\frac{b}{a}+\pi)x^{\frac{b}{a}+\pi-1}}{c+e} + - - - + \frac{p(\frac{b}{a}+n+\pi-1)x^{\frac{b}{a}+n+\pi-2}}{cn+e}$

 Fiat

Fiat $\frac{pb}{a} + pn + p\pi - p = cn + e$; erit $p = c$ et $\pi = 1 - \frac{b}{a} + \frac{e}{c}$. His substitutis emerget ista aequatio

$$\frac{acd(x^{1-\frac{b}{a}+\frac{e}{c}}\, d(x^{\frac{b}{a}} s))}{dx^2} = x^{\frac{e}{c}} + \dots + x^{\frac{e}{c}+n-1} = x^{\frac{e}{c}}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$$

Sumantur iterum integralia, erit $\frac{acx^{1-\frac{b}{a}+\frac{e}{c}}\, d(x^{\frac{b}{a}} s)}{dx} = \int x^{\frac{e}{c}} dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$: hincque $s = \frac{1}{acx^{\frac{b}{a}}}\int x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}-1} dx \int x^{\frac{e}{c}} dx \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) = \frac{x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}}\int x^{\frac{e}{c}} dx(\frac{1-x^n}{1-x}) - \int x^{\frac{b}{a}} dx(\frac{1-x^n}{1-x})}{(bc-ae)x^{\frac{b}{a}}}$. Casus hic notandus est, si $bc = ae$, quo fit $s = \frac{0}{0}$. Erit autem iuxta priorem formam $s = \frac{1}{acx^{\frac{b}{a}}}\int \frac{dx}{x}\int x^{\frac{b}{a}} dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$

quae mutatur in hanc $s = \frac{lx\int x^{\frac{b}{a}} dx(\frac{1-x^n}{1-x}) - \int x^{\frac{b}{a}} dx(\frac{1-x^n}{1-x})lx}{acx^{\frac{b}{a}}}$

Casus hic accidit, si denominatores $(an+b)(cn+e)$ fuerint quadrata vel horum quaedam multipla. Si fuerit $x = 1$, haec substitutio ut ante demum post integrationem fieri debet in quantitatibus signa integralia prae se habentibus, at in finitis statim fieri potest $x = 1$.

Erit ergo $s = \frac{\int (x^{\frac{e}{c}} - x^{\frac{b}{a}})\, dx\,(\frac{1-x^n}{1-x})}{bc-ae}$. Ex quo apparet si $x^{\frac{e}{c}} - x^{\frac{b}{a}}$ potest diuidi per $1-x$ summam progressionis esse algebraicam. At casu quo $bc = ae$, fiet lx $= 0$,

$= 0$, si scilicet sit $x = 1$. Quocirca erit $s = \frac{\int x^{\frac{b}{a}} dx (\frac{1-x^n}{1-x}) lx}{ac}$.

§. 11. Simili modo intelligitur si n in denominatore 3 pluresue dimensiones habeat, quomodo summam inueniri oporteat, ita vt opus non sit pluribus exemplis operationem illustrare. Sit progressio proposita haec cuius terminus generalis est $\frac{x^n}{(an+b)(cn+e)(fn+g)}$ summa huius sit s. Haec progressio eodem, quo praecedente §. modo tractata dabit post duas differentiones

$$\frac{acd(x^{1-\frac{b}{a}+\frac{e}{c}} d(x^{\frac{b}{a}} s))}{dx^2} = \frac{x^{\frac{e}{c}}}{f+g} + \cdots + \frac{x^{\frac{e}{c}+n-1}}{nf+g}$$

$= (\text{p. §. 9.})\ \frac{1}{f} x^{\frac{e}{c}-\frac{g}{f}-1} \int x^{\frac{g}{f}} dx (\frac{1-x^n}{1-x})$ sumantur integralia erit $\frac{acfx^{1-\frac{a}{b}+\frac{e}{c}} d(x^{\frac{b}{a}} s)}{dx} = \int x^{\frac{e}{c}-\frac{g}{f}-1} dx \int x^{\frac{g}{f}} dx (\frac{1-x^n}{1-x})$, et demum $acfx^{\frac{b}{a}} s = \int x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}-1} dx \int x^{\frac{e}{c}-\frac{g}{f}-1} dx \int x^{\frac{g}{f}} dx (\frac{1-x^n}{1-x})$, adeoque $s = \frac{1}{acfx^{\frac{b}{a}}} \int x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}-1} dx \int x^{\frac{e}{c}-\frac{g}{f}-1} dx \int x^{\frac{g}{f}} dx (\frac{1-x^n}{1-x})$. Ne plura signa integralia post se inuicem sint posita, haec forma in sequentem transmutari potest $s = \frac{fx^{-\frac{g}{f}} \int x^{\frac{g}{f}} dx (\frac{1-x^n}{1-x})}{(bf-ag)(ef-cg)} + \frac{cx^{-\frac{e}{c}} \int x^{\frac{e}{c}} dx \frac{1-x^n}{1-x}}{(bc-ae)(cg-ef)} +$

$+\frac{a x^{\frac{-b}{a}} \int x^{\frac{b}{a}} dx \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(ae-bc)(ag-bf)}$. Ex hoc ſimul apparet, ſi plures fuerint factores in termino generali, quam formam habitura ſit ſumma. Sit enim terminus generalis $\frac{x^n}{(an+b)(cn+e)(fn+g)(hn+k)}$ erit terminus ſummatorius $s = \frac{1}{acfh x^{\frac{b}{a}}} \int x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}-1} dx \int x^{\frac{e}{c}-\frac{g}{f}-1} dx \int x^{\frac{g}{f}-\frac{k}{h}-1}$

$$dx \int x^{\frac{k}{h}} dx \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) = \frac{a x^{\frac{-b}{a}} \int x^{\frac{b}{a}} dx \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(ae-bc)(ag-bf)(ak-bh)} +$$

$$\frac{c x^{\frac{-e}{c}} \int x^{\frac{e}{c}} dx \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(bc-ae)(cg-ef)(ck-eh)} + \frac{f x^{\frac{-g}{f}} \int x^{\frac{g}{f}} dx \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(bf-ag)(ef-cg)(fk-gk)}$$

$+\frac{k x^{\frac{k}{h}} \int x^{\frac{k}{h}} dx \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(bh-ak)(eh-ck)(gh-fk)}$. Si deſideretur ſumma caſu, quo $x = 1$. erit pro termino generali $\frac{1}{(an+b)(cn+e)(fn+g)}$ terminus ſummatorius $s = \frac{\int dx \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)\left((aef-bcf)x^{\frac{g}{f}} + (bcf-aeg)x^{\frac{e}{c}} + (acg-aef)x^{\frac{b}{a}}\right)}{(ae-bc)(ag-bf)(cg-ef)}$. Quoties igitur quantitas in $dx \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$ ducta dividi poteſt per $1-x$ tunc progreſſio propoſita algebraicam habet ſummam. Accidit hoc ſi $\frac{b}{a}-\frac{e}{c}$ et $\frac{e}{c}-\frac{g}{f}$ ſunt numeri integri. Praeterea hoc etiam eſt notandum omnes huiusmodi progreſſiones vel algebraice eſſe ſummabiles, vel a logarithmis ſiue realibus

libus siue imaginariis pendere, neque vllam aliam quadraturam huiusmodi progressione posse exprimi.

§. 12. At cum difficile sit has formulas ad eos casus accommodare, quibus denominatorum factores sunt aequales, libet hic hos casus in specie tractare: sit itaque progressionis summandae terminus generalis $\frac{x^n}{(an+b)^3}$ et summatorius s, erit $s = \frac{1}{a^3 x^{\frac{b}{a}}}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int x^{\frac{b}{a}} dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$ id quod sequitur ex §. 11. vbi sit $c = f = a$ et $e = g = b$: haec forma transmutata abit in hanc

$$s = \frac{\frac{1}{2}(lx)^2\int x^{\frac{b}{a}} dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) - lx\int x^{\frac{b}{a}} dx\, lx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\int x^{\frac{b}{a}} dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)(lx)^2}{a^3 x^{\frac{b}{a}}}.$$

Si autem fuerit terminus generalis $\frac{x^n}{(an+b)^4}$, erit

$$s = \frac{(lx)^3\int x^{\frac{b}{a}} dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) - 3(lx)^2\int x^{\frac{b}{a}} dx\, lx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) + 3lx\int x^{\frac{b}{a}} dx(lx)\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) - \int x^{\frac{b}{a}} dx(lx)^3\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{6a^4 x^{\frac{b}{a}}}$$

Ex his apparet quomodo pro reliquis potentiis valor ipsius s progrediatur: generaliter enim si terminus generalis est $\frac{x^n}{(an+b)^m}$, erit summa

$$s = \frac{(lx)^{m-1}\int x^{\frac{b}{a}} dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) - \left(\frac{m-1}{1}\right)(lx)^{m-2}\int x^{\frac{b}{a}} dx\, lx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) + \left(\frac{m-1}{1}\right)\left(\frac{m-2}{2}\right)(lx)^{m-3}\int x^{\frac{b}{a}} dx(lx)^2\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{1.\,2.\,3.\cdots(m-1)a^m x^{\frac{b}{a}}}$$

-etc.

+ etc. Valores hi multo fiunt simpliciores, si ponatur $x = 1$, erit enim $lx = o$. Termino generali enim $\frac{1}{(an+b)^2}$ respondet hic summatorius $\frac{\int x^{\frac{b}{a}} dx (l\frac{1}{x})(\frac{1-x^n}{1-x})}{1.a^2}$: termino generali $\frac{1}{(an+b)^3}$ hic $\frac{\int x^{\frac{b}{a}} dx (l\frac{1}{x})^2(\frac{1-x^n}{1-x})}{1.2.a^3}$; atque termino generali $\frac{1}{(an+b)^m}$ hic $\frac{\int x^{\frac{b}{a}} dx (l\frac{1}{x})^{m-1}(\frac{1-x^n}{1-x})}{1.2.3.\,---\,(m-1)\,a^m} =$ $\frac{\int x^{\frac{b}{a}} dx (l\frac{1}{x})^{m-1}(\frac{1-x^n}{1-x})}{a^m \int dx (l\frac{1}{x})^{m-1}}$; quae integralia ita debent accipi vt posito $x = o$ tota summa euanescat, tum autem poni debet $x = 1$, et quantitas resultans vera erit summa. Porro notetur si summa desideretur in infinitum continuatae progressionis, vbique tantum scribi debere $\frac{1}{1-x}$ loco $\frac{1-x^n}{1-x}$.

§. 13. Duae iam pertractatae sunt progressionum classes, quarum illa habebat terminum generalem Ax^n haec vero $\frac{x^n}{A}$ denotante A quantitatem algebraicam ex n et constantibus constantem, ita tamen, vt n non habeat alios exponentes, nisi integros affirmatiuos. Ex his oritur tertia classis pro termino generali habens $\frac{Ax^n}{B}$, vbi A et B eiusdem modi quantitates algebraicas designant. Talis progressio reducitur etiam ad progressionem geometricam tollendo numeratorem A ope integrationis

tionis, et denominatorem B ope differentiationis, quemadmodum in vtraque pertractata seorsim factum est. Sit progressionis summandae terminus generalis $\frac{(\alpha n+\beta)x^n}{(an+b)}$, huius terminus summatorius ponatur s; erit $s = \frac{(\alpha+\beta)x}{a+b} + \cdots + \frac{(\alpha n+\beta)x^n}{an+b}$. Multiplicetur haec aequatio per px^π, erit $px^\pi s = \frac{p(\alpha+\beta)x^{\pi+1}}{a+b} + \cdots + \frac{p(\alpha n+\beta)x^{n+\pi}}{an+b}$ sumantur differentialia, erit $pd(x^\pi s) = \frac{p(\pi+1)(\alpha+\beta)x^\pi dx}{a+b} + \cdots + \frac{p(n+\pi)(\alpha n+\beta)x^{n+\pi-1}dx}{an+b}$, fiat $pn+p\pi = an+b$, erit $p=a$ et $\pi=\frac{b}{a}$. Ergo est $ad(x^{\frac{b}{a}}s) = (\alpha+\beta)x^{\frac{b}{a}}dx + \cdots + (\alpha n+\beta)x^{\frac{b}{a}+n-1}dx$. Multiplicetur denuo per px^π erit $apx^\pi d(x^{\frac{b}{a}}s) = p(\alpha+\beta)x^{\frac{b}{a}+\pi}dx + \cdots + p(\alpha n+\beta)x^{\frac{b}{a}+\pi+n-1}dx$. Sumantur integralia habebitur $ap\int x^\pi d(x^{\frac{b}{a}}s) = \frac{ap(\alpha+\beta)x^{\frac{b}{a}+\pi+1}}{b+a\pi+a} + \cdots + \frac{ap(\alpha n+\beta)x^{\frac{b}{a}+\pi+n}}{b+a\pi+an}$

Fiat $a\alpha pn + a\beta p = an + a\pi + b$; erit $p=\frac{1}{\alpha}$ et $\pi = \frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}$. Propterea est $\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}} d(x^{\frac{b}{a}}s) = x^{\frac{\beta}{\alpha}+1} + \cdots + x^{\frac{\beta}{\alpha}+n} = x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$. Ex hac aequatione prodit $s = \frac{\alpha\int x^{\frac{a}{\alpha}-\frac{\beta}{\alpha}} d\left(x^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)\right)}{ax^{\frac{b}{a}}}$. Si fuerit terminus generalis $\frac{(\alpha n+\beta)(\gamma n+\delta)x^n}{an+b}$, huiusque summatorius ponatur s, prodibit

dibit iisdem, quibus modo, abſolutis operationibus, $\frac{a}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}} d(x^{\frac{b}{a}}s) = (\gamma+\delta)x^{\frac{\beta+1}{\alpha}} + \text{- - - - -} + (\gamma n+\delta) x^{\frac{\beta+n}{\alpha}}$, multiplicetur iterum per $p x^{\pi} dx$ et ſumantur integralia, prodibit $\frac{ap}{\alpha}\int x^{\pi} dx \int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}} d(x^{\frac{b}{a}}s) = \frac{\alpha p(\gamma+\delta)x^{\frac{\beta+\pi+2}{\alpha}}}{\beta+\alpha\pi+2\alpha} + \text{- - - - -} + \frac{\alpha p(\gamma n+\delta)x^{\frac{\beta+\pi+n+1}{\alpha}}}{\beta+\alpha\pi+\alpha n+\alpha}$. Fiat $\alpha\gamma p n + \alpha\delta p = \alpha+\beta+\alpha\pi+\alpha n$, erit $p = \frac{1}{\gamma}$ et $\pi = \frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta-1}{\alpha}$. Ergo $\frac{a}{\alpha\gamma}\int x^{\frac{\delta}{\gamma}-\frac{\beta-1}{\alpha}} dx \int x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}} d(x^{\frac{b}{a}}s) = x^{\frac{\delta+1}{\gamma}} + \text{- - -} + x^{\frac{\delta+n}{\gamma}} = x^{\frac{\delta+1}{\gamma}}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$. Quare $s = \frac{\alpha\gamma \int x^{\frac{b}{a}-\frac{\beta}{\alpha}} d\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\delta+1}{\gamma}} d\left(x^{\frac{\delta+1}{\gamma}}\left(\frac{1-\dots}{1-\dots}\right.\right.\right.}{a x^{\frac{b}{a}} dx}$

Sed huiusmodi progreſſionibus ſummandis diutius non immoror, ſufficit enim methodum tradidiſſe, qua omnes ſummari poſſint. Interim tamen et id valet, quod §. 11. dixi, omnes ſcilicet huiusmodi progreſſiones vel algebraice poſſe ſummari, vel ſummam a logarithmis ſiue realibus ſiue imaginariis pendere.

§. 14. Progredior nunc ad aliud progreſſionum genus, quarum termini generales algebraice exprimi non poſſunt, ſed quae ad claſſem ſerierum hypergeometricarum pertinent. Huiusmodi ſeries eſt $(\alpha+\beta)x + (\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)x^2 + \text{- - - -} (\alpha+\beta)(2\alpha+\beta) \text{ - - - - -} (\alpha n+\beta)x^n$. Ponatur huius ſumma s, et multiplicetur per $p x^{\pi}$, erit $p x^{\pi} s = p(\alpha+\beta)x^{\pi+1} + \text{- - - -} + p(\alpha+\beta)$
$(2\alpha+\beta)$

$(2\alpha+\beta) - - - - - (\alpha n+\beta) x^{n+\pi}$. Et huius in dx ductae integralis $p\int x^{\pi} s\,dx = \frac{p(\alpha+\beta)x^{\pi+2}}{\pi+2} + - - - - - - - + \frac{p(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)(2\alpha+\beta) - - - - (\alpha n+\beta) x^{n+\pi+1}}{n+\pi+1}$, fiat $p\alpha n + p\beta = n+\pi+1$ erit $p = \frac{1}{\alpha}$ et $\pi = \frac{\beta}{\alpha} - 1$. Vnde prodit $\frac{1}{\alpha}\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-1} s\,dx = x^{\frac{\beta}{\alpha}+1} + (\alpha+\beta)x^{\frac{\beta}{\alpha}+2} + - - + (\alpha+\beta)(2\alpha+\beta) - - - - (\alpha(n-1)+\beta) x^{\frac{\beta}{\alpha}+n}$. Diuidatur per $x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}$ habebitur $\frac{\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-1} s\,dx}{\alpha x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}} - 1 = (\alpha+\beta)x + - - - - - - (\alpha+\beta)(2\alpha+\beta) - - - (\alpha(n-1)+\beta)x^{n-1}$. Quae est ipsa progressio proposita truncata termino vltimo. Erit igitur $\frac{\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-1} s\,dx}{\alpha x^{\frac{\beta}{\alpha}+1}} - 1 = s - (\alpha+\beta)(2\alpha+\beta) - - - - (\alpha n+\beta) = s - A$. Huiusmodi autem formas finita expressione exposui in alia iam praelecta dissertatione de terminis generalibus progressionum transcendentalium, ex qua si libet finitus valor loco A desumi potest. Erit ergo $\int x^{\frac{\beta}{\alpha}-1} s\,dx = \alpha x^{\frac{\beta}{\alpha}+1} + \alpha x^{\frac{\beta}{\alpha}+1} s - \alpha A x^{\frac{\beta}{\alpha}+n+1}$, atque $x^{\frac{\beta}{\alpha}-1} s\,dx = (\alpha+\beta)x^{\frac{\beta}{\alpha}}dx + (\alpha+\beta)x^{\frac{\beta}{\alpha}} s\,dx + \alpha x^{\frac{\beta}{\alpha}+1} ds - (\alpha+\beta+\alpha n)Ax^{\frac{\beta}{\alpha}+n} dx$ seu $s\,dx = (\alpha+\beta)x\,dx + (\alpha+\beta)x s\,dx + \alpha x^2 ds - (\alpha+\beta+\alpha n)Ax^{n+1} dx$. Ex qua aequatione valor ipsius s erutus dabit summam progressionis propositae. Fieri etiam potest, vt factores in termino sequente non vno tantum, sed duobus pluribusue tibusue augeantur. Accedant ſemper duo de nouo, vt prodeat iſta progreſſio $(\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)(3\alpha+\beta)x^2+ - - - - - +(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta) - - (\alpha(2n-1)+\beta)x^n$. Huius ſumma vocetur s, erit $p\int x^\pi s\,dx = \frac{p(\alpha+\beta)x^{\pi+2}}{\pi+2} + - - - - - + \frac{p(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta) - - - p(\alpha(2n-1)+\beta)x^{n+\pi+1}}{n+\pi+1}$. Fiat $2pan - p\alpha + p\beta = n + \pi + 1$ erit $p = \frac{1}{2\alpha}$, et $\pi = \frac{\beta-3\alpha}{2\alpha}$. Vnde $\frac{\int x^{\frac{\beta-3\alpha}{2\alpha}} s\,dx}{2\alpha} = x^{\frac{\beta+\alpha}{2\alpha}} + - - - - - + (\alpha+\beta)(2\alpha+\beta) - - - (\alpha(2n-2)+\beta)x^{n+\frac{\beta-\alpha}{2\alpha}}$. Atque iterum $\frac{p\int x^\pi dx\int x^{\frac{\beta-3\alpha}{2\alpha}} s\,dx}{2\alpha}$

$$= \frac{2\alpha p x^{\frac{\beta+3\alpha}{2\alpha}+\pi}}{\beta+3\alpha+2\alpha\pi} + - - - - - + \frac{2\alpha p(\alpha+\beta) - - - - - (\alpha(2n-2)+\beta)x^{n+\pi+\frac{\beta+\alpha}{2\alpha}}}{\beta+\alpha+2\alpha n+2\pi\alpha}.$$

Fiat $4p\alpha^2 n - 4p\alpha^2 + 2p\alpha\beta = 2\alpha n + 2\pi\alpha + \alpha + \beta$; erit $p = \frac{1}{2\alpha}$ et $\pi = \frac{\beta-2\alpha}{2\alpha} - \frac{\alpha-\beta}{2\alpha} = -\frac{3}{2}$, conſequenter $\frac{\int x^{-\frac{3}{2}} dx \int x^{\frac{\beta-3\alpha}{2\alpha}} s\,dx}{4\alpha^2 x^{\frac{\beta}{2\alpha}}} - \frac{1}{\beta} = (\alpha+\beta)x + - - - - (\alpha+\beta)(2\alpha+\beta) - - - (\alpha(2n-3)+\beta)x^{n-1} = s - Ax^n$ poſito $A = (\alpha+\beta)(2\alpha+\beta) - - - - (\alpha(2n-1)+\beta)$. Ex qua aequatione s innoteſcit.

§. 15. Simili modo operationem inſtitui oportet, ſi in coefficiente termini ſequentis, tres pluresue factores de nouo accedant. De quo notandum eſt,

eſt, tot ſemper in aequatione reſultante ſigna integralia ſibi inuicem eſſe iuncta quot ſunt factores, quibus ſequens quisque terminus augetur. Ita progreſſionis $(\alpha+\beta) x + \text{-----} + (\alpha+\beta) \text{----} (\alpha(3n-2)+\beta) x^n$ ſumma s determinabitur ex hac aequatione $\frac{\int x^{-\frac{4}{3}} dx \int x^{-\frac{4}{3}} dx \int x^{\frac{\beta-5\alpha}{3\alpha}} s dx}{27\alpha^3 x^{\frac{\beta-\alpha}{3\alpha}}}$ $\frac{-1}{\beta(\beta-\alpha)} = s - (\alpha+\beta) \text{----} (\alpha(3n-2)+\beta) x^n$. Ex qua, vt inductio ad ſequentes caſus fieri poſſit, notandum eſt, $\frac{1}{\beta(\beta-\alpha)}$ eſſe terminum progreſſionis propoſitae ante primum ſeu eum cuius index eſt 0. Si factores qui in potentias ipſius x ducuntur non conſtituant progreſſionem arithmeticam, ſed aliam algebraicam altioris ordinis, operatio ſimiliter debet inſtitui; vt ſit progreſſio propoſita $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) x + \text{-----} + (\alpha+\beta)(2\alpha+\beta) \text{----} (\alpha n+\beta)(\gamma+\delta)(2\gamma+\delta) \text{---} (\gamma n+\delta) x^n$ ponatur huius ſumma s, erit $p\int x^\pi s dx = \frac{p(\alpha+\beta)(\gamma+\delta) x^{\pi+2}}{\pi+2}$

$$+ \text{-----} + \frac{p(\alpha+\beta)\text{----}(\alpha n+\beta)(\gamma+\delta)\text{---}(\gamma n+\delta) x^{n+\pi+1}}{n+\pi+1}$$

Ponatur $p\gamma n + p\delta = n + \pi + 1$; erit $p = \frac{1}{\gamma}$; et $\pi = \frac{\delta-\gamma}{\gamma}$. Ergo $\frac{\int x^{\frac{\delta-\gamma}{\gamma}} s dx}{\gamma} = (\alpha+\beta) x^{\frac{\delta+\gamma}{\gamma}} + \text{------}$ $(\alpha+\beta) \text{----} (\alpha n+\beta)(\gamma+\delta) \text{---} (\gamma(n-1)+\delta) x^{\frac{n+\delta}{\gamma}}$

Porro erit $\frac{p\int x^\pi dx \int x^{\frac{\delta-\gamma}{\gamma}} s dx}{\gamma} = \frac{\gamma p(\alpha+\beta) x^{\frac{\delta+2\gamma}{\gamma}+\pi}}{\delta+2\gamma+\pi\gamma}$

$$+ \text{-----} + \frac{\gamma p(\alpha+\beta)\text{----}(\alpha n+\beta)(\gamma+\delta)\text{---}(\gamma(n-1)+\delta) x^{n+\pi+\frac{\delta+\gamma}{\gamma}}}{\gamma n+\pi\gamma+\delta+\gamma}$$

Fiat $p\alpha\gamma n + p\beta\gamma = \gamma n + \pi\gamma + \delta + \gamma$, erit $p = \frac{1}{\alpha}$, et

$\frac{1}{\alpha}$, et $p = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\delta}{\gamma} - 1 = \frac{\beta\gamma - \alpha\delta - \alpha\gamma}{\alpha\gamma}$. Ergo

$$\frac{\int x^{\frac{\beta\gamma-\alpha\delta-\alpha\gamma}{\alpha\gamma}} dx \int x^{\frac{\delta-\gamma}{\gamma}} s\,dx}{\alpha\gamma} = x^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}} + \text{- - - - -} + (\alpha+\beta)$$

$$\text{- - - -} (\alpha(n-1)+\beta)(\gamma+\delta) \text{- - -} (\gamma(n-1)+\delta) x^{\frac{\beta}{\alpha}+n}$$

Consequenter $\frac{\int x^{\frac{\beta\gamma-\alpha\delta-\alpha\gamma}{\alpha\gamma}} dx \int x^{\frac{\delta-\gamma}{\gamma}} s\,dx}{\alpha\gamma x^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}}} - 1 = s - ABx^n$. Posito $A = (\alpha+\beta) \text{- -} (\alpha n+\beta)$ et $B = (\gamma+\delta) \text{- -} (\gamma n+\delta)$. Hic est casus si progressionis, quam factores conficiunt terminus generalis est $(\alpha n+\beta)(\gamma n+\delta)$ seu $\alpha\gamma n^2 + (\alpha\delta+\beta\gamma)n + \beta\delta$. Comprehenduntur ergo sub hac forma omnes progressiones ordinis secundi. Superior autem formula ex qua s determinatur transmutatur in hanc $\frac{\int x^{\frac{\delta-\gamma}{\gamma}} s\,dx}{(\beta\gamma-\alpha\delta) x^{\frac{\delta+\gamma}{\gamma}}} + \frac{\int x^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} s\,dx}{(\alpha\delta-\beta\gamma) x^{\frac{\beta+\alpha}{\alpha}}} = 1 + s - ABx^n$. Ex qua facilius forma sequentium intelligi potest.

§. 16. Considerabo nunc harum serierum reciprocas, in quibus potentiae ipsius x sunt diuisae per id, per quod ante erant multiplicatae. Sit igitur series summanda haec $\frac{x}{\alpha+\beta} + \frac{x^2}{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)} + \frac{x^3}{(\alpha+\beta) \text{- - -} (3\alpha+\beta)} + \text{- - - - - -} + \frac{x^n}{(\alpha+\beta) \text{- - - - -} (\alpha n+\beta)}$ huius summa ponatur s. Erit $\frac{pd(x^\pi s)}{dx} = \frac{p(\pi+1)x^\pi}{\alpha+\beta} + \frac{p(\pi+2)x^{\pi+1}}{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)} + \text{- - - - - -} + \frac{p(\pi+n)x^{\pi+n-1}}{(\alpha+\beta) \text{- - - - -} (\alpha n+\beta)}$. Fiat $pn + p\pi = \alpha n + \beta$, erit $p = \alpha$, et $\pi = \frac{\alpha}{\beta}$. Quamobrem erit $\frac{\alpha d(x^{\frac{\alpha}{\beta}} s)}{dx} = x^{\frac{\alpha}{\beta}} + \frac{x^{\frac{\alpha}{\beta}+1}}{\alpha+\beta}$

$+ \text{- -}$

$+ \cdots + \frac{x^{\frac{\beta}{\alpha}+n-1}}{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)\cdots(\alpha(n-1)+\beta)}$. Et propterea $\frac{\alpha d(x^{\frac{\beta}{\alpha}} s)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}} dx} = 1 + s - \frac{x^n}{A}$ posito vt ante $A = (\alpha+\beta)\cdots(\alpha n+\beta)$. Aequatio haec euoluta dabit $\alpha x^{\frac{\beta}{\alpha}} ds + \beta x^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} s\,dx = x^{\frac{\beta}{\alpha}} dx + x^{\frac{\beta}{\alpha}} s\,dx - \frac{x^{\frac{\beta}{\alpha}+n} dx}{A}$ quae diuisa per $x^{\frac{\beta}{\alpha}-1}$ transit in $\alpha x\,ds + \beta s\,dx = x\,dx + x s\,dx - \frac{x^{n+1}\,dx}{A}$, seu $ds + \frac{\beta s dx}{\alpha x} - \frac{s dx}{\alpha} = \frac{dx}{\alpha} - \frac{x^n dx}{A\alpha}$. Multiplicetur haec aequatio per $c^{\frac{x}{\alpha}} x^{\frac{\beta}{\alpha}}$, vbi c est numerus, cuius log. est 1, fiet ea integrabilis, prodibitque $c^{\frac{-x}{\alpha}} x^{\frac{\beta}{\alpha}} s = \frac{1}{\alpha}\int c^{\frac{-x}{\alpha}} x^{\frac{\beta}{\alpha}} dx (1 - \frac{x^n}{A})$. Atque $s = \frac{1}{\alpha} c^{\frac{x}{\alpha}} x^{\frac{-\beta}{\alpha}} \int c^{\frac{-x}{\alpha}} x^{\frac{\beta}{\alpha}} dx (1 - \frac{x^n}{A})$. Huius progressionis in infinitum continuatae summa igitur erit $\frac{1}{\alpha} c^{\frac{x}{\alpha}} x^{\frac{-\beta}{\alpha}} \int c^{\frac{-x}{\alpha}} x^{\frac{\beta}{\alpha}} dx = \beta(\beta-\alpha)(\beta-2\alpha)\cdots\alpha c^{\frac{\beta}{\alpha}} x^{\frac{-x}{\alpha}} - 1 - \frac{\beta}{x} - \frac{\beta(\beta-\alpha)}{x^2} - \cdots - \frac{\beta(\beta-\alpha)\cdots\alpha}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}$ si fuerit $\beta = 0$, erit summa $= c^{\frac{x}{\alpha}} - 1$. Sin sit $\beta = \alpha$ erit summa $= \frac{\alpha c^{\frac{x}{\alpha}}}{x} - 1 - \frac{\alpha}{x}$. Si vero ponatur $\beta = 2\alpha$ summa seriei erit $\frac{2\alpha^2 c^{\frac{x}{\alpha}}}{x^2} - 1 - \frac{2\alpha}{x} - \frac{2\alpha^2}{x^2}$, et ita porro. Ex quo intelligitur, quoties β sit multiplum ipsius α, summam seriei finita et integrata expressione exhiberi posse. Si autem $\frac{\beta}{\alpha}$ euadat fractio formula inuenta integrari non potest.

§. 17. Crescat terminus quisque duobus factoribus, habebitur progressio haec $\frac{x}{(\alpha+\beta)} + \frac{x^2}{(\alpha+\beta)\cdots(3\alpha+\beta)} +$

$$+ \frac{x^3}{(\alpha+\beta)\cdots(5\alpha+\beta)} + \cdots + \frac{x^n}{(\alpha+\beta)\cdots(\alpha(2n-1)+\beta)}$$

cuius summa ponatur s. Erit $\frac{pd(x^\pi s)}{dx} = \frac{p(\pi+1)x^\pi}{\alpha+\beta}$

$$+ \frac{p(\pi+2)x^{\pi+1}}{(\alpha+\beta)\cdots(3\alpha+\beta)} + \cdots \frac{p(\pi+n)x^{\pi+n-1}}{(\alpha+\beta)\cdots(\alpha(2n-1)+\beta)}$$

fit $p\pi + pn = 2\alpha n - \alpha + \beta$, erit $p = 2\alpha$ et $\pi = \frac{\beta-\alpha}{2\alpha}$

Idcirco $\frac{2\alpha d(x^{\frac{\beta-\alpha}{2\alpha}} s)}{dx} = x^{\frac{\beta-\alpha}{2\alpha}} + \frac{x^{\frac{\beta+\alpha}{2\alpha}}}{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)} + \cdots$

$$+ \frac{x^{\frac{\beta-3\alpha}{2\alpha}+n}}{(\alpha+\beta)\cdots(\alpha(2n-2)+\beta)}.$$ Atque iterum

$$\frac{2\alpha p d(x^\pi (x^{\frac{\beta-\alpha}{2\alpha}} s))}{dx^2} = \frac{p(\beta-\alpha+2\alpha\pi)}{2\alpha} x^{\frac{\beta-3\alpha}{2\alpha}+\pi} + \cdots$$

$$\cdots \frac{p(\beta-3\alpha+2\alpha n+2\alpha\pi)x^{\frac{\beta-5\alpha}{2\alpha}+n+\pi}}{2\alpha(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)\cdots(\alpha(2n-2)+\beta)}.$$ Fiat $p\beta$

$- 3p\alpha + 2p\alpha n + 2p\alpha\pi = 4\alpha^2 n - 4\alpha^2 + 2\alpha\beta$, erit

$p = 2\alpha$, et $\pi = \frac{1}{2}$. Vnde prodit $\frac{4\alpha^2 d(x^{\frac{1}{2}} d(x^{\frac{\beta-\alpha}{2\alpha}} s))}{dx^2}$

$$= \beta x^{\frac{\beta-2\alpha}{2\alpha}} + \cdots + \frac{x^{\frac{\beta-4\alpha}{2\alpha}+n}}{(\alpha+\beta)\cdots(\alpha(2n-3)+\beta)}$$

$= \beta x$

$$=\beta x^{\frac{\beta-2\alpha}{2\alpha}}+x^{\frac{\beta-2\alpha}{2\alpha}}s-\frac{x^{\frac{\beta-2\alpha}{2\alpha}+n}}{(\alpha+\beta)-----(\alpha(2n-1)+\beta)}$$

Simili modo operatio est instituenda, si terminus quisque pluribus factoribus in denominatore crescat. Nec non satis apparet, si progressio, quam factores denominatorum constituunt, non fuerit arithmetica sed algebraica altioris ordinis, quomodo ad aequationem, ex qua summa determinatur, perueniri oporteat. Scilicet quilibet factor in factores simplices est resoluendus, vt §. 15. factum est, vbi terminus generalis factorum est $(\alpha n+\beta)$ $(\gamma n+\delta)$, qui omnes aequationes ordinis secundi sub se complectitur. At ne hoc quidem opus est si sequenti modo operati libuerit. Vt proposita sit progressio $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.7}+\frac{x^3}{1.7.17.}+\frac{x^4}{1.7.17.31.}+-----$ $\frac{x^n}{1.7.----(2n^2-1)}$ summa huius ponatur s, erit $\frac{pd(x^\pi s)}{dx}$ $=p(\pi+1)x^\pi+-----\frac{p(\pi+n)x^{n+\pi-1}}{1.7.---(2n^2-1)}$. Atque demto $\frac{pd(x^\rho d(x^\pi s))}{dx^2}=p)\pi+1)(\pi+\varrho)x^{\pi+\rho-1}+$ $------+\frac{p(\pi+n)(n+\pi+\varrho-1)x^{n+\pi+\rho-2}}{1.7----(2n^2-1)}$ Fiat $pn^2+2p\pi n+p\varrho n-pn+p\pi^2+p\pi\varrho-p\pi=2n^2-1$, erit $p=2; 4\pi+2\varrho-2=0$ seu $\varrho=1-2\pi$. Atque $-2\pi^2=-1$ seu $\pi=\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ et $\varrho=1-\sqrt{2}$. Quare habebitur $\frac{2d(x^{1-\sqrt{2}}d(x^{\sqrt{\frac{1}{2}}}s))}{dx^2}=x^{-\sqrt{\frac{1}{2}}}+----+$

$$\frac{x^{\frac{2n-2-\sqrt{2}}{2}}}{1.7----(2n^2-4n+1)} = x^{\frac{-\sqrt{2}}{2}} + x^{\frac{-\sqrt{2}}{2}}\Big(s------\frac{x^n}{1.7.----(2n^2-1)}\Big).$$ Summa vero huius seriei in infinitum inuenietur ex hac aequatione $x^{-\sqrt{2}} dx^{\frac{\sqrt{1}}{2}} s) + 2x^{1-\sqrt{2}} dd(x^{\frac{\sqrt{1}}{2}} s) = (2-2\sqrt{2}) x^{\frac{-\sqrt{2}}{2}} dx ds + (\sqrt{2}-2) x^{\frac{-2-\sqrt{2}}{2}} s dx^2 + 2x^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} dds + 2\sqrt{2} x^{\frac{-\sqrt{2}}{2}} ds dx + (1-\sqrt{2}) x^{\frac{-2-\sqrt{2}}{2}} s dx^2 = x^{\frac{-\sqrt{2}}{2}} dx^2 + x^{\frac{-\sqrt{2}}{2}} s dx^2 = 2x^{\frac{-\sqrt{2}}{2}} ds dx - x^{\frac{-2-\sqrt{2}}{2}} s dx^2 + 2x^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} dds$. Seu $2xdds - \frac{sdx^2}{x} + 2ds dx = dx^2 + s dx^2$, ex qua aequatione irrationalia omnia euanuere.

§. 18. Si factores denominatorum constituant progressionem potentiarum, huiusmodi progressionum summas inuestigabo: vt sit progressio proposita $\frac{x}{(\alpha+\beta)^2} + \frac{x^2}{(\alpha+\beta)^2(2\alpha+\beta)} + ----- + \frac{x^n}{(\alpha+\beta)^2---(n\alpha+\beta)^2}$ ponatur summa s, erit $p\frac{d(x^\pi s)}{x^\pi dx} = \frac{p(\pi+1)x^\pi}{(\alpha+\beta)^2} + ----+ \frac{p(\pi+n)x^{n+\pi-1}}{(\alpha+\beta)^2---(n\alpha+\beta)^2}$, fiat $p\pi + pn = \alpha n + \beta$, erit $p = \alpha$ et $\pi = \frac{\beta}{\alpha}$. Propterea $\frac{\alpha d(x^{\frac{\beta}{\alpha}} s)}{\alpha dx} = \frac{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}{(\alpha+\beta)} + ------ + \frac{x^{\frac{\beta}{\alpha}+n-1}}{(\alpha+\beta)^2---(n\alpha+\beta)}$. Porro

apd

$\frac{\alpha p d(x^\pi d(x s^{\frac{\beta}{\alpha}}))}{dx^2} = \frac{p(\beta + \alpha\pi) x^{\frac{\beta}{\alpha}+\pi-1}}{\alpha(\alpha+\beta)} + \text{------} +$
$\frac{p(\beta+\alpha\pi+\alpha n-\alpha) x^{\frac{\beta}{\alpha}+\pi+n-2}}{\alpha(\alpha+\beta)^2 \text{-----} (\alpha n+\beta)}$. Fiat $p\alpha n + p\beta +$
$p\alpha\pi - p\alpha = \alpha^2 n + \alpha\beta$. Ergo $p = \alpha$, et $\pi = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$.
Vnde est $\frac{\alpha^2 d(x d(x^{\frac{\beta}{\alpha}} s))}{dx^2} = x^{\frac{\beta}{\alpha}} + \text{---------} +$
$\frac{x^{\frac{\beta}{\alpha}+n-1}}{(\alpha+\beta)^2 \text{----} (\alpha(n-1)+\beta)^2} = x^{\frac{\beta}{\alpha}} + x^{\frac{\beta}{\alpha}}\Big(s \text{-------}$
$\frac{x^n}{(\alpha+\beta)^2 \text{----} (\alpha n+\beta)^2}\Big)$. Et summa progressionis in infinitum determinabitur aequatione $\frac{\alpha^2(x d(x^{\frac{\beta}{\alpha}} s))}{x^{\frac{\beta}{\alpha}} dx^2}$
$= 1 + s$. Similiter si factores fuerint cubi summa progressionis $\frac{x}{(\alpha+\beta)^3} + \frac{x^2}{(\alpha+\beta)^3(2\alpha+\beta)^3} +$ etc. in infinitum s inuenietur ex hac aequatione $\frac{\alpha^3 d(x d(x d(x^{\frac{\beta}{\alpha}} s)))}{x^{\frac{\beta}{\alpha}} dx^3} =$
$1 + s$. Atque ita porro pro sequentibus.

§. 19. Sint nunc coëfficientes potentiarum ipsius x fractiones, quarum tam numeratores quam denominatores sint facta ex certo factorum numero pro indice, cuiusque termini crescente constantia. Ita sit progressio proposita haec $\frac{(a+b)x}{(\alpha+\beta)} + \frac{(a+b)(2a+b)}{(\alpha+\beta)(2\alpha+\beta)} x^2 + \text{---} +$
$\frac{(a+b) \text{----} (an+b)}{(\alpha+\beta) \text{----} (\alpha n+\beta)} x^n$; huius summa ponatur s, erit $p \int x^m s$.

 $dx =$

$dx = \frac{p(a+b)}{(\pi+2)(\alpha+\beta)} x^{\pi+2} + \text{----} + \frac{p(a+b)\text{----}(\alpha n+b)}{(\pi+n+1)(\alpha+\beta)\text{--}(\alpha n+\beta)}$ $x^{\pi+n+1}$. Fiat $apn+bp=\pi+n+1$, erit $p=\frac{1}{a}$ et $\pi=\frac{b-a}{a}$. Adeoque $\frac{\int x^{\frac{b-a}{a}} s\,dx}{a} = \frac{x^{\frac{b+\alpha}{a}}}{\alpha+\beta} + \text{----} +$ $\frac{(a+b)\text{---}(a(n-1)+b)}{(\alpha+\beta)\text{----}(\alpha n+\beta)} x^{\frac{b}{a}+n}$. Et denuo $\frac{p\,d(x^{\pi}\int x^{\frac{b-a}{a}} s\,dx}{a\,dx}$ $= \frac{p(b+\alpha+\alpha\pi)}{a(\alpha+\beta)} x^{\frac{b}{a}+\pi} + \text{------} + \frac{p(b+an+a\pi)(a+b)\text{---}(a(n-1)+b)}{a(\alpha+\beta)\text{----}(\alpha n+\beta)}$ $x^{\frac{b}{a}+\pi+n-1}$. Fiat $bp+apn+a\pi = a\alpha n + a\beta$, erit $p=\alpha$, et $\pi=\frac{\alpha}{\beta}-\frac{b}{a}$. Vnde erit $\frac{\alpha\,d(x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}\int x^{\frac{b-a}{a}} s\,dx)}{a\,dx}$ $= x^{\frac{\beta}{\alpha}} + \text{-----} + \frac{(a+b)\text{---}(a(n-1)+b)}{(\alpha+\beta)\text{---}(\alpha(n-1)+\beta)} x^{\frac{\beta}{\alpha}+n-1} = x^{\frac{\beta}{\alpha}} +$ $x^{\frac{\beta}{\alpha}}(s - \frac{(a+b)\text{----}(an+b)}{(\alpha+\beta\text{----}(\alpha n+\beta)} x^n)$. Ex qua aequatione s determinare licet. Si summa progressionis propositae in infinitum desideretur, erit $\frac{\alpha\,d(x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}}\int x^{\frac{b-a}{a}} s\,dx)}{a\,dx} = x^{\frac{\beta}{\alpha}} =$ $x^{\frac{\beta}{\alpha}} s$, seu $\frac{\alpha}{a}(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}) x^{\frac{\beta}{\alpha}-\frac{b}{a}-1}\int x^{\frac{b-a}{a}} s\,dx + \frac{\alpha}{a} x^{\frac{\beta}{\alpha}-1} s =$ $x^{\frac{\beta}{\alpha}} + x^{\frac{\beta}{\alpha}} s$. Quae abit in hanc $(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha b}{aa}) x^{\frac{-b}{a}}\int x^{\frac{b-a}{a}} s\,dx$ $+ \frac{\alpha}{a} s = x + xs$, vel hanc $(\frac{\beta}{a}-\frac{\alpha b}{a^2})\int x^{\frac{b-a}{a}} s\,dx + \frac{\alpha}{a} x^{\frac{b}{a}}$ $s = x^{\frac{b+a}{a}} + x^{\frac{b+a}{a}} s$. Haec differentiata dat $(\frac{\beta}{a}-\frac{b\alpha}{a^2})(x^{\frac{b-a}{a}}$ $s\,dx + \frac{\alpha}{a} x^{\frac{b}{a}} ds + \frac{\alpha b}{a^2} x^{\frac{b-a}{a}} s\,dx = (\frac{b+a}{a}) x^{\frac{b}{a}} dx + x^{\frac{b+a}{a}} ds$ $+ (\frac{b+a}{a}) x^{\frac{b}{a}} s\,dx$, quae reducitur ad hanc $\frac{\beta}{a} s\,dx + \frac{\alpha}{a}$

$x\,ds$

$x\,ds = (\frac{b+a}{a})x\,dx + x^2 ds + (\frac{b+a}{\alpha})x s\,dx$. Seu $ds + \frac{\beta s dx - (b+a)x s dx}{\alpha x - a x^2} = \frac{(b+a)x dx}{\alpha x - a x^2}$. Multiplicetur haec aequatio per $c^{\int \frac{\beta dx - (b+a)x dx}{\alpha x - a x^2}}$ vel per $x^{\frac{\beta}{\alpha}}(\alpha - ax)^{\frac{b}{a} - \frac{\beta}{\alpha} + 1}$. Erit $x^{\frac{\beta}{\alpha}}(\alpha - ax)^{\frac{b}{a} - \frac{\beta}{\alpha} + 1} s = (b+a)\int x^{\frac{\beta}{\alpha}}(\alpha - ax)^{\frac{b}{a} - \frac{\beta}{\alpha}} dx$.

Atque $s = \frac{(b+a)\int x^{\frac{\beta}{\alpha}}(\alpha - ax)^{\frac{b}{a} - \frac{\beta}{\alpha}} dx}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}(\alpha - ax)^{\frac{b}{a} - \frac{\beta}{\alpha} + 1}}$. Summa igitur algebraice poterit assignari si vel $\frac{\beta}{\alpha}$ vel $\frac{b}{a} - \frac{\beta}{\alpha}$ fuerit numerus integer affirmatiuus.

§. 20. Si progressio fuerit ex huiusmodi ipsius x coefficientibus et algebraicis composita; primo coefficientes algebraici differentiatione et integratione debent tolli, vt ibi est factum, et tum progressio resultans modo hic exposito tractari. Vt sit progressio proposita $\frac{1 x}{1} + \frac{3x^2}{1.2} + \frac{5x^3}{1.2.3} + \cdots + \frac{(2n-1)x^n}{1.2.3 \cdots n}$ summa huius ponatur s, erit $p\int x^\pi s\,dx = \frac{1.p x^{\pi+2}}{(\pi+2)1} + \cdots + \frac{(2n-1)p x^{\pi+n+1}}{(\pi+n+1)(1.2.3 \cdots n)}$. Fiat $2np - p = \pi + n + 1$, erit $p = \frac{1}{2}$ et $\pi = -\frac{3}{2}$. Ex quo erit $\frac{\int x^{-\frac{3}{2}} s\,dx}{2} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1.2} + \cdots \frac{x^{n - \frac{1}{2}}}{1.2.3 \cdots n}$. Multiplicetur per $x^{\frac{1}{2}}$, erit $\frac{x^{\frac{1}{2}}\int x^{-\frac{3}{2}} s\,dx}{2} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} +$

x^3

$\frac{x^3}{1.2.3} + \cdots \frac{x^n}{1.2.3 \cdots n}$. Ergo $\frac{d(x^{\frac{1}{2}} \int x^{-\frac{1}{2}} s dx)}{2dx} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3 \cdots (n-1)} = 1 + \frac{x^{\frac{1}{2}} \int x dx}{2} - \frac{x^n}{1.2.3 \cdots n}$, ex qua aequatione s inuenietur. Erit autem $\frac{\int x^{-\frac{3}{2}} s dx}{4x^{\frac{1}{2}}} + \frac{s}{2x} = 1 + \frac{x^{\frac{1}{2}} \int x^{-\frac{3}{2}} s dx}{2} - \frac{x^n}{1.2.3 \cdots n}$

Ponatur $1.2.3. \cdots n = A$, erit porro $(1-2x) \int x^{-\frac{3}{2}} s dx = 4x^{-\frac{1}{2}} - \frac{2s}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{4x^{n+\frac{1}{2}}}{A}$. Summa progressionis propositae in infinitum continuatae vero definietur ex ista aequatione $\int x^{-\frac{3}{2}} s dx = \frac{4x - 2s}{(1-2x)\sqrt{x}}$, quae differentiata dat $\frac{s dx}{x\sqrt{x}} = \frac{2xdx + 4xxdx + sdx - 6sxdx - 2xds + 4x^2 ds}{(1-2x)^2 x \sqrt{x}}$, seu $xdx + 2x^2 dx - sxdx - 2sx^2 dx - xds + 2x^2 ds = 0$. Quae reducitur ad hanc $ds + \frac{sdx(1+2x)}{1-2x} = \frac{dx(1+2x)}{1-2x}$. Quae multiplicata per $\frac{c^{-x}}{1-2x}$ fit integrabilis, prodit autem $\frac{c^{-x}s}{1-2x} = \frac{\int c^{-x} dx (1+2x)}{(1-2x)^2} = \frac{c^{-x}}{1-2x} - 1$. Atque hinc $s = 1 - c^x(1-2x)$. Quare si fuerit $x = \frac{1}{2}$ erit $s = 1$. Adeoque $1 = \frac{1}{1.2} + \frac{3}{1.2.4} + \frac{5}{1.2.3.8} + \frac{7}{1.2.3.4.16} +$ etc. in infin.

§. 21. Ex his apparet ad quas progressiones summandas methodus hac dissertatione exposita se extendat: scilicet ad omnes eas progressiones, quae comprehenduntur ducitur hoc termino generali $\frac{AP}{BQ}x^{\alpha n+\beta}$, vbi A et B designant terminos ordinis n, quarumcunque progressionum algebraicarum. Et P est factum ex $\gamma n+\delta$ terminis progressionis cuiusque algebraicae, itemque Q est simile factum ex $\varepsilon n+\zeta$ terminis etiam cuiuscunque progressionis algebraicae. Omnino autem summae huiusmodi progressionum tribus modis expositae inuenientur. Vel enim prodit summa prorsus algebraica, vel assignatur quadratura quaepiam, a qua summa pendet. Vel tertio aequatio reperitur, cuius variabiles quantitates s et x penitus non possunt a se inuicem separari, vt saltem constet, vtrum progressio summam habeat algebraicam, an a cuius curuae quadratura pendeat. Quamuis vero haec methodus tam late pateat, tamen innumerae occurrere possunt progressiones per eum non summabiles, quarum quidem vel nullo alio modo summae assignari possunt, vt huius $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\text{-------}+\frac{1}{2^{n}-1}$, vel quarum summae etiam constant, vt huius $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+$ etc. termino generali existente $\frac{1}{a^{\alpha}-1}$, in quo a et α numeros quoscunque integros praeter vnitatem denotant, cuius summam esse $=1$ demonstrauit Celeberrimus *Goldbachius*. Quia autem eius terminus generalis proprie sic dictus non potest exhiberi, mirum non est, eam hac methodo non posse summari.

CRITERIA QVAEDAM AEQVATIONVM QVARVM NVLLA RADIX RATIONALIS EST.

AVCTORE

C. G.

VTrum aequatio data quartam potestatem excedens radicem rationalem admittat methodis adhuc cognitis non aliter indagari poterit quam vltimi termini, quem absolutum vocant, diuisores omnes inuestigando et diuisionem aequationis per quantitatem incognitam cum huiusmodi diuisore signo + vel − coniunctam tentando; etsi vero de seligendis diuisoribus vltimi termini ad hanc rem idoneis praecepta quaedam dari non ignorem, negari non potest, si coefficientes et ipse numerus absolutus permagni fuerint hoc tentamen operosissimum fieri, quodsi praeterea coefficientes vel ipse terminus absolutus ex quantitatibus indeterminatis compositi fuerint, praeceptorum huiusmodi de seligendis diuisoribus vsus vix vllus erit; animaduerti autem innumeris casibus fieri posse, vt quamuis magni et quantitatibus indeterminatis permixti sint coefficientes et terminus absolutus, tamen aequationem datam radicis rationalis omnino expertem esse ex natura coefficientium et termini absoluti vno quasi momento appareat, de quibus casibus nunc dicere constitui:

Litteris $a. b. c. x. \alpha. \beta.$ etc. item nomine numeri, diuisoris et residui in sequentibus denotabuntur numeri inte-

integri; X vero significabit seriem quamcunque finitam huius formae $\alpha + \beta\pi + \gamma x^2 +$ etc. igitur si ostendi possit in aequatione data, v. gr. $x^n = X$, terminum absolutum α huius esse naturae, vt additus ad $\beta x + \gamma x^2 +$ etc. non possit producere numerum potestatis n. eo ipso demonstratum erit aequationem $x^n = X$ nullam admittere radicem rationalem, id vero innumeris modis accidere certum est.

Ante annos complures in litteris ad amicum quendam affirmaueram numerum integrum datum, quantumuis magnum mutata vnica nota eo perduci posse, vt notae illius omnes quacunque ratione transpositae nunquam admittant radicem rationalem vllius potestatis; id scilicet effici ostendebam, si datus numerus in alium eiusmodi transmutetur, vt diuisus per 9, relinquat 3, vel 6, cum vero in numeris vel centum notarum facile vnius alteriusue minuti temporis spatio dignosci possit quinam numerus sit sublatis omnibus nouenariis residuus, patet breuissimo tempore proprietatem aliquam huius numeri demonstrari, ad quam aliunde ostendendam, si quis ingentem numerum omnium transpositionum possibilium, et in quoque casu operosum tentamen extrahendarum tot radicum perpendat, multos annos haud sufficere fatebitur, sed omnes numeri praeter binarium ita comparati sunt, vt, si alii numeri certarum potestatum per eosdem diuidantur, nonnisi certi aliqui residui maneant, sin vero alius residuus sit, tuto affirmari possit numerum sic diuisum radicem rationalem illius potestatis non habere, id quod exemplis declarabimus:

Omnes numeri poteſtatis ſecundae diuiſi per 3, relinquunt vnum ex his: o. 1. erunt enim omnes huius formae $(3m-1)^2$, $(3m-2)^2$ vel $(3m)^2$, primo et ſecundo diuiſo per 3. remanet 1. tertio diuiſo per 3. remanet o. vnde ſequitur

(I.) nullum numerum huius formae $3p+2$. eſſe quadratum, vel poſito ſigno $\mp$ pro aequatione impoſſibili, ſemper fore $x^2 \mp 3p+2$.

Iisdem veſtigiis inſiſtendo demonſtratur numeros poteſtatis tertiae, quintae, ſeptimae etc. vel generatim x^{2q+1} diuiſos per 4. relinquere vnum ex his o. 1. 3. adeoque nullum numerum qui diuiſus per 4. relinquat 2. habere radicem rationalem poteſtatis $2q+1$. neque vllum numerum qui diuiſus per 4. relinquit 2. vel 3. radicem ſecundae poteſtatis, hoc eſt

$$\text{II.}\begin{cases} x^{2q+1} \mp 4p+2 \\ x^2 \mp 4p+\alpha. \text{ ſi } \alpha \text{ fuerit} = 2, \text{ vel } 3. \end{cases}$$

$$\text{(III.)}\begin{cases} x^2 \mp 5p+\alpha. \text{ ſi } \alpha \text{ fuerit } 2, \text{ vel } 3. \\ x^4 \mp 5p+\alpha. \text{ ſi } \alpha \text{ fuerit } 2, 3, \text{ vel } 4. \end{cases}$$

(IV.) $x^2 \mp 6p+\alpha$. ſi $\alpha = 2$, vel 5.

(V.) $x^q \mp 7p+\alpha$

ſi $q = 2$. et $\alpha = 3, 5$, vel 6.

ſi $q = 3$. et $\alpha = 2, 3, 4$, vel 5.

ſi $q = 6$. et $\alpha = 2, 3, 4, 5$, vel 6.

$$\text{(VI.)}\begin{cases} x^2 \mp 8p+\alpha, \text{ ſi } \alpha = 2, 3, 5, 6 \text{ vel } 7. \\ x^{2q+1} \mp 8p+\alpha. \text{ ſi } \alpha = 2, 4, \text{ vel } 6. \\ x^{2q+2} \mp 8p+\alpha. \text{ ſi } \alpha = 2, 3, 4, 5, 6, \text{ vel } 7. \end{cases}$$

(VII.)

(VII.) $x^q = 9p + \alpha$.
si $q = 3m \pm 1$. et $\alpha = 2, 3, 5, 6, 8$.
si $q = 6$. et $\alpha = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.
si $q = 6m - 3$. et $\alpha = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.
si $q = 6m \pm 1$. et $\alpha = 3, 6$.

Atque eodem modo reliquorum numerorum residui, qui indicant numerum aliquem diuisum non habere radicem rationalem certae alicuius poteſtatis, erui poterunt; quod si iam diuiſor huiusmodi vocetur d; numerus ex diuiſione reſiduus r; numerus datae poteſtatis e; numerus ipſe datus x^e, ſitque p. numerus quicunque, ſemper erit $x^e = dp + r$, hunc numerum reſiduum r, breuitatis cauſa vocabimus *congruum*, quia nempe aptus eſt ad demonſtrandum numerum aliquem non habere radicem rationalem certae alicuius poteſtatis, et cum p. ſit numerus quicunque, ſubſtitui pro eo poterit X. et fiet $x^e = dX + r$. ſit v. gr. aequatio data

$$x^{2n} = 3ax^m + 3bx + 3c + 2.$$

fiet $e = 2n$; $d = 3$; $X = ax^m + bx + c$; $r = 2$. ſed antea oſtenſum eſt nullum numerum quadratum ſi diuidatur per 3. relinquere 2. quod tamen fieret in hac aequatione, ſi poſſibilis eſſet, ergo x^n in hac aequatione non eſt numerus rationalis adeoque nec x rationalis (nam n. x. et reliquae litterae hic nonniſi numeros integros ſignificant).

Haec methodus ad omnes caſus pertinet, quibus aequatio data diſpeſci poteſt in duas partes quarum vna ſit X, ad quamcunque poteſtatem eleuata, altera vero per aliquem diuiſorem d. diuiſa relinquat numerum *congruum*;

ſit aequatio data

$$x^{10} = 7x^6 + x^5 + 7cx - 6$$

hanc nullam habere radicem rationalem, ex eo oſtenditur, quod addendo vtrobique $6x^5 + 9$. mutatur in hanc

$$x^{10} + 6x^5 + 9 = 7x^6 + 7x^5 + 7cx + 3.$$

cuius prior pars continet numerum quadratum, poſterior diuiſa per 7 relinquit numerum *congruum* 3. et generatim $x^e = p^m X + p$.

ſi fuerint e. et m. numeri vnitate maiores, et p. numerus *primus*; quod ſic demonſtratur: cum $p^m X + p$. ſit diuiſibilis per p; erit etiam x^e (ſi vera eſt aequatio) diuiſibilis per p. et cum p. ſit numerus *primus*, erit x. vel $= p$. vel diuiſibilis per p. ponatur ergo x. $= ap$. vbi a. ſit numerus quicunque, fiet $a^e p^e = p^m X + p$. vel $a^e p^{e-1} = p^{m-1} X + 1$. quam aequationem vtique impoſſibilem eſſe ex eo patet, quod altera pars aequationis per p. diuidi poteſt, altera nequit, vnde conſtat nullum numerum qui diuiſus per p^m relinquit p. habere radicem rationalem vllius poteſtatis, ſi p. ſit numerus *primus*.

OB-

OBSERVATIONES DE THEOREMATE QVODAM FERMATIANO, ALIISQVE AD NVMEROS PRIMOS SPECTANTIBVS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

Notum est hanc quantitatem $a^n + 1$ semper habere diuisores, quoties n sit numerus impar, vel per imparem praeter vnitatem diuisibilis. Namque $a^{2m+1} + 1$ diuidi potest per $a + 1$ et $a^{p(2m+1)} + 1$ per $a^p + 1$, quicunque etiam numerus loco a substituatur. Contra vero si n fuerit eiusmodi numerus, qui per nullum numerum imparem nisi vnitatem diuidi possit, id quod euenit, quando n est dignitas binarii, nullus numeri $a^n + 1$ potest assignari diuisor. Quamobrem si qui sunt numeri primi huius formae $a^n + 1$, ii omnes comprehendantur necesse est in hac forma $a^{2^m} + 1$. Neque tamen ex hoc potest concludi $a^{2^m} + 1$ semper exhibere numerum primum quicquid sit a; primo enim perspicuum est, si a sit numerus impar, istam formam diuisorem habiturum 2. Deinde quoque, etiamsi a denotet numerum parem, innumeri tamen dantur casus, quibus numerus compositus prodit. Ita haec saltem formula $a^2 + 1$ potest diuidi per 5, quoties est $a = 5b \pm 3$, et $30^2 + 1$ potest diuidi per 17, et $50^2 + 1$ per 41. Simili modo $10^4 + 1$ habet diuisorem 73; $6^8 + 1$ habet diuisorem 17, et $6^{128} + 1$ est diuisibilis per 257. At huius formae $2^{2^m} + 1$ quan-

quantum ex tabulis numerorum primorum, quae quidem non vltra 100000 extenduntur, nullus detegitur casus, quo diuisor aliquis locum habeat. Hac forte aliisque rationibus *Fermatius* adductus enunciare non dubitauit $2^{2^m}+1$ semper esse numerum primum, hocque vt eximium theorema *Wallisio* aliisque Mathematicis Anglis demonstrandum proposuit. Ipse quidem fatetur se eius demonstrationem non habere, nihilo tamen minus asserit esse verissimum. Vtilitatem eius autem hanc potissimum praedicat, quod eius ope facile sit numerum primum quouis dato maiorem exhibere, id quod sine huiusmodi vniuersali theoremate foret difficillimum. Leguntur haec in *Wallisii* Commercio Epistolico Tomo Eius Operum secundo inserto, epistola penultima. Extant etiam in ipsius *Fermatii* operibus p. 115. sequentia. "Cum autem numeros a binario quadratice "in se ductos et vnitate auctos esse semper numeros "primos apud me constet, et iam dudum Analystis il-"lius theorematis veritas fuerit significata nempe esse "primos 3, 5, 17, 257, 65537, etc. in infinit. nullo "negotio etc.

Veritas istius theorematis elucet, vt iam dixi, si pro m ponatur 1, 2, 3 et 4, prodeunt enim hi numeri 5, 17, 257, et 65537, qui omnes inter numeros primos in tabula reperiuntur. Sed nescio, quo fato eueniat, vt statim sequens nempe $2^{2^5}+1$ cesset esse numerus primus, obseruaui enim his diebus longe alia agens posse hunc numerum diuidi per 641. vt cuique tentanti statim patebit.

Est

Eſt enim $2^{2^5}+1=2^{32}+1=4294967297$. Ex quo intelligi poteſt, theorema hoc etiam in aliis, qui ſequuntur, caſibus fallere, et hanc ob rem problema de inueniendo numero primo quouis dato maiore etiam nunc non eſſe ſolutum.

Conſiderabo nunc etiam formulam 2^n-1, quae quoties n non eſt numerus primus, habet diuiſores: neque tantum 2^n-1 ſed atiam a^n-1. Sed ſi n ſit numerus primus, videri poſſet etiam 2^n-1 ſemper talem exhibere: hoc tamen aſſeuerare nemo eſt auſus quantum ſcio, cum tam facile potuiſſet refelli. Namque $2^{11}-1$ i.e. 2047 diuiſores habet 23 et 89 et $2^{23}-1$ diuidi poteſt per 47. Video autem Cel. *Wolfium* non ſolum hoc in Elem. Matheſeos editione altera non aduertiſſe, vbi numeros perfectos inueſtigat, atque 2047 inter primos numerat; ſed etiam 511 ſeu 2^9-1 pro tali habet, cum tamen ſit diuiſibilis per 2^3-1 i. e. 7. Dat autem $2^{n-1}(2^n-1)$ numerum perfectum, quoties 2^n-1 eſt primus, debet ergo etiam n eſſe numerus primus. Operae igitur pretium fore exiſtimaui eos notare caſus, quibus 2^n-1 non eſt numerus primus, quamuis n ſit talis. Inueni autem hoc ſemper fieri, ſi ſit $n=4m-1$, atque $8m-1$ fuerit numerus primus, tum enim 2^n-1 ſemper poterit diuidi per $8m-1$. Hinc excludendi ſunt caſus ſequentes, 11, 23, 83, 131, 179, 191, 239, etc. qui numeri pro n ſubſtituti reddunt 2^n-1 numerum compoſitum. Neque tamen reliqui numeri primi omnes loco n poſiti ſatisfaciunt, ſed plures inſuper excipiuntur, ſic obſeruaui $2^{37}-1$ diuidi poſſe per 223, $2^{43}-1$ per

431, $2^{29}-1$ per 1103, $2^{73}-1$ per 439, omnes tamen excludere non eſt in poteſtate. Attamen aſſerere audeo praeter hos caſus notatos, omnes numeros primos minores quam 50, et forte quam 100, efficere $2^{n-1}(2^n-1)$ eſſe numerum perfectum, ſequentibus numeris pro n poſitis, 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 41, 47, vnde 11. proueniunt numeri perfecti. Deduxi has obſeruationes ex Theoremate quodam non ineleganti, cuius quidem demonſtrationem quoque non habeo, verum tamen de eius veritate ſum certiſſimus. Theorema hoc eſt, a^n-b^n, ſemper poteſt diuidi per $n+1$, ſi $n+1$ fuerit numerus primus atque a et b non poſſint per eum diuidi; eo autem difficiliorem puto eius demonſtrationem eſſe, quia non eſt verum niſi $n+1$ ſit numerus primus. Ex hoc ſtatim ſequitur 2^n-1 ſemper diuidi poſſe per $n+1$, ſi fuerit $n+1$ numerus primus, ſeu cum omnis primus ſit impar praeter 2, hicque ob conditiones theorematis, quia eſt $a = 2$, non poſſit adhiberi, poterit $2^{2m}-1$ ſemper diuidi per $2m+1$ ſi $2m+1$ ſit numerus primus. Quare etiam vel 2^m+1 vel 2^m-1 diuidi poterit per $2m+1$. Deprehendi autem 2^m+1 poſſe diuidi, ſi fuerit $m = 4p+1$ vel $4p+2$, at 2^m-1 habebit diuiſorem $2m+1$, ſi $m = 4p$ vel $4p-1$. Haec perſecutus in multa alia incidi theoremata non minus elegantia, quae eo magis aeſtimanda eſſe puto, quod vel demonſtrari prorſus nequeant, vel ex eiusmodi propoſitionibus ſequantur, quae demonſtrari non poſſunt, primaria igitur hic adiungere viſum eſt.

Theo-

Theorema I. Si fuerit n numerus primus, omnis potentia exponentis $n-1$ per n diuisa vel nihil vel 1 relinquit.

Theorema II. Manente n numero primo, omnis potentia, cuius exponens est $n^{m-1}(n-1)$, diuisa per n^m vel o vel 1 relinquit.

Theorema III. Sint m, n, p, q, etc. numeri primi inaequales, sitque A minimus communis diuiduus eorum vnitate minutorum, puta ipsorum $m-1$, $n-1$, $p-1$; $q-1$, etc. his positis dico omnem potentiam exponentis A vt a^A diuisam per $mnpq$ etc. vel o vel 1 relinquere, nisi a diuidi possit per aliquem horum numerorum, m, n, p, q etc.

Theorema IV. Denotante $2n+1$ numerum primum poterit 3^n+1 diuidi per $2n+1$, si sit vel $n = 6p+2$ vel $n = 6p+3$: at 3^n-1 diuidi poterit per $2n+1$ si sit vel $n =$ vel $6p$ vel $n = 6p-1$.

Theorema V. 3^n+2^n potest diuidi per $2n+1$ si sit $n =$ vel $12p+3$, vel $12p+5$, vel $12p+6$, vel $12p+8$. Atque 3^n-2^n potest diuidi per $2n+1$, si sit $n =$ vel $12p$ vel $12p+2$, vel $12p+9$, vel $12p+11$.

Theorema VI. Sub iisdem conditionibus quibus 3^n+2^n poterit etiam 6^n+1 diuidi per $2n+1$; atque 6^n-1 sub iisdem, quibus 3^n-2^n.

Danielis Bernoulli

THEOREMATA DE OSCILLATIONIBVS CORPORVM FILO FLEXILI CONNEXORVM ET CATENAE VERTICALITER SVSPENSAE.

Introductio ad Argumentum.

Tabula VIII.

THeoriae oscillationum, quas adhuc Auctores pro corporibus dederunt solidis, inuariatum partium situm in illis ponunt, ita ut singula communi motu angulari ferantur. Corpora autem, quae ex filo flexili suspenduntur, aliam postulant theoriam, nec sufficere ad id negotium videntur principia communiter in mechanica adhiberi solita, incerto nempe situ, quem corpora inter se habeant, eodemque continue variabili. De his cogitandi ansam mihi aliquando dedit catena verticaliter suspensa et motibus oscillatoriis agitata, hancque tunc videns motibus valde irregularibus iactari, primo mentem subiit, ad quamnam curuam catena esset inflectenda, vt omnibus eius partibus simul moueri incipientibus hae quoque vna in situm peruenireut lineae verticalis per punctum suspensionis transeuntis: hoc modo oscillationes aequabiles fore intellexi atque tales quarum tempora definiri possent: Mox vero sensi difficile esse hanc determinare curuam, nisi disquisitionis initium fiat a casibus simplicissimis. Orsus itaque sum has meditationes a corporibus duobus filo flexili in data distantia cohaerentibus; postea tria consi-

consideraui moxque quatuor, et tandem numerum eorum distantiasque qualescunque; cumque numerum corporum infinitum facerem, vidi demum naturam oscillantis catenae siue aequalis siue inaequalis crassitiei sed vbique perfecte flexilis. Suo singula percurram ordine; demonstrationes autem quas nunc adornare non vacat in aliam occasionum reseruabo. In solutione nouis vsus sum principiis, proptereaque volui theoremata experimentis confirmare, ne de eorum veritate dubium esse posset, iis praesertim, qui hisce rebus sua natura aliquanto difficilioribus non omnem dare poterunt animi attentionem, quique sic facile in falsam incidere possent solutionem. Caeterum alias oscillationes non considerabimus, quam quae minimae sint et isochronae: pro experimentis tamen sine notabili errore paulo maiores illas efficere licebit.

Theorema I.

2. *Fuerit filum perfecte flexile non graue* AHF *suspensum ex puncto* A *habeatque in* H *et* F *duo alligata pondera aequalia: tantum autem distet corpus inferius a superiori quantum hoc a puncto suspensionis. Sit porro linea* ABC *verticalis, et ab hac corpora* H *et* F *veluti infinite parum distent; Denique ducantur horizontales minimae* HB *et* FC: *Dico si ambo corpora simul oscillari incipiant, fore vt eodem temporis puncto perueniant in situm lineae verticalis atque hoc modo oscillationes suas uniformiter perficiant, cum sumitur* $CF : BH = 1 + \sqrt{2} : 1$. Fig. 1. 2.

Corollarium.

3. Igitur duobus modis oscillationes fiunt vniformes;

mes; nempe cum ſumitur, vt figura prima oſtendit, $CF = (1 + \sqrt{2}) BH$; tum etiam cum ad normam figurae ſecundae ſit $CF = (1 - \sqrt{2}) BH$.

Theorema 2.

4. *Factis oſcillationibus corporum* H *et* F *vniformibus, erit longitudo penduli ſimplicis tautochroni* $= \frac{1}{2 \pm \sqrt{2}} \cdot AH$ *vel* $\frac{1}{4 \pm \sqrt{8}} \cdot AC$, *vbi ſignum affirmatiuum valet pro oſcillationibus contrariis figurae ſecundae, ſignum negatiuum pro conſpirantibus figurae primae.*

Corollarium.

5. Multo itaque celerius oſcillationes contrariae abſoluuntur, quam conſpirantes: illarum enim 231 numerabis, dum hae centies fuerint replicatae. Conſpirantes autem parum differunt ab iis quae fierent ſub iisdem circumſtantiis poſito filo AHF rigido: paullo tamen celerius oſcillantur corpora in filo rigido quam flexili, erunt nempe numeri oſcillationum aequali tempore peractarum praeterpropter vt 1012 ad 1000.

Scholium.

6. Vt ad experientiam reuocarem haſce propoſitiones, vſus ſum globis plumbeis perfecte aequalibus, qui dum funderentur in medio tenui foramine perforati manebant; traiecto filo ſericeo globisque ope nodorum firmatis ita vt inferior duplo magis diſtaret a puncto ſuſpenſionis quam ſuperior. Digitis deduxi globum inferiorem in ſitum F tenſo filo: mox oſcillationes fiebant vniformes, et ope diuiſionum in pariete factarum diſtincte cognoui excurſiones corporum H et

F in

F in figura 1. fuiffe vt 100 ad 241, id eft, vt 1 ad $1+\sqrt{2}$ (§. 2.): Numerus etiam ofcillationum dato tempori conueniens accurate refpondit longitudini penduli fimplicis ifochroni $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$ AH in *prop.* 4. definitae. Deinde facta FC $=(1-\sqrt{2})$ BH in figura fecunda, detinui manibus globos in fitu F et H illosque mox eodem temporis puncto dimifi: ofcillationes ortae funt fic fatis vniformes fecus atque fiebat cum alia proportione diftantiae FC et HB fumerentur: numerus ofcillationum accurate rurfus fuit, qui conueniret longitudini penduli fimplicis $\frac{1}{2+\sqrt{2}}$ AH ifochroni *prop.* 4.

Theorema 3.

GENERALE PRO DVOBVS CORPORIBVS.

7. *Fuerit iam pars fili* $AH=l$; $HF=L$; *pondus corporis* $H=m$, *alteriusque* $F=M$: *dico fore ofcillationes uniformes fi fit*

$$CF=\frac{mL-ml+ML+Ml\pm\sqrt{(4mMLL+(ml+ML+Ml-mL)^2)}}{2Ml}\times BH.$$

longitudinem autem penduli fimplicis ifochroni fore

$$=\frac{2mLl}{mL+ml+Ml+ML\mp\sqrt{(4mMLL+(ml+ML+Ml-mL)^2)}},$$

aut, pofito $L+l=\lambda$ *et* $M+m=\mu$,

$$=\frac{2m\lambda l-2mll}{\mu\lambda\mp\sqrt{(\mu\mu\lambda\lambda-4m\mu l\lambda+4m\mu ll)}}.$$

Theorema 4.

8. *Si loco duorum corporum aequalium ponantur tria tantum a fe inuicem diftantia, quantum fupremum a puncto fufpenfionis* A *diftat, poterunt tribus diuerfis* Fig. 3. 4. 5. *modis ofcillationes fieri uniformes: primus eft quem figura tertia*

tertia indicat, cum posita BH $=1$, *sumitur* CF $=2$, 292 *et* DG $=3,922$: *secundus, qui figura quarta repraesentatur, obtinetur faciendo* CF $=1,353$ *et* DG $=-1,044$ *ac tertius cum sit, vt in figura quinta,* CF $=-0,645$ *et* DG $=0,122$.

Est nempe CF aequalis accipienda tribus radicibus huius aequationis

$$4x^3-12xx+3x+8=0,$$

tumque pro quauis radice sumenda est

$$DG=2xx-2x-2.$$

Theorema 5.

9. *Factis, vt modo dictum, oscillationibus vniformibus, erit longitudo penduli simplicis isochroni in casu figurae tertiae proxime aequalis* $2,406$ AH; *in casu figurae qnartae* $=0,436$ AH *et in casu figurae quintae* $=0,159$ AH: *Est scilicet longitudo penduli isochroni* $=\frac{1}{5-2x}\times$AH, *posito rursus* $4x^3-12xx+3x+8=0$.

Scholium.

10. Ambo haec theoremata experimento accurate confirmaui in casu figurae tertiae, deducto tantum corpore intimo extra situm lineae verticalis mox dimittendo: quamuis enim in primis oscillationibus inaequalitas quaedam sentiri potuerit, tamen haec sua sponte et citissime abiit, ita vt excursiones singulorum corporum pluribus vicibus successiuis, quantum oculis discerni poterat, eaedem manerent: sumtis autem earundem mensuris, talis inter eas reperta fuit proportio qua-

qualem theorema 4. indicat: numerus quoque oſcillationum perfecte reſpondit theorematì quinto: duo reliqui caſus maiorem induſtriam requirunt: potui tamen vtriusque generis oſcillationes ſatis exacte efficere, vt veritas theorematis quinti appareret.

Theorema 6.

GENERALE PRO TRIBVS CORPORIBVS.

11. *Fuerint nunc rurſus pondera corporum* H, F, G *qualiacunque ſimulque diſtantiae eorundem a puncto ſuſpenſionis rationem habuerint qualemcunque: ſit nempe pondus corporis* $H = m$, *corporis* $F = M$, *corporisque* $G = \mu$; *tumque* $AH = l$, $HF = L$ *et* $FG = \lambda$; *dico oſcillationes vniformes futuras eſſe ſi poſita* $BH = 1$, $GF = x$ *fiat*

$$((MMl\lambda + M\mu l\lambda)xx + (mMl\lambda + m\mu lL - mML\lambda - MMl\lambda - MML\lambda + m\mu l\lambda - M\mu l\lambda - M\mu L\lambda)x - m\mu l\lambda - mMl\lambda) \times ((Ml\lambda + \mu l\lambda)x - mL\lambda - Ml\lambda - ML\lambda - \mu l\lambda - \mu L\lambda + mlL) = mm\mu llLLx.$$

ſimulque ſumatur pro quauis radice

$$DG = \left(\frac{MM\lambda}{m\mu L} + \frac{M\lambda}{mL}\right)xx + \left(1 + \frac{\lambda}{L} + \frac{M\lambda}{\mu L} - \frac{M\lambda}{\mu l} - \frac{MM\lambda}{m\mu L} - \frac{MM\lambda}{m\mu l} - \frac{M\lambda}{mL} - \frac{M\lambda}{ml}\right)x - \frac{M\lambda}{\mu L} - \frac{\lambda}{L}.$$

Corollaria.

12. I. Ponatur maſſa corporis infimi $\mu = o$, diuidaturque aequatio fundamentalis ſuperioris paragraphi per factorem alterum ceu radicem inutilem; factor igitur prior erit $= o$, hincque habebitur $Mlxx + (ml - mL - Ml - ML)x - ml = o$, vel

$$x = \frac{mL - ml + ML + Ml \pm \sqrt{(4mMll + (ml - mL - Ml - ML)^2)}}{2Ml};$$

Notandum autem eſt, non differre hunc valorem ab illo quem dedimus in theoremate tertio, quamuis quantitates ab vtraque parte ſigno radicali inuolutae diuerſam habeant formam.

II. Si vero maſſa corporis medii indicata per M ponatur $=o$, tunc, vt appareat conſenſus inter theorema tertium et ſextum, erit in hoc poſteriori intelligendum per $L+\lambda$ et μ, quod deſignatum fuit in altero per L et M, ipſaque linea DG in praecedente paragrapho definita comparanda erit cum linea CF ad theorema tertium pertinente. Ad haec qui animum aduerterit, vtriusque theorematis aequationes easdem eſſe reperiet inſtituto calculo.

