



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



3 2044 106 421 514

Handwritten scribble

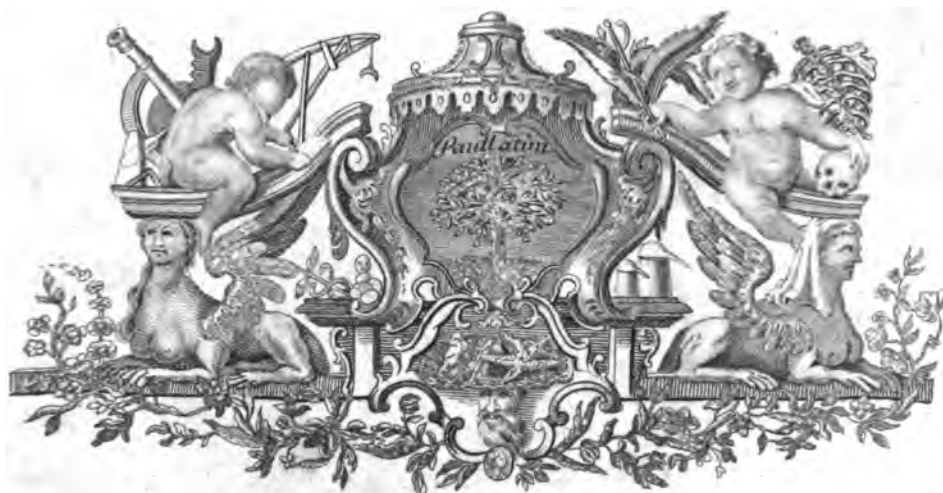
47-AB1c v.5
1738 (1731)
W. G. FARLOW



COMMENTARIJ
ACADEMIAE
SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE.

TOMVS V.

AD ANNOS *clb*ccxxx. et *clb*ccxxxı.



PETROPOLI,
TYPIS ACADEMIAE.

*clb*ccxxxvııı. *m*

7 8 17



THE
LIBRARY
OF THE
MUSEUM OF
ART AND HISTORY
OF THE
CITY OF BOSTON

INDEX
COMMENTARIORVM
IN CLASSE MATHEMATICA.

- Frid. Christoph. Maieri** Noua Methodus calculandæ
Eclipses Lunares. pag. 3.
- Io. Bernoulli** Solutiones nouorum quorundam Pro-
blematum Mechanicorum. pag. 11.
- Frid. Christoph. Maieri** Problemata Trigono-Sphæ-
rica tria pag. 25.
- Eiusdem** Singularis Modus obseruandi siderum de-
clinationes et altitudinem Poli. pag. 33.
- Leonh. Euleri** de Progressionibus transcendentibus,
seu quarum termini generales Algebraice dari
nequeunt pag. 36.
- Frid. Christoph. Maieri** Problematis de Stationibus
Planetarum. Casus alter pag. 57.
- Dan. Bernoulli** Notationes de aequationibus, quæ
progrediuntur in infinitum, earumque reso-
lutione per Methodum serierum recurrentium:
vt et de noua serierum specie. Praelectio
prima. pag. 63.
- Eiusdem** Praelectio secunda. pag. 70.

Georg.

Georg. Wolffg. Krafft Solutio Problematis Cato-
ptrico-Geometrici. pag. 82.

Leonb. Euleri de Summatione innumerabilium Pro-
gressionum. pag. 91.

Dan. Bernoulli Differtatio brevis de motibus cor-
porum reciprois seu oscillatoriis, quae vbiq̄ue
resistentiam patiuntur quadrato velocitatis suae
proportionalem. pag. 106.

Eiusdem Addidamentum ad Theoremata. pag. 126.

Leonb. Euleri quomodo data quacunque curua in-
uenire oporteat aliam, quae cum data quo-
dammodo iuncta ad Tautochronismum pro-
ducendum sit idonea. pag. 143.

Eiusdem de communicatione motus in collisione
corporum. pag. 159.

Eiusdem de Curuis rectificabilibus Algebraicis atque
traiectoriis reciprois Algebraicis. pag. 169

Dan. Bernoulli Specimen Theoriae Nouae de men-
sura fortis. pag. 175.

IN CLASSE PHYSICA.

J. G. Du Vernoi de Glandulis Renalibus Eusta-
chii. pag. 187.

Jof. Weitbrecht de Figura et situ Vesicae vrina-
riae. pag. 194.

Georg.

Georg. Bernb. Bülfinger de Radicibus et Foliis Ci-
chorii. pag. 198.

J. G. Du Vernoi Aër intestinorum tam sub ex-
tima quam intima tunica inclusus. pag. 213.

Eiusdem Obseruationes de quadrupede volatili Rus-
siae. pag. 218.

Jos. Weitbrecht de Notis Characteristicis Ossium.
pag. 234.

J. G. Gmelin de Augmento Ponderis, quod ca-
piunt quaedam corpora, dum igne calcinan-
tur. pag. 263.

J. G. Leutmann ad grauitatis liquorum differen-
tiam cognoscendam. pag. 273.

J. G. Gmelin de Salibus Alkalibus fixis Planta-
rum. pag. 277.

IN CLASSE HISTORICA.

Theoph. Siegfr. Bayeri Conuerfiones rerum Scy-
thicarum temporibus Mithridatis Magni et
paullo post Mithridatem. pag. 297.

Eiusdem Numus Aegiensis Illustratus pag. 361.

Eiusdem Fasti Achaici pag. 374.

Eiusdem Fasti Achaici Illustrati. pag. 382.

In

In Obseruationibus Astronom. et Physf.

J. N. De L'Isle Continuatio Eclipsium Iouis Satellitum. pag. 451.

Obferuatio defectus Lunae, habita Patavii ab Io. Poleno. pag. 458.

CLASSIS PRIMA
CONTINENS
MATHEMATICA.

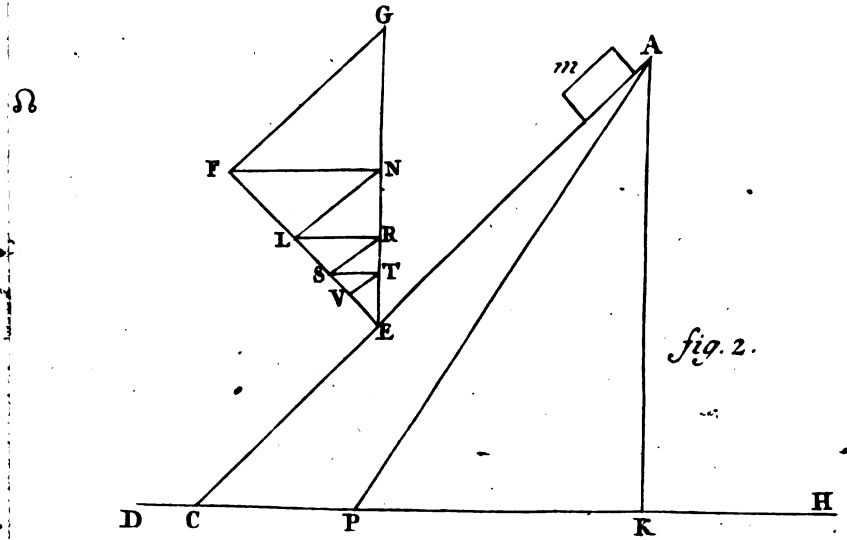


fig. 2.

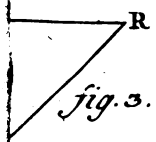


fig. 3.

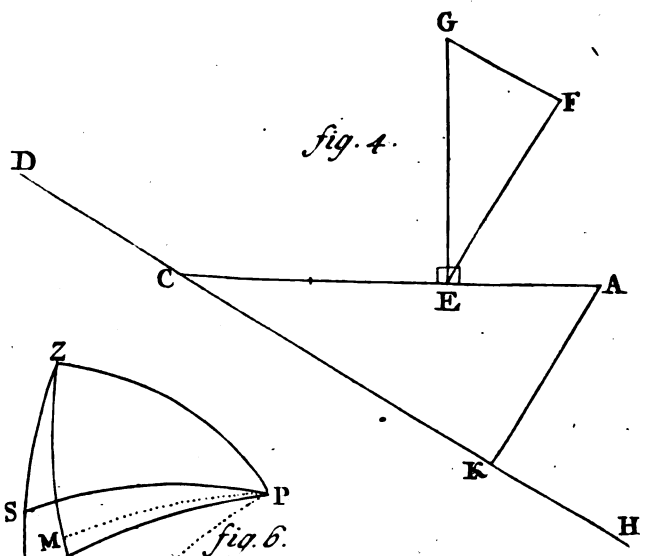


fig. 4.

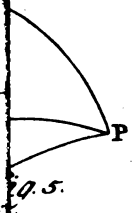


fig. 5.

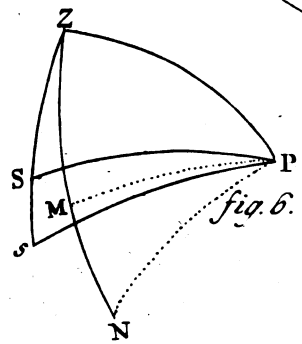


fig. 6.

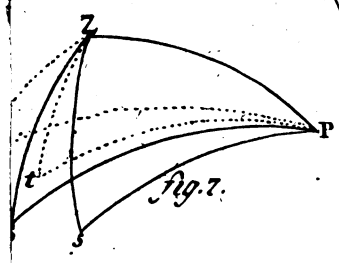


fig. 7.



NOVA METHODVS
CALCVLANDI
ECLIPSES LVNARES.
AVCTORE
F. C. Maiero.

I.

K *Eplerus* in Rudolphinis p. 99. et 101. punctum orbitae lunaris, in quo fit maxima obscuratio, distinguit a loco copulae; eo enim momento, quo vtrumque luminare a nodo aequaliter remotum est, copulam celebrari pronunciat; at, si luna ibi versatur vbi linea centra luminarium iungens ad orbitam lunarem normalis est, in loco maximae obscurationis esse arbitratur. Mihi pro certo est, duo haec loca non esse diuersa, sic vero definiri debere, quod ibi et copula et maxima obscuratio fiat, vbi linea centra iungens omnium est breuissima. Interim tamen copulae definitionem Keplerianam tanquam vsu receptam retinebo, eamque distinguam

Tabula 1.

A 2

guam

DE NOVA METHODO

quam a definitione loci, vbi maxima obscuratio contingit, siue, vbi centra sibi sunt proxima. Hanc breuissimam centrorum distantiam, vti et distantias pro initio et fine eclipseos, noua ratione indagare in praesenti scripto docebo.

Fig. 1.

2. Sint positione datae $A\Omega$ et $B\Omega$ viae rectae duorum mobilium \odot et \odot aequabiliter latorum; Sint etiam duo loca \odot et \odot data, in quibus simul existunt mobilia; quaeruntur duo alia loca S et L , in quibus mobilia datam a se inuicem distantiam SL obtinent.

Ponatur sinus anguli $A\Omega B = g$, et cosinus $= c$, sumto r pro sinu toto, velocitas ipsius \odot sit ad velocitatem \odot vti m , ad n , distantia SL sit $= f$, $\odot\Omega = a$ et $\odot\Omega = b$, quaeratur $L\odot = x$. siue $S\odot = \frac{m}{n}x$. Fiet praeterea $S\Omega = \frac{an+mx}{n}$ et $L\Omega = b+x$, consequenter ipsa SL determinatur per regulam, a me in Comment. A. praecedentis datam, cuius ope sequentem sum nactus aequationem $(rn^2 + rm^2 - 2cmn)x^2 + 2(ramn + rn^2b - bcnm - acn^2)x = rn^2f^2 + 2abcn^2 - ra^2n - rb^2n^2$, quae pro more rite tractata reddit

$$x = n \frac{c(an+bm) - r(am+bn) \pm \sqrt{rff(rmm+rn^2-2cmn) - gg(an-bm)^2}}{rmm+rn^2-2mnc}$$

3. Apparet duplicem esse valorem ipsius x , adeoque duo assignari posse loca mobili \odot , in quibus ab altero \odot datam habet distantiam, ceterum

CALCULANDI ECLIPSES LUNARES. 5

terum si quantitates cognitae per numeros logarithmicos datae sunt, valor ipsius x regulis, quas olim dedi, commode inueniri potest.

4. At multo commodior fit calculus si $a=b$ (quem quidem casum in negotio eclipsium semper formare licet, obtrinet enim in copulis), tum enim erit $x = nx$

$$\frac{-(r-c)(m+n) \pm \sqrt{r^2(m+n)^2 + r^2(m^2 + n^2 - 2cmn) - a^2g(n-m)^2}}{rmm + rnn - 2mnc}$$

5. In media eclipsi centra luminarium quam proxime ab inuicem distant; necesse ergo est, vt ille locus definiatur in quo luna a sole quam minimam seruat distantiam. Hoc fit si quantitas problematis superioris quaesita statuatur esse omnium minima, quae inuenitur, differentiando primam supra exhibitam aequationem, vt impetretur

$$x = -na \frac{(r-c)(m+n)}{nn(r - \frac{cm}{n}) - mm(\frac{cn}{m} - r)} \text{ seu } x = -na$$

$\frac{(r-c)(m+n)}{rn^2 + rn^2 - 2mnc}$ ponendo scilicet $a=b$, pro casu facillimo.

6. Vt problema ad eclipsium casus applicetur, notandum est in aequatione praecedente, a signare distantiam vtriusque luminaris a nodo eandem vtrinque, g esse sinum anguli quo inclinatur orbita lunae ad eclipticam, c esse cosinum, et $r-c$ sinum versum eiusdem anguli. Item, m esse

A 3

motum

motum horarium solis, n vero lunae, f quoque esse summam semidiametrorum vmbrae et lunae, et denique x esse spatium quo distat initium et finis eclipseos a locis luminarium primo assumtis.