III. Denique cum ponitur corpus ſummum H indicatum per $m=o$, poteſt in aequatione fundamentali §. 11. vterque factor poni $=o$, et vtroque modo obtinetur CF ſeu $x=1+\frac{L}{l}$, prouti natura rei poſtulat, quia tunc lineae AH et HF, vt patet, debent in directum iacere. Excurſio autem corporis infimi ex aequatione dignoſci non poteſt, niſi id particulari methodo fiat. Ita nec oſcillationes definiri immediate poſſunt per theorema ſextum, cum duo corpora vniuntur euaneſcente alterutra longitudinum L vel λ.

IV. Fieri poteſt in figura quarta, vt ſit $CF=o$, quo in caſu, quia durante tota oſcillatione diſtantiae corporum a linea verticali eandem perpetuo inter ſe rationem ſeruant, corpus medium F quieſcit, dum ambo reliqua hinc inde agitantur; atque tunc perſpicuum eſt, longitudinem penduli iſochroni fore $=\lambda$, quia corpus infimum veluti ex puncto fixo C ſuſpenſum oſcillatur;

latur; Iste vero casus, de quo loquimur, obtinetur ponendo $x = o$, seu $x = \frac{mlL}{mL + Ml + ML + \mu l + \mu L}$.

Theorema 7.

QVOD GENERALITER PENDVLVM TAVTOCHRONVM PRO TRIBVS GORPORIBVS OSCILLANTIBVS DEFINIT.

13. *Retentis denominationibus et aequationibus theorematis sexti dico oscillationes singulorum corporum isochronas fore cum oscillationibus penduli simplicis, cuius longitudo sit* $\frac{mlL}{mL + (M + \mu) \times (l + L - lx)}$.

Corollarium.

14. In casu $x = o$, quem modo alleganimus, fit longitudo penduli isochroni $= \frac{mlL}{mL + Ml + ML + \mu l + \mu L} = \lambda$, quod conuenit cum *Coroll.* 4. *Theorem.* 6. Si praeterea ponatur $L = l$, fit longitudo penduli isochroni seu $\lambda = \frac{ml}{m + 2M + 2\mu}$: Conuenit hoc cum problemate 1. quod *Pater meus* in *Comment. Acad. Petrop. Tom. III p.* 15. dedit: idque vnicuique manifestum erit, qui considerabit pondus P, quod ibi ab vna parte chordae est appensum, hic esse summam ponderum G et F auctam dimidio pondere H.

Scholium Generale.

15. Possum similes aequationes dare pro quatuor, quinque et quot libuerit corporibus: semper autem aequatio ad tot assurgit dimensiones quot sunt corpora, et

et est plerumque admodum prolixa: attamen quia aequatio finalis oritur ex pluribus aequationibus radicalibus linearibus, lex apparet ex methodo qua vsus sum, cuius auxilio ex tempore omnia determinari possunt, quae ad aequationem determinandam concurrunt.

Theorema 8.

DE FIGVRA CATENAE VNIFORMITER OSCILLANTIS.

Fig. 6. 16. *Sit catena* AC *vniformiter grauis et perfecte flexilis suspensa de puncto* A, *eaque oscillationes facere vniformes intelligatur: peruenerit catena in situm* AMF; *fueritque longitudo catenae* $= l$: *longitudo cuiuscunque partis* FM $= x$, *sumaturque* n *eius valoris, vt sit*

$$1 - \frac{l}{n} + \frac{ll}{4nn} - \frac{l^3}{4.9.n^3} + \frac{l^4}{4.9.16.n^4} - \frac{l^5}{4.9.16.25.n^5} + \text{etc.} = 0:$$

Ponatur porro distantia extremi puncti F *ab linea verticali* $= 1$, *dico fore distantiam puncti vbicunque assumti* M *ab eadem linea verticali aequalem*

$$1 - \frac{x}{n} + \frac{xx}{4nn} - \frac{x^3}{4.9.n^3} + \frac{x^4}{4.9.16n^4} - \frac{x^5}{4.9.16.25.n^5} + \text{etc.}$$

Scholium.

17. Per methodum, quam dedi in *Comm. Acad. Petrop. Tom. V. de resolutione aequationum sine fine progredientium*, inuenitur breuissimo calculo $n =$ proxime $0,691\,l$: Igitur si fuerit v. gr. punctum M in medio catenae, illud distabit a linea verticali praeterpropter duabus quintis, vel accuratius, trecentis nonaginta octo partibus millesimis distantiae puncti infimi F ab eadem linea verticali. Habet autem littera n infinitos valores alios.

Theo-

Theorema 9.

18. *Seruatis positionibus theorematis octaui, dico longitudinem penduli simplicis isochroni cum oscillante catena esse* $= n$, *seu subtangenti* CP *curuae* AF *in infimo puncto* F; *aut proxime aequalem sexcentis nonaginta et vni partibus millesimis totius catenae in casu figurae sextae.*

Corollarium.

19. Tardius igitur hoc modo oscillatur catena, quam baculus rigidus aequabilis crassitiei, eiusdem cum catena flexili longitudinis: huius enim oscillationes isochronae sunt cum oscillationibus penduli simplicis, quod in longitudine duos baculi trientes habet.

Scholium I.

20. Postquam plurimos globulos plumbeos aequales ad distantias minimas aequales filo connexi, vt in paragrapho sexto dictum, eo catenae loco vsus sum ad experimentum instituendum: filum itaque globis oneratum ex puncto firmo suspendi: deductaque ad latus extremitate F, eaque rursus dimissa rationem obseruaui, oscillationibus iam vniformibus factis, inter distantias puncti extremi F et medii M a linea verticali AC, eamque rationem eandem deprehendi, quae paragrapho decimo septimo indicatur: numerum quoque oscillationum conuenire obseruaui cum longitudine penduli simplicis isochroni, quae in theoremate nono exhibetur.

Scholium 2.

21. Quia aequatio in theoremate octauo exhibita, nempe
$1 - \frac{l}{n} + \frac{ll}{4nn} - \frac{l^3}{4.9.n^3} + \frac{l^4}{4.9.16\,n^4} - \frac{l^5}{4.9.16.25.n^5} + \text{etc.} = 0.$
habet infinitas radices reales, ideoque catena infinitis modis inflecti poteſt, vt oſcillationes fiant vniformes: ſemper autem littera n minorem atque minorem valorem aſſumit, ita vt tandem pene euaneſcat, eſtque longitudo penduli ſimplicis iſochroni conſtanter $= n$, ſeu ſubtangenti CP: vnde etiam oſcillationes tandem fient veluti infinite celeres. Caſus qui fingi poſſunt omnes huc redeunt, primo, vt catena lineam verticalem in alio puncto non interſecet praeter punctum ſuſpenſionis, qui repraeſentatur figura ſexta et pro quo conuenit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $n = 0,691\,l$, vt vidimus in antecedentibus: vel vt catena lineam verticalem in vno inſuper puncto immobili ſecet, qualem figura ſeptima indicat, vbi praedictum interſectionis punctum eſt B: in hoc caſu eſt longitudo penduli iſochroni $n = 0,13\,l$, et oſcillationes numero viginti tres fient, dum in caſu figurae ſextae decem abſoluuntur: linea CB erit proxime $= 0,19\,l$: CN puncto maximae excurſionis M conueniens $= 0,47\,l$: ipſaque MN praeterpropter $= \frac{2}{5}$ FC. Poſt hunc caſum ſequitur ille, qui figura octaua ſiſtitur: vbi linea verticalis in duobus punctis fixis B et G a catena oſcillante interſecatur: deinde cum tres fiunt interſectiones et ſic porro. Arcus inter duo interſectionis puncta proxima incepti eo maiores ſunt, quo altius poſiti:

siti: In catena autem infinite quasi longa arcus summus non differt sensibiliter a figura chordae musicae tensae, quia pondus istius arcus veluti nullum est respectu ponderis catenae totius. Neque difficile esse theoriam chordarum musicarum ex theoria ista deducere, quae plane conuenit cum illis, quas *Taylorus* et *Pater meus* dederunt, primus in *tractat. suo de methodo incrementorum*, alter in *Comment. Acad. Sc. Petrop. Tom. III.* Similes quoque interfectiones in chordis musicis, quae in catenis vibratis effici posse experimentum docet, quod chartula chordae quibusdam in locis imposita non decidat, cum chorda annexa vibratur.

Theorema. 10.

22. *Si catena* AC *e filo* LA *non graui suspensa fuerit, ponaturque longitudo partis ad libitum assumtae* FM $= x$: *distantia supremi puncti* N *a linea verticali* $= \beta$: *sicque porro n sumatur eius valoris vt sit* Fig. 9

$$1 - \frac{(l+\lambda)}{n} + \frac{(l^2+2l\lambda)}{4nn} - \frac{(l^3+3ll\lambda)}{4.9.n^3} + \frac{(l^4+4l^3\lambda)}{4.9.16n^4} - \text{etc.} = 0,$$

dico in oscillationibus vniformibus fore vbique distantiam puncti M *a linea verticali aequalem,*

$$\left(1 - \frac{x}{n} + \frac{xx}{4nn} - \frac{x^3}{4.9.n^3} + \frac{x^4}{4.9.16n^4} - \text{etc.}\right)\beta : \left(1 - \frac{l}{n} + \frac{ll}{4nn} - \frac{l^3}{4.9.n^3} + \frac{l^4}{4.9.16n^4} - \text{etc.}\right)$$

adeoque distantiam puncti infimi F *futuram esse aequalem*

$$\beta : \left(1 - \frac{l}{n} + \frac{ll}{4nn} - \frac{l^3}{4.9n^3} + \frac{l^4}{4.9.16n^4} - \text{etc.}\right).$$

Erit porro longitudo penduli simplicis isochroni, vt antea $= n$, *seu in casu simplicissimo proxime*, $=$

$$\frac{211l^4 + 844l^3\lambda + 1536ll\lambda\lambda + 1440l\lambda^3 + 576\lambda^4}{304l^3 + 912ll\lambda + 1152l\lambda\lambda + 576\lambda^3}$$

Corol-

Corollarium.

23. Sit v. gr. longitudo fili eadem quae longitudo catenae, id est, $l = \lambda$, erit longitudo penduli simplicis isochroni seu n proxime $= 1,56\,l$: distantiaeque punctorum extremorum F et N a linea verticali se fere habebunt vt 11 ad 1: plures tamen praeter hunc alii casus satisfacient similes illis, quos in paragrapho 21. enumerauimus: ita post dictum casum sequitur is, quo sit n fere $= \frac{1}{5} l$; punctumque C excursiones contrarias facit cum puncto A atque triplo maiores.

Theorema 11.

Fig. 10. 24. *Positis omnibus vt in theoremate decimo, si catena in origine* A *pondere onerata fuerit tanto, quantum inest catenae parti longitudinis* L; *erunt omnia vt in eodem theoremate decimo, si modo nunc fiat*

$$1 - \frac{(L\lambda + Ll + ll + l\lambda)}{n(L+l)} + \frac{(4lL\lambda + l^3 + 2ll\lambda)}{4nn.(L+l)} - \frac{(9llL\lambda + Ll^3 + l^4 + 3l^3\lambda)}{4.9n^3(L+l)}$$
$$+ \frac{(16l^3 + L\lambda + Ll^4 + l^5 + 4l^4\lambda)}{4.9.16n^4(L+l)} - etc. = 0.$$

Fuerit v. gr. $L = \lambda = l$, *et fiet* $1 - \frac{2l}{n} + \frac{ll}{nn} - \frac{7l^3}{36n^3} + \frac{11l^4}{576n^4} - etc. = 0$, *hincque habebitur proxime* $n = 1,37l$; *arculi autem a punctis catenae infimo et supremo descripti erunt vt* 100 *ad* 39.

Theorema 12.

GENERALE PRO CATENIS VTCVNQVE INAEQVALITER CRASSIS ATQVE GRAVIBVS.

25. F*uerit denique catena vtcunque inaequalis structurae ita vt posito longitudine partis catenae* FM $= x$, *sit*

sit pondus eius ξ, *intelligendo per* ξ *qualemcunque functionem ipsius* x: *vocetur porro distantia puncti* M *ad libitum assumti a linea verticali* $= y$: *dico curuaturam* F M N *hac definiri aequatione, sumta* dx *pro constante,* $\int y\, d\xi = -\frac{n\xi dy}{dx}$: *huicque aequationi postquam in quolibet casu particulari recte satisfactum fuerit, fore longitudinem penduli simplicis isochroni* $= n$.

Corollaria.

26. I. In catenis aequabilis crassitiei, quarum pondus integrum $= 1$, est $\xi = \frac{x}{l}$: pro his igitur talis inseruit aequatio $\int y\, dx = -\frac{nxdy}{dx}$, ex qua omnia deduci possunt, quae a paragrapho decimo sexto ad vigesimum tertium dicta sunt.

II. Fuerit pondus catenae integrae rursus $= 1$: longitudo eius $= l$: sitque vbique $\xi = \frac{xx}{ll}$; erunt distantiae punctorum F et M a linea verticali vt 1 ad summam huius seriei

$$1 - \frac{x}{n} + \frac{xx}{3nn} - \frac{x^3}{3.6\,n^3} + \frac{x^4}{3.6.10\,n^4} - \frac{x^5}{3.6.10.15\,n^5} + \text{etc.}$$

Est autem n longitudo talis, vt sit

$$1 - \frac{l}{n} + \frac{ll}{3nn} - \frac{l^3}{3.6\,n^3} + \frac{l^4}{3.6.10\,n^4} - \frac{l^5}{3.6.10.15\,n^5} + \text{etc.} = 0.$$

cui conditioni proxime satisfit, cum sumitur $n = \frac{11}{20} l$; tantaque est longitudo penduli simplicis isochroni: erit autem excursio puncti infimi F fere tripla eius quam facit punctum medium M.

Scholium Generale.

27. In omnibus quas considerauimus oscillationibus distantiae singulorum punctorum a linea verticali,

 quasi

quaſi infinite paruae cenſendae ſunt ratione longitudinis fili corpora connectentis aut catenae, imo etiam ratione arcuum catenae, de quibus in paragrapho 21. diximus, ita vt v. gr. in figura ſeptima etiam diſtantia FC infinities minor eſſe debeat linea CB, ad quod animus eſt aduertendus in inſtituendis experimentis, quamuis a magnitudine oſcillationum non facile error admodum notabilis oriatur.

Si haec pendula in turbinem agantur, eandem figuram induent, quam ipſis in oſcillationibus aſſignauimus, et gyros ſuos duplo abſoluent tempore, quo oſcillationes in eodem perficiunt plano.

PRO-

PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI IN LATISSIMO SENSV ACCEPTI SOLVTIO GENERALIS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Problemata, quae curuas maximi minimiue proprietate praeditas requirunt, et adhuc a Geometris tractata sunt, ad duas classes commode referuntur. Quarum prima omnia ea complectitur, quae inter omnes prorsus curuas eam postulant, quae maximi vel minimi cuiusdam habeat proprietatem. Ad alteram vero classem omnia illa pertinent problemata, quae non ex omnibus, sed iis tantum curuis, quae communi quadam gaudent affectione, maximi minimiue proprietatem habentem determinare iubent. Comprehenduntut hae posteriora omnia in famoso isoperimetrico problemate latiori sensu accepto, cuius solutionem Celeberrimi Geometrae *Iacobus* et *Ioannes Bernoullii*, *Taylorus* et *Hermannus* iam pridem dederunt. Quanquam enim hi Viri inter omnes tantum curuas eiusdem longitudinis, eam, quae maximi minimiue proprietatem habeat, quaesiuerunt; tamen eorum methodi facile ad eas quoque quaestiones extendi possunt, quae quaesitam curuam ex omnibus alia communi proprietate praeditis requirunt. Vt si ex omnibus curuis, quae circa axem conuersae solida generant aequalia, ea inuenienda sit, quae solidum minimae superficiei producat. Tabula VIII.

§. 2. Prioris generis problemata duo potissimum agitata sunt, ad definiendas curuas celerrimi descensus et minimae resistentiae, quae vtique inter omnes prorsus curuas suam proprietatem maximo siue minimo possident gradu. Perspicuum autem est, quae curua inter omnes minimam patiatur resistentiam, vel celerrimum producat descensum, eandem hanc praerogatiuam habere inter omnes curuas eiusdem longitudinis, vel alia quacunque proprietate praeditas. Vicissim vero non valet consequentia, vt, quae inter omnes curuas eiusdem longitudinis est brachystochrona, eadem inter omnes omnino curuas talis sit; Illius enim generis dantur innumerabiles, cum tamen in hoc praeter cycloidem nulla alia satisfaciat. Ex quo colligitur, priorem classem esse quasi speciem posterioris, hancque multo latius patere quam illam.

§. 3. Haec considerans in eam incidi cogitationem, an forte tertia quaedam classis existat, cuius secunda tantum esset aliqua species? et hoc modo progrediendo, an dentur etiam quarta, quinta, pluresque hoc ordine sequentes huiusmodi classes? Atque reipsa ita se rem habere deprehendi: cognoui enim ad has vlteriores classes perueniri, si curuae eae, ex quibus, quae maximi minimiue proprietatem habeat, determinari debet, plures vna habuerint affectiones: vt si inter omnes curuas eiusdem longitudinis et eandem comprehendentes aream ea requiratur, quae circa axem conuersa maximum generet solidum. Aequatio autem, quam pro hac curua adeptus sum, magis erat generalis, quam si curuas mas tantum vel eiusdem longitudinis, vel eiusdem capacitatis posuissem. Atque sine dubio aequatio magis generalis prodiiura fuisset, si ad duas has proprietates adhuc vnam pluresue superaddidissem. Ex quibus, quod forte admodum paradoxum videbitur, intelligitur, quo magis curuarum propositarum numerus restringatur, eo plures quaesito satisfacientes reperiri.

§. 4. Has igitur classes in sequentibus quaestionibus complectar maxime vniuersalibus. I *Ex omnibus prorsus curuis eam determinare, quae proprietatem* A *maximo vel minimo gradu contineat.* II. *Ex omnibus curuis proprietate A aequaliter praeditis, eam determinare, quae proprietatem* B *maximo vel minimo gradu contineat.* III. *Ex omnibus curuis et proprietate* A *et proprietate* B *aequaliter praeditis, eam determinare, quae proprietatem* C *maximo minimoue gradu contineat.* IV. *Ex omnibus curuis proprietatibus* A *et* B et C *singulis aequaliter praeditis, eam determinare, quae proprietatem* D *maximo minimoue gradu contineat.* Simili modo quinta classis curuas quatuor proprietatibus praeditas contemplabitur et ita porro sequentes.

§. 5. Harum quaestionum probe est notanda proprietas ista, quod proprietates curuarum datarum cum ea, quam quaesita habere debet, possint commutari. Ita secunda quaestio, nam in prima haec commutatio locum habere nequit, congruit cum hac: *Ex omnibus curuis proprietate* B *praeditis, eam determinare, quae proprietatem* A *maximo minimoue gradu habeat.* Et tertia quaestio tribus modis potest commutari, prout curua inuenienda vel proprietatem A vel B vel C in summo quodam gradu continere debeat, dum interim curuae propositae duas reliquas proprietates aequaliter possideant. Hoc autem ex modo soluendi apparet, cum ea curua maximi vel minimi habeat proprietatem, quae eandem in situ proximo retinet; id quod etiam in curuas eadem proprietate gaudentes competit.

§. 6. Proprietas vero maximi vel minimi, quam curua in his problematibus quaesita habere debet, ita intelligenda est, ut nulla intra eosdem terminos detur curua, nisi ipsa quaesita, quae praescriptas habeat affectiones, et tam magno vel tam paruo gradu propositam proprietatem contineat. Ita cyclois hanc habet naturam, vt nulla alia curua intra eosdem terminos dari possit, super qua corpus descendens ab altero ad alterum minori tempore perueniat. Et praeter catenariam per duo puncta transeuntem, nulla datur alia curua eiusdem longitudinis et intra eadem duo puncta contenta, cuius centrum grauitatis in inferiore loco sit positum. Assumi vero possunt pro termiuis his duo quaecunquae puncta, per quae curua quaesita transit. Sicque in circulo, qui vt constat, est omnium figurarum capacissima, assumtis duobus quibuscunque punctis AB, non potest inueniri inter ea puncta alia curua eiusdem longitudinis, quae maiorem sectorem quam ABC, comprehendat.

Fig. 1.

§. 7. Ad problemata primae classis soluenda sufficit duo curuae elementa contigua considerare, quemadmodum

dum ex solutionibus, quae passim inueniuntur, lineae brachystohronae, et solidi minimae resistentiae apparet. Secundae vero classis problemata resolui non possunt nisi tria elementa curuae in computum ducantur. Ex hisque collegi ad solutionem problematum ad tertiam classem pertinentium quatuor opus esse curuae elementis. Atque ita porro pro quarta classe quinque elementa, pro quinta autem sex requiruntur et sic deinceps. Ex quo intelligitur solutionem problematum continuo euadere difficiliorem, quo magis iuxta has classes progrediaris. Difficultas quidem in prolixitate calculi tantum consistit, qui eo fit operosior, quo plura elementa curuae debent considerari. Vehementer is autem poterit abbreuiari si debita compendia adhibeantur.

§. 8. Quo autem facilius intelligatur, qua metodo in singulis classibus vti conueniat, iis etiam quas hic non attingam, plurimum iuuabit duas priores etiam classes percurrere. Quanquam hae vero iam satis sunt tractatae, vt vix quicquam noui in iis detegi posse videatur; tamen eas methodo paulisper diuersa et multo latius patente sum persecuturus, quae ad sequentes etiam classes magis est accommodata. Praeterea quoque haec inde nascetur vtilitas, quod quaelibet proprietas, quam curua quaesita habere debet, in prima et secunda classe ad calculum perducta, in reliquis etiam si parum immutetur, possit inseruire: Multo autem maiore labore opus esset hunc calculum in sequentibus demum classibus de nouo perficere.

§. 9.

Fig. 2. §. 9. Oporteat igitur primum inter omnes prorsus curuas determinare eam oa, quae datam proprietatem maximo vel minimo gradu contineat. Ad hoc praestandum sumatur pro lubitu axis OA, ad quem curua quaesita referatur. Accipiantur huius elementa AB, BC aequalia, hisque respondeant in curua ipsa duo elementa ab et bc, quae in applicatis praebeant elementa bM, et cN. Vocetur arcus oa, s; abscissa OA, x; applicata Aa, y. Erunt AB $=$ BC $= dx$, bM $= dy$, et $ab = ds$, Atque porro cN $= dy + ddy$ et $bc = ds + dds$. Deinde manifestum est, quam maximi minimiue proprietatem habeat tota curua oa, eandem habere debere quamuis eius partem; ergo etiam duo elementa ab et bc. Quamobrem non duci poterunt alia duo elementa vt $a\beta$ et βc, inter terminos a et c, quae contineant praescriptam proprietatem maiore vel minore gradu. Cum vero maximi et minimi proprietas in hoc consistat, vt omnibus in situm proximum translatis, proprietas praescripta statum suum tamen retineat; considerari debebunt duo elementa proxima $a\beta$ et βc intra eosdem terminos a et c, contenta. In haec igitur praescripia proprietas aeque competere debebit, ac in priora ab et bc. Ex quo positio elementorum ab et bc hincque ipsa curua quaesita oa innotescet.

§. 10. In hoc autem situ proximo ab transit in $a\beta$, bc in βc; et Mb in Mβ, ac cN in cN$-b\beta$. Crescit igitur elementum ab particula βm, elementum vero bc decrescit particula bn. Similiter bM augetur parti-

particula $b\beta$, et cN minuitur particula $b\beta$. Priores vero particulae βm et bn possunt etiam ad $b\beta$ reduci per similitudinem triangulorum βbm, baM et βbn, cbN, ex qua reperitur $\beta m = \frac{bM.b\beta}{ab}$, et $bn = \frac{cN.b\beta}{ac}$. Situ ergo proximo migrat ab in $ab + \frac{bM.b\beta}{bc}$; bc in $bc - \frac{cN.b\beta}{bc}$; bM in $bM + b\beta$; et cN in $cN - b\beta$, abscissae vero elementa AB et BC interim manent inuariata. Deinde etiam ipsa applicata Bb crescit elemento $b\beta$, et arcus oab particula βm, i. e. $\frac{bM.b\beta}{ab}$. Quae, quanquam saepissime negligi possunt, tamen in genere retineri debent.

§. 11. Cum autem praescripta proprietas, quam curua oa maximo vel minimo gradu continere debet, tanta debeat reperiri in elementis ab, bc, quanta in proximis $a\beta$, βc; in vtroque casu eam proprietatem ad calculum reuocare conueniet, et expressiones resultantes a se inuicem subtrahere; id enim, quod restat aequale erit ponendum nihilo. Singuli vero huius residui termini vel affecti erunt particula $b\beta$, vel βm et bn; quae autem, quia ad $b\beta$ reduci possunt, totum residuum erit per $b\beta$ diuisibile, quo facto prodibit aequatio, in qua nulla prorsus quantitas a puncto β pendens reperietur, sed tota ex x, y et s cum constantibus constabit. Ex hac igitur natura curuae quaesitae determinabitur.

§. 12. Ponamus curuam oa eam habere debere proprietatem, vt in ea $\int x^n ds$ minorem habeat valo-

 rem,

rem, quam in alia quaecunque linea per puncta o et a transeunte. Hanc eandem igitur proprietatem habebunt elementa ab, bc. Quare $OA^n.ab + OB^n.bc$ debebit etiam esse minimum vel aequale huic quantitati $OA^n.a\beta + OB^n.\beta c$. His a se inuicem subtractis restabit haec aequatio $OA^n.\beta m = OB^n.bn$, vel loco βm et bn valoribus inuentis substitutis, haec $\frac{OA^n.bM.b\beta}{ab}$ $= \frac{OB^n.cN.b\beta}{bc}$, siue $\frac{OA^n.bM}{ab} = \frac{OB^n.cN}{bc}$. Quae aequatio ita est comparata, vt posterius membrum sit ipsum prius differentiali suo auctum. Propterea differentiale huius $\frac{OA^n.bM}{ab}$ erit $= o$, ideoque ipsa haec quantitas aequalis erit quantitati constanti, quae sit a^n. In symbolis igitur sequens habebitur aequatio $x^n dy = a^n ds$, ex qua curua quaesita cognoscitur. Perspicitur ex his simul, si talis requiratur curua, vt $\int P ds$, vbi P functionem quamcunque ipsius x designat, in ea sit minimum, prodituram esse aequationem hanc $P dy = A ds$, posito A pro constanti homogenea ipsi P. At si P fuerit functio ipsius y, permutatis coordinatis x et y, prodibit aequatio $P dx = A ds$.

§. 13 Si requiratur vt in curua quaesita sit semper $\int x^m y^n ds$ maximum vel minimum, erit $OA^m.Aa^n.ab + OB^m.Bb^n.bc = OA^m.Aa^n.a\beta + OB^m.B\beta^n.\beta c = OA^m.Aa^n.a\beta + OB^m.B\beta^{n-1}b\beta.\beta c. + OB^m.B\beta^{n-1}.Bb.\beta c$, posito $Bb + b\beta$ loco $B\beta$. Ex qua aequatione oritur ista

OB^m.

$\frac{OB^m . Bb^n . cN . b\beta}{bc} - \frac{OA^m . Aa^n . bM . b\beta}{ab} = n . OB^m .$ $Bb^{n-1} . bc . b\beta - n . OA^m . Aa^{n-1} . ab . b\beta$. Prior autem pars vbique per $b\beta$ diuisa, exprimit differentiale huius quantitatis $\frac{OA^m . Aa^n . bM}{ab}$. Quare symbolis substitutis, prodibit ista aequatio $d . \frac{x^m y^n dy}{ds} = nx^m . y^{n-1} ds$, quae sumendo ibi re ipsa differentiale, et pro dds ponendo valorem $\frac{dyddy}{ds}$, abit in hanc $\frac{xydxddy}{ds^2} + mydy - nxdx = o$. Reduci haec quidem ad differentialem aequationem primi gradus potest; sed ea fit ita complicata, vt, an separari possit, non appareat. Si $\int x^m s^n ds$ debeat esse maximum vel minimum, reperitur haec aequatio $d . \frac{x^m s^n dy}{ds} = nx^m . s^{n-1} dy$, quae porro mutatur in istam $xdxddy + mds^2 dy = o$. Ex quo apparet exponentem n ex calculo euanescere, ita vt eadem prodeat curua, ac si requireretur $\int x^m ds$ pro maximo; ea vero integrando reducitur ad hanc $x^m dy = a^m ds$, vt iam supra est inuentum.

§. 14. Oporteat inuenire curuam, in qua sit $\int \frac{ds^m dy^n}{dx^{m+n-1}}$ maximum vel minimum. Hic statim apparet, quia dx ponitur constans, id tantum effici debere vt $\int ds^m dy^n$ sit minimum vel maximum. Propterea erit $ab^m . bM^n + bc^m . cN^n = a\beta^m . \beta M^n + \beta c^m . (cN - b\beta)^n$. Hinc resultat ista aequatio $nab^m . bM^{n-1} + m .$

$ab^{n-2}.bM^{n+1} = n.bc^m.cN^{n-1} + m.bc^{m-2}.cN^{n+1}$, ex qua iterum concluditur $nab^m.bM^{n-1} + m.ab^{m-2} bM^{n+1}$ debere esse constans. Quamobrem pro curua quaesita haec inuenietur aequatio $nds^m dy^{n-1} + m ds^{m-2} dy^{n+1} = adx^{m+n-1}$, quae semper est pro linea recta. Si vero pro maximo minimoue haec quantitas data fuisset, $\frac{\int x^k ds^m dy^n}{dx^{m+n-1}}$, tum prodiisset ista aequatio $nx^k ds^m dy^{n-1} + mx^k ds^{m-2} dy^{n+1} = a^k dx^{m+n-1}$ Atque generatim si proponeretur ista quantitas $\frac{\int P ds^m dy^n}{dx^{m+n-1}}$ curua quaesita sequenti determinabitur aequatione $nP ds^m dy^{n-1} + mP ds^{m-2} dy^{n+1} = A dx^{m+n-1}$; vbi P denotat functionem ipsius x quamcunque. Si denique id, quod maximum vel minimum esse debet, habuerit hanc formam $s\int x ds$, reperietur eodem modo, scilicet elementis ab et bc ita constituendis vt $\int (ds\int x ds + sxds)$ sit maximum vel minimum, haec aequatio, $sds^2 dy + dx\,ddy(sx + \int x ds) = o$.

§. 15. His autem primariis casibus primae classis expositis, pergo ad secundam, in qua non ex omnibus prorsus curuis, sed iis solum quae communem quandam habent proprietatem, determinari debet curua, quae maximi vel minimi quandam habeat proprietatem. Quaeri igitur oporteat curuam oa, quae inter omnes curuas affectionem quandam A aequaliter continentes, habeat aliam quandam proprietatem B in maximo vel minimo gradu. Ad hoc problema soluendum tria necesse est

est considerare elementa curuae quaesitae. Hancobrem in axe pro lubitu assumto OA accipiantur tria elementa AB, BC, CD, quae sint inter se aequalia, hisque respondeant in curua tria elementa ab, bc, et cd. Ducantur porro, vt ante, applicatae Aa, Bb, Cc, Dd, axique parallelae aM, bN, cP. Dictis ergo OA, x; Aa, y; et oa, s: erit $AB = BC = CD = dx$: $bM = dy$; et $ab = ds$, porroque $cN = dy + ddy$; $bc = ds + dds$; atque $dP = dy + 2\,ddy + d^3y$ et $cd = ds + 2dds + d^3s$. Fig 3.

§. 16. Deinde ducantur alius cuiusdam curuae per puncta a et d transeuntis, elementa $a\beta$, $\beta\gamma$, et γd, ad eadem axis elementa relata. Haec autem ita debent esse comparata, vt proprietatem A aeque contineant ac priora ab, bc, et cd; aliae enim hic curuae non considerantur, nisi in quas proprietas A aequaliter competat. At nihilominus haec elementa infinitis modis inflecti possunt, quia a positione duorum punctorum β et γ pendent. Quocirca altera proprietas B adhuc in computum duci potest; quod, si duo tantum elementa vt in antecedente casu assumta fuissent, fieri non potuisset. At ex natura maximorum et minimorum elementa $a\beta$, $\beta\gamma$, γd proprietatem B aeque complecti debent, ac illa ab, bc, cd, ex quo intelligitur curuam quaesitam oa prodire, si hae duae elementorum triades ita assumantur, vt vtramque proprietatem A et B aequali gradu comprehendant; in hocque simul ratio commutationis proprietatum A et B, cuius mentio iam est facta, consistit.

§. 17. Quando autem elementa ab, bc, cd in situm proximum $a\beta$, $\beta\gamma$, γd transferuntur, augetur ab particula βm, bc minuitur summa particularum $b\mu + c\nu$, et cd iterum augetur particula γn. Similiter bM crescit particula $b\beta$, et cN decrescit summa $b\beta + c\gamma$, atque dP crescit particula $c\gamma$. Possunt vero illa etiam accrementa et decrementa reduci ad $b\beta$ et $c\gamma$ per similia triangula, fit enim $\beta m = \frac{bm.b\beta}{ab}$, $b\mu = \frac{cN.b\beta}{bc}$, $c\nu = \frac{cN.c\gamma}{bc}$ et $\gamma n = \frac{dP.c\gamma}{cd}$. Propter duas autem proprietates A et B propositas, quae communes esse debent vtrique elementorum triadi, prodibunt duae aequationes, quarum singuli termini affecti erunt vel particula $b\beta$ vel $c\gamma$. His igitur eliminatis elicitur aequatio, in qua nullae amplius insunt quantitates a punctis β et γ pendentes, seu symbolis introductis, tota constabit ex x, y, s et constantibus. Ex qua propterea curua quaesita cognoscitur.

§. 18. Duae vero illae aequationes, quae ex consideratione duarum propositarum proprietatum A et B oriuntur, huiusmodi habebunt formam $P.b\beta - Q.c\gamma = o$ et $R.b\beta - S.c\gamma = o$, in quibus quantitates Q et S plerumque ita sunt comparatae, vt sit $Q = P + dP$ et $S = R + dR$. Si vero huiusmodi formam non habuerint, poterunt semper multiplicando vel diuidendo aequationes ad talem reduci. Hoc si factum erit, dico fore semper $P + aR = o$, vbi pro a quantitas constans quaecunque accipi potest. Nam expulsis $b\beta$ et $c\gamma$ oritur ista aequatio $QR = PS$, quae substitutis $P + dP$ et $R + dR$ loco Q et S, abit in hanc $RdP = PdR$

ex

ex qua integrata prouenit $P + aR = o$. Haec aequatio hoc modo producta erit pro ipsa curua quaesita; quare si illae aequationes ex proprietatibus propositis deductae praescripto modo instituantur, in promtu erit in quouis casu aequationem curuae quaesitae exhibere.

§. 19. Sufficiet igitur pro singulis proprietatibus, quae proponi possunt, aequationes dicto modo adornasse vt habeant formam $P.b\beta - (P + dP).c\gamma = o$. Huiusmodi enim duabus coniunctis obtinetur aequatio pro curua quaesita; dummodo eae aequationes ex proprietate, quae omnium curuarum ex quibus quaesita determinanda est, communis esse debet, et ex ea, quam quaesita maximo gradu continere debet, eliciantur. Proposita ergo sit primo quantitas $\int y^n dx$, quae vel communis esse debeat curuarum datarum, vel maxima minimaue in quaesita: vtrumque enim eodem redit. Hanc ob rem ob dx constans, debebit esse $Aa^n + Bb^n + Cc^n = Aa^n + B\beta^n + C\gamma^n$, vnde prodit ista aequatio $B\beta^{n-1}.b\beta - C\gamma^{n-1}.c\gamma = o$, quae praescriptam iam habet proprietatem. Atque in symbolis quantitas ipsi P respondens est y^{n-1}. Si positum fuisset $\int x^n dy$ prodiisset x^{n-1} respondens quantitati P. Et ex assumta quantitate $\int T dx$, designante T functionem quamcunque ipsius y, inuenietur pro littera P haec fractio $\frac{dT}{dx}$. Simili modo prodiisset $\frac{Td}{dy}$ ex $\int T dy$, si T fuerit functio ipsius x.

§. 20. Exprimat $\int x^n ds$ proprietatem, quae in elementis ab, bc, cd, et $a\beta$, $\beta\gamma$, γd aequaliter inesse debeat; erit $OA^n.ab + OB^n.bc + OC^n.cd =$

OA^n

$OA^n . a\beta + OB^n . \beta\gamma + OC^n . \gamma d$. Est autem $a\beta - ab = \frac{bM.b\beta}{ab}$, $bc - \beta\gamma = \frac{cN.b\beta}{bc} + \frac{cN.c\gamma}{bc}$, et $\gamma d - cd = \frac{dP.c\gamma}{cd}$, quare ista prodit aequatio $OA^n . \frac{bM.b\beta}{ab} - \frac{OB^n.cN.b\beta}{bc} - \frac{OB^n.cN.c\gamma}{bc} + \frac{OC^n.dP.c\gamma}{cd} = 0$. Haec iam habet requisitam proprietatem, est enim factor in $b\beta$ ductus cum suo differentiali, aequalis factori per quem $-c\gamma$ est multiplicatum. In hoc igitur casu est $P = \frac{OA^n.bM}{ab} - \frac{OB^n.cN}{bc}$, siue huius negatiuo, quod in symbolis est $d.\frac{x^n dy}{ds}$. Simili modo si propositum fuisset $\int X ds$ et X denotat functionem quamcunque ipsius x, repertum fuisset pro P, $d.\frac{X dx}{ds}$. At si proponatur $\int y^n ds$, tum reperietur pro P, $d.\frac{y^n dy}{ds} - ny^{n-1}ds$. Atque ex hoc porro perspicitur ex quantitate $\int Y ds$, designante Y functionem quamcunque ipsius y, repertum iri pro P hanc quantitatem $d.\frac{Y dy}{ds} - \frac{dY ds}{dy}$.

§. 21. His attente inspiciendis poterimus, quae quantitas ipsi P respondens proditura sit, definire, si generaliores formulae accipiantur. Vt proposita sit formula $\int T dx$, vbi T denotet functionem quamcunque ipsarum x et y, sitque $dT = + M dy + N dx$, inuenitur $P = + M dx$. Atque proposita formula $\int T dy$ manente T vt ante, erit $P = - N dx$. Denique si proposita fuerit formula $\int T ds$, reperietur $P = + M ds - d.\frac{T dy}{ds} = \frac{M dx^2}{ds} - \frac{N dx dy}{ds} - T d.\frac{dy}{ds}$. Dedi hic hos valores, prout

prout calculo immediate inueniuntur, si proprietas praescripta ad elementa ab, bc, cd, accommodata subtrahatur ab eadem ad elementa $a\beta$, $\beta\gamma$, γd accommodata; neque signa mutaui, neque per quantitates constantes vel multiplicaui vel diuisi. Ex hoc non parua nascitur vtilitas ista, quod valor ipsius P etiam inueniri queat, si formula praescripta habeat valorem compositum, vt $\int T ds + \int t dy$. Si enim fuerit $dt = m dy + n dx$, manente dT vt ante, erit P summa eorum, quae pro quolibet membro seorsim inueniuntur, scilicet $P = \frac{N dx^2}{ds} - \frac{N dx dy}{ds} - T d.\frac{dy}{ds} - n dx$.

§. 22. Hi sunt casus, quando in formula proposita quantitas T, quae vel in dx vel dy vel ds est ducta, est functio quaecunque ipsarum x et y. In hisque, vti constat, statim ad aequationem peruenitur, quae formam habet $P.b\beta - (P + dP)c\gamma$. At si etiam s in T contineatur, non peruenitur ad huiusmodi aequationem, sed ea demum ad talem debet reduci. Vt sit proposita haec formula $\int s^n dx$ oportebit esse ob dx constans, $oa^n + ob^n + oc^n = oa^n + o\beta^n + o\gamma^n$, seu $ob^n + oc^n = o\beta^n + o\gamma^n$. Est vero $o\beta = ob + \beta m = ob + \frac{bM.b\beta}{ab}$, et $o\gamma = oc + \beta m - \beta\mu - c\nu = oc + \frac{bM.b\beta}{ab} - \frac{cN.b\beta}{bc} - \frac{cN.c\gamma}{bc}$. Ergo $o\beta^n - ob^n = \frac{n.ob^{n-1}.bM.b\beta}{ab}$

et $o\gamma^n - oc^n = \frac{noc^{n-1}bM.b\beta}{ab} - \frac{n.oc^{n-1}.cN.b\beta}{bc} - \frac{n.oc^{n-1}.cN.c\gamma}{bc}$. Quorum residuorum summa, cum debeat euanescere erit $((ob^{n-1}+oc^{n-1})\frac{bM}{ab}-\frac{oc^{n-1}cN}{bc})$ $b\beta=\frac{oc^{n-1}.cN.c\gamma}{bc}$. Ponatur $\frac{bM}{ab}=q$, erit $\frac{cN}{bc}=q+dq$, et pro ob posito s, erit $oc=s+ds$, habebiturque $(2s^{n-1}q+n-1)s^{n-2}qds-s^{n-1}(q+dq)-(n-1)s^{n-2}qds)b\beta=(s^{n-1}q+s^{n-1}dq+(n-1)s^{n-2}qds)c\gamma$. Ex qua formatur ista aequatio $P.b\beta=P.c\gamma$ $c\frac{sq+sdq+(n-1)qds}{sq-sdq}$. Debet igitur esse $P(\frac{sq+sdq+(n-1)qds}{sq-sdq})=P+dP$, vt prodeat requisitus valor ipsius P. Fiet autem ex ista aequatione $2Psdq+(n-1)Pqds=sqdP$. Huiusque integrale $s^{n-1}q^2=P$, seu $P=\frac{s^{n-1}dy^2}{ds^2}$.

Si proposita fuisset haec formula $\int S\,dx$, vbi S denotat functionem quamcunque ipsius s, prodiisset $P=\frac{dSdy^2}{ds^2}$. Et huic formulae $\int SX\,dx$ respondet valor $P=\frac{XdSdy^2}{ds^2}$. Atque generatim si fuerit T functio quaecunque ipsarum s, y et x; erit posito $dT=P\,ds+M\,dy+N\,dx$, $P=c^{\int\frac{L\,dq}{Lq+M}}(Lq+M)$, scripto q loco $\frac{dy}{ds}$.

§. 23. Propositus nunc sit hic casus, quo $\int T\,ds$ (vbi T vt ante est functio quaecunque ipsarum x, y et s, et $dT=L\,ds+M\,dy+N\,dx$), in duabus curuis proximis debeat esse idem. Erit ergo $T.ab+(T+dT)bc+(T+2dT+ddT)cd=T.a\beta+(T+dT)\beta\gamma+(T+2dT+ddT)\gamma d$. At differentialia dT et ddT in vtroque membro non sunt aequalia, sed differunt pro punctis β et γ. Ponantur autem primo aequalia erit residuum si illud membrum ab hoc subtrahatrahatur $-b\varepsilon.d.Tq+c\gamma d(T+dT)(q+dq)$; posito q loco $\frac{dy}{ds}$. Ponantur iam $a\varepsilon$, $\varepsilon\gamma$ et γd in aequalia ipsis ab, bc, et cd, et quaeratur differentia, quae ex varia significatione dT et ddT oritur. Est vero ipsius Lds, transitu facto ab elementis ab, bc, cd ad elementa $a\beta$, $\beta\gamma$, γd, incrementum $L.\beta m = Lq.b\beta$, ipsius Mdy vero $Mb\beta.Ndx$ non mutatur. Simili modo ipsius $2Lds+d.Lds$ incrementum est $(L+dL)(\beta m-b\mu-c\gamma)=(L+dL)(-dq.b\beta-(q+dq)c\gamma)$, et ipsius $2Mdy+d.Mdy$ incrementum est $-(M+dM)c\gamma$. His singulis incrementis per bc et cd respectiue multiplicatis, cum ante inuento residuo in vnam summam coniectis, et $=o$ positis, prodibit ista aequatio $b\varepsilon(-d.Tq+Lqds+Mds-Ldsdq)+c\gamma(d.(T+dT)(q+dq)-Lqds-Lqdds-qdLds-Mds-Mdds-dMds)=o$. Assumo hic autem bc pro ds, et cd pro $ds+dds$, quia ab non occurrit. Si haec aequatio cum $Pb\varepsilon-(P+dP)c\gamma=o$ conferatur, reperietur $P=c^{\int\frac{Lds^2dq}{Mdx^2-Ndxdy-Tdsdq}}\left(\frac{Mdx^2-Ndxdy-Tdsdq}{ds}\right)$, vbi c significat numerum, cuius logarithmus est 1. Similiter, si formula proposita fuerit $\int Tdy$, reperietur $P=c^{-\int\frac{Lydq}{Ld-Ndxds}}\left(\frac{Ldx^2+Ndxds}{ds}\right)$. Hic si fuerit $N=o$ erit $P=\frac{Ld}{ds}$

§. 24. Consideremus adhuc hanc vnicam formulam $\int X ds^m dx^{1-m-n}$, in qua X functionem tantum ipsius x notat. Neglecto igitur dx vt constante, erit $X.ab^m.bM^n+(X+dX).bc^m.cN^n+(X+$

S 2 $\quad$ 2dX

$2dX+ddX)cd^m.dP^n = X.a\mathfrak{G}^m.\mathfrak{G}M^n + (X+dX)\mathfrak{G}\gamma^m(cN - b\mathfrak{G} - c\gamma)^n + (X+2dX+ddX)\gamma d^m(dP+c\gamma)^n$. Cuius aequationis illa parte ab hac subtracta restabit $-b\mathfrak{G}\, d.X(mab^{m-2}.bM^{n+1} + n.ab^m.bM^{n-1}) + c\gamma d.(X + dX)(mbc^{m-2}.cN^{n+1} + n.bc^m.cN^{n-1}) = o$. Quae aequatio cum iam habeat formam huius $P.b\mathfrak{G} - (P + dP)c\gamma = o$, erit $P = -d.X(mds^{m-2}dy^{n+1} + n.ds^m dy^{n-1}) = -d.X\,ds^{m-2}dy^{n-1}(mdy^2 + nds^2)$. Simili modo si proposita fuisset haec formula $\int T\,ds^m y^n dx^{1-m-n}$, in qua T fuerit functio quaecunque ipsarum x et y, ita vt sit $dT = M\,dy + N\,dx$, proditura fuisset haec aequatio $P = M\,ds^m dy^n - d.T\,ds^{m-2}dy^{n-1}(m\,dy^2 + nds^2)$. Atque generalissime, si in $\int T\,s^n dy^n dx^{1-m-n}$ fuerit T functio quaecunque ipsarum y et s, atque propterea $dT = L\,ds + M\,dy + N\,dx$ erit $P =$

$$c^{\int \frac{L\,ds^m dy^n dq}{M\,ds^m dy^n + Lq\,ds^m dy^n - d.T\,ds^{m-2}dy^{n-1}(mdy^2 + nds^2)}}\,(M\,ds^m dy^n + Lq\,ds^m dy^n - d.T\,ds^{m-2}dy^{n-1}(mdy^2 - nds^2))$$

Haecque est formula generalissima omnes prior in se complectens.

§. 25. Hae formulae inuentae seu valores ipsius P respondentes omnibus, quae proponi possunt proprietatibus, vnum tantum signum summatorium inuoluentibus, quo clarius in conspectum cadant, ac facilius ad casus quosuis possint accommodari, collegi eas, et in sequentem tabulam disposui.

Pro-

Proprietates propositae.	$(q = \frac{dy}{ds}$, et $ddx = 0)$	*Valores litterae* P *respondentes.*
I. $\int T\,dx$, $dT = M\,dy$	- -	$P = M\,dx$.
II. $\int T\,dy$, $dT = N\,dx$	- -	$P = N\,dx$.
III. $\int T\,ds$, $dT = N\,dx$	- -	$P = d.\,Tq$.
IV. $\int T\,ds$, $dT = M\,dy$	- -	$P = d.\,Tq - M\,ds$
V. $\int T\,dx$, $dT = M\,dy + N\,dx$	-	$P = M\,dx$
VI. $\int T\,dy$, $dT = M\,dy + N\,dx$	-	$P = N\,dx$.
VII. $\int T\,ds$, $dT = M\,dy + N\,dx$	-	$P = d.\,Tq - M\,ds$
VIII. $\int T\,dx$, $dT = L\,ds + N\,dx$	-	$P = L\,q^2$.
IX. $\int T\,dy$, $dT = L\,ds + M\,dy$	-	$P = L\,dx^2 : ds^2$

X. $\int T\,dx, dT = L\,ds + M\,dy + N\,dx.\ P = c^{\frac{\int L dq}{Lq+M}}(Lq + M)$.

XI. $\int T\,dy, dT = L\,ds + M\,dy + N\,dx,\ P = c^{-\int \frac{L ds\, dy\, dq}{L dx^2 + N dx ds}}\left(\frac{L dx + N ds}{ds}\right)$

XII. $\int T\,ds, dT = L\,ds + M\,dy + N\,dx,\ P = c^{\int \frac{L ds^2 dq}{M dx^2 - N dx dy - T ds dq}}\left(\frac{M dx^2 - N dx dy - T ds dq}{ds}\right)$

XIII. $\int \frac{T\,ds^m\,dy^n}{dx^{m+n-1}}\ dT = N\,dx$ - $P = d.\,T ds^{m-2} dy^{n-1}(m dy^2 + n ds^2)$

XIV. $\int \frac{T\,ds^m\,dy^n}{dx^{m+n-1}}\ dT = M\,dy + N\,dx,\ P = d.\,T ds^{m-2} dy^{n-1}(m dy^2 + n ds^2) - M ds^m dy^n$

XV. $\int \frac{T\,ds^m\,dy^n}{dx^{m+n-1}}, dT = L\,ds + M\,dy + N\,dx,\ P =$

$$c^{\int \frac{L ds^m dy^n dq}{(Lq+M) ds^m dy^n - d.\,T ds^{m-2} dy^{n-1}(m dy^2 + n ds^2)}}\big((Lq+M) ds^m dy^n - d.\,T ds^{m-2} dy^{n-1}(m dy^2 + n ds^2)\big).$$

§. 26. Ope huius tabulae nunc perfacile erit problemata tum primae tum secundae classis resoluere. Quod quidem ad primam attinet, in qua quaeritur curua, quae

 omni-

omnium maximum vel minimum habeat valorem proprietatis propositae A; ad hanc inueniendam sequens habetur regula: Quaeratur proprietates A in tabula, et functione T ad eam accomodata, accipiatur valor ipsius P respondens, isque ponatur $= o$, quae aequatio erit pro curua quaesita. Vt si quaerenda sit curua brachystochrona debebit tempus descensus, quod per $\int \frac{ds}{\sqrt{x}}$ exprimitur, esse minimum. Continetur autem haec formula in tertia, sitque $T = \frac{1}{\sqrt{x}}$ cui respondet $P = d. \frac{q}{\sqrt{x}}$, qui valor cum debeat esse $= o$ erit $\frac{q}{\sqrt{x}} =$ const. seu $dy\sqrt{a} = ds\sqrt{x}$, et $ads^2 - adx^2 = xds^2$. Fit igitur $ds = \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{a-x}}$ et $s = C - 2\sqrt{a(a-x)}$, ex qua intelligitur, curuam quaesitam esse cycloidem. Ad inueniendam curuam oa quae circa axem Oo ipsi oA normalem rotata, generat solidum, quod in fluido secundum huius axis directionem motum patiatur minimam resistentiam debebit $\int \frac{xdx^3}{ds^2}$ esse minimum, continetur hoc in formula XIII, vbi esse debet $T = x, m = -2, n = o$, Hinc fit $P = d. - \frac{2xdy}{ds^4} = o$. Ergo $xdx^3dy = ads^4$, ex qua curua generans solidum minimae resistentiae determinatur.

§. 27. Ad secundae classis problemata soluenda sequens inseruiet regula. Si ex omnibus curuis proprietate A aequaliter praeditis ea debeat inueniri, quae proprietatem B maximo minimoue gradu contineat; quaerantur proprietates A et B in tabula et sumantur valores ipsius P respondentes, eorumque per quasuis quantitates constantes multiplicatorum summa ponatur aequalis nihilo; quo facto aequatio proueniens exprimet natu-

naturam curuae quaesitae. Hanc regulam nonnullis exemplis illustrare iuuabit. Quaeratur curua oa, quae inter omnes eiusdem longitudinis maximam comprehendat aream; erit $A = s = \int ds$ et $B = \int y dx$. Illi autem ex formula III. respondet $P = dq$. huicque ex prima $P = dx$. Quamobrem haec aequatio $adq = dx$ erit pro curua quaesita. Ex illa vero prodit haec $aq = \frac{a dy}{ds} = x$ seu $dy = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ i. e. $y^2 + x^2 = a^2$. Quae est aequatio ad circulum. Requiratur nunc curua oa, quae inter omnes alias eiusdem longitudinis, si circa axem Oo conuertatur, producat maximum solidum. Erit ergo $A = \int ds$ et $B = \int x^2 dy$: quare pro A erit $P = dq$, et pro B erit $P = 2 x dx$. Ex quibus iuxta regulam, fit $a^2 dq = 2 x dx$. Quae integrata dat $a^2 dy = x^2 ds + b^2 ds$, qua natura curuae elasticae exprimitur. Inuenienda sit porro curua oa, quae circum axem Oo rotata inter omnes alias aequalia solida producentes generet minimam superficiem. Erit ergo $A = \int x x dy$ et $B = \int x ds$. Illi igitur ex Tabula respondet $P = 2 x dx$, huic vero $P = d.xq$. Hinc nascitur aequatio $2 x dx = a d.xq$ seu $x^2 + b^2 = \frac{ax dy}{ds}$. Quae reducitur ad hanc $dy = \frac{(x^2 + b^2) dx}{\sqrt{(a^2 x^2 - (x^2 + b^2)^2)}}$. Haec est ad circulum si $b = o$, et ad catenariam si fiat a infinitum, et $bb = ae$. Quaeratur etiam curua oa, quae inter omnes eiusdem longitudinis habeat centrum suum grauitatis ab axe Oo maxime remotum. Erit ergo $A = \int ds$ et $B = \frac{\int x ds}{s}$. Quia autem s in omnibus curuis ponitur eiusdem quantitatis, poterit pro B accipi $\int x ds$. Sit igitur pro A, $P = dq$ et pro B, $P = d.xq$. Vnde haec oritur aequatio $adq = d.xq$, seu $aq = xq - b$.

Scri-

Scribatur x loco $x-a$, habebitur $xq=b$ seu $xdy=bds$, quae est aequatio pro catenaria.

§. 28. Hic non possum, quin annotem, nisi s fuisset in omnibus curuis eiusdem longitudinis et propterea in B reiici potuisset, problema ex formulis resolui non potuisse, quia huiusmodi forma $\frac{\int x ds}{s}$ in iis non reperitur. Potest quidem ad propiorem reduci sumendo differentiali iterumque praeponendo signo summatorio, vt tota quantitas signum $\int$ habeat praefixum, fitque hoc modo $B=\int\frac{ds\int s dx}{s^2}$: Verum quia haec quantitas $\frac{\int s dx}{s^2}$ in T, quippe quae littera semper quantitatem integratam denotat, non comprehenditur, nihil iuuat ad hoc tabula. Nam quoniam in T non inesse possunt differentialia, facile intelligitur neque integralia inesse posse. Hanc ob rem pro huiusmodi casibus formulae erunt etiam eruendae. Inueni autem, si haec $\int(s^n\int s dx)ds$ fuerit proposita, fore $P=c^{\int\frac{sqdsdx-nds dq\int s dx}{s^2 q dx+s dq\int dx}}(s^{n+1}qdx+s^n dq\int s dx)$. Quae in casu proposito, quo est $n=-2$, dat $P=c^{\int\frac{sq ds dx+2 ds dq\int s dx}{s^2 q dx+s dq\int s dx}}(\frac{sqdx+dq\int s dx}{s^2})$. Haec ad problema postremum soluendum debet aequalis poni adq. Sumtis igitur logarithmis tumque differentialibus, prodibit $\frac{ddq}{dq}=\frac{sqds dx+2ds dq\int s dx}{s^2 q dx+s dq\int s dx}+\frac{2s dq dx+q ds dx+ddq\int s dx}{s q dx+dq\int s dx}-\frac{2ds}{s}$. Quae abit in hanc $\frac{ssq dx ddq}{dq}=2ssdqdx$, haecque per $ssdx$ diuisa in $qddq=2dq^2$. Integrando ex hac oritur $qq dx=-adq$, atque iterum $x=\frac{a}{q}=\frac{ads}{dy}$, seu $xdy=ads$, quae est pro catenaria vt ante.

§. 29. Quo autem generaliores huiusmodi formulas consequamur, sit haec proposita $\int T dx\int V dx$. In

qua

qua T et V denotant functiones quascunque ipsarum x y et s, ita vt sit $dT = L\,ds + M\,dy + N\,dx$ et $dV = G\,ds + H\,dy + K\,dx$. Ex hac formula inuenitur $P = c^{\int \frac{Ldq\int Vdx - TGqdx - THdx}{(Lq+M)\int Vdx}} (Lq+M)\int V\,dx$. Sit nunc haec formula proposita $\int T\,dx \int V\,dy$ in qua T et V praecedentes habent valores, erit $P = c^{\int \frac{Ldq\int Vdy + TdV - TGqdy - THdy}{(Lq+M)\int Vdy + TV}}$ $(TV + (Lq+M)\int V\,dy)$. Atque pro hac formula $\int T\,dx \int V\,ds$ reperitur $P = c^{\int \frac{Ldq\int Vds + TqdV - TGqds - THds}{(Lq+M)\int Vds + TVq}}$ $(TVq + (Lq+M)\int V\,ds)$. Huiusmodi tres inueniuntur etiam, si sumatur $T\,dy$ vel $T\,ds$ loco $T\,dx$. Has autem omnes prout eas inueni, tanquam tabulae continuationem adiicio.

Proprietates propositae. *Valores litterae* P *respondentes.*

XVI. $\int T dx \int V dx$, $P = c^{\int \frac{Ldq(Vdx - TGqdx - THdx}{(Lq+M)\int Vdx}} (Lq+M)\int V dx$

XVII. $\int T dx \int V dy$, $P = c^{\int \frac{Ldq\int Vdy + TdV - TGqdy - THdy}{(Lq+M)\int Vdy + TV}} (TV + (Lq+M)\int$

XVIII. $\int T dx \int V ds$, $P = c^{\int \frac{Ldq\int Vds + TqdV - TGqds - THds}{(Lq+H)\int Vds + TVq}} (TVq + (Lq+M)$

XIX. $\int T dy \int V dx$, $P = c^{\int \frac{Ldqdy\int Vdx - TGqdxdy - THdxdy}{(Lqdy+Mdy)Vdx - dT\int Vdx - TVdx}} ((Lqdy+Mdy)\int V$
$- d.T\int V dx)$

XX. $\int T dy \int V dy$, $P = c^{\int \frac{Ldydq\int Vdy + TdVdy - TGqdy^2 - THdy^2}{(Lqdy+Mdy)\int Vdy + TVdy - dT\int Vdy - VTdy}} (Lqdy+$
$dy)\int V dy + TV dy - d.T\int V dy)$

XXI. $\int T dy \int V ds$, $P = c^{\int \frac{Ldydq\int Vds + TqdVdy - TGqdsdy - THdsdy}{(Lqdy+Mdy)\int Vds + TVqdy - d.T\int Vds}} ((Lqdy+$
$dy)\int Vds + TVqdy - d.T\int Vds)$

XXII. $\int T ds \int V dx$, $P = c^{\int \frac{Ldsdq\int Vdx - TGdsdx - THdsdx}{(Lqds+Mds)\int Vdx - d.Tq\int Vdx}} ((Lqds+Mds)\int Vdx -$
$d.Tq\int Vdx)$

XXIII. $\int T ds \int V dy$, $P = c^{\int \frac{Ldsdq\int Vdy + TdVds - TGqdsdy - THdsdy}{(Lqds+Mds)\int Vdy + TVds - d.Tq\int Vdy}} (Lqds+Mds)$
$V dy + TV ds - d.Tq\int V dy)$

XXIV. $\int T ds \int V ds$, $P = c^{\int \frac{Ldsdq\int Vds + TqdVds - TGqds^2 - THds^2}{(Lqds+Mds)\int Vds + TVqds - d.Tq\int Vds}} ((Lqds+Md$
$\int V ds + TV qds - d.Tq\int V ds)$

Estque vbique $dT = L ds + M dy + N dx$, et $dV = G ds + H dy + K dx$.

§. 30. Quo vsus harum formularum melius intelligatur, quaeri oporteat inter omnes curuas, quas catena cuiuscunque crassitiei formare potest, eam quae habeat centrum grauitatis suum a recta Oo remotissimum. Patet hic alteram conditionem omnes curuas eius-

eiusdem ponere longitudinis, ex qua oritur $P = dq$; alteram respicere distantiam centri grauitatis a recta Oo, quae hac formula exprimitur, $\frac{\int x\,dS}{S}$, vbi S pondus catenae oa repraesentat. Haec vero vt ad formam in tabula contentam reducatur, differentietur, et prodibit $\frac{Sx\,dS - dS\int x\,dS}{SS}$ vel ponendo $\int S\,dx + \int x\,dS$ loco Sx, hoc $\frac{dS\int S\,dx}{SS}$. Quare huius integrale $\int\frac{dS\int S\,dx}{SS}$ erit $= \frac{\int x\,dS}{S}$. Sit $dS = t\,ds$, est enim S functio ipsius s, erit hac expressione cum vigesima secunda comparata $T = \frac{t}{SS}$ et $V = S$. Atque $L = \frac{S\sigma - 2tt}{S^3}$ posito $dt = \sigma\,ds$, $G = t$, et $M = N = H = K = o$. Ex quibus prodit $P = c^{\int\frac{(2tt - S\sigma)ds\,dq\int S\,dx + St^2 q\,ds\,dx}{S^2 tq\,dx + St\,dq\int S\,dx}}\left(\frac{Stq\,dx + t\,dq\int S\,dx}{SS}\right)$, quod ergo aequale debet poni $a\,dq$. Sumantur logarithmi et deinde differentialia, prodibit $2SSt\,dq\,dx + SS\sigma q\,ds\,dx = \frac{SStq\,dx\,ddq}{dq}$, quae per $SStq\,dx$ diuisa et integrata dat $qq\,t\,dx = a\,dq$; quae pro q substituto $\frac{dy}{ds}$, et $\frac{dS}{ds}$ pro t, iterum potest integrari, proditque $S\,dy = a\,dx$. Haecque exprimit naturam catenariae, cuius pondus se habet ad longitudinem vt S ad s. Potuisset quidem eadem aequatio multo facilius inueniri, si in $\frac{\int x\,dS}{S}$ neglexissem denominatorem, quippe qui per priorem conditionem debet in omnibus curuis esse idem. Verum quia hoc fortuito accidit, malui vti methodo directa, praesertim cum constituissem vsum harum formularum ostendere.

§. 31. His de prima et secunda classe expositis multo erit facilius tertiam sequentesque aggredi. Atque a tertia incipiendo, vt iam vidimus, omnia ad eam

T 2 per-

pertinentia problemata in hoc vniuersali comprehenduntur, vt quaeratur curua, quae inter omnes et proprietate A et proprietate B simul aequaliter praeditas contineat proprietatem C maximo, minimoue gradu. Ad huiusmodi problemata soluenda necesse est quatuor
Fig. 4. curuae inueniendae elementa considerare. Hanc ob rem figuram quartam ita institui, vt quatuor elementa, ab, bc, cd, et de exhibeantur, quae vt in praecedentibus figuris ad aequalia axis OA elementa AB, BC, CD et DE referuntur. Totidem igitur erunt etiam applicatarum elementa bM, cN, dP et eQ consideranda. Maneant, vt ante $oa = s$, $OA = x$ et $Aa = y$, erunt $AB = BC = CD = DE = dx$, $bM = dy$, $cN = dy + ddy$, $dP = dy + 2ddy + d^3y$ et $eQ = dy + 3ddy + 3d^3y + d^4y$; itemque $ab = ds$, $bc = ds + dds$, $cd = ds + 2dds + d^3s$, et $de = ds + 3dds + 3d^3s + d^4s$.

§. 32. Ducantur deinde etiam curuae proximae per terminos a et e transeuntis elementa ad eadem axis OA elementa relata $a\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$ et δe. Debebunt ergo quoque ob rationem ante allatam singulae tres propositae proprietates in has duas elementorum quaterniones aequaliter competere. Quamobrem proprietatum propositarum quaelibet et pro elementis ab, bc, cd, de formula exprimatur, et pro elementis $a\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, δe; tumque illa ab hac subtrahatur, et residuum ponatur $= o$. Huiusmodi ergo tres in quouis casu prodibunt aequationes, quae omnes talem habebunt formam $P.b\beta - Q.c\gamma + R.d\delta = o$. Etenim singula tam applicatarum, quam arcuum incrementa vel decrementa possint

possint, vt ante est factum, ad haec $b\beta, c\gamma$, et $d\delta$ reduci. Atque P, Q et R prorsus in s, y et x dabuntur, neque ab hoc assumto situ proximo pendebunt. Quare cum huiusmodi aequationes $P.b\beta - Q.c\gamma + R.d\delta = o$ tres obtineantur, poterunt particulae $b\beta, c\gamma$ et $d\delta$ eliminari; quo facto resultabit aequatio ab illis liberata, haecque determinabit naturam curuae quaesitae $o\alpha$.

§. 33. Saepe et potissimum in casibus simplicioribus accidit, vt sit $Q = P + dP$, et $R = P + 2dP + ddP$. Atque ad huiusmodi formam conuenit aequationem, quoties aliam habuerit, reducere, si fieri potest, vel multiplicanda vel diuidenda ea. Si autem ex omnibus tribus proprietatibus propositis ad tales aequationes peruentum fuerit, facile erit ex iis aequationem pro curua quaesita formare: hoc enim tantum opus est, vt quantitatum in singulis pro P prodeuntium sumantur quaecunque multipla, eorumque summa ponatur $= o$. Nam si tres habeantur huiusmodi aequationes $P.b\beta - (P + dP)c\gamma + (P + 2dP + ddP)d\delta = o$, $p.b\beta - (p + dp)c\gamma + (p + 2dp + ddp)d\delta = o$, et $\pi.b\beta - (\pi + d\pi)c\gamma + (\pi + 2d\pi + dd\pi)d\delta = o$, prodibit eliminatis $b\beta, c\gamma$ et $d\delta$, haec aequatio $pd\pi ddP - \pi dp ddP + \pi dP ddp - P d\pi ddp + P dp dd\pi - p dP dd\pi = o$. Ex qua integrata reperitur $P + mp + n\pi = o$, in qua m et n quantitates quascunque constantes designant. Patet ergo veritas regulae datae.

§. 34. Proposita sit pro quapiam proprietate haec quantitas $\int y^n dx$. Erit ob dx constans $A a^n + B b^n + C c^n$

$C c^n + D d^n = A \alpha^n + B \beta^n + C \gamma^n + D \delta^n$, cuius aequationis, si illud membrum ab hoc subtrahatur, remanebit $n . B b^{n-1} . b \beta - n . C c^{n-1} c \gamma + n . D d^{n-1} . d \delta = o$. Quae cum iam habeat formam praescriptam erit $P = n B b^{n-1} = n y^{n-1}$. Perspicitur porro si assumta fuisset $\int Y dx$, vbi Y denotat functionem quamcunque ipsius y, prodriturum fuisse $P = dY : dy$. Quamobrem formula prima in tabula superiore etiam pro classe hac tertia valebit. Si sit proposita haec formula $\int x^n dy$, erit $OA^n b M + OB^n . c N + OC^n . d P + OD^n . e Q = OA^n (b M + b \beta) + OB^n (c N - b \beta - c \gamma) + OC^n (d P + c \gamma + d \delta) + OD^n (e Q - d \delta)$. Hinc fit $b \beta (OA^n - OB^n) - c \gamma (OB^n - OC^n) + d \delta (OC^n - OD^n) = o$, quae cum habeat formam praescriptam, apparet esse $P = - n x^n dx$, atque simul intelligitur formulam secundam tabulae in hac tertia classe etiam locum habere. Generatim vero videre licet, si in praescripta formula $\int T dx$, $\int T dy$, $\int T ds$, T ab s non pendeat, statim ad aequationem requisitam formam habentem perueniri, atque P eundem retinere valorem, quem habet in tabula praecedente. Valent ergo in tertia classe etiam formulae I, II, III, IV, V, VI, VII, imo quoque XIII, et XIV. Atque non solum in tertia sed etiam omnibus sequentibus classibus subsistunt.

§. 35. Cum itaque dictae formulae in omnibus classibus vsurpari possint, in promtu erit problema cuiuscunque classis propositum resoluere, si modo proprietates, quae in illo occurrunt, in istis tabulae formulis contineantur. Tum vero sequens regula, quae

priori

priori similis est, debet adhiberi; pro singulis scilicet proprietatibus, quae in problemate afferuntur quaerendi sunt valores litterae P ex tabula, eorumque tum sumantur multipla quaecunque et horum summa fiat aequalis nihilo; quo facto aequatio proueniens exponet naturam curuae quaesitae. Vt si inuenienda esset curua, quae inter omnes, quae sunt eiusdem longitudinis, et eandem comprehendunt aream, et circum axem Oo conuersae generant solida aequalia, producat circa hunc eundem axem rotata solidum minimae superficiei. Occurrunt hic quatuor proprietates, quae omnes in designatis formulis continentur. Ex prima, quae dat formulam $\int ds$, fit $P = dq$ ex secunda, quae dat $\int y dx$ fit $P = dx$, ex tertia contenta formula $\int x x dy$, fit $P = x dx$, et ex quarta contenta formula $\int x ds$ fit $P = d.xq$. Quocirca aequatio pro curua quaesita erit $a dq + b dx + 2 c x dx + d.xq = o$, seu haec $aq + bx + cx^2 + xq = f$, hoc est $a dy + bx ds + cx^2 ds + x dy = f ds$, quae innumerabiles curuas in se comprehendit.

§. 36. Antequam autem eas formulas pro tertia classe contemplor, in quibus T etiam ab s pendet, afferam quaedam exempla ad quae soluenda memoratae formulae sufficiunt. Sit igitur propositum curuam inuenire, quae inter omnes eiusdem longitudinis et eandem aream comprehendentes generet circa axem Oo conuersa maximum solidum. Tres proprietates quae hic occurrunt, sunt $\int ds$, $\int y dx$ et $\int x^2 dy$, quibus respondent hi ipsius P valores dq, dx et $x dx$. Ergo curua quaesita hanc habebit aequationem $a dq + b dx$

$+ 2x dx$

$+2xdx=o$ seu $aq+bx+xx=c$, i. e. $ady+b$ $xds+xxds=cds$. Quaeratur nunc inter omnes iterum curuas eiusdem longitudinis et eiusdem areae curua, super qua graue descendat celerrime seu tempore breuissimo. Hic pro prioribus duabus proprietatibus habet P hos valores dq et dx, pro tertia autem, cuius haec est formula $\int\frac{d^2s}{\sqrt{x}}$, hunc d. $\frac{q}{\sqrt{x}}$. Habebitur ergo pro curua quaesita haec aequatio, $adq+dx+b$ d. $\frac{q}{\sqrt{x}}=o$ seu $aq+x+\frac{bq}{\sqrt{x}}=c$, i. e. $ady+xds+\frac{bdy}{\sqrt{x}}=cds$. Inuenienda sit etiam curua, quae inter omnes eiusdem areae, et circa axem Oo rotatas aequalia solida generantes, producat circa eundem axem conuersa solidum, quod in fluido secundum huius axis directionem motum minimam patiatur resistentiam. Priores duae conditiones dant pro P hos valores dx et xdx, posterior vero, cuius formula est $\int\frac{xdx^3}{ds^2}$ hunc d. $\frac{xdy}{ds^4}$. Erit ergo in curua quaesita $adx+2bxdx+$ d. $\frac{xdx^3dy}{ds^4}=o$, seu $ax+bxx+\frac{xdx^3dy}{ds^4}=c$. Quae si ponatur $c=o$, et x augeatur constante quadam vel minuatur, abit in hanc $xds^4=adx^3dy$, quae aequatio est pro curua algebraica, dat enim integrata hanc aequationem quarti ordinis $y^4-2by^3+2x^2y^2-18bx^2y+x^4+27b^2x^2=o$ vel $y^4+6by^3+2x^2y^2+12b^2y^2-10bx^2y$ $+8b^3y-b^2x^2+x^4=o$. Haec etiam prodiisset si a et c fuissent positae $=o$. Ex quo sequitur hanc aequationem dare curuam minimae resistentiae solidum generantem, inter omnes curuas eiusdem capacitatis solida producentes.

§. 37.

§. 37. **Quanquam autem huiusmodi problemata,** quoties formula occurrit, quae in tabula ad talem referenda eſt, in qua T etiam in s determinatur, iuxta datam regulam reſolui nequeunt; quia non habetur valor ipſius P pro hac tertia claſſe: tamen ſaepe fieri poteſt, vt nihilominus facile ſit ſolutionem perficere. Ex collatione enim formularum datas proprietates exhibentium ſaepe eae in alias poſſunt transmutari, quae in definitis formulis contineantur. Vt ſi oporteat inter omnes curuas eiusdem longitudinis et eiusdem areae eam determinare, in qua $\int s\,dx$ ſit maximum vel minimum. Pertinet haec formula $\int s\,dx$ ad octauam, qua vti in tertia et ſequentibus claſſibus non licet. Verum quia $\int s\,dx = sx - \int x\,ds$, atque per primam proprietatem praeſcriptam s in omnibus curuis debet eſſe eiusdem longitudinis, habebit sx valorem conſtantem, adeoque $\int x\,ds$ debebit quoque eſſe minimum vel maximum. Hanc ob rem pro hoc problemate hae tres formulae poterunt recipi $\int ds$, $\int y\,dx$ et $\int x\,ds$, ex hisque ſolutio inueniri. Habebit enim P tres hos valores dq, dx et $d.\,xq$, ex quibus pro curua quaeſita ſequens obtinetur aequatio $aq + bx + xq = c$ ſeu $a\,dy + bx\,ds + x\,dy = c\,ds$. Quae, niſi hoc compendio vſi eſſemus, difficillime eruta fuiſſet. Quando vero huiusmodi reductiones locum habeant, facilius eſt quouis caſu oblato perſpicere, quam per regulam definire.

§. 38. Conſideremus tamen huiusmodi formulas, in quibus etiam s in T ingreditur; ſitque propoſitum vt $\int s^n dx$ in vtroque elementorum quaternione ſit idem. Erit ergo ob dx conſtans $oa^n + ob^n + oc^n + od^n = oa^n$

$+o\beta^n+o\gamma^n+o\delta^n$. Est vero $o\beta^n-ob^n=nob^{n-1}q.b\beta$, $o\gamma^n-oc^n=noc^{n-1}(-dq.b\beta-(q+dq)c\gamma)$ et $o\delta^n-od^n=nod^{n-1}(-dq.b\beta+(dq+ddq)c\gamma+(q+2dq+ddq)d\delta)$. Fit igitur $b\beta(ob^{n-1}.q-oc^{n-1}.dq-od^{n-1}.dq)-c\gamma(oc^{n-1}.(q+dq)-od^{n-1}(dq+ddq)+d\delta(od^{n-1}(q+2dq+ddq)=o$. Et generatim si assumta fuisset haec formula $\int T dx$ significetque T functionem quamcunque ipsius s, ita vt sit $T=L ds$, proditura fuisset aequatio ista $b\beta(Lq-(2L+2dL+ddL)dq)-c\gamma(Lq+qdL-dLdq-Lddq-2dLddq-dqddL-ddLddq)+d\delta(L+2dL+ddL)(q+2dq+ddq)=o$. Hae vero aequationes nullo modo ad talem formam $b\beta.P-c\gamma(P+dP)+d\delta(P+2dP+ddP)=o$ reduci possunt. Quamobrem eae aliter adhiberi non poterunt, nisi vt cum duabus reliquis aequationibus, quas alterae conditiones suppeditant, coniungatur, et re ipsa elementa $b\beta$, $c\gamma$, et $d\delta$ eliminentur. Habeant autem reliquae duae aequationes talem formam, et sint $b\beta.p-c\gamma(p+dp)+d\delta(p+2dp+ddp)=o$ et $b\beta.r-c\gamma(r+dr)+d\delta(r+2dr+ddr)=o$. Illa vero aequatio sit breuitatis gratia $b\beta.A-\gamma.B+d\delta.C=o$. Ex his si eliminentur $b\beta$, $c\gamma$ et $d\delta$ prodibit ista aequatio $A(pdr-rdp+pddr-rddp+dpddr-drddp)-B(2pdr-2rdp+pddr-rddp)+C(pdr-rdp)=o$, vel si ponatur $r=pt$ haec $A(ppdt+ppddt+2pdpdt+pdpddt-pdtddp+2dp^2dt)-B(2ppdt+ppddt+2pdpdt)+Cppdt=o$. Quae determinabit naturam curuae quaesitae. Poterunt autem loco aequationis $b\beta.A-c\gamma.B+d\delta.C=o$, omnes aequationes, quae ex quibuscunque

cunque formulis oriuntur, substitui. Atque hoc modo omnia tertiae classis problemata soluentur, in quibus duae saltem conditiones ad formulas in hac classe locum habentes deducunt.

§. 39. In nostro quidem casu, si problema fuerit propositum, vt inter omnes curuas proprietates A et B habentes ea inueniatur, in qua $\int T dx$ (vbi $dT = L ds$) sit maximum minimumue, atque proprietates A et B ad has aequationes $b\beta . p - c\gamma (p + dp) + d\delta . (p + 2dp + ddp) = o$ et $b\beta . r - c\gamma (r + dr) + d\delta (r + 2dr\, ddr) = o$ reducantur; reperietur pro curua quaesita sequens aequatio, $3Lpdrddq - 3Lrdpddq + pqdrddL - rqdp\, ddL + 2Lrdqddp - Lqdrddp + rqdLddp - 2Lpdqddr + Lqd\,pddr - pqdLddr + 4pdLdrdq - 4rdLdpdq = o$, quae facta substitutione $r = pt$ in hanc abit $Lpqdpddt - 2Lppdqddt - ppqdLddt + 3Lppdtddq + ppqdtddL - Lpq\,dtddp + 2Lqdp^2 dt - 4Lpdpdqdt + 4ppdLdqdt - 2pqdLdpdt = o$. Si altera conditio ponat areas aequales, ita vt sit $p = dx$ et dp et $ddp = o$ prodibit ista aequatio $\frac{ddr}{dr} = \frac{3Lddq + qddL + 4dLdq}{2Ldq + qdL}$. Si praeterea fuerit $T = s$, erit $L = 1$ et dL et $ddL = o$. Quocirca habebitur pro curua quaesita ista aequatio $\frac{2ddr}{dr} = \frac{3ddq}{dq}$, et integrando $dxdr^2 = adq^3$. Si tertia conditio requirat omnes curuas eiusdem longitudinis erit $r = dq$, proueniet igitur haec aequatio $addq^2 = dq^3 dx$ vel $\frac{addq}{\sqrt{dq}} = dq\sqrt{dx}$, quae integrata dat $a\sqrt{dq} = q\sqrt{dx} + b\sqrt{dx}$, seu $\frac{adq}{(b+q)^2} = dx$ atque $x = \frac{a}{b+q} + c = \frac{a+cq}{b+q}$. Quae est eadem, quam pro eodem casu in §. 37. inuenimus.

DE LVNVLIS QVADRABILIBVS, E VARIARVM CVRVARVM COMBINATIONE ORTIS.

AVCTORE *Georgio Wolffg. Krafft.*

§. 1.