7. Exemplo ex Rudolphinis pag. 103. de prompto calculum illustrabo. Anno 1616. Aug. $\frac{16}{28}$ die fuit copula post meridiem Vraniburgi tempore aequali

(secundum data Kepleri)	H . / "
	15. 29. 4
Locus solis erat	S . 5. 3. 57. 1
Locus \odot in sua orbita	11. 3. 57. 1
Locus ☾	5. 9. 38. 27
Distantia \odot et vmbrae a ☾	5. 41. 26
ergo logarithmus ipsius $a = -$	173881
Quia inclinatio orbitae lunaris ad eclipticam in copulis Keplero constanter est	. 5. 18. 0
erit inde log. g	238195
— — — log. c	421
— — — log. $(r-c)$	5+5490
Semidiameter vmbrae	' 49. 32
Semidiameter lunae	16. 22
ergo f .	65. 54
et log. f	- 9370
Horarius lunae = n	' 38. 22
— — — vmbrae = m	2. 25
ergo $n - m =$	35. 57
	et

CALCVLANDI ECLIPSES LVNARES. 7

et log. $(n-m)^2 =$	102444
Porro erit $(n+m) =$	40. 47
ergo $l(n+m) =$	38607
log. n	44716
log. m	321196
ergo log. n^2	89432
et n^2	24. 32
item log. m^2	642392
et m^2	0. 5 $\frac{1}{2}$
ergo $r(n^2 + m^2)$	24. 37 $\frac{1}{2}$
log. $mnc =$	366333
log. 2	- 69315
ergo log. $2mnc$	297018
et $2mnc$	3. 4 $\frac{2}{3}$
ergo $r(n^2 + m^2) - 2mnc =$	21. 32 $\frac{5}{8}$
et log. $(r(n^2 + m^2) - 2mnc) =$	102410
log. $(na(r-c)(m+n)) =$	455032
inde fit log. $x. =$	342622

et x , hoc est distant. copulae a media eclipsi = 1.57

(NB. Hic arcus auferitur a copula si luna est post nodum (s. s.) sed ante nodum additur).

Hunc arcum percurrit luna intra 3. 3

copula erat 15. 29. 4

ergo obscuratio maxima fit 15. 32. 7

Keplerus habet 15. 33. 48

Sol

Sol interea percurrit	" "
	7
ergo umbra distat a ☉	5. 41.19
et luna ab ☉ distat	5. 39.29
Hisce datis et angulo inclinationis trigonometricae inuenitur distantia centrorum =	31.30
est vero summa semidiametrorum	65.54
ergo ablato arcu inter centra restant	34.24
Diameter lunae est	32.43
Eclipsis ergo totalis est cum mora.	

Pro fine et initio.

log. ff	- 18740
{ log. $\sqrt{rm^2 + rnn - 2mnc}$ =	83670
{ numerus ipse =	25. 59. 20
l. aa =	- 347762
l. gg	476390
	128628
	<u>(n-m)² = 102444</u>
{ log. (aagg(n-m) ²) =	231072
{ Numerus ipse	5. 57. 5
{ ergo $\sqrt{rm^2 + rn^2 - 2nmc} - gga(n-m)^2 =$	20. 2. 15
{ eius logarithmus =	109674
{ radice logar.	54837
l. n =	44716
{ log. $n\sqrt{ff(rmn - rnn - 2nmc) - gga(n-m)^2} =$	99553
{ Numerus ipse	22. 10. 17
	na(r-c)

CALCVLANDI ECLIPSES LUNARES. 9

$na(r-c)(m+n) =$	0. 38. 2
	differ. 21. 32. 15
	Summa 22. 48. 19
Logar. differ.	102454
— summae	96733
Log. $(rmm - rnn - 2mnc) =$	102410
{ l. + x =	+ 44
{ l. - x =	= -5677
{ ergo + x =	59. 58. 30.
{ — - x =	i. 3. 30. 40
tempus pro + x =	i. 33. 48
tempus pro - x =	i. 39. 30
tempus copulae =	15. 29. 4
	Initium = 13. 55. 16
	Finis = 17. 8. 34
Duratio eclipseos =	3. 13. 18
Semiduratio	i. 36. 39
Init.	13. 55. 16
Medium eclipseos	15. 31. 55
Obscuratio maxima fit	15. 32. 7
	Differentia = 12

Vnde patet, hanc differentiam non esse profus contemnendam, vti vulgo fit

Pro Mora.

Formula morae (sicut et durationis) est haec:

$$= \frac{2n\sqrt{rff(rmn + rnn - 2mnc) - accg(n-m)^2}}{rmm + rnn - 2mnc}$$

Tom. V.

B

vbi

10 DE NOVA METHODO CALCULANDI &c.

vbi f = differentiae femidiametrorum =	33. 10
cuius logarithmus =	59280
log. ff =	118560
log. $r/f\sqrt{(- - - - -)}$ =	220970
cuius numerus =	6. 35. 30
$aagg(n-m)^2$ =	5. 57. 5
$(rff(rmm + rnn - 2mnc) - aagg(n-m)^2)$ =	39. 25
Scuius logarithmus	451458
Set logar. radice =	225729
log. $2n$ =	24597
	<hr/>
log. $(rmm + rnn - 2mnc)$ =	201132
logarithmus scrupulorum morae	102410
log. n .	98722
logarithmus morae	44716
	<hr/>
Mora ipsa =	H. 54006
Keplerus habet	O. 34. 58
	O. 34. 48

8: Atque ita dispalescit, quid differat mea methodus a vulgari. Cuius liberum esto de ea statuere quod ipsi videbitur

Io. Bernoulli.

SOLUTIONES NOVIORVM
QVORVNDAM
PROBLEMATVM
MECHANICORVM.

Excerptae ex litteris ad Filium Danielem

Petropolis datis d. 3. Junij. Sc. n. 1730.

Problema.

Sit ACK triangulum materiale rectangulum in
K, quod super plano horizontali DH sine
omni frictione moveri possit. Sit etiam cor-
pus graue m quod super hypotenusa AC posi-
tum sua grauitate descendat pariter sine frictione;
quo fiet vt descendente corpore, triangulum iu-
giter ab eo pressum retrocedere cogatur. Quaeritur tum corporis tum trianguli velocitas, tum
etiam via quam corpus ex motu composito de-
scribit atque vtriusque lex accelerationis.

Tabula I.
Fig. 2.

Definitio.

Corpus aliquod vi acceleratrice animari di-
citur, quando ab ea continuo ad motum vrge-
tur vel sollicitatur secundum quamcunque dire-
ctionem.

B 2

Lemma

Lemma I.

Si corpori alicui, cuius massa A , et vis acceleratrix qua animatur p , superaddatur massa B nullam habens vim acceleratricem, animabitur massa composita vi acceleratrice $= \frac{pA}{A+B}$. Vid. Act. Lips. 1714. ubi haec fufius expofuit.

Lemma 2.

Fig. 3.