Tabula IX. LVnulam in genere vocamus Figuram, duobus arcubus quarumuis curuarum terminatam; occasione sumtâ à Lunula Hippocratis Chii, quae generatur ab intersectione duorum arcuum circularium, quam solam ab antiquis deriuatam ad nos tenemus. Quamuis autem recentiori aetate multa praeclara circa hanc materiam fuerint inuenta: nullas tamen fere alias Lunulas Geometrae examinarunt, quam quae Circulorum sunt progenies. Solus, quantum ego quidem scio, Cel. *Wolffius* Lunulas Cyclico-Parabolicas, hoc est, arcubus Circulari et Parabolico comprehensas, contemplatus est in Actis Lipſ. 1715. pag. 213. Cum vero infinitae dentur Curuae, quae quadrabiles habeant Lunulas: earum quasdam hoc scripto examinare constitui. In quo negotio duplex faciam Lunularum discrimen. Si enim curuae in vno tantum coëant puncto, vt efficiant Lunulas versus vnam partem apertas, eas vocabo Lunulas Apertas, reliquas vero Clausas.

§. 2.

§. 2. Sit igitur Curua BM descripta ex Polo A, posita linea constanti BA; sit praeterea ex eodem Polo A alia Curua descripta BN: quaeritur, qualis, datâ BM, debeat esse altera BN, vt spatium interceptum Lunare BMN sit quadrabile. Ducantur in hunc finem recta AM, et huic alia infinite propinqua Am; centro A, radiis AM, AN, intelligantur descripti arcus circulares ME, NF, ex B demittantur perpendiculares infinite propinquae in AM et Am, quae sint BC et Bc et ponantur $AB = a$, $AM = t$, $AN = z$, $BC = u$, erit ergo $AC = \sqrt{(a^2 - u^2)}$, et ob sectores ANF, AME, AGc similes, est $AG(\sqrt{aa - uu}) : Gc(du) = AM(t) : ME(\frac{t\,du}{\sqrt{(a^2 - u^2)}}) = AN(z) : NF(\frac{z\,du}{\sqrt{(a^2 - u^2)}})$; hinc sector $AMm = \frac{1}{2} AM \times ME = \frac{t^2\,du}{2\sqrt{(a^2 - u^2)}}$; sector AN$n$ ex eadem ratione $= \frac{z^2\,du}{2\sqrt{(a^2 - u^2)}}$, quorum differentia $\frac{(t^2 - z^2)\,du}{2\sqrt{(a^2 - u^2)}}$ est Elementum portionis Lunaris BMN. Assumatur iam Functio ipsius u, quae sit P, talis, vt Pdu integrari possit, et ponatur Elementum modo inuentum $= P\,du$, erit area BMN quadrabilis; sed facta diuisione per du, elicitur valor ipsius $z = \sqrt{(t^2 - 2P\sqrt{aa - uu})}$. ergo dabitur z in meris u, consequenter obtinebitur Curua BN, quae datam habeat conditionem. Fig. 1.

§. 3. Sit Curua data BM Circulus ABEK, cuius centrum G; assumatur punctum quodcunque A pro Polo: quaeritur, qualis debeat esse Curua BN, vt spatium interceptum BNM sit quadrabile. Ducantur Diameter AGE, et demittantur perpendiculares BC, BF, in AM et AE; erit ergo retentis denominati- Fig. 2.

onibus §. 2. assumtis, $AN = \sqrt{(t^2 - 2P\sqrt{aa-uu})}$; vt vero habeatur valor ipsius t in u, considerandum est, quod ductis chordis BM, BE, anguli BMA, BEA, insistunt eidem arcui AB; quare ob rectos C et F, triangula BMC, BEF, erunt similia; vnde vocatis $BF = b$, $EF = c$, habebitur analogia $BC\,(u) : CM\,(t - \sqrt{aa-uu}) = BF\,(b) : EF\,(c)$, hinc $t = \frac{cu + b\sqrt{aa-uu}}{b}$, quo substituto, fit $z = \frac{\sqrt{((cc-bb).u^2 + 2bcu - 2bbP.\sqrt{aa-uu} + a^2b^2)}}{b}$, quae est aequatio generalis omnium Curuarum BN, Circulo BME satisfacientium. Assumatur $P = \frac{cu}{b}$, quo facto $\int P du = \frac{cu^2}{2b}$, et. $z = \frac{\sqrt{((cc-bb).u^2 + a^2b^2)}}{b}$. Itaque
Fig. 3. construatur Hyperbola AM, cuius latus transuersum $AB = 2a$, parameter $= \frac{2ab^2}{c^2-b^2}$, et ductâ in Circulo quacunque rectâ AM ex Polo A, demissâque in hanc perpendiculari BC, applicetur in descriptâ Hyperbola $PM = BC$, atque ad axem coniugatum CF erigatur perpendicularis ME, cui in Circulo fiat aequalis ipsa AN, erit N in Curua BN tali, quae portionem Lunulae BMN efficit quadrabilem, nempe aequalem $\int P du = \frac{cu^2}{2b} = \frac{c}{2b} \times BC^2$, aut, ob $\frac{cu}{b} = CM$, eadem portio erit aequalis triangulo rectilineo BCM. Erunt autem omnes hae Lunulae Clausae. Ad hoc enim requiritur, vt aliquod punctum possibile sit, in quo $t = z$, hoc est $\sqrt{(t^2 - 2P\sqrt{aa-uu})} = t$, siue $u = a$. At si, in valoribus modo inuentis ipsius z aut t, substituatur $a = u$, orietur $z = \frac{ca}{b} = t$; hinc Curua BN Circulum secat in K, vbi AK educitur perpendicularis ad datam AB.

§. 4.

§. 4. Si vero in Circulo dato ABED, BA sit Quadrans Circuli, et BMA semirectus: erit ob BG perpendicularem ad AE, $b = c$, et BC = CM; atque in hoc casu fit $z = a$, per valores praemissos; quare Curua quaesita AN Circulus iterum est, descriptus radio AB; et hoc casu prodit Lunula Hippocratis, cuius portio indefinita BMN = triangulo rectilineo BCM, quemadmodum inuenit Anglus quidam *Ioh. Perks*, in Actis Philos. Angl. 1677, mense Decembri; aut vero etiam, demissa in Diametrum perpendiculari MF, triangulo ABF, vti Illustr. *Tschirnhusio* placuit, in Actis Lips. 1687. m. Sept. Est enim ob semirectos GBA, CBM, aequales, addito communi CBG, angulus MBF = CBA, adeoque triangula rectangula MBF, ABC similia; hinc AB : BC = BM : BF, aut $AG\sqrt{2} : BC = BC\sqrt{2} : BF$, hinc $AG \times BF = BC^2$, quare praedicta triangula sunt aequalia. Patet vero ex inuenta superiori formula ipsius z, simplicissimum hunc esse casum, quem modo examinaui; et aequationes prodire altioris gradus, quas molestum esset examinare, si alius valor ipsius P assumatur. Fig. 4.

§. 5. Sit aequatio curuae datae BM haec, $t^2 = b\sqrt{aa + uu}$, erit curuae quaesitae BN aequatio $z^2 = t^2 - 2P\sqrt{aa - uu} = (b - 2P)\sqrt{aa - uu}$. Ponatur etiam P aequalis constanti $= \frac{b-m}{2}$, erit curuae quaesitae natura $z^2 = m\sqrt{aa - uu}$, quae aequatio cum similis sit datae $t^2 = b\sqrt{aa - uu}$: in hoc casu vtraque curua, data et quaesita, erunt similes, et similiter positae circa Polum A, Tabula X. Fig. 1.

atque

atque $z : t = \sqrt{m} : \sqrt{b}$. Huius autem curuae, $t^2 = b\sqrt{aa-uu}$ aequatio, vti quoque reliquarum, facile mutatur in aliam ad coordinatas orthogonias; vocentur enim assumto axe AB, $BP = x$, $PM = y$, eritque ob triangula MPA et BCA similia, $AM(t) : PM(y) = AB(a) : CB(u)$, hinc $t = \frac{ay}{u}$; porro $AM(t) : AP(a-x) = AB(a) : AC(\sqrt{aa-uu})$; vnde $t = aa-ax . \sqrt{aa-uu}$, qui valores aequati exhibent $\sqrt{(a^2 - 2ax + x^2 + y^2)} = t$, et $\frac{ay}{\sqrt{(a^2-2ax+x^2+y^2)}} = u$, quorum ope aequatio proposita abit in hanc: $(\overline{a-x}^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = ab . \overline{a-x}$. Sed notandum est, talem Lunulam fore Apertam versus B. Nam ab initio, vbi $u = o$, fit $t^2 = ba$, et $z^2 = ma$; in fine vero, vbi $u = a$, fit $t = o$, $z = o$, vnde Lunula terminabitur in puncto A.

Fig. 2. §. 6. Intersecent se duo circuli quicunque, quomodocunque in B et A; ducatur chorda communis AB, cum arbitraria AI; et demissa in eam perpendiculari BC, per centra transeant rectae AE, AH, demissis perpendiculis in easdem BF, BG. Erit positis vt ante $AB = a$, $AD = t$, $AI = z$, $BC = u$, $BF : FE = 1 : m$, $BG : GH = 1 : n$, portio indefinita curuilinea $IBD = \int \frac{(t^2 - z^2)du}{2\sqrt{(a^2-u^2)}}$, sed ob triangula similia rectangula BDC et BEF, nec non BCI et BGH, fit $CB(u) : CD(t - \sqrt{aa-uu}) = BF : FE = 1 : m$; hinc $t = mu + \sqrt{aa-uu}$. Deinde $CB(u) : CI(\sqrt{aa-uu} - z) = BG : GH = 1 : n$, vnde $z = \sqrt{aa-uu} - nu$; substitutis hisce valoribus in formula differentiali allegata, prodit portionis curuilineae BID

BID area $=\frac{m^2-n^2}{2}\int\frac{u^2du}{\sqrt{(a^2-u^2)}}+\overline{m+n}.\int udu$; quare si ponatur $m=n$, hoc est, si Circuli sese intersecantes fuerint aequales, erit in omni situ Circulorum portio BID quadrabilis, et eius area $=mu^2$, quod primo animaduersum est ab Ill. *Hospitalio*, in Comment. Acad. Scient. Paris. Anno 1701, et facile etiam ex Geometria Elementari perspicitur. Diametro BA describatur Circulus, qui transibit per puncta C et F, in hoc ducatur alia Ac, priori infinite propinqua, erit CA$(\sqrt{aa-uu})$: O$c(du)=$BC(u):CO$(\frac{udu}{\sqrt{aa-uu}})$, ob similia triangula BCO et AcO; ergo BC$c=\frac{1}{2}$BC$\times$CO$=\frac{u^2du}{2\sqrt{(a^2-u^2)}}$, consequenter segmentum BPC$=\int\frac{u^2du}{2\sqrt{(a^2-u^2)}}$, et $mm-nn$. $\int\frac{u^2du}{2\sqrt{(a^2-u^2)}}=(mm-nn)$ segm. BPC, adeoque positis Circulis inaequalibus, portio indefinita Lunulae BID $=\frac{m+n}{2}u^2+(mm-nn)$ segm. BPC. Ita eodem modo elicitur, vocata BL$=v$, BNK$=\frac{m+n}{2}v^2+\overline{nn-mm}$. segm. BQL. Hac occasione facilis quoque emergit constructio sequentis Problematis Geometriae Elementaris, cuius forsan alia methodo satis impedita proueniret solutio: nempe, datis Circulis quibuscunque se intersecantibus in A et B, ducere ex A duas rectas AD, AK, vt segmenta intercepta ID, NK, sint aequalia. Est enim AK$=nv+\sqrt{aa-vv}$, AN$=\sqrt{aa-vv}-mv$; AD$=mu+\sqrt{aa-uu}$, AI$=\sqrt{aa-uu}-nu$; quamobrem $(n+m)v=\overline{n+m}.u$, siue $v=u$; accipiendae igitur sunt tantummodo in Circulo AFL duae chordae BL, BC aequales, et per puncta C et L ducendae rectae quaesitae; aut quoque, si eaedem chordae BL, BC,

 su-

ſumantur in ratione quacunque data $1:p$, erunt etiam ſegmenta intercepta ID, NK, in eadem ratione $1:p$.

Tabu'a XI. Fig. 1. §. 7. Sit curua BM Conchois exterior, in qua AB, ED, perpendiculariter ſe interſecantibus, ſit EM $=$ DB. Si iam vocatis, vt antea, $AB=a$, $\overline{BD}=b$, $AM=t$, $BC=u$, $AN=z$, fiat $AC(\sqrt{aa-uu})$: $AB(a)=AD(a-b):AE\left(\frac{a.\overline{a-b}}{\sqrt{(a^2-u^2)}}\right)$ fit valor ipſius $t=b+\frac{am}{\sqrt{(a^2-u^2)}}$, poſito $a-b=m$. Ponatur $P=\frac{abm}{a^2-u^2}$ erit $P\,du=\frac{abm\,du}{a^2-u^2}=\frac{\frac{1}{2}bm\,du}{a+u}+\frac{\frac{1}{2}bm\,du}{a-u}$, vnde $\int P\,du$ $=\frac{1}{2}bm\log.\overline{a+u}-\frac{1}{2}bm\log.\overline{a-u}$, quare Lunula FBMN per Logarithmos erit quadrabilis; et aequatio polaris Curuae FN erit $z^2=\frac{aa.\overline{bb+mm}-bbu^2}{a^2-u^2}$, vel poſita $a=2b$, conſequenter $m=b$, erit aequatio dictae curuae $z=\frac{a\sqrt{2aa-uu}}{2\sqrt{aa-uu}}$; vnde ducta BR perpendiculari ad AB, et aequali ipſi AB, erit $AR=\sqrt{2aa}$, deſcripto praeterea ſemi-circulo ſuper AR, et chorda AS facta $=u$, erit $SR=\sqrt{(2a^2-u^2)}$. Ergo quaeratur tertia proportionalis ad 2AC, SR, et AB, transferatur ea in ductam antea pro lubitu AN ex polo A; erit punctum N in Curua quaeſita BN, quae abſcindet a ſpatio Conchoidali Lunulam BMNF quadrabilem per Logarithmos. Si ponatur $u=o$, erit ab initio Curuae $z=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, et $t=a$, quare $z:t=\sqrt{2}:2=AF:AB$; ſi vero $u=a$, erit $z=\infty$, $t=\infty+\frac{1}{2}a$; quare Lunula haec ex vtraque parte erit aperta, adeoque Lunula tantum improprie ſic dicta.

§. 8.

§. 8. Sit Quadrans Circuli AEB, et Polus assumatur in centro A, erit vocatis $AM = t$, $AB = a$, $BC = u$, $AN = z$, aequatio polaris haec, $a = t$; quare pro Lunula $z^2 = a^2 - 2P\sqrt{aa-uu}$; assumatur $P = \frac{au}{2\sqrt{(a^2-u^2)}}$, quo posito Pdu integrari poterit; atque erit aequatio curuae quaesitae $z^2 = a^2 - au$. Igitur construatur Parabola, cuius parameter $= a = BA$, fiat in ea $BP = u$, erit $PA = a - u$, et $PM^2 = a^2 - au = z^2$; quare facta $AN = PM$, erit N in Curua quaesita. Ab initio Curuae, vbi $u = o$, est $z = a$, quare Lunula haec clausa erit in B; sed in fine fit $z = o$, ergo ibi Lunula est aperta; fit autem $\int Pdu = \frac{aa - a\sqrt{aa-uu}}{2}$. Vel potius, pro inueniendo puncto N, ponatur $BO = BC$, et producatur radius BA in Diametrum BD, deinde radio $\frac{1}{2}OD$ describatur semi-circulus ORD, erit $AR = AN$. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 2.

§. 9. Sit Parabola BM, in qua assumatur polus in Axe A; et $AB = a$, $AM = t$, $BP = x$, $PM = y$; parameter Parabolae $= 4a$, vt punctum A sit in Foco Parabolae; erit $AB(a):CB(u) = AM(t):PM(y)$, hinc $y = \frac{tu}{a}$; nec non $AB(a):AC(\sqrt{aa-uu}) = AM(t):AP(a-x)$, vnde $x = \frac{a^2 - t\sqrt{aa-uu}}{a}$; igitur ob $4ax = y^2$, erit aequatio polaris $4a^4 - 4a^2t\sqrt{aa-uu} = t^2u^2$; vnde deducitur, facta $P = -\frac{4a^5}{u^4}$, et $\int Pdu = \frac{4a^5}{3u^3}$, $z = \frac{2a^2\sqrt{(2a^2-u^2)}}{u^2}$; hinc ab initio, vbi $u = o$, est $z = \infty$, in fine vero, vbi $u = a$, $z = t$. Fig. 4.

Tabula XII. Fig. 1.

§. 10. Ex consideratione Lunulae *Hippocratis* facilis fluit Demonstratio Quadraturae absolutae portionis alicuius in Cycloide, cuius mentio fit in Analysi infinite paruorum Ill. *Hospitalii* §. 99. Sit enim Lunula $\gamma\beta\theta\xi$, et circulo generatore $\gamma\beta\theta$ descripta Cyclois $\gamma\Phi\lambda$; sit radius $\alpha\gamma = r$, Quadrans circuli $\alpha\beta\gamma = Q$, erit $\alpha\Phi = \alpha\beta + \beta\Phi = r + \gamma\beta$, ex natura Cycloidis; hinc $r \times \alpha\Phi = r^2 + r \times \gamma\beta =$ Lunulae $+ 2Q$; porro est $r \times \alpha\Phi = \gamma\beta\Phi + \gamma\delta\Phi + Q$; ergo ob $\gamma\delta\Phi = Q$, quod alias notum est, erit $r \times \alpha\Phi = \gamma\beta\Phi + 2Q$; consequenter aequatis his duobus valoribus ipsius $r \times \alpha\Phi$, erit $\gamma\beta\Phi + 2Q =$ Lunulae $+ 2Q$, aut $\gamma\beta\Phi =$ Lunulae; quae cum sit quadrabilis: etiam spatium Cycloidale ipsi aequale quadraturam admittit absolutam.

Fig. 2.

§. 11. Quaeram nunc alia adhuc via Lunulas Quadrabiles, quae huc redit, vt data Curua AM non quadrabili, quaeratur alia AN itidem non quadrabilis, eius tamen naturae, vt differentia vtriusque areae APM $-$ APN quadraturam admittat. Id sequenti modo fieri poterit. Sit $AP = x$, $PM = y$, $PN = u$, et posita M Functione arbitraria ipsius x, fiat pro Curua quaesita AN, $u = y - \frac{dM}{dx}$. Nam ex hac assumtione erit $udx = ydx - dM$, aut $dM = ydx - udx$, quare integrando $\int ydx - \int udx = M = AMN$. Erit autem porro $\int udx = \int ydx - M$; hinc, nisi Curua APM quadrabilis existat, neque APN talis erit.

§. 12. Si M assumatur huius formae x^m, et data Curua AM sit sectio Conica, hoc est, $y = \sqrt{}(a +$

$bx +$

$bx + cx^2$), prodibit aequatio Curuae quaesitae, $u^2 + 2mux^{m-1} + m^2 x^{2m-2} - cx^2 - bx - a = o$, quae, si etiam debeat esse vna sectionum Conicarum, necesse est, vt sit $2m - 2 = 2$, aut vero $m = 2$; quo subrogato fit: $u^2 + 4ux + (4 - c)x^2 - bx - a = o$; aut etiam $m = 1$, quo facto emergit $u^2 + 2u - cx^2 - bx + 1 - a = o$.

§. 13 Sit Curua data AMB semicirculus, cuius Diameter $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$, erit $y = \sqrt{(ax - x^2)}$; ponatur $M = bx^2$, erit $\frac{dM}{dx} = 2bx$, quare $u = y - 2bx$, aut $u^2 + 4bux + (4bb + 1)x^2 - ax = o$, quae aequatio est ad Ellipsin circa Diametrum AC descriptam, in qua $AC = a\sqrt{4bb + 1}$, et $BC = 2ab$. Erit igitur spatium Lunare indefinitum $AMN = bx^2$, et posita $x = a$, integra Lunula aperta $ANECBMA = ba^2$. Vt determinetur punctum interfectionis G, fiat $u = o$. vnde oritur $AG = \frac{a}{4b^2 + 1}$, ergo si $b = \frac{1}{2}$, hoc casu Ellipsis transibit per centrum Circuli dati. Si assumatur $b = 1$, erit $M = x^2$, $AG = \frac{1}{5}a$, $BC = 2a$, consequenter $Pd = 2x$, et portio Lunaris $ANM = x^2 =$ triangulo APD; addita ergo communi portione Elliptica ANP, trilineum Ellipticum ANPD aequale euadet segmento circulari AMP; poterit ergo hac via, dato cuicunque segmento circulari, inueniri aequale segmentum Ellipticum.

§. 14. Sit Curua data Ellipsis AMB, in qua $AP = x$, $PM = y$, $PN = u$, $AB = a$, parameter $= p$, erit

 $y =$

$y = \frac{\sqrt{(a^2 px - apx^2)}}{a}$; assumatur $M = \frac{1}{2}x^2$, erit $\frac{dM}{dx} = x$, quare orietur $u = y - x$, aut $u^2 + 2ux + \frac{a+p}{a}x^2 - px = o$, quae acquatio rursus est ad Ellipsin, cuius diameter $AC = a\sqrt{2}$, parameter huius Diametri $= \frac{p}{\sqrt{2}}$, et BC, perpendicularis ad Diametrum Circuli, $= a$; inuenitur quoque $AG = \frac{ap}{a+p}$; erit ergo Spatium Lunare $AMN = \frac{1}{2}x^2 =$ triangulo APD.

Fig. 3. §. 15. Sit in semicirculo radius $AC = R$, $AP = x$, $PM = y$, erit arcus $AM = \int \frac{R\,dx}{\sqrt{(2Rx - x^2)}}$. Huius Elementi Integratio fiat per quantitates imaginarias, iuxta methodum Cel. *Ioh. Bernoulli*, hoc est, ponatur $\sqrt{(2Rx - x^2)} = p - x.\sqrt{-1}$, emerget $AM = \int \frac{R\,dp\sqrt{-1}}{R-p} = R\sqrt{-1} \times \log. \frac{R}{R-x-y\sqrt{-1}}$, vt nempe euanescente x, fiat $AM = o$. Quo arcu sic obtento, erit sector $ACM = \frac{AM \times MC}{2} = \frac{R^2\sqrt{-1}}{2} \log. \frac{R}{R-x-y\sqrt{-1}}$, vnde facto $x = 2R$, et consequenter $y = o$, erit semi-circulus $AMD = \frac{R^2\sqrt{-1}}{2} \log. (-1)$.

§. 16. Soluitur exinde Problema elegans a Celeb. *Goldbachio* iam ante plures annos propositum, cuius solutionem Syntheticam dedit, elegantem sane, Celeb. *Daniel Bernoulli* in Exercitat. Mathematicis Anno 1724. editis. Problema tale est, vt in duabus Lunulis ex Circulis inaequalibus, et se inuicem intersecantibus, ortis, resecentur vtrinque, lineis aequalibus, partes aequales, ita vt $AI = HB$, et spatium $AIL = HBL$. Analysis sequens dari potest.
Fig. 4. Sit Circulus quicunque HLI, cuius centrum D, per quod agatur in infinitum Diameter HDF, et huic parallela quaecunque GBEA.

In

In recta GA assumto puncto arbitrario B, fiat $BA =$ Diametro HI; in medio E, ipsius BA, erigatur perpendicularis $EC = 2EF$, deinde centro C, radio CB, describatur nouus Circulus BLA, qui priorem intersecabit in L. Manifestum est, si sector hic ACB fuerit aequalis semi-circulo HLI, Problema solutum esse. Erit enim ob parallelas GA, HF, et $BA = HI$, etiam $AI = BH$, quae est conditio Problematis prima; et quadrilineum $BIAC = \frac{1}{2}$ triang. $BCA = BHI$. Quare ablatis aequalibus BIAC et BHI, hinc a sectore, illinc a semicirculo; ablata quoque portione communi LBI, remanebunt spatia HGLB et LIA aequalia. Pro obtinenda igitur aequalitate sectoris ACB et semicirculi HLI, erit positis radio $HD = r$, et distantia $EF = e$, per §. praec. area semi-circuli $HLI = \frac{r^2\sqrt{-1}}{2}\log.(-1)$. Porro erit $EC = 2EF = 2e$, $BA = HI = 2r$, et consequenter $BE = r$; hinc radius noui Circuli $CB = \sqrt{(r^2 + 4e^2)}$, et $KE = KC - EC = \sqrt{(r^2 + 4e^2)} - 2e$. Substituto igitur pro R §. praec. valore ipsius CB $\sqrt{(r^2 + 4e^2)}$, fiet area sectoris $KCB = \frac{(r^2+4e^2)\sqrt{-1}}{2}\log. \frac{\sqrt{(r^2+4e^2)}}{2e - r\sqrt{-1}}$, aut vero sector $ACB =$ duplo prioris $= (r^2 + 4e^2)\sqrt{-1}\log. \frac{\sqrt{(r^2+4e^2)}}{2e - r\sqrt{-1}}$. Quare, aequatis hisce valoribus, oritur aequatio sequens $\frac{r^2 \log. -1}{2} - (r^2 + 4e^2)\log. \frac{\sqrt{(r^2+4e^2)}}{2e - r\sqrt{-1}} = 0$, quae euanescit, si pro e ponatur valor $\frac{1}{2}r$. Fit enim, factâ hac substitutione, et diuisione per r^2, aequatio haec $l - 1 = 4l\frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{-1}}$, et sumtis numeris absolutis, $-1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{-1}}\right)^4 = \frac{2^2}{(1 - \sqrt{-1})^4} = \frac{4}{-4} = -1$. Sin itaque sumatur $EF = \frac{1}{2}r$, Problemati satisfiet. Erit autem tunc $CB = r\sqrt{2}$, quare ratio radiorum vtriusque Circuli erit vti $1 : \sqrt{2}$.

SPE-

SPECIMEN
DE CONSTRVCTIONE AEQVATIONVM DIFFERENTIALIVM SINE INDETERMINATARVM SEPARATIONE.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

INdeterminatarum separationem in aequationibus differentialibus ideo tam sollicite desiderari, quod ex ea inuenta aequationis constructio sponte fluat, cuique in his rebus exercitato satis perspectum esse arbitror. Integratio praeterea aequationum differentialinm, siquidem succedit, optime indeterminatis separandis instituitur. Quanquam enim innumerabiles dantur aequationes, quarum integrales sine huiusmodi separatione inueniri possunt, cuiusmodi methodum exhibuit Celeb. *Ioh. Bernoulli* in Comm. nostrorum Tom. I. pag. 167; tamen eae aequationes omnes ita sunt comparatae, vt vel per se obuia sit indeterminatarum separatio, vel saltem ex ipsa integratione facile deriuetur. Similis vero est etiam ratio constructionum, quibus adhuc vsi sunt Analystae, sunt enim omnes huiusmodi, vt aequationis, si nullo alio modo indeterminatae a se inuicem separari possunt, separatio tamen ex ipsa constructione proficiscatur. Hanc ob rem nullam adhuc exhiberi posse existimo aequationem differentialem construibilem, cuius separatio omnes vires eluderet.

§. 2.

§. 2. Nuper autem in ellipsi rectificanda occupatus inopinato incidi in aequationem differentialem, quam ope rectificationis ellipsis construere poteram, neque tamen indeterminatarum separatio nequidem ex ipso construendi modo inueniri poterit. Aequatio vero quam obtinui erat haec $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{x dx}{x^2 - 1}$ Riccatianae fere similis, et forte ad separandum aeque difficilis ac haec $dy + y^2 dx = x^2 dx$. Casus hic mihi primum vehementer paradoxus videbatur; at constructione attentius perspecta facile intellexi ex ea non solum separationem indeterminatarum non posse deduci, sed etiam, si alio modo separatio haec succederet, multo maiora sequutura esse absurda; comparationem scilicet perimetrorum ellipsium dissimilium, quae, vt mihi quidem videtur, omnem analysin superat. Constructio autem ipsa perquam est facilis, perficitur enim elongatione infinitarum ellipsium alterutrum axem communem habentium, et hanc obrem consueto per quadraturas construendi modo longe est praeferenda.

§. 3. Proponam igitur totam rem, prout ad eam perueni. Sit ACB quadrans ellipticus, cuius centrum C, semi-axes vero AC et BC. Ponantur $AC = a$ et $BC = b$, et ex A ducatur tangens indefinita AT, ad eamque ex centro C secans quaecunque CT, abscindens arcum $AM = s$, voceturque $AT = t$. Demisso ex M in AC perpendiculo vocetur $CP = x$, erit ex natura ellipsis $PM = \frac{b\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}$; atque ob analogiam $CP : PM = CA : AT$ habebitur $tx = b\sqrt{(a^2 - x^2)}$ seu $x = \frac{ab}{\sqrt{(bb + tt)}}$ Tabula XIII Fig. 1.

Sumatur arcus AM elementum Mm, ducanturque mp, Ct prioribus MP, CT proximae; erit Mm, $ds = \frac{-dx\sqrt{(a^4-(a^2-b^2)x^2)}}{a\sqrt{(a^2-x^2)}}$ et T$t = dt$. Quia autem est $x = \frac{ab}{\sqrt{(b^2+t^2)}}$; erit $dx = \frac{-abt\,dt}{(b^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}$, et $\sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{at}{\sqrt{(b^2+t^2)}}$, et $\sqrt{(a^4-(a^2-b^2)x^2)} = \frac{a\sqrt{(b^4+a^2tt)}}{\sqrt{(b^2+t^2)}}$. Ex his conficitur

$$ds = \frac{b\,dt\,\sqrt{(b^4+a^2tt)}}{(bb+tt)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ad cuius integrale per seriem saltem inueniendum pono $a^2 = (n+1)b^2$, quae prodeat $ds = \frac{b^2\,dt\,\sqrt{((b^2+t^2)+nt^2)}}{(b^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}$, superiusque irrationale sit binomium, cuius alterum membrum est b^2+t^2, alterumque simplex terminus nt^2. Resoluo nunc $\sqrt{((b^2+t^2)+nt^2)}$ per canonem notum in seriem hanc $(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{Ant^2}{(b^2+t^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{Bn^2t^4}{(b^2+t^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Cn^3t^6}{(b^2+t^2)^{\frac{5}{2}}} +$ etc. in qua breuitatis gratia est $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{-1.1}{2.4}$, $C = \frac{1.1.3}{2.4.6}$, $D = \frac{-1.1.3.5}{2.4.6.8}$ etc. Habebitur ergo $ds = \frac{b^2dt}{b^2+t^2} + \frac{Ab^2nt^2dt}{(b^2+t^2)^2} + \frac{Bb^2n^2t^4dt}{(b^2+t^2)^3} + \frac{Cb^2n^3t^6dt}{(b^2+t^2)^4} +$ etc. et integer arcus ellipticus s erit integrale huius seriei.

§. 4. Notandum hic est singulorum horum terminorum integrationem ad primi termini $\int\frac{bbdt}{bb+tt}$ posse reduci, dat vero $\int\frac{bbdt}{bb+tt}$ arcum circuli radii b cuius tangens est t. Hanc ob rem singulos terminos assumto hoc circulari arcu integrabo, vt sequitur: $\int\frac{b^2t^2dt}{(b^2+t^2)^2}$
$= \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}\int\frac{bbdt}{bb+tt} - \frac{1}{2}\frac{b^2t}{bb+tt}, \int\frac{b^2t^4dt}{(b^2+t^2)^3} = \frac{1.3}{2.4}\int\frac{b^2dt}{bb+tt} - \frac{1.3}{2.4}\frac{b^2t}{bb+tt} - \frac{1}{4}\frac{b^2t^3}{(bb+tt)^2}, \int\frac{b^2t^6dt}{(b^2+t^2)^4} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\int\frac{b^2dt}{bb+tt} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{b^2t}{bb+tt} - \frac{1.5}{4.6}\cdot\frac{b^2t^3}{(bb+tt)^2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{b^2t^5}{(bb+tt)^3}$, ex quibus lex integralium reliquorum terminorum iam ſatis apparet.

§. 5. Si quarta perimetri elliptici pars AMB requiratur, oportet facere t infinitum, hocque facto omnes termini algebraici in ſuperioribus integralibus euaneſcunt. Arcus circularis vero $\int\frac{bbdt}{bb+tt}$ poſito $t=\infty$ dabit quartam peripheriae circuli partem, cuius radius eſt b ſeu BC, quam deſignabimus littera e. Erit propterea $\int\frac{b^2dt}{bb+tt} = e$, $\int\frac{b^2t^2dt}{(bb+tt)^2} = \frac{1.e}{2}$, $\int\frac{b^2t^4dt}{(bb+tt)^3} = \frac{1.3.e}{2.4}$, $\int\frac{b^2t^6dt}{(bb+tt)^4} = \frac{1.3.5.e}{2.4.6}$ etc. Prodibit igitur quarta perimetri elliptici pars AMB $= e(1 + \frac{1.An}{2} + \frac{1.3}{2.4}Bn^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}Cn^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}Dn^4 +$ etc.). Atque ſubſtitutis loco A, B, C, D, etc. valoribus debitis habebitur $AMB = e(1 + \frac{1.n}{2.2} - \frac{1.1.3.n^2}{2.2.4.4}$ $\frac{1.1.3.3.5.n^3}{2.2.4.4.6.6} - \frac{1.1.3.3.5.5.7.n^4}{2.2.4.4.6.6.8.8} +$ etc.)

§. 6. Haec ſeries, ſi n eſt valde paruum ſeu $\frac{a^2-b^2}{b^2}$ id quod euenit, quoties ellipſis admodum propinqua eſt circulo, vehementer conuergit; hocque caſu igitur facile ellipſis perimeter inuenitur. Quando vero n eſt quantitas, quam minima, ſeu $a=b+\omega$, denotante ω quantitatem quam minimam, erit $n=\frac{2\omega}{b}$, et AMB $= e(1+\frac{\omega}{2b})$ q. p. Quando vero fit $a=0$, incidit punctum A in C, et euadit $AMB = BC = b$; hoc vero caſu erit $n=-1$, habebitur igitur $\frac{b}{e} = 1 - \frac{1}{2.2} - \frac{1.1.3}{2.2.4.4} - \frac{1.1.3.3.5.}{2.2.4.4.6.6} -$ etc. Summa huius ſeriei ergo exprimit

 ratio-

rationem radii ad quartam peripheriae partem in circulo.

7. Quemcunque igitur habeat valorem littera n in ſerie §. 5. inuenta, ſumma ſeriei ſemper poterit aſſignari ope rectificationis ellipſis, cuius axis maior ſe habet ad minorem, vt $\sqrt{(n+1)}$ ad 1. Hoc cum ita ſe habeat, vſus ſum quoque methodo mea ſummationes ſerierum ad reſolutionem aequationum reducendi, quam nuper exhibui, vt inueſtigarem, a cuius aequationis reſolutione ſummatio inuentae ſeriei pendeat. Quo autem haec methodus facilius poſſit adhiberi pono $n = -x^2$, eritque ſummanda iſta ſeries $1 - \frac{1.x^2}{2.2} - \frac{1.1.3.x^4}{2.2.4.4} - \frac{1.1.3.3.5.x^6}{2.2.4.4.6.6} -$ etc., huius igitur ſummam pono s. Erit ergo differentiando $\frac{ds}{dx} = -\frac{1.x}{2} - \frac{1.1.3.x^3}{2.2.4} - \frac{1.1.3.3.5.x^5}{2.2.4.4.6} -$ etc. Iam denuo per x multiplico, ſumoque differentialia poſito dx conſtante, erit $\frac{d.xds}{dx^2} = -1.x - \frac{1.1.3.x^3}{2.2} - \frac{1.1.3.3.5.x^5}{2.2.4.4} -$ etc. Porro diuido vbique x, contraque per dx multiplico, ſumoque integralia, erit $\int \frac{d.xds}{xdx} = -x - \frac{1.1.x^3}{2.2} - \frac{1.1.3.3.x^5}{2.2.4.4} -$ etc. Denique iterum per dx multiplico, diuido vero per x^3, et ſumo integralia, erit $\int \frac{1}{x^3} \int \frac{d.xds}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1.x}{2.2} - \frac{1.1.3.x^3}{2.2.4.4} - \frac{1.1.3.3.5.x^5}{2.2.4.4.6.6} -$ etc. Haec vero ſeries eſt ipſa initialis per x diuiſa: eius igitur ſumma eſt $\frac{s}{x}$. Quocirca habemus hanc aequationem $\int \frac{1}{x^3} \int \frac{d.xds}{x} = \frac{s}{x}$, quae ſumtis differentialibus abit in hanc $x^2 ds - sxdx = \int \frac{d.xds}{x}$. Differentietur haec denuo prodibit $x^2 dds + xdxds - sdx^2 = \frac{d.xds}{x} = dds + \frac{dxds}{x}$. Huius aequationis reſolutio igitur pendet a ſummatione

matione feriei propofitae, quae cum per rectificationem ellipfis habeatur, aequationis constructio quoque dabitur.

§. 8. Cum in ista aequatione s vbique vnam tenet dimenfionem, reduci ea poterit per methodum meam Tom. III. Comm. infertam ad aequationem fimpliciter differentialem, facta fubftitutione $s = c^{\int p dx}$, vbi c denotat numerum, cuius log. eft 1. Hoc pofito erit $ds = c^{\int p dx} p dx$ et $dds = c^{\int p dx}(dp dx + pp dx^2)$, atque aequatio inuenta transformabitur in hanc $x^2 dp + x^2 p^2 dx + p x dx - dx = dp + pp dx + \frac{p dx}{x}$, quae diuifa per $xx - 1$ mutatur in iftam $dp + pp dx + \frac{p dx}{x} = \frac{dx}{xx - 1}$. Ad hanc fimpliciorem efficiendam pono $p = \frac{y}{x}$, et proueniet $dy + \frac{yy dx}{x} = \frac{x dx}{xx - 1}$. Quae quomodo feparari poffit neque perfpicio, neque conftructionis confideratio eo perducit.

§. 9. Quo autem ipfa constructio huius aequationis ex praecedentibus deducatur, pono illam axis femiffem AC, quem ante littera a denotaui, aequalem r, quia vt variabilis debet confiderari; et quartam perimetri ellipfis partem refpondentem q; erit $-xx = n = \frac{r^2 - b^2}{b^2}$, et $x = \frac{\sqrt{(b^2 - r^2)}}{b}$. Porro erit $q = e s$, eft vero $s = c^{\int p dx} = c^{\int \frac{y dx}{x}}$, quocirca habebitur $q = e c^{\int \frac{y dx}{x}}$, et $lq - le = \int \frac{y dx}{x}$, adeoque $y = \frac{x dq}{q dx} = \frac{(r^2 - b^2) dq}{q r dr}$. Ne autem, quando r maior eft quam b, irrationalia proueniant, reftituo loco xx valorem $-n$, erit $\frac{dx}{x} = \frac{dn}{2n}$, et $\frac{x dx}{xx - 1} = \frac{dn}{2(n+1)}$. His fubftitutis habebitur ifta aequatio

$2\,dy + \frac{y^2 dn}{n} = \frac{dn}{n+1}$, quae construetur sumendis $n = \frac{r^2 - b^2}{b^2}$ et $y = \frac{(r^2 - b^2)dy}{qrdr}$, seu iam inuento n, $y = \frac{2ndq}{qdn}$. Hinc

Fig. 2. sequens nascitur constructio: descripto quadrante elliptico BCA, cuius centrum in C et semi-axis BC constans est puta $= 1$, pono hic 1 loco b, quo facilius homogeneitas possit seruari. Erit ergo semi-axis $AC = r$, ex A erigatur normalis AD $=$ arcui elliptico AB, erit punctum B in curua aliqua BD, cuius constructio hoc modo est in promtu. In ea igitur erit $AD = q$. Sit F huius ellipsis focus, erit $CF = \sqrt{(r^2 - 1)}$ et ad BF ducatur normalis FP, erit $EP = r^2 - 1 = n$. Notetur hic, quando fit $AC < BC$ et focus F in BC incidit, valorem n fieri negatiuum, et ex altera parte puncti C versus B accipi oportere. Deinceps ducatur tangens DT curuae BD in D, erit $AT = \frac{qdr}{dq}$, et iuncta AP, ex T ducatur recta TG normaliter secans AP, si opus est, productam in O et DA productae occurrens in G, erit ob similia triangula PCA et TAG, $AG = \frac{rqdr}{(r^2-1)dq}$ Ipsi AG aequalis capiatur CH et sumta $CI = CB = 1$, ad ductam HI erigatur perpendicularis IK erit $CK = \frac{(r^2-1)dq}{rqdr} = y$. Huic CK fiat aequalis PM, eritque M in curua quaesita BM, huius enim curuae haec est proprietas, vt, dictis CP, n et PM, y, sit $2\,dy + \frac{y^2 dn}{n} = \frac{dn}{n+1}$.

DE

DE SOLVTIONE PROBLEMATVM DIOPHANTAEORVM PER NVMEROS INTEGROS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

QVoties in problematis Diophantaeis soluendis peruenitur ad formulam, in qua plus vna indeterminata non inest, maxime requiruntur numeri integri, qui loco indeterminatae positi quaesito satisfaciant. Hoc vero quando fieri non potest, numeris fractis acquiescere oportet. Obseruatum autem est, si in illa formula indeterminatae maxima dimensio fuerit quadratum et ipsa formula debeat esse numerus quadratus, plerumque infinitos numeros integros problema soluere, qui inter se certa lege cohaereant, et seriem quandam constituant. Sed si formula vel debeat esse cubus aliaue altior potentia, vel si indeterminata plures duabus habeat dimensiones, plus effici non potest, quam vt saltem numeri fracti eruantur.

§. 2. Ita autem huiusmodi problematum omnium ratio est comparata, vt vnum numerum satisfacientem diuinatione inueniri oporteat, ex quo deinceps infiniti alii reperiri queant. Neque enim ad primum detegendum regula potest tradi, cum casu possint occurrere,

qui

qui omnino nullam solutionem admittunt, cuiusmodi est $3x^2+2$, quae formula nunquam fieri potest quadratum. Quamobrem in sequentibus semper ponemus, vnicum tantum casum esse cognitum, quo conditioni problematis satisfiat, atque regulam dabimus, qua ex illo innumerabiles alii elici possint.

§. 3. Proposita igitur sit haec formula ax^2+bx+c, quae debeat esse numerus quadratus. Sintque a, b et c numeri integri, et requirantur quoque numeri integri loco x substituendi. Datus autem sit numerus n, qui loco x positus reddat formulam ax^2+bx+c quadratum. Erit ergo an^2+bn+c numerus quadratus, cuius radix sit m. Iam ad alium numerum satisfacientem ex hoc dato n inueniendum, pono eum esse $\alpha n+\beta+\gamma V(an^2+bn+c)$, huncque valorem loco x substitutum reddere ax^2+bx+c quadratum, cuius radix sit $\delta n+\varepsilon+\zeta V(an^2+bn+c)$. Perspicuum enim est illum numerum loco x substituendum fore rationalem ob an^2+bn+c quadratum, numeros autem integros hoc modo reperiri si modo sit n numerus integer, mox apparebit.

§. 4. Substituatur igitur $\alpha n+\beta+\gamma V(an^2+bn+c)$ loco x in ax^2+bx+c, hocque facto prodibit

$$\begin{array}{l} a\alpha^2n^2+2a\alpha\beta n+a\beta^2+2a\alpha\gamma n \\ a^2\gamma^2n^2+ab\gamma^2n+ac\gamma^2+2a\beta\gamma \\ \quad +b\alpha n \quad +b\beta \quad +b\gamma \\ \quad\quad +c \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} V(an^2+bn+c)$$

Sed

Sed quia huius radicem quadricem ponimus $\delta n + \varepsilon + \zeta \sqrt{(an^2 + bn + c)}$, erit hinc etiam $ax^2 + bx + c$ aequalis sequenti quantitati.

$$\left.\begin{array}{l}\delta^2 n^2 + 2\delta\varepsilon n + \varepsilon^2 + 2\delta\zeta n \\ a\zeta^2 n^2 + b\zeta^2 n + c\zeta^2 + 2\varepsilon\zeta\end{array}\right\} \sqrt{(an^2 + bn + c)}.$$

His duabus formis inter se aequatis, habebuntur sequentes aequationes.

$$a\alpha^2 + a^2\gamma^2 = \delta^2 + a\zeta^2,\ 2a\alpha\beta + ab\gamma^2 + b\alpha = 2\delta\varepsilon + b\zeta^2,$$
$$a\beta^2 + ac\gamma^2 + b\beta + c = \varepsilon^2 + c\zeta^2,\ 2a\alpha\gamma = 2\delta\zeta$$
$$2a\beta\gamma + b\gamma = 2\varepsilon\zeta.$$

Ex quibus elicitur $\delta = \frac{a\alpha\gamma}{\zeta}$ et $\varepsilon = \frac{2a\beta\gamma + b\gamma}{2\zeta}$, et valor ipsius δ in prima aequatione substitutus dat, $\alpha^2\zeta^2 + a\gamma^2\zeta^2 = a\alpha^2\gamma^2 + \zeta^4$, quae in duas resoluitur $\zeta^2 = \alpha^2$, et $\zeta^2 = a\gamma^2$. Harum autem posterior, nisi sit a quadratum, locum habere nequit. Habebimus ergo $\zeta = \alpha$, et secunda aequatio factis substitutionibus hisce similiter in has resoluetur $a\gamma^2 = \alpha^2$, et $\beta = \frac{b(\alpha - 1)}{2a}$, quarum iterum posterior tantum locum habet. His inuentis tertia tandem aequatio dabit $\alpha = \sqrt{(a\gamma^2 + 1)}$: inueniri igitur debet valor pro γ, quo $a\gamma^2 + 1$ fiat quadratum.

§. 5. Sit p iste numerus, qui loco γ substitutus reddat $a\gamma^2 + 1$ quadratum, et huius radix ponatur q; ita vt sit $q = \sqrt{(ap^2 + 1)}$, erit $\alpha = q$, $\gamma = p$, $\beta = \frac{b(q-1)}{2a}$, $\delta = ap$, $\varepsilon = \frac{bp}{2}$ et $\zeta = q$. Ex his colligitur sequens Theorema:

Si $ax^2 + bx + c$ est quadratum casu quo $x = n$, erit quoque quadratum casu, quo $x = qn + \frac{bq - b}{2a} + p\sqrt{(an^2 + bn + c)}$; eiusque quadrati radix erit $apn + \frac{bp}{2} + q\sqrt{(an^2 + bn + c)}$.

Si ergo modo bp per 2 diuidi poteſt, radix quadrati erit numerus integer, et propterea quoque valor ipſius x erit integer, ſeu $bq-b$ diuidi poterit per $2a$.

§. 6. Quemadmodum autem ex n valore ipſius x dato inuentus eſt alius $qn+\frac{bq-b}{2a}+pm$ poſito m loco $\sqrt{(an^2+bn+c)}$; ita hac quantitate tanquam n tractata, quo caſu loco m ſumi debebit $apn+\frac{bp}{2}+qm$, eruetur denuo alius valor, qui loco x ſubſtitutus quaeſito ſatisfacit, ſcilicet hic: $\begin{array}{l} 2ap^2n+bp^2+2pqm, \\ \quad +n \end{array}$ quadrati vero hinc orti radix erit $\begin{array}{l} 2apq+bpq+2ap^2m. \\ \qquad\qquad\quad +m \end{array}$ Conſideretur iam illa quantitas vt n et haec vt m habebitur quartus valor ipſius x ſatisfaciens hic:

$$\begin{array}{l} 4ap^2qn+2bp^2q+4ap^3m \\ +qn+\frac{b(q-1)}{2a}+3pm \end{array}$$

Et radix quadrati reſpondentis erit,

$$\begin{array}{l} 4a^2p^3n+2bp^3+4ap^2qm \\ +3apn+\frac{3pb}{2}+qm \end{array}$$

§. 7. Valores ipſius x ſatisfacientes, vna cum radicibus quadratorum reſpondentium ergo ita ſe habebunt vt ſequitur:

Valo-

Valores ipsius x	Valores $\sqrt{(ax^2+bx+c)}$
I. n	m
II. $qn+pm+\frac{b(q-1)}{2a}$	$apn+qm+\frac{bp}{2}$
III. $2q^2n+2pqm+\frac{b(q^2-1)}{a}$ $-n$	$2apqn+2q^2m+bpq$ $-m$
IV. $4q^3n+4pq^2m+\frac{b(4q^3-3q-1)}{2a}$ $-3qn-pm$	$4apq^2n+4q^3m+2bpq^2$ $-apn-3qm-\frac{bp}{2}$
V. $8q^4n+8pq^3m+\frac{4bq^2(q^2-1)}{a}$ $-8q^2n-4pqm$ $+n$	$8apq^3n+8q^4m+4bpq^3$ $-4apqn-8q^2m-2bpq$ $+m$
etc. etc.	etc.
Huius progressionis haec est lex.	Huius progressionis haec est lex.
term. quicunque A	E
hunc sequens B	F
$2qB-A+\frac{b(q-1)}{a}$	$2qF-E$

Hae igitur progressiones, quousque libuerit exiguo labore continuantur.

§. 8. Perspicitur ex his formis alternos adminimum terminos efficere ax^2+bx+c numerum quadratum integrum; atque omnia omnino quadrata fieri numeros integros si fuerit bp numerus par. Omnes autem ipsius x valores erunt numeri integri, si $b(q-1)$ diuidi poterit per $2a$; sin vero hoc non fuerit, saltem alterni ipsius x valores erunt numeri integri, nam $qq-1$ i.e. ap^2 semper diuidi poterit per a, si quidem, vt ponimus p et q sint numeri integri. Praeterea

terea notandum est in terminis istis etiam m negatiue accipi posse, qua ratione numerus solutionum quandoque duplicatur.

§. 9. Intelligitur etiam, si a sit numerus quadratus, solutionem in numeris integris exhiberi non posse, nisi forte ax^2+bx+c vel ipsum est quadratum vel numero quadrato fieri potest aequale. Hanc ob rem exclusimus supra eos casus, quibus a erat quadratum, quia hic tantum de numeris integris problema soluentibus praecepta tradere instituimus. Nam si a est quadratum; nullus numerus integer potest exhiberi, qui loco p positus efficiat ap^2+1 quadratum, praeter o. Hoc vero casu omnes valores ipsius x manent n, nullusque ergo alius, nisi is qui diuinatione est inuentus, eruitur.

§. 10. Quoties autem a non est numerus quadratus, semper numerus integer potest assignari, qui loco p positus efficiat ap^2+1 quadratum. Quamobrem his casibus, si unicum casum elicuerimus, quo ax^2+bx+c fit quadratum; simul quoque casus infinitos exhibere poterimus, qui ax^2+bx+c in quadratum transmutent. Proposita igitur formula ax^2+bx+c hoc erit agendum: primo coniectura detegi debebit valor ipsius x in integris, qui reddat ax^2+bx+c quadratum. Deinde etiam quaeri debet valor ipsius p, quo ap^2+1 etiam fiat quadratum. Hisque inuentis ope progressionum inuentarum casus infiniti innotescent.

§. 11.

§. 11. Si c est quadratum, nempe $= dd$; statim apparet casus, quo $ax^2 + bx + d^2$ est quadratum, is enim est si $x = o$. Ponamus ergo $n = o$, eritque $m = d$, et valores ipsius x satisfacientes constituent hanc seriem: o, $dp + \frac{b(q-1)}{2a}$, $2dpq + \frac{b(q^2-1)}{a}$ - - - - - - - - A, B, $2q$B $-$ A $+ \frac{b(q-1)}{a}$. Quadratorum autem, quae hinc generantur, radices erunt: d, $dq + \frac{bq}{2}$, $d(2q^2-1) + bpq$, - - - - - - - - - - E, F, $2q$F $-$ E. Harum serierum lex, vt et priorum (§. 7.) perspicua est, sunt enim omnes recurrentes, seu quiuis terminus ex duabus praecedentibus est compositus.

§. 12. Si $b = o$ et $d = 1$, vt habeatur haec forma $ax^2 + 1$, ad quam, vt ex praecedentibus apparet, generalis $ax^2 + bx + c$ maximam partem reducitur. Huius ergo valores ipsius x respondentes in hac serie progrediuntur: o, p, $2pq$, $4pq^2 - p$, - - - - - A, B, $2q$B $-$ A, Radices vero quadratorum productorum erunt sequentes; 1, q, $2q^2 - 1$, $4q^3 - 3q$, - - - - - fit quadratum constat, huiusmodi numeri infiniti habe- E, F, $2q$F $-$ E. Si ergo vnicus casus p, quo $ap^2 + 1$ sit quadratum constat, huiusmodi numeri infiniti habebuntur, qui in tractatione generalis formulae $ax^2 + bx + c$ loco p et q collocari possunt.

§. 13. Quo autem haec methodus ad quosuis casus possit accommodari, videamus primo, quos numeros pro quolibet ipsius a valore literis p et q tribui oporteat. Debet autem p talis esse numerus qui $ap^2 + 1$ reddat quadratum, huiusque radix erit q. Perspicuum quidem est, si vnicus pro p habeatur valor idoneus, simul quoque infinitos haberi: attamen hic vnicum duntaxat eumque minimum praeter 0 adhiberi conuenit. Nam reliqui sequentes, qui sunt $2pq, 4pq^2-p$, etc. solutionum numerum non multiplicant, cum valores tantum sequentes ipsius x in §. 7. praebeant. Minimus autem ipsius p valor dabit omnes numeros ipsius x, satisfacientes, quod maiores non faciunt.

§. 14. Intelligatur igitur, quod si fuerit $a = e^2 - 1$, minimum ipsius p valorem fore 1, ipsiusque q, e. Deinde si fuerit $a = e^2 + 1$, tum esse $p = 2e$, et $q = 2e^2 + 1$. Atque si sit $a = e^2 \pm 2$, erit $p = e$, et $q = e^2 \pm 1$. Huiusmodi casus infiniti alii possunt definiri, quorum ingens numerus hoc continetur theoremate: si sit $a = \alpha^2 e^{2b} \pm 2\alpha e^{b-1}$, erit $p = e$, et $q = \alpha e^{b+1} \pm 1$ vbi pro α etiam numeri fracti accipi possunt, dummodo illi per e^{b-1} multiplicati in integros transmutentur. Simili modo etiam si sit $a = (\alpha e^b + \beta e^\mu)^2 + 2\alpha e^{b-1} + 2\beta e^{\mu-1}$, erit $p = e$, et $q = \alpha e^{b+1} + \beta e^{\mu+1} + 1$. Atque etiam si sit $a = \frac{1}{4}\alpha^2 k^2 e^{2b} \pm \alpha e^{b-1}$, erit $p = ke$, et $q = \frac{1}{2}\alpha k^2 e^{b+1} \pm 1$.

§. 15. Quoties igitur a est numerus, qui in istis formulis contineatur, statim apparet valor ipsius p et q. At si a huiusmodi fuerit numerus, qui nullo modo ad illas formulas potest reduci, peculiaris ad inuenienda p et q adhibenda est methodus, qua olim iam vsi sunt *Pellius* et *Fermatius*. Haecque methodus est vniuersalis, et aeque succedit, quemcunque numerum denotet a. Praeterea etiam ideo hic potissimum

mum est commendanda, quod minimum ipsius p valorem, qui hoc loco requiritur, exhibeat.

§. 19. Methodus haec extat descripta in operibus *Wallisii*, et hanc ob rem eam hic fusius non expono. Operandi tamen modum in vnico exemplo ostendisse iuuabit, cuius inspectio ad quaeque alia soluenda perducet. Oporteat nimirum determinari minimum ipsius p valorem, quo $31p^2+1$ fit quadratum. Ad hoc efficiendum sequens instituitur calculus.

$\sqrt{(31p^2+1)}=q$. Ergo $q>5p$, ponatur itaque $q=5p+a$

$6p^2+1=10ap+a^2$, $\quad p=\frac{5a+\sqrt{(31a^2-6)}}{6}$, $\quad p=a+b$

$5a^2=2ab+6b^2+1$, $\quad a=\frac{b+\sqrt{(31b^2+5)}}{5}$, $\quad a=b+c$

$3b^2=8bc+5c^2-1$, $\quad b=\frac{4c+\sqrt{(31c^2-3)}}{3}$, $\quad b=3c+d$

$2c^2=10cd+3d^2+1$, $\quad c=\frac{5d+\sqrt{(31d^2+2)}}{2}$, $\quad c=5d+e$

$3d^2=10de+2e^2-1$, $\quad d=\frac{5e+\sqrt{(31e^2-3)}}{3}$, $\quad d=3e+f$

$5e^2=8ef+3f^2+1$, $\quad e=\frac{4f+\sqrt{(31f^2+5)}}{5}$, $\quad e=2f-g$

$f^2=12fg-5g^2+1$, $\quad f=6g+\sqrt{(31g^2+1)}$

Tamdiu scilicet hae operationes continuantur, quoad in media columna perueniatur ad $\sqrt{(31g^2+1)}$ eiusdem formae, quam habuit proposita $\sqrt{(31p^2+1)}$. Perspicuum iam est si ponatur $g=0$ fore $f=1$. Hincque retrogrediendo habebitur: $e=2$, $d=7$, $c=37$, $b=118$, $a=155$, $p=273$, atque $q=1520$.

§. 17. Quo autem non tanto opus sit labore ad valores ipsarum p et q inueniendos pro dato numero a, sequentem tabulam annexere visum est, in qua pro singulis valoribus ipsius a exhibentur minimi numeri, qui loco p substituti reddant ap^2+1 quadratum.

$a.$

a.	*p.*	*q.*	*a.*	*p.*	*q.*
2.	2.	3.	37.	12.	73
3.	1.	2.	38.	6.	37
5.	4.	9.	39.	4.	25
6.	2.	5.	40.	3.	19
7.	3.	8.	41.	320.	2049
8.	1.	3.	42.	2.	13
10.	6.	19.	43.	531.	3482
11.	3.	10.	44.	30.	199
12.	2.	7.	45.	24.	161
13.	180.	649.	46.	3588.	24335
14.	4.	15.	47.	7.	48
15.	1.	4.	48.	1.	7
17.	8.	33.	50.	14.	99
18.	4.	17.	51.	7.	50
19.	39.	170.	52.	90.	649
20.	2.	9.	53.	9100.	66249
21.	12.	55.	54.	66.	485
22.	42.	197.	55.	12.	89
23.	5.	24.	56.	2.	15
24.	1.	5.	57.	20.	151
26.	10.	51.	58.	2574.	19603
27.	5.	26.	59.	69.	530
28.	24.	127.	60.	4.	31
29.	1820.	9801.	61.	226153980.	1766319049
30.	2.	11.	62.	8.	63
31.	273.	1520.	63.	1.	8
32.	3.	17.	65.	16.	129
33.	4.	23.	66.	8.	65
34.	6.	35.	67.	5967.	48842
35.	1.	6.	68.	4.	33

§. 18. Hic statim occurrit modus perfacilis extrahendi quam proxime radicem quadratam ex numero quocunque non quadrato a. Quia enim est $ap^2+1 = q^2$, erit $\sqrt{a} = \frac{\sqrt{(q^2-1)}}{p}$, et, si q sit numerus valde magnus, erit $\sqrt{a} = \frac{q}{p}$ quam proxime. Sed loco p possunt poni singuli termini seriei $0, p, 2pq, 4pq^2-p, \ldots A, B, 2qB-A$, et loco q singuli termini respondentes seriei huius $1, q, 2q^2-1, 4q^3-3q \ldots E, F, 2qF-E$ (§. 12.). Sit huius seriei terminus indicis $i = Q$ et illius terminus, cuius index etiam i est $= P$, erit $\sqrt{a} = \frac{Q}{P}$. Quia vero, quo magis continuantur hae series, maiores quoque fiunt termini Q; eo propior reperietur $\sqrt{a}$ sumendis terminis serierum a primo longius distantibus. Sit exempli gratia $a = 6$, erit $p = 2$ et $q = 5$, seriesque sibi inuicem subscribantur vt sequitur, posteriore loco superiore posita:

$1, 5, 49, 485, 4801, 47525, 470449, 4656965$, etc.
$0, 2, 20, 198, 1960, 19402, 192060, 1901198$, etc.

Sumtis igitur vltimis terminis, erit $\frac{4656965}{1901198}$ ita propinquum radici quadratae ex 6, vt plus eam non excedat, quam hac fractione $\frac{1}{2\cdot(1901198)^2\sqrt{6}}$. Simili modo patet radicem quadratam ex 61 fore proxime aequalem $\frac{1766319049}{226153980}$. Quae quidem radix vera aliquantulum maior est, sed excessus est minor quam $\frac{1}{2(226153980)^2\sqrt{61}}$.

§. 19. Quaerantur omnes numeri triangulares, qui sint simul quadrati; debebit $\frac{x^2+x}{2}$ esse quadratum. Quadratum igitur quoque erit $2x^2+2x$, ex quo fit, collatione cum formula ax^2+bx+d^2 (§. 11.) instituta $a = 2$, $b = 2$, $d = 0$. Sed quia est $a = 2$, erit ex tabula

bula

bula superiore $p=2$ et $q=3$. Vnde loco x substitui debebunt sequentes valores 0, 1, 8, 49, 288, 1681, 9800, etc. quo $\frac{x^2+x}{2}$ fiat quadratum. Quadratorum autem hinc ortorum radices tenebunt hanc seriem, 0, 1, 6, 35, 204, 1189, 6930, etc. Vel quadrata, quorum radices continentur in hac serie, erunt numeri triangulares. Seriei quidem huius posterioris termini sunt duplo maiores, si formentur ex serie generali d, $dq + \frac{bp}{2}$, $d(2q^2-1)+bpq$ etc. sed quia hi termini sunt radices ex $2x^2+2x$, debebunt diuidi per 2, quo habeantur radices ex $\frac{x^2+x}{2}$.

§. 20. Numeri polygonales l laterum exprimuntur hac formula generali $\frac{(l-2)x^2-(l-4)x}{2}$, in qua x denotat radicem numeri polygonalis. Quo ergo huiusmodi numerus polygonalis sit quadratum, oportet $2(l-2)x^2-2(l-4)x$ esse quadratum. Statim autem vnus casus apparet, quo quaesito satisfit, scilicet si $x=0$; fit enim ipsa formula $=0$. Quamobrem habebimus $n=0$ et $m=0$, et formula cum generali ax^2+bx+c comparata prodit $a=2(l-2)$ et $b=-2(l-4)$, atque $c=0$. Fiat igitur $2(l-2)p^2+1=q^2$, erunt ipsius x valores, quibus $2(l-2)x^2-2(l-4)x$ seu huius pars quarta $\frac{(l-2)x^2-(l-4)x}{2}$ i. e. ipse nnmerus polygonalis fit quadratum, sequentes, 0, $\frac{-(l-4)}{2(l-2)}(q-1)$, $\frac{-(l-4)}{(l-2)}(q^2-1)$ ------- A, B, $2qB-A-\frac{(l-4)}{l-2}(q-1)$. Qui quidem numeri omnes, si $l>4$, sunt negatiui, attamen affirmatiui habebuntur valores ipsius x sumto q negatiuo, tum enim alterni termini erunt affirmatiui. Deinde etiam

etiam si inuentus sit numerus negatiuus pro x, qui sit $-k$, poterit numerus affirmatiuus dari, qui eundem numerum polygonalem producat, erit nempe $x = k + \frac{l-4}{l-2}$, sed nisi sit $\frac{l-4}{l-2}$ numerus integer, hi numeri affirmatiui fiunt fracti, quos hic excludimus. Hanc ob rem alternis terminis superioris seriei posito $-q$ loco q contenti esse debemus. Radices vero quadratorum $2(l-2)x^2 - 2(l-4)x$ hic [illegible] tenebunt hanc progressionem, 0, $(l-4)p$, $2(l-4)pq$, - - - - - - - E, F, $2qF - E$.

§. 21. Quo autem non alii numeri, nisi affirmatiui et integri reperiantur, alium casum, quo $2(l-2)x^2 - 2(l-4)x$ fit quadratum, erui oportet, qui erit, si $x = 1$; prodibit enim 4. Hanc ob rem ponatur $n = 1$ et $m = 2$, quo facto habebuntur pro x valores sequentes: 1, $q + 2p - \frac{(l-4)}{2(l-2)}(q-1)$, $2q^2 - 1 + 4pq - \frac{(l-4)}{l-2}(q^2-1)$, - - - - - - A, B, $2qB - A - \frac{(l-4)}{l-2}(q-1)$. Radices autem quadratae ex $\frac{(l-2)x^2 - (l-4)x}{2}$ progredientur in hac serie, 1, $\frac{lp}{2} + q$, $lpq + 2q^2 - 1$, - - - - - - - - E, F, $2qF - E$. Quo autem omnes ipsius x valores sint numeri integri, non quidem loco q minimum valorem, sed eum, qui reddat $\frac{l-4}{2(l-2)}(q-1)$ numerum integrum seligi conuenit, id quod semper fieri poterit. Vt si quaerantur numeri pentagonales quadrati, erit $l = 5$, et $a = 6$, atque q erit numerus ex hac serie 1, 5, 49, etc. et ipsius p valores respondentes erunt 0, 2, 20, etc. Quo igitur $\frac{(l-4)}{2(l-2)}(q-1) = \frac{1}{6}(q-1)$ sit numerus integer, sumi debet $q = 49$, et $p = 20$. Radices ergo numerorum pentagotagonalium, qui sunt quadrati, erunt, 1, 81, 7921, ------ A, B, 98 B − A − 16; qui numeri etiam in superiore serie (§. 20.) continentur, si accipiatur $q = -5$, erunt enim termini alterni affirmatiui. Horum autem numerorum pentagonalium radices quadratae erunt 1, 99, 9701, ------ E, F, 98 F − E.

§. 22. Quia est $2(l-2)x^2 + 1 = q^2$, manifestum est ex praecedentibus, si fuerit $2l-4$ quadratum, nullum numerum integrum loco p substitui posse. Hanc ob rem vel omnes numeri polygonales erunt quadrati, vel tantum nonnulli. Prius euenit, si $l = 4$; nam omnes numeri tetragonales sunt simul quadrati. Posterius vero si sit $2l-4 = 16$ seu 36, seu 64 etc. his enim casibus alii non erunt quadrati, nisi 0 et 1. Si $2l-4 = 16$, erit $l = 10$, ideoque numeri polygonales erunt decagonales, quorum forma est $4x^2 - 3x$. Nullusque numerus decagonalis est quadratus praeter 0 et 1 in integris.

DE

DE QVADRATVRA CVRVARVM ALGEBRAICARVM, QVARVM AEQVATIONES LOCALES COORDINATAS SIBI INVICEM PERMIXTAS INVOLVVNT.

AVCTORE

Iacobo Hermanno.

VIr Celeberr. *Ioh.Craige* inter plura, quae ad scientiae profectum conducunt, perelegantem methodum tradidit, in Tractatu suo de *Calculo Fluentium* 1713. Londini impresso, quadrandi Figuras curuilineas, quarum aequationes locales sunt formae sequentis $y^m = ax^n + bx^p y^q + b2 x^r y^s + b3 x^t y^v +$ etc. vbi indeterminata y ordinatas curuae, x abscissas, $a, b, b2, b3$, etc. coefficientes, et m, n, p, q, r, s, etc. exponentes significant.

Assumit enim aream quaesitam aequalem seriei cuidam indefinitae huius formae, $\int y dx = Axy + Bx^f y^g + Cx^h y^i + Dx^k y^l +$ etc. in qua, tum coefficientes A, B, C, D, etc. tum etiam exponentes f, g, h, i, etc. eliciendi sunt ex aequatione curuae proposita. Hunc in finem geminum valorem elicit elementi dy, in x, y, dx et constantibus, vnum ex serie modo adducta, sed differentiata, alterum ex aequatione curuae itidem differentiata; duas has diuersas aestimationes elementi dy, deinceps aequat, indeque nouam aequationem terminis finitis expressam deriuat, quam Ipse *resultantem* vocat,

 dico

dico *terminis finitis*; nam aequatio reſultans ſemper diuiſibilis eſt per dx, et ſinguli termini poſt hanc diuiſionem emergentes fiunt finiti, eorum tamen numerus eſt indefinitus. Ex comparatione exponentium terminorum, et annihilatione coefficientium aequationis reſultantis, deinceps elicit quantitatem exponentium et coefficientium ſeriei inuentae aream curuae quaeſitam definientis, quae ſubinde abrumpens eſt, cum Curua quadrabilis eſt, ſaepius vero in infinitum excurrit. In ſectione IV. huius Libri plura exempla curuarum abſolute quadrabilium affert, quibus ſerierum ſuarum vſum in caſibus particularibus illuſtrat.

Cum primum elegantem hanc methodum expoſitam vidiſſem in laudato opere, curioſitas animum meum inceſſerat indagandi, annon eiusmodi curuarum Quadraturae, ad quadraturas aliarum curuarum reuocari poſſent, quarum areae darentur per quantitates vnicam tantum indeterminatam inuoluentes; inueni rem ſatis facile ſuccedere in curuis Trinomialibus, ſed in Quadrinomialibus, aut altioribus, certam inter exponentes terminorum relationem, quod idem quoque in *Craigiana* methodo accidit, praeſupponi debere.

I. Ad id in curuis Trinomialibus oſtendendum, diuerſae ſuppetunt viae; nam primo ſi ponamus $y = M^{\alpha} N^{\beta}$, et $x = M^{\gamma} N^{\delta}$, vbi M et N ſint nouae indeterminatae, ſuccedentes in locum indeterminatarum y et x, et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ſunt exponentes indeterminati valoris. Hae aequationes vero praebent $N = x^{\frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma}} y^{\frac{-\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}}$, et

M =

$M = x^{\frac{-\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}} y^{\frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}$; quod si praeterea statuamus $N = a + bM$, atque in hac aestimationes modo exhibitas indeterminatarum M et N substituantur, proueniet $x^{\frac{\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}} y^{\frac{-\gamma}{\alpha\delta-\beta\gamma}} = a + bx^{\frac{-\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}} y^{\frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}$, ductaque in $x^{\frac{-\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}}$ nascitur $y^{\frac{-\gamma}{\alpha\delta-\beta\gamma}} = ax^{\frac{-\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}} + bx^{\frac{-\alpha-\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}} y^{\frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}$ (A).

II. Habemus ergo aequationem trinomialem A, ad quam omnes reliquae quae occurrere possunt, facile reducentur: Sit ergo generalis aequatio curuarum trinomialium $y^m = ax^n + bx^e y^r$ (B); et A aequatio ad hanc reducetur, ponendo $\alpha = \frac{n}{em+nr-mn}$, $\beta = \frac{e-n}{em+rn-mn}$, $\gamma = \frac{m}{em+nr-mn}$, $\delta = \frac{-r}{em+nr-mn}$.

III. Pro obtinenda area aequationis B, aequationes assumtae $y = M^\alpha N^\beta$, et $x = M^\gamma N^\delta$, praebent $ydx = (\gamma N dM + \delta M dN) M^{\alpha+\gamma-1} N^{\beta+\delta-1}$. Quod si nunc ad abbreuiandum, fiant $\eta = \alpha + \gamma$, $\theta = \beta + \delta$, $\lambda = \gamma + \delta$, et pro N et dN scribantur in parenthesi $a + bM$, et bdM, inuenietur $ydx = (\gamma a dM + \lambda b M dM) M^{\eta-1} N^{\theta-1}$. Sit porro l numerus quicunque affirmatiuus, et $\varkappa$ quicunque fractus, atque $\eta = l + \varkappa$. Factisque deinceps $A = \frac{\lambda}{\eta+\theta}$, $B = \frac{(\gamma-\eta A)a}{\eta+\theta-1, b}$, $C = \frac{(1-\eta)Ba}{\eta+\theta-2, b}$, $D = \frac{(2-\eta)Ca}{\eta+\theta-3, b}$, etc. atque $Q = \int M^\varkappa N^{\theta-1} dM$ nec non $T = AM^\eta + BM^{\eta-1} + CM^{\eta-2} +$ etc. $+ \Gamma M^{\varkappa+1}$. Inuenietur primo area quaesita 1. $\int ydx = N^\theta T - (\varkappa+1)\Gamma a Q$.

Sciendum autem in hac prima Quadraturae formula, fore $\int ydx = N^\theta T$ simpliciter, si $\varkappa$ sit $= 0$, vel

$\eta = 1$,

$\eta = 1$, feriemque T continuandam esse vsque ad terminum illum inclusiue in quo exponens indeterminatae M est $= 0$.

2. Si sit π numerus integer affirmatiuus et p fractus, fueritque $\theta = \pi + p$, ac fiant $E = \frac{\lambda}{\eta + \theta}$, $F = \frac{(\theta E - \delta) a}{\eta + \theta - 1}$, $G = \frac{(\theta - 1) F a}{\eta + \theta - 2}$, $H = \frac{(\theta - 2) G a}{\eta + \theta - 3}$, etc. $R = \int M^{\eta - 1} N^{\varrho} dM$, et $V = E N^{\theta} + F N^{\theta - 1} + G N^{\theta - 2} +$ etc. $+ \Delta N^{\varrho + 1}$. Inuenietur 2. $\int y\, dx = M^{\eta} V + (\varrho + 1) \Delta a R$.

Quare etiam nunc si ϱ sit $= 0$, fiet $\int y\, dx = M^{\eta} V$, et feries V est protendenda vsque ad terminum in quo exponens indeterminatae N est $= 0$.

IV. Quae §. §. I, II. elicuimus breuius potuissent inueniri hunc in modum: aequatio proposita $y^m = a x^n + b x^e y^r$ per diuisionem cum x^n reducitur ad $y^m x^{-n} = a + b x^{e-n} y^r$, et si fiant $N = x^{-n} y^m$, et $M = x^{e-n} y^r$, inuenientur $x = M^{\frac{m}{em + nr - mn}} N^{\frac{-r}{em + nr - mn}}$ (§. II.) $= M^{\gamma} N^{\delta}$, et $y = M^{\frac{n}{em + nr - mn}} N^{\frac{e-n}{em + nr - mn}} = M^{\alpha} N^{\beta}$, vt in §. II. Reliqua ergo perficienda restarent pro quadratura obtinenda, vt factum cernitur in §. III.

Ostendendum ergo superest, quomodo formulae illae generales, ad exempla particularia applicari debeant.

V. Sit aequatio Curuae quadrandae $y^3 + x^3 = cxy$, applicandoque hanc ad aequationem generalem $y^m = a x^n + b x^e y^r$, habentur $a = -1$, $b = c$; $m = n = 3$, $e = r = 1$, adeoque $\alpha = -1$, $\beta = \frac{2}{3}$, $\gamma = -1$ et $\delta = \frac{1}{3}$. Hinc $\eta (= \alpha + \gamma) = -2$, $\theta (= \beta + \delta) = 1$; $\lambda = -\frac{2}{3}$. Iam vero quia $\eta = -2$ non est affirmatiuus; prima formu-

formula quadraturae nunc inseruire commode non potest; quare altera est adhibenda quia $\theta (= 1)$ est numerus integer; inueniuntur vero $E (= \frac{\lambda}{\eta + \theta}) = -\frac{2}{3} : -1 = \frac{2}{3}$, $F (= \frac{(\theta E - \delta) a}{\eta + \theta - 1}) = \frac{a}{3} : -2 = \frac{-a}{6} = +\frac{1}{6}$ propter $a = -1$, quare $V (= EN + F) = -E + F + cEM = -\frac{1}{2} + \frac{2cM}{3}$, adeoque $\int y\,dx (= M^{\eta} V) = \frac{2c}{3M} - \frac{1}{2MM}$ (vel propter $M = \frac{y}{xx}$) $= \frac{2cxx}{3y} - \frac{x^4}{2yy}$ (propter $x^4 = cxxy - xy^3$) $= \frac{1}{2} xy + \frac{cxx}{6y}$.

Exemplum 2.

VI. Quaeritur area curuae $y^4 + x^4 = \frac{b}{c} x^3 yy$; sunt ergo hoc casu in aequatione generali $m = n = 4$, $e = 3$ et $r = 2$, $a = -1$, $b = \frac{1}{c}$; adeoque $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{4}$, $\gamma = 1$, $\delta = -\frac{1}{2}$, item $\eta (= \alpha + \gamma) = 2$, $\theta (= \beta + \delta) = -\frac{3}{4}$, $\lambda (= \gamma + \delta) = \frac{1}{2}$. Hinc $A (= \frac{\lambda}{\eta + \theta}) \frac{2}{5}$, $B (= \frac{(\gamma - \eta A) a}{\eta + \theta - 1 . b}) = \frac{-4c}{5}$, $C (= \frac{(1 - \eta) Ba}{\eta + \theta - 2 . b}) = + \frac{16cc}{15}$, $D = 0$, etc. adeoque $T (= AM^2 + BM + C) = \frac{2}{5} MM - \frac{4cM}{5} + \frac{16cc}{15}$ (propter $M = x^{\frac{-\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}} y^{\frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma}} = \frac{yy}{x}$) $= (\frac{2}{5} y^4 - \frac{4cxyy}{5} + \frac{16}{15} ccxx) \times x^{-2}$, et $N (= a + bM) = (yy - cx) c^{-1} x^{-1}$, ac denique $\int y\,dx (= N^{\theta} T) = \frac{c^{\frac{3}{4}} \times (\frac{2}{5} y^4 - \frac{4cxyy}{5} + \frac{16}{15} ccxx)}{x^{\frac{5}{4}} \sqrt[4]{(yy - cx)^3}}$ $= \frac{2}{5} xy - \frac{4c}{5} xxy^{-1} + \frac{16}{15} ccx^3 y^{-3}$ est area quaesita.

Exemplum 3.

VII. Sit aequatio curuae quadrandae $y^3 = gx + hx^3 y^{-18}$, essent ergo $m = 3$, $n = 1$, $e = 3$ et $r = -18$;

item $a=g$ et $b=h$; ex quibus resultarent $\alpha=-\frac{1}{12}$, $\beta=-\frac{1}{8}$, $\gamma=-\frac{1}{4}$, et $\delta=-\frac{3}{2}$, sed hoc casu neque η $(=\alpha+\gamma)=-\frac{1}{3}$, neque $\theta(=\beta+\delta)=-\frac{5}{3}$, esset numerus integer affirmatiuus, nec tamen inde statim concludi debet curuam non esse quadrabilem.

Nam ducendo aequationem in y^{18}, inuenitur $y^{21} = gxy^{18}+hx^3$, et, comparando hanc cum aequatione generali, inueniuntur $m=21$, $n=3$, $e=1$, $r=18$; $a=h$, et $b=g$, $em+nr-mn=12$, adeoque $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=-\frac{1}{6}$, $\gamma=\frac{7}{4}$, et $\delta=-\frac{3}{2}$, adeoque $\eta(=\alpha+\gamma)=2$, $\theta(=\beta+\delta)=-\frac{5}{3}$; $\lambda(=\gamma+\delta)=\frac{1}{4}$. Inuenientur ergo in formulis primis §. III. $A(=\frac{\lambda}{\eta+\theta})=\frac{3}{4}$, $B(=\frac{(\gamma-\eta A)a}{(\eta+\theta-1)b})=\frac{-3h}{4g}$, $C(=\frac{(1-\eta)Ba}{(\eta+\theta-2)b})=\frac{-9hh}{20gg}$, adeoque $T(=AM^{\eta}+BM^{\eta-1}+CM^{\eta-2})=\frac{3}{4}MM=\frac{3h}{4g}M-\frac{9hh}{20gg}$ (propter $M=x^{\frac{-\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}y^{\frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}=\frac{y^{18}}{xx})=(\frac{3}{4}y^{36}-\frac{3hxxy^{18}}{4g}-\frac{9hhx^4}{20gg})x^{-4}$, item $N(=a+bM)=(hxx+gy^{18})x^{-2}$.

$$\text{Quare } \int y\,dx\,(=N^{\theta}T)=\frac{(\frac{3}{4}y^{36}-\frac{3h}{4g}xxy^{18}-\frac{9hh}{20gg}x^4)}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{(hxx+gy^{16})^5}}=$$

$\frac{3}{4}xy-\frac{3h}{4g}x^3y^{-17}-\frac{9hh}{20gg}x^5y^{\frac{3}{5}}$; propter $hxx+gy^{18}=\frac{y^{21}}{x}$.

Exemplum 4.

VIII. *Sit* $y^5=p^4x+q^{12}xxy^{-9}$, vel iuxta obseruationem in praec. exemplo factam, ducendo aequationem in y^9, vt habeatur $y^{14}=q^{12}xx+p^4xy^9$, inuenietur curua quadrabilis esse, erunt enim hoc casu $m=14$, $n=2$, $e=1$ et $r=9$; $a={}^{12}$, et $b=p^4$. Inuenientur ergo

ergo $em + nr - mn = 4$, adeoque $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{7}{2}$, et $\delta = -\frac{9}{4}$, $\eta = \frac{8}{2} = 4$, $\theta = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$, $\lambda = \frac{5}{4}$, $\eta + \theta = \frac{3}{2}$. Hinc $A(=\frac{\lambda}{\eta+\theta}) = \frac{5}{6}$, $B(=\frac{(\gamma-\eta A),a}{\eta+\theta-1,b}) = \frac{q^{12}}{3p^4}$, $C(=\frac{(1-\eta)Ba}{\eta+\theta-2,b}) = \frac{2q^{24}}{p^8}$, $D(=\frac{(2-\eta)Ca}{\eta+\theta-3,b}) = \frac{+8q^{36}}{3p^{12}}$, $E(=\frac{(3-\eta)Da}{\eta+\theta-4,b}) = \frac{+16q^{48}}{15p^{16}}$, $F = 0$, etc. Item $M(= x^{\frac{-\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}} y^{\frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}) = x^{-1}y^9$, et $N(=a+bM) = q^{12} + p^4x^{-1}y^9$ (propter $y^5 = p^4x + q^{12}xxy^9$) $= x^{-2}y^{14}$. $T = \frac{5}{6}x^{-4}y^{36} + \frac{q^{12}}{3p^4}x^{-3}y^{27} + \frac{2q^{24}}{p^8}x^{-2}y^{18} + \frac{8q^{36}}{3p^{12}}x^{-1}y^9 + \frac{16q^{48}}{15p^{16}}$, quare $\int y\,dx (= N^\theta T) = \frac{5}{6}xy + \frac{q^{12}}{3p^4}xxy^{-8} + \frac{2q^{24}}{p^8}x^3y^{-17} + \frac{8q^{36}}{3p^{12}}x^4y^{-26} + \frac{16q^{48}}{15p^{16}}x^5y^{-35}$. prorsus vt habet Cel. *Craige* in Exempl. III. Sect. IV.

Exemplum 5.

IX. Sit $y^{\frac{5}{3}} = ax^{\frac{1}{4}} - px^{\frac{3}{2}}y^7$, vel quia sub hac forma quadratura non succedit, ducatur aequatio in y^{-7}, eaque mutabitur in $y^{\frac{-16}{3}} = ax^{\frac{1}{4}}y^{-7} - px^{\frac{3}{2}}$; quare $m = -\frac{16}{3}$, $n = \frac{3}{2}$; $e = \frac{1}{4}$; $r = -7$; $a = -p$, et $b = a$, adeoque $\alpha = -\frac{9}{32}$; $\beta = +\frac{15}{46}$, $\gamma = \frac{32}{23}$; $\delta = -\frac{42}{23}$, $\eta(=\alpha+\gamma=\frac{23}{23}) = 1$, $\theta(=\beta+\delta) = \frac{-69}{46} = -\frac{3}{2}$, $\lambda(=\gamma+\delta) = -\frac{10}{23}$. Inde vero $A(=\frac{\lambda}{\eta-\theta}) = \frac{20}{23}$, $B(=\frac{(\gamma-\eta A)a}{\eta+\theta-1,b}) = \frac{8p}{23a}$ $M(= x^{\frac{-\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}} y^{\frac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}}) = x^{-\frac{5}{4}}y^{-7}$, $N(=a+bM) = -p + ax^{-\frac{5}{4}}y^{-7} = x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{16}{3}}$, et $T(=AM^\eta + BM^{\eta-1} + \text{etc.}) = \frac{20}{23}x^{-\frac{5}{4}}y^{-7} + \frac{8p}{23a}$; adeoque $\int y\,dx (= N^\theta T) = (\frac{20}{23}x^{-\frac{5}{4}}y^{-7} + \frac{8p}{23a}) \times (-p + ax^{-\frac{5}{4}}y^{-7})^{-\frac{3}{2}} = \frac{20}{23}xy +$

$-\frac{8px^{\frac{9}{4}}y^{0}}{2\,3\,a}$. Hucusque exempla habuimus Curuarum tantum quadrabilium, transeo nunc ad ea quae ducunt ad quadraturam Circuli aut Hyperbolae.

X. Itaque si in aequatione $y^m = ax^n + bx^e y^r$, fuerint $e = \frac{2kn + 2n + 2}{2k + 1}$, $r = \frac{-m + 2}{2k + 2}$, vel $e = 2kn + 2n + 2$, et $r = -2km - m + 2$, et k numerus quicunque integer affirmatiuus, Curuae area pendebit a Quadratura Circuli vel Hyperbolae. Erit enim in primo casu $\eta (= \alpha + \gamma) = k + \frac{1}{2}$; adeoque $l = k$, et $\varkappa = \frac{1}{2}$ $\theta (= \beta + \delta) = \frac{1}{2}$; hinc $Q (= \int M^{\varkappa} N^{\theta - 1} dM) = \int \frac{dM \sqrt{M}}{\sqrt{N}} = \int \frac{M dM}{\sqrt{(aM + bMM)}}$.

In secundo vero $\eta (= \alpha + \gamma) = \frac{1}{2}$, $\theta (= \beta + \delta) = k + \frac{1}{2}$, id est $\pi = k$, et $p = \frac{1}{2}$, hinc $R (= \int M^{\pi - 1} N^{p} dM) = \int \frac{dM \sqrt{(a + bM)}}{\sqrt{M}} = \int \frac{adM + bMdM}{\sqrt{(aM + bMM)}}$.

Exemplum I.

XI. $y^3 = ax^3 + bx^{\frac{14}{3}} y^{-\frac{1}{3}}$ $m = n = 3$, $e = \frac{14}{3}$, $r = -\frac{1}{3}$, hinc $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = \frac{5}{12}$, $\gamma = \frac{3}{4}$, $\delta = +\frac{1}{12}$; inueniuntur ergo $\eta (= \alpha + \gamma) = 1 + \frac{1}{2}$, $\theta (\beta + \delta) = \frac{1}{2}$, $\lambda (= \gamma + \delta) = \frac{5}{4}$, ergo $\varkappa = \frac{1}{2}$, $A (= \frac{\lambda}{\eta + \theta}) = \Gamma = \frac{5}{8}$; Hinc $T = \frac{5}{8} M^{\frac{3}{2}}$, atque adeo $\int y dx (= N^{\theta} T - (\varkappa + 1) \Gamma a Q) = \frac{5}{8} M^{\frac{3}{2}} N^{\frac{1}{2}} - \frac{15}{16} a Q$. Quare si dicatur $P = \int \frac{\lambda dM}{\sqrt{(aM + bMM)}}$ fiet $\frac{15}{16} a Q = \frac{15a}{16b} N^{\frac{1}{2}} - \frac{15}{32} \frac{aa}{b} P$. adeoque $\int y dx = (\frac{5}{8} M^{\frac{3}{2}} - \frac{15a}{16b}) N^{\frac{1}{2}} + \frac{15}{32} \frac{aa}{b} P$. Quantitas P pendet a quadratura Cir-

Circuli vel *Hyperbolae*, nempe a quadratura Circuli, ſi b habeat ſignum negatiuum, et *Hyperbolae*, ſi habeat affirmatiuum; adeoque cum ſit M $(= x^{\frac{-\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}} y^{\frac{\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}})$ $= x^{\frac{5}{3}} y^{\frac{-1}{3}}$, ſi R ſignificat arcum Circuli, cuius radius $\frac{a}{2b}$, et ſagitta $M = x^{\frac{5}{3}} y^{\frac{-1}{3}}$, fiet $\int y\,dx = (\frac{5}{3} x^{\frac{5}{2}} y^{\frac{-1}{2}} + \frac{15a}{16b}) \surd N - \frac{15aR}{16\surd b}$, exiſtente $N^{\frac{1}{2}} = \surd(a - b x^{\frac{5}{3}} y^{\frac{-1}{3}})$.

Sin vero b ſit coefficiens affirmatiua: ad axem CB conſtruatur Hyperbola aequilatera BD, cuius latus transuerſum ſit $AB = \frac{a}{b}$, et capiatur abſciſſa $BE (= M) = x^{\frac{5}{3}} y^{\frac{-1}{3}}$, ductaque ſemiordinata ED, dicatur ſector CDB $= S$, erit $\int y\,dx = (\frac{5}{8} x^{\frac{5}{2}} y^{\frac{-1}{2}} - \frac{15a}{16b} \times (a + b x^{\frac{5}{3}} y^{\frac{-1}{3}})^{\frac{1}{2}} + \frac{15}{4} S \surd b$. Tabula XIII. Fig. 3.

Exemplum 2.

XII. $y^3 = a x^3 + b x^{20} y^{-13}$. Sunt ergo $m = n = 3$, $e = 20$, $r = 13$, adeoque $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{17}{12}$, $\gamma = \frac{1}{4}$, $\delta = \frac{13}{12}$, hinc $\eta (= \alpha + \gamma) = \frac{1}{2}$, $\theta (= \beta + \delta) = \frac{30}{12} = 2 + \frac{1}{2}$, adeoque $\pi = 2$, et $\varrho = \frac{1}{2}$; $\lambda = \frac{4}{3}$. Ex hisce autem inueniuntur $M = x^{17} y^{-13}$, $N (= a + bM) = a + b x^{17} y^{-13}$, nec non $E = \frac{4}{3}$, $F (= \Delta = \frac{a}{72}$, adeoque $V (= E N^{\frac{5}{2}} + \Delta N^{\frac{3}{2}}) = (\frac{4}{3} b x^{17} y^{-13} + \frac{97}{72} a) N^{\frac{3}{2}}$; adeoque $\int y\,dx (= M^{\eta} V + (\varrho + 1) \Delta a R) = (\frac{4}{3} b x^{17} y^{-13} + \frac{97}{72} a) x^{\frac{17}{2}} y^{\frac{-13}{2}} N^{\frac{3}{2}} + \frac{aa}{48} R$. Sit $S = \int \frac{dM}{\surd(aM + bMM)}$, erit $R = \surd(aM + bMM) + \frac{1}{2} a S$, fietque $\int y\,dx$ ſeu

 area

area quaesita $= (\frac{a}{3} b x^{17} y^{-13} + \frac{97}{72} a) x^{\frac{17}{2}} y^{-\frac{13}{2}} N^{\frac{3}{2}} + \frac{aa}{48} \surd(aM + bMM) + \frac{a^3}{96} S$. In hac vero S denotat sectorem *Hyperbolae* vel *Circuli*, per planum constans diuisum, prout coefficiens b signum affirmatiuum vel negatiuum habuerit.

Innumera alia exempla curuarum huiusmodi proferri possent, quarum areae pendent à qradratura Circuli vel Hyperbolae, vel ab vtraque, sed nolo prolixior esse. Id tamen non videtur esse reticendum, per hanc methodum posse quoque inueniri Centra grauitatis et oscillationis in huius generis curuis, cum totum negotium reuocari possit ad quadraturas curuarum quarum aequationes non nisi vnicam inuoluunt indeterminatam et constantes, quemadmodum id iam satis liquere arbitror ex praecedentibus. Pergo iam ad Curuas Quadrinomiales.

XIII. Earum aequatio est $y^m = ax^n + bx^p y^q + cx^r y^s$, vel $-1 + ax^n y^{-m} + bx^p y^{q-m} + cx^r y^{s-m} = 0$ sint $M = x^n y^{-m}$, et $MN = x^p y^{q-m}$, inuenientur $x = M^{\frac{q}{l}} N^{\frac{m}{l}}$, et $y = M^{\frac{n-p}{l}} N^{\frac{n}{l}}$ existente $l = mp + nq - mn$, et hisce in aequatione suffectis, habetur $-1 + aM + bMN + cM^{\frac{mp+qr-mn+ns-ps}{l}} N^{\frac{ns+mr-mn}{l}} = 0$. Sit nunc

1. $mp + qr - mn + ns - ps = 0$, vel $s = \frac{mp+qr-mn}{p-n}$ praecedens aequatio mutabitur in $-1 + aM + bMN + cN^{\frac{ns+mr-mn}{l}} = 0$. Fiant $P = a + bN$, et $Q = 1 - cN$

$-cN^{\frac{mr+ns-mn}{l}}$, inuenietur $MP-Q=o$, adeoque $M=P^{-1}Q$, hinc elicientur $x=N^{\frac{m}{l}}P^{\frac{-q}{l}}Q^{\frac{q}{l}}$ et $y=N^{\frac{n}{l}}P^{\frac{p-n}{l}}Q^{\frac{n-p}{l}}$. Hinc $ydx=(\frac{m}{l}PQdN-\frac{q}{l}NPdQ)N^{\frac{m+n}{l}-1}P^{\frac{p-n-q}{l}-1}Q^{\frac{n-p+q}{l}-1}$. In hac quantitate vero cum P et Q datae ſint per N et conſtantes, ideo patet elementum areae quaeſitae reductum eſſe ad quantitatem non niſi vnicam indeterminatam N eiusque elementum et conſtantes inuoluentem. Q. E. I.

2. Si fiat $ns+mr-mn=o$, vel $s=\frac{mn-mr}{n}$, fiet $-1+aM+bMN+cM^{\frac{mp+qr-mn+ns-ps}{l}}=o$. Itaque poſita $R=1-aM-cM^{\frac{mp+qr-mn+ns-ps}{l}}$, aequatio mutatur in $-R+bMN=o$, adeoque habetur $N=b^{-1}M^{-1}R$, hinc $x(=M^{\frac{q}{l}}N^{\frac{m}{l}})=b^{\frac{-q}{l}}M^{\frac{m-q}{l}}R^{\frac{m}{l}}$, et $y(=M^{\frac{n-p}{l}}N^{\frac{n}{l}})=b^{\frac{-n}{l}}M^{\frac{-p}{l}}R^{\frac{n}{l}}$, adeoque $ydx=(\frac{m-q}{l}RdM+\frac{m}{l}MdR)b^{\frac{-n-q}{l}}M^{\frac{m-p-q}{l}-1}R^{\frac{m+n}{l}-1}$. Fiat nunc

$\alpha=\frac{mp+qr-mn+ns-ps}{l}$ (propter $ns=mn-mr$) $=\frac{mp+qr-mr-ps}{l}=\frac{r}{n}$

$\beta=\frac{m-p-q}{l}$

$\gamma=\frac{m+n}{l}$. Erit

$b^{\frac{n+q}{l}}\int ydx=(\frac{m-q}{l}RdM+\frac{m}{l}MdR)M^{\beta-1}R^{\gamma-1}$.

$+\frac{m-q}{l}RdM=\frac{m-q}{l}dM+\frac{q-m}{l}aMdM+\frac{q-m}{l}cM^{\alpha}dM$

$+\frac{m}{l}MdR=\qquad\qquad\frac{-m}{l}aMdM-\frac{\alpha m}{l}cM^{\alpha}dM$, ergo

$b^{\frac{n+q}{l}}\int ydx=\int(\frac{m-q}{l}dM+\frac{q-2m}{l}aMdM+\frac{q-(\alpha-1)m}{l}cM^{\alpha}dM)M^{\beta-1}R^{\gamma-1}$

Quod

Quod ſi praeterea fiat $\alpha = 2$, quod contingit cum ſint $r = 2n$, et $s = -m$ hoc caſu habetur
$b^{\frac{n+q}{l}} \int y\, dx = \int (\frac{m-q}{l} dM + \frac{q-2m}{l} aM\, dM + \frac{(q-3m)}{l} cM$
$M\, dM) M^{\beta-1} R^{\gamma-1} = \int (\frac{m-q}{l} M^{\beta-1} dM + \frac{q-2m}{l} aM^{\beta} dM$
$+ \frac{q-3m}{l} cM^{\beta+1} dM) R^{\gamma-1}$.

Sin vero $\beta (= \frac{m-p-q}{l})$ ſit numerus integer poſitiuus, et dicantur

$A = \frac{-\sigma}{\beta+2\gamma}$, $B = \frac{-(\rho+(\beta+\gamma)A)a}{\beta+2\gamma-1,c}$, $C = \frac{-\pi+\beta b-(\beta+\gamma+1)Ba}{\beta+2\gamma-2,c}$,
$D = \frac{-(\beta-1)B-(\beta-\gamma+3)Ca}{\beta+2\gamma-3,c}$, $E = \frac{(\beta-2)C-(\beta-\gamma+3)Da}{\beta+2\gamma-4,c}$ etc.
$T = AM^{\beta} + BM^{\beta-1} + CM^{\beta-2} DM^{\beta-3} + EM^{\beta-4}$ - - - - - $\Gamma M + \Delta$, ſitque $\Gamma = \gamma \Delta a$, inuenietur
$b^{\frac{n+q}{l}} \int y\, dx = TR^{\gamma}$. Adeoque curuae hoc caſu quadrabiles ſunt abſolutae.

SVPPLEMENTVM AD SCHEDAM IN MENSE AVGVSTO ACTORVM ERVDITOR. MDCCXIX. CIRCA PROBLEMA A TAYLORO MATHEMATICIS NON ANGLIS PROPOSITVM, EDITAM,

AVCTORE

I. Hermanno.

Tabula XIV.

CVm ineunte anno 1719 Ill. *D. De Monmort* hanc formulam $\frac{z^{\frac{\delta}{\lambda}\eta-1} dz}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}$ a Cel. *Tayloro* Mathematicis extra Angliam degentibus ad conſtruendum propoſitam accepiſſet, Vir humaniſſimus eandem quo-

que

que mihi per litteras commendarat. Quare sequenti Martio petitam constructionem in priuatis ad Ipsum litteris misi. Interea Cel. noster *Ioh. Bernoulli* non modo dedit constructionem, sed modum etiam reducendi eiusmodi fractiones fuse exposuit in Actis Erud. Mens. Iunii illius anni; cuius perpulchrum schediasma hac de re, atque eius praefatio, legi merentur. Quaenam ego eodem in argumento praestiterim iudicabit Lector ex iis quae in Mens. August. eiusdem anni habentur. Quae eam in rem illic publici iuris feci occasionem dederunt Viro Cel. *Gabrieli Manfredo* hoc ipsum reductionis negotium latius tractandi, iisque quae tradidi noua adiiciendi, vt videre est in Tomo II. Suppl. Diarii Veneti pag. 241. Tandem vero anno 1722 prodiit in Lucem *Harmonia Mensurarum, siue Analysis et Synthesis per Rationum et Angulorum mensuras promotae*, ex qua nobis demum innotuit, problema illud *Taylorianum* non Praeclarissimum *Taylorum* ipsum, sed Acutiss. dum viueret, *Rogerum Cotesium* autorem habuisse. Nam maxima pars elegantis huius operis versatur circa constructiones eiusmodi formarum, et constructiones illae innituntur tantum non omnes egregio theoremati de diuisione Circuli in partes aequales, cuius tamen demonstratio Autoris in libro eius postumo non reperitur. Ex aliquot tentaminibus circa demonstrationem theorematis frustra susceptis, iudicabam demonstrationem eius debere esse altae indaginis, cum primum in Actis Eruditorum theorema expositum vidissem; neque postea aliter sensi, cum Cotesii opera in manus mihi venissent, atque ad calcem eorum Anonymi cuiusdam demonstrationem praefati theorematis vidissem;

hanc enim demonstrationem pereruditam esse, vt nemo negare potest, ita etiam quicunque eam legit statim videt, non parum laboris a peritissimo eius Autore poposcisse; de alia vero quaerenda non amplius sollicitus, de toto hoc negotio vlterius non cogitam, donec aliquo ab hinc tempore ex communicatione cuiusdam Amici, qui ipse circa eandem demonstrationem iam praeclare versatus et elegantem demonstrationem nactus est, Celeberrimi *D. De Moivre Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, percurrere mihi licuisset. In erudito hoc opere occurrit pulchrum theorema de diuisione Circuli in quotcunque partes aequales, ex quo deinceps magna breuitate et concinnitate deducit tum demonstrationem theorematis Cotesiani de quo supra, tum etiam fractiones construendas ad formas simpliciores. Verum tamen quia post lectionem vtlibet attentam corollariorum vsum Lemmatis illustrantium, semper aliquis scrupulus remansit, impediens quo minus credere possem Acutissimi Viri mentem me recte percepisse, id in animum induxi meum, vt adhibito quidem Lemmate *Moivreano*, mea tamen demonstratione munito, aliam inirem viam in applicatione eius ad demonstrandum Theorema *Cotesianum*. Vt vero ad rem veniam *D. De Moivre* Theorema, seu potius Lemma, ita habet.

Lemma.

Si in Circulo, cuius radius est 1, *sint duo arcus* A et X *quorum Cosinus sint* l *et* x, *sitque* $x + \sqrt{(xx-1)} = (l + \sqrt{(ll-1)})^{\frac{1}{n}}$ *Erit arcus* A *ad arcum* X, *vt* n *ad* 1.

Nam

Nam $x+\sqrt{(xx-1)}=(l+\sqrt{(ll-1)})^{\frac{1}{n}}$ praebet $(x+\sqrt{(xx-1)})^n,=l+\sqrt{(ll-1)}$ et n Log. $(x+\sqrt{(xx-1)})$ $=$ Log. $(l+\sqrt{(ll-1)})$, et differentiando nd Log. $(x+\sqrt{(xx-1)})=d$ Log. $(l+\sqrt{(ll-1)})$. Atque $(x+\sqrt{(xx-1)})=\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$ nam d Log. $(x+\sqrt{(xx-1)})=\frac{dx+\frac{xdx}{\sqrt{(xx-1)}}}{x+\sqrt{(xx-1)}}=$ $\frac{xdx+dx\sqrt{(xx-1)}}{xx-1+x\sqrt{(xx-1)}}$ (vel diuiso numeratore et denominatore per $x+\sqrt{(xx-1)})=\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$; similiter est d Log. $(l+\sqrt{(ll-1)})=\frac{dl}{\sqrt{(ll-1)}}$, quare nd Log. $(x+\sqrt{(xx-1)})$ $=d$ Log. $(l+\sqrt{(ll=1)}$ praebet $\frac{ndx}{\sqrt{(xx-1)}}=\frac{dl}{\sqrt{(ll-1)}}=$ $\frac{dl}{\sqrt{(ll-1)}}$, et ducendo hanc in $\frac{-1}{\sqrt{-1}}$, inuenietur $\frac{-ndx}{\sqrt{(1-xx)}}=$ $\frac{-dl}{\sqrt{(1-ll)}}$, verum $\frac{-dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, et $\frac{-dl}{\sqrt{(1-ll)}}$, sunt elementa arcuum X et A, ergo $ndX=dA$, adeoque $nX=A$, est ergo $A:X::n:1$. Q. E. D.

Corollarium I.

Dicantur $b=2$, $D=n$; $E=\frac{-n.n-1}{2}+n-2D$; $F=\frac{n.n-1.n-2}{2.3}-(\frac{n-2.n-3}{2})D+n-4E$; $G=\frac{-n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4}$ $+(\frac{n-2.n-3.n-4}{2.3})D-(\frac{n-4.n-5}{2})E+n-6.F$; atque sic deinceps. Aequatio lemmatis $x+\sqrt{(xx-1)}=$ $(l+\sqrt{ll-1})^{\frac{1}{n}}$ hanc dabit aequationem $b^n x^n-Db^{n-2}$ $x^{n-2}+Eb^{n-4}x^{n-4}-Fb^{n-6}x^{n-6}+$ etc. $-2l=0$, pro diuisione arcus A in n partes.

Ponendo enim $x+\sqrt{(xx-1)}=y$, elicietur yy $-2xy+1=0$, sed est quoque $y(=x+\sqrt{(xx-1)})$ $=(l+\sqrt{(ll-1)})^{\frac{1}{n}}$, et per consequens $y^n=l+\sqrt{ll-1}$, ex qua deriuatur $y^{2n} - 2ly^n + 1 = 0$. In ambabus his aequationibus y est quantitas imaginaria, sed earum ope tolli potest quicquid in iis imaginarii inest, et perueniet ad aequationem paulo ante exhibitam $b^n x^n - D b^{n-2} x^{n-2} + E b^{n-4} x^{n-4} -$ etc. $-2l = 0$, cuius radices omnes sunt reales; et tot habet quot vnitates in exponente n continentur.

Corollarium 2.

Hae vero radices sunt Cosinus arcuum huius seriei $\frac{A}{n}, \frac{C-A}{n}, \frac{C+A}{n}, \frac{2C-A}{n}, \frac{2C+A}{n}, \frac{3C-A}{n}, \frac{3C+A}{n}$, etc. per tot terminos continuatae, quot vnitates sunt in numero n. Nam non solum cum arcus A, sed etiam cum arcus $C-A$, $C+A$, $2C+A$, $3C+A$, etc. in n partes diuidi debet, semper eadem redit aequatio in praecedenti Corollario exhibita; quia omnium arcuum illorum communis est chorda, atque adeo communis Cosinus, existente C tota circumferentia.

Corollarium 3.

Si $A = \frac{1}{4}C$, scribam tunc pro A, Q notam quadrantis, et cum eius cosinus l sit $= 0$, aequatio diuisioni quadrantis inseruiens erit $b^n x^n - D b^{n-2} x^{n-2} + E b^{n-4} x^{n-4} - F b^{n-6} x^{n-6} +$ etc. $= 0$, cuius radices sunt cosinus arcuum huius seriei $\frac{Q}{n}, \frac{3Q}{n}, \frac{5Q}{n}, \frac{7Q}{n}, \frac{9Q}{n}$, etc. substituendo in serie arcuum Corollarii praecedentis Q pro A, et 4Q pro C. Quod si praeterea duplicentur termini fractionum in eadem arcuum serie, prodibit haec altera $\frac{2Q}{2n}, \frac{6Q}{2n}, \frac{10Q}{2n}, \frac{14Q}{2n}, \frac{18Q}{2n}, \frac{22Q}{2n}$, vel factis $\lambda = 2n$, et $S = 2Q$, ista $\frac{S}{\lambda}, \frac{3S}{\lambda}, \frac{5S}{\lambda}, \frac{7S}{\lambda}, \frac{9S}{\lambda}, \frac{11S}{\lambda}$, etc. denotante S

semi-

semicirculum. Hinc idem est siue diuidas quadrantem in n partes, siue semicirculum in λ partes, nam Cosinus arcuum $\frac{Q}{n}$, $\frac{3Q}{n}$, $\frac{5Q}{n}$, $\frac{7Q}{n}$, etc. et Cosinus arcuum $\frac{S}{\lambda}$, $\frac{3S}{\lambda}$, $\frac{5S}{\lambda}$, $\frac{7S}{\lambda}$, etc. dant easdem radices aequationis $b^n x^n - D b^{n-2} x^{n-2} + E b^{n-4} x^{n-4} - \text{etc.} = 0$, Verum si diuidendus sit S in λ partes, aequatio Corollarii 1. huic casui applicata praebet $b^\lambda x^\lambda - D b^{\lambda-2} x^{\lambda-2} + E b^{\lambda-4} x^{\lambda-4} - F b^{\lambda-6} x^{\lambda-6} + \text{etc.} + 2 = 0$, conuertendo n in λ, et I in -1. In serie vero arcuum in Corollar. 2. exhibita, mutando quoque A in S, habetur eadem series, quae supra in hoc Corollario, nempe $\frac{S}{\lambda}$, $\frac{S}{\lambda}$, $\frac{3S}{\lambda}$, $\frac{3S}{\lambda}$, $\frac{5S}{\lambda}$, $\frac{5S}{\lambda}$, etc. sed in qua singuli termini geminati conspiciuntur, quod indicio est numerum radicum inaequalium aequationis $b^\lambda x^\lambda - \text{etc.} = 0$ tantum esse $\frac{1}{2}\lambda$ seu n, vt natura rei postulat, et altera aequatio diuisioni Quadrantis inseruiens id etiam indicat. Sed diuisio semicirculi in λ partes aliam adhuc arcuum seriem suppeditat, quorum cosinus alias eiusdem aequationis radices manifestant, nempe $\frac{0}{\lambda}$, $\frac{2S}{\lambda}$, $\frac{2S}{\lambda}$, $\frac{4S}{\lambda}$, $\frac{4S}{\lambda}$, $\frac{6S}{\lambda}$, etc. quae oritur cum in serie Coroll. 2. ponuntur $A = 0$, $C = 2S$, et n mutatur in λ, et termini huius seriei, eas praecise radices indicant, quae in serie arcuum $\frac{S}{\lambda}$, $\frac{S}{\lambda}$, $\frac{3S}{\lambda}$, etc. erant praetermissae, sed etiam termini illius geminati occurrunt.

Theorema. 3.

Sint $K = V(1 - 2az + z^2)$; $L = V(1 - 2bz + z^2)$; $M = V(1 - 2cz + z^2)$; $N = V(1 - 2ez + z^2)$, et ita porro; Deinde $\alpha =$ summae omnium a, b, c, e, etc. $\beta =$

$\beta^2 =$ fummae productorum omnium, cum feriei a, b, c, e, etc. bini quique termini inter fe multiplicantur. $\gamma^3 =$ fummae productorum cum terni quique eiusdem feriei termini inter fe ducuntur. $\delta^4 =$ productorum fummae cum quaterni quique inter fe multiplicantur. $\varepsilon^5 =$ aggregato productorum cum quini quinque continuo inter fe multiplicantur. $\Phi^6 =$ fummae productorum cum feni termini quique inter fe ducuntur; et fic porro. Sintque $a = o$, $\gamma^3 = o$, $\varepsilon^5 = o$, etc. verum $\beta^2 b^2 = -D$, $\delta^4 b^4 = +E$, $\Phi^6 b^6 = -F$, etc. vbi litterae D, E, F, etc. easdem quantitates denotant, quas in Coroll. 1. Lemm. praecedentis, n vero numerum factorum K, L, M, etc. His pofitis erit $K^2 L^2 M^2 N^2$ etc. $= 1 + z^\lambda$, exiftente $\lambda = 2n$.

Nam
$$K^2 L^2 = 1 \begin{array}{l} -2a \\ -2b \end{array} z \begin{array}{l} +4ab \\ +2 \end{array} z^2 \begin{array}{l} -2a \\ -2b \end{array} z^3 + z^4;$$

$$K^2L^2M^2 = 1 \begin{array}{l} -2a \\ -2b \\ -2c \\ \end{array} z \begin{array}{l} +4ab \\ +4ac \\ +4bc \\ +3 \end{array} z^2 \begin{array}{l} -8abc \\ -4a \\ -4b \\ -4c \end{array} z^3 \begin{array}{l} +4ab \\ +4ac \\ +4bc \\ +3 \end{array} z^4 \begin{array}{l} -2a \\ -2b \\ -2c \\ \end{array} z^5 + z^6,$$

et fic porro.

Ex his formulis productorum iam apparet, coefficientes terminorum a primo 1 in quo z nullam, et ab vltimo in quo z maximam dimenfionem habet, aequaliter diftantes, aequales effe, et ex iisdem productum generale omnium factorum fore

$$K^2 L^2 M^2 N^2 \text{ etc.} = 1 \begin{array}{l} -D \\ +n \end{array} z^2 \begin{array}{l} +E \\ -\overline{n+2}.D \\ +\frac{n.\overline{n-1}}{2} \end{array} z^4 \begin{array}{l} -F \\ +\overline{n-4}.E \\ -\frac{(n-2.\,n-3)}{2}D \\ +\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3} \end{array} z^6 + \text{etc.}$$

Quia

Quia vero per Coroll. 1. Lemm. sunt $D = n$; $E = -(\frac{n.n-1}{2}) + (n-2)D$; $F = \frac{n.n-1.n-2}{2.3} - (\frac{n-2.n-3}{2})D + (n-4)E$; $G =$ etc. fiet $K^2 L^2 M^2 N^2$ etc. $= 1 + z^{2n}$ (vel propter $\lambda = 2n$) $= 1 + z^\lambda$. Q. E. D.

Corollarium 1.

Fiant $t-2a=0$, $t-2b=0$, $t-2c=0$, $t-2e=0$ etc. ductisque his omnibus in se inuicem, inuenietur aequatio $t^n - \alpha b t^{n-1} + \beta^2 b^2 t^{n-2} - \gamma^3 b^3 t^{n-3} + \delta^4 b^4 t^{n-4} - \varepsilon^5 b^5 t^{n-5} +$ etc. $= 0$, ista vero per suppositiones theorematis abit in sequentem $t^n - Dt^{n-2} + Et^{n-4} - Ft^{n-6}$ $+$ etc. $= 0$, et facta in hac $t = bx$, inuenietur $b^n x^n - Db^{n-2}x^{n-2} + Eb^{n-4}x^{n-4} - Fb^{n-6}x^{n-6} +$ etc. quae prorsus eadem est cum aequatione Corollarii 1. Lemm. praecedentis, quaeque per Coroll. 3. eiusdem Lemmatis conuerti potest in aequationem inseruientem diuisioni semicirculi in λ partes, $b^\lambda x^\lambda - Db^{\lambda-2}x^{\lambda-2} + Eb^{\lambda-4}x^{\lambda-4} - Fb^{\lambda-6}x^{\lambda-6} +$ etc. $+ 2 = 0$, cuius radices sunt cosinus arcuum $\frac{s}{\lambda}, \frac{s}{\lambda}, \frac{3s}{\lambda}, \frac{3s}{\lambda}, \frac{5s}{\lambda}, \frac{5s}{\lambda}$, etc. vel cosinus arcuum $\frac{0}{\lambda}, \frac{2s}{\lambda}, \frac{2s}{\lambda}, \frac{4s}{\lambda}, \frac{4s}{\lambda}, \frac{6s}{\lambda}$, etc.

Corollarium 2.

Factores quos in theoremate K, L, M, N, etc. nominauimus, deinceps indicabimus per H cum adscripto numero ordinis illius arcus cuius cosinus influit in compositionem factoris. Hanc ob causam factores in quibus insunt cosinus arcuum huius seriei $\frac{s}{\lambda}, \frac{s}{\lambda}, \frac{3s}{\lambda}, \frac{3s}{\lambda}, \frac{5s}{\lambda}, \frac{5s}{\lambda}$, etc.

etc. erunt H 1, H 1, H 3, H 3, H 5, H 5, etc. et factores in quibus insunt cosinus arcuum huius seriei $\frac{o}{\lambda}$, $\frac{2s}{\lambda}$, $\frac{2s}{\lambda}$, $\frac{4s}{\lambda}$, $\frac{4s}{\lambda}$, $\frac{6s}{\lambda}$, etc. erunt H o, H 2, H 4, H 4, H 6, etc.

Fig 1. Vnusquisque vero factor H est linea ex puncto dato P in diametro AD semicirculi ABD centro O descripti, ad aliquod circumferentiae punctum B ductis, nempe PB, vbi radius $AO = 1$, et $OP = z$. Nam demissa ex B perpendiculari BC in diametrum, et vocando cosinum arcus AB, qui est OC, k, erit $BP^2 = 1 - 2kz + z^2$, adeoque $BP = \sqrt{(1 - 2kz + z^2)}$.

Corollarium 3.

His positis, si exponens λ est numerus *par*, series arcuum $\frac{s}{\lambda}$, $\frac{s}{\lambda}$, $\frac{3s}{\lambda}$, $\frac{3s}{\lambda}$, $\frac{5s}{\lambda}$, $\frac{5s}{\lambda}$, etc. praebet factores H 1, H 1, H 3, H 3, H 5, H 5, etc. adeoque $H1 \times H1 \times H3 \times H3 \times H5 \times H5 = 1 + z^\lambda$.

Series vero arcuum $\frac{o}{\lambda}$, $\frac{2s}{\lambda}$, $\frac{2s}{\lambda}$, $\frac{4s}{\lambda}$, $\frac{6s}{\lambda}$, etc. subministrat factores H o, H 2, H 2, H 4, H 4, H 6, etc. Cum vero primus arcus sit o, et eius cosinus $= +1$, vltimus vero semper sit S, cum λ est numerus par, et cosinus $S = -1$, primus factor erit $H o = \sqrt{(1 - 2z + z^2)} = 1 - z$, et vltimus seu $H v = \sqrt{(1 + 2z + z^2)} = 1 + z$; quare cum productum $H o \times H v$ sit $= 1 - z^2$, erit $H o \times H 2 \times H 2 \times H 4 \times H 4 \times H 6 = 1 - z^\lambda$. Nam factores medii H 2, H 2, H 4, H 4, etc. quippe qui omnes bis occurrunt producent $1 - - - - - - + z^{\lambda - 2}$ vbi puncta terminos medios inter 1 et z denotant.

Sin

Sin vero exponens λ sit numerus *impar*, series arcuum $\frac{s}{\lambda}$, $\frac{s}{\lambda}$, $\frac{3s}{\lambda}$, $\frac{3s}{\lambda}$, $\frac{5s}{\lambda}$, etc. admittit factores $H\,1$, $H\,1$, $H\,3$, $H\,3$, $H\,5$, etc. quorum vltimus semper erit $= 1 + z$, quia in arcuum serie vltimus hoc casu semper est S. Quare habetur tunc $H\,1 \times H\,1 \times H\,3 \times H\,3 \times H\,5 \times \text{etc.} = 1 + z^{\lambda}$.

Series vero altera arcuum, quorum primus est o, admittit factores $H\,o$, $H\,2$, $H\,2$, $H\,4$, $H\,4$ etc. inter quos cum primus sit $H\,o = 1 - z$, et omnes reliqui geminati sint, ideo $H\,o \times H\,2 \times H\,2 \times H\,4 \times H\,4 \times \text{etc.} = 1 - z^{\lambda}$.

Scholium.

Si itaque exponens $\lambda = 6$, diuiso circulo AB in 2λ seu 12 partes aequales, ductisque ex dato puncto P per singula diuisionis puncta rectis $PB\,1$, $PB\,2$, $PB\,3$, etc. erit $PB\,1 \times PB\,3 \times PB\,5 \times PB\,7 \times PB\,9 \times PB\,11 = 1 + z^6$. Et $PA \times PB\,2 \times PB\,4 \times PB\,6 \times PB\,8 \times PB\,10 = 1 - z^6$. Fig. 8

Similiter si sit $\lambda = 5$, diuiso circulo in 10. partes, ductisque per singula diuisionis puncta rectis, vt in praecedenti casu, erit $PB\,1 \times PB\,3 \times PB\,5 \times PB\,7 \times PB\,9 = 1 + z^5$, et $PA \times PB\,2 \times PB\,4 \times PB\,6 \times PB\,8 = 1 - z^5$.

Problema I.

Resoluere fractionem $\frac{1}{1+z^n}$, *in simpliciores, cum exponens* n *est numerus par.*

Dicatur binomium $1 + z^n = Z$, sintque Q^2, R^2, S^2 factores eius per Theorema praecedens inuenti, erit ergo $\frac{1+z^n}{z^n}=\frac{Z}{z^n}$, et differentiando Logarithmice $\frac{nz^{n-1}dz}{1+z^n}-\frac{ndz}{z}=\frac{dZ}{Z}-\frac{ndz}{z}$, atqui $\frac{nz^{n-1}dz}{1+z^n}-\frac{ndz}{z}=\frac{ndz}{z\times(1+z^n)}=\frac{dZ}{Z}-\frac{ndz}{z}$, adeoque $\frac{n}{1+z^n}=\frac{-zdZ}{Zdz}+n$. Verum propter $Z(=1+z^n)=Q^2\times R^2\times S^2\times$ etc. erit $\frac{dZ}{Z}=\frac{2dQ}{Q}+\frac{2dR}{R}+\frac{2dS}{S}+$ etc. et $\frac{-zdZ}{Zdz}=\frac{-2zdQ}{Qdz}-\frac{2zdR}{Rdz}-\frac{2zdS}{Sdz}-$ etc. Sint iam $Q^2=1-2az+z^2$, $R^2=1-2bz+z^2$; $S^2=1-2cz+z^2$; etc. eruntque $\frac{-2zdQ}{Qdz}=\frac{2az-2z^2}{1-2az+z^2}=-2,+\frac{-2az+2}{1-2az+z^2}$; $\frac{-2zdR}{Rdz}=\frac{2bz-2z^2}{1-2bz+z^2}=-2+\frac{-2bz+2}{1-2bz+z^2}$ $\frac{-2zdS}{Sdz}=\frac{2cz^2-z^2}{1-2cz+z^2}=-2+\frac{-2cz+2}{1-2cz+z^2}$, etc. quare collectis singulis partibus, inuenietur $\frac{-zdZ}{Zdz}+n=-2-2-2-$ etc. $+n+\frac{2-2az}{1-2az+z^2}+\frac{2-2bz}{1-2bz+z^2}+\frac{2-2cz}{1-2cz+z^2}+$ etc. est vero $n-2-2-2-$ etc. perpetuo $=0$, adeoque $\frac{-zdZ}{Zdz}+n=\frac{2-2az}{1-2az+z^2}+\frac{2-2bz}{1-2bz+z^2}+\frac{2-2cz}{1-2cz+z^2}+$ etc. et per consequens $\frac{1}{1+z^n}\left(=\frac{-zdZ}{nZdz}+1\right)=\frac{\frac{2}{n}-\frac{2a}{n}z}{Q^2}+\frac{\frac{2}{n}-\frac{2b}{n}z}{R^2}+\frac{\frac{2}{n}-\frac{2c}{n}z}{S^2}+$ etc.

Corollarium.

Si exponens n est impar, ad factores Q^2, R^2, S^2, etc. duarum dimensionum accedet adhuc factor $V=1+z$, vnius dimensionis, adeo vt tunc fiat $\frac{1}{1+z^n}=$

$$\frac{\frac{2}{n}-\frac{2a}{n}z}{Q^2}+\frac{\frac{2}{n}-\frac{2b}{n}z}{R^2}+\frac{\frac{2}{n}-\frac{2c}{n}z}{S^2}+\text{etc.}+\frac{\frac{1}{n}}{V}.$$

Pro-

Problema 2.

Resoluere fractionem $\frac{1}{1+z^n}$, *in suas primitiuas.*

Si n est numerus par, series factorum P, Q^2, R^2, S^2 - - -, V, habebit primum $P = 1 - z$, et vltimum $V = 1 + z$, vnius dimensionis, mediosque Q^2, R^2, S^2, etc. trinomiales et duarum dimensionum, quare procedendo vt in Problemate praecedenti, fit $\frac{1}{1-z^n} = \frac{\frac{1}{n}}{1-z}$

$$+ \frac{\frac{2}{n} - \frac{2a}{n}z}{Q^2} + \frac{\frac{2}{n} - \frac{2b}{n}z}{S^2} + \frac{\frac{2}{n} - \frac{2c}{n}z}{S^2} + \text{etc.} + \frac{\frac{1}{n}}{V}.$$

Sin vero n sit numerus impar, inuenietur $\frac{1}{1-z^n}$

$$= \frac{\frac{1}{n}}{P} + \frac{\frac{2}{n} - \frac{2a}{u}z}{Q^2} + \frac{\frac{2}{n} - \frac{2b}{n}z}{R^2} + \frac{\frac{2}{n} - \frac{2c}{n}z}{S^2} + \text{etc.}$$

Problema 3.

Diuidere Trinomium $1 \pm 2lz^n + z^{2n}$ *in suos factores primitiuos.*

Sint hi $Q^2 = 1 - 2az + z^2$, $R^2 = 1 - 2bz + z^2$, $S^2 = 1 - 2cz + z^2$, etc. qui in se inuicem ducti producunt seriem theoremate praecedente exhibitam. Quare si in hac serie, vt ibi, omnes post primum terminos euanescere faciamus, vsque ad terminum $\omega^n b^n z^n$, euanescent pariter omnes sequentes post hunc vsque ad terminum $+ z^{2n}$, ita vt tota series tunc in trinomium $1 + \omega^n b^n z^n + z^{2n}$ abeat, vel posita $\omega^n b^n = \pm 2l$, in $1 \pm 2lz^n + z^{2n}$. Omnes reliquae coefficientes αb,

$\beta^2 b^2, \gamma^3 b^3$, etc. eosdem valores habebunt ac in dicto theoremate, excepto termino $\omega^n b^n$ qui ad aestimationem quam in theoremate habet ascifcet adhuc $+ 2l$. Hoc modo series Corollarii 1 Theorematis mutabitur in $b^n x^n - D b^{n-2} x^{n-2} + E b^{n-4} x^{n-4} - F b^{n-6} x^{n-6} +$ etc. $\mp 2l = o$, quae ipsissima est series Lemmatis praecedentis pro diuisione arcus A in n partes. Hic autem arcus A erit quadrante minor, cum l est numerus affirmatiuus, et quadrante maior, cum est numerus negatiuus. Series hic inuenta tot radices habet (per Coroll. 2 Lemm.) quot sunt cosinus arcuum huius seriei $\frac{A}{n}, \frac{C-A}{n}, \frac{C+A}{n}, \frac{2C-A}{n}, \frac{2C+A}{n}, \frac{3C-A}{n}, \frac{3C+A}{n}$, etc. per tot terminos continuatae, quot vnitates sunt in exponente n. Q. E. I.

Quoniam l denotat cosinum arcus A cum sinus totus est 1, l semper minor esse debet quam 1, aut $l = 1$.

Sed si l vnitate maior est, trinomium $1 \pm 2lz^n + z^{2n}$ debet primum in duos factores binomios $\mp p + z^n$, et $\pm q + z^n$ resolui, existentibus $p = l + \sqrt{(ll - 1)}$, et $q = l - \sqrt{(ll - 1)}$. Factis deinceps $x = z \times \frac{1}{\sqrt[n]{p}}$, et $y = z \times \frac{1}{\sqrt[n]{q}}$, et fient $\pm p + z^n = \pm (1 + x^n) \times p$, et $\pm q + z^n = \pm 1 + y^n \times q$; nam binomia $1 + x^n$, et $1 + y^n$ per Theorema superius in superius in factores suos primitiuos resolui potest.

Problema 4.

Diuidere fractionem $\frac{1}{1 - 2lz^n + z^{2n}}$ *in suas fractiones primitiuas.*

Di-

Dicatur nunc Trinomium $1-2lz^n+z^{2n}=Z$, et fiat $\frac{1-2lz^n+z^{2n}}{(l-z^n)^2}=\frac{Z}{(l-z^n)^2}$, ac differentiando logarithmice $\frac{-2lnz^{n-1}dz+2nz^{2n-1}dz}{1-2lz^n+z^{2n}}+\frac{2nz^{n-1}dz}{l-z^n}$ (vel reducendo has fractiones ad eandem denominationem) $=\frac{(2n-2ln)z^{n-1}dz}{(l-z^n)\times 1-2lz^n+z^{2n}}=\frac{dZ}{Z}+\frac{2nz^{n-1}dz}{l-z^n}$, vel ducta hac in $\frac{l-z^n}{2z^{n-1}dz}$, haec $\frac{n-lln}{1-2lz^n+z^{2n}}=\frac{(l-z^n)\times dZ}{2z^{n-1}Zdz}+n$. Sed propter $\frac{dZ}{Zdz}=\frac{2z-2a}{Q^2}+\frac{2z-2b}{R^2}+\frac{2z-2c}{S^2}+$ etc. fiet $\frac{l-z^n\times dZ}{2z^{n-1}Zdz}=\left(\frac{-alz^{1-n}+lz^{2-n}+az-z^2}{Q^2}\right)$ $+\left(\frac{-bz^{1-n}+lz^{2-n}+bz-z^2}{R^2}\right)+\left(\frac{-clz^{1-n}+lz^{2-n}+cz-z^2}{S^2}\right)$ $+$ etc. et $\frac{(l-z^n)\times dz}{2z^{n-1}Zdz}+n=\left(\frac{-clz^{1-n}+lz^{2-n}+1-cz}{Q^2}\right)$ $+\left(\frac{-blz^{1-n}+lz^{2-n}+1-bz}{R^2}\right)+\left(\frac{-clz^{1-n}+lz^{2-n}+1-cz}{S^2}\right)$ etc. quare $\frac{n-lln}{1-2lz^n+z^{2n}}$ $\left(=\frac{l-z^n\times dZ}{2z^{n-1}Zdz}+n\right)=$ $\left(\frac{-alz^{1-n}+lz^{2-n}+1-az}{Q^2}\right)+\left(\frac{-blz^{1-n}+lz^{2-n}+1-bz}{R^2}\right)$ $+\left(\frac{-clz^{1-n}+lz^{2-n}+1-cz}{S^2}\right)+$ etc. Sit $K=$ $\beta z^{1-n}+\gamma z^{2-n}+\delta z^{3-n}$ et sic vsque ad $+\lambda z^{-1}$, eritque $KQ^2=\beta z^{1-n}+\gamma z^{2-n}+\delta z^{3-n}+$ etc. $-2a\lambda$

$-2a\beta \quad -2a\gamma \qquad\qquad +\kappa$

$\qquad\quad\;\; +1+\beta$

 $+\lambda z$

$+\lambda z$, vbi κ est coefficiens quae terminum λ praecedit; haec vero aequatio mutabitur in $KQ^2 = alz^{1-n} - lz^{2-n} - 2a\lambda + \kappa + \lambda z$, si α, β, γ, δ, etc. denotant cosinus arcuum $\frac{0A}{n}$, $\frac{1A}{n}$, $\frac{2A}{n}$ vsque ad $\frac{n-1.A}{n}$ inclusiue per l multiplicatos. Nominando vero cosinum arcus $\frac{n-1.A}{n}$, f; erit $\lambda = fl$, et $2a\lambda - \kappa$ inuenietur esse cosinus $\frac{nA}{n} = A$, per l multiplicatus, est ergo $2a\lambda - \kappa = ll$, quare euadit $KQ^2 = alz^{1-n} - lz^{2-n} - ll + flz$. Hinc $-alz^{1-n} + lz^{2-n} + 1 - az = -KQ^2 + 1 - ll + (fl - a)z$, adeoque

$$\frac{-alz^{1-n} + lz^{2-n} + 1 - az}{Q^2} = \frac{1 - ll - (a + fl)z}{Q^2} - K;$$

$$\frac{-blz^{1-n} + lz^{2-n} + 1 - bz}{R^2} = \frac{1 - ll - (b + gl)z}{R^2} - L;$$

$$\frac{-clz^{1-n} + lz^{2-n} + 1 - cz}{S^2} = \frac{1 - ll - (c + hl)z}{S^2} - M;$$

etc. Vbi L, M etc. sunt series eodem modo formatae ex R^2 et S^2, etc. ac K formata fuit ex Q^2, et g, h, designant cosinus arcuum $\frac{(n-1)(C-A)}{n}$, $\frac{(n-1)(C+A)}{n}$, etc. quemadmodum f significat cosinum arcus $\frac{n-1.A}{n}$. Hanc ob causam inuenitur

$$\frac{n - lln}{1 - 2lz^n + z^n} = \frac{1 - ll - (a + fl)z}{Q^2} + \frac{1 - ll - (b + gl)z}{R^2} + \frac{1 - ll - (c + hl)z}{S^2} + \text{etc.} - K - L - M - \text{etc.}$$

Sed propter $a + b + c +$ etc. $= 0$, fit etiam $K + L + M +$ etc. $= 0$, adeoque $\frac{n - lln}{1 - 2lz^n + z^{2n}} = \frac{1 - ll - (a + fl)z}{Q^2} + \frac{1 - ll - (b + gl)z}{R^2} + \frac{1 - ll - (c + hl)z}{S^2} +$ etc. et diuidendo per

$n - ll$

$n-lln$, haec $\frac{1}{1-2lz^n+z^{2n}} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{fl-a}{n-lln}}{Q^2} + \frac{\frac{1}{n}+\frac{gl-b}{n-lln}}{R^2}$

$+\frac{\frac{1}{n}+\frac{bl-c}{n-lln}}{S^2}+$ etc. Q. E. I.

Corollarium.

Si $l=0$, inuenietur posito $\lambda=2n$, $\frac{1}{1+z^\lambda} =$

$\frac{\frac{2}{\lambda}-\frac{2az}{\lambda}}{Q^2}+\frac{\frac{2}{\lambda}-\frac{2bz}{\lambda}}{R^2}+\frac{\frac{2}{\lambda}-\frac{2cz}{\lambda}}{S^2}+$ etc. vt in Probl. 1.

Problema 5.

Diuidere fractionem $\frac{1}{1+2lz^n+z^{2n}}$ *in suas primitiuas.*

Posita iterum $Z=1+2lz^n+z^{2n}$, inuenietur simili prorsus processu ac in praecedenti problemate $\frac{lln-n}{1+2lz^n+z^{2n}}$

$=\frac{-alz^{1-n}+lz^{2-n}+1+az}{Q^2}+\frac{-blz^{1-n}+lz^{2-n}-1+bz}{R^2}+$

$\frac{-clz^{1-n}+lz^{2-n}-1+cz}{S^2}+$ etc. Fiat et nunc $K=$

$\beta z^{1-n}+\gamma z^{2-n}+\delta z^{3-n} \ldots \ldots x z^{n-2}+\lambda z^{n-1}$,

et erit hic quoque $KQ^2=alz^{1-n}-lz^{2-n}-2a\lambda+x$

$+\lambda z$, et $\frac{2a\lambda-x}{l}=-l$, seu cosinui arcus A quadrante maioris, et $\frac{\lambda}{1}=f$ cosinui arcus $\frac{n-1.A}{n}$, et operando deinceps ad ductum Probl. praec. inuenietur $\frac{1}{1+2lz^n+z^{2n}}$

$=$

$$= \frac{\frac{1}{n} - \left(\frac{a+fl}{n-lln}\right)z}{Q^2} + \frac{\frac{1}{n} - \left(\frac{b+gl}{n-lln}\right)z}{R^2} + \frac{\frac{1}{n} - \left(\frac{c+hl}{n-lln}\right)z}{S^2} + \text{etc.}$$

Q. E. I.

Atque haec ſunt quibus methodum meam iam anno 1719. in Actis Eruditorum pag. 351. expoſitam breuiter illuſtrare, et occaſione inuentorum Cel. *Moyvrei* paululum extendere, viſum eſt. Superuacaneum iudico oſtendere quomodo ſuperiores formulae in formas *Coteſii* ſint transfundendae, cum hoc ſit negotium ad purum calculum algebraicum ſpectans à quolibet Analyſta facile expediendum.

DE FORMIS RADICVM AEQVATIONVM CVIVSQVE ORDINIS CONIECTATIO.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

SVmmopere admirandum videtur, quod, cum ipſis rei analyticae initiis radices aequationum cubicarum et biquadraticarum eſſent inuentae, his tamen temporibus, quibus analyſis maxima augmenta accepit, modus adhuc lateat altiorum aequationum radices eruendi: praeſertim, cum haec res continuo a praeſtantiſſimis ingeniis maximo ſtudio ſit inueſtigata. Quo ſtudio, quanquam quaeſito parum eſt ſatisfactum: egregia tamen ad quasque aequationes tractandas ſubſidia ſunt detecta. Quamobrem

obrem neminem puto fore, qui hoc meum institutum, quo, quas formas habeant aequationum radices, et qua via eae forte inueniri possint, ostendo, etiamsi plus non praestiterim, sit reprehensurus. Alios enim fortasse magis iuuare, atque tandem ad intentum scopum perducere, poterit.

§. 2. Cum aequatio cuiusque potestatis omnes inferiores in se comprehendat, facile perspicitur, methodum quoque radicem ex quaque aequatione extrahendi ita esse comparatam, vt omnium inferiorum aequationum methodos inuoluat. Quamobrem inuentio radicis ex aequatione sex dimensionum haberi non potest, nisi eadem antea constet de aequationibus quinti, quarti, et tertii gradus. Ita videmus *Bombellii* methodum, ex aequationibus biquadraticis radices extrahendi, perducere ad resolutionem aequationis cubicae; atque cubicae aequationis radicem definiri non posse sine quadraticae aequationis resolutione.

§. 3. Resolutionem aequationis cubicae sequenti modo a quadratica pendentem considero. Sit aequatio cubica $x^3 = ax + b$, in qua secundus terminus deest, huius radicem x dico fore $= \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$; existentibus A et B duabus radicibus aequationis cuiusdam quadraticae $z^2 = \alpha z - \mathfrak{E}$. Quamobrem ex natura aequationum erit $A + B = \alpha$ et $AB = \mathfrak{E}$. Sed ad α et $\mathfrak{E}$ ex a et b definiendas sumo aequationem $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$; quae cubice multiplicata dat $x^3 = A + B + 3\sqrt[3]{BA}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) = 3x\sqrt[3]{AB} + A + B$. Quae cum proposita

$x^3 = ax + b$ comparata dabit $a = 3\sqrt[3]{AB} = 3\sqrt[3]{\mathfrak{E}}$, et $b = A + B = \alpha$. Fiet igitur $\alpha = b$ et $\mathfrak{E} = \frac{a^3}{27}$; quocirca aequatio quadratica resolutioni aequationis $x^3 = ax + b$ dicto modo inseruiens erit $z^2 = bz - \frac{a^3}{27}$. Huius enim radicibus cognitis A et B, erit $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$.

§. 4. Sed cum radix cubica ex quaque quantitate triplicem habeat valorem, haec formula $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ omnes etiam radices aequationis propositae complectetur. Sint enim μ et ν praeter vnitatem radices cubicae ex vnitate, erit etiam $x = \mu\sqrt[3]{A} + \nu\sqrt[3]{B}$, si modo sit $\mu\nu = 1$. Quamobrem μ et ν esse debebunt $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, vel inuerse. Praeter radicem igitur $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ satisfacient quoque propositae hae duae alterae radices $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A} - \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{B}$, et $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A} - \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{B}$. Hacque ratione aequationis cubicae etiam, in qua secundus terminus non deest, radices determinari poterunt.

§. 5. Aequationes biquadraticae variis modis ad cubicas reduci solent, quorum autem nullus instituto meo vtilitatem afferre potest. Sed mihi est peculiaris methodus idem efficiendi, atque priori, qua cubicae ad quadraticas reducuntur, similis, ita vt exinde quodammodo concludi possit, quomodo aequationes altiorum graduum debeant tractari. Vt si proposita sit haec aequatio

$x^4 =$

$x^4 = ax^2 + bx + c$ in qua itidem secundus terminus deest; dico fore $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ at A, B et C esse tres radices ex aequatione quadam cubica $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$. Hanc ob rem erit $\alpha = A + B + C$, $\beta = AB + AC + BC$ et $\gamma = ABC$. Quo autem α, β et γ determinentur, aequatio $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ ab irrationalitate liberetur, hoc modo: Sumantur quadrata erit $x^2 = A + B + C + 2\sqrt{AB} + 2\sqrt{AC} + 2\sqrt{BC}$ hincque $x^2 - \alpha = 2\sqrt{AB} + 2\sqrt{AC}$ $2\sqrt{BC}$. Sumendis denuo quadratis fit $x^4 - 2\alpha x^2 + \alpha^2 = 4AB + 4AC + 4BC + 8\sqrt{ABC}(\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}) = 4\beta + 8x\sqrt{\gamma}$, seu $x^4 = 2\alpha x^2 + 8x\sqrt{\gamma} + 4\beta - \alpha^2$. Haec aequatio comparata cum proposita $x^4 = ax^2 + bx + c$ dabit $2\alpha = a$, $8\sqrt{\gamma} = b$ et $4\beta - \alpha^2 = c$, ex quibus prodit $\alpha = \frac{a}{2}$, $\gamma = \frac{b^2}{64}$, $\beta = \frac{c}{4} + \frac{a^2}{16}$. Aequatio ergo cubica resolutioni aequationis biquadraticae inseruiens est $z^3 = \frac{a}{2}z^2 - \frac{4c - a^2}{16}z + \frac{b^2}{64}$. Huius enim radices, si sint A, B, et C, erit $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$. At reliquae tres radices ex aequatione proposita erunt $\sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}$, $\sqrt{B} - \sqrt{A} - \sqrt{C}$ et $\sqrt{C} - \sqrt{A} - \sqrt{B}$.

§. 6. Ponatur $z = \sqrt{t}$ erit $(t + \frac{4c + a^2}{16})\sqrt{t} = \frac{at}{2} + \frac{b^2}{64}$, et sumendis quadratis habebitur $t^3 + \frac{4c + a^2}{8}t^2 + \frac{(4c + a^2)^2}{256}t = \frac{a^2 t^2}{4} + \frac{ab^2 t}{64} + \frac{b^4}{4096}$ seu $t^3 = (\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2})t^2 + (\frac{ab^2}{64} - \frac{cc}{16} - \frac{a^2 c}{32} - \frac{a^4}{256})t + \frac{b^4}{4096}$. Haec aequatio ergo hanc habet proprietatem, vt eius radices sint radices quadratae radicum prioris aequationis, A, B et C. Quare si huius aequationis radices ponantur E, F, G, erit $x = \sqrt[4]{E} + \sqrt[4]{F} + \sqrt[4]{G}$. Datur itaque aequatio cubica cuius radi-

 cum

cum radices biquadraticae simul sumtae constituant radicem aequationis biquadraticae propositae. Atque haec methodus inueniendi radices ex aequatione biquadratica, etiamsi sit priori operosior, maiorem habet affinitatem cum resolutione aequationum cubicarum, cum eiusdem potestatis radix extrahatur ex radicibus aequationis inferioris, cuius est ipsa aequatio proposita.

§. 7. Simili ratione etiam aequatio quadratica $x^2 = a$, in qua secundus terminus deest, resoluetur ope aequationis vnius dimensionis $z = a$. Huius enim radix est a, atque radix aequationis propositae $x = \sqrt{a}$, vel $x = -\sqrt{a}$. Huiusmodi autem aequationem ordine inferiorem, cuius ope aequatio superior secundo termino carens resoluitur, vocabo *aequationem resoluentem*. Ita aequationis quadraticae $x^2 = a$ aequatio resoluens erit $z = a$; aequationis cubicae $x^3 = ax + b$, aequatio resoluens erit $z^2 = bz - \frac{a^3}{27}$. Atque aequationis biquadraticae $x^4 = ax^2 + bx + c$ aequatio resoluens est $z^3 = (\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2})z^2 - (\frac{a^4}{256} + \frac{a^2c}{32} + \frac{c^2}{16} - \frac{ab^2}{64})z + \frac{b^4}{4096}$. Pro quadratica enim aequatione, si aequationis resoluentis radix sit A, erit $x = \sqrt{A}$. Pro cubica vero aequatione, si resoluentis radices sint A et B, erit $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$. Atque pro biquadratica aequatione, existentibus resoluentis aequationis radicibus A, B et C, erit $x = \sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B} + \sqrt[4]{C}$.

§. 8. Ex his etiamsi tribus tantum casibus tamen non sine sufficienti ratione mihi concludere videor, superiorum

riorum quoque aequationum dari huiusmodi aequationes resoluentes. Sic proposita aequatione $x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ coniicio dari aequationem ordinis quarti $z^4 = \alpha z^3 - \beta z^2 + \gamma z - \delta$, cuius radices, si sint A, B, C et D, fore $x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B} + \sqrt[5]{C} + \sqrt[5]{D}$. Et generatim aequationis $x^n = ax^{n-2} + bx^{n-3} + cx^{n-4} +$ etc. aequatio resoluens, prout suspicor, erit huius formae, $z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3} + \gamma z^{n-4} -$ etc. cuius cognitis radicibus omnibus numero $n-1$, quae sint, A, B, C, D, etc. erit $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D} +$ etc. Haec igitur coniectura, si esset veritati consentanea, atque si aequationes resoluentes possent determinari, cuiusque aequationis in promtu foret radices assignare; perpetuo enim perueniretur ad aequationem ordine inferiorem, hocque modo progrediendo tandem vera aequationis proposita radix innotescet.

§. 9. Quanquam autem, si aequatio proposita plures quam quatuor habet dimensiones, aequationem resoluentem definire adhuc non possum: tamen praesto sunt non nullius momenti argumenta, quibus ista mea coniectura confirmatur. Si enim aequatio proposita ita est comparata, vt in aequatione resoluente omnes termini praeter tres primos euanescant; tum semper ipsa aequatio resoluens poterit exhiberi, atque ideo aequationis propositae radices assignari. Aequationes autem, quae hoc modo resolutionem admittunt, sunt eae ipsae, quas Cl. *Abr. de Moivre* in Transact. n. 309. pertractauit. Sit enim aequatio resoluens $z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3}$ seu $z^2 =$

 $\alpha z - \beta$,

ex hacque aequationem resoluendam erui oporteat. Sint huius aequationis radices A et B, reliquae enim radices omnes euanescunt, erit aequationis resoluendae radix $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$. Est vero $\alpha = A + B$ et $\mathfrak{C} = AB$ ex natura aequationum. Hinc ergo erit $\sqrt[n]{A^2} + \sqrt[n]{B^2} = x^2 - 2\sqrt[n]{\mathfrak{C}}$. atque porro

$$\sqrt[n]{A^3} + \sqrt[n]{B^3} = x^3 - 3x\sqrt[n]{\mathfrak{C}}$$
$$\sqrt[n]{A^4} + \sqrt[n]{B^4} = x^4 - 4x^2\sqrt[n]{\mathfrak{C}} + 2\sqrt[n]{\mathfrak{C}^2}$$
$$\sqrt[n]{A^5} + \sqrt[n]{B^5} = x^5 - 5x^3\sqrt[n]{\mathfrak{C}} + 5x\sqrt[n]{\mathfrak{C}^2}$$

atque tandem

$$\sqrt[n]{A^n} + \sqrt[n]{B^n} = x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\mathfrak{C}} + \frac{n(n-3)}{1.2}x^{n-4}\sqrt[n]{\mathfrak{C}^2} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}x^{n-6}\sqrt[n]{\mathfrak{C}^3} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2.3.4}x^{n-8}\sqrt[n]{\mathfrak{C}^4} - \text{etc.} = \alpha.$$

Quae est aequatio resoluenda, cuius resoluens est $z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \mathfrak{C}z^{n-3}$, seu $z^2 = \alpha z - \mathfrak{C}$.

§. 10. Non solum autem hoc modo aequationis $x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\mathfrak{C}} + \frac{n(n-3)}{1.2}x^{n-4}\sqrt[n]{\mathfrak{C}^2} - \text{etc.} = \alpha$ vnica radix inuenitur $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$; sed satisfacit etiam quaelibet alia $x = \mu\sqrt[n]{A} + \nu\sqrt[n]{B}$, modo sit $\mu^n = \nu^n = \mu\nu = 1$, id quod n diuersis modis fieri potest. Vt si sit $n = 5$, aequationis $x^5 - 5x^3\sqrt[5]{\mathfrak{C}} + 5x\sqrt[5]{\mathfrak{C}^2} = \alpha$ radices quinque erunt vt sequuntur:

I.

I. $x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B}$

II. $x = \frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} - \frac{1-\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}$

III. $x = \frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} - \frac{1-\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}$

IV. $x = \frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} - \frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}$

V. $x = \frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} - \frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}$.

Hi enim coefficientes omnes ſunt radices ſurſolidae ex vnitate, et factum ex binis coniunctis eſt $= 1$. Simili modo praeter ipſam vnitatem ſunt ſex radices poteſtatis ſeptimae ex vnitate, harumque tria paria multiplicatione vnitatem producentia, quae ſunt ſex radices huius aequationis $y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0$. Ad has autem inueniendas tantum opus eſt reſolutione aequationis cubicae; omnis enim aequatio poteſtatis ſextae huius formae $y^6 + ay^5 + by^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$, quae non mutatur poſito $\frac{1}{y}$ loco y, reſolui poteſt ope aequationis cubicae. Quod quemadmodum fiat, cum ad inueniendas radices ſaepe vtilitatem habere poſſit, breui ſum oſtenſurus.

§. 11 Aequationes huiusmodi, quae poſito $\frac{1}{y}$ loco y formam non mutant, voco *reciprocas*. Hae ſi maximus ipſius y dimenſionum numerus eſt impar, ſemper diuidi poſſunt per $y + 1$; et aequatio reſultans etiam erit reciproca, in qua maxima ipſius y dimenſio erit par. Quamobrem ſufficiet parium tantum dimenſionum aequationes reciprocas conſideraſſe, atque modum earum reſoluendarum expoſuiſſe. Sit igitur primo aequatio pro-

proposita quartae potestatis haec $y^4+ay^3+by^2+ay+1=0$, ponatur haec factum ex duabus quadraticis $y^2+\alpha y+1=0$ et $y^2+\beta y+1=0$. Quo facto fiet $\alpha+\beta=a$ et $\alpha\beta+2=b$, seu $\alpha\beta=b-2$. Quare α et β erunt duae radices huius aequationis $u^2-au+b-2=0$, hacque ratione quatuor aequationis propositae radices ope aequationum tantum quadraticarum innotescent. Aequatio reciproca sextae potestatis $y^6+ay^5+by^4+cy^3+by^2+ay+1=0$, ponatur factum trium harum quadraticarum $y^2+\alpha y+1=0$, $y^2+\beta y+1=0$, et $y^2+\gamma y+1=0$. Hinc fiet $\alpha+\beta+\gamma=a$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=b-3$, et $\alpha\beta\gamma=c-2\alpha-2\beta-2\gamma=c-2a$. Quare α, β, et γ erunt tres radices huius aequationis cubicae $u^3-au^2+(b-3)u-c+2a=0$. Similiter aequatio reciproca octauae potestatis $y^8+ay^7+by^6+cy^5+dy^4+cy^3+by^2+ay+1=0$, est factum ex quatuor aequationibus quadraticis $y^2+\alpha y+1=0$, $y^2+\beta y+1=0$, $y^2+\gamma y+1=0$, et $y^2+\delta y+1=0$, ex quo prodibit $\alpha+\beta+\gamma+\delta=a$, $\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=b-4$, $\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=c-3a$, et $\alpha\beta\gamma\delta=d-2b+2$. Coefficientes ergo $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ sunt quatuor radices huius aequationis $u^4-au^3+(b-4)u^2-(c-3a)u+d-2b+2=0$. Aequatio ordinis decimi $y^{10}+ay^9+by^8+cy^7+dy^6+ey^5+dy^4+cy^3+by^2+ay+1=0$ factum erit harum quinque $y^2+\alpha y+1=0$, $y^2+\beta y+1=0$, $y^2+\gamma y+1=0$, $y^2+\delta y+1=0$, $y^2+\varepsilon y+1=0$, in quibus $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ sunt quinque radices huius aequationis $u^5-au^4+(b-5)u^3-(c-4a)u^2+(d-3b+5)u-e+2c-2a=0$.

Atque

Atque generatim aequatio reciproca $y^{2n} + ay^{2n-1} + by^{2n-2} + cy^{2n-3} + dy^{2n-4} + ey^{2n-5} + fy^{2n-6} + - - - - - + py^n + - - - - + fy^6 + ey^5 + dy^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$, resoluetur in has numero n aequationes quadraticas $y^2 + \alpha y + 1 = 0$, $y^2 + \beta y + 1 = 0$, $y^2 + \gamma y + 1 = 0$, $y^2 + \delta y + 1 = 0$ etc. At coefficientes α, β, γ, δ, etc. erunt radices huius aequationis n dimensionum.

$$u^n - au^{n-1} \left.\begin{matrix} +b \\ -n \end{matrix}\right\} u^{n-2} \left.\begin{matrix} -c \\ +(n-1)a \end{matrix}\right\} u^{n-3} \left.\begin{matrix} +d \\ -(n-2)b \\ +\frac{n(n-3)}{1.2} \end{matrix}\right\} u^{n-4} \left.\begin{matrix} -e \\ +(n-3)c \\ -\frac{(n-1)(n-4)}{1.2}a \end{matrix}\right\}$$

$$u^{n-5} \left.\begin{matrix} +f \\ -(n-4)d \\ +\frac{(n-2)(n-5)}{1.2.}b \\ -\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3.} \end{matrix}\right\} u^{n-6} \left.\begin{matrix} -g \\ +(n-5)e \\ -\frac{(n-3)(n-6)}{1.2}c \\ +\frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1.2.3}a \end{matrix}\right\} u^{n-7} \left.\begin{matrix} +h \\ -(n-6)f \\ +\frac{(n-4)(n-7)}{1.2}d \\ -\frac{(n-2)(n-6)(n-7)}{1.2.3}b \\ +\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4} \end{matrix}\right\} u^{n-8} - \text{etc.}$$

§. 12. Quia cuiuslibet aequationis quadraticae, diuidentis aequationem propositam, terminus extremus est vnitas, perspicuum est, binarum radicum aequationis propositae factum esse vnitatem. Huiusmodi igitur duae semper cum duobus membris $\sqrt[n]{A}$ et $\sqrt[n]{B}$ sunt coniungendae, quo aequationis §. 9 propositae omnes obtineantur radices.

§. 13. Si in aequatione reciproca omnes termini praeter extremos et medium deficiant, vt in $y^{2n} + py^n + 1 = 0$, diuisores eius $y^2 + \alpha y + 1$, $y^2 + \beta y + 1$, $y^2 + \gamma y + 1$, etc. habebuntur substituendis pro $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. radicibus huius aequationis, $u^n - nu^{n-2} +$

$\frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}u^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}u^{n-6} +$ etc. $\pm p = o$, vbi $+p$ accipi debet si n est numerus par, et $-p$ si n est impar. Ex quo apparet, hanc aequationem conuenire cum aequatione $x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\beta} +$ etc. $-- = \alpha$ §. 9 resoluta, et hanc ob rem omnes diuisores posse assignari.

§. 14. Magnam isthaec in factores resolutio formulae $y^{2n} + py^n + 1$ habet vtilitatem in integranda formula differentiali $\frac{dy}{y^{2n} + py^n + 1}$ iam saepius a Geometris pertractata. Denominatore enim in suos factores $y^2 + \alpha y + 1$, $y^2 + \beta y + 1$, etc. resoluto tota integratio ad quadraturam circuli vel hyperbolae reducitur. Praeterea hoc plurimum iuuat, quod aequatio $u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}u^{n-4} -$ etc. $\pm p = o$, ex qua α, β, γ etc. determinantur, sectionem arcus circularis in n partes complectatur, atque ita coefficientes α, β, γ, etc. facillime inueniantur.

§. 15. Reuertamur autem ad modum ex aequationibus resoluentibus ipsas aequationes resoluendas eliciendi. Sitque aequatio resoluens $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$, cuius tres radices sint A, B, C; erit ergo $\alpha = A + B + C$; $\beta = AB + AC + BC$ et $\gamma = ABC$. Radix itaque aequationis resoluendae x erit $= \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}$, atque ponatur $p = \sqrt[n]{AB} + \sqrt[n]{AC} + \sqrt[n]{AC}$. His factis erit $\sqrt[n]{A^2} + \sqrt[n]{B^2} + \sqrt[n]{C^2} = x^2 - 2p$, et $\sqrt[n]{A^2 B^2} + \sqrt[n]{A^2 C^2} + \sqrt[n]{B^2 C^2} = p^2 - 2x\sqrt[n]{\gamma}$. Atque porro, vt sequitur:

$\sqrt[n]{A}$

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt[n]{A^3}+\sqrt[n]{B^3}+\sqrt[n]{C^3}=x^3-3px+3\sqrt[n]{\gamma} \\ \sqrt[n]{A^3B^3}+\sqrt[n]{A^3C^3}+\sqrt[n]{B^3C^3}=p^3-3px\sqrt[n]{\gamma}+3\sqrt[n]{\gamma^2}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt[n]{A^4}+\sqrt[n]{B^4}+\sqrt[n]{C^4}=x^4-4px^2+4x\sqrt[n]{\gamma}+2p^2 \\ \sqrt[n]{A^4B^4}+\sqrt[n]{A^4C^4}+\sqrt[n]{B^4C^4}=p^4-4p^2x\sqrt[n]{\gamma}+4p\sqrt[n]{\gamma^2} \\ \qquad +2x^2\sqrt[n]{\gamma^2}\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt[n]{A^5}+\sqrt[n]{B^5}+\sqrt[n]{C^5}=x^5-5px^3+5x^2\sqrt[n]{\gamma}+5p^2x-5p\sqrt[n]{\gamma} \\ \sqrt[n]{A^5B^5}+\sqrt[n]{A^5C^5}+\sqrt[n]{B^5C^5}=p^5-5p^3x\sqrt[n]{\gamma}+5p^2\sqrt[n]{\gamma^2} \\ \qquad +5px^2\sqrt[n]{\gamma^2}-5x\sqrt[n]{\gamma^3}\end{array}\right.$$

Quemadmodum haec tabula sit vlterius continuanda facile perspicitur. Namque est $\sqrt[n]{A^m}+\sqrt[n]{B^m}+\sqrt[n]{C^m}$ $=x(\sqrt[n]{A^{m-1}}+\sqrt[n]{B^{m-1}}+\sqrt[n]{C^{m-1}})-p(\sqrt[n]{A^{m-2}}+\sqrt[n]{B^{m-2}}+\sqrt[n]{C^{m-2}})+\sqrt[n]{\gamma}.\ (\sqrt[n]{A^{m-3}}+\sqrt[n]{B^{m-3}}+\sqrt[n]{C^{m-3}})$. Atque $\sqrt[n]{A^mB^m}+\sqrt[n]{A^mC^m}+\sqrt[n]{B^mC^m}=p$ $(\sqrt[n]{A^{m-1}B^{m-1}}+\sqrt[n]{A^{m-1}C^{m-1}}+\sqrt[n]{B^{m-1}C^{m-1}})-x\sqrt[n]{\gamma},$ $(\sqrt[n]{A^{m-2}B^{m-2}}+\sqrt[n]{A^{m-2}C^{m-2}}+\sqrt[n]{B^{m-2}C^{m-2}})+\sqrt[n]{\gamma^2}$ $(\sqrt[n]{A^{m-3}B^{m-3}}+\sqrt[n]{A^{m-3}C^{m-3}}+\sqrt[n]{B^{m-3}C^{m-3}})$.

§. 16. Alias etiam harum progressionum non contemnendas obseruaui proprietates. Posito enim $\sqrt[n]{A^m}$

 +

$+\sqrt[n]{B^m}+\sqrt[n]{C^m}=R$, et $\sqrt[n]{A^mB^m}+\sqrt[n]{A^mC^m}+\sqrt[n]{B^mC^m}=S$, erit $\sqrt[n]{A^{2m}}+\sqrt[n]{B^{2m}}+\sqrt[n]{C^{2m}}=R^2-2S$, et $\sqrt[n]{A^{2m}B^{2m}}+\sqrt[n]{A^{2m}C^{2m}}+\sqrt[n]{B^{2m}C^{2m}}=S^2-2R\sqrt[n]{\gamma^m}$. Simili modo est quoque $\sqrt[n]{A^{3m}}+\sqrt[n]{B^{3m}}+\sqrt[n]{C^{3m}}=R^2-3RS+3\sqrt[n]{\gamma^m}$, et $\sqrt[n]{A^{3m}B^{3m}}+\sqrt[n]{A^{3m}C^{3m}}+\sqrt[n]{B^{3m}C^{3m}}=S^3-3RS\sqrt[n]{\gamma^m}+3\sqrt[n]{\gamma^{2m}}$. Atque hoc modo haec series procedit prorsus vt ipsa praecedens.