Si corpus aliquod C animatur, simul duabus viribus acceleratricibus vniiformibus fecundum diuerfas direktiones CR et CS , quae vires sint vt ipfae lineae CR et CS , compleaturque parallelogrammum SR , mouebitur corpus fecundum diagonalem CT eodem modo ac si vna tantum vi vniiformi expreffa per CT animaretur. Et tres istae longitudines CR , CS , CT eodem tempore percurrentur, si corpus singulis istis viribus seorsim animaretur, eruntque velocitates acquisite in R , S , T , vt ipfae lineae CR , CS , CT . Patet ex compositione virium mortuarum.

Lemma 3.

Duo corpora animata diuerfis viribus acceleratricibus p et P , si in motu sint constituta temporibus siue aequalibus siue inaequalibus, erunt eorum velocitates vltimo acquisite in ratione composita ex subduplicata virium et spatorum percurretorum s et S , hoc est vt $\sqrt{p \times s}$ ad $\sqrt{P \times S}$. Demonstr. in Act. Lips. 1713.

Se

PROBLEMATVM MECHANICORVM 13

Sequitur nunc SOLVTIO Problematis; praeuia
tamen praeparatione:

Ex puncto quolibet E in hypotenusâ AC trian-
guli rectanguli ACK erigatur recta verticalis EG, quae
repraesentet vim naturalem acceleratricem grauium
quam vocabog; super ea formetur triangulum re-
ctangulum EFG, cuius latus EF sit perpendicularare ad
AG, alterum GF eidem AC parallelum; ductae iam
intelligentur FN, NL, LR, RS, ST, TV, etc. in
infinitum, ea nimirum lege, vt prima, tertia,
quinta etc. horizonti DH, secunda vero, quarta,
sexta &c. hypotenusae AC sint parallelae. Hinc
omnia triangula EGF, EFN, ENL, ELR, etc.
sunt inter se et ipsi triangulo CAK similia. Sit
itaque huius trianguli altitudo AK = a, basis KC
= b, hypotenusâ AC = $\sqrt{aa + bb} = c$. Inue-
nietur per analogias GF = $\frac{ga}{c}$, NL = $\frac{gab^2}{c^3}$, RS =
 $\frac{gab^4}{c^5}$, TV = $\frac{gab^6}{c^7}$, etc. et ita porro: EN = $\frac{gb^2}{c^3}$, ER
= $\frac{gb^4}{c^5}$, ET = $\frac{gb^6}{c^7}$, etc. atque ita deinceps, FN =
 $\frac{gab^2}{c^3}$, LR = $\frac{gab^4}{c^5}$, ST = $\frac{gab^6}{c^7}$, etc. Et sic deinceps,
FE = $\frac{gb^2}{c^3}$, LE = $\frac{gb^4}{c^5}$, SE = $\frac{gb^6}{c^7}$, VE = $\frac{gb^8}{c^9}$, etc. et sic
semper. Quae series procedunt singulae in pro-
gressione geometrica descendente in ratione cc ad
 bb . His praemissis, ita arguo: cum pondus m ,
quod nunc in E esse concipimus, continuo premat
aequaliter hypotenusam AC, sitque eius vis ac-
celeratrix GE seu g , qua nimirum ad descensum
verticalem animatur, atque in hac directione si
nihil obstaret actu descenderet: sed cum triangu-

Fig. 2

B 3

lum

Lemma I.

Si corpori alicui, cuius massa A , et vis acceleratrix qua animatur p , superaddatur massa B nullam habens vim acceleratricem, animabitur massa composita vi acceleratrice $= \frac{pA}{A+B}$. Vid. Act. Lips. 1714. ubi haec fufius exposui.

Lemma 2.

Fig. 3.

Si corpus aliquod C animatur, simul duabus viribus acceleratricibus uniformibus secundum diuersas directiones CR et CS , quae vires sint ut ipsae lineae CR et CS , compleaturque parallelogrammum SR , mouebitur corpus secundum diagonalem CT eodem modo ac si vna tantum vi uniformi expressa per CT animaretur. Et tres istae longitudines CR , CS , CT eodem tempore percurrentur, si corpus singulis istis viribus seorsim animaretur, eruntque velocitates acquisitae in R , S , T , ut ipsae lineae CR , CS , CT . Patet ex compositione virium mortuarum.

Lemma 3.

Duo corpora animata diuersis viribus acceleratricibus p et P , si in motu sint constituta temporibus siue aequalibus siue inaequalibus, erunt eorum velocitates ultimo acquisitae in ratione composita ex subduplicata virium et spatorum percursorum s et S , hoc est ut $\sqrt{p} \times \sqrt{s}$ ad $\sqrt{P} \times \sqrt{S}$. Demonstr. in Act. Lips. 1713.

Se

PROBLEMATVM MECHANICORVM 13

Sequitur nunc SOLVTIO Problematis; praeuia
tamen praeparatione:

Ex puncto quolibet E in hypotenusa AC trianguli rectanguli ACK erigatur recta verticalis EG, quae repraesentet vim naturalem acceleratricem grauium quam vocabog; super ea formetur triangulum rectangulum EFG, cuius latus EF sit perpendiculare ad AC; alterum GF eidem AC parallelum; ductae iam intelligantur FN, NL, LR, RS, ST, TV, etc. in infinitum, ea nimirum lege, vt prima, tertia, quinta etc. horizonti DH, secunda vero, quarta, sexta &c. hypotenusae AC sint parallelae. Hinc omnia triangula EGF, EFN, ENL, ELR, etc. sunt inter se et ipsi triangulo CAK similia. Sit itaque huius trianguli altitudo AK = a, basis KC = b, hypotenusa AC = $\sqrt{aa + bb} = c$. Inuenietur per analogias $GF = \frac{ga}{c}$, $NL = \frac{gab}{c^2}$, $RS = \frac{gab^2}{c^3}$, $TV = \frac{gab^3}{c^4}$, etc. et ita porro: $EN = \frac{abb}{cc}$, $ER = \frac{ab^2}{c^2}$, $ET = \frac{ab^3}{c^3}$, etc. atque ita deinceps, $FN = \frac{ab}{cc}$, $LR = \frac{gab^2}{c^3}$, $ST = \frac{gab^3}{c^4}$, etc. Et sic deinceps, $FE = \frac{ab}{c}$, $LE = \frac{gab^2}{c^2}$, $SE = \frac{gab^3}{c^3}$, $VE = \frac{gab^4}{c^4}$, etc. et sic semper. Quae series procedunt singulae in progressionem geometricam descendente in ratione cc ad bb . His praemissis, ita arguo: cum pondus m , quod nunc in E esse concipimus, continuo premat aequaliter hypotenusam AC, sique eius vis acceleratrix GE seu g , qua nimirum ad descensum verticalem animatur, atque in hac directione si nihil obstarct actu descenderet: sed cum triangu-