§. 17. Si sit $n=2$; erit $\alpha=x^2-2p$ et $\beta=p^2-2x\sqrt{\gamma}$; hisque duabus aequationibus coniunctis habebitur $x=\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$ et $p=\sqrt{AB}+\sqrt{AC}+\sqrt{BC}$, sunt autem A, B et C tres radices huius aequationis cubicae $z^3=\alpha z^2-\beta z+\gamma$. Eliminata ergo ex illis duabus aequationibus littera p, prodibit $\left(\frac{x^2-\alpha}{2}\right)^2-2x\sqrt{\gamma}=\beta$ seu $x^4-2\alpha x^2-8x\sqrt{\gamma}=4\beta-\alpha^2$, cuius aequationis itaque radix x est cognita, quippe $=\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$, quae aequatio illi est consentanea, quae §. 5. est resoluta. Simili modo si quando duae huiusmodi aequationes occurrent $x^3-3px+3\sqrt[3]{\gamma}=\alpha$ et $p^3-3px\sqrt[3]{\gamma}+3\sqrt[3]{\gamma^2}=\beta$, erit $x=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{C}$ et $p=\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{AC}+\sqrt[3]{BC}$, existentibus A, B et C radicibus aequationis $z^3=\alpha z^2-\beta z+\gamma$, vt ante. Vel eliminata littera p prodibit aequatio inter x, α, β, γ, cuius radix x innotescet. Eodem prorsus modo occurrentibus duabus hisce aequationibus x^4-

$4px^2$

$4px^2 + 4x\sqrt[4]{\gamma} + 2p^2 = \alpha$ et $p^4 - 4p^2 x\sqrt[4]{\gamma} + 4p\sqrt{\gamma} + 2x^2\sqrt{\gamma} = \beta$, erit $x = \sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B} + \sqrt[4]{C}$ et $p = \sqrt[4]{AB} + \sqrt[4]{AC} + \sqrt[4]{BC}$, at iterum ſunt A, B et C radices huius aequationis $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$. Quo p facilius eliminetur, ponatur $x^2 - 2p = R$, et $p^2 - 2x\sqrt[4]{\gamma} = S$, eritque $R^2 - 2S = \alpha$ et $S^2 - 2R\sqrt{\gamma} = \beta$. Iam ex illis duabus aequationibus exterminata p habebitur $x^4 = 2Rx^2 + 8x\sqrt[4]{\gamma} + 4S - R^2$. Comparetur haec aequatio cum iſta $x^4 = ax^2 + bx + c$, erit $R = \frac{a}{2}$, $\sqrt[4]{\gamma} = \frac{b}{8}$ ſeu $\gamma = \frac{b^4}{4096}$, et $S = \frac{c}{4} + \frac{a^2}{16}$. Hinc igitur habebitur $\alpha = \frac{a^2}{8} - \frac{c}{2}$ et $\beta = \frac{c^2}{16} + \frac{a^2 c}{32} + \frac{a^4}{256} - \frac{ab^2}{64}$. Quamobrem erunt A, B et C tres radices huius aequationis $z^3 = (\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2})z^2 - (\frac{a^4}{256} + \frac{a^2 c}{32} + \frac{c^2}{16} - \frac{ab^2}{64})z + \frac{b^4}{4096}$, id quod mire conſentit, cum eo, quod §. 7. eſt inuentum.

§. 18. Quoties igitur accidit, vt calculus perducatur ad duas aequationes duas incognitas z et p continentes, quae reperiantur inter formulas §. 15, vtriusque valor poterit aſſignari, etiamſi eliminata altera aequatio prodeat maxime compoſita. Hanc ob rem in his caſibus expediet calculum non ad vnicam aequationem, vnicamque incognitam, deducere, ſed duas aequationes duas incognitas inuoluentes retinere, atque inueſtigare, num forte inter illas formulas contineatur, id quod ſaepius, ſi calculus recte inſtituatur, euenire poſſe mihi perſuaſum eſt.

 §. 19.

§. 19. Quemadmodum autem aequationes resolnentes $z^2 = \alpha z - \beta$ et $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$ tractauimus, ita etiam vlterius est progrediendum ad aequationem $z^4 = \alpha z^3 - \beta z^2 + \gamma z - \delta$ simili modo pertractandam. Scilicet, si eius radices sint A, B, C, et D, ponatur $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D} = x$, et $\sqrt[n]{AB} + \sqrt[n]{AC} + \sqrt[n]{AD} + \sqrt[n]{BC} + \sqrt[n]{BD} + \sqrt[n]{CD} = p$ atque $\sqrt[n]{ABC} + \sqrt[n]{ABD} + \sqrt[n]{ACD} + \sqrt[n]{BCD} = q$, et quaerantur hinc expressiones pro $\sqrt[n]{A^m} + \sqrt[n]{B^m} +$ etc. et $\sqrt[n]{A^m B^m} + \sqrt[n]{A^m C^m} +$ etc. atque pro $\sqrt[n]{A^m B^m C^m} +$ etc. His perficiendis semper trinae inuenientur aequationes x, p et q continentes pro quouis ipsius m valore. Atque simili modo occurentibus tribus huiusmodi aequationibus, tres incognitae constabunt.

§. 20. Suspicor autem posito $x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B} + \sqrt[5]{C} + \sqrt[5]{D}$ aequationem rationalem posse concinnari, in qua x plures quam 5 non habeat dimensiones, etiamsi hoc fere impossibile videatur. Nam quemadmodum §. 17 ex aequationibus $x^4 - 4px^2 + 4x\sqrt[4]{\gamma} + 2p^2 = \alpha$ et $p^4 - 4p^2 x\sqrt[4]{\gamma} + 4p\sqrt{\gamma} + 2x^2\sqrt{\gamma} = \beta$ eliminanda p aequationem non plurium quam 4 dimensionum obtinuimus, quod pariter vix fieri posse videatur, ita etiam pro quinta potestate forte simile artificium vsu venire potest, vt aequatio $x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tandem resolui queat. Quod vero maximum in hoc perficiendo est

est subsidium, eo redit meo iudicio, vt α, β, γ, et δ, ex a, b, c, et d debeant determinari, non vero vicissim; hoc enim casu aequatio ad multo altiorem eueheretur potestatem, quam opus est. Aliis autem, quos huiusmodi occupationes iuuant, hanc rem perficiendam, vel mihi ad aliud tempus, relinquo; hoc solo nunc contentus, me fortasse ideoneam atque genuinam viam ostendisse.

CONSTRVCTIO AEQVATIONIS DIFFERENTIALIS $a x^n dx = dy + y^2 dx$.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Communicaui nuper cum Societate specimen constructionis aequationis cuiusdam differentialis, in qua non solum indeterminatas a se inuicem separare non potueram, sed etiam monstraueram ex ipsa constructione huiusmodi separationem omnino non posse exhiberi. Differt quidem meus ibi datus construendi modus ab vsitatis: attamen iis nequaquam illum esse postponendum quilibet intelliget, qui hanc schedam inspexerit. Neque vero tum temporis hanc methodum vlterius extendere, atque ad alias aequationes accommodare licuit, quia ex posita constructione ad aequationem demum perueneram, non autem vicissim data aequatione constructionem eruere potueram. At deinceps cum hanc

rem

rem diligentius contemplatus essem, voti mei compos quodammodo sum factus, ita vt hanc methodum inuertere, atque propositae aequationis constructionem inuenire potuerim.

§. 2. Selegi igitur statim ad periculum faciendum hanc maxime agitatam aequationem $ax^n dx = dy + y^2 dx$, quam Clar. *Comes Riccati* primum Geometris examinandam proposuit, nemo vero eius constructionem, nisi pro certis litterae n valoribus, dedit. Meae vero methodi beneficio omnes difficultates feliciter superaui, atque vniuersalem huius aequationis constructionem inueni, in qua nihil omnino desiderari queat. Non solum autem vnicam haec methodus suppeditat constructionem, sed plures, immo etiam innumerabiles. Merito igitur mihi videor isti methodo tantam praestantiam adscribere, vt ad omnes aequationes differentiales construendas, in quibus aliae methodi frustra sunt adhibitae, viam sit commonstratura.

§. 3. Quemadmodum in superiore Dissertatione arcu Elliptico sum vsus, ad constructionem huius aequationis $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{x dx}{x^2 - 1}$, ita pro aequatione proposita alia opus erit curua, loco Ellipsis substituenda. Quam vt inueniam pono vniuersalissime eius elementum $= PRdz$, in quo P et R sunt functiones ipsius z tales, quae iisdem factis operationibus, vt supra in elemento elliptico, deducant ad aequationem propositam. Pono porro, vt series quaedam in considerationem veniat, $R = 1 + Ag Q + ABg^2 Q^2 + ABCg^3 Q^3 + ABCDg^4 Q^4 +$ etc.

in

in qua serie est Q functio quaedam ipsius z, g linea data seu quasi parameter curuae, A, B, C, D, etc. coefficientes constantes. Ponatur $PR dz = dZ$; erit ergo $Z = \int P dz + A g \int PQ dz + AB g^2 \int PQ^2 dz + ABC g^3 \int PQ^3 dz +$ etc.

§. 4. Ita autem P et Q a se inuicem pendeant, vt omnia haec integralia possint ad $\int P dz$ reduci. Sit ergo. $\int PQ dz = \alpha \int P dz + O\,1$; $\int PQ^2 dz = \alpha\beta \int P dz + O\,2$; $\int PQ^3 dz = \alpha\beta\gamma \int P dz + O\,3$; etc Denotant hic $O\,1$, $O\,2$, $O\,3$ etc. quantitates algebraicas. Post peractam hoc modo integrationem ponatur $z = h$: est autem h talis quantitas, quae loco z substituta faciat omnes eas quantitates algebraicas $O\,1$, $O\,2$, $O\,3$, etc. euanescere, atque tum fiat $\int P dz = H$ quantitati prorsus constanti. Ex his igitur, facto post integrationem $z = h$, erit $Z = H(1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 + ABC\alpha\beta\gamma g^3 +$ etc.) Facta iam parametro g variabili obtinebuntur infiniti valores ipsius Z pro infinitis ipsius g, atque ex dato elemento $PR dz$ poterit construi curua, in qua, si abscissae designentur littera g, applicatae sunt $= Z$.

§. 5. Hoc itaque modo poterit construi summa seriei $1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 + ABC\alpha\beta\gamma g^3 +$ etc. quamuis forte ex sui ipsius consideratione summa prorsus non possit determinari. Vtor autem ad summam huius seriei inuestigandam methodo mea summae serierum inuentionem ad resolutionem aequationum reducendi, quam anno praeterito exposui, vt nanciscar aequationem, cuius resolutio a seriei illius summa pendeat. Perspicuum

 enim

enim est, vtcunque haec aequatio resultans fuerit perplexa, eius tamen constructionem in promtu futuram. Nunc igitur nihil aliud est faciendum, nisi vt quantitates A, B, C, etc. et α, β, γ, etc. efficiantur eiusmodi, vt summae seriei istius inuentio ad resolutionem huius aequationis $a x^n dx = dy + y^2 dx$ deducatur. Hoc vero loco id est efficiendum vt series $1 + A g Q + A B g^2 Q^2 + A B C g^3 Q^3 +$ etc. possit in summam redigi, quia alias valor ipsius R non esset cognitus, et proinde integra constructio inutilis. Quamobrem non licebit loco A, B, C etc. valores quosuis pro arbitrio accipere, sed tales, quae hanc seriem summabilem reddant.

§. 6. Quo igitur appareat, cuiusmodi esse debeat series $1 + A\alpha g + A B \alpha \beta g^2 + A B C \alpha \beta \gamma g^3 +$ etc. vt eius summatio perducatur ad resolutionem aequationis $a x^n dx = dy + y^2 dx$; hanc ipsam aequationem in seriem resoluo. Quod vt commodius effici possit, pono $y = \frac{dt}{t\,dx}$, sumtoque dx constante erit $a x^n dx = \frac{ddt}{t\,dx}$ seu $a x^n t\, dx^2 = ddt$. Nunc more consueto substituo loco t hanc seriem $1 + \mathfrak{A} x^{n+2} + \mathfrak{B} x^{2n+4} + \mathfrak{C} x^{3n+6} +$ etc. erit $ddt = (n+1)(n+2) \mathfrak{A} x^n dx^2 + (2n+3)(2n+4) \mathfrak{B} x^{2n+2} dx^2 + (3n+5)(3n+6) \mathfrak{C} x^{3n+4} dx^2 +$ etc. Huic igitur seriei aequalis esse debet $a x^n t\, dx^2$, seu ista series $a x^n dx^2 + \mathfrak{A} a x^{2n+2} dx^2 + \mathfrak{B}\, b x^{3n+4} dx^2 +$ etc.; propterea aequales facio terminos homogeneos determinandis litteris $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ etc. pro arbitrio assumtis, fietque $\mathfrak{A} = \frac{a}{(n+1)(n+2)}$, $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A} a}{(2n+3)(2n+4)}$

$\mathfrak{C} =$

$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}q}{(3n+5)(3n+6)}$ etc. Ponatur $ax^{n+2} = f$ breuitatis gratia, erit $t = 1 + \frac{f}{(n+1)(n+2)} + \frac{f^2}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)} + \frac{f^3}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)(3n+5)(3n+6)} +$ etc. Huius ergo seriei summatio pendet a constructione aequationis propositae $ax^n dx = dy + y^2 dx$. Quamobrem si series $1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 +$ etc. in eam possit transmutari, habebitur simul constructio aequationis propositae.

§. 7. Sed quo haec series, quippe quae nimis est generalis, aliquanto magis restringatur, et determinatio litterarum arbitrariarum facilior efficiatur, pono in formula $PR dz$ initio assumta $P = \frac{1}{(1+bz^\mu)^\nu}$, et $Q = \frac{z^\mu}{1+bz^\mu}$. Erit ergo $\int P dz = \int \frac{dz}{(1+bz^\mu)^\nu}$, $\int PQ dz = \int \frac{z^\mu dz}{(1+bz^\mu)^{\nu+1}}$, et $\int PQ^2 dz = \int \frac{z^{2\mu} dz}{(1+bz^\mu)^{\nu+2}}$ etc. Possunt autem haec omnia integralia ad primum $\int \frac{dz}{(1+bz^\mu)^\nu}$ reduci: est enim generaliter $\int \frac{z^{\theta\mu} dz}{(1+bz^\mu)^{\nu+\theta}} = \frac{(\theta-1)\mu+1}{b\mu(\nu+\theta-1)} \int \frac{z^{(\theta-1)\mu} dz}{(1+bz^\mu)^{\nu+\theta-1}} - \frac{1}{b\mu(\nu+\theta-1)} \cdot \frac{z}{(1+bz^\mu)^{\nu+\theta-1}}$. Hanc ob rem erit $\int \frac{z^\mu dz}{(1+bz^\mu)^{\nu+1}} = \frac{1}{b\mu\nu} \int \frac{dz}{(1+bz^\mu)^\nu} - \frac{1.z}{b\mu\nu(1+bz^\mu)^\nu}$, et $\int \frac{z^{2\mu} dz}{(1+bz^\mu)^{\nu+2}} = \frac{1(\mu+1)}{b^2\mu^2\nu(\nu+1)}$

 $\int dz$

$\int \frac{dz}{(1+bz^\mu)^\nu} - \frac{(\mu+1)z}{b^2\mu^2\nu(\nu+1)(1+bz^\mu)^\nu} - \frac{1.z^{\mu+1}}{b\mu(\nu+1)(1+bz^\mu)^\nu}$ etc. Debebit ergo b eiusmodi esse quantitas, vt loco z substituta faciat $\frac{z^{\mu+1}}{(1+bz^\mu)^{\nu+\theta}} = o$. Non vero poterit esse $b = o$, quia tum plerumque simul quantitas $\int \frac{dz}{(1+bz^\mu)^\nu}$ euanesceret. Comparatis iam his reductionibus cum supra assumtis, determinantur litterae α, β, γ, δ etc. Erit scilicet $\alpha = \frac{1}{b\mu\nu}$ $\beta = \frac{\mu+1}{b\mu(\nu+1)}$, $\gamma = \frac{2\mu+1}{b\mu(\nu+2)}$ etc.

§. 8. Definitis hoc modo litteris α, β, γ etc. considero alteras A, B, C etc. quarum quamlibet video huiusmodi formam $\frac{1}{\sigma\tau}$, scilicet vnitatem diuisam per factum ex duobus factoribus, habere oportere. Quo autem simul series $1 + AgQ + ABg^2Q^2 + ABCg^3Q^3$ + etc. possit summari, facio $A = \frac{1}{\pi(\pi+\rho)}$, $B = \frac{1}{(\pi+2\rho)(\pi+3\rho)}$ $C = \frac{1}{(\pi+4\rho)(\pi+5\rho)}$ etc. atque tum series ope methodi meae vniuersalis series summandi poterit summari. Pono primo breuitatis gratia $gQ = q^2$, erit $R = 1 + \frac{q^2}{\pi(\pi+\rho)} + \frac{q^4}{\pi(\pi+\rho)(\pi+2\rho)(\pi+3\rho)} +$ etc., facioque $R - 1 = S$ erit $S = \frac{q^2}{\pi(\pi+\rho)} + \frac{q^4}{\pi(\pi+\rho)(\pi+2\rho)(\pi+3\rho)} +$ etc. Multiplico nunc vbique per $\rho q^{\frac{\pi+\rho}{\rho}}$ sumoque differentialia, erit $\frac{\rho d.q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} S)}{dq}$ $= \frac{q^{\frac{\pi}{\rho}}}{\pi} + \frac{q^{\frac{\pi+2\rho}{\rho}}}{\pi(\pi+\rho)(\pi+2\rho)} +$ etc. Iam per ρ multiplico sumoque denuo differentialia ponendo dq constante, prodibit $\frac{\rho^2 dd(q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} S)}{dq^2} = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} + \frac{q^{\frac{\pi+\rho}{\rho}}}{\pi(\pi+\rho)} +$ etc.

etc. $= q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} + q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} \left(\frac{q^2}{\pi(\pi+\rho)} + \frac{q^4}{\pi(\pi+\rho)(\pi+\rho)(\pi+3\rho)} + \text{etc.} \right)$ Habebimus ergo restituto S loco seriei $\frac{q^2}{\pi(\pi+\rho)} +$ etc. hanc aequationem $\rho^2 dd(q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} S) = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq^2 + q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} S dq^2$. Pono porro breuitatis gratia $q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} S = T$, erit $\rho^2 ddT = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq^2 + T dq^2$.

§. 9. Ad hanc aequationem integrandam pono $T = rs$, erit $ddT = rdds + 2drds + sddr$, quibus substitutis habetur $\rho^2 rdds + 2\rho^2 drds + \rho^2 sddr = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq^2 + rsdq^2$ quae in duas aequationes discerpatur, $\rho^2 rdds = rsdq^2$, et $2\rho^2 drds + \rho^2 sddr = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq^2$. Harum prior per r diuisa abit in hanc $\rho^2 dds = sdq^2$, quae per ds multiplicata dat hanc $\rho^2 ds dds = s ds dq^2$, cuius integralis est $\rho^2 ds^2 = s^2 dq^2$, siue haec $\rho ds = s dq$, quae denuo integrata dat $\rho l s = q$ atque $s = c^{\frac{q}{\rho}}$ denotante c numerum, cuius logarithmus est 1. Inuento itaque s assumo alteram aequationem $2\rho^2 dr ds + \rho^2 s ddr = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq^2$, quae substituto loco s valore inuento $c^{\frac{q}{\rho}}$ abit in istam $2\rho c^{\frac{q}{\rho}} dq dr + \rho^2 c^{\frac{q}{\rho}} ddr = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq^2$. Ponatur $dr = v dq$, erit $ddr = dv dq$ atque aequatio mutabitur in hanc simpliciter differentialem $2\rho c^{\frac{q}{\rho}} v dq + \rho^2 c^{\frac{q}{\rho}} dv = q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq$, quam multiplico per $c^{\frac{q}{\rho}}$, vt prodeat $2\rho c^{\frac{2q}{\rho}} v dq + \rho^2 c^{\frac{2q}{\rho}} dv = c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq$, cuius integralis est $\rho^2 c^{\frac{2q}{\rho}} v = \int c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq$. Fit igitur $v = \frac{1}{\rho^2} c^{\frac{-2q}{\rho}} \int c^{\frac{q}{\rho}} q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}} dq$, et $r = \int$

dq, ſeu $r = \frac{1}{\rho^2}\int c^{\frac{-2q}{\rho}}\, dq \int c^{\frac{q}{\rho}}\, q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}}\, dq$. Erit ergo $rs = T$ $\frac{1}{\rho^2} c^{\frac{q}{\rho}} \int c^{\frac{-2q}{\rho}}\, dq \int c^{\frac{q}{\rho}}\, q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}}\, dq$, et $S = \frac{1}{\rho^2} c^{\frac{q}{\rho}}\, q^{\frac{\rho-\pi}{\rho}} \int c^{\frac{-2q}{\rho}}\, dq \int c^{\frac{q}{\rho}}\, q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}}\, dq$.

§. 10. Quoniam in hac forma inuenta duplex inuoluitur integratio, notandum eſt eas ita inſtitui debere vt tam S quam $\frac{ds}{dq}$ fiant $= 0$, poſito $q = 0$, quemadmodum ex ſerie, cui S eſt aequale, apparet. His obſeruatis habetur tandem $R = 1 + \frac{1}{\rho^2} c^{\frac{q}{\rho}}\, q^{\frac{\rho-\pi}{\rho}} \int c^{\frac{-2q}{\rho}}\, dq \int c^{\frac{q}{\rho}}\, q^{\frac{\pi-\rho}{\rho}}\, dq$. Eſt vero $q = \sqrt{gQ}$, atque ob $Q = \frac{z^\mu}{1+bz^\mu}$, erit $q = \sqrt{\frac{gz^\mu}{1+bz^\mu}}$. Dabitur igitur ex his $\int PR\,dz$ ſeu $\int \frac{R\,dz}{(1+bz^\mu)}$. Quare ſi litteris π, ϱ, μ et ν tribuantur debiti valores in n, in promtu erit aequationis propoſitae $ax^n dx = dy + y^2 dx$ conſtructio.

§. 11. Hoc facto reuertor ad propoſitum, atque reſumo ſeriem $1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2 +$ etc. quae poſitis loco $A, \alpha, B, \beta, C, \gamma$, etc. electis valoribus transmutatur in hanc $1 + \frac{g}{b\mu\nu\pi(\pi+\rho)} + \frac{(\mu+1)g^2}{b^2\mu^2\nu(\gamma+1)\pi(\pi+\rho)(\pi+2\rho)(\pi+3\rho)}$ etc. cuius haec eſt lex, vt terminus indicis $\theta+1$ diuiſus per terminum indicis θ ſit $= \frac{g(1+(\theta-1)\mu)}{b\mu(\nu+\theta-1)(\pi+(2\theta-2)\rho)(\pi+(2\theta-1)\rho)}$. In ſerie vero quam §. 6. ex aequatione propoſita elicuimus, eſt ſimilis quotus termini indicis $\theta+1$ per terminum indicis θ diuiſi $= \frac{f}{(\theta n+2\theta-1)(\theta n+2\theta)}$. Quo igitur hae duae ſeries congruant, oportet vt hi duo quoti ſint inter ſe aequales. Fiat ergo primo $\frac{g}{b} = f$ ſeu $g = bf$, hoc poſito debebit eſſe $\frac{1}{(\theta n+2\theta-1)(\theta n+2\theta)} = \frac{\theta\mu-\mu+1}{(\mu\nu+\mu\theta-\mu)(\pi+2\theta\rho-2\rho)(\pi+2\theta\rho-\rho)}$. Vnde ſi aequatio ſecundum dimenſiones ipſius θ ordinetur, et coefficientes cuiusque ipſius θ potentiae ponantur $= 0$, deterprodibunt quatuor aequationes ex quibus μ, ν, π, et ϱ determinabuntur in n. Neque vero vnica datur ſolutio, ſed ſunt quatuor diuerſae quae ad noſtrum inſtitutum pertinent. Prima dat $\mu = \frac{2n+4}{3n+4}, \nu = 1, \pi = n+1$, et $\varrho = \frac{n+2}{2}$. Secunda dat $\mu = \frac{2n+4}{n}, \nu = 1, \pi = \frac{n}{2}$, et $\varrho = \frac{n+2}{2}$. Tertia dat $\mu = 2, \nu = \frac{n+1}{n+2}, \pi = \frac{n+2}{2}$ et $\varrho = \frac{n+2}{2}$. Quarta dat $\mu = \frac{1}{3}, \nu = \frac{n+1}{n+2}, \pi = (n+2)\sqrt{2}$ et $\varrho = \frac{n+2}{\sqrt{2}}$.

§. 12, Quatuor harum ſolutionum non vnaquaeque pro lubitu poteſt adhiberi, ſed pro variis caſibus exponentis n alia atque alia eligi debet. Quae diiudicatio deducenda eſt ex iſta conditione §. 7 memorata, quod $\frac{z^{\mu\theta+1}}{(1+bz^{\mu})^{\nu+\theta}}$ euaneſcere debeat facto $z = b$. Fit hoc quidem ſi $z = o$, ſed cum praeter hunc alius requiratur, facile apparet, id non euenire poſſe, niſi ponatur $b = \infty$. In quolibet igitur caſu ipſius n talis eligenda eſt ſolutio, vt $\frac{z^{\mu\theta+1}}{(1+bz^{\mu})^{\nu+\theta}}$ fiat $= o$ poſito $z = \infty$. Denotat hic autem θ numerum quemcunque integrum affirmatiuum non excepta cyphra, quamobrem et ν nunquam eſſe poterit numerus negatiuus, quia alioquin binomium $1 + z^{\mu}$ in numeratorem veniret. At μ tam affirmatiuum quam negatiuum numerum ſignificare poteſt, ex quo duplex exiſtit huius rei conſideratio, prout fuerit μ vel affirmatiuus numerus vel negatiuus. Sit primo μ numerus affirmatiuus $= + \lambda$, perſpicuum eſt quo $\frac{z^{\lambda\theta+1}}{(1+bz^{\lambda})^{\nu+\theta}}$ fiat $= o$, poſito $z = \infty$, oportere maximum ipſius z exponentem in denominatore, qui eſt λ

$\nu + \lambda\theta$

$\nu + \lambda\theta$ maiorem esse eiusdem z exponente in numeratore, qui est $\lambda\theta + 1$ Erit igitur $\lambda\nu > 1$. Sin autem fuerit μ numerus negatiuus seu $= -\lambda$, fiet $\frac{z^{-\lambda\theta + 1}}{(1 + bz^{-\lambda})^{\nu+\theta}}$ $= \frac{z^{\lambda\nu + 1}}{(z^{\lambda} + b)^{\nu+\theta}}$ quae quantitas vt fiat $= 0$ posito $z = \infty$ debebit esse $\lambda\nu + \lambda\theta > \lambda\nu + 1$, seu $\lambda\theta > 1$, idquod in casu $\theta = 0$ fieri nequit. Quocirca μ nunquam esse poterit numerus negatiuus. In prima igitur solutione, quia est $\nu = 1$, quoties fuerit λ i. e. $\frac{2n+4}{3n+4}$ numerus positiuus, toties simul esse debebit numerus vnitate maior, excipiuntur igitur ii casus quibus $\frac{2n+4}{3n+4}$ est 1 vel vnitate minor. Nisi ergo n contineatur intra hos limites 0 et $-\frac{4}{3}$ prima solutio adhiberi nequit. In secunda solutione, quia iterum est $\nu = 1$, similiter excipiuntur casus, quibus λ seu $\frac{2n+4}{n}$ est vnitas seu vnitate minor. Semper igitur haec solutio locum habebit, his tantum exceptis casibus, quando n continetur intra hos limites -4 et 0. Pro tertia solutione, quia μ iam est numerus positiuus nempe $= 2$ debebit tantum $\frac{2n+2}{n+2}$ esse numerus vnitate maior. Hac igitur semper vti poterimus nisi n contineatur intra hos limites -2 et 0; quoties ergo secunda locum habet, toties et tertia poterit vsurpari. In quarta denique solutione quia μ quoque est numerus affirmatiuus, scilicet $\frac{1}{3}$, requiritur vt $\frac{n+1}{3n+6}$ sit numerus vnitate maior, id quod accidit, quoties n continetur intra hos limites -2 et $-\frac{5}{2}$. In his igitur casibus quarta solutione vti conueniet. Ex quibus inuicem comparatis perspicitur, semper hoc modo aequationis propositae con-

constructionem exhiberi posse, nisi n contineatur intra hos angustos limites $-\frac{4}{3}$ et $+2$.

§. [illegible]. Quo autem totum hoc negotium euidentius percipiatur, accommodabo, quae hactenus tradita sunt, ad casum particularem, quo est $n=2$, vt itaque construenda sit haec aequatio $ax^2dx = dy + y^2dx$. Pro hoc casu eligo solutionem tertiam, eritque propterea $\mu = 2$, $\nu = \frac{1}{2}$, $\pi = \varrho = 2$. His valoribus substitutis habebitur $S = \frac{1}{4}c^{\frac{q}{2}}\int c^{-q}dq\int c^{\frac{q}{2}}dq$. Est vero $\int c^{\frac{q}{2}}dq = 2c^{\frac{q}{2}} + i$, ergo $\int c^{-q}dq\int c^{\frac{q}{2}}dq = \int 2c^{-\frac{q}{2}}dq + i\int c^{-q}dq = -4c^{-\frac{q}{2}} - ic^{-q} + k$. Consequenter prodit $S = \frac{k}{4}c^{\frac{q}{2}} + \frac{i}{4}c^{-\frac{q}{2}} - \frac{1}{4}$. Quia iam posito $q=0$ debet euanescere s, habebitur ista aequatio $\frac{k}{4} - \frac{i}{4} - \frac{1}{4} = 0$, seu $k = 1 + i$. Porro cum $\frac{ds}{dq}$ debeat esse $=0$ si $q=0$, proueniet $i + k = 0$. Namque est $dS = \frac{k}{8}c^{\frac{q}{2}}dq + \frac{i}{8}c^{-\frac{q}{2}}dq$, et idcirco facto $q=0$, fit $\frac{ds}{dq} = \frac{k}{8} + \frac{i}{8} = 0$. Ex his igitur conditionibus inuenitur $i = -\frac{1}{2}$, et $k = \frac{1}{2}$: quamobrem erit $S = \frac{c^{\frac{q}{2}} + c^{-\frac{q}{2}}}{8} - \frac{1}{4}$, atque $R = \frac{3}{4} + \frac{c^{\frac{q}{2}} + c^{-\frac{q}{2}}}{8}$. Quoniam vero est $\mu = 2$ et $g = bf$, erit $q = \sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}$, adeoque $R = \frac{3}{4} + \frac{1}{8}c^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}} + \frac{1}{8}c^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}}$. Consequenter reperitur $\int PRdz = \frac{3}{4}\int\frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{3}{4}}} + \frac{1}{8}\int\frac{dz\left(c^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}} + c^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}}\right)}{(1+bz^2)^{\frac{3}{4}}}$

Quod integrale ita capiatur, vt posito $z=0$ ipsum fiat $=0$, quo facto ponatur $z=\infty$, et prodibit quantitas, quae vt functio ipsius f potest spectari. Fiat deinde f variabilis, eiusque loco ponatur cx^4, erit ista functio per H diuisa $=t$ (vid. §. 6.). Atque inuento hoc t erit $y=\frac{dt}{t\,dx}$, qui est verus valor ipsius y ex aequatione proposita $ax^2dx=dy+y^2dx$.

§. 14. Non difficilior euadit constructio aequationis generalis $ax^n dx=dy+y^2dx$, dummodo n non contineatur intra hos limites 0 et -2. Vti enim potuimus solutione tertia, in qua fit $\mu=2$, $\nu=\frac{n+4}{n+2}$, $\pi=\varrho=\frac{n+2}{2}$. Erit igitur $S=\frac{1}{\varrho}c^{\frac{q}{\varrho}}\int c^{\frac{-2q}{\varrho}}dq\int c^{\frac{q}{\varrho}}dq$. Integratione simili quo supra modo instituta, reperitur $S=\frac{k}{\varrho^2}c^{\frac{q}{\varrho}}-\frac{i}{\varrho^2}c^{\frac{-q}{\varrho}}-\frac{1}{\varrho^2}$, vbi i et k ex his aequationibus debent definiri $k=1+i$, et $k+i=0$, est ergo vt ante, $i=-\frac{1}{2}$ et $k=\frac{1}{2}$. Quapropter est $S=\frac{1}{2\varrho^2}c^{\frac{q}{\varrho}}+\frac{1}{2\varrho^2}c^{\frac{-q}{\varrho}}-\frac{1}{\varrho^2}$ atque $R=1-\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{2\varrho^2}c^{\frac{q}{\varrho}}+\frac{1}{2\varrho^2}c^{\frac{-q}{\varrho}}$ vel posito loco ϱ valore $\frac{n+2}{2}$ habebitur $R=\frac{n(n+4)+2c^{\frac{2q}{n+2}}+2c^{\frac{-2q}{n+2}}}{(n+2)^2}$.

Est vero vt ante $q=\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}$, at $P\,dz=\frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}}$.

Quamobrem erit $\int PR\,dz=\frac{1}{(n+2)^2}\int\frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}}\left(n(n+4)+2c^{\frac{2q}{n+2}}+2c^{\frac{-2q}{n+2}}\right)$ vbi loco $\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}$ relinquo q. Integrale huius $PR\,dz$ ita capiatur, vt posito $z = 0$, ipsum euanescat, quo facto ponatur $z = \infty$, denotetque H id quod prouenit, si tantum $\int \frac{dz}{(1 + bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}}$ hoc modo integretur vt fiat $= 0$ posito $z = 0$, et postmodum ponatur $z = \infty$. Tum ergo erit integrale ipsius $PR\,dz$ praescripto modo acceptum, quod posuimus Z §. 4. functio ipsius f. Aequale id autem erat positum quantitati H, in hanc seriem $1 + A\alpha g + AB\alpha\beta g^2$ + etc. multiplicatae, quae series in sequentem est transmutata $1 + \frac{f}{(n+1)(n+2)} + \frac{f^2}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)} +$ etc. cuius summa est t, vid. §. 6. vbi f designat ax^{n+2}. Erit ergo $Z = Ht$, inquo H est quantitas constans, quia in ea non inest f, adeoque nec x. Prouenit itaque $t = \frac{Z}{H}$, at est $y = \frac{dt}{t\,dx}$: ergo pro aequatione proposita $ax^n dx = dy + y^2 dx$ prodibit $y = \frac{dZ}{Z\,dx}$. Ad illam igitur aequationem construendam habemus hanc regulam: Integretur haec formula $\frac{1}{(n+2)^2} \frac{dz}{(1 + bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}} \left(n(n+4) + 2c^{\frac{2}{n+2}\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}} + 2c^{\frac{-2}{n+2}\sqrt{\frac{bfz^2}{1+bz^2}}}\right)$ ita vt euanescat facto $z = 0$. Tum ponatur z infinitum, et loco f substituatur ax^{n+2}. Id quod prouenit sit Z, quo cognito erit $y = \frac{dZ}{Z\,dx}$. Si quem offendat, quod post integrationem debeat fieri $z = \infty$, is loco z substituat $\frac{u}{1-u}$ et post integrationem ponatur $u = 1$, quo facto pro Z idem prodibit valor, qui ante. Quamuis autem analytica pro Z expressio obtineri non potest, quando formula illa non est integrabilis tamen, per quadraturas vel rectificationes valor ipsius Z construi poterit.

§. 15. Quanquam autem in hac constructione ii casus excluduntur, in quibus n continetur intra limites -2 et 0, nihilo tamen minus haec solutio pro vniuersali est habenda. Nam quia, si aequatio potest resolui in casu $n=m$, resolutio quoque habetur in casu $n=-m-4$, vt constat, ex iis, quae de casibus separabilibus sunt detecta; perspicuum est, si m sit numerus intra limites 0 et -2 contentus, fore $-m-4$ intra terminos -2 et -4 comprehensum, adeoque in solutione nostra contineri. Quamobrem si occurrat casus, quo n contineatur intra 0 et -2, hic statim reducatur ad alium per dictum theorema, qui intra -2 et -4 contineatur, huiusque constructio erit in promptu.

§. 16. In formula differentiali §. 13. eruta obseruo, quoties habuerit $\frac{n+1}{n+2}$ huiusmodi formam $k+\frac{1}{2}$, vbi k numerum integrum affirmatiuum denotat, integram formulam posse integrari, et hanc ob rem valorem ipsius Z re ipsa exhiberi. His igitur in casibus valor ipsius y quoque poterit definiri et aequatio integrari. Fiet tum autem $n=\frac{-4k}{2k-1}$, quoties ergo n talem habuerit formam, aequatio $ax^n dx=dy+y^2 dx$ integrationem admittet. Deinde quia casus, si $n=\frac{-m}{m+1}$, vel $n=-m-4$ reduci potest ad casum $n=m$, integrabilis etiam erit aequatio si $n=\frac{-4k}{2k+1}$ vel $\frac{-4k-4}{2k+1}$ denotante k numerum integrum affirmatiuum. Atque hi hi sunt illi ipsi casus integrabiles vel separabiles, ab aliis iam eruti, vbi videre licet in nostris Commentariis A. 1726.

§. 17. Esse autem aequationem integrabilem, quoties sit $\frac{n+1}{n+2}=k+\frac{1}{2}$ hoc modo ostendo. Pono $\frac{bz^2}{1+bz^2}=u^2$; erit $z=\frac{u}{\sqrt{b(1-u^2)}}$ $1+bz^2=\frac{1}{1-u^2}$ ideoque $dz=\frac{du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{b}}$. Fiet igitur $\frac{dz}{(1+bz^2)^{\frac{n+1}{n+2}}}=\frac{du}{\sqrt{b}}(1-u^2)^{k-1}$. Hanc ob rem formula §. 14 integranda transformabitur in hanc $\frac{1}{(n+2)^2\sqrt{b}}(n(n+4)du(1-u^2)^{k-1}+2c^{\frac{2u\sqrt{f}}{n+2}}du(1-u^2)^{k-1}+2c^{\frac{-2u\sqrt{f}}{n+2}}du(1-u^2)^{k-1})$, quae vt facile perspicitur re ipsa integrari potest, quoties k fuerit numerus integer affirmatiuus. Atque hinc non parum praestantiae accedere arbitro huic meae methodo, quad tam sit facilis et perspicua, vt casus etiam omnes qui reipsa integrationem vel separationem admittunt, vno obtutu ostendat.

§. 18. Exempli gratia assumo $k=1$, erit $n=-4$, qui casus, vti constat, est facillimus eorum, qui separationem admittunt. Formula igitur integranda abibit in hanc $\frac{1}{2\sqrt{b}}(c^{-u\sqrt{f}}du-c^{u\sqrt{f}}du)$, cuius integralis est $\frac{1}{2\sqrt{bf}}(c^{u\sqrt{f}}-c^{-u\sqrt{f}})$. Constantem non adiicio quia posito $z=0$, seu quod eodem recidit $u=0$, totum integrale iam euanescit. Fiat nunc $z=\infty$ seu in nostro casu $u=1$ et ponatur ax^{-2} loco f habebitur $Z=\frac{x}{2\sqrt{ab}}(c^{\frac{\sqrt{a}}{x}}-c^{\frac{-\sqrt{a}}{x}})$. Hoc inuento, erit vt iam est ostensum y

 =

$=\frac{dZ}{Zdx}$. Differentiato igitur Z et differentiali per Zdx diuiso prodibit $y=\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{a}}{x^2}\left(\frac{c^{\frac{2\sqrt{a}}{x}}+1}{c^{\frac{2\sqrt{a}}{x}}-1}\right)$ siue $\frac{2\sqrt{a}}{x}=l\frac{xxy-x-\sqrt{a}}{xxy-x+\sqrt{a}}$ quae aequatio est integralis huius differentialis $ax^{-4}dx=dy+y^2dx$. Atque simili modo pro reliquis casibus, qui separationem admittunt, aequationes integrales inueniuntur.

CLASSIS SECVNDA
CONTINENS
PHYSICA.

DE
MVTILATIONE BRACHIORVM
IN PVERO,

Cuius Tom. III. Comment. facta est commemoratio,

DISSERTATIO ANATOMICO-PHYSIOLOGICA.

AVCTORE

I. G. *D.*

PRoëmii loco, ad Generationis seu caussae efficientis Monstrorum dilucidationem duce experientia persequendam, res ipsa veluti hortari videtur.

§. 1. Sub molli itaque ac tenui pellicula seu cortice conglobato subque communi ea conditione, cuncta Animantia, cuiuscunque sint generis, per maris ac foeminae congressum quotidie progigni, porro sub eadem forma sphaeroide in vteri cauum laeuigatum deuoluta incrementi caussa ad certum temporis spatium ibidem commorari, hancque Generationis constantem perpetuamque legem esse, Naturae peritis satis superque compertum est. Porro, tametsi intellectu plura arcana in Animalium conceptione assequi haud liceat, ignorare profecto minus possumus, quorumcunque Animantium foetus sub praefata conditione in vtero versari, vt corpora separata et distincta, sine vteri et foetus copula, sicque istiusmodi ratione foetus in vtero nutritionem ac incrementum perfici. Quid enim? pro tantilla mora temporis, quo foetus in parentis sinu vitam trahit, nexu vasorum opus esse, hinc quoties fit noua conceptio eundem similiter institui, sicque in illo nexu foetus nutritionem circuitumque consistere existimabimus? Enimuero sub primis mensibus, ouum seu Embryo nunquam alligatus obseruatus est, ast solitarius ac indeterminatus; Interim eo in statu robur ac incrementum eum in dies assumere, sensu iudice internoscere procliue est. Verum tamen istiusmodi forte nexu progressu temporis opus est, non solum ad firmitatem et stabilitatem foetus, verum praecipue ad vasorum vmbilicalium vterinorumque inosculationem, vt sanguinis e praefatis vasis post partum effluxu manifestum est; Ad quod respondeo, quod impraegnationis initio, tametsi vincula inter vterum et foetum haud manifesto sint posita, per irritationem vel per relaxationem vteri, idem effluxus sanguinis per muliebria, aeque ac in partu legitimo obseruetur, in quo viceversa, vt experientia testatur, eiusmodi euacuatio interdum penitus deficit. Porro duce Anatome constat, vteri sinus et emissaria, itidemque vasa foetus vmbilicalia et placentae rudimentum inter Chorii lamellas initio aeque ac progressu grauiditatis esse posita. Ergo naturae legibus magis esset consonum, vt istiusmodi inosculatio celeriter perficeretur, quemadmodum in plantis fructus principio est alligatus: ad quam profecto connexionem eo propensior est foetus, quo minor est a primordio eius resistentia. Nam vero,

vt

vt multiplici experientia compertum est; in Animantium foetibus, qui a primordio nexus sunt expertes, ea conditio plane omissa est. Caeterum, nullo negotio sedem suam relicturum esse, ac propterea in lubrico versari foetum, quia nexu caret; obiicientibus facile erit respondere, videlicet ceruicis vteri conformationem aeque ac vteri situm, potentiam vinculis aequipollentem habere: Nam vt situs vteri obliquus ac in dorsum inclinatus, foetum ne in eius ceruicem facile prouoluatur retinet, sic profecto eiusdem ceruicis osculum a Natura est impeditum et coarctatum, vt Embryonis moles tametsi minima, pertransire nequeat.

§. 2. Quibusnam autem principiis ea quae hactenus praefatus sum, innitantur, ex sequentibus phaenomenis iam intelligere procliue est. 1. Viuentia in aliorum animantium visceribus foeta, tametsi vitam in iis agant et consenescant, nexus tamen inter se expertia sunt. Pro exemplo sunt vermes, spermatici, lumbrici, et alia genera viuentium, succo seu humori sibi accommodato innatantia et vinculo omni libera. Porro 2. Oua foecunda in magna parte pennatorum, piscium, reptilium, insectorumque, in aërem, vel terram vel aquam proiecta, sponte separatimque, vt sensibus appâret, extra Parentis sinum, sustentari, educari, ac prospere tandem excludi certum est; tametsi iisdem aeque ac viuiparorum foetibus vasa vmbilicalia communia sint. Hinc 3. in magna quoque parte Viuiparorum Animantium, vtero contentos foetus haud eius parietibus vere alligatos, sed solummodo contiguos ac plane liberos esse, aeque sensibus perspicuum est. 4. Inter foetus exteriora inuolucra glutinis expansi substantiam referentia, et inter vteri parietes: earumdemque membranarum duplicaturam, Lymphae gelatinosae notabilis copia innatat. Vnde profecto consequitur, per eam disiungi foetum ab vtero, ne inuicem coalescant; dumque ea in illius alimentum cedit, haud per vias absconditas ac progressu temporis fabricatas, seu per canales ex vtero ad foetum tendentes, sed e contra, per emanationem seu in vteri cauum expulsionem, eiusdem lymphae iter perfici? Quibus principiis postremo, obsoleta notio de incremento foetus in vtero, lucem fortuito affundit, nempe, quod nutritio continuata generatio, hinc leges vtriusque sint communes. Iam vero, a vi foecundante feminum in vtero effusorum, hincque partim vteri emissaria iisque inclusos succos, partim ouuli poros subeunte, formationem foetus perfici omnes statuunt: Quae propterea actio efficitur haud per tubulos inuicem communicantes, sed tantummodo per vteri ac ouui propriam originalemque structuram et dispositionem, quae aeque, vt aliarum partium natura, constans et inuariabilis futura, et in fine, aeque ac principio vitae, sine intermissione est perduratura: Ob eam igitur caussam, foetus in vtero incrementum aeque ac eiusdem generationem, haud per tubulos vtero et foetui communes ac inuicem copulatos, sed per materiae e finibus et osculis vteri in eius cauum effusae, hincque per ouui pelliculas et meatus inuisibiles, ductusque placentae proprios resorptae haud interruptum motum perfici, forte minus a vero est alienum.

§. 3.

§. 3. Hinc profecto, in originis Monstrorum, seu caussarum efficientium explanatione, quidnam veritati magis aut minus propensum, ac conditionibus vteri foetusque sit accommodatum, omnes facile perspecturos esse confido. Etenim, quod Grauidarum phantasiae natura foetus sit propensior, quod vtriusque sensationes sint mixtae, ac postremo, quod per eiusmodi harmoniam Monstra generentur, nescio qua falsa veri specie delusi, plures hodienum sustinent. Equidem fateor, si Matris sensationes naturales, vt sunt fames, somnus, vigiliae, insomnia, dolor, foetui sunt communes, nil profecto vetat, vt similiter per commemoratam harmoniam, grauidae imaginantis vim in foetum transferri possibile sit. Interim tamen fatendum est, earum sensationum indicia nonnulla futura esse, quibus de earumdem in foetu actione seu impressionibus, deque sensibilitate foetus, certiores reddantur vtero gerentes. Hinc autem tantum abest, vt indiciis quibusdam firmis et solidis, istiusmodi doctrina inniti, quin ex aduerso iisdem per experientiam euerti possit: Nam multoties, contra animi voluntatem et desiderium, manifestam contradictionem inter proprias et inter foetus sensationes percipere grauidis procliue est: Sic in eiusdem generis, seu in duabus consimilibus sensationibus, haud vna sed opposita ratione, in dissimilibus viceuersa, simili ad sensum ratione foetum sese gesturum esse, ipsaemet asserunt: Num harmoniae ea sint indicia, id veri studiosis ac peritis definiendum relinquo? Porro, tametsi foetus eiusque partium resistentia perexigua, eaque de caussa, eiusdem Natura commotionibus valde propensa videatur, numquid potius contrarium ex eo inferre procliue esset? Nam, quum per foetus anatomen sit manifestum, haud aequalem fieri e corde ad cerebrum sanguinis distributionem vt in adulto, eiusdemque porro sanguinis in foetu aere vacuam esse conditionem, ac postremo, cerebri foetus compagem firmitate et tensione minima pollere; Hinc profecto consequi videtur, spirituum in foetu vsque ad eius exclusionem valde impeditam perexiguamque tum generationem, tum eorumdem in cerebri fibrillas influxum actionemque fore: quare etiam, foetus in vtero versantis sentiendi facultatem esse valde imperfectam verosimile est. Quam porro sensuum imbecillitatem seu stuporem, contemplatio recens editorum foetuum confirmare videtur: Nam obseruamus, eos inter tumultum ac vociferationes commotionesque placide dormire, ingrata promiscue ac dulcia lambere ac deglutire, oculis admota visu haud discernere, lac Parentis perterritae aut ira percitae, impune et absque subsequente valetudinis perturbatione saepenumero sugere: Vnde profecto, de spirituum inertia vel eorum defectu, et, quod consequitur, ad impressiones exigua propensione, coniecturam facere procliue est.

§. 4. Sed, tametsi haud esset commentitia istiusmodi spirituum harmonia, spiritibusque a phantasia Matris motum ingentem imprimi posse crederemus, tam admirabilia sunt effecta in monstris obuia, vt per commemoratum motum spirituum ea produci, vt est multorum opinio, prorsus sit incredibile: Nam demus, foetui esse communem eiusdem obiecti ideam seu impressionem

quam

quam, vt in parente, comitantur similes, aut si vis, grauiores et violentae commotiones et conturbationes spirituum in quacunque parte corporis, inde fateor oportet, vt in eius textura et humorum circuitu, iuxta leges omnibus fluidis solidisque corporibus insitas, certi et determinati effectus in foetu aeque ac matre sequantur. Ecce vero! in monstris incomprehensibile artificium rerumque vel inusitatam excellentemque mixturam vasorum, neruorum ac partium maxime insignium vel iacturam vel translocationem, compositiones, demolitionesque stupendas vita superstite, sanguinis ex vno in aliud corpus transfusionem, verbo, mille testes seu effectus solertiae iudicii, et intelligentiae summae, vt e diligentiore contemplatione Monstrorum palam est.

Hinc itaque ex iam dictis, duce imprimis Anatome, qua videlicet tam matrem quam foetum, tametsi communi spatio inclusos separatim absque mutuo nexu vasorum, vitam ducere euincitur, perspicere fas est, ad originem Monstrorum explicandam, vim impressionesque phantasiae vtero gerentium, sine vllo veri fundamento assumi.

Sub finem tandem huius praefationis, aequi verique studiosis illud perpendendum relinquo, an quae a Mulieribus Monstrigeniis, de earumdem phantasia, e cuiuspiam obiecti deformis conspectu vel auditu enata commemorantur, inter res satis exploratas? an potius, vt ego hactenus existimo, inter errores populares ab Eruditis temere assumtos sint collocanda? Nam nonnullas mon-

monſtriparas ſerenitatem mentis haud interruptam continuiſſe, alias vice verſa, in quarum imaginatione graues tumultus tempeſtatesque ac animi aegritudines, hincque foetus cauſſa, ideae moleſtiſſimae ſuſcitabantur, prolem ediditſſe omnis labis et vitii expertem, haud vno exemplo, ac inter alia nouiſſimo, quod iam ſors obtulit, mihi compertum eſt.

§. 5. A parentibus hiſtoriae exordium ducentes, a militis praeſidiarii coniuge, iam vndecies vtero gerente, ac ſub ipſo partu fere ſpiritum cum ſanguine effundente, puer infelix brachiis mancus isque primogenitus, alterque ei ſociatus, ſed poſtremus ſeu poſterigenitus omnisque deformitatis expers, vitam lucemque acceperunt. Hic profecto, quia corpus placentae vtrique erat commune, mirari ſubit, cur tam diſpari ſorte, vni ſolummodo, haud ambobus ſimul, vt praeſumendum erat, phantaſiae impreſſiones ſunt communes? Nam, quum e communis placentae radicibus, ambo funiculi vmbilicales erant contexti, quibus aequabili ratione vtriusque foetus nutritio perfici poſſet, aequum profecto eſſe videtur, vt ſimul in vtroque, matris impreſſiones aequaliter propagentur; Rem autem ſecus ſe habere, experientia teſtatur: ex quo iterum, aduerſus phantaſiae vires, in monſtrorum generatione, noua dubitatio exoritur. Caeterum, quonam grauiditatis tempore? ac vndenam eiusmodi deprauatio in altero foetu originem traxerit, num aliquando et quanam occaſione? quibusue circumſtantiis ſubito ac vehementius fuerit mens perturbata? ipſius denique matris de eiusmodi caſu iudicium, quibus prae-

faſa

ista dubitatio quantum fieri potest, explanari queat, percontatus: Deus, inquit, qui scit omnia, id solus nouit; se meminisse solummodo, prius quam vtero conciperet aeque ac vtero iam pleno, languore seu dejectione summa virium, interdum fuisse affectam, vnde caussa foetus brachiis mutilati forte deriuari debeat. Et ista quoque, de caussis effectricibus monstrorum, pro instituti nostri ratione nunc sufficere mihi visa sunt.

§. 6. Iam, vt ad Pueri Nostri contemplationem deueniamus, quando corporis summum et nobilissimum ornamentum ei [illegible] ademptum, videlicet vtrumque Brachium tam [illegible] quam sinistrum, hinc sedes ista vacua, plana [illegible]que, in cuius centro papilla seu exigua verruc[illegible] conflata, oblonga, grani tritici magnitudine [illegible]mobilis erat conspicua; et quia porro istius [illegible]di fabricae descriptio, a nemine quantum scio in lucem [illegible] huc est edita, propterea hic subiicere primo O[illegible], 2. Musculos, 3. Vasa sanguinea, ac denique 4. ne[illegible]os, (quae profecto iis qui rerum cognitione delect[illegible]tur fore gratissima confido,) duce Anatome haud [illegible] [illegible]erit.

1. E tota compage ossium, quorum numerus in vt[illegible]que brachio ad 86. est definitus, duo vtrinque sunt posita, cum tertii rudimento videlicet, os scapulae, os clauiculae, ac denique breue fragmentum, caput ossis humeri mentiens ac scapulae ceruici accretum. Caeterum, positionem seu situm cum scapulae tum clauiculae, huiusque extremitatum connexionem cum acromio et

 sterno,

sterno, postremo vtriusque conformationem, legitimam ac Naturae legibus accommodatam inuenimus.

2. Quum super totum ambitum scapulae, plures insignes musculi a natura sint dispositi, qui vel motui proprio scapulae, vel aliarum partium, maxime brachiorum motibus inseruiunt, eorum musculorum iactura hic profecto erat conspicua, qui vno extremo scapulae, altero longius infra caput ossis humeri implantantur, videlicet teretes, deltoideus, bicipites, coracobrachialis: Caeteri autem, qui in praefatii capitis confinio terminantur, tametsi vt sensui apparet, vsus plane sint expertes, omnes erant conspicui, videlicet infrascapularis, supra spinatus, infra spinatus. Duo porro insignes musculi, pectoralis maior et latissimus dorsi, eiusdem insertionis cum praememoratis erant participes. Quod denique, ad caeteros musculos scapulae, brachii motibus haud inseruientes spectat, eorum diligenti perlustratione ac enumeratione instituta, nequaquam omissos, sed vt in aliis hominibus positos esse animaduerti. Caeterum, propter frequentem varietatem in ortu Musculi Coracohyoidei a Celeb. Anatomicis annotatam, hic silentio haud est praetermittendum, quod neque a processu coracoide, neque a sinu ei vicino, neque in vtriusque confinio, sed ad angulum superiorem et posteriorem, eius ortus sit manifesto positus: ob quam caussam, inter eiusdem musculi ortum et terminum, maiorem distantiam quam alias solet, hincque maiorem eius esse longitudinem palam est.

3. Ad

3. Ad vaſa contemplanda ferebat praecipue animus idque haud immerito, quando quis expendit, flumina ſanguinis, e corde per vaſa inſignia ad vtrumque brachium deducta, hinc per vaſa haud minus ampla ad cor redeuntia, hic vero prorſus deleta, et, quod conſequitur, ob iacturam brachiorum, in corde et caeteris vaſis corporis multo abundantius ſuſcepta, ac propterea vt ex ſequentibus intelligere procliue erit, haud ſine ſummo periculo verſus alias partes deuoluta. Toto igitur tractu ſeu ſpatio cor inter et iuguli principium, conſpectus vaſorum Naturae legibus exacte reſpondebat, videlicet arteriarum, aeque ac venarum trunci et rami ac eorumdem ortus, inceſſus, numerus, conformatio et diſtributio, quae omnia, vt dixi, a corde vsque ad iuguli initium, cuiusuis deformitatis erant expertia. Iam a quo, vaſa collo ac capiti propria, a ſubclauiis, vt moris eſt, diſcedere incipiunt, inſolita mutatio ſpectaculumque nouum, conſuetis legibus Naturae minime accommodatum, manifeſtari incipit; Nam poſtquam vnius fere lineae interuallo ſeu latitudine, ambo arteriae aeque ac venae ſubclauiae trunci, a conſociis colli et capitis ſunt digreſſi, ſubito gradum veluti ſiſtentes, ac mirum in modum gracileſcentes, viam longius proſequi deſinunt, eoque deficiunt, quo alias in vaſa axillaria propagantur. Ex aduerſo, colli et capitis vaſa proportionem aetati debitam excedentia, haud minus quam in adulto craſſa et ampla ſunt conſpicua. Interim, quaecunque ſit cauſſa iſtius inaequalitatis, eorumdem vaſorum amplitudo, in laeuo, haud tanta eſt viſa quam in dextro latere, quia vt opinor, arteriae carotidis nexus cum ſubclauia ad

istiusmodi augmentum est propensior. Extrema porro variorum subsclauiorum, omissis, vt iam annotaui, axillaribus, sn 5. 6ue exiliores et aequales arteriolas, ac totidem venulas immediate desinentia, hinc ad supra memoratos musculos breui itinere propagata, ibidem terminum assequuntur visumque effugiunt.

4. Post vasa sanguinea, ferebat quoque animus et neruos hic spectantes, eorumque conditiones pari diligentia persequi ac contemplari. Itaque, coniugationes neruorum ceruicalium tam superiores quam inferiores, haeque postraemae, ab exordio vsque ad earumdem per medium musculi scaleni eruptionem, a quantitate, ductu et conformatione ordinaria haud alienae, oculis sunt oblatae; Verum a praefata eruptione, earumdem pristinam formam, incessumue immutatum esse, iam procliue erat internoscere: nam similiter, vt vasa subclauia, gracilescere ac in exiliores chordas solitarias, simplices, inuicem haud implicatas aut irretitas commutari incipiunt, hinc praefatae chordae supra memoratis arteriolis venulisque intermixtae, nexu tamen mutuo (quo alias elegantissimo artificii genere nerui sunt implicati) carentes, ductu obliquo breuioreque versus costam superiorem scapulae separatim incedunt, ibidemque cum musculis supra memoratis iunctae, haud longius progredi obseruantur.

§. 7. Iam, quae de conditionibus et fabrica Monstrorum hic et alibi, (vid. Comment. Acad. Petrop. Tom. III.) a me sunt exposita, hinc excellentiam summumque artitificium, intellectum, et prouidentiam in istiusmodi operibus obuiam, quo animo exposuerim, e praefatione satis intelligitur, videlicet, vt spirituum et phantasiae vtero gerentium efficaciam impressionesque vltra quam par est haud exaltemus: Nam, si a perturbatione ac mutata indole spirituum interdum funesti effectus ortum trahere possunt, haud propterea machinas vel organa exquisitissima ab iisdem effici posse existimandum est: In priore enim casu solo impetu, in posteriore autem cognitione opus est. In igne ex. gr. vis inest caustica, dissoluens, in cineres seu puluerem redigens aedificia, ligna etc. aedificium vero aut lignum efficiendi facultate haud est praeditus. Hinc, quo res, per eiusdem Pueri de quo hic sermo est, proprium exemplum, duce Anatome fiat clarior, potentia aeque ac impotentia spirituum in eo sensibus erat euidentissima, haec in mutilatione brachiorum, illa vero in funestis effectibus ac phaenomenis, in eiusdem Anatome nobis oblatis, quae propterea pro huiusce dissertationis Coronide hic adiiciemus.

§. 8. Primo quidem, per dextrae cauitatis thoraeis factam incisionem, materiam seu aquam limpidam rubellam hic innatare, et Pulmonem vndiquaque esse liberum: Ex aduerso, in opposito latere pariter inciso, cauitatem vacuam, pulmonemque costis, diaphragmati, et pericardio tenacissime agglutinatum, earumdemque partium extimam superficiem, plurimis tuberculis duris, flauo albicantibus, de quibus infra, exasperatam obseruauimus. Haec vero vt leuia et vulgaria, hic minus sunt atten-

 denda.

denda. Iam, dextrorsum inciso pericardio, vesicae instar inflato, pus saniemque in eo atrorubicundam, cuiusmodi sordibus cordis exterior superficies pariter erat inquinata, obseruare, hinc quando sinistri lateris pulmonem comprimebam, pus in pericardio accumulari, cum magna admiratione animaduertere coepi. Dum in eo essem, obseruo in opposita parte pericardii, in quo latere pulmo sinister ei nexu fere indissolubili erat agglutinatus, perforationem circularem magnitudine pisi, qua ad duorum digitorum profunditatem e cauo pericardii, in sinistri pulmonis lobum superiorem, stylus penetrabat, per quam viam e pulmone in cauum pericardii, vt dixi, puris exitus erat sensibus manifestus. Itaque, pulmonis a pleurae adhaerentiis, et eiusdem cum pericardio fere indissolubili nexu caute soluto, hinc pericardio ad latus inclinato, hiatum seu fossam ob pericardii nexum prius occultatam, haud sine horrore conspicio: Nam ea ad duos digitos profunda, et amplitudine imperialis ambitum exaequans, a medio et profundo praefati lobi superioris vsque ad tunicam extimam pariter exesam sese extendebat, inque praefatum pericardii foramen exitum habebat: vnde ea, pure substantiam pulmonis depascente et graueolente erat repleta. Eum autem in modum, ea corruptio inualuerat, vt maiores rami arteriae venaeque pulmonalis nudi iacerent, vt et minorum tubulorum fragmenta semierosa et vacillantia.

§. 9. Sed in praefatis, iisdemque vicinis, vt et quibusdam visceribus imi ventris, aliud aeque graue, hinc fere vniuersale, vitium erat obuium, ex quo quantum in vita malorum, ante supremum diem Puero fuit perferendum,

dum, intelligere haud difficile est, nempe toto tractu qui est a summitate vsque ad imum thoracis, tumorum partibus interiectorum, easque inuicem fere indissolubili nexu compingentium hincque in earumdem praeparatione, magnam difficultatem obiicientium, incredibilis copia oculis est oblata: Nam Iugulares, Bronchiales, Oesophageae, verbo, vniuersae Glandulae Oesophago, Tracheae, vasisque supra et infra pericardium sitis ac Canali Chylifero adsitae, per quas commemoratae partes iusto magis compressae inuicem erant conglutinatae: similiter omnes Glandulae lumbares, mesentericae, vt et sinistro orificio ventriculi, collo vesicae felleae, et spleni adsitae, induratae et ad magnitudinem nucis auellanae erant auctae. Perlustranti porro, pericardii cum lobo sinistro pulmonis, huiusque ad cauum eiusdem lateris concretionem, hinc adhaerentiarum istarum caussam perquirenti, super praefatarum partium, pleurae, costis ac septo transuerso super extensae, vt et super peritonaei, septum transuersum inuestientis ac postremo, super Lienis vniuersam superficiem, incredibilis copia consimilium tumorum oualium, durorum et caseosa materia graueolente infarctorum, sed cannabini seminis seu lentis magnitudinem haud excedentium est oblata. Hinc, speciem Glandularum referre, ac a praememoratis glandulis, mole et sede tantummodo discrepare, cumque istiusmodi corporibus conuenire videbantur, quae superiore seculo Summi Viri *Frid. Rhuyschius* et *Marcellus Malpighius*, hic quidem in Pericardio Pueri ac in alio homine, cuius *Pericardium absque tumore ita arcte Cordi haerebat, vt auulsam secum raperet cor-*

cordis substantiam et in singulis visceribus (*Pericardio et Corde*) *Glandulae miliares tartaro turgidae manifestabantur. vid. Epistola de Structura Glandularum conglob. Societati Regiae Anglicanae inscripta A.* 1688. Alter vero, sub titulo Lienis grandinibus obsiti Thes. IX. n. 55. a se obseruata fuisse commemorant.

§. 10. Caeterum, si istiusmodi a *Malpighio* obseruatis corporibus, tumores in nostro Puero vere sint similes, hincque iisdem superstructa Doctrina haud commentitia, sed vt Grauissimi Anatomici coniiciunt, veritati sit maxime propensa, rarum profecto ac perutile spectaculum hic nobis esse oblatum, nempe haud solum in Pericardio, vt et Pleura et Peritonaeo, (in quibus postremis partibus tametsi indagatae, haud tamen oculis conspicuae Glandulae sunt factae), sed (quod nouum et praeclarum esset inuentum) in pulmonis exteriore integumento structuram follicularem manifesto patere statuendum esset: Cuiusmodi porro inuentum, coniecturae simul locum daret, existentiae similium Glandularum in omni viscere, tam in medio quam imo ventre incluso, quae ob suarum exilitatem et pelluciditatem oculorum aciem effugiunt, siquidem, vt pleurae et peritonaei textura e folliculis est conflata, sic non solum Pulmonis et Lienis, sed quoque Cordis, Diaphragmatis, Renum, Vesicae, Vteri, Testiculorum in vtroque sexu exteriorum membranarum quae Pleurae et peritonaei veras expansiones esse creduntur, similem ac communem texturam fore probabile est. Quia autem ea de re, duce *Rhuyschio*, inter Grauissimos Anatomicos haud vna est sententia, ego quidem Virum Celeb. ac ve-

veri ſtudioſiſſimum, magis quam multi exiſtimant, *Malpighianae* doctrinae fuiſſe propenſum, ac vel ſeinſcio ſub poſtremis vitae annis eius veritatem re ipſa agnouiſſe contendo, dum *Aduerſar. Anat. Dec.* 2. *Cap.* 3. de origine materiae quae in articulo genu pone patellam reperitur, hunc in modum diſſerit. Cauſſa, inquit, quae opinioni de glanduloſa hic loci fabrica originem dedit, haec imprimis eſt; In vaſculoſo illo apparatu locantur vbique exigua membranacea receptacula, ſimilia iis, quae in inteſtino recto imprimis vt et inteſtinis tenuibus obſeruantur, quaeque verſatiſſimus in Anatomicis *Liſterus* donat nomine agminis glandularum. Circa receptacula haecce innumerabilia vaſcula ſanguifera, tela aranearum ſubtiliora atque decurſu omnino ſingulari diſpoſita videmus. Neque apparere haec vaſcula poſſunt, niſi prius cera rubra bene repleta fuerint, dein radiis ſolaribus recta allapſis in coelo ſereno, obſeruentur per oculos boni microſcopii adiumento vſos: vbi enim omnibus his beneficiis ſimul adhibitis non vteris fruſtra haec inquiſiueris.—Iam, quia iſtiusmodi receptacula re ipſa ſunt *Malpighiana*, propterea nullum diſcrimen eſt obuium inter *Malpighii*, ac inter modo expoſitam Glandulae Idaeam: Omnes enim ad veram ſtructuram glandulae pertinentes proprietates ſecundum *Malpighii* mentem, loc. cit. a Celeb. *Rhuyſchio* aſſumtas et deſignatas perſpicere procliue eſt. Quibus conſtat, Virum ingenuum verique Amantiſſimum ſub vltimo vitae termino ſeu decennio, opportunitatem eam nactum fuiſſe, qua vt ipſe *p.* 1. *Aduerſ. Anat. I.* fatetur, emendaret errata ſua Anatomica, quae ipſe forte in aliis ſuis olim ſcriptis commiſit. Quis nempe, inquit, mortalium omnibus se horis sapere iactet? Quis ab errore immunis? de me, id vel cogitet, absit! satis superque vidi, atque dolui, hinc inde excidisse festino quae maturescentis senii prudentia aliter dictata vellet, multumque referre, an iuuenili impetu efferantur quaedam, an vero ab Octogenario multos pressa in annos prodeant ---- quia impossibile puto, ita bene subducta ad scripturam ratione esse, vt nihil postea vel ipse corrigendum aestimet. Ipse gaudebo sane si quis in meis deprehensa vitia in melius commutet. ---- Iam Vir Eximius in cit. exemplo fatetur a se visa fuisse receptacula exigua, combinataque vasculis innumeris, telis aranearum subtilioribus, quae ambo sunt re ipsa proprietates verae essentialesque Glandularum secundum mentem *Malpighii*; Verum ex aduerso, eiusmodi receptacula fatetur a se haud visa fuisse in caeteris partibus vt in epidermide, in interioribus cauis cerebri, pleura, pericardio, peritonaei cauitate, testium tunica vaginali ac plurimis aliis partibus, tametsi earumdem vascula conspexerit tantae tenuitatis, vt in statu naturae ac post repletionem cera rubra factam, sine radiorum solarium ac microscopiorum optimorum luce essent plane inconspicua. Cur vero hic vasa separatim? Cur non aeque vasa et receptacula simul combinata vt in priori exemplo? Priusquam respondeam, cur quaeso in multis partibus, in statu naturae alia vasa sunt conspicua, alia vero eorumque pars maxima vt ipsemet *Rhuyschius* fatetur, sunt inconspicua, donec vel caussis fortuitis vel solertia Anatomicorum fiunt sensibus obuia. Ergo, vt vascula dantur ineffabilis tenuitatis, quae tametsi vero exiſtant multis in locis ſunt inconſpicua, ſimiliter in compage admiranda Animalium intelligitur, non ſolum vaſcula omnis generis, vt dictum eſt, contineri; Verum varia corpuſcula eſſe poſita tam indole quam magnitudine discrepantia, quaedam acie oculorum conſpicua, quaedam vero ob incredibilem tenuitatem aut pelluciditatem, aut ſitum profundiorem ſenſibus inconſpicua, interdum tamen fortuito vel alia quacunque cauſſa reuelanda.

§. 11. Quare, vt ad quaeſitum reſpondeam, tametſi proprietates ſyphonis ſint profecto admirandae, propterea tamen ex effectu in vaſa vniuerſa, inque eorum ramuſculos et contextus ſubtiliſſimos, haud conſequi effectum communem ac vniuerſalem, nempe claram et abſolutam demonſtrationem texturae ac varietatis particularum ad eam ſpectantium, minus mirandum eſt: Nam 1. quando vaſcula minima tametſi ſint diſtenta, aciem oculorum eludunt, aliae vero machinulae, ſiue nudae, ſiue annexae vaſis minimis, ſiue non, e ſubſtantia fluidae aemula ſunt conflatae, num a cerae vel cuiusuis materiae in vaſa iniectione, eas viſus aciem effugere mirum eſt? 2. Quando ante iniectionem, earum moles vaſcula aequaret, ſi per iniectionem omnes ramuli minimi diſtenduntur, quanto iniectio eſt perfectior, molesque vaſculorum auctior et conſpectior, tanto exilior moles difficiliorque conſpectus machinularum efficitur: Nam, quum earum fabrica ſit tenerrima, facile intelligitur, a praefata diſtenſione vaſculorum earumdem reſiſtentiam quae eſt minima, vinci, hinc coarctationem ac denique molis decrementum conſequi: vnde patet, ad inueſtiganda Naturae arcana, iniectionibus haud vltra, quam par eſt, tribuendum eſſe.

DE
CORDIBVS VILLOSIS.
AVTORE
Jos. Weitbrecht.

§. 1.

ADmirandi huius et rari inter cordis affectus phaenomeni primo historiam dabo; deinde in caussas eius, quantum in re obscura licet, inquiram.

§. 2. Mensis Augusti die vigesimo primo, 1731. cum in sectione cadaueris remigis alicuius occupatus essem, qui ex vlcere profundo pulmonis sinistri vsque ad exteriora integumenta penetrantis decesserat, habitum cordis externum singulari quodam ac miro inuolucro inuestitum deprehendi. Erat enim materia quaedam ad sensum, lardosa; hic tenuis ibi crassa, albicans, tenax, vbique decussatim quasi incisa, et in crenas diuisa, vt villos paruos, varios, longiores et breuiores, rotundos, quadrangulares referret, quae non solum superficiei cordis exteriori et adiacentis pericardii parieti toti superinducta erat, sed etiam in omnes sinus inter vasa e corde egredientia, imo super vasa ipsa, quantum in cauitate pericardii continentur, penetrauerat. Poterat haec materia, tamquam membrana continua vbique detrahi, vt cor et pericardium in statu, qualis naturalis esse solet, relinquerentur: quippe in aliquibus locis laxius, in aliis autem, et imprimis in illis locis, vbi sub membrana cordis pinguedo transparebat, substantia tenuior, et paucior tenacius adhaerescebat.

§. 3.

§. 3. Non ita multo poſt in alio cadauere inuolucrum ſimile detexi, quod et in Conuentu Academico in conſpectum produxi, in quo autem villi non adeo magni adhaerebant, vtpote cor cum pericardio aliquibus in locis concretum erat.

§. 4. Simile velamentum autem, tertia denique vice, Menſe Februario 1732 in cadauere agnatae alicuius, vna cum Cl. Dn. D. *Du Vernoi* non ſine ſtupore intuitus ſum. Erant autem hic omnia inſigniora; materia lardoſa non in villos ſimplices vagantes diuidebatur, ſed in columnas omnino craſſas, imaginem columnarum maximarum in ſinibus cordis referentes, colore et conſiſtentia polyporum aemula, quae tamquam trabes ex cordis lateribus verſus pericardium extenſae, huic accreuerant, atque ita cohaeſionem cordis cum pericardio ſtabiliuerant. Laborauerat defuncta haec Virgo viginti annorum vltimis vitae temporibus obſtructione menſium, quorum fluxus irreuocabilis erat; acceſſerant, difficilis reſpiratio, tuſſicula, febricula vaga, dolores pungitiui circa ſcapulas, anxietas, appetitus proſtratus, tumor pedum, donec tandem repentina ventriculi inflammatio, cum ſubſequente vomituritione, et ſubitanea denique ſuffocatione miſeriae finem impoſuiſſet. Praeter phaenomenon autem ſupra memoratum aderat hydrops pectoris in dextra imprimis thoracis cauitate; et in pulmonis ſubſtantia, praeter varios duros nodos, oſſiculum quoque rotundiuſculum, ſcabroſum, pi.i maximi magnitudine innatum.

§. 5. Prima quaeſtio, quae ſub phaenomeni huius conſideratione, eruenda occurrit, ſine dubio haec eſt:

qualesnam et cuius naturae ſint tales excreſcentiae? Ad quam vt cum aliqua veriſimilitudine reſpondeamus, ad experimenta adtendendum eſſe putem, quae cum hac materia inſtitui.

§. 6. Portionem huius materiae in aqua ſimplici maceraui; in qua putreſcere, foetere, et in mucilaginem denique, quemadmodum aliae partes animalium non pinguedinoſae, fatiſcere coepit. Portionem aliam in aqua ſimplici coxi, quae in ſubſtantiam multo tenaciorem ac membranaceam coaluit, atque ſpeciem coaguli ſubalbidi induit. Aliam denique portionem in lamina ferrea igni aperto impoſui, vnde in ſubſtantiam duram, et fragilem exaruit. In his variis examinum modis nullum pinguedinis veſtigium apparuit. Cum vero eadem haec phaenomena in ipſo ſero ſanguinis humani deprehendantur, neque vllum ſimile fluidum in corpore humano exiſtat: concludendum omnino eſt, hanc materiam non pinguedinem eſſe, ſed genuinam ſeri ipſius progeniem.

§. 7. De poſſibilitate ſeparationis materiae talis ſeroſae nullatenus eſt dubitandum. Namque in ſanguine animali ſerum cum globulis rubris adeo laxe cohaeret, vt nonniſi ſola quiete opus ſit ad reſolutionem huius humoris vitalis in iſtas duas partes integrantes. Docet id quaeuis venae ſectio. Imo ne tenacior quidem ſeri pars cum rubra aequabiliter miſta manet, ſed tamquam cruſta membranacea placentam rubram ſeparatim obtegit, quemadmodum in pleuriticorum ſanguine emiſſo luculenter videre eſt. Denique ipſa polyporum natura, qui, non ob-

obstante perpetuo sanguinis traiectu in interna cordis cauitate nascuntur, serum sanguinis a rubris partibus diuelli posse, abunde satis testatur.

§. 8. Tales autem excrescentiae serosae (§. 2. 3. 4.) non in cordibus solis inueniuntur, sed experientia docet, in aliis quoque corporis regionibus saepenumero existere. Ita e. gr. Cl. D. *Du Vernoi* noster multiplici obseruatione didicit, intestinorum gyros imprimis per materiam talem serosam et glutinosam, et in membranae speciem incrassatam ita sibi coalescere, vt quasi connatae videantur, atque aegre a se inuicem diuelli patiantur. Neque ab hoc loco alienum mihi videtur, aliud exemplum commemorare, quod in cadauere rustici cuiusdam A. 1729. oculis meis se obtulit. Huius pectus cum aperirem, latus eius sinistrum aqua lividula plenum erat: vix enim vna aut altera costa a sterno soluta, statim illa per rimas prorupit. Ablato autem sterno, hoc se exhibuit phaenomenon: Pulmonis dextri lobus ille, qui inter duos, aut interdum tres, maximus est, qua sternum et costarum cartilagines adiacet, obductus erat materia quadam ex albo flauescente, tamquam membrana, vigesimam circiter pollicis partem crassa. Abrasi digitis, collegi in vasculum. Adstitit spectator Cl. D. *Gmelin*. Postridie examinauimus aqua et igne. Cum aquam iniecta coqueretur: deprehendimus parumquid pinguedinis in superficie aquae natantis, quae vero a digitis inter secandum vnguinosis factis, queis colligebatur, facile affricari poterat. Reliqua materia in membranam concrescebat tenacem, talem, qualem ex sero sanguinis con-

fectam

iectum Cel. *Ruyschius* in Thesauris suis exhibet. Quo magis coquebamus, eo tenacior euadebat. Post elixationem in lamina ferrea igni aperto imposuimus, vnde tandem adeo induruit, vt in puluerem potuisset redigi. Partem huius materiae, absque praeuia elixatione, methodo vltimo commemorata examinauimus, quo factum est, vt antequam in membranam et tandem in substantiam duram conuerteretur, multae bullulae aereae excitarentur, quarum vero paucae, propter materiae tenacitatem, pelliculam suam disrumpere poterant, vt igitur aer solummodo sensim exhalare cogeretur. Ceterum pulmo dexter valde durus erat, sed aequabiliter et sine nodis sparsis; itemque solito maior, siquidem propemodum duplo plus ponderabat quam sinister.

§. 9. Si de modo formali quaeras, quo excrescentiae tales serosae separari atque excerni possint, duo potissimum probabiles esse videntur; aut enim ex vaporibus, qui ex omnibus visceribus continuo exhalant, illae generantur, aut ex ipsis visceribus sub forma non vaporosa sed crassiore et fluida expressae transsudant: quibus etiam lympha pericardii, si de cordibus villosis in specie sermo est, tamquam materia proxima annumerari potest.

§. 10. Quod ad vapores attinet, illi quidem generaliter negari non possunt: sed in vagis illorum exhalationibus nulla ratio sufficiens deprehenditur, quare tales materiae non vbique in tota aliqua corporis cauitate, sed tantummodo e. gr. in hoc praecise lobo pulmonis et non in alio proxime vicino detegantur. Caussa

tertia

tertia locum quidem habere posse videretur, quando de cordis excrescentiis solis quaestio esset; haec vero aliis phaenomenis a pericardio remotioribus explicandis minime sufficeret, nisi similem vaporum condensationem in massam liquidam (qualis in pericardii fovea constans est) tam in pectore quam in abdomine supponere velles. Quamuis autem talis suppositio per experientiam quodammodo roborata videatur, dum saepissime accidat, vt in istis regionibus aliqua serosa colluvies diffluat, tamen exinde non sequitur, cur plana superficies pulmonalis lobi alicuius, cur intestinorum gyri variis directionibus inflexi talibus membranis obducantur? cum potius illa, si quidem post consumptionem sensim [illegible] fluctuarent, vi grauitatis planitiei diaphragmatis incumbere, aut in pelvis cavitate delitescere deberet. Sola igitur transsudatio specifica determinata in illis visceribus, super quibus tales excrescentiae expanduntur, restat, ad quam in horum phaenomenorum explicatione confugiendum esse putem; quo vocabulo humoris serosi [illegible] extra vasa circulatoria expressionem per poros superficiei visceris intellectam velim.