Fig. 2

B 3

lum

14 SOLVTIONES NOBORVM QVORVND.

lum pro parte obstat descensui, et inde a pressione corporis aliquam vim acceleratricem secundum directionem horizontalem in se recipiat, videndum est quanta illa sit, tum etiam quantam retineat corpus secundum directionem hypotenusae, et qualis retrocedente triangulo oriatur in corpore vis acceleratrix per compositionem vtriusque quâque ideo viam AP corpus describat a puncto A ad horizontalem DH. In hunc finem concipiatur vis GE resolui in GF et FE; illa GF sola esset acceleratrix secundum directionem hypotenusae, si triangulum ACK esset immobile, utpote a cuius inuincibili obstaculo, vis altera normalis FE tota destrueretur: sed quia triangulum est mobile, patet vim FE non omnino destrui, sed tantum imminui, et quidem in ea ratione in qua aggregatum massae trianguli et massae corporis (quod aggregatum massarum vocabo M) maius est quam massa solius corporis m. Vnde si triangulum AKC cedere posset secundum directionem FE, foret per lemma 1. vis acceleratrix totius systematis h. e. tam trianguli quam corporis in hac directione, $= \frac{m}{M} \times FE$, manente interim etiam in corpore priore vi acceleratrice secundum directionem AC et expressa per GF. Sed quia triangulum non cedit secundum FE propter oppositionem plani immobilis horizontalis DH: resoluenda est vis acceleratrix $\frac{m}{M} \times FE$, quatenus est in corpore, in FN et NE, et habebitur $\frac{m}{M} \times FN$

et

et $\frac{m}{M} \times NE$, quarum illa $\frac{m}{M} \times FN$ animat systema adeoque et ipsum triangulum ad retrocedendum secundum directionem horizontalem; haec autem $\frac{m}{M} \times NE$ porro resoluta in NL et LE , dat $\frac{m}{M} \times NL$ et $\frac{m}{M} \times LE$, ex quibus illa $\frac{m}{M} \times NL$ contribuit cum priore GF ad motum corporis in directione AC , haec vero $\frac{m}{M} \times LE$ (quae contribuit ad animandum corpus m in directione LE , ipsi autem associatur massa trianguli) simili modo tractanda est vt antea cum FE factum est; erit namque per Lemma 1. $\frac{m}{M} \times \frac{m}{M} \times LE$, seu $\frac{mm}{MM} \times LE$, noua pars vis acceleratricis qua totum systema h. e. corpus et triangulum secundum LE sollicitaretur, si planum immobile DH non obstaret; resoluetur ergo haec vis $\frac{mm}{MM} \times LE$ in LR et RE , eritque $\frac{mm}{MM} \times LR$ et $\frac{mm}{MM} \times RE$, quarum illa $\frac{mm}{MM} \times LR$ dat nouam partem vis acceleratricis priori adiuiciendam, ad animandum systema ipsumque adeo triangulum in directione horizontali; haec vero $\frac{mm}{MM} \times RE$ ulterius resoluta in RS et SE dat $\frac{mm}{MM} \times RS$ et $\frac{mm}{MM} \times SE$, quarum illa $\frac{mm}{MM} \times RS$ est iterum noua pars vis acceleratricis in corpore ad illud animandum in directione AC ; sed altera $\frac{mm}{MM} \times SE$ ope Lemmatis 1. tractata dabit etiam nouam partem vis acceleratricis nempe $\frac{m^3}{M^3} \times ST$ qua triangulum in directione horizontali animatur: atque ita deinceps procedatur in infinitum. Quo facto liquet, omnes particulares acceleratrices secundum $GF, NL, RS,$
 $TV,$

26 SOLUTIONES NOVIORVM QVIORVND.

TV, etc. simul sumtas dare vim totalem æcceleratricem qua corpus m secundum directionem hypotenusæ AC animatur, motuque uniformiter accelerato descendit; omnes vero particulares secundum GF, NL, RS, TV, etc. simul sumtas, dare pariter vim acceleratricem totalem, qua triangulum vel si mauis totum systema retro vrgetur secundum directionem horizontali BH parallelam, ac proin etiam motu uniformiter accelerato mouetur. His itaque in vnum collectis habebimus has duas progressionēs, erit nempe vis acceleratrix totalis in corpore m secundum AC, $= GF + \frac{m}{M} \times NL + \frac{mm}{MM} \times RS + \frac{m^2}{M^2} \times TV + \text{etc.}$ Et vis totalis acceleratrix totius systematis seu trianguli secundum DH $= \frac{m}{M} \times FN + \frac{mm}{MM} \times LR + \frac{m^2}{M^2} \times ST + \text{etc.}$ Substitutis iam valoribus supra inuentis linearum GF, NL, RS, nec non linearum FN, LR, ST, etc. obtinebitur vis prior pro accelerando corpore secundum AC $= \frac{gc}{c} + \frac{m}{M} \times \frac{gab}{c^2} + \frac{mm}{MM} \times \frac{gab^2}{c^3} + \frac{m^2}{M^2} \times \frac{gab^3}{c^4} + \text{etc.}$ Atque vis altera pro accelerando systemate secundum DH $= \frac{m}{M} \times \frac{gab}{cc} + \frac{mm}{MM} \times \frac{gab^2}{c^2} + \frac{m^2}{M^2} \times \frac{gab^3}{c^3} + \text{etc.}$ Quæ duæ progressionēs sunt manifestæ geometricæ et descendentes in ratione Mcc ad mbb , adeoque sunt summabiles: inuenitur nimirum summa progressionis prioris $= \frac{gacm}{ccm - bbm}$; ac summa posterioris $= \frac{gabm}{ccm - bbm}$. Quod erat inueniendum pro vtriusque lege accelerationis.

Co.

Corollarium I.

Quoniam $\frac{gacM}{ccM-bbm} : \frac{gabm}{ccM-bbm} = cM : bm$, erit vis acceleratrix corporis in directione hypotenusae, ad eiusdem vt et trianguli vim acceleratricem in directione horizontali, in ratione composita ex ratione hypotenusae ad basin trianguli et ratione massae totius systematis ad massam corporis.

Corollarium 2.

Hinc quia corpus animatur simul duabus viribus acceleratricibus, vna secundum hypotenusam, altera secundum horizontalem, quae se habent vt cM ad bm , si capiatur cP ita vt $cM : bm = c$ seu $AC : CP = \frac{mb}{M} = \frac{m}{M} \times CK$ ducaturque AP , erit per Lemma 2. AP via, quam corpus vtraque vi animatum, realiter describit. Quod erat inueniendum pro secundo.

Corollarium 3.

Cum sit $GP = \frac{mb}{M}$, erit $KP = \frac{Mb-mb}{M}$ adeoque $cP : KP = m : M - m$, hoc est, vt massa corporis ad massam trianguli, et cum per idem lemma 2. eo tempore, quo corpus ab A ad P descendit, triangulum ipsum retrocedat, per interuallum CP , ita vt apex trianguli C futurus sit in eodem puncto P , manifestum est, si intelligatur tota quantitas materiae trianguli concentrata in supremo trianguli apice A , fore CP , cui aequalis erit distan-

Tom. V.

C

tia

tia quantitatis materiae collectae a perpendiculari AK, ad KP quae est distantia corporis ab eadem perpendiculari AK versus plagam oppositam ei, versus quam reperitur apex A, vt m ad $M - m$, h. e. in ratione reciproca massarum corporis et trianguli, idque cum semper se habeat vbicunque sumatur punctum P in recta AP, liquet centrum commune grauitatis materiae trianguli concentrae et corporis descendere in eadem semper perpendiculari AK; per consequens etiam si materia per totum triangulum diffusa sit, tamen commune centrum grauitatis totius systematis durante motu in eadem semper linea verticali descendere. Quam quidem proprietatem ex alio etiam principio generalissimo demonstrare possum.

Corollarium 4.

Cum corpus aliquod graue, quod nempe vi acceleratrice naturali g animatur, libere descendens per altitudinem AK, seu a acquirat velocitatem in A designandam per \sqrt{a} , si inuenire velimus velocitatem trianguli vltimo acquisitam, postquam nempe apex c percurrit spatium CP, faciendum est per Lemma 3. vt $\sqrt{g} \times \sqrt{a}$ ad $\sqrt{\frac{g a^2 m}{c c - M - b b m}}$ $\times \sqrt{\frac{m b}{M}}$ ita \sqrt{a} ad quartam $m b \sqrt{\frac{g}{c c M^2 - b b m M}}$, quae erit = velocitati finali trianguli; vt vero habeatur velocitas corporis in P, postquam nempe re ipsa spatium AP percurrit, quaerenda primo est lon-
gitu-

gitude AP seu $\sqrt{(AK^2 + PK^2)}$ et reperietur

$$= \sqrt{\left(\frac{MMaa + MMbb - 2Mmbb + mmb^2}{MM}\right)} = \sqrt{\left(\frac{MMcc - 2Mmbb + mmbb}{MM}\right)}$$
;
 Nunc faciendum est per partem secundam lem-
 matis secundi ut CP ad AP, h. e. ut $\frac{mb}{m}$ ad
 $\sqrt{\left(\frac{MMcc - 2Mmbb + mmbb}{MM}\right)}$ seu ut mb ad $\sqrt{(MMcc - 2M$
 $mmbb + mmbb)}$ ita velocitas inuenta trianguli, quae
 est $mb\sqrt{\frac{a}{ccMM - bbMm}}$, ad velocitatem quaesitam rea-
 lem corporis in P quae itaque erit
$$= \sqrt{\left(\frac{MMcc - 2Mmabb + mmabb}{ccMM - bbMm}\right)}$$
 quod erat inueniendum pro
 primo.

Corollarium 5.

Hinc confirmatur conseruatio virium viuarum,
 multiplicando enim quadratum velocitatis finalis
 trianguli per ipsius massam prouenit vis viva tri-
 anguli $= \frac{abmmM - abm^2}{ccMM - bbmM}$, atque multiplicando quadra-
 tum velocitatis actualis corporis in puncto P per
 massam ipsius, habebitur vis viua corporis $= \frac{accMMm - 2abmMm + abm^2}{ccMM - bbmM}$; adeoque summa vtriusque $= \frac{accMMm - abmMm}{ccMM - bbmM} = am$, hoc est = vi viuae solius cor-
 poris m si libere ex A in K caderet. Q.E.D.

Corollarium 6.

Etiam hoc curiositatis gratia solui potest pro-
 blema, qualem nempe inclinationem dare, con-
 ueniat hypotenusae AC, ita ut manentibus mas-
 sis tam corporis quam trianguli ut et altitudine
 AK, triangulum velocissime retro pellatur, ipsum-
 que

C 2

20 SOLUTIONES NOVORVM QVQRVND.

que adeo corpus in puncto P habeat minimam possibilem velocitatem; in hunc finem ex vi acceleratrice trianguli quae est $\frac{gabm}{ccM-bbm}$ seu (substituta $aa+bb$ pro cc) $\frac{gabm}{aaM+bbM-bbm}$ faciendum est maximum, supponendo literam b variabilem reliquas vero omnes inuariantes, hoc pacto enim inuenitur per communem regulam de *maximis* et *minimis*, $b = a\sqrt{\frac{M}{M-m}}$; proinde $\sqrt{M-m} : \sqrt{M} = a : b$, hoc est, sinus totus debet esse ad tangentem anguli KAC in subduplicata ratione massae trianguli ad massam totius systematis seu ad summam massarum trianguli et corporis. Vnde sequitur, angulum KAC semirecto semper maiorem esse debere. Et nominatim si M sit duplum ipsius m , id est, si massae trianguli sit aequalis massae corporis, erit $a.b :: 1. \sqrt{2}$, seu vt latus quadrati ad diagonalem, id quod facit vt angulus KAC, ceu ex tabulis tangentium habetur, sit quam proxime 54. grad. 44. min. qui etiam est angulus quem facere debet manubrium gubernaculi cum carina nauis, vt haec quam promptissime gyron possit, sic vti docui in meo Manuario Nautico Cap. V. art. 16. nec non angulus obliquitatis sub quo globus aliquis elasticus impingere debet in duos alios, qui iunctim sumti habeant massam ipsi aequalem, ita vt hi quam celerrime a se inuicem recedant. Vid. Differt. meam Cap. XI. art. 14.

Scho-

Scholion.

Non inconsultum duco ostendere, quomodo alia huiusmodi problemata per methodum nostram hic expositam solui possint. Sit ex. gr. idem triangulum ACK grauitatis quidem expers, sed datam quantitatem materiae nullius grauitatis in se continens; quod moueri possit super plano inclinato DH ad horizontem. Hypothenusa CA supponitur horizontalis, latus AK perpendiculare ad basin CK, incumbat vero hypothenusae AC corpus graue E, libertatem habeat fluendi super AC sine omni frictione; sicuti triangulum materiale non graue ACK supponitur fluere posse liberrime super plano decliui DH. Quaeritur, si hoc triangulum a pondere corporis incumbentis pressum descenderit, ac simul cum eo ipsum quoque corpus, qualem quouis in loco velocitatem habeat tam corpus quam triangulum.

Fig. 4

Solutio.