§. XX. Vt vero in corde et pulmonibus materiam talem serosam, glutinosam et compactam per transsudationem obtineamus: primo vis aliqua adesse debet, a qua ista expressio extraordinaria proficisci potest; deinde materia huius naturae sit oportet, vt, postquam separata est, in formam consistentem [illegible] quodammodo solidam abeat, non autem liquida permaneat. [illegible]

[illegible]

§. 12. Vis illa est ipse motus cordis solito vehementior auctus propter impeditum sanguinis traiectum per pulmones ex vitio huius organi, quem immediate comitatur intensior solito respiratio. Intelligimus enim, in exemplis supra allegatis semper adfuisse respirationis difficultatem et pulmonum thoracisue laesionem. Res autem experientiae est, quo magis transitus sanguinis per pulmones impeditur, eo maioribus agitationibus cordis ventriculos contra niti, eoque celeriorem et magis anhelam respirationem fieri, quae semper maiorem infarctum sanguinis tam in corde quam in pulmonibus, expansionem et dilatationem horum viscerum, texturae raritatem, pororumque minimorum hiatus apertiores induit, vt serum forma paullo crassiori, quam quae in vaporibus et transspiratione insensibili conspicitur, exprimi possit.

§. 13. Sed ad consistentiam et fluiditatis iacturam non sufficit sola seri extrauasatio et secretio. Videmus enim in sanguine venarum emisso, separari quidem quiescendo, sed fluiditatem suam non omnem amittere. Alia igitur caussa in auxilium aduocanda est, quam in aucto caloris naturalis gradu inuenimus. Notum est, examina seri aliorumque liquorum ipsi agnatorum, e. gr. albuminis oui, nos docere, quod, cum in diuersis caloris gradibus detineantur, sub habitu etiam longe diuerso appareant. Imprimis vero serum non coit in coagulum nisi in aqua calidissima; in tepida autem tantummodo putrescit. Vtriusque obseruationis exempla corpus quoque animale exhibet. Hoc enim clare apparet in abscessibus purulentis

lentis atque ichorosis, qui originem suam sero extrauasato et in quiete constituto, ab ambientium autem partium calore soto acceptam debent. Alterum vero colligendum est partim ex consistentia polyporum in corde, partim ex crusta inflammatoria in sanguine pleuriticorum, aliorumque febribus ardentibus laborantium, in quibus ob excessiuum sanguinis aestum iam pars aliqua seri ad coagulationem est disposita, quae mox consequitur vbi primum quies accesserit.

§. 14. Cum igitur in corporibus istis, quae tales lymphae coagulatae extrauasationes nobis exhibent, ante mortem plerumque adfuerint sequentia phaenomena: motus cordis vehementiores, anxietates, febricula, respiratio difficilis, pulmo laesus: sequitur necessario, etiam calorem sanguinis vltra modum augeri debuisse. At vero auctus calor seri partes aquosas, tenuiores dissipat, fluiditatem eius minuit, glutinositatem auget, illudque ad coagulationem disponit, quemadmodum §. 13. demonstrauimus. Ratio igitur sufficiens patet, quare in istiusmodi pectoris affectibus serum expressum et esudans in spissiorem consistentiam reducatur. In cordibus autem sub villorum seu lacertorum crassiorum specie apparet, propterea, quia motus cordis tumultuosior est et magis vagabundus, vnde serum augmentis magis irregularibus accrescit, quam in pulmonibus, quae inter respirandum aequabilius explicantur atque contrahuntur.

DE CIRCVLATIONE SANGVINIS COGITATIONES PHYSIOLOGICAE.

AVTORE
Jos. Weitbrecht.

Cap. I.

Modi Circulationis Considerationes quaedam generales.

§. 1.

Motus perpetuus sanguinis e cauitate cordis sinistra egressi, per arterias in venas transeuntis, inde in cor dextrum redeuntis, hinc per pulmones ad scaturiginem suam relabentis, nouoque cursui se sistentis, in genere Circulatio sanguinis dici solet.

§. 2. Grauissima haec veritas *Harveiana* a primo non solum inuentore suo, sed et postmodum a *Pecqueto* aliisque, adeo indubitatis experimentis confirmata est, vt reuera talem motum in corpore animali existere, lippis hodie ac tonsoribus notum sit.

§. 3. Qualis autem sit ille *motus*, quibus *legibus* absoluatur, quae *vires*, quae illarum *quantitas*, et qui *effectus*? id vero est in quo assignando multi doctissimorum virorum, Itali potissimum, atque Angli desudarunt. Neque tamen in hoc opere ita progressi sunt, quin plurima nondum determinata, multa partim incongrue, partim falſo, partim contradictorie dicta, pauciſſima ad menſuras reducta nobis reliquerint; quamuis non tam ſcrutatorum attentio, quam rerum potius multitudo et perplexitas hactenus accuſanda venirent.

§. 4. Quapropter ad haec omnia indaganda dum animum appelleremus, haud parum profuturum eſſe nobis intelleximus, ſi, quae neceſſaria ſunt, a minus neceſſariis caute diſtinxerimus, ne ad omnia ſimul attendendo intricatiſſimis quaeſtionibus iisque inutilibus implicaremur. In conſiderando igitur motu ſanguinis e re noſtra erit, vt, quae de eius natura et conſtitutione, de viribus cordis earumque principio et quantitate, de proportione vaſorum inter ſe illorumque directione, de communicatione illorum determinata dici poſſunt, tantisper ſeponamus, et generalibus harum rerum notionibus contenti, ſimplicem naturae laborem oculis patienter intuentibus proſequamur.

§. 5. *Sanguinis* nomine humorem rubrum in animalium corde ac vaſis adhaerentibus contentum ac fluentem intelligimus; et illum quidem talem, qualem nudis oculis conſpicimus, quibuscunque ille particulis homogeneis heterogeneisue conſtiterit.

§. 6. Maſſa haec ſanguinea cum omnibus corporibus hoc commune habet, quod ſit impenetrabilis, et hinc omne aliud corpus ex loco a ſe occupato excludat; quod ſit mobilis ac figurabilis, hinc de loco in locum transferri, ac in varias figuras diſponi poſſit. Cumque partes eius impreſſioni cuique cedant, et cedendo facillime inter ſe moueantur; fluidi nomen, et ſimul affectiones omnes fluido competentes nemo iſti denegauerit.

§. 7. Praeterea tamquam veritatem indubitatam experimentis suis roboratam supponimus: ventriculos cordis contractione sua, sanguinem in vasa seu canales quosdam sibi accretos et congruos exprimere; cuius *contractionis* atque expressionis idea ideam *vis cordis* comprehendimus, quae praesenti instituto sufficit. Contractionem cordis cum *Harueo systolem* nonnumquam dicemus; ille vero cordis status, qui inter duas contractiones medius est, nobis *Diastole* erit.

§. 8. Qui circulatione sanguinis adstruenda occupantur, canales, per quos sanguis mouetur, tamquam duplicis generis vasa nobis exhibent. Harum alia sanguinem a corde abducunt, et ex trunco in ramos imaginatione omni subtiliores diuiduntur: alia sanguinem similibus tenerrimis staminibus recipiunt ac per truncorum suorum meatus iterum in cor deponunt. Illa vocari *arteriae*, haec *venae* solent.

§. 9. *Canales*, per quorum cauitates hoc nostrum fluidum (§. 6.) mouetur, ex corporibus eiusmodi conflati sunt, quae data vi extendi sine rupturae metu possunt, atque iterum restituuntur sublata ista vi aut superata, siue, quae *elastica* sunt. Cum igitur sanguis in canalibus contentus continuam in latera illorum pressionem exerceat, et vasa extendere annitatur, vi fluiditatis suae (*Grauesand. Instit.* §.328.): pressione hac aucta vel minuta, ceteris paribus, maior vel minor canalium capacitas exsurgere potest.

§. 10.

§. 10. Premat sanguis in canalium latera circumquaque: contranitantur canales elasticitate sua, ita vt tota sanguinis pressio consumatur reactione laterum vincenda, et vicissim toti laterum nisui resistat: scilicet sint vires pressionis atque elateris aequales; ita vt nulla sequatur canalium dilatatio aut angustatio, vt proinde diameter capacitatis sit per aliquod tempus eadem, et fluidum quiescat: in hoc casu sanguis et canalium latera ita se inuicem arcte tangent, vt nullum assignari spatium sensibile possit, materie vacuum: siue canales isti tum erunt pleni. Iam augeatur pressio fluidi, vi vndecunque accedente, et vincat resistentiam laterum, vt maior canalis capacitas oriatur (§. 9.): erit adhuc dum plenitudo, et vacui exilium. Superet vero canalium elasticitas pressionem liquidi, et capacitas illorum minuatur: ne sic quidem spatium relinquetur vacuum, sed omnia erunt plena.

§. 11. Apparet, sequi haec omnia (§. 10.) ex idea elasticitatis et fluiditatis (§. 9. 6.): Neque tamen ea ita vera sunt, quin cautionibus quibusdam opus sit. Videlicet supponimus, haec ita fieri in corpore sano et viuo, in quo semper determinata et sufficiens quantitas sanguinis requiritur. Potest enim haec ita diminui, vt actionem nullam laterum sese contrahentium amplius patiatur: Tum vero nec viuum aut sanum corpus erit. Deinde nimis illi praecipites mihi videntur, qui postquam non dari vacuum in canalibus euicerunt, eo ipso sanguine illos plenos esse concludunt. Illos autem demonstrare antea oportet, nullum aliud peregrinum corpus in canalibus deprehendi praeter sanguinem: id id quod aliqua ex parte praestitit *Dominicus Gulielmini*, qui a posteriori, vt Logici dicere amant, ostendit, quasnas turbas aliena corpora, tam solida, quam fluida, modo cum sanguine non miscibilia in negotio vitae excitent, et exinde necessariam sanguinis continuitatem adstruxit. Vasa igitur dicta sanguine plena esse audacter licebit dicere.

§. 12. Quia sanguinis ex arteriis in venas (§. 1. 8.) est *transitus*: vasa haec duo inter se cohaerere extremitatibus suis, necesse est. Qualiscunque autem haec sit cohaesio, hactenus nobis perinde erit: cum illius ignoratio praesenti considerationi nihil officiat.

§. 13. Tota igitur via, quam sanguis emetiri debet, antequam ad scaturiginem suam redeat, est longitudo arteriarum et venarum (§. 12.), quae pro varia vtriusque a corde distantia similiter varia est.

§. 14. Numquam tota illa sanguinis massa ex corde in arterias proiecta, per venas illibata redit, sed quaedam illius particulae e corpore penitus eliminantur, quaedam ita immutantur, vt suis specificis vasis latae per totum corpus oberrent, donec in viam regiam denuo relabantur. Ne igitur nimium oneris nobismet ipsis imponamus: scrutabimur solummodo, quid sanguini accidat, donec a corde per arterias ad harum extrema minutissima, vbi transitus in alia vasa incipit, peruenerit; reliquos canales et ductus tamquam vas aliquod commune consideraturi, in quod arteriae liquorem suum effundant.

§. 15. Vbi primum igitur Cor actionem suam exercere incipit, massa sanguinea, quam hactenus intra

L 4

vasa *quiete* delitescentem supponimus, impetum Cordis sustinere cogitur. Locus autem, vbi prima percussio accidit, circa *principium* e. gr. aortae ipsum (de arteria enim pulmonali deinde dicemus), cui valuulae semilunares applantatae sunt, quaerendus esse mihi videtur. Cum enim vasa omnia plena (§. 10. 11.) sint, sanguis autem quaquauersum (§. 6.) premat: valuulae istae vi structurae suae arctissime sibi apprimuntur, ita, vt cylindri arteriosi ex corde proxime ascendentis quasi *basin* efficiant, omnemque inter fluidum cordis et arteriae communionem tollant. *Pulsus* igitur e sinistro cordis cauo *sanguis* ad compressas valuulas allabitur, quarum *impetus* conceptus cum accumbente *sanguine* arterioso extemplo communicatur.

§. 16. Impetus autem iste sanguini a corde impressus *minime sufficit*, vt motus inde vllus *actu* sequatur, nisi ille *tantus* fuerit, vt *viam* sibi inter valuularum rimas aperire possit; id est, vt appressae sibi valuulae ab inuicem *discedant*, atque aortae lateribus admoueantur. Cum enim et sanguini sua sit vis inertiae, et vasa non a quouis minimo impetu extendi se patiantur: aorta *elastica* sanguinis molem tamdiu suis limitibus pristinis coërcitam retinet, donec vtraque a vi cordis superentur.

§. 17. Postquam *patefacta* (§. 16.) via est: vt sanguis *nouus* a corde protectus *intra aortae* cancellos recipiatur; *vetus* sanguis nouo *tantum* spatii concedere debet, *quantum* ad assumendum illius volumen sufficit;

plena enim omnia sunt et impenetrabilia (§. 6. 10.). Cum vero hac noui voluminis additione quantitas massae sanguineae prior in arteriis augeatur, vt in *eodem spatio* contineri non possit: haec ipsa in *alios secessus* deturbata promouetur. Loca autem, in quae vetus sanguis abiturit, non nisi *duo* esse possunt. *Aut* enim oportet, vt vasa *maiorem capacitatem* nanciscantur; atque ita ille *intra* arterias *adhucdum* detinebitur: *aut* posita capacitate *pristina non* ampliata *quantitas* sanguinis intra arterias *denuo minui* ac portio quaedam *aliorsum* extra illas *dilabi* debet. *Vtramque* autem *viam* a natura ipsa adhiberi, et in subsidium vocari *experientia* et *ratione* liquidissime euincitur.

§. 18. Locus igitur *alter* (§. 17.) quo sanguis vetus ab appellente nouo protruditur, sunt *arteriae* ipsae *dilatatae* eo vsque, dum proiecta portio *spatium sufficiens* nacta fuerit. Solemus hanc dilatationem quadantenus tactu ac visu dignoscere, ac pulsus nomine plerumque indigitare. Docent obseruationes Harueianae, *contractionem* cordis et aortae *dilatationem* fieri *eodem* momento: quando autem sanguis *extra* arterias se *praecipiat*; id quidem experimentis non aeque plane constat.

§. 19. Haec arteriarum dilatatio (§. 18.), sanguinis aucta pressio in illarum latera, valuularum eleuatio, dependet ab *impetu* sanguinis (§. 16.); Impetus autem huius ab *actione cordis* (§. 15.). Quo *maior* igitur est haec *actio*, eo *maior* etiam est *impetus*; hinc *latior* apertura intra valuularum *rimas*, et hae ipsae propius ad aortae latera apprimuntur. Cum vero actio cordis sit

tempo-

temporanea: necessario, cessatura *caussa*, impetus sanguinis quoque et omnia reliqua phaenomena, tamquam *effectus*, aliquando simul cessabunt.

§. 20. Finge iam actionem cordis *finitam*, et ventriculum sinistrum penitus depletum esse: dico, valuulas retropressas (§. 16.) iterum collabi, et *communionem* inter aortam ac ventriculum cordis denuo *tolli* debere. Id enim nisi fieret, *nulla* esset *ratio*, quare columna in aorta supra valuulas constituta, *non* iterum *descenderet*, et spatium pristinum euacuatum occuparet, atque ita *circulatio* supposita plane *abrumperetur*. Sed et caussas collapsus videamus.

§. 21. Quia corpora *elastica* dilatata nituntur in sui restitutionem ac contractionem: haec omnia etiam arteriis (§. 9.) accidunt. Non autem contractio actu fieri, nisi sublatis viribus *dilatantibus*, poterit, quae sunt, partim *impetus* sanguinis irruentis (§. 16.); partim illius aucta *quantitas*. Cum igitur actio cordis temporanea sit, illa cessante (§. 20.) virium dictarum *altera* tollitur, et dilatationi arteriarum vlteriori *terminus* figitur. Neque minus sanguis ipse naturam suam (§. 6.) numquam exuit, sed continuo quaqua vorsum *premit*, et quidem eo *fortius* illuc, vbi *minus* est resistentiae. Fac iam constricto ventriculo cordis ac depleto *valuulas* per momentum *apertas* manere, ac *columnam* sanguinis in aorta supra valuulas haerere *immotam*: spatium *vacuum* aderit tantum, quantum est interuallum inter valuulas apertas, inter limites ventriculi et columnam sanguineam nominatam comprehensum. Vbi autem vacuum est, ibi resistentia est nulla. Cum igitur non solum *im-*

petus sanguinis ex corde in latera valuularum *sublatus* sit, ex hypothesi, sed et praeterea *vacuum* obortum sit, vt nihil restet, quod valuulas vlterius retroprimere possit: sequitur *sanguinem* intra aortam ac valuulas contentum *vim* suam pressoriam in *valuulas*, potius quam aortam exercere; valuulas ergo iterum sibi apprimi, appressis autem valuulis sanguinem allabi. Cedenti autem sanguini, in restitutionem sui *nitentia* arteriae latera a tergo insequuntur, sese *actu* contrahunt, et valuularum arctissimam *occlusionem* adiuuant.

§. 22. Credo distinctius haec (§. 15. 16. 20. 21.) ob oculos poni Lectori posse *lineis* et *figuris*.

Sint enim AB et CB *valuulae* (quas ob simplicitatem duas fingimus) in B sibi accumbentes, quibus *columna* sanguinea intra aortam FABCGF, ex vno latere insistens quiescit. Agat iam cor, et sanguinem proiiciat ex ventriculo ACDE, versus latus alterum valuularum. Si impetus hic a corde factus vincit pressionem columnae sanguineae superincumbentis FABCGF; tunc eleuabuntur valuulae, et venient in situm talem, altera AB scilicet, in AH; altera CB in KC; et apertura erit HK. Per hanc *aperturam* sanguis ex corde proiectus viam sibi quaerit. Columna igitur dicta proiecto nouo sanguini cedens aortam dilatat; atque in situm altiorem pro differentia altitudinum ABC et HK, eleuatur: pressio autem ipsius columnae in valuularum latera, vtpote nunc minus inclinata, diminuitur. Cesset actio cordis; tunc valuulae

AH

AH, CK, nullum amplius impetum sustinent; columnae igitur sanguineae pressio in valuulas, etsi prius imminuta, tamen cessante cordis impetu infinita euadit. Si iam sanguinis columna FAHKCGF immobilis maneret per momentum, valuulis aut in AH, et CK haerentibus, aut proprio pondere in situm pristinum ABC, relabentibus: necessario vacuum adforet tantum, quantum est spatium AHKCBA, et capacitas ventriculi ABCEDA: In vtroque igitur casu sanguinis columna premens infinita vi, versus vacuum non resistens vna et simul cum valuulis ad altitudinem *pristinam* ABC descendit. Descendente autem columna, illius pressio in aortae latera AF, et CG diminuitur: haec igitur latera contranitentia iterum restituuntur, et *appressionem* valuularum adiuuant, atque arctiorem efficiunt.

§. 23. Sint iam omnia, *vti ab initio* (§. 15.), quiescat sanguis, atque ab arteriis vbique plenis comprimatur. Incipiat autem *denuo* agere cor, et portionem sanguinis *nouam* versus aortam proiicere: facile apparet, fore quidem, vt ea omnia *eodem ordine* accidant, quo §is 15–22. descripsimus: verum, cum quouis iterato cordis ictu, quantitas massae sanguineae in arteriis noua portione augeretur, tandemque in infinitum cresceret; fibrae etiam vasorumque eo magis extenderentur; sed et eo fortius resisterent: sequitur, *aut* vim cordis tandem ad motum continuandum *non suffecturam*; *aut*, si et in infinitum augeretur, canales ipsos, vtpote vbique tamquam obturatos, cum vitae dispendio *destructum* ruptumque iri. Quapropter ad vitam requi[illegible] *peren-*

nitas eruptionem sanguinis extra arteriarum alueos per vias legitimas indispensabili *vrget* necessitate. Cum vero valuulae semilunares omnem in cordis caua *recessum* (§. 20.) sanguini *denegent*, idque eo magis, quo fortius hic ab arteriis se restituentibus apprimitur (§. 21.22.): quicquid superfluum est, id omne per arteriarum extremitates *alteras* (§. 17.) cogetur effluere. Hae enim illa *emissaria* sunt, quae in alterius generis vasa (§. 14.) cum quorum primordiis (§. 7.) cohaerent (§. 12.), liquorem suum transfundunt.

§. 24. Quamdiu igitur incolumis ac *naturalis* sanguinis motus perennat: tamdiu etiam *quauis proiectione ex corde facta tantundem praecise sanguinis per extremarum arteriolarum orificia in exteros alueos transit*; *quantum ex corde intra aortae terminos fuit receptum*. Hunc motum sanguinis naturalem voco *aequabilem*; non, quod sanguis quocunque vasorum *loco* aequabiliter moueatur, sed quod *interuallo* duarum actionum cordis *tantum* arteriis exeat, *quantum* illas intrauit, *quacunque* id *celeritate* fiat. Dico autem *praecise tantundem* exterminari in statu *naturali*. Quodsi enim *minor* quantitas elaberetur: *congesta* sanguinis *moles* aortam illiusque ramos vltra consuetum terminus *distenderet*; quae *nimia distensio* aut, quod ante (§. 23.) monuimus, *rupturam* minaretur, aut, si robusta *satis* vasa forent et quasi rigida, obturatis emissariis *motum* cruoris progressiuum penitus *interrumperet*. Fac autem *plus* exilire per vasa capillaria: totalis sine dubio arteriarum *euacuatio* tandem sequeretur. Vtrumque autem talem statum a natura abhorrere, vel me tacente, luculenter patescit.

§. 25.

§. 25. Atque huius Corollarii (§. 24.) propositio, iam a *Dominico Guilielmino* stabilita adeo *vniuersaliter vera* est, vt nulla ex parte quicquam mutetur, *quantumcunque* ampla et capacia aut angusta, longa aut breuia sint *vasa media* inter aorta principium, et arteriolarum fines interiecta. Varientur igitur canales arteriosi quomodocunque, distendantur, coarctentur, circumducantur, incuruentur, quaquavorsum: quia omnia plena sunt (§. 10.); semper tamen omne liquidum in istis canalibus tam varie modificatis tamquam quiescens considerari potest et debet ita, vt nihil aliud fingere nos oporteat, quam solam *portionem illam* sanguinis ex corde *proiectam* per intermedios ductus vacuos ad emissariorum orificia *translatam*, atque ibi *excussam*. Quatenus igitur sanguis promoueri debuit; plane non necesse erat, vt *hoc respectu* arteriae *certa* quadam proportione diminuerentur, aut in *determinata* a corde distantia *determinate* decrescerent: sed non modo quidam rami longius a corde distantes poterant ampliores esse propioribus; verum ex ramis quoque maioribus per sensibilem distantiam aequaliter capacibus, ramusculi minimi poterant deriuari: quemadmodum illud exemplo *ramorum intercostalium* ad arterias *renales* relatorum, hoc vero exemplo arteriarum per piam matrem dispersarum, suosque ramusculos capillares in cerebri corticem demittentium, nec non arteriarum lienis quorundam animalium ex Anatomicis egregie demonstrari potest. Certe, quare in vno loco *capacior* quaedam, in altero *angustior* arteria deprehendatur, longe aliae rationes subsunt, de quibus vero verba facere adhuc locus non est.

§. 26.

§. 26. Sanguinis per arteriarum emissaria propulsi (§. 23.) pars *aut* intra vasa quaedam specifica se subducit, *aut* intra venas (§. 14.) *quomodocunque* (§. 12.). Cum vero illa ipsa vasa humores suos, qui ex corpore non plane eliminantur, intra venas postliminio exonerare ex Anatomia pateat: ratione motus sanguinis *progressiui* solius nil impedit, quo minus rem omnem consideremus, tamquam immediate *ex arteriis in venam* cauam transiisset. Quapropter cum fieri non possit, vt sanguis extra arterias eliminetur, quin intra nouos alueos cauae recipiatur eo ipso; *Transfusionem* sanguinis (§. 23.) et illius in venas *secessum* pro re *vna atque eadem* habere iure possumus.

§. 27. Quae de aorta et corde *sinistro* hactenus (§. 15.–26.) diximus: ea omnia cordi *dextro* et arteriae pulmonali simili modo debent applicari. Ventriculus enim dexter aeque contrahitur, ac sinister, suasque systoles et diastoles (§. 7.) habet. *Sanguis* igitur e cauitate *dextra* prolectus *valuulas*, arteriae dictae pari ratione ac aortae applantatas *tollit*, sanguinem in illa *contentum* loco *mouet*, atque arteriam ipsam (§. 15.–18.) dilatat, vt et ista extensionem passam *pulsu* manifestet. Tum vero, *absoluta contractione*, et valuulae (§. 20. 21. 22.) restituuntur. Et quae *ratio* allegata fuit, quod sanguis *extra aortae* emissaria se effundat (§. 23.): eadem et hic subest, quare *ex arteria pulmonali* in aliud vas ille transeat. Docet autem experientia, venam *pulmonalem* dictam illum esse *alueum*, qui sanguinem ex pulmonibus recipiat, atque in cauitatem cordis sinistram

depo-

deponat. *Quantum igitur sanguinis vno cordis ictu in arteriam pulmonalem propellitur; tantum praecise* (§. 24.) *interuallo temporis pulsibus illis destinato in venam pulmonalem transfunditur.*

§. 28. Vt motus sanguinis aequabilis (§. 24.) perennet, *vena pulmonalis tantum sanguinis in cauitatem cordis sinistram deponit, quantum ex arteria sua cognomine* (§. 27.) *recepit*: neque minus; *quantum deponit, tantum quoque ex ista cauitate denuo proiicitur*: si enim portio minor aut deponeretur, aut proiiceretur: tunc aut vena et cauitas sinistra tandem rumperentur, aut infusio decresceret, vel plane tolleretur; id quod hypothesi repugnat. Similiter *nec plus nec minus e ventriculo dextro in pulmones propellitur*, ceteris paribus, *quam ex Cauis fuit allatum.*

§. 29. *Quantitas* igitur sanguinis a ventriculo dextro *suscepta*, in pulmonalem arteriam *iniecta* (§. 28.), per venam (§. 27.) pulmonalem cordi sinistro *infusa*, inde in aortam *protrusa* (§. 28.), atque in venae cauae alueum (§. 24.) *transfusa*, *motu sanguinis naturali* et *aequabili* (§. 24.) *existente*, *est vbique eadem*. Patet haec ita fieri debere ex *necessitate* naturae (§. 24. 25. 27. 28.); *quaecunque* denique sit proportio inter diametros venae et arteriae pulmonalis, et aortae; vt vel inde infirmitas suppositionum *Meryanarum* (Histoire de l' Acad. des Sc. 1699.) luculenter appareat.

§. 30. Portio sanguinis e corde proiecta, et intra aortam se recipiens tantum occupat *spatii*, quantum ratione *voluminis* requirit (§. 17.). Sit autem *e. gr.* aorta pollices tres alta, antequam vllus ex illa ramus exeat; et portio vna vice proiecta occupet spatium cylindri arteriosi ad altitudinem vnius pollicis: haec portio a succedentibus duabus promota, intra tres cordis pulsationes perueniet ad terminum illum, vbi prima aortae diuisio incipit. Si pulsatio quarta nouam portionem proiiciet: haec prima duas nanciscitur vias, quo se recipiat, aut enim in *maximo* aortae canali progreditur; aut in ramum *lateralem* dilabitur; aut *vtrinque* distribuitur.

§. 31. Quia sanguis ab arteriae lateribus vndiquaque comprimitur, et vicissim versus omnes plagas nititur (§. 6.9.), atque illuc omnium maxime accedit, quorsum fortissime premitur, aut vbi minimam experitur resistentiam: igitur ad hanc canalis diuisionem *indifferenter* se habet, et nihil est, quod ipsius cursum huc illucue determinet, nisi *minor resistentia* motui suo progressiuo opposita. Resistentia autem ibi est minor, vbi arteria magis euacuata maiorem *extensionem concedit* et vbi *transitus* sanguinis per arteriae extrema est *facilior*. Pro *faciliori* autem *transitus* haberi potest, si minori temporis spatio per aperti ora emissaria aut plura numero plus massae sanguineae eliminatur.

§. 32. Sit iam ramus hic primus (§. 30.) *altero tanto minor*, quam truncus ipse. Si quidem *transfusio* per emissaria ad vnum omnia, ex vtraque parte, *aequali celeritate* peragaretur; si et *numerus* extremitatum minimanimarum in ramo, *altero tanto minor* esset, ac in trunço; si *iisdem* gauderent *aperturis*: non dubium est, quin *tertia pars* portionis sanguineae in ramum delaberetur, binae autem reliquae tertiae partes in trunco progrederentur. Cum vero hae nostrae suppositiones inter se sint in ratione *infinities variabili*: igitur *diuisio* portionis sanguineae similiter *variari* infinities potest, ita, vt, si speciminis caussa casum allegare *simplicissimum*, et extremitates rami ad vnum omnes *obturatas* fingere liceret, omnis res aeque considerari posset, ac si *nullus* plane *ramus* adesset; totaque sanguinis portio tunc relicto diuisionis confinio in *solo* trunco se contentura, ac portioni nouae a tergo insequenti locum concessura esset.

§. 33. Patet igitur denuo (§. 31. 32.), ex *quantitate et capacitate ramorum*, et illorum ad truncos *relatione*, ita nude considerata nihil concludi posse, sed *distributionem* sanguinis ab illius ipsius *quantitate* ac *celeritate*, qua arteriarum extremitates egreditur, dependere. Quamuis igitur, vt exemplum supra (§. 25.) allegatum retineamus, arteriae intercostalis ramulus minor sit, quam renalis: fieri tamen potest, vt portionis sanguineae e corde proiectae pars multo maior intra illum recipiatur, quam intra renalem. *Similiter* res se habere potest inter arterias renales et reliquum aortae truncum.

§. 34. Portio sanguinea primam ramificationem (§. 30.) transgressa in aortae trunco pergit, donec peruentum sit ad diuisionem *nouam*. Tum vero ea omnia, *eadem ratione et ordine* se habent, quae de confiniis rami mi primi (§. 31. 32. 33.) diximus. Similia accidunt in diuisionibus reliquis, donec in diuisione *vltima tota* illa *portio* sit exhausta.

§. 35. Sed iam alia suboritur quaestio, quae paululum enucleanda nobis videtur, antequam sanguinis promotionem vlterius prosequamur: nimirum (§. 18.), *an transfusio* illius *extra arteriarum carceres fiat eodem momento*, *quo fit proiectio* eius *ex corde*, seu *in systole*? *siue an id fiat in diastole*? siue *tempore vtroque*? Haec enim *tria* bene inter se distinguenda sunt ac determinanda, si ab erroribus cautos nos praestare velimus. Quod sanguis *tempore systoles*, impetu a vi cordis concepto in venas transeat, de eo quidem tamquam de re sanctissime certa ne dubitare quidem ausi sunt Autores; quia vero ob diminutam illius celeritatem non totam portionem vna vice a corde proiectam transire posse arbitrarentur: etiam diastoles tempus addiderunt, atque ad instaurandam velocitatem arteriarum actionem in subsidium vocarunt. Quo iure id factum sit, fortassis non incongruum erit, paucis examinare. Primo autem ne hoc quidem tamquam verum admitti potest, quod, si sanguis eadem celeritate, qua arteriam ingreditur, per totam viam progrederetur, transfusio cum systole necessario coincidat; nisi vasa vbique plena et rigida esse prius dixeris. Sint enim arteriae *rigidae et plenae*: tunc fluidum in illis contentum considerari posset, vt vnum continuum impetui non cedens nisi in sui extremitate patula: dum ergo sanguis nouus veterem in principio aortae percuteret; vltimae huius liquoris particulae in extremis arteriarum ramusculis motu communimunicato transirent in alia loca. Nam in hoc casu supposito omnia se habent, vti in siphone. Sipho enim est vas arteriosum rigidum et plenum, liquor contentus est sanguis, vis emboli mouens est vis cordis: et quemadmodum in momento trusionis emboli liquor ex siphone prosilit; ita similiter in momento actionis cordis sanguis extra vasa viam sibi quaesiturus esset.

§. 36. Verum enim vero, cum, *quae fingimus* (§. 35.) *non existant*, etiam ex hac parte parum proficiemus. Absit autem, vt ex *negata vasorum rigidate*, et, si vel maxime concederemus, (quod tamen hactenus ignoramus) celeritatem sanguinis in vasculo extremo quouis separatim considerato non eandem esse, quae erat in arteriae principio, absit inquam, vt exinde concludere vellemus, systoles tempore *non omnem* portionem (§. 24.) in venas *transfundi*. Oportet sane, vt quantitatem illius celeritatis sciamus, absque cuius mensura ratiocinium nostrum fluctuat. Posito enim celeritatis decremento, aut illa omnis euanescet, aut aliqua saltem restabit. *Si* quidem *velocitas nulla* foret, tum et effectus virium cordis esset nulla, et massa foret respectiue infinita, verbo: *nullus* plane *motus* quatenus a potentia cordis dependeret, sequeretur, sed in systole cordis sanguis in extremitatibus perfecte *quietus* subsisteret; in hoc igitur casu tempus transfusionis a systoles cordis tempore differret. Sed restet adhnc aliqua velocitas: fac illam *tantillam* esse: vnde nouimus angustiam viae, vtpote celeritatis remotam, per multitudinem extremitatum non compensari? Quamuis enim vascula sint osculis praedita minimis, vt vix vnicus sanguinis globulus minimus pertingat: sunt illa tamen infinita numero, vt, quae portio sanguinis non nisi longo temporis interuallo per vnicum ostium prorumpere poterat, nunc in infinitas diuisa portiunculas breuiori tempore per portas plurimas egredi possit, quam facillime; et totalis transfusio systoles tempore adhuc absoluatur. Tametsi vero partitis temporibus illam fieri cum Physiologis statuere velimus: omnium minime tamen motum sanguinis aequabilem (non qualem nos supra (§. 24.) definiuimus sed ex mente *Guilielmini*, *Bellini* etc., quasi in quacunque vasorum parte sanguis vbique eadem celeritate feratur,) exinde deducere licebit. Talis enim, vt demonstretur, oportebit, vt, non vage sed, determinate ostendatur, eam praecise proportionem inter massam fluidi, illius velocitatem, vasorumque capacitatem variabilem in corpore constanter conseruari, quae ad motus aequabilitatem necessario requiritur: haec autem definiri non potest, nisi mensura virium cordis et arteriarum horumque vasorum capacitas respectiua exactissime sit cognita. Tantum vero abest, vt motus sanguinis in sectione venae de aequabilitate sua intra vasa testetur, vt potius eadem methodo illius inaequabilitatem possimus demonstrare: dum enim arteria incisa fluidum suum per saltus profundit, satis apparet, motum sanguinis, si quidem in venis, at *certe non in arteriis*, (quod tamen Autores dicunt,) et hinc non in vasis omnibus vniformem existere.

§. 37. Intelligimus, rebus omnibus ita pensitatis, nos ignoratione pristina (§. 35. 36.) laborare: quam vt excu-

excutiamus, viam a priori diuersam ingrediamur. Non enim ex eo, quasi vis cordis mouendae toti massae sanguineae non sufficeret, aut, quod resistentiae ex attritu illius ad vasorum latera ortae velocitatem, qua moueri debebat, ad nihilum redigerent, vel saltim minuerent, sed ex rationibus et caussis longe aliis hoc negotium deriuandum videtur. Ostendimus, vbi primum cor portionem sanguinis expressit, illam valuulas ad aorta latera (§. 16. 17.) applicare; ac locum intra illius cancellos quaerere, massamque antecedentem ad certam quandam distantiam vlterius (§. 30.) pergere. Haec autem omnia accidunt tempore systoles. Sanguinis igitur, si non tota massa, portio tamen aliqua systoles tempore in arteriis mouetur. Porro experientia docet, omnia fluida constanter quaqua versum premere. Non dubium est igitur, quin (§. 6.) similia sanguini accidant, qui versus duo potissimum diuersa loca suam pressionem exercet, dum cor egreditur; versus aortae latera, et versus portionem sanguinis antecedentem, quae pari modo sub iisdem conditionibus progreditur. At vero vasa extensilia adeo prope sanguini accumbunt, vt illius impetum tamquam in instanti experiantur; *e contrario* extremitates arteriarum multo longius distant, quam vt fluidum in illis haerens, eodem momento ex actione cordis motum imprimi sibi patiatur. Citius igitur arteriae dilatantur, quam particulae in vasis capillaribus extimae ad motum sollicitantur. Arteria autem dilatata maiorem capacitatem nanciscitur, et proiectae portioni spatium concedit, quo se proripiat (§. 17. 18.): Vbi primum vero sanguis locum nactus fuerit, tum ratio

ratio cessat, quare et simul extra arterias effunditur. Tempore igitur systoles cordis nihil sanguinis ex arteriarum extremitatibus in alterius generis alueos (§. 26.) deponitur: sed intra ampliatas arterias tamdiu delitescit, donec hae ipsae elatere suo (§. 21. 23.) se restituunt, ac diminuta capacitate, quod superfluum est, exturbant. Quapropter *differt tempus transfusionis a tempore systoles*: Quies autem *cordis* seu *diastole*, *et arteriarum contractio*, *et sanguinis* extra illas *transfusio eodem temporis momento accidunt*.

§. 38. Apparet ex dictis (§. 37.) tam veritas, quam ratio phaenomeni experientiâ *Harueianâ* (§. 18.) deprehensi. In qua quidem adstruenda nonnisi principium plenitudinis atque elasticitatis vasorum, et naturam fluidorum (§. 6. 9. 10.) in subsidium vocauimus; neque insufficientiam virium cordis ad mouendam totam sanguinis massam et superandas resistentias incusauimus, sed insufficientiam temporis, quo systole peragitur, ad producendum motum in capillaribus, cuius quidem generatio in omni corpore successiua est, minime omnium vero in fluidis, quae alueorum lateribus extensilibus et cedentibus coercentur, simultaneus esse potest: adde, quod posita dilatatione arteriarum, necessario illarum euacuatio, tamquam superflua res tollatur. Non enim, quia sanguis ob amissam primam velocitatem tempore systoles arteriis excedere non potest, illae dilatantur et pulsant; sed, quia arteriae dilatantur, sanguis in illorum extremitatibus tantisper quiescit.

§. 39. Cor agit et quiescit per vicissitudines: tempore autem quietis arteriae nihil sanguinis reci-

recipiunt, sed in venas transfundunt (§. 24.): similiter, tempore actionis extremitates arteriarum quiescunt, et nihil (§. 38.) per illas in venas transfunditur. Quemadmodum igitur arteriae per vices replentur, et deplentur, ita et venae per vices sanguinem recipiunt: sed tamen diuersimode. Sanguis in arterias proiicitur vi cordis; in venas autem transfunditur vi arteriarum contractilium. Tota portio vna cordis actione proiecta, in vnum canalem arteriosum transit; aequalis autem massa transfunditur in venas canaliculis partitis, quibus necessario sanguinis massa in portiunculas minimas diuiditur. Actio cordis impetuosa est; transfusio autem lente, blande ac minutatim procedit.

§. 40. Dum sanguis in venis contentus per accedentes nouos humores augetur, eadem accidunt, quae de arteriis (§. 23. 24.) diximus. Idem igitur valet ratiocinium in casu simili. Aut enim, quia venae plenae sunt, auctus humor extra venas locum sibi quaerit, aut venae debent dilatari, vt maior illarum capacitas oriatur, facta quauis transfusione noua. In arteriis vtraque methodus (§. 17.) locum habuit; quaenam autem quando et quomodo in venis accidant? ea vero iam videbimus.

§. 41. Primo quidem, me non monente, patet, non de eo quaeri, an venae etiam sint dilatabiles? id enim materiae illarum necessario (§. 9.) conuenit; neque, an venae dilatentur nonnumquam? siquidem experientia satis docemur, venas alio tempore magis, alio minus turgidas apparere: cuius rei caussa est, si vel tota humorum massa augetur, ac propterea maius spatium requirit; vel si accedente calore illa ita dilatatur, vt in volumen maius se diffundat: sed id quidem nos scire oportere: *an venae facta quauis transfusione noua, dilatentur*, mornlis interiectis a systole cordis determinatis? Hoc vero fieri in statu naturali negauerim. Si enim venae dilatarentur reciproce, tumore aut pulsu id patesceret reciproco. At vero nullus sentitur tumor aut pulsus reciprocus. Dixeris fortasse: sanguinem non cum impetu tanto (§. 39.) in venas irruere, quanto in arterias proiicitur; non igitur adesse debere pulsum: porro, portiones a ramulis capillaribus minimas recipi; inde nec tumorem oriri posse. At vero, cum repletio venarum, etsi lente et minutatim, per vices tamen, procedat, et sanguis ex innumeris ramulis in maiores ramos sed pauciores congeratur: oporteret certe, vt vel aliqualis tumefactio reciproca sentiretur: at, tam pulsus, quam tumoris vestigia plane nulla: ergo etiam nulla dilatatio reciproca; ergo nulla reciproce ampliata venarum capacitas; nullum humori nouo intra venas diuerticulum. Oportet igitur, vt, *quo momento venae replentur per vnum extremum, eodem momento illae deplentur per alterum extremum, siue, vt transfusio sanguinis in venarum alueos momento coincidat cum effluxu illius nouo in cordis ventriculos*; et quantitas sanguinis in venis semper eadem maneat.

§. 42. Quo igitur tempore cor sinistrum quiescit, sanguis vi arteriarum in cauam, (§. 37.) et eodem

mo-

momento (§. 41.) in ventriculum dexterum detruditur: similiter, quo tempore cor dexterum quiescit, sanguis ex arteria pulmonali in venam cognominem (§. 37. 27.) et eodem momento (§. 41.) in ventriculum sinistrum deponitur. Quo autem tempore ventriculi quiescunt, sanguinem recipere et in diastole esse (§. 7.) dicuntur: Ergo *diastole vtriusque ventriculi fit eodem momento.* Ita apparet huius sequelae necessitas per ratiocinium; veritas autem facti cum experientia conspirante probatur. Didicimus enim cum *Harueo*: vtrumque ventriculum cordis proiicere sanguinem in arterias eodem temporis momento; quiescere eosdem et sanguinem nouum accipere itidem simul. Cum igitur diastole cordis et venarum repletio (§. praec. et 41.) coincidant, non mirum est, venas non pulsare (§. 41.), quia eodem momento, quo sanguinem recipiunt, eodem etiam in ventriculos cordis deponunt. Non igitur necesse erat, venarum alueos fieri capaciores dilatatione; cum quantitas sanguinis in illis non augeatur et diminuatur reciproce, sed fingi possit, quasi portio quaedam cruoris ex arteriarum extremitatibus congesta momento vno in ventriculos transsiliisset, reliqua massa sanguinis intra venas manente eadem et immota.

§. 43. Non dubito, fore quosdam, qui me erroris cuiusdam arguent, cum dicent, me precario assumere, quod sanguis ex venis immediate in ventriculos cordis illabatur; esse enim auriculas ita dictas, per quas sanguis prius transfluere debeat, siue: depletionem venarum fieri in auriculas, non autem in ventriculos,

 systo-

AORTAE ET SPINAE DORSALIS MIRA CORRVPTIO:

praemittuntur

Animaduerſiones generales ſuper Spinae dorſalis ſtructuram;

AVTORE

I. G. D.

§. 1.

Tabula XV. QVatuor vitae inſeparabilia Flumina, Chyli, Lymphae, Sanguinis et Succi neruei, et quod hinc conſequitur, varia eo pertinentia organa, in vnam ſpinam dorſalem ſunt coniecta, vt Anatome vel primi oculi inſpectione docet. Numquid itaque e ſola huiusmodi fabricae contemplatione, Summi Conditoris ſapientiam prouidentiamque intelligere ac praedicare procliue eſt? Id profecto in dubium vocare, aut velle quemuis locum et quamuis poſitionem quibuslibet partibus fore accommodatam, ac ſine conſilio, ſine peritia, et ſine intelligentia, earumdem ſedes efformatas eſſe, ſumma inſania eſt, ſiquidem euidens eſt, quod mors vel vita, eiusdemque felicitas vel infelicitas, e certa ſitus determinatione ortum trahere poſſit. Si in quodam homine, Medulla ſpinalis quauis alia regione Thoracis et Abdominis, et quauis diſtantia, extra thecam oſſeam, inter praefatarum cauitatum viſcera, collocata, ſicque variis percuſſionibus, diſtorſionibus aliisque iniuriis fuiſſet obno-

obnoxia; censeo haud periculosiorem statum et conditionem concipi posse, hinc absque alia caussa, talis hominis perniciem ineuitabilem esse. Si porro quemuis alium situm Ductus Chyliferi commiscitur, non sub vasis intercostalibus, sed sub postica facie Aortae, aut extra pleuram, ad Tracheae aut Oesophagi confinia, vt vel potus vel aeris gelidi impressionibus, vel vomitus vel tussis exagitationibus sit expositus, numquid talis hominis vitam aut nutritionem maximo in periculo versari, existimandum est, vt consideranti patet.

§. 2. Hic autem in transitu, animaduersione dignum est, quod ab incunte *Aselliani* et *Pecquetiani* temporibus ad huncusque diem, in morborum et cadauerum tanta varietate et frequentia, de viarum chyliferarum conditione seu statu praeternaturali, nihil adhuc sit annotatum, quas vias tamen, vt sunt corruptioni propensae, ac vt est hodie vitae hominum maxima deprauatio, citius quam alias integritatem esse amissuras, rationi haud est inconsonum: proptereaque tanto magis ea de re summa cum diligentia inquirendi caussa est, quanto veri est similius, earumdem viarum laesam aut deprauatam fabricam, funestorum effectuum caussam saepius existere; et quanto turpius est, opinionibus et adminiculis temere excogitatis decipi, vt vel solo exemplo Aortae, quae interdum contra Medici opinionem, sub varia forma, grauissimorum affectuum caussa est effectrix, satis superque intelligitur.

Caeterum, istiusmodi praegrandis et tanta vi pulsantis vasis, talem non vero aliam sedem, Naturam esse

esse molitam, efficiendo videlicet, vt vacillationis et fluctuationis expers, hinc osseo fundamento postico stipatum, antica vero facie, a supertensa tela duriore ad spinae contactum propius compulsum, denique a viscerum consortio sit seclusum, id profecto inter fabricae humanae perfectiones et praerogatiuas haud postrema, hinc ad seruandum motum directum, et circuitum sanguinis, aequabilem, a figura, diametro, elasticitate, et rectitudine constante Aortae pendentem, est perquam necessaria.

§. 3. Quia autem, verae fabricae spinae dorsalis memoria apud me fere obsoleta erat, quanam ratione per hosce dies eam sum consecutus, ac porro quid in eodem subiecto adhuc animaduersione dignum rarumque sit obseruatum, duce Anatome hic exponam. Ossa itaque spinae dorsalis, contra aliorum ossium communem indolem, crusta exteriore, quae in aliis ossibus vitro similis, incredibilis firmitatis soliditatisque caussa est, haud naturaliter obducta visa sunt: Eorum solummodo pars postica dorsum vocata, super quam processus eleuantur, tam extus quam intus istiusmodi crusta, sed tenui est instructa: Ex aduerso, parte anteriore quae processuum ac istiusmodi crustae expers est, color apparet atrorubicundus, eiusdemque coloris succus exsudat, quo deterso ipsarum cellularum foramina magno numero iam in oculos cadunt, vt in vertebrarum corpore aeque ac extremis processuum, perspicere procliue est.

§. 4. Porro, incredibilis copia minimorum vasculorum rubentium, super praefatam rubicundam superficiem luxuriantium profundasque radices intra cellulas agentium

hic

hic eſt poſita, vnde forte ſupra memoratus color ortum trahit: Quem contextum, vt ſenſibus apparet, membranae circumoſſalis vſum praeſtare veriſimile eſt. 2. Congeries aeque ampla ſequitur exilium et complanatorum ligamentorum, colore ad ſericum album accedentium, a quibus cum vaſa tum os ipſum comprimi vel ex eo eſt manifeſtum, quod ab vna ora vertebrae vsque ad alteram incedendo, et ſeſe inuicem interſecando variasque decuſſes efficiendo, eo gradu oſſi ſunt connata et tenſa, vt mucro ſcalpelli citius frangatur quam eorum cum oſſe nexus ſoluatur, cuius facta acie cultri inciſione, cauſſam protinus cognoui, videlicet quod praefatorum ligamentorum nonnullae productiones, ipſos receſſus oſſis ſubeant, ac naturam oſſeam aſſumant. 3. Antequam ſuper ſpinae oſſa, Pleura cum pauco adipe eam comitante ſit extenſa, aliud proprium integumentum obſeruaui, videlicet pellem craſſiſſimam, elaſticam, firmo nexu iis agglutinatam, cuius craſſities in medio ſesqui lineam facile aequat, ad latera vero ſpinae parum eſt imminuta. Caeterum, vt ligamenti, ſic pariter eius ſubſtantia eſt tenax, elaſtica, hinc mirifice accommodata, partim ad ſpinae compagem continendam et firmandam, partim ad fulcienda corpora quae ſpinae dorſali ſunt impoſita et alligata, vt ſunt ſpinalis medulla, aorta etc.

§ 5. Omiſſa hic deſcriptione illius vinculi cartilaginei, quod mucoſum, amplum, interiectum ſpinae ſingulis iuncturis, ac vt obſeruaui, ita eſt compreſſum, vt in ambitu parum extrorſum protuberet, de quo vid. *Cel. Morgagni* Aduerſ. 3. p. 104. Vndecim ſunt diſtincta ligamenta, in praefato subiecto, ad spinae ossium particularem connexionem: Nempe, sub pelle §. 4. descripta, ad vertebrae anticam lateralem inferioremque faciem, vtrinque ligamentum enascitur, a quo in proximae vertebrae marginem obliquo incessu terminatur, hinc per praefatum geminum ligamentum corpora vertebrarum inter sese firmo nexu sunt connexa.

Disiunctis a se inuicem praefatis corporibus vertebrarum, et oculis in basin inferiorem acuti processus conuersis, duo iterum ligamenta patent, quae in eo a caeteris ligamentis differre visa sunt, quod non solum colore luteo infecta, verum etiam maiore soliditate praedita, hinc minus elastica sensibus appareant; Praeterea eorum extrema duritie ossium erant aemula: Inde breui eoque obliquo incessu, ad radicem et basin superiorem acuti processus insequentis, altero extremo sunt alligata: Quum tametsi validissimam coniunctionem processuum acutorum, duo alia ligamenta minus crassa, sed magis elastica perficiunt, quae ratione situs *transuersalia* merito appellari possunt: Extremo enim altero in latus processus acuti vtrinque implantata, altero transuersim insequentis vertebrae dorso sunt connexa: Quare eum in finem ea hic esse posita, ne processuum acutorum articulatio, facile luxationi esset obnoxia, haud immerito suspicor. De qua profecto processuum acutorum articulatione obseruare hic oportet, singulos processus parte sui superiore complanatos et conuexos, inferiore autem sinuatos esse, quo efficitur, vt pars gibba et sinuata eiusdem processus, sinui et gibbae

bae parti praecedentis et inſequentis proceſſus ſeſe mutuo accommodet, id quod Graecis γίγγλυμος vocatur. In praefata articulatione duo adhuc ſunt animaduertenda, 1. pinguis materia, quae ceteris iuncturis oſſium eſt communis. 2. Tendinum muſculorum dorſalium nexus cum proceſſibus acutis, quem haud extrorſum ſeu in gibba parte, verum introrſum a dextris et ſiniſtris fieri obſeruaui.

Porro ſequuntur, propria ligamenta proceſſuum obliquorum tam ſuperiorum quam inferiorum, quae e toto ambitu radicis proceſſuum enata, hinc ſuper totam iuncturam expanſa validam et elaſticam thecam ſuper eam efformant, ſub qua praefatorum oſſium actio ſine impedimento perficitur. Poſt euacuationem medullae ſpinalis, aliud ligamentum, ſolitarium, teres, et elaſticum, cuius diameter fere 2. lineas aequat, thecae oſſeae incluſum eique forma columnae firmo nexu eſt agglutinatum: Ibi parum protuberans, et ductu perpendiculari partem anteriorem thecae recta percurrens, non ſolum vertebrarum corpora compingendi, verum etiam, vt coniicio, ſpinalem medullam a compreſſione et alliſione oſſis vindicandi, vim et facultatem forte habet.

§. 6. Hic, antequam ad alia procedam, exigui Muſculi minus ſunt praetermittendi, quorum fortaſſis deſcriptio hactenus eſt omiſſa, vel ſuper quos, ſi *Transuerſalium interiorum* titulo innotuerunt, aliquid monere neceſſum eſt: Nempe, obliquo et inferiori proceſſui extrorſum, altero extremo ſunt alligati, alteroque poſt

 bre-

breuem et obliquum inceſſum, inſequentis vertebrae proceſſui transuerſo eiusque parti inferiori firmo nexu agglutinantur.

§. 7. Nunc, quod iam ſum expoſiturus, nempe de oſſium ſpinae, iisque ſuperincumbentis aortae mira corruptione, id contemplationis eiusdem ſubiecti alter fructus eſt: vnde ſupra memorata aſſertio de vitae inſeparabili coniunctione ſpinae et aortae, et de bonis aut malis effectibus e tali conditione vel integra vel deprauata, conſequentibus, ſatis intelligitur. Quam duplicem deprauationem in genere illuſtrare procliue eſt, per annoſae, multis nodis et excreſcentiis deformatae et tumefactae arboris truncum; ac pone iſtum, antiquum murum, variis locis perforatum, hinc trunci corticem per totidem radices intra praedictas rimas ſeu cauitates propagatum iisdemque concretum; Ea profecto ratione, a 3. dorſi vsque ad 6. eiusdem nominis vertebram incluſiue, aortae et ſpinae dorſalis imago oculis eſt oblata: Caeterum, ſupra et infra praefatum ſpatium, ſeu in aorta ſeu in ſpina, nullum vitium, nullaque deformitas ſenſibus apparuit. Initio, Aortae exteriorem habitum ſum contemplatus, in qua duo erant animaduerſione digna, videlicet 1. ſuperficiei fabrica, 2. eiusdem dilatatio. A iuſta ſeu naturali diametro, quae eſt 14. lin. eo exceſſu expanſionis erat tumefacta, vt eius ambitus aeque ac longitudo ſex pollices cum dimidio aequaret, vnde eius diameter fere triplo maior naturali erat, et quod hinc conſequitur, ſpatium quod nunc occupabat, illud quod naturaliter occupat, triplo exce-

excedebat: Ignoro autem, an alicubi in cauo thoracis, a praefata mole aortae, et hinc orta angustia et compressione, cuiuscunque vitii quaedam manifesta et sensibus conspicua indicia in visceribus apparuerint nec ne? de eo enim, quoniam me absente facta est inuestigatio, aliquid certi affirmare haud licet. Caeterum, sub istiusmodi habitu, figura aortae sic erat immutata, vt iam *magnae Auis ingluuiem* perfecte exprimeret. vid. Fig. I. in qua B Aneurisma, seu ingluuiem, A et C orificium superius vel partem arcus extremam, seu gulam, et inferius, seu oesophagum denotat.

§. 8. Quod iam alterum phaenomenum spectat, nempe exteriorem superficiem, quae haud minus quam figura mirifice erat deformata, animaduertere oportet haud solum aequalitatem et laeuitatem, verum quoque vel ipsam elasticitatem penitus abolitam fuisse: Tametsi enim manu compressa et distracta, haud minus pristinam violentam diametrum constanter seruabat, et paulo fortius comprimendo, haud minus quam in fractione corticis rigidi, crepitatio et fissio diuersis locis efficiebatur, vt infra videbimus. Porro, vt iam supra allata similitudine arboris nodosae est indicatum, vel vt lamina metallica profundius malleata, sed auersa parte haud complanata, in qua singula vestigia mallei eminent ac protuberant; sic quoque variae figurae et magnitudinis tuberibus, ac in horum interstitio impressionibus, et maculis vniuersa superficies erat exasperata: Quas propterea maculas coniicio tuberculorum incipientium esse rudimenta: nempe si vis contundens haud intermisisset, necesse fuisset, post certum temporis spatium istiusmodi tubercula seu parua Aneurismata excrescere. Eam ob caussam, rationi haud inconsonum est, cuncta hic exstantia tubercula, aeque vera esse Aneurismata, ac ingens eorumdemque Parens Aneurisma, cum quo communem originem habent: Vnde vel e sola foecunditatis consideratione, *Aneurisma monstrosum* merito appellatur. In aortae antica facie, de qua hic tantummodo sermo est, nonnulla amplissima erant vt ouum columbinum, alia vt eiusdem oui dimidium, alia vt pisum: Caetera autem, sub parte postica aortae sita, infra videbimus. Porro, eorumdem figura haemisphaericae respondebat, idque haud praetermittendum est, quod tactu iudice eo crassior et spissior substantia tuberculorum sit visa, quo extensio seu dilatatio maxima: ex aduerso, in minoribus tuberculis, vbi gradus dilatationis fuit minor, ibi maior attenuatio erat: His praeterea, haud vero illis compressis, crepitationem vel sonitum, vt in perfractione testae oui audire procliue erat. Postremo annotandum est, istiusmodi tubercula super truncum Aneurismatis sic disposita esse, vt in parte altiore seu eminentiore, vbi nempe maxima fuit dilatatio, ibi crassiora et maxima, in parte autem decliuiore minora et paruula tubercula sint posita.

§. 9. Hactenus, exteriore habitu aortae eiusdemque conditionibus vt antica facie ac in situ adhuc versante in conspectum veniunt, diligenter perlustratis, animus porro ferebat, faciem spinae auersam et contiguam, cultro alias facile separabilem, ante interioris fabricae contemplatioplationem aggredi, si id quidem aliae caussae minus vetent, vt protinus sum edoctus nempe, per istiusmodi concretionem, videlicet trunco eiusque cortice per profundas radices muro contiguo sic conglutinato, vt citra alterutrius lacerationem auelli, et eradicari nequeat, de quo in praeced. §. Idcirco, ob praefatam ineuitabilem dilacerationem id vsque ad finem differre, ac potius aortam secundum eius anticam faciem aperire, hinc primum interiorem fabricam perlustrare sum coactus.

Initio, cauum est oblatum ingens, et magnae Auis ingluuiei aequale, vt e supra memorata diametro iam satis est perspicuum. Caeterum, tam sanguine quam alia quacunque consimili materia erat vacuum. Hic profecto, in praefatae cauitatis perlustratione, mirifica phaenomena, hinc corruptionis haud vulgaris indicia, vel prima oculi inspectione occurrere fatendum est, suntque ea duplicis generis, alia eius structuram seu conformationem, alia texturam spectant. Hinc 1. animaduertendum est, quod tuberibus, maculis, et impressionibus in facie conuexa conspicuis, totidem fossae, sinus, et alueoli in facie concaua respondeant, quemadmodum in lamina malleata, pari eminentiarum numero in vno plano, par numerus fouearum in opposito plano respondet. Mirum autem dictu! istiusmodi fossae haud solummodo in aortae antica facie, vbi extensio est minus difficilis, erant excauatae, verum, quod fere est incredibile, in parte postica quoque, tametsi ad spinam, ceu ad murum, arcto nexu sit alligata, cuius phaenomeni caussam infra explicabo. Istiusmodi *parua aneurismata*, sub quadruplici differentia obseruare mihi

mihi viſus ſum. Nonnulla formae oblongae, cum vtroque margine conniuente ad profunditatem 2 lin. excauata: Alia figurae circularis, et variae profunditatis, quorum non nulla digiti extremum facile admittere videbantur: Alia obliquo, ſinuoſo, et anguſto orificio, quod ſubito in amplam foſſam rotundam, ouo columbino haud multo minorem erat expanſum, cuiusmodi vna inſignis ad ſuperiorem lateralem et ſiniſtram partem aortae erat poſita: Poſtremo intermixtae erant plurimae impreſſiones fere planae, variae figurae, a re comprimente vel contundente effictae, quas aeque ac exteriores, de quibus ſupra, nihil aliud eſſe coniicio, quam incipientium aneurismatum rudimenta. Caeterum, iſtiusmodi foſſae, ſinus et alueoli, vt cauum principale, ſanguinis aut cuiusuis conſimilis materiae erant expertes. 2. Ad texturae laeſiones hic obſeruatas, iam referri debet incredibilis diſtractio ſeu diſtentio fibrarum, hinc per attenuationem ſubſtantiae, iisdem aeque ac minimis vaſculis conflatae, pelluciditas et quod conſequitur ingens ad rupturam propenſio. 3. In diuerſis locis ſubſtantiae incraſſatio monticulos efficiens, quorum alii anguſtiores et figurae oblongae, alii digiti latitudinem aequantes, membrana communi cauum inueſtiente obducti: qua detracta, fibrarum inuicem compactarum, et vi diſtendente forſan abruptarum hincque contractarum agmen eſſe perſpexi. 4. Profundiorum et magnarum foſſarum incraſſatio, minorum e contra attenuatio, pari ratione huc referendae: Quam incraſſationem, tametſi ſicca et fibroſa ſubſtantia vtrique ſit communis, potius e variis lamellis conflatam eſſe fatendum eſt, quarum aliae tenuiores, aliae craſſiores, coloris flauo albicanbicantis, praeter vnam in medio positam quae atrorubicundo colore erat infecta, quibus postremo communi membrana obductis, istiusmodi lamellas haud aeque a lympha aut sanguine corrupto, quam potius ab incrassatione et exfoliatione propriae substantiae aortae, ortum manifesto trahere vel e solo oculorum iudicio perspicuum est. 4. Sub eadem membrana communi, materia tophacea, eiusdemque in varias species ac in omnes plagas trunci aneurismatici distributio: Hinc, sub calculorum forma, supra memoratae membranae superficiei internae adhaerescens, eandemque distendens, durissima tubercula variae magnitudinis et figurae, eorumque incredibilem copiam, et quod consequitur, cauitatis summam exasperationem efficiebat, e quibus nonnulla lineam et vltra, alia minus prominebant: Caeterum, figura regulari haud donata, et a lenticulae, vsque ad vnguis minoris amplitudinem, fere aucta: Istiusmodi autem materia, tametsi tactu iudice, calculo sit similis, haud tamen aeque friabilis, sed flexilior, et quibusdam in locis fibrosa: porro in aquam coniecta subito descendit, ac igni imposita odorem ossibus proprium exhalat, hinc, vt intelligere procliue est, substantiae osseae est propensior. Iuxta praefata tubercula, materia tophacea iam latius sese diffundens, et planam figuram assumens, laminam durissimam simplicem efficit, quae tamen haud continua, sed in areas variae magnitudinis, per interiecta spatia membranea, a se inuicem erat disiuncta: vnde, vel istiusmodi particularum inter sese allisione, vel earumdem perfractione, crepitationem seu sonitum, vt a testa oui confracta, per manus compressionem, auditu percipere procliue erat: de qua

 tamen

tamen re, videlicet rimarum et fissurarum caussa, num ante manus compressionem, et ante aortae aperturam, hinc in viuo homine, iam sint excitatae nec ne? id profecto definire minus procliue est.

Porro, conditionum praefatae laminae in istiusmodi areis, varias differentias perspiciebam, videlicet, a centro laminae, cuius dupla erat crassities et soliditas, versus circumferentiam attenuatam et pellucidam: in quibusdam areis planam et laeuem: in allis granulis ac tuberculis flavescentibus obsitam esse: Quibus addenda est tandem postrema, haudque inutilis forsan animaduersio, nempe, istiusmodi laminae quantitatem seu augmentum, maius esse visum posterius, in facie spinae contigua, quam in reliquo tractu aneurismatis, cuius phaenomeni caussam in sequentibus explicare conabor.

§. 10. Cur praefatam faciem posticam aneurismatis vsque ad finem differre sim coactus, caussam initio 9. paragr. indicaui, quam nunc propterea fusius sum expositurus, antequam priorem partem dissertationis, quae de aortae corruptione agitur, concludam. Nempe vt supra annotaui, et exemplo illustraui, tametsi in aliis subiectis sit res omnis difficultatis expers, aortam e sede sua deturbare, aut loco mouere, aut si vis, penitus auferre, plane hic erat impossibile: Hinc necessario erat amplectenda altera via, seu interior et concaua facies eiusdem posticae partis: vnde exterioris, ac spinae contiguae faciei conditionem, et quod consequitur, eiusdem cum spina adhaerentiae caussam, vtcunque assequi posse iudicabam: Vbi sane praeconcepta animi opinione, illam nempe faciem

ciem iniuriis minus expofitam fuiſſe, eiusque concretionem a ſimplici et communi cauſſa, vt eſt inflammatio, aliquando ortum traxiſſe, ſum falſo ſuſpicatus. Primo itaque animaduertere oportet, in toto tractu aneuriſmatis tantam crepitationem, manus compreſſione, haud ſuſcitatam eſſe, et quod conſequitur, iſtiusmodi materiam haud aeque abundaſſe, quam in poſtica, et ſpinae attigua facie ſubque eiusdem communi membrana, quae propterea loricae haud multum abſimilis erat: ex quo, aeque ac e ſubiectae ſubſtantiae aortae ſumma attenuatione, eiusdem elaſticitatem fuiſſe abolitam intelligitur. 2. Huicce conditioni, ſequens erat coniuncta, eaque, ſi ad aortae et ſpinae conditiones, vt in homine adulto, hinc ad huius ſoliditatem et reſiſtentiam, animum attendere velis, dictu mira, videlicet, trium inſignium foſſarum excauatio, et earumdem in ſpinae ſubſtantiam incuneatio vel inclauatio, ſeu a 3 vsque ad 6. dorſi vertebram profunda implantatio, et cum iisdem vertebris ferruminatio: Caeterum, orificii figura circulari, aeque ac diametro pollicem aequante, tres praememoratae foſſae inter ſeſe reſpondentes, vacuae tamen, oculis apparebant. Poſthaec iam, de integritate, hinc dilaceratione aortae minus ſollicitus, tandem trunci aortae eradicationem ſeu auulſionem, conatu tamen et labore maximo, ſum aggreſſus: Quare per iſtiusmodi violentiam, tota poſtica facies tresque foſſae vertebris inclauatae a reliquo corpore aortae ſunt ſeparatae et abruptae, vt Fig. 2. Num. 1. 2. 3. denotat; unde hiatus ingens ſeu foramen lacerum lit. F. fig. 1. originem trahit. Tabula XV. Fig. 2. Fig. 1.

§. 11. Quo autem ſenſu, vt ſingulare ac minus commune phaenomenum, iſtiusmodi aortae indauatio et ferruminatio hic ſit accipienda, nunc diſſertationis parte ſecunda, per ſpinae dorſalis contemplationem, explanare conabor. Ablata itaque aorta, tria iſtiusmodi poſtica aneuriſmata 1. 2. 3. a corpore ſeu trunco diuiſa, haud minus quam radices dentium, maxillarum alueolis infixae, nonnullis vertebris ſpinae tenaciſſime erant impacta, hinc immobilia, et cuicunque niſui reſiſtentia. vid. Fig. 2. Num. 1. 2. 3. Vel enim prima oculorum inſpectione, ea baſi vertebrarum haud parallela ſolummodo, iisdemque ſimpliciter agglutinata eſſe, verum in oſſium propriam ſubſtantiam deſcendere, et ſinus ſeu foſſas ibidem excauatas occupare, protinus perſpiciebam. Porro, ſpatio a 3 vsque ad 6 vertebram dorſi incluſa, ſic erant poſita, vt primum ſeu ſuperius, et tertium ſeu inferius, baſin ſeu medium ſpinae; ſecundum vero, ſiniſtrorſum decliuem et lateralem partem vertebrarum occupet, unde figura trianguli efficitur: Vbi illud praeterea obſeruare mihi viſus ſum, quod prioris ſeu ſuperioris orificium et cauitas, diſpoſitionem duobus ſequentibus, hinc trunco canalis et ſanguinis motui contrariam obtinens, haud directione horizontali vt duo ſequentia, neque deorſum, verum verſus ſuperiora progrediatur. Poſt eorumdem iam, cultri apice factam effoſſionem et abraſionem, qua integra et nuda conſtitutio, et conditiones vertebrarum oculis paterent, tres protinus excauationes ſeu foueae per amplae erant conſpicuae, haud aliter ac ſi per terebram eſſent efformatae: inter quas tamen, mediam quae videlicet in vertebrae

Fig. 2.

tebrae laterali et finistra parte est posita, duabus aliis contractiorem, ac propterea sacculo aneurismatico minus proportionatam esse fatendum est; aliarum autem, quae in medio vertebrae sunt positae, vbi osseae substantiae portiones insigniores sunt ademptae, cauitas 5 lineas, eiusdemque diameter pollicem aequare visa est: vnde sacculorum incuneatio hic totalis, in altera partialis erat. Porro animaduertendum est, istiusmodi fossas, haud vnius vertebrae erosionis seu perforationis, verum duarum vertebrarum excauatarum effectum esse: Nam super commissuram in vtriusque vertebrae limbo, excisio seu excauatio semilunaris erat conspicua: Hanc ob rem, prior seu suprema fossa., in 3 et 4. media in 4 et 5. vltima seu infima in 5 et 6. vertebra, sedem obtinebat: Vnde istiusmodi tres fossae communes efformabantur, siquidem, quod animaduersione valde dignum est, crassum cartilagineumque ligamentum, quod vertebrarum corporibus est interiectum, (vid. §. 5.) aeque ac substantia ossea erat consumptum, ac propterea inter memoratas vertebras, spatium vacuum transuersi pollicis intercedebat: Quam consumptionem, eousque iam processisse conspexi, vt vix amplius, vnius vel duarum linearum latitudine, a medullae spinalis cauitate distaret. Caeterum, vel prima oculi inspectione, ac insequentibus diebus, istiusmodi fossas conspexi aridas et vacuas, hinc omnis humoris et odoris expertes, et quod consequitur, e sola ossea, porosa, et aspera substantia conflatas. Adde postremo, istiusmodi partes, quas super corpus vertebrarum extensas esse (§. 4.) dixi, videlicet telam vasculosam,

losam, telam ligamentosam, pellem elasticam, hic manifesto deficere.

§. 12. Nunc, super expositam historiam cum Aortae tum Spinae, ac imprimis vtrum Aneurisma, spinae excauationis, an haec istius sit caussa, vel vtrum potius a prima hominis formatione, vtrumque vitium simul sit productum? tametsi varia excogitauerim, hic tamen, quia nonnullae scitu necessariae conditiones deficiunt, definire vereor. Caeterum, communis sententia est, duce *Rhuyschio*, *Littrio*, et *Freindio*, ossium corruptionem, Aneurisma vt caussam consequi. Vid. *Rhuyschii Obs. Anat. Chirurg.* 37. *et* 38. *Acad. Sc. Paris. A.* 1707. *Freind. Histoire de la Medecine*: nempe, iuxta *Rhuyschii* sententiam, *sicuti sudores per cutis poros erumpentes in aliquibus adeo sunt acres, vt indusia, imo et subuculae putredinem breui ex iis concipiant; Ita etiam humores in Aneurismate stagnantes, et exinde acrimoniam contrahentes, simile quid praestare, paulatim transsudando et ossa lente corrodendo valent.* *Littrius* autem et *Freindius*, *pressionem super membranam periostii a tumore aneurismatico factam*, simul in subsidium vocant. Interim, tametsi istiusmodi sententia Doctissimis Viris placeat, minus mihi vitio vertendum est, si sua sponte, a caussis os depascentibus, potius quam a contagio, aut pondere tumoris aneurismatici, istiusmodi cariem seu putrefactionem, vel corrosionem (Regionum Septentrionalium familiarem morbum, ob excessum frigoris, et spirituum ardentium abusum) ortum trahere existimauerim. Quomodo autem a sola carie ossis, arteria vtcunque sana et incorrupta, periculo

periculo dilatationis et corruptionis ſit expoſita: (haud enim id perpetuo conſequi oportet) dico, quod pleraque vaſa arterioſa corporis humani, ad eorumdem nempe rectitudinem, firmitatem, ac forte repercuſſionem efficiendam, fulcimento oſſeo, ſecundum naturam ſint inſtructa, quemadmodum aorta, carotides, vertebrales, ſubclauiae, mammariae, brachiales, iliacae, et plures aliae arteriae, quae oſſibus ſunt contiguae. Iam vero, ſi iſtiusmodi arteria, in confinio cuiusdam oſſis putrefacti ſit poſita, tum ad dilatationem ſeu circulum maiorem, eam propenſiorem eſſe veriſimile eſt, quia baſi ſeu fulcimento iam eſt deſtituta: Vnde principium aneurismatis: Denique, ſi malum eo vsque proceſſerit, vt ea contagio putridi oſſis ſit expoſita, non ſolum exterius agglutinationem, verum etiam intus loricationem, ſeu bractearum oſſearum in cauo aneuriſmatis generationem, ab exundante ſucco oſſeo fieri, nihil vetat.

§. 13. Caeterum, hic in ſubiecti noſtri contemplanatione, rem ſingularem (quae profecto arduum mihi problema eſt viſa) minus praetermittere oportet, quomodo nempe fieri poſſit, vt tales vere formidabiles exceſſus, et corporis plena, et ad ſenſum integerrima conditio ſimul appareant: Erat enim homo carnoſus, bene coloratus, et 30. annis maior Cuinam cauſſae, quaeſo, certiori et grauiori, tabidae aut hecticae extenuationis ſummum gradum libentius referrem? quam vitio principum machinarum corporis humani, vt eſt aorta. Mihi namque dupliciter aorta, nutritioni C. H. inſeruire viſa eſt, 1. actione manifeſta, qua irruentem maſſam ſanguineam cauo ſuo excipere, et a centro ſuo recedere coacta, niſu et reactione ſpontanea, ad priorem figuram ſibi naturalem redit, hinc contentum ſanguinem exprimit; ac per omnes partes C. H. motum localem ei conciliat. 2. actione ſpeciali minus manifeſta, forte vt cauſſa occaſionalis cuiusdam motus fermentatiui, in ſanguine praeexiſtentis, vel vt eiusdem motus cauſſa efficiens: vnde particularum ſanguinem conſtituentium eximiae, et ſanitati inſeparabiles dotes et affectiones originem trahunt. Principium autem ſeu agens, ſola eſt aortae fabrica et conformatio naturalis, nempe 1. villorum nerueo-tendinoſorum haud ſumma rigiditas aut inflexilitas, vel eorumdem haud ſumma mollities ſeu flexilitas, iuxta communem legem omnium corporum elaſticorum. 2. vaſculorum trunco aortae intertextorum ſumma foecunditas, quam, tametſi eorumdem minima ſtructura ſit adhuc incognita, ad praememoratam ſpecialem functionem aortae, maxime accommodatam eſſe veriſimile eſt: e quibus poſtremo conditiones reliquas aortae conſequi neceſſe eſt, vt ſunt, eius determinata figura, craſſities, laeuitas ſuperficiei, et poſtremo ſitus. Tantum itaque abeſt, vt aortae in ſubiecto noſtro conditiones, praefatis conditionibus ad nutritionem C. H. neceſſariis reſponderint, quin vt hiſtoria edocet, eas mirifice deprauatas, et quod conſequitur, ad nutritionem minus idoneas fuiſſe palam ſit: Eam ob cauſſam, haud plenitudo, ſed nutritionis ſummus defectus, hinc ingens extenuatio, et macies obſeruari debuiſſet.

Sed poſito, iſtiusmodi aortae conditionem haud tantam fuiſſe, vt nutritio neceſſario perturbari poſſit,

ſit, aliam hic, niſi fallor, contra nutritionem difficultatem perſpicere mihi viſus ſum, nempe ſuſpicor, in eodem ſubiecto, commeatum liberum chyli et lymphae, per canalem thoracicum interceptum, vel maxime difficilem fuiſſe. Nam, cognita canalis thoracici ſede, iuſta eſt coniectura, non ſolum ſub onere aneurismatis eum delituiſſe, verum praeſertim, a ſacculo ſiniſtrorſum in laterali et decliui parte ſpinae inclauato, ſimul abreptum, et in eiusdem foſſam praecipitatum fuiſſe. Hic certe haeret aequa. Num itaque, in ſubiecto noſtro duplex erat chyli et lymphae via. *Sunt profecto infiniti caſus*, vt I. T. Comment. coniiciebam, *in quibus duplici, tum receptaculo chyli, tum canali thoracico carere periculoſum videtur*. Quare, tametſi eius rei inueſtigatio ſit omiſſa, haud impoſſibile eſt, dextrorſum aeque ac ſiniſtrorſum, vel ſolummodo in dextro latere, canalem extitiſſe, vt bis ante 8. annos obſeruaui. *Vid. cit. T.* I. *Comment*. Poſtremo hic, *Riolani* et *Swaluii*, qui neceſſitatis tempore, in omnimoda venarum lactearum obſtructione, chylum per venas meſaraicas, vt in quibusdam animalibus, quae viis chyliferis propriis haud ſunt manifeſto inſtructa, deferri tradunt, coniectura forſan minus eſſet reiicienda. Sed de his ſatis.

CLASSIS TERTIA
CONTINENS
HISTORICA
ET
CRITICA.

DE
LITTERATVRA MANGIVRICA.
AVCTORE
T. S. B.

MAiores noſtri totam Septemtrionalem Aſiam et quidquid fere terrarum inter Volgam fluuium, Caſpium mare, Indiam, Sinas, denique Ruſſiam interiectum fuit, *magnam Tartariam* vocarunt, vt altera eſſet *minor*, in Cherrhoneſo Taurica. Nondum ſatis ab hoc errore cauent eruditi: eundem tamen aliquando dediſſent, cum intra hos paucos annos tantum de his regionibus et populis editum fuit, quantum antea multis ſeculis non fuit exploratum. Iam et Mangjuros rectius nouimus, quos olim Miſſionarii in Sinis *Tartaros Orientales* nuncupare ſolebant: et Mungalos, qui ab iisdem dicebantur *Tartari Occidentales*. Mangjuri a Mungalis ſermone vehementer discrepant: vultu cognationem ab ſtirpe vltima produnt. At *Dürben Oelöbt*, ſeu *Dürben Oeröbt*, qui vulgo a nobis Calmucci appellantur, non modo in vultu, verum etiam in lingua cum Mungalis conueniunt. Linguae ea fere eſt diuerſitas, quae ſermonis in ſuperiori inferiorique Ger- Tabula XVI.

 mania

mania. Sed ſcriptura omnibus his populis eadem eſt, tantummodo quod pro ratione linguae cuiusque, litterae nonnullae vel omiſſae vel adiectae ad numerum fuerunt, aut quod in litterarum ductibus ſuo quisque populus ingenio indulſit. Sic quaedam etiam diuerſitas reperitur inter litteras penicillo ſcriptas et typis excuſas. Illae enim liberioribus ductibus vagantur. Typorum vſum Sini videntur cum his populis communicaſſe: eodem enim modo totas in aſſeribus exſculpunt imprimuntque paginas. Nuper tamen Ioannes Renatus Holmienſis apud Contaiſcham principem populi *Songar* (quos Calmuccos Orientales vocare ſolemus (1)) typographiam more Europaeorum inſtruxit litteris ſtanneis, quae aptari poſſint in [illegible] lineas. Sed ipſa in Iapania harumce litterarum veſtigia ex ſpeciminibus Kaempherianis deprehendi. Mungali primi omnium has litteras a Syris vel Iacobitis vel Neſtorianis acceperant, quorum ad eam rem ope Gingiſcanus vſus fuit. Enimuero de his et diximus alibi, (2) et fortaſſi dicemus copioſius alio loco. Nunc enim conſtitui Mangjuricam litteraturam producere ſolam: qua cognita, parum difficultatis ſupereſt in Mungalicis litteris, nec ita multo maior in Calmuccicis. Cum eiusmodi diuerſitatem nondum ſentirem, crebro impegi. Alphabetum, quod primum in Germania edidi, ab amiciſſimo Caſpare Matthia Roddio, nunc Presbytero

Nar-

(1) Regionem illam vulgo vocant *Imperium Contaiſchae*, quod ſub Contaiſcha Principe maxime cognita fuit. Huic *Geldan-Sirin* ſucceſſit, vt iam nomen iſthuc amplius minime conueniat. (2) Videſis Epiſtolam in *der Hiſtorie der Gelehrſamkeit unſerer Zeiten* p. 385. et Actorum Lipſ. Supplem. Sect. I. T. IX. p. 20. et Acta ipſa ad A. 1731. p. 297.

Naruensi A. 1716. accepi, cui id Gabriel quidam Mungalus in Siberia vtcumque descripserat. Hoc mihi adiumento fuit, cum Elementa litteraturae Brahmanicae, Tangutanae et Mungalicae typis Sinicis edita explicanda sumpsi. (3) Nactus deinde sum tabulas geographicas excusas in Sinis, in quibus vrbes, flumina, montes, lacus, loca alia extra moenia imperii Sinici, numero fere ad quatuor millia, scripta erant litteris Mangjuricis et Mungalicis. Et quod me in primis hic iuuit, adiecta erat separatis in schedis interpretatio hominis Itali. Hic Italus legere ea ipse non potuit, quod ex illius aberrationibus haud difficulter sensi, sed lectorem adhibuit, cuius vocem, saepe non satis obseruatam, litteris Italicis retulit. Praeterea tantum illius interpretationis apographo sum vsus, in quo per quarundam litterarum Italicarum inter se conuenientiam, erratum etiam fuit saepius. Vtrumque incommodum tamen superaui. Primum enim, quoniam is Italus partem quoque Sinicorum characterum intra murum iisdem in mappis more suo descripserat: ita intellexi, quam earum litterarum, quas adhibuit, pronunciationem esse oporteret. Et cum in *Leao tum* nomina locorum paene omnia essent Sinica, litteris tamen Mangjuricis scripta, ex iis multo maxime fui confirmatus. Alterum incommodum diligenti obseruatione sustuli. Ita denique collato meo alphabeto Mungalico, tum Manuscripto quodam Koleseri de Keres-eer, viri ornatissimi, et tertio, quod Nicolaus Vuitsenius edidit, (4) incredibili labore nouum et perfectum omni-

(3) Vide hos Commentarios Tomo III. p. 389. et Tomo IV. p. 290.
(4) p. 121 in prima editione: nam in secunda hoc alphabetum omissum est.

omnibus numeris, vt tum quidem mihi persuadebam, condidi, sed Mungalicis Mangjuricisque inter se permistis. Nondum enim Petropoli erat quisquam vnus, qui istarum litterarum vel tenui cognitione esset imbutus, linguarum tamen gnari satis multi erant. Igitur ducem adsciui Joannem Franciscum Gerbillonium S. J. cuius grammaticam Mungalicam, tametsi sine et nomine auctoris et litteris Mungalicis, Melchisedecus Theuenotus in collectione itinerum rarissima euulgauit. Hic Gerbillonius cum Joachimo Buueto octo menses linguae Mungalicae operam dederat, cum *Kam Hi* Imperator eis, vt tanto magis proficerent, magistrum in aula dedit. Deinde eosdem iussit artes Europaeas eadem lingua sibi explicare. (5) Gerbillonium cum primis in honore habuit, eundemque et omnibus in venationibus secum duxit et A. 1688. legatis suis adiunxit, qui in Selinginsca vrbe de pace agerent cum Russis, quae pax anno post conuenit. Concinnauit idem quoque lexicon Mungalicum. (6) Post vbi ad Comitem Bruceum hoc meum alphabetum Moscuam misissem, is pro singulari liberalitate sua mecum communicauit alphabetum Mangjuricum in Sinis maiori forma impressum, adscripta pronunciatione Russicis litteris. Accepi eiusmodi aliud elegantissima manu Pequini scriptum et Russice explicatum. Denique nactus sum libellum omnium et vtilissimum et tutissimae fidei, quem *Kam Hi* Imperator Pequini curauit typis imprimendum, adiectis characteribus Sinicis, qui vtcunque sonum pronunciationis Mangjuricae

(5) Buuetus in Icone Regia p. 61. ed. Leibnitii. (6) Vide epistolam Gerbilonii in Leibnitii Nouissimis Sinicis editam p. 171. De itineribus eius multa in opere Duhaldiano reperies.

jûricae referrent, sunt enim ad eiusmodi aliquod institutum ineptissimi. Hic ego nobilem virum Mangjurum, nunc Christianum, adhibui, qui viua voce pronunciationem me doceret, quod ille, vt fieri eorum in scholis solet, canendo peregit.

Libellus hic more Sinico excusus consutusque, folia continet quatuor et viginti. Sed initium et libri et paginarum, more Mangjurico, a sinistra est dexteram versus, vt in paginis singulis apud Syros quoque fit, cum χαμαιφόρως scribunt. Ordo autem paginarum est diuersus. Post nomen officinae librariae Mangjuricum, *I-tsche Folocho*, [1] titulus est, *Mangju-ni geren bidche*, [2] *Mangjuricarum litterarum liber*. Ita similiter post nomen officinae Sinicum, *Sin ke*, [3] titulus *Çin xu çiven cie*. [4] Id est: *Mangjuricae litteraturae perfecta collectio*. Haec collectio elementorum in duodecim *teû*, [5] seu *capita* distributa est. Inde etiam alphabeto huic nomen Mangjuricum: *Tschuen tschue u-tschû*, [6] id est, *duodecim capita*. In primo capite sunt Vocales finales et Consonantes in vocalium aliquam exeuntes. In secundo capite sunt Diphthongi in *i* terminatae et consonantes his diphthongis exeuntes in extrema vocis syllaba. Aliae diphthongi in *o* et *u* desinentes, in decimo capite demum exstant. Habet igitur totum hoc insignem difficultatem, quod neque vocales, neque consonantes, vt in mediis vocibus occurrunt, sunt enim diuersissimae, hoc in libro, aut aliis in alphabetis, quae consecutus sum, exstant. Praeterea consonantes non exstant, nisi cum vocalibus iam de-

Tabula XVI. [1] [2]
[3]
[4]
[5]
[6]

uinctae in ſyllabas, vt rectius hoc, more noſtro, ſyllabarium dicas, quam Alphabetum. Quare hic ego tantiſper diſcedam a Mangjuris magiſtris et Europaea vtar methodo, quam mihi, vt ſemel a me deprehenſa eſt, vtilem fuiſſe viſam recordor. Attamen, quantum fieri potuit, ſeruabo Mangjurorum in diſponendo rationem, nulla alia cauſſa, quam vt, qualis illa ſit ratio, intelligatur. Nam alioqui compendia video, quibus vti queam.

Primum quidem ex Scripturae Syriacae ratione, in Mangjurica, Mungalica et Calmuccica lingua retinetur, vt lineae litterarum a ſumma pagina exarentur deorſum vsque ad imum paginae pedem. Hoc ſcribendi genus Dionyſii Thracis Scholiaſta et Euſtathius Theſſalonicenſis Χαμαίφορον dixerunt, quo vocabulo vt aptiſſimo lubenter vtimur. Ita igitur, inquam, ſcribunt, vt Sini, modo tamen alio. Nam Sini lineas illas ſuas a dextera exordiuntur: Mangjuri item vt Syri a ſiniſtra. Cum vero hi populi ſchedas ſuas legunt, ſolent nonnumquam, iterum ad morem Syrorum, eas vertere, vt, quae χαμαιφόρως ſcripta fuerunt, ea legant a dextera verſus ſiniſtram. Idcirco Sinicum ſcripturae genus magis proprie eſt κιονηδόν, vt Dionyſiani Scholiaſtae altera voce vtar. Scio, multos fore, qui, quid hic de Syris dicam, mirabuntur: aſt ego vera et comperta edidi mihiqne fidem adhiberi volo, neque enim hic locus eſt, vt id nunc ex inſtituto agam.

Litterae Mangjuricae, Mungalicae et Calmuccicae ſic ſunt factae, vt ad celeritatem ſcribendi magis etiam accomoaccommodatae ſint, quam Syriacae. Nam vnaquaeque vox ſine interruptione, vna tamquam in linea perpetuo tractu cohaeret.

Vocales Mangjuricae ſunt vel ſimplices vel compoſitae. Vtrasque vide in Tabula [7. 8. 9.]. Tabula XVI. [7. 8. 9.]

Nota I. Vocalis *e* initialis ſemper aliter ſcribitur, quam ſi praecedat in ſyllaba conſonans.

Nota II. Quando vocalis *i* ſolitarie ponitur, (quod huic vnicae accidit litterae) vocis praecedentis littera, finalium litterarum forma ſcribitur. Tum vero illud *i* indicat, praecedentem vocem in genetiuo eſſe poſitam. Si vox praecedens conſonante terminetur, hoc pronunciatur *i*: ſin vocali, effertur vt *ni*.

Nota III. Diphthongi vel in *i* vel in *o* et *u* deſinunt. Sed diphthongi in *o* et *u* pronunciantur non vno ſono, verum vocalibus diremtis, quod ſignis διαιρέσεως indicaui. Nimirum *aö*, vti *a* et *o*: *eö*, vt *e* et *o*. De his etiam capite decimo dicendum erit.

Nota IV. Omnes vocales natae ſunt ex Syriacis *a i o*. Vocales *e* et *u* per puncta ad dexteram diſtinguuntur ab *a* et *o*. Ceterae ſunt ex his factae et compoſitae. Haec enim puncta vocalium ſigna apud Syros vetuſtiora ſunt,

 quam

quam quae ex Graecis α ε ι η ο ſunt facta. Illa ad S. Ephremum auctorem referuntur; qui circiter A. C. 373. deceſſit, haec ad Theophilum Edeſſenum, qui A. C. 785. obiit. (7) Et his quidem Maronitae vtuntur: illis Iacobitae et Neſtoriani, quorum alterutros Gingiſchano litteras formaſſe diximus. Sed cum Syri puncta vocalia conſonantibus frequentiſſime apponant, Mangjuri ceterique vocalem ſine iſtis fulcris numquam ſcribunt. Hoc ipſum Syris vetuſtioribus et Chaldaeis in vſu et conſuetudine fuiſſe opinor. Nam Mendaei, quos Chriſtianos S. Ioannis nuncupare ſolemus, libros peruetuſtos adhuc habent, permiſtis inter conſonantes vocalibus. (8) Sunt duae aliae vocalium *iė*, obſcuro ſono, *i* et *e* formae, quae raro occurrunt. Vide infra capite ſecundo *Syllabas anomalas*. [12]

Tab. XVIII. [12]

Tabula XVI. [10]

Conſonantium [10] formas, quales ſunt ſine vocalibus in principio et medio vocum, ſpectandas nunc propono. Sunt autem numero nouemdecim.

1. *n*. Hanc litteram punctum ad ſiniſtram diſtinguit ab *a* vocali. Mungali hoc, vt omnia ſigna diacritica negligunt. Mangjuri quoque hoc punctum omittunt poſt vocalem et ante litteras *k* et *g*. Omittitur etiam in terminationibus *ang*, *eng* etc. de quibus infra, et in *n* finali, de quo etiam poſtea. Nonnumquam

(7) Vide Aſſemani Bibliothecam Orientalem Tomo I. p. 54. 55. 64. 521. et Abrahamum Ecchellenſem in notis ad *Ebed Ieſu*. (8) Abrahamus Ecchellenſis in notis ad *Ebed Ieſu* p. 246.

numquam loco puncti scribunt lineolam, vt in tabula. N ante *b* et *p* fere pronunciatur vt *m*.

2. *k*, *g*, *ch*. Haec littera peculiare hoc habet, quod tribus istis modis pronunciatur, sed vt vel vocalis pronunciationem certam definiat, vel circellus ad latus litterae. Hoc ex sequentibus capitibus cognoscetur planissime. In media littera caue, ne *k* confundas cum *na* aut *an*, praesertim si forte punctum ad sinistram praetermissum fuerit, quod nonnumquam contingit.

Nota. Scribitur etiam sic: et in medio quod in finali *k* est frequentius, vt infra dicemus. Reperitur etiam ita: et *sch* pronunciatur.

3. *b*.

4. *p*.

5. *ss*. Siue *s* forti nisu protrusum, tamquam si duplex sit *s*.

6. *sch*.

7. *d* et *t*. Eodem fere modo, vt de littera secunda diximus, pronunciationis diuersitate gaudet. Vide sequentes tabulas. Scribitur saepe cum barbula quadam sic:

8. *l*.

9. *m*.

10\. *tſch.*

11\. *pgj*, vt Perſicum, quod his litteris Latinis ſcribere ſoleo.

12\. *j.*

13\. *kh. gh. kch.* Differt a ſecunda littera, primo, quod lunula ad verticem minus in circellum reflectitur: ſecundo, quod in medio formam ſuam ſeruat: tertio, quod non iisdem vocalibus ſemper iungitur, quibus ſecunda, quarto quod durius in gutture pronunciatur. Solet etiam ſine lunula ad verticem ſcribi: tum vero magis incuruatur caput vt differat a quinta littera. In medio occurrit quoque duplicata vbi ſuperius caput ſemper paullo eſt minus, quam inferum. Tum vero *gk* pronunciatur: neque a me inuenta eſt aliqua in voce, niſi ſi praecederet *n.* e. g. *Ang-kuri*, *Tſching-kil*, *Seng-kle*, *Keng-kun.*

14\. *k. g. ch.* Conuenit partem cum ſecundae, partem cum praecedentis natura litterae.

15\. *r.*

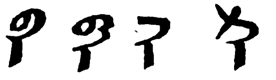
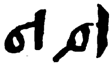
16\. *f*, *w.* Reuera duae litterae ſunt, ſed pro ratione vocalium inter ſe permiſtae, quod ex tabulis ſequentibus planius cognoſcetur.

17\. *zh.*

18\. *ſ*, molle, vt apud Germanos.

19\. *gj*, vt Arabicum ج, quod *gj* ſcribere ſoleo, Italico ſono pronunciandum.

Nota.

Nota. Conſonantium in medio formas accurate adiecimus. Sed  et  ſolent cum ſequentibus  et  fere confundi. e. g.

 *Fabtan*  *Nemtemgte*  *Nibtſchu*, *Fluuius Selinga* et *Selingenskoi vrbs*, *in qua A.* 1689. *pax inita eſt inter Ruſſos et Sinos.*

Omnes vocales et quaedam conſonantes in fine aliter, quam in principio et medio ſcribuntur. Earum cauſſa a Mangjuris et Mungalis tot capita in his elementis conſumuntur. De ſingulis dicemus, quantum ſatis videbitur, cetera enim pro ſe quisque ex ſuperioribus ſupplere poterit. Et potuiſſemus haec quoque maiori compendio tradere: viſum tamen fuit, vel ea cauſſa Mangjuros eſſe ſequendos, vt ratio eorum tradendi ſuas ſyllabas diſcipulis, cognoſci queat. Inter docendum diſcendumque canunt, quod ad memoriam ſubleuandam proficuum eſſe iudicarunt.

Caput primum vocales finales continet et ſyllabas alias in conſonantium aliquam exeuntes. Vocales finales iam ſupra dedi. Conſonantes vocalibus terminatas prorſus eo ordine et numero, vt in libro ſunt, hic recitabo. Recinunt autem Mangjuri inter docendum: *na*, *ne*, *ni*, *no*, *nu nö*, ſeu *noo*, et ita porro. In ſecunda littera

Tabula XVII. [11] et Tab. XVIII.

littera *k*, *g*, *ch*, animaduertas, quemadmodum diuerſo modo ſcripta pronuncietur et vt formae vocalium in ea aliam naturam induant. Eadem animaduerſione in 7. 13. 14. 16. opus eſt. In 17. vide ſingularem vocalis *i* notam, quae vt *iė* ſeu *i-ė* obſcuro ſono effertur. Ite-
Tab. XVIII. [12] rum ea forma inter ſyllabas anomalas [12] cum duabus aliis formis vocalium hibridis occurrit.

[13] Caput ſecundum continet ſyllabas terminatas diphtongis in *i* deſinentibus. Hae ſyllabae facile formari poſſunt ex praecedentibus. Idcirco tantummodo paucas exempli cauſſa exhibebo.

[14] Capite tertio ſyllabae deſinentes in *r* collocatae ſunt. Structura eſt perfacilis, ſi pauca haec exempla videas, ceteraque monita, quae ſupra dedimus, obſeruaueris. Sed inueni quoque haud raro ſic:  *ſchar*.

Tabula XIX. [15] Capite quarto ſyllabae terminantur in *n*. Terminatio *an* et *en* cum terminatione *a* et *e* vocalium finalium congruere videbitur. Aſt in *an* et *en* ſemper vocalis eſt expreſſa, cum in *a* et *e* ipſa finalis lineola vocalis ſit, quae contra in hoc capite eſt *n* ſine puncto. Excipe *an* et *en* pura, i. e. nulla conſonante in ſyllaba praecedente, et *ban*, *ben*, *pan*, *pen*, quae vocali opus non habent, cum a *ba*, *be*, *pa*, *pe* finalibus vel ſic facile dignoſcantur.

[16] Caput quintum exhibet ſyllabas terminatas in *ng*, vt ſonum hunc ſic exprimere mihi liceat. Galli eum habent

habent multis in vocibus. Compoſitus autem eſt hic character ex conſonante *n* ſine puncto et ex vocali *i*, nonnumquam, vt in vocalibus *o*, *u*, *oi* ex duplici *n* ſine punctis.

Caput ſextum continet ſyllabas terminatas in *k*. In iis vide, quam formam vocalis ſecunda et ſexta poſtulet. Tabula XIX. [17]

Capite ſeptimo ſyllabae in *s* terminantur. Harum forma ſyllabarum haud difficulter ex pauciſſimis exemplis intelligetur. Habent etiam terminationem in *ſch* et *zh*. Eam vero tantum in peregrinis vocibus reperi. Tabula XX. [18]

Caput octauum maioris momenti eſt. Syllabae hic ſunt terminatae in *t*. Nam forma haec aliquem ſeducere poteſt, vt vocalem *o* cernere ſe opinetur, cum reuera ſit conſonans, quam ſeptimo loco poſui. Id vero magis poteſt ex Calmuccica ſcriptura animaduerti, in qua haec conſonans clarius dignoſcitur a vocali. Praeterea non modo haec ſyllabarum in *t* exeuntium ratio in finalibus vocum occurrit, vt in ceteris capitibus, verum etiam in mediis vocibus. Eſt hoc in tota litteratura Mangjurica difficillimum. Idcirco huic capiti ſyllabas mediis in vocibus in *t* litteram exeuntes ſubieci. Tabula XX. [19] Tabula XX. [20]

Caput nonum ſyllabas continet deſinentes in *b*, et caput decimum in *o* vel *u*. In his finalibus cauendum eſt, et caueri facile poteſt. Nam terminatio *b* caudam longius producit verſus ſiniſtram , altera quaſi retrahit . De hac iam dixi ſupra in diphtongis. Tabula XX. [21] [22]

Tab. XXII. [23] [24] Caput vndecimum in *l* et caput duodecimum in *m* deſinentes litteras exhibet.

Ad poſtremum obſeruari velim, multas eſſe voces plurium ſyllabarum, quas Mangjuri et Mungali raptim pronunciënt et praecipue vocalibus in medio abſorptis. Gerbillonius in Mungalicis haec exempla edidit:

Vſiba	lege	*Vs-ba*
Toſobon	- -	*Toſ-bon*
Fuſibun	- -	*Fus-bun*
Vaſibun	- -	*Vas-bun*
Aſi-ban	- -	*As-ban*
Eſukieme	- -	*Eſkieme*
Ketukeleme	- -	*Ketoleme.* etc.

His ad aliquam harunece litterarum notitiam fruamini, donec alii plura proferent.

DE

DE LEXICO SINICO

Çù guéy.

T. S. B.

Inter cetera Lexica Sinica, non vltimo loco censetur 彙字 *çù guéy*, siue *litterarum copiosa collectio, classibus suis et capitibus distincta.* (1) Tres editiones libri vidi. Prima erat ex officina 麟玉 *Yo lin.* Ambitiosum nomen. Nam *yo, gemmam et quidquid deinde pretiosum est*, significat, vt hoc loco *Yo lin*, *pretiosa vnicornis* dicitur. Foemella est *lin* masculus 麒 *ki.* Mirifica de hoc animali traduntur, estque Sinorum opinione hic rex, illa regina animantium. Raro apparet, cum, sicuti aiunt, rex optimus et sapientissimus vel regnaturus sit, vel ingressus fuerit imperium: omnem enim populi felicitatem portendit. Quare in Annalibus Couplețianis ad certos annos *ki lin* visi mentionem consignatam reperietis. (2) Et Confucius ipse in *chun cieu* seu historia sui temporis, ipso in fine testatur, tum maxime

(1) Guéy. Collectio, abundans copia, genera ipsa, prouti comprehendunt species, vel species, quae continent sua indiuidua. Lexicon R. P. Parrenini.
(2) Vide e. g. Monarchiae Sinicae tabulam Chronologicam p. 2. 14.

xime *lin*, seu *vnicornem* visam fuisse. Altera editio, quam ipse possideo, ex officina 本原 *yv ên puèn* prodiit. Totidem in hac editione libelli, paginae item superioris editionis paginis congruunt, tantummodo minor huius forma est, et in extremo codicillo quaedam immutata aut praetermissa fuerunt. Tertia editio officinam nacta est 聯辟 *Lièn piĕ*, et quidem, vt additur, 鐫新年二正雍 *Jum chin ulh nien sin civen* ; *Jung Tschìng* (*Imperatoris*) *secundo anno*, *editio noua*. Is fuit A. C. 1724. Praefatio in ea alia, in toto autem volumine iterum paginae priorum editionum, huiusce paginis congruunt. Nos in hac commentatiuncula primam editionem maxime respiciemus, quae praeterea in titulo dicitur 訂重鐫 *civén chúm tim*, *editio seuere examinata et correcta.*

Totum huius lexici volumen, XIV. codicillos continet. In primo codicillo primum est 序 *siú* i. e. *Praefatio*, litteris paullo maioribus et elegantissimis. Sequitur 錄目 *mo lo*, *Index* omnium radicalium secundum classes suas ipso in lexico dispositarum, subiecto calculo, quot sub quauis radicali litterae contineantur. Illo ex calculo numerum omnium litterarum

huius

huius lexici producam poſtea. Eſt deinde 首卷 *xeù kivên*, *primus codicillus.* (3) Nimirum praefatio et index ille non cenſentur in numero primi codicilli. Primum autem eius caput eſt 運筆 *yún pie*, *motus penicilli*, in quo per quinque folia demonſtratur, quemadmodum litterae, praeſertim magis compoſitae, quoue ductuum penicilli ordine ſcribendae ſint. Ponam hic exemplum duntaxat vnicum:

畢 *In hoc charactere,*
先 *ſien, prius (ſcribe, vti ſequitur)*
田 *(ſic inquam)*
次 *çú, deinde (ſcribe)*
卄 *(hunc characterem)*
次 *çú, poſtea*
丨 *(hanc lineolam).*

Alterum caput foliis tribus 从古 *çûm. cù*, *ſimplices antiquos characteres* continet, qui hodie paullo aliter ſcribuntur, ita vero, vt etiam antiqui fere adhuc conſeruentur. ex. gr.

(3) Xèu, proprie, caput hominis, animantis, principium, et ſaepe numeri primi loco adhibetur. Kivên, libri totius minor particula, qualem codicillum appellare ſoleo.

乖 (*Hic character*)
俗 *so solet*
作 *ço fieri*
乖 (*in hunc modum*)

Tertium caput foliis duobus 時遵 *çò, xî*, (*Conformatio temporum*,) comparationem characterum nouorum atque obsoletorum complectitur, hunc in modum:

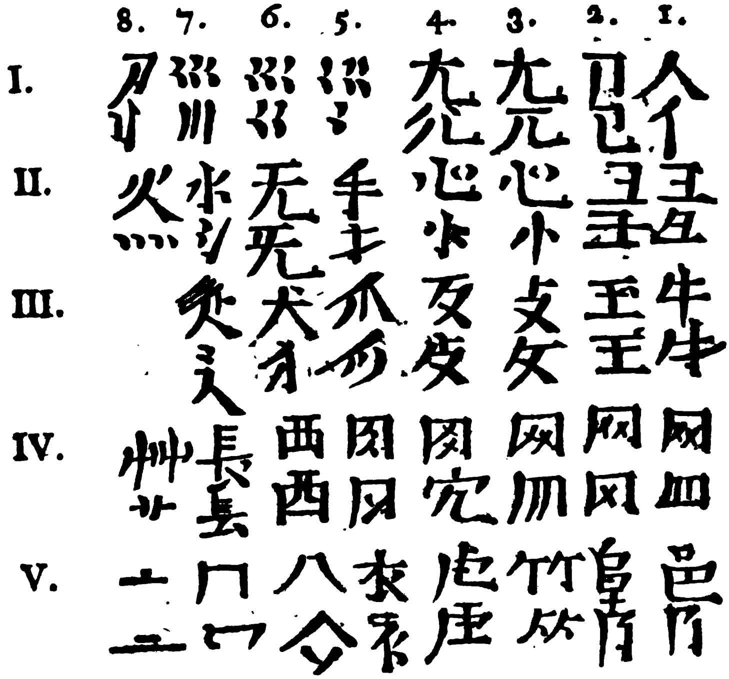
之 (*Hic character*)
古 *cù olim*
作 *ço fiebat*
㞢 (*hoc more*)

Quartum caput tribus foliis eiusdem naturae argumentum continuat modo tituloue alio. Dicitur enim 用通今古 *cù kin tum yum*, *antiquus et nouus explicatus vsus.* Characteres veteres praemittuntur noui subiiciuntur, sic:

Hic

此 (*Hic character*)
古 *cù olim*,
[乍 (*hic vero*)]
今 *kin. hodie*.

Quintum caput est 字檢 *kièn çú*, *Examen litterarum*. Scilicet, sunt quaedam litterae radicales, quae diuersa figura, ad significationem aequipollent, in compositis autem, pro ratione situs, modo vno modo, modo altero poni debent, modo perinde est, qui ponantur. Hae litterae 附 *fú*, i. e. *consanguineae* dictae, hoc in capite recensentur. Easdem, vtpote cognitu pernecessarias hic describam ita, vt superior *series*, characterem vnumquemque extra compositionem, inferior eiusdem aequipollentem in compositione ordine suo exhibeat



I. Series.

1. *gin*, *homo*, vt in fecundo ordine eſt, numquam niſi in compoſitis et quidem ad ſiniſtram tantum occurrit.

2. *cie*, *teſſera fidei*, ſecundi ordinis, tantum in imo compoſitorum.

3. 4. *yêu*, *defectus non voluntarius*, cum characteribus ſecundi ordinis in compoſitione permutatur. Sed primus ſecundi ordinis etiam radicalis eſt *yuên* (origo) neque huc pertinet.

5. 6. 7. pro his primi ordinis characteribus ſaepe ſecundi ordinis *kivén*, *cai*, *chuen*, veluti aequipollentes ponuntur. 8.

8. *tao*, *culter*, *gladius*. Sed alterius ordinis littera tantummodo in compoſitis et quidem a dextera exſtat, vnico exemplo inter duas radicales mediam vidi in lexico *Hai pien*.

II. Series.

1. 2. *kì*, *porcus*, in compoſitis fere, vt in ſecundo ordine, et prima quidem earum in ſummo.

3. *ſin*, *cor*, in compoſitis a ſiniſtra non poteſt aliter occurrere, quam in ſecundo ordine eſt.

4. *ſin*, *cor*, altera forma ſecundi ordinis etiam occurrit, ſed non a ſiniſtra.

5. *xeù*, *manus*, in compoſitis ſic, vt in ſecundo ordine et tantummodo a ſiniſtris: vnicum exemplum in ſummo reperi in lexico *Hai pien*.

7. *xuì*, *aqua*, a ſiniſtra tantummodo vt in ſecundo ordine.

8. *ho*, *ignis*, in imo tantum vt in ſcundo ordine.

III. Series.

1. *niêu*, *bos*, a ſiniſtris, vt ſecundò in ordine.

3. *yö*, *gemma*, a ſiniſtris tantum, vt ſecundo in ordine, alias vtroque modo. Eſt et radicalis eiusmodi *vâm*, *rex*, ſed ab auctore huius lexici eodem refertur.

3. 4. aequipollent.

5. *chaò*, *quadrupedum et volucrum* vngues in ſummo, vt ſecundo in ordine.

6. *keu*, *canis*, a ſiniſtris, vt ſecundo in ordine.

7 *cho*, *lignum tranſuerſum*, *quo aqua praecluditur*, a ſiniſtris, vt ſecundo in ordine.

IV. 1. 2. 3. 4. *vam*, *rete*, aequipollent.

5. *yo*, *caro*.

6. *ſy*, *ſeptemtrio*.

7. *cham*, *ſupereſſe*, *excedere*, et *cham*, *creſcere*, a ſiniſtris compoſitorum, vt ſecundo ordine.

8, *çao*, *herba*, in ſummo compoſitorum tantum vt ſecundo in ordine.

V. Series.

1. *ye*, *villa*, *pagus*, in regionum et locorum characteribus tantum a dexteris, vt ſecundo in ordine.

2. *ſui*, *collis fertilis*, ſemper a ſiniſtris, vt ſecundo in ordine. Ambo characteres cum ſcribuntur penicillo, immo etiam in editis, figura ſua cum  conueniunt.

Sed multo ſunt plures litterae, quae eodem modo aequipollent et in compoſitionibus ſuam ſtationem tenent, ex. gr.

3. *cho*, *arundo*, vt in ſecundo ordine.

4. *hu*, *tigris*, in ſummo fere, vt in ſecundo ordine.

5. *y*, *veſtis*, vt in ſummo in ſecundo ordine.

6. *gin*, *homo*, ſi in ſummo characteris compoſiti exſtet, vt in ſecundo ordine, duobus modis.

7.

7. *kiūm*, in ſummo vt in ſecundo ordine.

8. *teu*, caput, in ſummo, vtroque modo.

Haec tantummodo exempli cauſſa produximus, eſſent enim multo plura commemoranda nobis, ſi haec vellemus perſequi. Iam neceſſe eſt, vt characteres ſecundi ordinis in lexico quaeras, iuxta primi formas ordinis, cum plerique ſecundi ordinis extra compoſitionem litterariam ſolae non occurrant.

Denique recenſentur in Lexico *çù gvey* omnes characteres, qui in ſe quodammodo perfecti, radicalium vicem praeſtare poſſunt, a prima Claſſe ad XXXIII. Et cum in *çù gvey*, vt poſtea dicam, neque tot claſſes, neque tot radicales ſint, hic ad charactères, qui in alias relati ſunt claſſes, annotatum fuit, quo ſint loco inueniendi. Qui index vel maxime hunc vtilitatem praeſtat, vt in dubiis, multiplicique varietate deuinctis radicalibus cognoſcere poſſis, ad quam radicalem vnusquisque in Lexico relatus ſit character. Praeterea illo in indice habemus catalogum omnium fere characterum perfectorum, qui ex nouem elementis primis per artem combinatoriam conflati, nouas inter ſe iterum combinati litteras pariunt. Et claſſis quidem XXXIII. fere vltima eſt, in qua totidem elementa prima characterem vnum conſtituunt. Inueni tamen in *Hai pien* hunc characterem  qui ex XLI. elementis et duabus radicalibus litteris compoſitus fuit, ita vt ſuperior classem XXXIV efficiat. Enimuero in lexico *çu guey* et H*ai pien* vasti illi characteres ad minores classes quomodocunque referri solent.

Opus ipsum lexici in duodecim codicillos est diuisum: vnusquisque codicillus ex cyclo duodenario nomen habet, adiecta voce 集 *cie*, vt *çu cie*, *cheu cie* etc. *Cie* autem *Collectionem* significat. Primus ipsius Lexici codicillus, seu secundus totius operis et voluminis, etiam 子 *ye ulh çù su* vocatur, *duodecim filiorum cor*, 心 in qua appellatione duodecim filii isti, ipsi codicilli sunt, qui quasi nascuntur. Cum vero Sinenses autumant, cor hominis primum omnium in conceptione exsistere, eo primam classem elementorum tamquam parentes, secundam tamquam conceptionem considerant. Haec duodecim *cie* comprehendunt XVII 畫 *hoe*, *compositiones litterarias*, quas ego *classes* vocare soleo. Secundus totius voluminis liber, quem primum ipsius lexici iam supra dixi, comprehendit primam classem seu elementa prima et secundam classem, in qua bina elementa prima in singulas litteras coalescunt. Tertius voluminis et quartus codicillus exhibent classem tertiam, seu eius 前 *çièn*, *partem priorem* et 後 *heú*, *partem posteriorem*. Quintus, sextus et septimus continent classem quartam, siue

siue eius 上 *xam*, *partem superiorem*, i. e. primam, 中 *chum*, *mediam*, i. e. secundam, et 下 *hia*, *inferiorem*, i. e. tertiam. Octauus codicillus classem quintam complectitur. In nono vero codicillo atque deinde etiam in decimo, classis est sexta; in vndecimo est septima: in duodecimo octaua et nona: in tertio et decimo sunt classes a decima ad septimam et decimam. Vltima classis, vocatur quoque 亥書 *hoe chi*, *classis non plus vltra*, seu, *postrema*.

In indice huius lexici, de quo supra dixi, non modo radicales lexici ordine suo recensentur, sed numeri quoque compositarum litterarum subiiciuntur, ita vt radicalis quisque sub eodem numero comprehendatur. Sunt igitur.

Classes		*Radicales*		*Litterae in vniuersum.*
I.	*In ea*	6	– –	101
II.	– –	23	– –	1810
III.	– –	31	– –	4502
IV.	– –	34	– –	13238
V.	– –	23	– –	3443
VI.	– –	29	– –	5621
VII.	– –	20	– –	3209
VIII. IX.	–	20	– –	3115
X. XVII.	–	28	– –	3056
		214 (4)		38095.

 Sic

(4) Has respexit P. Cima apud Leibnitium in epistolis a Kortholto edit. T. I. p. 378. Plures enim re vera sunt, quam in hoc lexico continentur.

Sic nos calculo inito inuenimus, quamquam in praefatione lexici tantummodo 33279 annummerantur. Sed multi characteres ſub diuerſis radicalibus repetuntur: haec res multitudinem tantam facile potuit in maius augere, cum tanti nobis non fuerit viſum hoc negotium, vt cum maximi diſpendio temporis, nihil agendo, neſcio quid certi reperiremus. In lexico autem *Hai pien*, de quo alias dicemus, characterum numerus ad ſeptuaginta millia aſcendit: in iis vero iterum atque iterum poſitorum, praeterea obſoletorum magna eſt copia, magna aliorum, qui rariſſime occurrunt, multi tamen in iis ſunt non infrequentes, qui in *Çü gvey*, non reperiantur.

Sed videamus nunc interiora huius lexici. Quemadmodum apud nos in ſuprema cuiusque paginae linea titulum vel libri vel capitis et numerum paginae ponimus, ita Sini id ipſum exhibent in margine. Nam cum charta Sinica pertenuis litteras aduerſae impreſſas, in auerſa quoque praebeat tranſparentes, ad obtegendam foeditatem et vt manibus ſecurius tractari queant, folia in medio complicantur, extrema autem cornua conſuuntur. In ipſa marginis plicatura, ſumma regione, aliis in libris, eorum nomina vel ſectiones, hoc autem in lexico illae ex cyclo duodenario codicillorum appellationes, in imo margine numeri foliorum ponuntur. Character radicalis maioribus ductibus, libero deinde lineae iſtius ſpatio, vt magis oculos aduertat, deſcribitur, adiecta tantummodo littera 部 *pu*, quod *caput* ſignificat, vel *ſectionem*, vel quomodocumque noſtro

more

more interpretari velis. In proxima linea idem character radicalis, maiori item forma repetitur, subiecta minoribus litteris explicatione Sinica. Succedunt deinde maioribus litteris deriuata et composita, pro ratione classium, ad quas vnaquaeque littera, quae radicali adiungitur, collocari solet, dispofita, intermistaque minoribus litteris interpretatione. Haec ego *capita* nuncupare soleo. Quotiescumque caput nouum incipit, numerus eius albo colore in circulari nigroque spatio satis grandis lectorem aduertit. Sed in postremis capitibus vastiorum ex combinatione litterarum numeri fere praetermitti solent, ita, vt quae post XV. Classem sunt litterae, quarum nonnumquam insignis est copia, vnum illud in caput abstrusae reperiantur. Quemadmodum haec res quaerenti saepe molesta est, sic alia est multo molestior, de qua nunc dicam. In combinatione potest radicalis secum componi, potest ad latus eius dexterum vel sinistrum, tum vel in summo vel in imo alius character adiici, potest radicalis in medio aliarum litterarum collocari, potest denique in se ipso insignem mutationem subire. At Sini in lexicis suis hoc pensi non habent. Quocumque situ character alius radicali accedat, eodem in capite reperietur, modo ad eandem classem pertineat: ita fit, vt inter quaerendum, oculis varium ad situm circumferendis, defatigemur. Cui malo vt mederer, meo in lexico, quod paro, situs varios litterarum distinxi, easque appellaui *sectiones*. Igitur cum compositam litteram in lexico *Çu gvey* indagare voles, quae ex duabus radicalibus aut pluribus in vnam sit conflata, primum nouisse te oportet, quae radicales

dicales in hoc lexico veluti duces inueniendi compositas adhibeantur. Eam autem radicalem in vna ex XVII. classibus reperies. Tum in adiuncto charactere numerantur elementa prima. Si fuerint e. g. octo aut duodecim, in octauo aut duodecimo capite totum characterem inuenies. Sed, vt hoc dilucidius scias, exemplo rem declarabo. Sit character tibi quaerendus  in quo tres sunt radicales. Medium scire te oportet in *çugçeχ*, tamquam radicalem, non occurrere, ita deinde memineris characterem a dexteris, 阝 vt supra monui, esse 阝 et aequipollere τῷ 邑 hunc autem ex septem elementis primis constare, itaque in VII. Classe reperiri. Sed non placuit auctori lexici, characterem illum compositum ad hunc radicalem referre, idcirco in tertio, qui a sinistris est, et qui tribus elementis constat, tertia in classe requires. Iam duo characteres huic radicali cohaerentes, secundum leges, quas huius auctor lexici sibi dedit, ex octo elementis primis confecti sunt, igitur sub illo radicali, capite octauo characterem desideratum inuenies. Non vbique tantum operae est impendendum, in quibusdam tamen etiam amplius.

Minoribus litteris primo pronunciatio, deinde significatio subiecta est, hunc in modum:

Illum

目
莫 木
卜 眼
切 匕
音

Illum characterem si pronunciare voles, *mŏ pŏ cie*, ex *mŏ* initium, ex *pŏ* finem *abscinde*, erit *mo*. Nam *cie* significat, *paullatim, non vno ictu scindere, abscindere, discindere*, estque hic vocabulum technicum. Cum autem *mo* variis accentibus pronunciari possit, adiicitur, *yn mŏ*, *pronuncia mo*. Nam hic character plane sic pronunciatur, vti is quem explicandum suscepimus. Denique sequitur, *yèn yè*, *oculus est*. Nonnumquam alius character, qui similiter pronunciaretur, non occurrit, tum vero quemcumque accedentem propius ad syllabam illam producit auctor (siue omisso illo *yn*, i. e. *pronuncia*, siue adiecto) et accentum quo vox efferri debeat, nominat, vt duobus exemplis declarabo.

I.

天

他前切鐵平聲天

着天之理也氣也

II.

鐵

他結切天入聲

黑金又姓

I. Hic character *ta çien cie*, ex *ta* prima littera ex *cien* vero terminatione *disſecta*, pronuncianda eſt, et quidem, vt ſequens character *tien*. Sed accentus alius eſt, nimirum, qui vocatur *pim xim*. De eo vide Muſeum Sinicum. (5) Sequitur explicatio: *tien chè* (*chè* eſt expletiua et vocem ſuperiorem diſtinctius determinat) igitur *tien* (*iſthuc*) *ly yl*, *materia prima eſt*, *lumen rationis*, *recta rerum ratio*, *primum rerum omnium principium immateriale*, *materia prima a principio rebus omnibus inhaerens*, *res omnes*

(5) T. I. p. 12.

omnes cum suo principio. Ista enim omnia charactere et vocabulo *lỳ* exprimuntur. Additur alia significatio: *kì yè, materiale rerum omnium principium est, quod cum immateriali principio, lỳ, intrinsece res omnes componit.*

II. Ex *ta* finem, ex *kien*, initium *cie* *disseca*, erit pronunciandum, vt character *tien*, sed cum accentu dicto *ge xim* (id est, *tien*) *bě kin, nigrum* (*obscurum*) *aurum, yeu teù, item formasura.*

Saepe idem character pluribus modis enunciatur, sententia vel eadem, vel diuersa. Haec vero subiici solent, priori parte circello quodam finita. Incepit protinus 又 *yeu, vel, item*, et si pronunciatio fuerit alia, eodem modo, vt supra diximus, res procedit. In citationibus auctorum et scriptorum sic egit auctor lexici, vt nomina illa quibusdam octogonis includeret, quod in subiecto exemplo cernetis. In eodem cernetis aliud artificii genus, quod in reducendo charactere ad simpliciora elementa, ex quibus compositus est, versatur, inde iam descriptionem ipsius rei fieri demonstrat. Scilicet, nouem elementa prima, (tot enim reuera sunt) certas ideas comprehendunt, quas in classe secunda ad definitiones rerum combinare auctorem harum litterarum voluisse, non obscurum est. In maioribus classibus hoc maxime apparet. Nam quaecumque in compositione adiunctum habent characterem, *auis, piscis, herbae, aquae, canis, ignis, auri, gemmae*, aliaque eiusmodi, eaedem illis ſub generibus tamquam ſpecies continentur, aut tamquam adiuncta proprietatesque ad iſta genera referuntur, aut certe ex tropo aliquid habent, cur iſtae litterae adiectae ſint. Sed neque in omnibus eadem facilitas iſthuc ipſum explicandi, neque in minoribus characteribus ratio talis item plane explicari poteſt. Itaque diſſidia inter lexicographos eſſe ſolent, aliis aliter characteres ſuos deriuantibus, quod cumprimis contingit in rebus, quae ſenſus humanos fugiunt ſoloque intellectu capiuntur, vbi iſtae picturae ad ſimilitudinem cogitationum idearumque humanarum admodum ſunt rudes et obſcurae. Non nego, potuiſſe ſubacto ingenio virum in his, ad naturae idearumque noſtrarum *imagines* ordinandis, multo ſagaciorem ſeſe praeſtare, nunc autem, cum tanta in *Ly çu* harum, 240. ante Dionyſianam epocham annis, auctore litterarum facultas non fuit, aut cum a rudioribus vetuſtatis characteribus longius diſcedere non auderet, ſatius eſt iſtam enodandi minores characteres curam praetermittere. (6) Exempli eorum quae diximus, cauſſa, ſumemus litteram vocemque in maximis controuerſiis verſatam. (7)

聖

式	*xe*	*Abſcinde* ex *xe*, initium, ex *chim* finem, (vt ſit pronunciatio characteris, *xim*.)
正	*chim*	
切	*cie.*	

vt

(6) Ex his apparet, quid iudicandum ſit de Leibnitii ſententia in epiſtolarum Tom. I. p. 395. (7) In çù gvéy, libro 9. p. 72.

音 *yn* Immo *pronuncia* vt ſequentem

勝 *xím.* *xím.*

人 *gîn*
之 *chī* } *Homo.*

至 *chí*
也 *yè.* } *ſummus*, *perfectus*, vt *non poſſit ſupra.*

睿 *pú*
也 *yè.* } *Ingenii acumen*, *ſeu ingenium ad res aptum.*

周書 *Cheū* *xū.* } *Cheū xū* (liber quartus eius, qui inter quinquè Claſſicos dicitur 書經 *xū kīm*) ſic ait:

睿 *pû* *Ingenii acumen*

作 *ço* *facit.*

聖 *xím* *ſapientem*: ſeu, vim ingenii acumine facit *ſapiens*,

又 *yeu* *et*

通 *tum* } *intellectu penetrat et quasi peruias reddit res omnes; vt intelligantur.*

也 *yè.*

孔 *Cum*
氏 *xi*
傳 *chuén.* } *Cum xi chuen* liber sic ait: (lego *chuén*, q. d. *Confucianae familiae commentarius*: alioqui *chuēn* esset, *Confucianae familiae propagata ad posteros virtus seu dignitas.*)

於 *yu* *In*

事 *sú* *negotiis*, *officiis*, *muniis*

無 *vû* *non est*

所 *sò* (*locus*) *aliquid*

不 *pú* (quod) *non*

通 *tum* } *penetret et recte introspiciat* (i. e. si in rebus agendis nihil sit, quod quis non introspiciat, ille)

謂 *gvéy*
之 *chi* } *dicitur*

聖 *xím.* *xím.* (Itaque vocabulum, *xim* commode reddemus *sapientem*.)

yéu Item

又 *Yéu* *Item*

姓 *sím.* *familia est*, seu *cognomen familiae.*

又 *Yéu* Item:

謚法 *xí* l. *xé* *fa* — Liber *xi fa.* (De eo sic ad me R. P. Parrenin: *Liber, qui non spectat ad viuos, sed ad defunctos imperatores, reges, insignesque etiam praefectos etc. continetque varias formulas laudationum funebrium, quibus decorari debent respectiue ad vniuscuiusque praeclare aut fortiter gesta sculpique in marmore.*)

揚 *Yâm* *Publicauit, diuulgauit*

善 *xén* *aliena merita et fortiter gesta,*

賦 *fú* *recepit parce moderateque*

簡 *kièn* *tributum* (i. e. Si Imperator aliquis dum viuat, aliorum praeclare gesta non celet, sed in honore habeat, sique tributa moderate exigat, is, scilicet post mortem.)

曰 *ye* *dicitur* (seu *meretur dici*)

聖 *xím* *xím.* (Quod recte nunc reddi potest, *iustus*, et vt veteres Romani dicere solebant, *vir sanctissimus.*)

kim

敬 *kim* (Qui etiam) *bonore prosequitur*

賓 *pīn* *hospites*

厚 *heu* } *magnaque excipit vrbanitate*
禮 *li*

曰 *yuĕ* *dicitur*

聖 *xīm.* *xim.*

○ (Punctum completum)

說 *xúi* } Liber *xúi ven*:
文 *vên*:

从 *çûm*, *simplicia elementa*, (ex quibus character *xim* est compositus, sunt)

耳 *ì lh* *auris* et

呈 *chīm* *ab inferiori ad superiorem*, *ab imo ad sublime quae referuntur* (vnde 呈 *chim çu*, *libellus supplex*)

xim.

聲 xīm. pronunciantur (in illo charactere.)

通 Tūm }
論 lún } Liber Tūm lun (sic habet.)

通 Tūm Qui penetrat

而 lh et

先 sien }
識 xe } praescit (res per caussas et proprietates suas)

曰 yve dicitur

聖 xím. xím.

於 yu In

文 vên compositione

耳 lh lh (litterae et)

呈 chîm chîm

爲 gvêy efficiunt

聖 xím, xím (characterem, s. quamuis illae simplices litterae hunc characterem efficiant, tamen)

從 çûm } *Particula* lh
耳 lh }

非 fī *non*

在 çái *est*

耳 lh } *auris ipsa*. (i. e. *non auris facit xim seu sapientem*, sed)
也 ye }

心 sīn *cor* (animus, ingenium, intelligentia)

通 tūm *penetrat* (adsequitur)

萬 van }
物 vě } *omnium rerum*
之 chī }

情 cím *caussas et proprietates*

若 sō *sicuti*

lh

耳 *ìh* }
之 *chī* } *auris*
通 *tūm* *penetrat* (et percipit)
聲 *xīm* }
也 *yè* } *vocum sonos*

Non possum, quin hic subiiciam, quae R. P. Parrenin de huiusmodi argutiis ad me scripsit: *Nota*, huius- " modi explicationes depromptas ex lexico esse arbitrarias, " propterea que variare scriptores, quia nullum habent fun- " damentum ex prima institutione: v. g. sunt nonnulli, " qui in scribendo, characterem *xim*, non supponunt lit- " teram 壬 sed 王 et postea sic hariolantur, vel po- " tius nugantur, dicentes, auris et oris rex, id est, sa- " piens qui scit audire et loqui. "

Decimus quartus codicillus vocatur 末卷 *kiven mǒ*, *liber extremus*: nam *mǒ finem* significat. Primum in eo occurrit 似辨 *pién sù*, *elucidatio characterum similium inter se*. Sunt autem hae litterae eiusmodi, inter quas insignis similitudo intercedit, significatione vel eadem, vel diuersa. Dispositae sunt in quinque sectionibus. Prima inscribitur 似相字二

 ulb

Ib çu siám sù, *duo characteres exteriori similitudine*, in qu
ini characteres inter se comparati ad similitudinem existunt,
diecta illustratione eorum minoribus litteris. Sic in ceteris,
t in vltima quidem sex characteres inter se conferuntur.
Nouum deinde caput 誤醒 *sim ù*, eadem fere tra-
ctat. Pars vero tertia 圖直法韻 *yún fa che tu*,
tonorum artis directa explanatio inscribitur, cui pars quar-
ta subiungitur 録目法韻 *yún fa*, *toni-
carum regularum*, *mo lu*, *index*, et quinta quae postre-
ma 圖横法韻 *yún fa hûm tû*. In his
agitur de doctrina accentuum, quam tanti non indica-
uimus, vt operose excuteremus. Vide interim, quae in
Museo Sinico (8) de ea re diximus.

Sed non possum R. P. Parrenini de iisdem iudicium
"reticere. (9) Accentus, inquit, adhibiti supra sonos Eu-
"ropaeos res prorsus est inutilis. Accentus enim Sinenses
"non percipiuntur oculis, sed aure discuntur et vsu, suntque
"quasi imperceptibiles in ore Sinorum, vti aduertere po-
"tuisti, quando audiuisti legatos loquentes Sinice. Magnus
"*Ogegin* est natione Tartarus orientalis, sed natus Pekini,
"valde eruditus in libris et lingua. Dicesne illum cantasse
"aut sibilasse, vt Angli? si quis Europaeus loquendo Sinice
"bene ordinet phrasin, id est, non illam inuertat, semper
"intelligetur a Sinis etiamsi peccet contra accentus *pim*,
"*xam*, *cu*, *ju*. Sed si transponat verba nullus capiet, non
"enim erit loquela Sinica. DE

(8) T. I. p. 11. seq. (9) In epistola ad me Pekini 30. Iul. 1734 dat.

DE RVSSORVM PRIMA EXPEDITIONE CONSTANTINOPOLITANA

T. S. B.

ILlustris res est, quam e monumentis tum Russicis tum Graecis exsequar, de Russorum Kiowiensium prima expeditione Constantinopolitana; sed maximis eadem inuoluta difficultatibus. Russi scriptores cum famam tenerent, nacti duces Graecos parum illis temporibus idoneos, sic fluctuant, vt subleuandi nobis videantur: Graeci autem nulla aetate magis ad rerum memoriam litteris prodendam caecutiuerunt, quam cum ista sunt gesta, itaque erunt nobis accuratissime expendendi. Primum in anno susceptae expeditionis dissentiunt inter se scriptores Rutheni. Chronographus, ita appello veterem eorum anonymorum, quos ab amico conuersos Latine mecum habeo, ad A. M. 6374. A. C. 851. *tempore Michaelis Bardaeque Russi ducentis Cymbis expeditionem Constantinopolitanam susceperunt, multasque praedas in litoribus egerunt: Michael autem et Patriarcha Photius, factis precibus in templo Blachernarum, vestem B. Mariae inde canticis comitati, oram eius mari immerserunt, quo facto magna tempestas oritur et tota Russorum classis periit.* Historiographus Ruthenus alter anonymus ad A. M. 6374. A. C. 866. a superioris anni Kal. Septembribus, Oscol-

Tum enim sub aestatem Theodora mater aula est pulsa. Eam ob caussam Leo Grammaticus (4) et Georgius Codinus (5) annos XV. Michaeli et Theodorae tribuunt, quod partem magnam quinti et decimi anni cum filio imperauit mater. Cum autem alibi Logotheta scribit, (6) Theodoram aula pulsam XIII. anno, is quidem error est, at argumento nobis esse debet, Logothetam A. C. 856. cuius anni aestate Theodorae matris potentiam collapsam diximus, solidum tribuere Michaeli tamquam primum. Idcirco nonus deinceps erit A. C. 864. et decimus A. C. 865. quibus annis expeditio Russorum inferenda est, quosue Historiographus Ruthenus et Stepennaiae Knigae auctor respexerunt. *Theodosius Abbas* paene attigit. Atque huic etiam tempori apti sunt Bardas Caesar et Photius Patriarcha. Nam Bardas ab A. C. 858. Caesar fuit (7) ad A. C. 866. quo anno caesus est post Pascha. Photius Patriarcha fuit ab A. C. 858. natalibus Christi. (8) Hae rationes nos spatio annorum satis angusto includunt, ex quo excedere non possumus.

Nostrae opinioni aduersari videtur Nicetas Paphlago in vita Ignatii Patriarchae, cui scriptori, vt coaeuo plus tribuere cupiam, quam ceteris omnibus, nisi ipse sese impediret. Eius testimonio A. C. 860. Russi ad Terebinthum penetrarunt. Nam auctor est, Ignatium postquam a Barda Caesare A. C. 858. circa Natalia Christi patriarchatu pulsus fuit, Terebinthum, suam in mona-

(4) p. 457. (5) In originibus Constantinopolitanis p. 77. (6) p. 435. (7) Logotheta p. 439. (8) Praeter Historicos Byzantios, Nicetas Paphlago in vita Ignatii Patriarchae ab Harduino in Conciliis editus.

nasterium, sese recepisse, anno autem proximo, Augusto mense Mytilenen deportatum, post menses sex Februario Terebinthum redeundi veniam impetrasse. Isthic cum ageret, inquit Nicetas, Russi insulam Terebinthum inuaserunt, nec multum temporis effluxit, cum Photius Patriarcha concilium habuit, cui interfuere Nicolai Pont. Romani legati, vt hoc saltem auctore Niceta Ioannes Harduinus id concilium A. C. 859. inserere non potuerit, quando rerum ordo non patitur. Eo in concilio Ignatius Patriarcha damnatus est: ne quid grauius pateretur Terebintho sese subduxit et in Propontidis insulas fugit. Augusto mense eiusdem anni seu A. C. 860. teste Niceta, ingens Constantinopoli terrae motus fuit, cuius terrore portenti perculsus Bardas Caesar, Ignatium passus est ab fuga redire in Terebinthi insulae monasterium. Tum subiungit Nicetas, εὐθὺς οὖν ὁ σεισμὸς ἔστη καὶ Βούλγαροι δὲ τότε προνοίας Θεοῦ βιαίῳ κατατεταμένες λιμῷ, ἅμα δὲ τοῖς δώροις τοῦ Αὐτοκράτορος θελχθέντες τὰ ὅπλα καταθέμενοι τῷ ἁγίῳ προσήνεσαν βαπτίσματι, *illico autem terrae motus desiit et Bulgari tunc prouidentia diuina graui adflicti fame, simul et muneribus Imperatoris deliniti, armis positis ad sanctum baptismum venerunt.* In hoc postremo paullulum subsistam, vt in nota temporis. Leo Grammaticus (9) de fame item scripsit: quidquid eius sit, malo tamen Nicetam edidisse pestem, vtpote cum per ipsam naturam pestis repente depelli potest aut intermittere, fames non potest nisi paulatim succedente copia. Quare λοιμῷ repone in hoc Nicetae loco. E contrario Leoni ad sensum non prae-

(9) p. 462.

praebeo, cum auctor est Michaelem Imperatorem terra marique exercitum duxisse in Bulgariam, Bulgaros malo suo attritos pacem petiisse, principem gentis, (Goborem vt Symeon Logotheta (10) seu Bogorem vt Cedrenus habet) (1) a Patriarcha baptizatum et a Michaele Imperatore susceptum, nomen mutauisse. Nam Cedrenus, Ioannes Curopalata, Zonaras Nicetae *Paphlagoni* consentiunt, Bulgaros sponte sua ad sacra christiana accessisse. Hoc ipsum confirmare videtur epistola Photii Patriarchae ad hunc Michaelem Bulgariae Principem. At vero hunc Michaelem a Patriarcha baptizatum fuisse, tantum abest, vt Photius adfirmet illa *in* epistola, vt e contrario ne visum quidem sibi *Principem dolea*t, suam *solummodo* operam in eo conuertendo *praedicet*. Fuit igitur in Bulgaris ecclesiae aggregandis magna pars Photio Patriarchae, quae res occasionem dedit aliis prodendi ab eodem Patriarcha sancta mysteria suscepisse Michaelem Principem. Symeon Logotheta baptismum hunc ad quartum annum Michaelis Imperatoris refert, siue ad A. C. 859. Historiographus Ruthenus ad A. M. 6366. *Bulgari baptizati sunt*, *septimo anno Michaelis*. Haec non cohaerent. Annus ille mundi a Kal. *Septembribus* A. C. 857. secundum annum Michaelis continet, septimus vero annus A. C. 862. Id ipsum in Graeco aliquo reperisse videtur Historiographus: nam nihil certi definiri potest. Quidquid eius rei sit, cum Nicetas Russorum expeditionem ante hunc annum ponit, vitio laborat. Non nego, Ignatium Patriarcham in Terebintho insula fuisse, cum Russi insulas Propontidis deuastarent hostilem in modum, attamen cum Nicetas concedit,

(10) p. 440. (1) p. 540.

cedit, inde ab A.C. 860. mense Augusto, Ignatium concedente Barda Caesare ἀνεύθυνον καὶ ἄνετον εἰς τὴν αὐτοῦ μονήν, *inquisitioni exemtum et liberum in monasterium suum* (2) Terebinthum dimissum esse, atque inde iam vsque ad Bardae Caesaris mortem fuisse, nihil impedit, quin in Terebintho A. C. 864. et 865. fuerit, cum Russi insulam expilarunt, Nicetas autem per errorem in superiorem aetatem reiecerit, quae tum gesta fuerunt. Nam si Nicetam conferas cum Ignatii Patriarchae de caussa sua ad Nicolaum P. R. epistola, eum in temporum rationibus rebusque ipsis aberrasse senties. Ignatio tamen potius ordinem rei gestae narranti fidem adhibuerim, quam Nicetae Paphlagoni.

Tempore expeditionis Russicae constituto, reuertor ad rei gestae ordinem. Res illas narrant praeter Symeonem, tum Leo Grammaticus, tum Anonymus Theophanis Byzantii Continuator, tum Cedrenus, Ioannes Curopalata Scilizes, Zonaras. Persequar testimonia, vbi scopuli obsistent, sistam gradum et iuuabo comiter. Russica classis secundo Danapri aduersus Constantinopolin deuecta est, inde ab Kiouia, vt nos cursum illum e Constantino Porphyrogenneta (3) alibi explicabimus. Profecti sunt igitur, isto teste, Iunio mense. Sub exitu aestatis τὰ ἐντὸς Εὐξείνου καὶ πᾶσαν αὐτοῦ παραλίαν τὸ ἔθνος ἐπόρθησε καὶ κατέτρεχε, *omnem interiorem Pontum (seu littora Ponti) vastauit hic populus et excursionibus depopulatus est*, vt Cedrenus ait. (4) Theophanis Continuator, (5) τὸν τε Πόντον αὐτὸν, οὐ μὴν καὶ τὸν Εὔξεινον καταεμπλιμ-

(2) p. 971. (3) De administrando imperio p. 59. (4) p. 551. Zonarar T. II. p. 162. (5) p. 121.

ἐμπίμπρα καὶ αὐτὴν τὴν πόλιν περιεστοίχισεν *et ipsum Pontum non iam amplius Hospitalem gens ea vastauit et vrbem ipsam obsidione cinxit.* Cum Russi littora Pontica diriperent, eodem anno, Symeon Logotheta tradit, (6) Michaëlem Imp. contra *Agarenos* fuisse profectum, Leo Grammaticus (7) contra *Saracenos.* Sic enim diuersis nominibus hic populus a Graecis editur. Haec cum narrant auctores Graeci, scopulos videntur loqui et lapides. Nam Symeon Logotheta tradit Michaelem iam ad Mauropotamum fuisse, cum de aduentu Russicae classis perfertur, ita eum rediisse nulla re peracta. E contrario Leo Grammaticus: Ὠορύφας ἐμήνυσε τὴν τῶν ἀθέων Ῥῶς ἄφιξιν γενομένων ἤδη κατὰ τὸν Μαῦρον ποταμὸν, *Oryphas ab CPli Imperatori nunciauit aduentum impiorum Rossorum, quod iam ad Mauropotamum essent.* Georgius Monachus (8) in eandem sententiam Ὠορύφας ὅυπω τοῦ βασιλέως μηδὲν ἐξ ὧν ἐμελέτα καὶ κατὰ νοῦν εἶχεν εἰργασμένου, τὴν τῶν ἀθέων Ῥῶς ἐμήνυσεν ἄφιξιν, γεγενημένους ἤδη κατὰ τὸν Μαυροποταμον. καὶ ὁ μὲν βασιλεὺς καὶ τῆς ἐχομένης μετεσχέθη ὁδοῦ, καὶ δι' ἣν ταύτην ἀφῆκεν, οὐδὲν βασιλικὸν καὶ γενναῖον εἰργάσατο, *Oryphas Imperatori, cum nihil ex iis quae animo conceperat, esset exsecutus, impiorum Rossorum aduentum nunciat: esse eos iam ad Mauropotamum: et Imperator a suscepto itinere reuertit, nihilque eorum, de quae inierat iter imperatorie atque fortiter peregit.* Ergo in diuersis sententiis considerandum nobis est, quae veritati magis conueniat. Μαυροποταμὸς in codice Parisino Μέλας ποταμὸς, vt Ioannes Boiuinus ad Nicephorum

(6) l. c. (7) p. 463. (8) p. 535.

ram Gregoram annotauit, qui Μέλανα quoque a Cantacuzeno dici adiecit. Vtrumque nomen *Nigrum fluuium* significat. Hic fluuius, vt ex Nicephoro Gregora (9) et Niceta Acominato (10) intelligo, ad occidentem Chersonesi Thracicae in Aegaeum mare exonerabatur. Erat etiam alius Μέλας ποταμὸς in Pamphilia, qui item dici potuit Μαυροπόταμος in Pamphylia tamen Imperator ad Mauropotamum esse non potuit, cum nuncius perferretur de Russis, is enim fluuius fere ipsis in finibus imperii Romani fuit, quod contrarium est iis, qui tradunt haud ita longe ab vrbe abfuisse Imperatorem et celeriter aduolasse. Ergo Mauropotamus Thraciae tantummodo a nobis spectari debet. Qui Russos ad Mauropotamum iam fuisse tradunt, cum ad Imperatorem nunciaretur, hi quidem quid dicerent, non satis pensi habuere. Necesse enim fuit, vt ipsam Constantinopolin praeteruecti et tot promontaria Thraciae, occidentem petierint, nulla quod appareat caussa et ratione. Et qui potuit Oryphas hostes cernere ad Byzantium, nec monere tamen Imperatorem, nisi cum cursu satis longo deuecti essent ad littora Thraciae occidentalia? Praeterea iidem scriptores a se dissentientes tradunt, Russos intra Ἱερὸν fuisse, cum Imperator cognito nuncio reditum pararet. Quasi Russi ex mari Aegaeo aduenissent et primum stationem habuissent ad Mauropotamum deinde Byzantium praeteruecti Ἱερὸν intrassent, ita narrationem suam persequuntur isti scriptores, vt neque pes neque caput rei appareat. Quae cum cernerem, credidi initio, omnino expeditionem Rossicam fuisse

 nullam,

(9) p. 254. (10) p. 43.

nullam, ſed Saracenos et piratas a Rhoſo vrbe Ciliciae cum claſſe profectos ſuſosque ad Conſtantinopolim occaſionem eius expeditionis comminiſcendae, nominis conuenientia praebuiſſe. Auxit ſuſpicionem locus quidam ex Synopſi Georgii Monachi, quem poſtea producam. At cetera deinde inter ſe contendens, Leonem Grammaticum et Georgium Monachum corruptos eſſe ſtatuit et ſcribendum vtroque loco eſſe γενομένῳ αὐτῷ κατὰ τον Μαυρον ποταμὸν, vt ſit idem ſenſus qui in Symeone Logotheta, Imperatori, cum eſſet ad Mauropotamum, aduentum Roſſorum nunciatum fuiſſe.

Poſtquam hos ſcopulos ſuperaui, veritatem rei magis ſequar, quam auctorum meorum verba. Anno nono Michaelis autumno, Roſſi in Ponto res geſſerunt. Quibus cum Imperator ſibi videretur ſatis idoneam claſſem et Ponticas copias oppoſuiſſe, vt in ignoto hoſte incautior, anno poſt maiori cum claſſe aduerſus Saracenos profectus eſt, qui tum in Aegaeo mari potentes erant. Vrbi Imperator praeſidio reliquit Ὠορύφαν vt Leo, vt Symeon Ὀρύφαν. Is ipſe eſt, qui a Conſtantino Porphyrogenneta (1) et Continuatore Theophanis (2) ſub Baſilio Imperat. nomine Nicetas cognomento Ὀρύφας Patritius et Drungarius rei naualis fuiſſe dicitur. Eadem in dignitate ſub Michaele Imp. fuit, vt Nicetas Dauid Paphlago (3) et Symeon Logotheta (4) teſtantur, tum in Imperatorem tum in Baſilium collegam ſumma fide, quare etiam poſtea Baſilius Imper. eidem vrbem

(1) De A. F. p. 88. (2) In Baſilio p. 179. (3) In vita Ignatii p. 963 (4) p. 453.

vrbem tradidit, quotiens in expeditionem exire solebat. Imperator sua cum classe in mare Aegaeum deuectus stationem habebat ad Mauropotamum, vbi, illo ipso Imperatore, Theoctistus Saracenos nauali praelio vicerat, teste Georgio Monacho. (5) Igitur etiam tunc Saracenica classis exspectata est, nisi si Imperator aliquam maiorem expeditionem in Creta, vt aliquanto tempore post, aut in aliis Saracenicis littoribus animo agitauit. De classe Agarenica, cui sese obiecerit, iustam caussam coniectandi habeo, quod Imperator audito Russos adesse ad vrbem, classem suam non reduxit, sed solus aduolauit ad repellendos vrbanis auxiliis hostes. Verum etiam tenuis belli Saracenici memoria exstat in epitome seu argumentis Georgii Monachi, ex quibus apparet, nos Georgium hunc integrum non tenere. Sic enim hoc loco, vbi de bello Russico: ὅτι εἰς τὸν καιρὸν Μιχαὴλ καὶ Θεοδώρας ἦλθον Ἀγαρινῶν πλοῖα, ὡς σ' ἐν τῇ Κωνσταντίνου πόλει καὶ χάριτι τῆς Θεομήτορος ἀπῆλθον ἄπρακτοι καὶ διαφθαρμένοι, *tempore Michaelis et Theodorae* (de Theodora quidem error est,) *venerunt naues Agarenorum ducentae Constantinopolin et gratia Matris Dei recesserunt, nulla re gesta et clade accepta.* Ex ducentarum nauium et miraculi mentione colligo, Scholiastam Georgii res Saracenas et Russicas eodem in loco separatim a Georgio editas confudisse.

His cum Imperator ageret, Oryphas trepidos nuncios misit, Russos qui in Ponto res gesserant, Vrbem oppugnatum venire et in Hiero esse. Ἱερὸς κόλπος sinus

(5) In vita Ignatii p. 529.

ſinus Boſpori Thracici in Aſiae littoribus fuit, ex quo ſinu petebatur Pontus. Ex Ponto autem naues Cyaneas inſulas et Coracium promontorium Chelasque praeteruectae hunc in ſinum ſeſe recipiebant. Dionyſius Byzantius: *poſt Chelas Hieron a Byzantiis quidem poſſeſſum, ſed commune receptaculum omnium nauigantium.* Anonymus auctor quem Arrianum quidam falſo ediderunt, *in* periplo Ponti Euxini, (6) oſtendit CXX. ſtadia inter Conſtantinopolin atque Hierum interfuiſſe: τοῦτο δὲ τὸ χωρίον ἀφετήριόν ἐστι τῶν εἰς τὸν πόντον πλεόντων, *ab hoc ſinu ſoluunt, qui in Pontum nauigant*: Totidem ſtadia Polybius (7) Boſporo in longitudinem attribuit et in Ponti ſinibus τὸ Καλούμενον Ἱερὸν collocat. Commodiſſime ſitum Hieri videbis in Petri Gyllii tabula Boſpori Thracici. (8) Ruſſi igitur ducentis lintribus Hierum ingreſſi, per commoditatem ſtationis excurſiones faciebant et multa cum ſtrage Chriſtianorum deſaeuiebant; vt Symeon Logotheta et Leo Grammaticus teſtantur. Sed haec curatius explicat Nicetas Dauid Paphlago in vita Ignatii Patriarchae, (9) cuius verba, cum ſcrupulus de tempore a Niceta iniectus, a nobis ſupra exemtus eſt, huc apponam:

Κατ' ἐκεῖνον γὰρ τὸν καιρὸν τὸ μιαιφονώτατον τῶν Σκυθῶν ἔθνος οἱ λεγόμενοι Ῥῶς, διὰ τοῦ Εὐξείνου πόντου προσκεχωρηκότες, τῷ Στε-

Ea tempeſtate Scytharum gens crudeliſſima, Roſſi dicti, ab Euxino Ponto digreſſi in Stenum et omnes regiones, omnia monaſteria praedis agen-

(6) p. 1. edit. Hudſon. (7) p. 427. (8) Confer eundem Gyllium T. II. Imperii Orientalis Banduriani p. 324. (9) p. 964. ed. Hard.

νῶν, καὶ πάντα μὲν χωρία, πάντα δὲ μοναστήρια διηρπακότες ἔτι δὴ καὶ τὸν τοῦ Βυζαντίου περιοικίδων κατέδραμον νησίων σκεύη, μὲν πάντα ληϊζόμενοι καὶ χρήματα, ἀνθρώπους δὲ τοὺς ἁλόντας πάντας ἀποκλείνοντες. Πρὸς οἷς καὶ τῶν τοῦ Πατριάρχου μοναστηρίων βαρβαρικῷ καταδραμόντες ὁρμήματι καὶ θυμῷ, πᾶσαν μὲν τὴν εὑρεθεῖσαν κτῆσιν ἀφέλοντο, εἴκοσι δὲ καὶ δύο τὸν γνησιμωτέρων αὐτοῦ κεκρατηκότες οἰκετῶν, ἐφ' ἑνὶ προχαντῆρι πλοίου τοὺς πάντας ἀξίναις κατεμέλισαν.

agendis peruagati, etiam per insulas circa Byzantium excurrerunt, supellectilem omnem depraedantes et argentum, homines autem, quos ceperant, necantes: praeterea Patriarchae monasteria barbariis furore et impetu incursantes, omni supellectili, quam inuenerant, direpta, viginti atque duos ex fidissimis eius captos vno in nauigii trochantere securibus percusserunt vniuersos.

Stenum dixit Nicetas more veteri Bosporum ipsum inter Pontum et CPlin: alioqui illis temporibus Στενὸν a Byzantiis vocabatur Europaeum Bospori littus. (10) Nam ita etiam Nicetas alibi (1) πρὸς τοῖς δεξιοῖς τοῦ Στενοῦ μέρεσι, *in dexterioribus regionibus Steni* seu in regionibus Asiaticis ad Bosporum. Erant in Bosporo insulae atque in his αἱ Πριγκίπειοι νῆσοι προσαγορευόμενοι, Πλάτη, Υατρὸς, καὶ Τερέβινθος, *insulae Principes dictae, Plate, Hyatros et Terebinthus.* (2) Iis in insulis Ignatius Patriarcha, cum adhuc monachus

esset,

(10) Anselmus Bandurius in Constantinum de A. J. p. 134. (1) p. 947.
(2) Nicetas Paphlago p. 950.

esset, ex paternis facultatibus fratrum consensu monasteria excitauerat, post paullo ante mortem e regione harumcce insularum coenobium Michaelis in continenti aedificauit. Postquam a patriarchatu deiectus est, iussus est Terebinthum in coenobium suum concedere, hinc in exilium deportatus est Mitylenen: ab exilio reuocatus Terebinthi tum maxime agebat, cum Rossi excursiones suas facerent in Steno. Laeta res in vrbe fuit, tum Nicetae Oryphae drungario, tum aliis, qui Photio studebant, cum Ignatii possessiones ferri agique nunciarentur: ipsum Rossorum manus euasisse, dolori fuit. Ignatius autem, vt ait Nicetas Paphlago, εὐχαριστῶν καὶ ταῖς προσευχαῖς ἀδιαλείπτως πρὸς τὸν θεὸν ἀνακινόμενος, τὴν παρ' αὐτοῦ κρίσιν καὶ βοήθειαν ἐπεκαλεῖτο, ματαίαν δὲ πᾶσαν τὴν ἀπὸ τῶν κρατεῖν δοκούντων ἡγοῦντο σωτηρίαν, *Deo gratias agens et orationibus assidue intentus, a Deo iudicium et auxilium exspectabat, vanam omnem ab his, qui multum posse videbantur, salutem iudicabat.* Neque tantummodo possessiones Ignatii pessumdabantur, sed familiares quoque eius et domestici, quotquot in manus hostium venerunt, male mulctati sunt et securi percussi ἐφ' ἑνὶ τροχαντῆρι πλοίου. Est autem τροχαντὴρ in homine quidem ossium circa femoris caput prominentia, in naue alterutrum latus in proram aut puppim exsurgens. Erat Terebinthi μέσον πλατείας τῆς νήσου ναὸς τοῖς τεσσαράκοντα μάρτυσιν, αὐτοῦ δὲ ἐχόμενα τῆς θεομήτορος εὐκτήριον, τούτου τὴν τράπεζαν οἱ Ῥῶς, τὴν νῆσον πορθοῦντες κατέβαλον εἰς γῆν, Ἰγνάτιος δὲ ταύτην αὖθις ἀνεθρόνισεν, *in medio latitudinis insulae aedes quadraginta martyrum et adiunctum aedi oratorium Matris Dei: huius aedis aram, Rossi, insulam vastantes in ter-*

ram

rum disiecerunt, Ignatius vero eam restituit, vt ait Nicetas Paphlago. (3) Inde Photius Patriarcha Ignatio molestiam creauit, quod sacerdotio exutus, aram dedicare esset ausus.

Haud multum temporis populationibus Hieri Stenique impensum est: inde Rossi Byzantium deuecti vrbem ducentis nauibus incluserunt. Symeon Logotheta (4) περικυκλοῦσιν τὴν πόλιν, vbi Combefisius improuide *vrbem vallo cingunt*. Nam ab his ducentis lintribus tantummodo mari vrbs clausa est, inde a Propontide vsque ad Chrysoceras e regione Blachernarum. Maximus vrbi terror fuit, cum non appareret, quemadmodum Imperator posset intrare: tamen ille solus per stationes nauium hostilium in vrbem euasit. Cum exercitus in propinquo non esset, neque multum auxilii in vrbana multitudine exstaret, Imperator perfugium ad diuinam opem recepit. Continuator Theophanis auctor est, Rossos Φωτίου τὸ θεῖον ἐξιλεωσαμένου θείας ἐμφορηθέντας ὀργῆς, *Photio Patriarcha Deum exorante, diuina mulctatos vindicta*, domum rediisse. At Leo Grammaticus prolixe narrat, Imperatorem cum Patriarcha templum S. Virginis in Blachernis adiisse, Dei pacem implorasse, et producto μαφορίῳ cum hymnis processisse ad mare. Erat autem *mafortium*, vt Latini corrupta voce dicebant, ὠμαφόριον et μαφόριον, tela, qua caput tegebatur, dependens ad humeros: ea ipsa, qua Calogeri, Graeci atque Russi vtuntur, qua olim mulieres sunt vsae, nunc etiam moniales. (5) Constitutio de monialibus in

 codice

(3) p. 975. (4) Continuator Theophanis p. 121 et alii (5) Vid. Claudius Salmasius ad Vopiscum p. 543.

codice Coisliniano: (6) *vt communio detur monialibus* τὰς ὄψεις τοῖς μαφορίοις κεκαλυμμένας, *vultus contectis suo quibusque majorio.* Maforium S. Virginis Leone Macedone imperante CPlin delatum eſt, cuius rei memoria in Menologio Baſiliano Julii II. celebratur. Nulla iſthic effigies extat in Vrbinatenſi editione, quod pars ea in elegantiſſimo Baſilii Imp. codice temporum *iniuria* periit. At aliis in picturis eiusdem Menologii ſpectari poteſt monachorum et mulierum ſanctarum maſorium, vt S. Theodoſii Coenobiarchae, S. Euthymii Presbyteri, S. Paphnutii S. Melaniae Romanae, S. Domnicae, S. Euphroſynes. Duo fratres Patricii Galbius et Candidus, cum Hieroſolyma peterent, in aedibus *cuiusdam* anus Ebraeae veſtem iſtam S. Virginis depoſitam reperere multosque aegrotos domum illam frequentare ſanitatis cauſſa. Igitur illi arcam huic ſimilem, in qua erat veſtis, ſuppoſuere, at hanc veram arcam ſubreptam furto deportarunt CPlin et in Blachernis dedicarunt. Saepe illa veſte vſi ſunt Imperatores Graeci maximis in diſcriminibus rerum: vt Romanus Lacapenus in Bulgarico tumultu. (7) Eam igitur veſtem Photius Patriarcha ἄκρως, vt Symeon Magiſter ait, vt Leo Grammaticus, ἄκρῳ τῇ θαλάσσῃ προσέβαλε, non totam veſtem, ſed extremitatem eius mari intinxit. Res mira, vt iſti quidem narrant: erat ſumma coeli mariſque tranquillitas, cum repente turbo ortus naues Ruſſorum adflixit: fractae pleraeque, paucae periculum euaſerunt. Cedrenus, ne quid dicam de Ioanne Curopalata Scylitze, qui Cedrenum

(6) In Bernardi Montfauconii Bibliotheca Coisliniana p. 210. (7) Incertus auctor in vita Romani p. 252.

rum descripsit in commentarios suos, tum Zonaras, homines religione tacti, tantum iram numinis et prouidentiam defendendae vrbis Russos sensisse scribunt, nullo miraculi testimonio. Consentiunt tamen cum Incerto Continuatore Theophanis, Rossos non multo post in vrbem misisse legatos, qui baptismum flagitarint et impetrarint.

Atque hunc in modum ipse Photius Patriarcha in epistola encyclica ad Patriarchas orientis Rossorum expeditionem sine miraculi memoria attingit et conuersionem mirifice praedicat. Epistolam e codice Bibliothecae Vallicellanae apud Romam atque ex alio codice Collegii Graecorum Federicus Metius Latine conuertit, Cardinalis Baronius ad A. C. 863. in Annalibus recensuit, Richardus Montacutius Noruicensis Episcopus inter ceteras Photianas epistolas dedit etiam Graece. Non possum praetermittere, quod a Leone Allatio obseruatum est in consensu orientalis et occidentalis ecclesiae: (8) apponam Allatii verba: *Sisinnius Photii epistolam encyclicam, quam in Latinos ille temeritatis ac audaciae plenam exercuerat titulo tantummodo immutato et suo nomine supposito ad reliquos Patriarchas ipsissimis verbis transmisit, homo nequissimus, licet multa in ea contineantur, quae ad Photium et Photiana tempora pertineant, quae ipse non immutauerat: adeo importune iste, verborum magistri obseruator religiosus ineptit: nisi etiam dicamus, nomen Sisinnii ab aliis illi epistolae appositum fuisse.* De Sisinnii Patriarchae nomine supposito, etiam Baronius Cardinalis ostendit sibi

 in

(8) p. 606.

in mentem venisse. Quae autem Allatius tunc cum his dicat Photianis temporibus magis concordare, quam Sisinnii Patriarchae, equidem non video. Nam quae Photius de Latinorum episcoporum ad orientales ecclesias epistola encyclica habet, ea, teste Baronio, in Sisinnii epistola sunt praetermissa, et haec vero sola tantummodo ad istam Photii caussam pertinent. Si forte res Bulgaricas Leo respexit, quae eadem in epistola attinguntur, illae vero ad Photium vel maxime pertinuerunt, tamen iisdem verbis Sisinnius Patriarcha etiam post Photium de Latinorum ambitione conqueri iure suo potuit. De epistola satis, rem ipsam videamus. Postquam de Bulgaris, dixerat Photius, qui Christo nomen dederant, ita fatus est: (9).