Quod attinet ad motum corporis E, haud difficulter intelligitur, illum continuo fieri in eadem verticali GE. Sed vt determinemus vim acceleratricem qua descendit triangulum super plano decliui DH; rem ita praestabimus. Per GE exponatur grauitas seu vis naturalis acceleratrix corporis E, quae vt ante dicatur = g ; resoluatur ea in GF parallelam plano DH et in EF eidem normalem. Sit quoque hypothenusa AC = c ,

C 3

AK =

22 SOLUTIONES NOVORVM QVORVND.

AK = a, CK = b; massa corporis = m, massa totius systematis = M, adeoque massa trianguli = M - m. Erit ob similia triangula GEF et ACK, $GF = \frac{ga}{c}$ et $EF = \frac{gb}{c}$. Concipiamus tantisper cessare vel demtam esse vim GF, et solam agere vim FE; habebimus casum praecedentem, ubi DH tanquam linea horizontalis, et TE tanquam vis verticalis considerari debet; hinc ergo per Solutionem praec. inueniemus vim acceleratricem trianguli ACK secundum directionem DH; cui nunc ea, quam negleximus, iterum addi debet quae ex GF resultat, utpote quae cum parallela sit plano eidem DH, tota impenditur ad pellendum systema in directione DH; cognita sic velocitate trianguli, cognoscitur etiam velocitas realis corporis in E secundum directionem GE. Retentis itaque iisdem litteris, ponendum est $\frac{gbm}{cM}$ pro g in $\frac{gabm}{ccM - bbm}$ quod vim acceleratricem trianguli denotabat in praecedenti casu, et prodibit $\frac{gabmm}{c^2MM - bbCM}$ pro vi acceleratrici qua triangulum animatur resultante tantum ex FE in praesenti casu; huic nunc addendum est, quod insuper acquirit a GF = $\frac{ga}{c}$, quod ideo est $\frac{gam}{cM}$; vnde emergit trianguli vis acceleratrix totalis = $\frac{gabmm}{c^2MM - bbCM} + \frac{gam}{cM} = \frac{gacm}{ccM - bbm}$. Quare faciendo hic etiam per Lem. 3. ut \sqrt{ga} ad $\sqrt{(\frac{ga}{ccMM - bbM} + \frac{gam}{M})}$, ita \sqrt{a} seu velocitas naturalis acquisita ex casu libero per altitudinem aequalem ipsi AK ad velocitatem trianguli postquam apex C percurrit spatium super DH aequale ipsi c seu

feu hypothenuſae AC, quae itaque velocitas erit $= c\sqrt{\frac{am}{ccM-bbm}}$. Eſt autem CA ad AK ſeu c ad a vt modo inuenta trianguli velocitas ſuper plano DH ad actualem ſeu realem velocitatem corporis in directione verticali GE; vnde velocitas corporis $= a\sqrt{\frac{am}{ccM-bbm}}$. Quod erat inueniendum pro determinandis velocitatibus.

Corollarium.

Etiam ex hac, vt ex praecedente ſolutione a priori inſtituta mirifice confirmatur conſeruatione virium viuarum; etenim vis viuua trianguli $= \frac{accm \times (M-m)}{ccM-bbm}$, et vis viuua corporis $= \frac{a^3 m m}{ccM-bbm}$, quarum ſumma (inſtituto calculo) inuenitur $= am$, quemadmodum fieri par eſt, vt conſeruetur vis viuua, quae eſſet in corpore libere deſcendente per altitudinem verticalem aequalem ipſi AK. Reducendo velocitates ad communem denominatorem inuenitur velocitas trianguli $= \frac{cvaM}{\sqrt{(ccM-bbm)}}$ et velocitas corporis $= \frac{a\sqrt{am}}{\sqrt{(ccM-bbm)}}$.

NOTA. Si praeterea velimus, vt ipſum quoque triangulum AKC grauetur pro ratione ſuae maeſſae $M-m$; eodem ratiocinio, quo ante in ſolutione ſcholio ſubiuncta fecimus, vtendum eſt, niſi quod iam per GE exponenda ſit grauitas ſeu vis naturalis acceleratrix in directione verticali non tantum corporis E, ſed totius ſyſtematis; corpus quippe et triangulum in hoc caſu communem habent grauitationem naturalem. Hinc ergo

24 SOLVTIONES NOVORVM QVORVND.

ergo iam ipsa GF seu $\frac{g^a}{c}$ designabit partem vis acceleratricis totius systematis et proinde trianguli, quam tantisper cessare vel demtam esse concipiamus, dum altera tantum EF seu $\frac{g^b}{c}$ systema totum proinde etiam corpus vrget normaliter ad planum DH. Atque ita habebimus casum primum, vbi DH tanquam horizontalis et FE tanquam vis acceleratrix verticalis qua corpus animatur, consideranda est. Quare si in $\frac{g^a b m}{c c M - b b m}$ (quod in illo primo casu exprimebat vim acceleratricem totalem trianguli) ponamus $\frac{g^b}{c}$ pro g , orietur $\frac{g^a b b m}{c^2 M - b b c m}$ pro vi qua triangulum animatur resultante tantum ex FE in hoc casu. Ei igitur addenda nunc est vis altera partialis, quam hactenus negleximus, oriunda ex GF, quam vim modo vidimus esse $\frac{g^a}{c}$. Et ita obtinemus pro praesenti casu vim acceleratricem totalem trianguli = $\frac{g^a b b m}{c^2 M - b b c m} + \frac{g^a}{c}$ = (facta reductione) $\frac{g^a c c M}{c c M - b b m}$. Faciendo nunc per Lemma 3. vt \sqrt{ga} ad $\sqrt{\left(\frac{g^a c c M}{c c M - b b m}\right)}$ ita \sqrt{a} seu velocitas naturalis acquisita ex descensu libero per altitudinem aequalem ipsi AK ad velocitatem trianguli, quam habebit postquam percurrit spatium aequale ipsi c seu hypothenusae AC; quare ergo velocitas erit = $\sqrt{\left(\frac{a c c M}{c c M - b b m}\right)}$; faciendū nunc porro vt CA ad AK seu c ad a , ita modo inuenta velocitas trianguli $\sqrt{\frac{a c c M}{c c M - b b m}}$ ad $\sqrt{\frac{a^3 M}{c c M - b b m}}$ quae erit velocitas realis corporis in directione verticali GE. Q. E. I.

Co

Corollarium.

Hinc quoque patet conseruari quantitatem virium viuarum: nam vis viua trianguli $= \frac{accM}{ccM-bbm}$ $\times (M-m) = \frac{accM^2-accMm}{ccM-bbm}$ et vis viua corporis $= \frac{a^3Mm}{ccM-bbm}$, quae simul sumtae faciunt $\frac{accM^2-accMm+a^3Mm}{ccM-bbm} =$ (ob $cc-aa=bb$) $\frac{accM^2-abbMm}{ccM-bbm} = aM =$ vi viuae quam acquireret totum systema graue, si libere ex altitudine verticali et aequali ipsi AK seu a caderet. Q. E. D.

PROBLEMATATA
TRIGONO - SPHAERICA
TRIA
AVCTORE

F. C. Maïero.

Problema I.

IN triangulis sphaericis ZSP et ZTP, communem basem PZ, et aequalia latera PS et PT habentibus, dantur latera ZS et ZT, et anguli ad P: quaeruntur reliqua.

Tabula I.
Fig. V.

Solutio.

Sit sinus lateris ZS = A, eiusque cosinus = C

— — — ZT = a — — — = c.

Tom. V.