Καὶ γὰρ οὐ μόνον τὸ ἔθνος τοῦτο, τὴν εἰς Χριστὸν πίστιν τῆς προτέρας ἀσεβείας ἠλλάξατο, ἀλλά γε δὴ καὶ τὸ παρὰ πολλοῖς πολλάκις θρυλλούμενον καὶ εἰς ὠμότητα καὶ μιαιφονίαν πάντας δευτέρους ταττόμενον τοῦτο δὴ τὸ καλούμενον το Ῥῶς, οἱ δὴ καὶ κατὰ τῆς Ῥωμαικῆς ἀρχῆς τοὺς πέριξ αὐτῶν δουλωσάμενοι κἀκεῖθεν ὑπέρογκα φρονηματισθέντες χεῖρας ἀντῆραν. ἀλλ' ὅμως νῦν καὶ οὗτοι

At non solum gens ista fidem in Christum cum pristina impietate commutauit, verum etiam populus apud multos saepe sermonibus et fama celebratus et tum ob crudelitatem tum ob sanguinis humani sitim omnes alios populos post se relinquens, Rossi, inquam, qui postquam vicinas in circuitu gentes sub iugum miserunt, atque ob eam caussam superbia elati magnifice de se sentientes contra Romanum imperium manus

(9) P. 58.

τὴν τῶν Χριστιανῶν καθαρὰν καὶ ἀκίβδηλον θρησκείαν τῆς Ἑλληνικῆς καὶ ἀθέου δόξης, ἐν ᾗ κατείχοντο πρότερον, ἀντηλλάξαντο, ἐν ὑπηκόων αὐτοῦ καὶ προξένων τάξει αὐτῇ τῆς πρὸ μικροῦ καθ' ἡμῶν λῃστείας, καὶ τοῦ μεγάλου τολμήματος ἀγαπητῶς ἐγκαταστάντες. Καὶ ἐπὶ τοσοῦτον αὐτοὺς ὁ τῆς πίστεως πόθος καὶ ζῆλος ἀνέφλεξεν (Παῦλος πάλιν βοᾷ, εὐλογητὸς ὁ Θεὸς εἰς τοὺς αἰῶνας) ὥστε καὶ ἐπίσκοπον καὶ ποιμένα δέξασθαι, καὶ τὰ τῶν Χριστιανῶν θρησκεύματα διὰ πολλῆς σπουδῆς καὶ ἐπιμελείας ἀσπάζεσθαι. Τούτων οὖν οὕτω τῇ τοῦ φιλανθρώπου Θεοῦ χάριτι, τοῦ πάντας ἀνθρώπους θέλοντος σωθῆναι καὶ εἰς ἐπίγνωσιν ἀληθείας ἐλθεῖν, τῶν παλαιῶν αὐτοῖς δοξασμάτων μετατιθεμένων καὶ τὴν εἰλικρινῆ τῶν Χριστιανῶν πίστιν ἐκείνων ἀλλασσομένων, εἰ διαναστάιη καὶ ἡ ὑμετέρα ἀδελφότης συμπροθυμηθῆναι καὶ συγκατεργάσασθαι εἰς τὴν ἐκκοπὴν καὶ καῦσιν τῶν παγα-

manus sustulerunt, nunc tamen et ipsi Christianorum puram et incorruptam religionem cum pagana et impia superstitione, qua antea tenebantur, commutarunt, atque veluti obsequentes amicosque sese gerunt, cum paulo ante nos latrociniis suis exagitarunt magnumque facinus aggressi sunt. Et adeo eos fidei desiderium amorque incendit, (Paulus hic iterum exclamat: benedictus sit Deus in secula) ut etiam et episcopum et pastorem susceperint, cultusque Christianos multis studiis et magna cura complectantur. Hi cum eum in modum gratia misericordis Dei, qui omnes homines seruari vult et ad cognitionem veritatis peruenire, priscos suos errores deposuerunt et eorum in locum sinceram Christianorum fidem susceperunt, si vestra fraternitas simul sese excitet ad rem communi studio iuuandam excindendosque et exurendos stolones, in domino Iesu Christo vero Deo nostro confidimus fore,

φυάδων ἐν Κυρίῳ Ἰησοῦ Χρι-
στῷ τῷ ἀληθινῷ Θεῷ ἡμῶν
πεποιθότες ἐσμὲν, ὅτι τὸ ποί-
μνιον αὐτοῦ, ἐπὶ πλέον ἔτι
μᾶλλον αὐξηθήσεται καὶ πλη-
ρωθήσεται τὸ εἰρημένον, ὅτι
Εἰδήσουσί με πάντες ἀπό μι-
κροῦ ἕως μεγάλου αὐτῶν.

re, *vt grex eius longe adhuc magis crescat et vt impleatur*, *quod dictum est*, *cognoscent me omnes inde a paruo ad magnum.*

Nouam adieci versionem, quod neque Metianam probare me posse sensi, neque Montacutianam. Ipso in ingressu offenderunt: Metius, vt sensus sit obscurus, Montacutius, vt sit nullus. De isto quidem non opus est vt dicam: hic cum in MS. Bodleiano esset scriptum τορῶς, varie sese torsit et in margine quidem τὸ Ῥῶς ex coniectura quam verissime apposuit, ipsa autem in interpretatione: *sed insuper quod multorum vocibus decantatur*, *cum post se omnes*, *quod crudelitatem attinet et sanguinis fundendi cupiditatem*, *in secundis reliquerint et illud*, *quod vocatur Rhos*, *apud eos ita obtinuerit*, *vt Romani imperii subditos quaquauersum proximos in seruitutem redigerent.* Nimirum, vt ex subiecta nota apparet, Montacutius non sensit, de Russis hoc loco dici atque isthuc Ρως explicuit de classico Bulgarorum. Subiecit quidem aliquid etiam ex Ioanne Curopalata de Rossis, sed vt nihil vsquam toto in sermone eius cohaereat. Cum Metius ista τοὺς πέριξ αὐτῶν δουλωσάμενοι interpretatus est, *infinitos populos sibi subiecerunt*, id nimis large et inconsulte factum est. Quo anno Photius epistolam scripserit, ex Guntheri et Theutgadi episcoporum mentione intelli-

intelligere mihi videor. Non ſane ante A. C. 863. ad Photium Patriarcham querelas de Pontificis Romani iniuriis deferre illi potuerunt: eo enim anno ille a cathedra Colonienſi, hic a Treuirenſi deiecti ſunt. Teſtes habeo Annales Fuldenſes et Sigebertum Gemblacenſem. Itaque Baronio adſenſum praebere non poſſum, cum illo ipſo anno epiſtolam Photii ſcriptam fuiſſe contendit. Immo ſcripta eſt A. C. 866. Nam, cum Michael Imperator Baſilium collegam ſalutaſſet, hoc eſt A.C.866. teſte Niceta Paphlagone,(10) Photius Patriarcha Michaeli Imp. perſuaſit, vt Synodus cogeretur, quae in Pontificem Rom. pronuntiaret ſententiam. Ceterum etiam Nicetas quaſi digito nobis demonſtrat Guntherum et Theutgaudum epiſcopos, cum ſic ait: αὐτὸς δὲ τῆς ἐμφύτου κατὰ τοῦ ἁγίου μηνίδος εἴχετο καὶ τῶν γνησίων αὐτοῦ θεραπευτῶν, μᾶλλον δὲ νόθων, ὅσοις ἠδύνατο, κλέπτων καὶ ταῖς ματαιότησι τῶν ἀξιωμάτων δελεάζων, δι' αὐτῶν τὴν πτέρναν τοῦ ἀναιτίου ἐπετήρει. *Ipſe autem* (Photius) *inſito odio in ſanctum* (Nicolaum P. R.) *ferebatur et Germanos eius ſectatores* (epiſcopos occidentales) *immo potius ſpurios* (quia contra P. R. nitebantur) *quotquot poterat, furtim ad ſe trahebat, per quos innocentis calcaneo inſidiabatur.* Acta ſynodi non modo ad Ludouicum Pium Imp. atque Ingelbertam miſſa ſunt, ſed etiam per Zachariam Cophum Chalcedonenſem Archiepiſcopum in Italiam. Quamobrem Annales Fuldenſes ad A.C.868. *Nicolaus Pontifex Epiſcopis Germaniae duas deſtinauit epiſtolas, vnam de factionibus Graecorum, alteram de Theutgaudi et Gunthavii Epiſcoporum depoſitione, in qua refert*

(10) p. 981.

eos septem capitalia crimina commisisse: in Synodo Episcopi nonnulla capitula de vtilitate ecclesiastica conscribentes, Graecorum ineptiis congrua ediderunt responsa. Ista sub Maium mensem recitata sunt Vormatiae praesente Ludouico Imp. Vides duas caussas, vt erant in Photii epistola, a Nicolao coniungi. Et exstant Nicolai P. R. epistolae, altera, qua criminationibus Photii respondet x. Kal. Decembris, altera de Theutgualdi et Gunthatii caussa pridie Kal. Nouembris, vtraque Indictione prima. (1) Ex Indictione vides scriptas esse A. C. 868. et demum A. C. 869. Vormatiae esse recitatas. In altera Nicolaus Photium disertis verbis incessens: *illa nos commouere videntur, quae nobis, immo vniuersae occiduae parti a Graecorum Imperatoribus Michaele scilicet et Basilio et ab his qui sibi parent, nequiter ingeruntur.* Tum vero recenset illa ipsa capita, quae in Photii encyclica exstant, quae tum etiam Ratramnus Corbeiensis monachus aggressus est libro, qui a Dacherio est editus, (2) cuius hoc est principium: *Opposita quibus Michael et Basilius Imperatores Romanam ecclesiam infamare conantur, vel falsa, vel haeretica, vel superstitiosa fore cognoscuntur.* Hic ordo est rerum per encyclicam Photii motarum, qui nos plane aduersus Baronii sententiam confirmat. Si igitur A. C. 866. scripta est epistola, dicat quispiam, quid de Bulgaris fiet, quorum in ea facta est mentio? Vix duos annos in ecclesia perseuerasse scribit Photius, inde iam ad Latinos transiisse: eosdem ve-

ro

(1) In Concil. Hard. T. V. p. 286. 307. et in Nicolai P. R. epistolis.
(2) Dacherii Spicilegium Script. T. I. p. 63. edit. postremae. Confer Nicolai P. R. epistolam ad Hincmarum de caussis odii Graecorum p. 309. ed. Hard.

ro ſupra demonſtrauimus A. C. 859. a Photio fuiſſe conuerſos. Regino Prumienſis, Eggehardus Vragienſis, Annales Francorum Fuldenſes A. C. 867. tradunt Ludouicum Pium Imp. Bulgaris petentibus Archiepiſcopum cum aliis Epiſcopis et Presbyteris dediſſe, *ſed Romani*, inquiunt, *Epiſcopi iam tum totam terram illam baptizando et praedicando repleuerant*. Quare nihil obſtat, quin A. C. 861. ad Romanam eccleſiam Bulgari ſeſe aggregarint. Neque vero hoc Baronii ſententiae ſuffragatur, neque noſtram vlla parte conuellit: iisdem enim verbis Photius A. C. 866. de Bulgaris ſcribere potuit, at de bello Roſſico A. C. 863. non potuit, quod A. C. 865. geſtum eſſe demonſtrauimus.

Hanc Roſſicam expeditionem recenti memoria celebrat Photius. Id vero nobis percommode accidit, qui A. C. 866. poſt XXVI. Maii cum Baſilius collega factus eſt, epiſtolam ſtatuimus ſcriptam. Sequitur deinde Epiſcopum a Photio Ruſſis eſſe miſſum A. C. 865. illico poſt cladem Ruſſorum. Neque hanc partem epiſtolae vel verbo refellit Epiſcopus Romanus, cum eum quae in Ruſſia fierent, fugere non potuere, Bulgaris frequenter Romam et in Germaniam commeantibus. Quantum ille Photio inſultaſſet, vt erat acer, ſi ea in re aduerſam tantae gloriationi eius famam tenuiſſet. Tamen auctor Knigae Srepennaiae negare videtur, Roſſos eo tempore eccleſiae fuiſſe aggregatos, et eorum in locum Cumanos ſubſtituit, neſcio quos: multa quoque permiſcet non admodum conſentanea veris. Nihil Photius de miraculo euangelii in ignem coniecti, nihil idem de

Archiepiſcopo, qui mitti non potuit, niſi vbi adeſſent Epiſcopi inferiori gradu. Epiſcopum a Photio miſſum eſſe Roſſis quibusdam petentibus, et ποιμένα ſeu Presbyterum non nego, habeo enim auctorem ipſum Photium. Et cum Roſſi omnia tribuunt Photio Patriarchae, vt baptiſmum Olgae, vt alia, quae Photii aetati non conueniunt, ſequitur, hanc eius magnam in eccleſia *Ruthenica* auctoritatem ab nulla alia ſtirpe repeti, quam quod primus eorum Epiſcopus Photianarum partium fuerit, non Ignatianarum. Et quamquam fuit iſthuc tempus, cum de Photio acerbius ſtatueretur, tamen paullatim iſtis factionibus exſtinctis, et Ignatii et Photii memoria in honore fuit, vt apparet ex epiſtola *Synodi Nicaenae* ad Alexandrinam eccleſiam. (3) Miraculum vero iſthuc ad Baſilii Imp. initia a Graecis refertur, cum iam Ignatius eſſet reſtitutus, Photio pulſo. Habemus teſtem Conſtantinum Imp. qui res Leonis patris et Baſilii aui congeſtas anonymo illi Theophanis Continuatori deſcribendas tradidit. Is ita memoriae prodidit: (4) miſiſſe Baſilium Imp. ad Ruſſos aurum, argentum et ſericas veſtes magna copia, foedusque pepigiſſe perſuaſiſſeque vt Archiepiſcopum ab Ignatio Patriarcha reciperent: Archiepiſcopum eo veniſſe, ϗ ἄρχοντα τοῦ γένους conuocaſſe ſenatores et proceres in concilium praeſidentemque quaeſiuiſſe ex Archiepiſcopo, quam doctrinam adferret: hunc oſtendiſſe euangelium et miracula Ieſu Chriſti explicaſſe: at omnes in concilio poſtulaſſe, vt librum coniiceret in ignem: id vbi Dei pacem et opem implorans fecit, igne in cineribus ſubſidente illaeſum

(3) In Montfauconii Bibliotheca Coisliniana p. 99. (4) p. 211.

laesum librum repertum super fauilla: ergo omnes Russos baptismum recepisse. Sic Cedrenus, (5) Zonaras, (6) vterque ex isto anonymo, at ex alio auctore Michael Glycas. (7) Zonarae Synopsis, (8) ὅπως τὸ ἔθνος τῶς Ῥῶς εἰς ἐπίγνωσιν ἦλθε Χριστοῦ. Fragmentum Graecum anonymi e MS. Colbertino ab Anshelmo Bandurio editum (9) hanc famam confirmat. Cum ἀκέφαλον est, multa nos fortassis ignorare oportet: nam inde demum narratio incipit, venisse Romam quatuor legatos, insignes viros, qui, quae ad religionem pertinebant, accurate perdiscerent; consideratis omnibus et Pontifice Romano conuento rediisse, quaeque viderant retulisse πρὸς τὸν μέγαν Ῥῆγα, *ad magnum Regem.* Interim τοὺς σὺν ἐκείνῳ ἄρχοντας, maxime eos, qui suscipiendae Christianae religionis fuerant auctores, suasisse, vt etiam CPlin legati mitterentur. Veniunt legati in vrbem, (τῷ τότε Ῥωμαίων σκῆπτρα ἰθύνοντι, Βασιλείῳ φημὶ, τῷ ἐκ Μακεδονίας προσερχόντι) ad Imperatorem Basilium Macedonem atque inde omnibus exploratis apud τὸν λαμπρότατον καὶ μέγαν ῥῆγαν *serenissimum et magnum Regem* CPlitanam ecclesiam mirifice extollunt. Ergo rex legatos iterum misit, qui episcopos peterent. Basilius Imp. misit ἀρχιερέα pietate et virtute clarum, et cum eo duos Κύριλλον καὶ Ἀθανάσιον ἐναρέτους καὶ δούλους ὄντας καὶ πάνυ λογιωτάτους καὶ φρονιμωτάτους, *Cyrillum et Athanasium, honestos viros, et tam in Sacra Scriptura exercitatos, quam in humanitatis studiis.* Tum vero de miraculo addit auctor, vt supra ex Continuatore Theophanis

(5) p. 589. (6) p. 173. Tom. II. (7) p. 298. (8) Imperii Orientalis T. II. in Animaduersionibus ad Constantinum de A. I. p. 113.

Byzantii commemorauimus. Ergo de Cumanis nihil est. Nam hi Russi religionem receperunt, ad quos magna munera atque legatos de induciis proferendis misit Basilius Imp. Qui alii quam Kiouienses, quorum arma CPlitani sub Michaele senserant? Ceterum in hoc fragmento nihil absurdi est. Neque repugno de legatis Romam missis: sunt enim his similia, quae de legatis Bulgaricis ad se missis Nicolaus P. R. narrat. Cum autem Bulgari Romanae ecclesiae adiuncti incredibili Graecorum odio flagrarent, mihi admodum fit verosimile auctores eos fuisse Russis, vt Romanae ecclesiae sese potius aggregarent, quam Byzantiae: contra ea principes quosdam, qui a Photio episcopum *receperant*, pro CPlitana ecclesia tetendisse. Archiepiscopus missus videtur, quod iam plures essent collectae ecclesiae et vt episcopum a Photio ordinatum vel dignitate opprimeret. Notae sunt illorum temporum turbae de episcopis a Photio ordinatis, quos Ignatius Patriarcha summa vi loco atque gradu pellebat. Ceterum cum Ignatius A. C. 877. XXIII. Octobris fato functus est, ante eum annum haec accidisse apparet, et quantum ex illis auctoribus, qui exstant, colligere possumus, sunt enim admodum infantes, paullo post auspicia Basilii Imperatoris. Qui Olgam reginam primum, deinde Vladimirum regem christianam religionem suscepisse auctores sunt, vera dicunt, neque cum his pugnantia: nam primi illi ex hac domo receperunt. Cum Oscoldus iam esset initiatus, ab Olego Ingoris duce pagano in ordinem redactus est. Inde profanitas victrix fuit, donec in aulam regnantis domus admissa est religio. Ne cui autem mirum

rum videatur, fuiſſe CPli Slauonicarum linguarum gnaros, qui Ruſſos inſtituere potuerint, a multis temporibus Slauos in vrbe militaſſe recordemur et in rei publicae muneribus verſatos eſſe. Ceterum in Ruſſicis monumentis exſtat memoria templi S. Eliae quod Kiouiae fuit temporibus Ingoris regis, nullo alio magis tempore conditum, quam hoc, quod illuſtramus. Cum autem Photius de Ruſſis ſic ait: *vicinos in circuitu populos ſub iugum miſiſſe et propterea animis fuiſſe elatos*, ea primum quidem vetuſtioris nominis Roſſici, quam vulgo ab omnibus ſcriptoribus proditur, et quidem Kiouienſibus tributi teſtificatio eſt, tum rerum magnarum quae a Kiouienſibus ante Michaelem Imp. geſtae ſunt, illuſtris memoria. Populos autem puto dici Criuizos, Lenzininos, alios ad Pripelium, quos Oſcoldus deuicerit. Cum Graeci Scriptores tantummodo vnum vel regem vel principem edunt, qui illis temporibus Kiouiam tenuerit, Rutheni autem duos nominant, Oſcoldum et Dirum, alio loco demonſtrabo, Graecos vera tradidiſſe, Ruthenos nomen dignitatis *Diar* Oſcoldo tributum, voce obſoleta offenſos, pro principis alterius nomine perperam edidiſſe.

OBSER-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE IN RVSSIA INSTITVTAE.

ECLIPSES SATELLITVM IOVIS,

OBSERVATAE IN IMPERIALI SPECVLA ASTRONOMICA, QVAE PETROPOLI EST,

Per integrum annum 1738.

REFERENTE

Jos. Nic. De L'Isle.

Obseruationes quae hic recensentur, vti annis praecedentibus factum est, saepius a diuersis obseruatoribus, variisque tubis institutae sunt. Quod ad me attinet, tubum optimum Catadioptricum 5. pedum, ex Anglia mihi comparatum, semper adhibui. D. Heinsius autem, qui iam ab anno praecedente hisce obseruationibus incumbere coepit, consuetis meis tubis vsus est; nunc praestantissimo Campaniano 15. pedum tubo, nunc altero 23. pedum. Tertius vero obseruator et in istis obseruationibus iam a me sufficienter exercitatus, nunc isto nunc illo ex iisdem tubis vsus est. Quandoque etiam, quamuis raro, vel ille, vel D. Heinsius, tubum Newtoniamm 7. pedum, qui inter Academiae instrumenta numeratur, adhibuerunt. Tempus autem verum, ex motu 3 vel 4. horologiorum, quae optime inter se concordabant, fere semper deductum fuit.

1738. n. st.	Tempus verum. h.	′	″	
		46	18	eadem, tubo 23. pedum.
		46	37	- - tubo Catad. 5. pedum coelo serenissimo.
18	7	44	55	Immersio secundi, tubo Camp. 15 pedum.
		45	20	- - tubo Catad. 5. pedum. Ioue non satis alto.
	12	12	23	Immersio primi, tubo Camp. 15. pedum.
		12	43	- - tubo 23. pedum.
		12	51	- - tubo Newtoniano 5. pedum
25	10	26	49	Immersio secundi, tubo Camp. 15. pedum.
		27	11	eadem tubo Catad. 5. pedum: coelo sudo.
	14	9	23	Immersio primi, tubo Camp. 15. pedum.
		9	33	- - tubo reflectente 5. pedum.
		9	42	- - tubo Newtoniano 7. pedum. Coelum serenum.
27	8	38	32	Immersio primi tubo 23. pedum.
		38	43	- - tubo Catad. 5. pedum: coelo sudo.
Oct. 2.	13	7	0	Immersio secundi, tubo 23. pedum.
		7	7	eadem, tubo Newtoniano 5. pedum: Ioue prope Meridianum versante; coelo sereno.

Immer-

1738. st. n.	Tempus verum. h.	′	″	
9	15	47	2	Immerſio ſecundi, tubo Catad. 5. pedum: coelum quidem ſerenum: ſed ventus nimis validus obſtabat quominus longiores tubos admitteremus.
11	12	31	11	Immerſio primi, tubo Newtoniano 5. pedum: dubia vero intra aliquot minuta ſecunda, ob leuem agitationem tubi a vento, quod etiam tuborum aliorum vſum omnino impediuit.
13	6	59	22	Immerſio primi, tubo Catad. 5. pedum: non ita certa ob nimiam ſatellitis vicinitatem ad diſcum Iouis, quae etiam impedimento fuit quominus alii tubi adhibiti fuerint.
Nou. 12	11	18	8	Primus iam apparebat ab vmbra Iouis liberatus, tubo Catad. 5. pedum. Prima tamen emerſio 8. vel 10. min. ſec. citius accidere potuit: quippe trans nebulam haec obſeruatio peracta fuit.
16	5	12	54	Tertius ſatelles iam ex vmbra Iouis emerſus videbatur, tubis Camp.

15 ped.

Byzantii commemorauimus. Ergo de Cumanis nihil est. Nam hi Russi religionem receperunt, ad quos magna munera atque legatos de induciis proferendis misit Basilius Imp. Qui alii quam Kiouienses, quorum arma CPlitani sub Michaele senserant? Ceterum in hoc fragmento nihil absurdi est. Neque repugno de legatis Romam missis: sunt enim his similia, quae de legatis Bulgaricis ad se missis Nicolaus P. R. narrat. Cum autem Bulgari Romanae ecclesiae adiuncti incredibili Graecorum odio flagrarent, mihi admodum fit verosimile auctores eos fuisse Russis, vt Romanae ecclesiae sese potius aggregarent, quam Byzantiae: contra ea principes quosdam, qui a Photio episcopum *receperant*, pro CPlitana ecclesia tetendisse. Archiepiscopus missus videtur, quod iam plures essent collectae ecclesiae et vt episcopum a Photio ordinatum vel dignitate opprimeret. Notae sunt illorum temporum turbae de episcopis a Photio ordinatis, quos Ignatius Patriarcha summa vi loco atque gradu pellebat. Ceterum cum Ignatius A. C. 877. XXIII. Octobris fato functus est, ante eum annum haec accidisse apparet, et quantum ex illis auctoribus, qui exstant, colligere possumus, sunt enim admodum infantes, paullo post auspicia Basilii Imperatoris. Qui Olgam reginam primum, deinde Vladimirum regem christianam religionem suscepisse auctores sunt, vera dicunt, neque cum his pugnantia: nam primi illi ex hac domo receperunt. Cum Oscoldus iam esset initiatus, ab Olego Ingoris duce pagano in ordinem redactus est. Inde profanitas victrix fuit, donec in aulam regnantis domus admissa est religio. Ne cui autem mi-

rum

rum videatur, fuisse CPli Slauonicarum linguarum gnaros, qui Russos instituere potuerint, a multis temporibus Slauos in vrbe militasse recordemur et in rei publicae muneribus versatos esse. Ceterum in Russicis monumentis exstat memoria templi S. Eliae quod Kiouiae fuit temporibus Ingoris regis, nullo alio magis tempore conditum, quam hoc, quod illustramus. Cum autem Photius de Russis sic ait: *vicinos in circuitu populos sub iugum misisse et propterea animis fuisse elatos*, ea primum quidem vetustioris nominis Rossici, quam vulgo ab omnibus scriptoribus proditur, et quidem Kiouiensibus tributi testificatio est, tum rerum magnarum quae a Kiouiensibus ante Michaelem Imp. gestae sunt, illustris memoria. Populos autem puto dici Criuizos, Lenzininos, alios ad Pripelium, quos Oscoldus deuicerit. Cum Graeci Scriptores tantummodo vnum vel regem vel principem edunt, qui illis temporibus Kiouiam tenuerit, Rutheni autem duos nominant, Oscoldum et Dirum, alio loco demonstrabo, Graecos vera tradidisse, Ruthenos nomen dignitatis *Diar* Oscoldo tributum, voce obsoleta offensos, pro principis alterius nomine perperam edidisse.

OBSER-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE IN RVSSIA INSTITVTAE.

ECLIPSES SATELLITVM IOVIS, OBSERVATAE IN IMPERIALI SPECVLA ASTRONOMICA, QVAE PETROPOLI EST,

Per integrum annum 1738.

REFERENTE

Jos. Nic. De L'Isle.

OBseruationes quae hic recensentur, vti annis praecedentibus factum est, saepius a diuersis obseruatoribus, variisque tubis institutae sunt. Quod ad me attinet, tubum optimum Catadioptricum 5. pedum, ex Anglia mihi comparatum, semper adhibui. D. Heinsius autem, qui iam ab anno praecedente hisce obseruationibus incumbere coepit, consuetis meis tubis vsus est; nunc praestantissimo Campaniano 15. pedum tubo, nunc altero 23. pedum. Tertius vero obseruator et in istis obseruationibus iam a me sufficienter exercitatus, nunc isto nunc illo ex iisdem tubis vsus est. Quandoque etiam, quamuis raro, vel ille, vel D. Heinsius, tubum Newtonianum 7. pedum, qui inter Academiae instrumenta numeratur, adhibuerunt. Tempus autem verum, ex motu 3 vel 4. horologiorum, quae optime inter se concordabant, fere semper deductum fuit.

1738.

1738. n. st.	Tempus verum h.	′	″	
Ianuar. 3.	4	25	32	Emersio primi, tubo Catad. 5. pedum.
		25	47	eadem, tubo 23. pedum. Coelum serenum.
Febr. 2.	6	34	40	Primus iam emerserat. Prima emersio sub nube; sed statim atque Iupiter ex nube restitutus fuit, tam debili luce apparebat satelles, vt primam emersionem 20. min. sec. citius vix accidisse credendum sit, tubo Campaniano 15. pedum.
Iulii 18.	13	23	55	Immersio primi, tubo Campaniano 15 pedum.
		23	57	Adhuc apparebat idem satelles, tubo 23. pedum.
		24	0	Disparuit, tubo Catad. 5. pedum.
		24	3	Nec amplius apparebat, tubo 23. pedum: coelo sereno et quieto, sed crepusculo nimis ingrauescente.
24.	12	50	5	Emersio tertii, tubo Catad. 5. pedum: coelum sudum.
30.	13	15	53	Immersio secundi, tubo Campaniano 15. pedum.
		15	55	eadem, tubo Catad. 5. pedum.
		16	7	- - tubo reflectente 7. pedum.
31.	14	33	39	Immersio totalis tertii, tubo Campaniano 15. pedum.

eadem

1738. n. st.	Tempus verum. h.	′	″	
		34	1	eadem, tubis Anglicanis 5. et 7. pedum: coelum quidem serenum et quietum, sed crepusculum iam nimis forte ingruebat.
Aug. 3	11	39	28	Immersio primi, tubo Camp. 15. pedum.
		39	38	eadem circiter, tubo 23. pedum.
		39	57	- - tubo Newtoniano 5. pedum.
		39	59	- - tubo Catad. 7. pedum: Nebula quae Iouem circumdabat, aliquantum nocuit.
15	9	58	34	Immersio primi, tubo Catad. 5. pedum.
		58	40	Nondum adhuc certa, tubo 23. pedum, Ioue non satis alto.
24	10	17	13	Immersio secundi, tubo 23. pedum.
		17	41	eadem, tubo Camp. 15. pedum.
		17	43	- - tubo Catad. 5. pedum.
31	13	6	33	Immersio secundi, tubo Camp. 15 pedum.
		6	51	- - tubo reflectente 5. pedum.
		7	11	- - tubo Catad. 7. pedum.
Sept. 2.	13	50	44	Immersio primi, tubo 15. pedum.
		51	0	- - tubo Newtoniano 5. pedum.
7	15	46	7	Immersio primi, tubo Camp. 15. pedum

1738. n. st.	Tempus verum. h.	′	″	
		46	18	eadem, tubo 23. pedum.
		46	37	- - tubo Catad. 5. pedum coelo sereniſſimo.
18	7	44	55	Immerſio ſecundi, tubo Camp. 15 pedum.
		45	20	- - tubo Catad. 5. pedum. Ioue non ſatis alto.
	12	12	23	Immerſio primi, tubo Camp. 15. pedum.
		12	43	- - tubo 23. pedum.
		12	51	- - tubo Newtoniano 5. pedum.
25	10	26	49	Immerſio ſecundi, tubo Camp. 15. pedum.
		27	11	eadem tubo Catad. 5. pedum: coelo fido.
	14	9	23	Immerſio primi, tubo Camp. 15. pedum.
		9	33	- - tubo reflectente 5. pedum.
		9	42	- - tubo Newtoniano 7. pedum. Coelum ſerenum.
27	8	38	32	Immerſio primi tubo 23. pedum.
		38	43	- - tubo Catad. 5. pedum: coelo fido.
Oct. 2.	13	7	0	Immerſio ſecundi, tubo 23. pedum.
		7	7	eadem, tubo Newtoniano 5. pedum: Ioue prope Meridianum verſante; coelo ſereno.

Immer-

1738. st. n.	Tempus verum. h. ′ ″	
9	15 47 2	Immersio secundi, tubo Catad. 5. pedum: coelum quidem serenum: sed ventus nimis validus obstabat quominus longiores tubos admitteremus.
11	12 31 11	Immersio primi, tubo Newtoniano 5. pedum: dubia vero intra aliquot minuta secunda, ob leuem agitationem tubi a vento, quod etiam tuborum aliorum vsum omnino impediuit.
13	6 59 22	Immersio primi, tubo Catad. 5. pedum: non ita certa ob nimiam satellitis vicinitatem ad discum Iouis, quae etiam impedimento fuit quominus alii tubi adhibiti fuerint.
Nou. 12	11 18 8	Primus iam apparebat. ab vmbra Iouis liberatus, tubo Catad. 5. pedum. Prima tamen emersio 8. vel 10. min. sec. citius accidere potuit: quippe trans nebulam haec obseruatio peracta fuit.
16	5 12 54	Tertius satelles iam ex vmbra Iouis emersus videbatur, tubis Camp.

15 ped.

1738. n. st.	Tempus verum. h. ′ ″	
		15. ped. et Newt. 8. ped. sed luce adhuc ita debili, vt primam emersionem vix 8. vel 10. min. sec. citius accidisse crediderim. Nimia anticipatio coeli erga calculum ex tabulis Astronomicis in caussa fuit, quo minus nos citius ad hanc obseruationem non accinxerimus.
Dec. 30	5 56 19	Emersio primi, accurata, tubo Newtoniano 5. pedum. Coelum quidem satis serenum erat, at ventus aliorum tuborum vsum impediuit.

FINIS.

Comment: Acad. Sc. Tom: VI. Tab: I. p. 3.

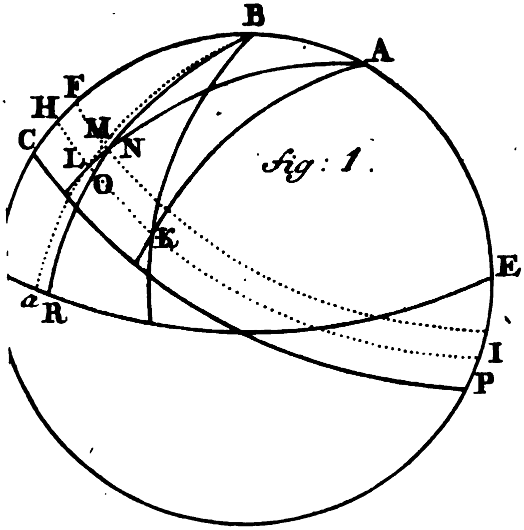


fig: 1.

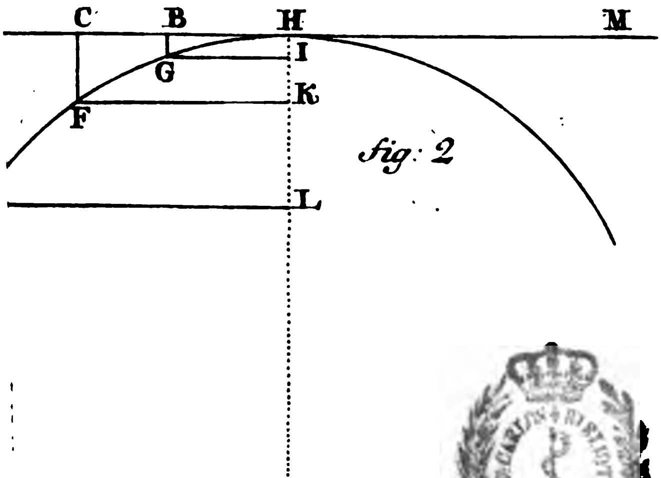


fig: 2

fig. 3.

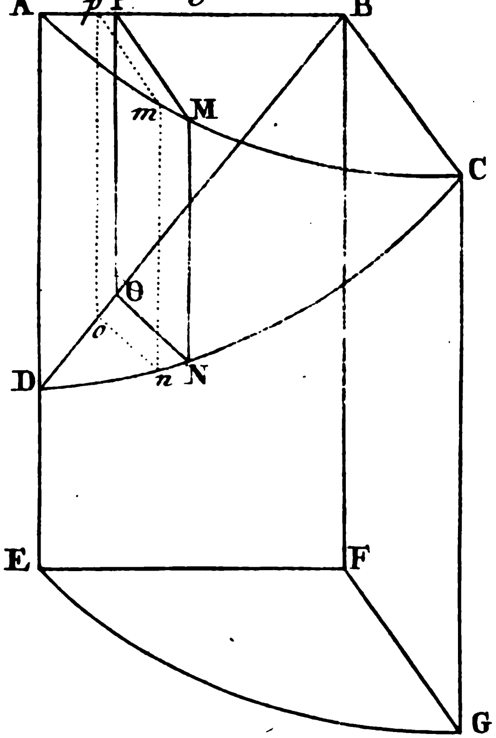
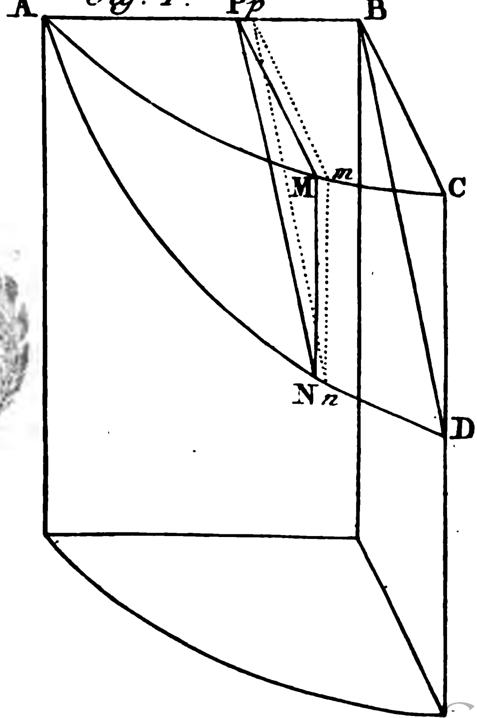
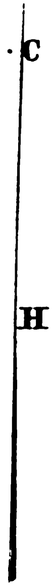


fig: 4.





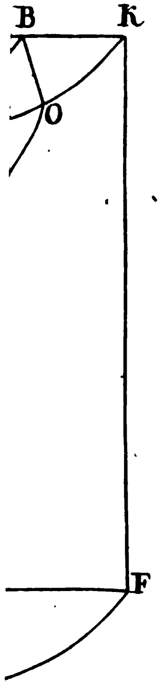
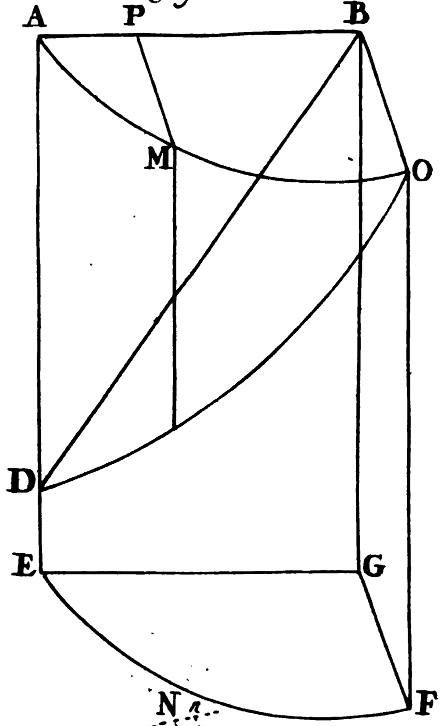


fig: 2



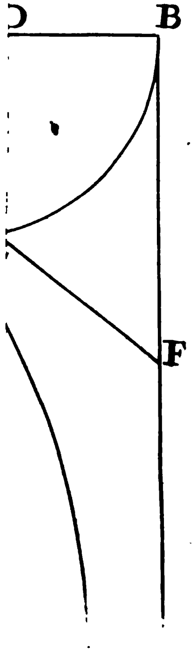
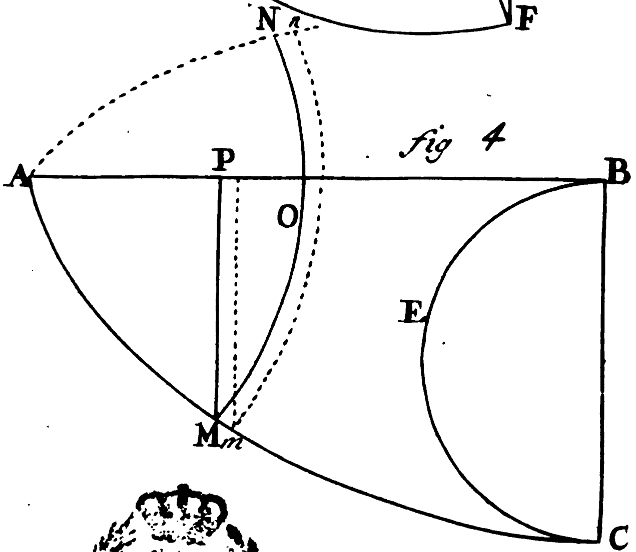
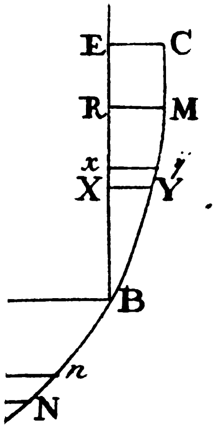


fig 4





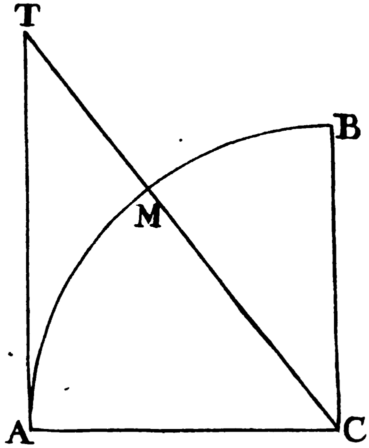


fig: 2

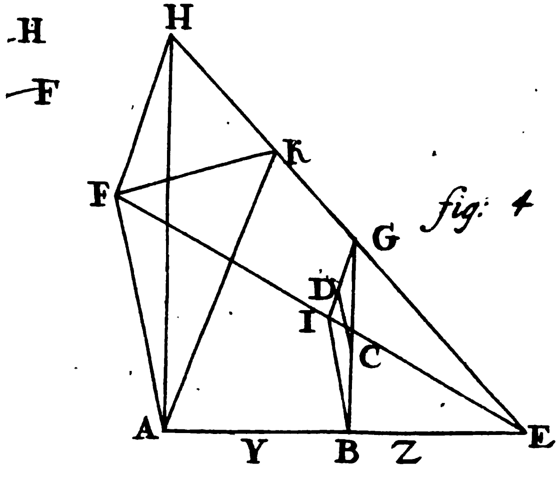
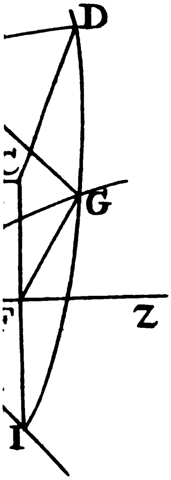


fig: 4



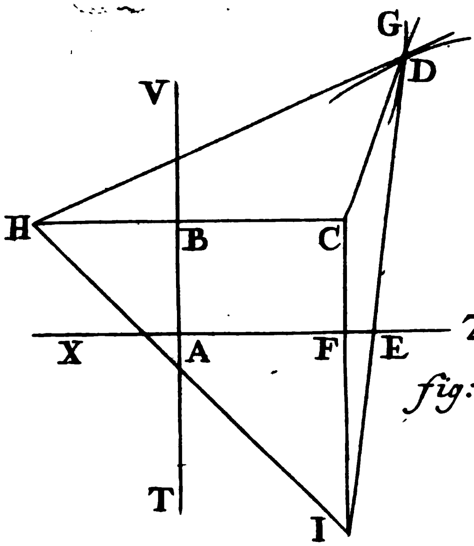
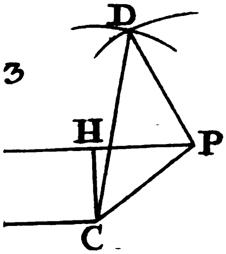


fig: 2



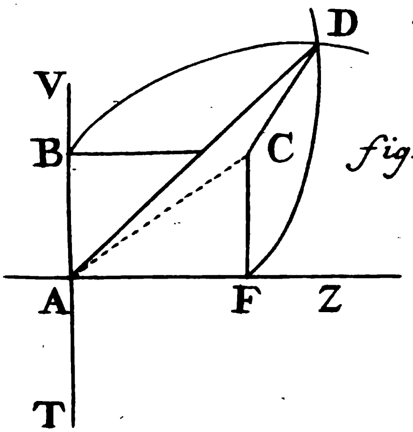


fig: 4

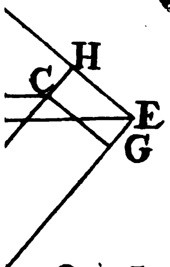


fig: 5

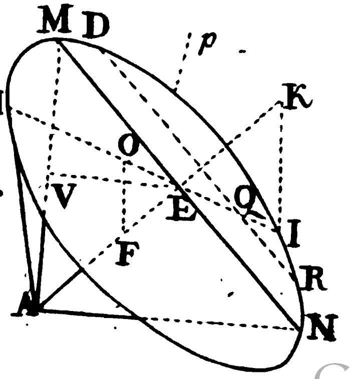
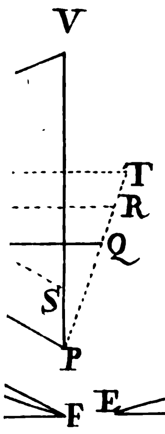


fig: 6



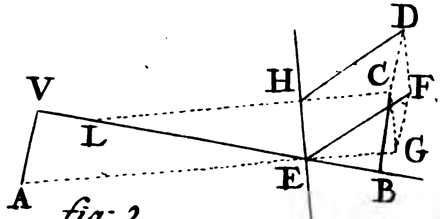
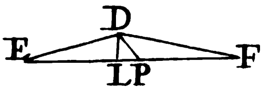


fig: 2.



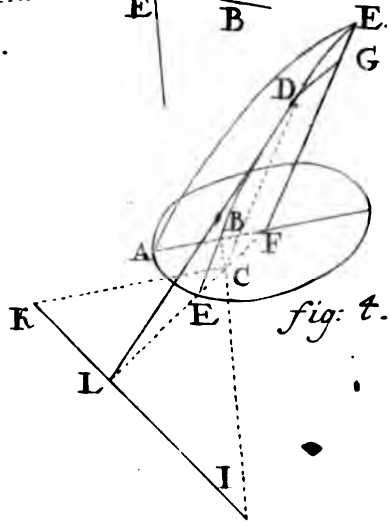


fig: 4.

fig: 6.

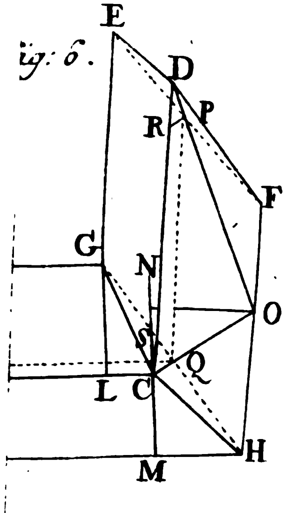


fig: 5.

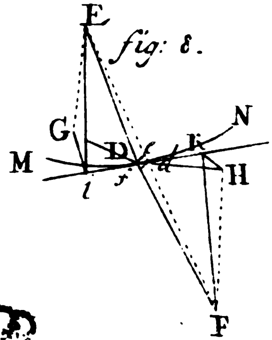
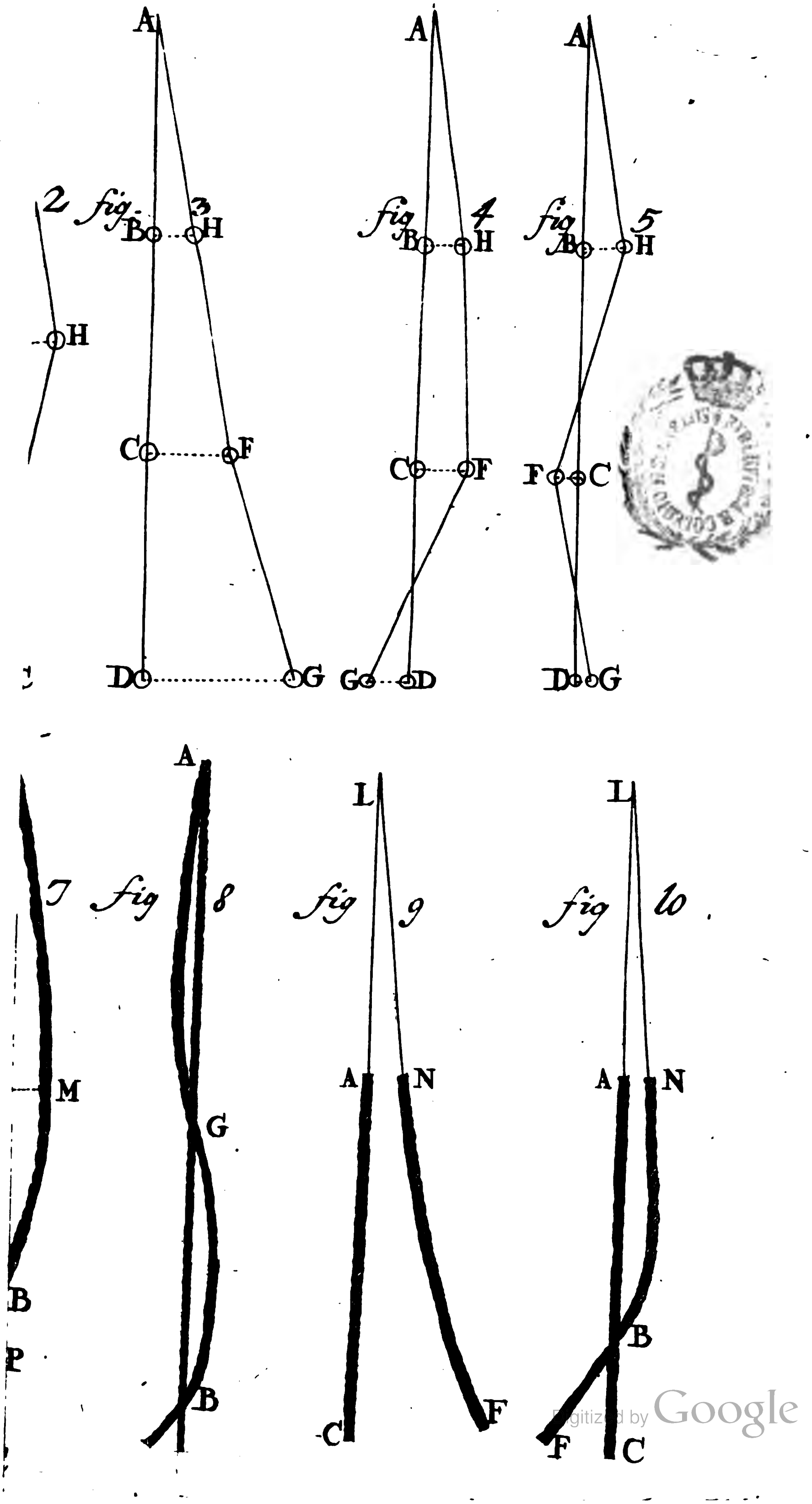


fig: 8.


2 fig
H
3 fig
A
B
H
C
F
D
G
fig 4
A
B
H
C
F
G
D
fig 5
A
B
H
F
C
D
G
7 fig
M
B
P
8 fig
A
G
B
fig 9
L
A
N
C
F
fig 10
L
A
N
B
F
C

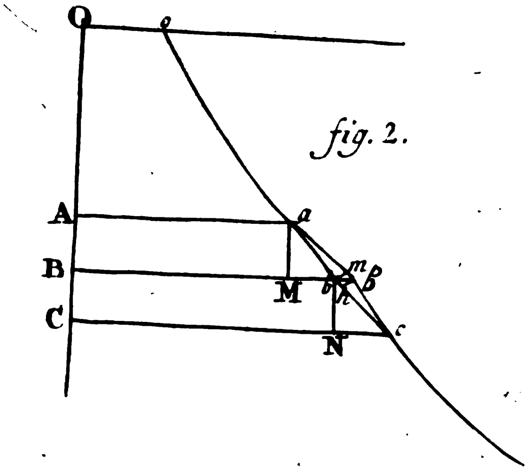


fig. 2.

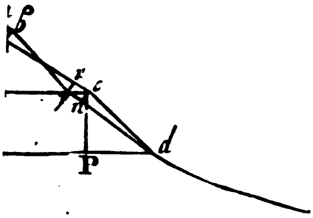
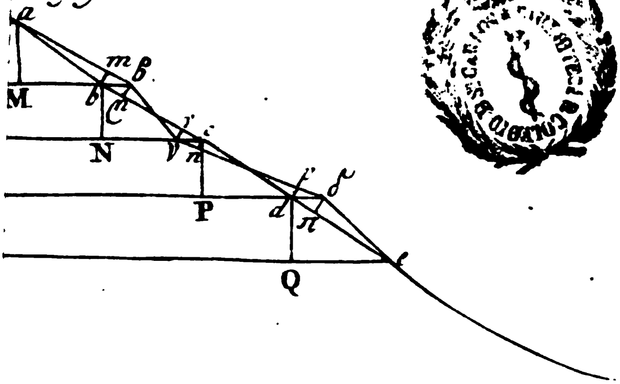


fig. 4.



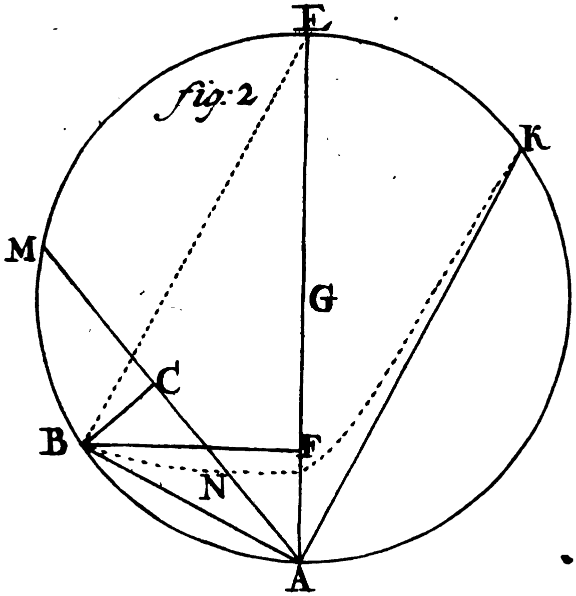


fig. 2

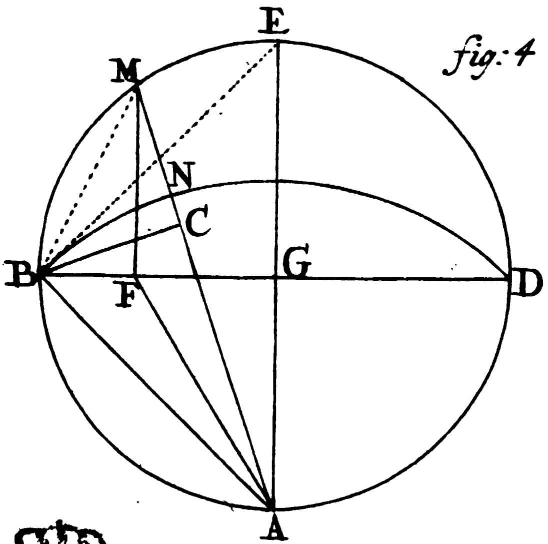


fig. 4

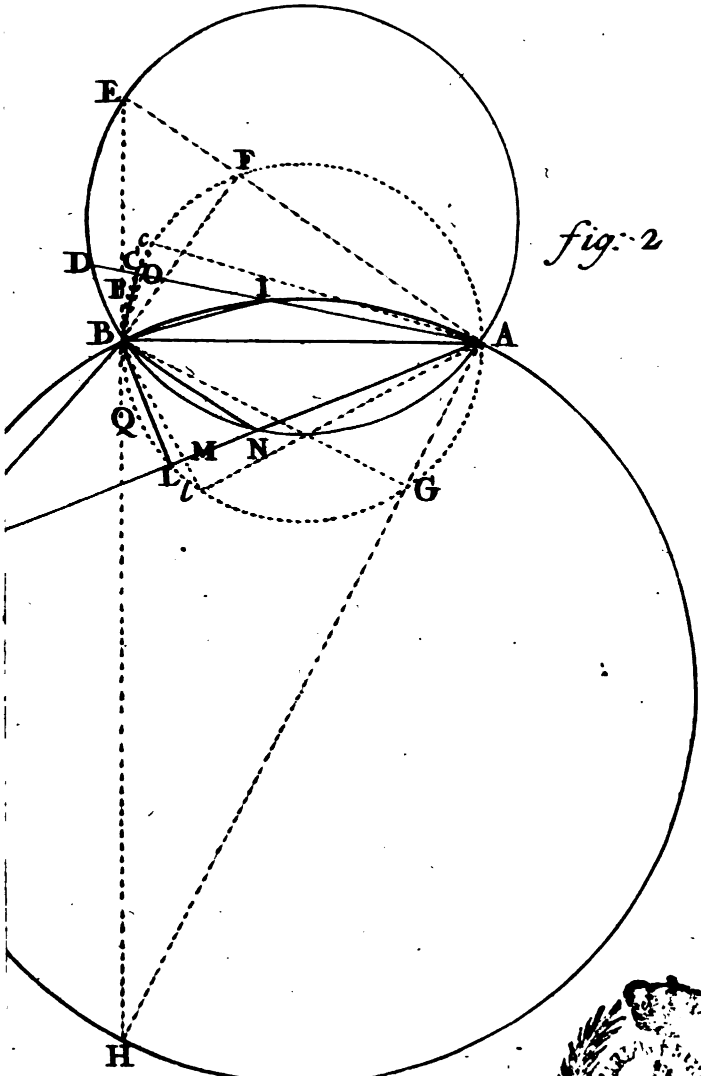
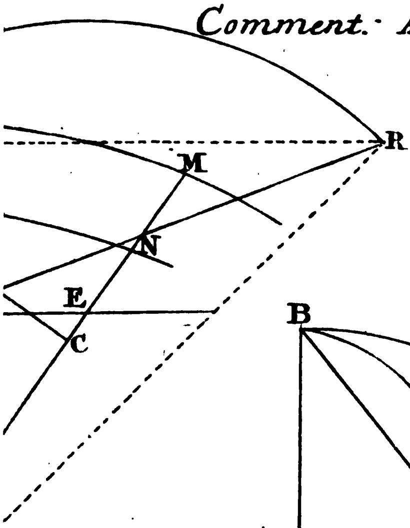


fig: 2



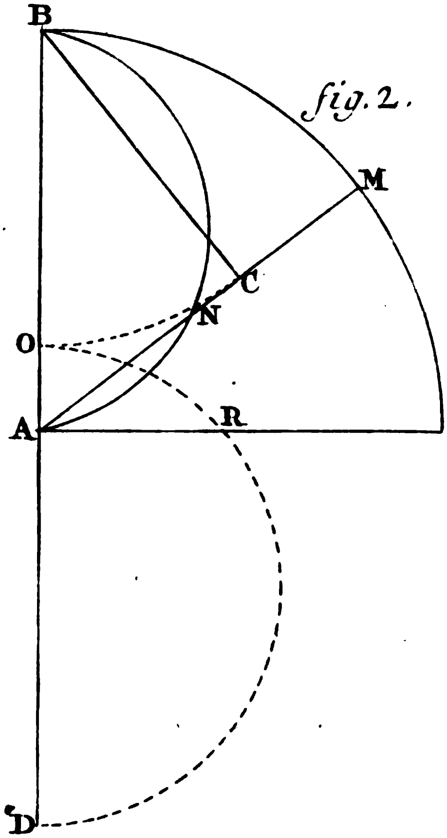
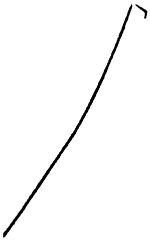


fig. 2.



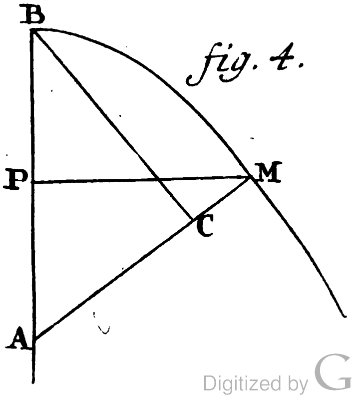
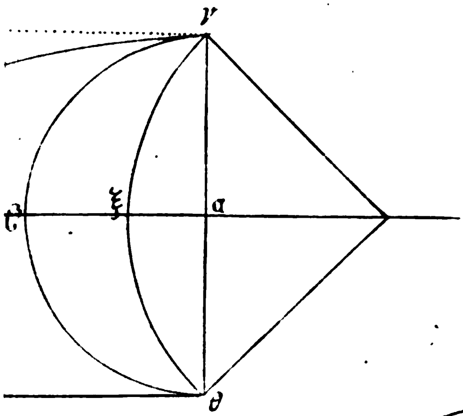


fig. 4.



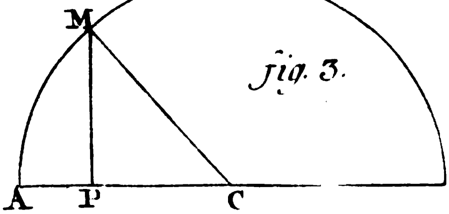


fig. 3.

fig. 4.

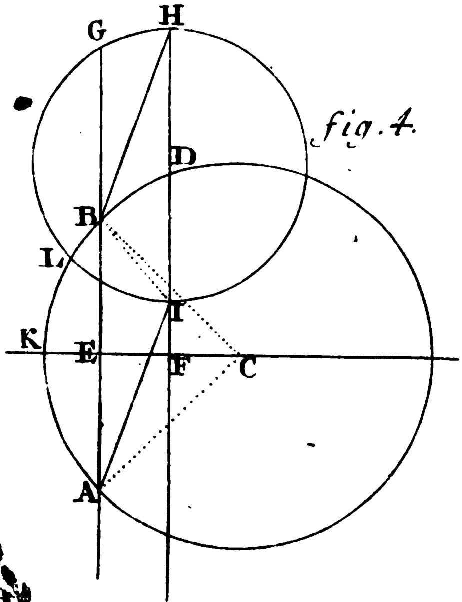
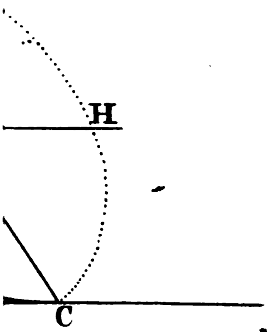
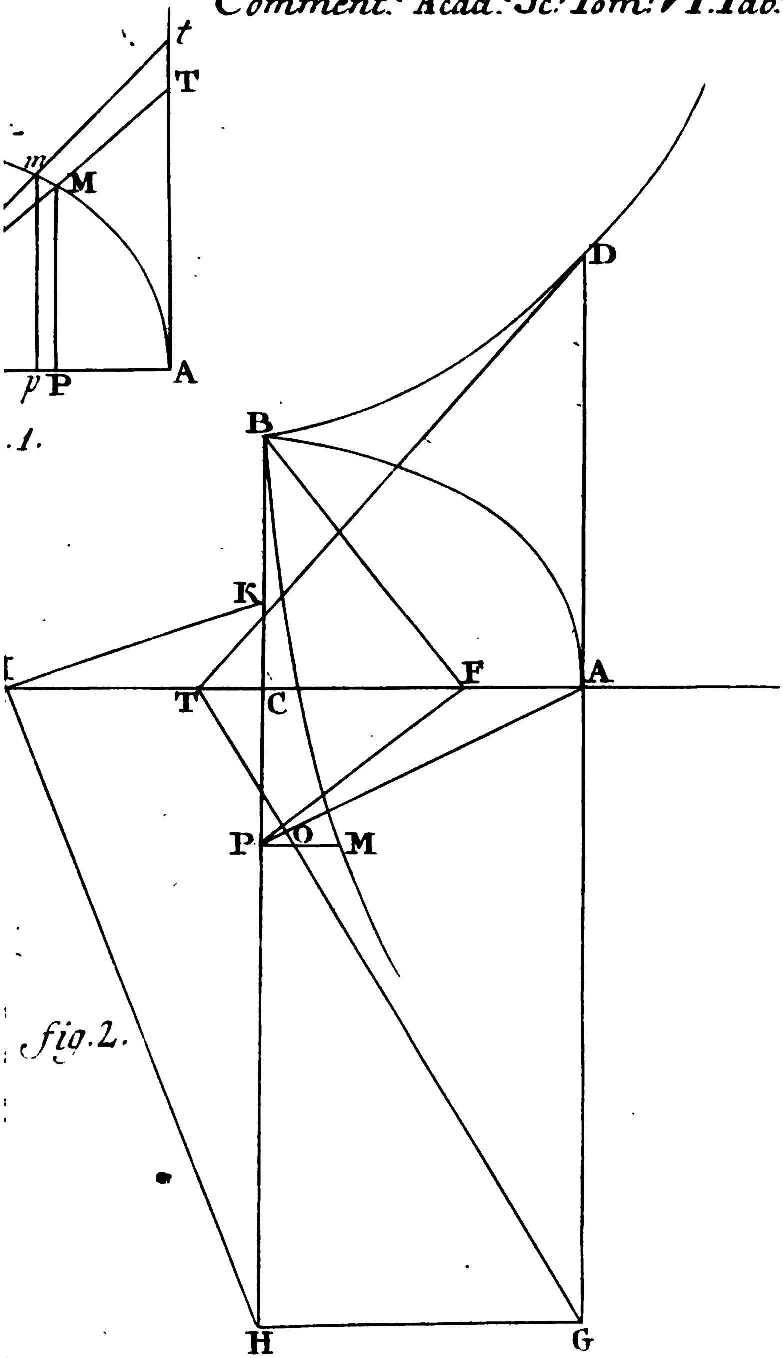


fig. 2.

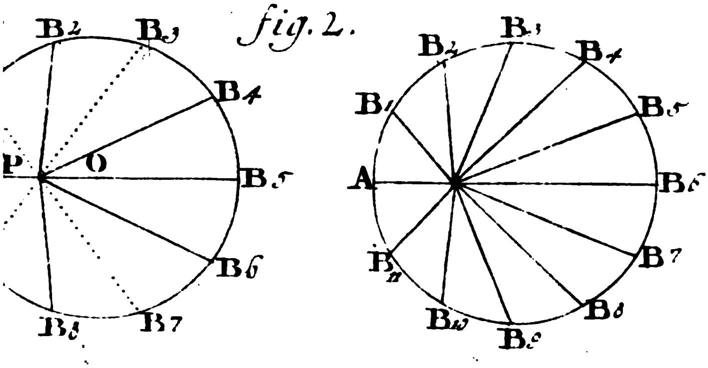




.1.

fig.2.

fig. 2.



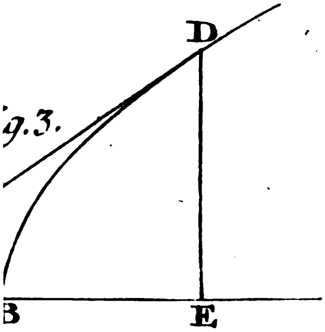
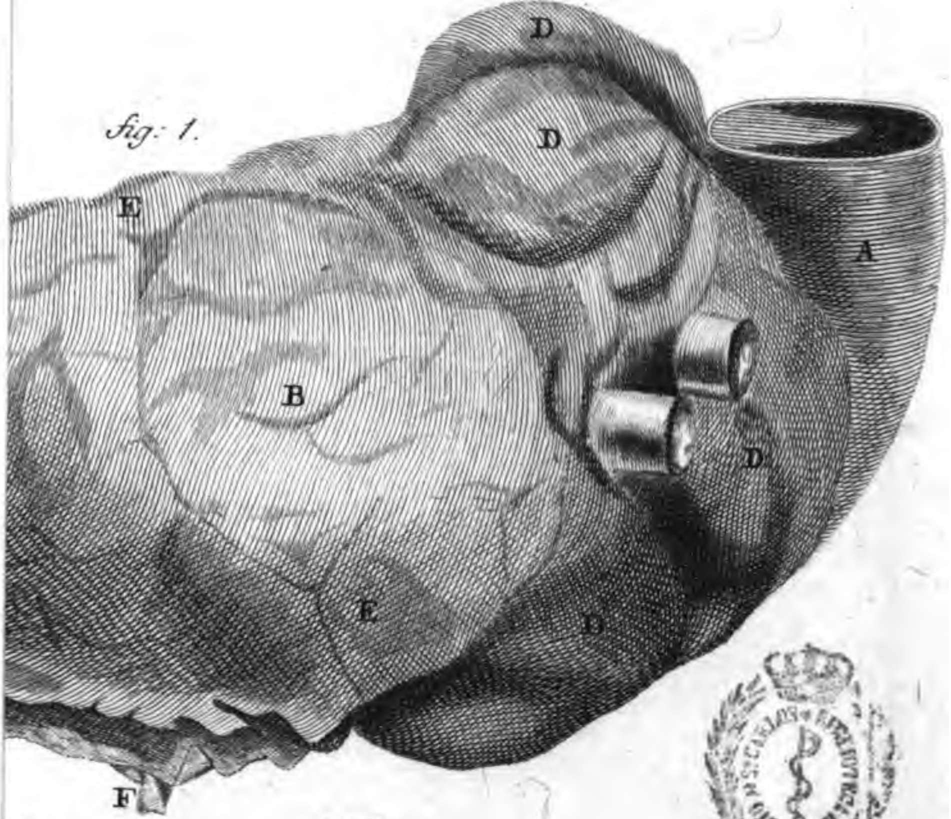


fig. 3.

fig: 1.



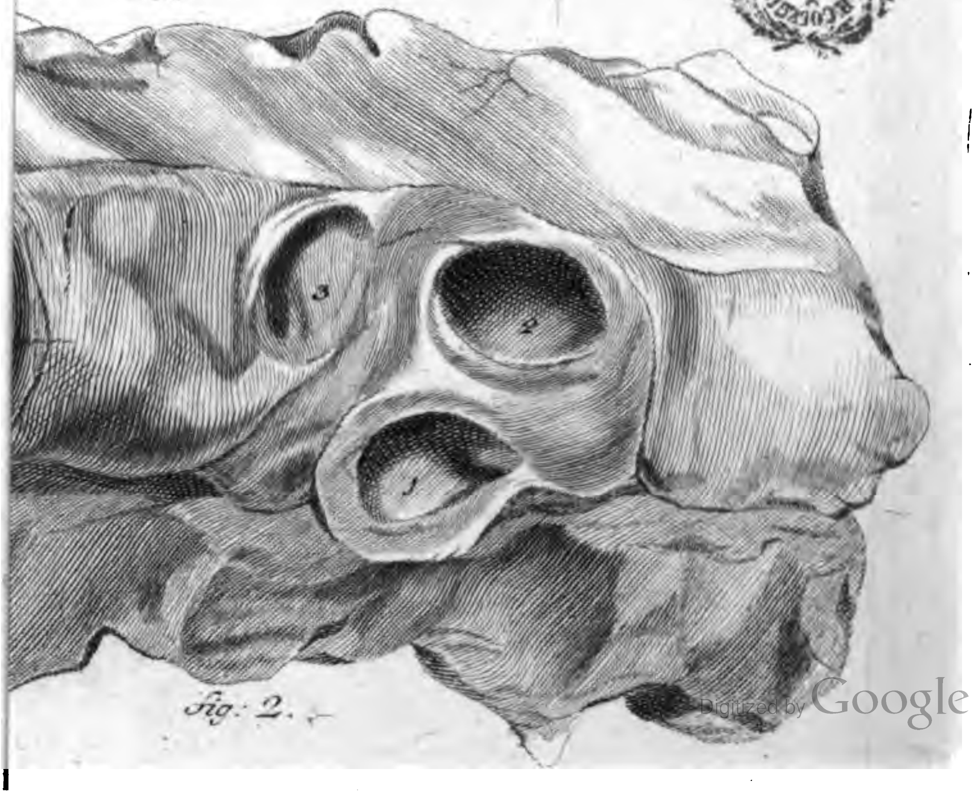
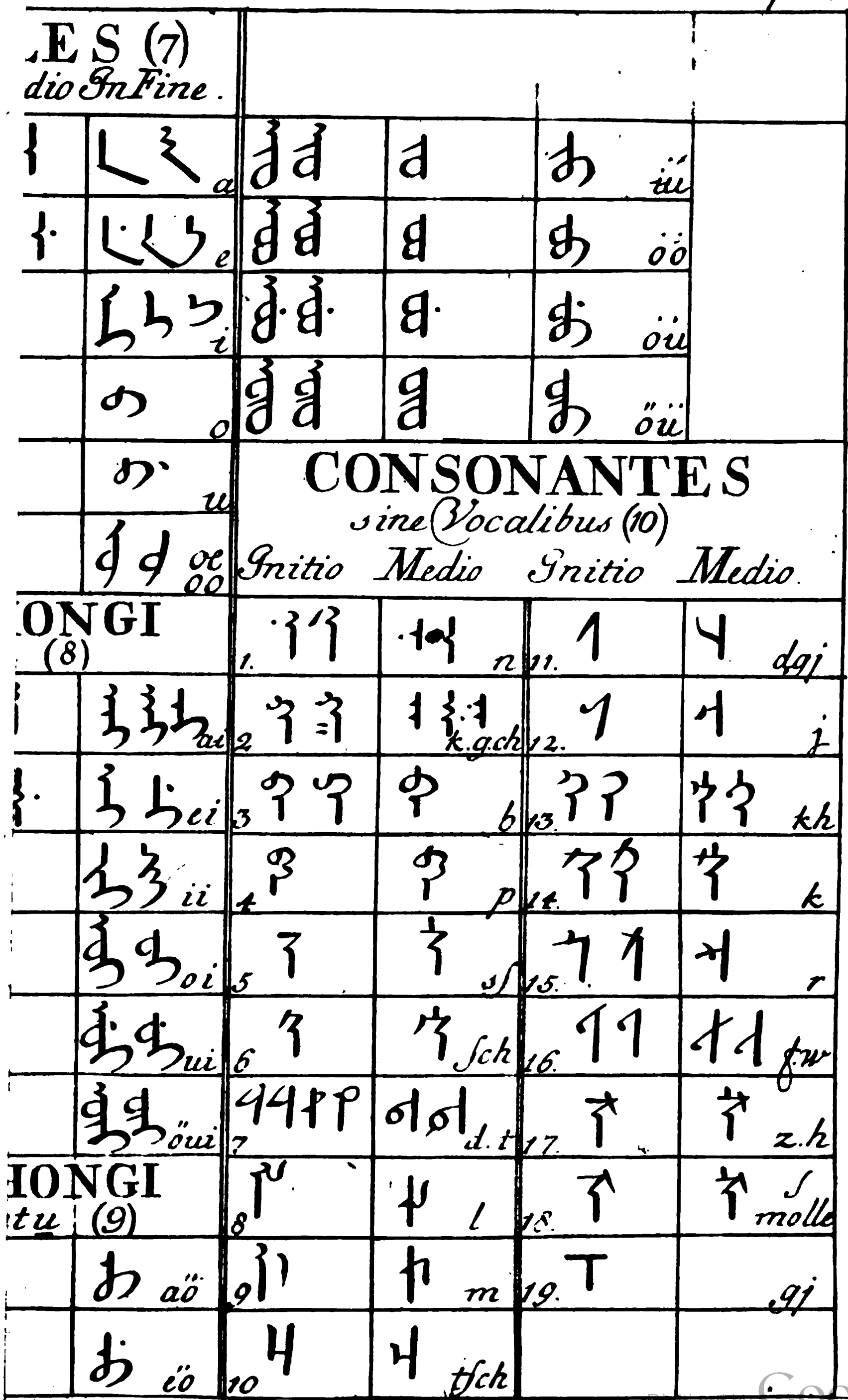


fig: 2.



LES (7)
dio In Fine.
a
e
i
o
u
oe oo
üü
öö
öü
öü
CONSONANTES
sine Vocalibus (10)
Initio Medio Initio Medio
IONGI
(8)
ai
ei
ii
oi
ui
öui
IONGI
tu (9)
aö
eö
1. n 11. dgj
2. k.g.ch 12. j
3. b 13. kh
4. p 14. k
5. ſ 15. r
6. ſch 16. f.w
7. d.t 17. z.h
8. l 18. ſ molle
9. m 19. gj
10. tſch

…sonantes Vocalibus terminatae (11.)					
	i	o	u	ö oo	
e	ni	no	nu	nö noo	13 khe
caret		ko	caret	kö koo	ghe
ca	ret	go	caret	gö goo	gche
ca	ret	cho	caret	chö choo	ki
he	bi	bo	bu	bö boo	gi
pe	pi	po	pu	pö poo	gchi
se	ſsi	ſso	ſsu	ſsö ſsoo	ku
he	ſchi	ſcho	ſchu	ſchö ſchoo	gu
	ti	to	tu	caret	gchö
	di	do	du	caret	14 ka
	li	lo	lu	lö loo	ga
	mi	mo	mu	mö moo	cha
he	tſchi	tſcho	tſchu	tſchö tſchoo	ko
e	dſji	dſjo	dſju	dſjö dſjoo	go
	caret	jo	ju	jö joo	chö

i	o	u	ö oo	
ri	ro	ru	rö roo	Syllabae anomalae (12)
ſi	ſo	ſu	ſö ſoo	
c	aret			sië
zhi	zho	zhu	caret	tſchi
ſi	ſo	ſu	caret	dgje
gji	gjo	gju	gjö gjoo	
terminatae Diphthongis in i (13)				
nii	noi	nui	nöi	
bii	boi	bui	böi	
kii	caret	kui	caret	Sequens koi goi choi
gii		gui		
chei	ca	ret	chöi	Sed kai gai chai
terminatae in r (14)				
nir	nor	nur	noir	ſcribitur etiam
bir	bor	bur	boir	nar etc.
et	jor	jur	joir	

…bae terminatae in n (15.)

in	on	un	ön	
…aret	kon	caret	kön	
…aret	gon	caret	gön	
…aret	chon	caret	chön	
bin	bon	bun	Sic bön	etiam pan etc. Namba et pa
ssin	sson	ssun	ssön	Scribuntur

…terminatae in ng (16.)

ing	ong	ung	öng	
…ret	schong	schung	schöng	
ling	long	lung	löng	
ring	rong	rung	röng	

…terminatae in k (17.)

ik	ok	uk	ök	
mik	mok	muk	mök	
tschik	tschok	tschuk	tschök	
dgjik	dgjok	dgjuk	dgjök	

ret	jok	juk	jök	
kik	caret	kuk	At	kok
gik	caret	guk	conso-nans	gok
chik	caret	chuk	sequens	chok

llabae terminatae in s (18)

is	os	us	ös	Sic quoque in peregrinis ujch et uzh
pis	pos	pus	pös	
sſis	sſos	sſus	sſös	

llabae terminatae in t (19)

it	ot	ut	öt	
nit	not	nut	nöt	
t	kot	caret	köt	
t	got	caret	göt	
t	chot	caret	chöt	
bit	bot	but	böt	
sſit	sſot	sſut	sſöt	

ce terminatae in t (20)

it	ot	ut	öt	kot	got	chot
hit	tsot	tschut	tschöt	kat	gat	chat
t	jot	jut	jöt	kut	gut	chut
t	kot	caret	köt	kit	git	chit
t	got	caret	göt	ket	get	chet
t	chot	caret	chöt			
·it	rot	rut	röt			

e terminatae in b (21)

ib	ob	ub	öb	
nib	nob	nub	nöb	
jib	dgjob	dgjub	dgjöb	
t	job	jub	jöb	

terminatae in diphthongos o et u (22)

üü	nöö	nöü	nöü	
üü	böö	böü	böü	
füü	föö	fou	föü	

e terminatae in l (23)

il	ol	ul	öl	
nil	nol	nul	nöl	
bil	bol	bul	böl	
mil	mol	mul	möl	
lil	lol	lul	löl	

bae terminatae in m (24)

im	om	um	öm	
nim	nom	num	nöm	kom gom chom
ret	kom	caret	köm	kam gam cham
ret	gom	caret	göm	kum gum chum
ret	chom	caret	chöm	kim gim chim
bim	bom	bum	böm	kem gem chem
ſim	ſom	ſum	ſöm	
ret	ſchom	ſchum	ſchöm	
tim	tom	tum	caret	
dim	dom	dum	caret	