D

angu-

$$\begin{array}{l} \text{Sinus anguli ZPS} = P \text{ eiusque cosinus} = Q \\ - \quad - \quad \text{ZPT} = p \quad - \quad - \quad = q \\ - \quad \text{laterum PS, PT} = t \quad - \quad - \quad = z \\ - \quad \text{basis ZP} = x \quad - \quad - \quad = y \end{array}$$

Quoniam hoc pacto omnia triangulorum latera denominata sunt, angulorum ad P cosinus exprimere licet per regulam a me saepius allegatam atque ita aequationes formare uti sequitur.

$$\begin{array}{l} 1. \quad r \frac{rC-yz}{tx} = Q \text{ item } r \frac{rc-yz}{tx} = q \\ 2. \quad \frac{rC-yz}{z} = \frac{tx}{r} \quad - \quad \frac{rc-yz}{q} = \frac{tx}{r} \end{array}$$

Ex binis hisce fit

$$\begin{array}{l} 3. \quad - \quad - \quad r q C - q y z = r Q c - Q y z \\ 4. \quad - \quad - \quad y z = r \frac{Qc-qc}{Q-q} \end{array}$$

Si fiat sinus semisummae angulorum ad P = M, et sinus semidifferentiae = N, erit $Q - q = \frac{2MN}{r}$ adeoque

$$5. \quad - \quad y z = r r \frac{Qc-qc}{2MN}$$

Ex aequationibus primis formantur quoque

$$6. \quad rC-yz = \frac{Qtx}{r} \quad - \quad - \quad rc-yz = \frac{qtx}{r}$$

exinde

$$7. \quad yz = \frac{rrC-Qtx}{r} \quad yz = \frac{rrc-qtx}{r}$$

Ex binis his habetur

$$8. \quad - \quad rrC - Qtx = rrc - qtx$$

$$9. \quad - \quad tx = r r \frac{c-c}{Q-q}$$

Ponatur sinus semisummae laterum ZS et ZT = m et sinus semidifferentiae = n. erit $C - c = \frac{2mn}{r}$ adeoque

$$10. \quad tx = \frac{rrmn}{MN}$$

Ex

Ex regulis aliis, mihi saepe allegatis, constat effecosinum summae laterum quaesitorum (PZ et PS) $= \frac{yz-tx}{r}$ et cosinum differentiae esse $= \frac{yz+tx}{r}$. Substituantur ergo ex aequationibus 5 et 10. valores aequivalentes, vt prodeant duae regulae vna pro summa quaesitorum, altera pro differentia, quibus repertis ipsa quaesita, vti notum est, habentur.

Est igitur

$$11. \frac{yz-tx}{r} = \frac{(r+Q)c-(r+q)C}{2MN} r = \frac{(r+Q)c-(r+q)C}{Q-q}$$

Ponatur tangens semianguli ZPS = T et tangens semianguli ZPT = t, erit $r+Q = \frac{rP}{T}$ et $r+q = \frac{rP}{t}$, quibus suffectis habetur cosinus summae vt sequitur:

$$12. \frac{yz-tx}{r} = rr \frac{Ptc-pTC}{2MNTt}$$

Cosinus differentiae eodem modo definitur.

$$13. \frac{yz+tx}{r} = r \frac{(r-q)C-(r-Q)c}{2MN} = r \frac{(r-q)C-(r-Q)c}{Q-q}$$

Retentis semiangulorum tangentibus T et t supra adhibitis erit $r-q = \frac{tp}{r}$ et $r-Q = \frac{TP}{r}$ quibus surrogatis, prodit cosinus

$$14. \frac{yz+tx}{r} = \frac{tpC-TPc}{2MN}$$

Hisce regulis inueniuntur summa et differentia laterum quaesitorum, ex istis vero duo numeri quibus latera quaesita definiuntur: sed incertum est vter numerus vtri lateri tribuendus sit. In casibus tamen specialibus semper patet quomodo distribuendi sint.

Iacobus Bernoulli Problema in Tractatu *de Cometis* proposuit, quod non nisi specialis casus est praesentis problematis; ponit nimirum arcum $ZT=90^\circ$, adeoque $c=0$. item angulum $ZPS=90^\circ$, et per consequens $Q=0$: inde fit angulus ZPT quadrante maior ut pro q ponendum sit $-q$. et r sit $=-r \frac{yz-tz}{r} = \frac{-r p C}{t q} = \frac{-BC}{t}$ (posito $\frac{r p}{q} = B =$ tangenti anguli ZPT .) item $\frac{yz+tz}{r} = \frac{t p C}{r q} = \frac{t BC}{r r}$. Inde patet quam facilis calculus requiratur ad solutionem problematis *Bernoulliani*.

Problema Trigonometricosphaer. II.

Fig. VI.

1. In triangulis Sphaericis SPZ et sPZ basi PZ et angulum ad Z communes habentibus, sint dati anguli omnes ad P , itemque latera PS et Ps : quaeruntur reliqua.

Solutio.

Sit igitur

Sinus lateris $PS=A$, et cosinus $=C$.

— — $Ps=a$, — — $=c$.

Sinus anguli $ZPS=P$, et cosinus $=Q$.

— — $ZPs=p$, — — $=q$.

Sinus baseos $PZ=x$ et cosinus $=y$ et tangens $=T$

Sinus anguli ad $Z=t$ — — $=z$.

Per notam inter sinus laterum et sinus angulorum oppositorum analogiam, habetur sinus lateris

teris

teris $ZS = \frac{AP}{r}$, ponatur autem breuitatis gratia $=f$, eiusque cosinus $=g$.

Quoniam hoc modo in triangulo SPZ omnia latera denominata sunt, erit (per regulam a me in II. Tom. Comment. pag. 24. traditam)

1. $z = \frac{rC - gy}{fx} r$ adeoque

2. $\frac{rrC - fzx}{y} = rg$

et porro per eandem regulam

3. $Q = r \frac{rC - Cy}{Ax}$ et inde

4. $rg = \frac{AQx + rCy}{r}$.

Ex 2da et 4ta fit

5. $rrrC - rfzx = AQxy + rCyy$.

substituatur $yy = rr - xx$.

6. $rrrC - rfzx = AQxy + rrrC - rCxx$.

deletis aequalibus, factaque diuisione per x .

7. $rfz = rCx - AQy$.

et quia $f = \frac{AP}{r}$, fit

8. $\frac{rx}{r} = \frac{rCx - AQy}{AP}$.

Eadem operatio in altero triangulo PZs reddit

9. $\frac{rz}{r} = \frac{rcx - aqy}{ap}$, sic ex 8va et 9na fit

10. $rAPcx - rapCx = -AQapy + aqAPy$

atque ita

11. $\frac{rx}{y} = T = Aa \frac{Pq - pQ}{APc - apC}$ Q. E. I.

2. Vt regula inuenta breuis reddatur, notandum est, quod $\frac{Pq - pQ}{r}$ sit sinus anguli SPs, hunc ponam $=b$, ita fit $rb = Pq - pQ$; quo substituto, regula est $= \frac{rbAa}{APc - apC}$. Praeterea diuisione per Aa ,

D 3

obti-

Obtinebitur $\frac{r b A a}{A P c - a p C} = \frac{r b}{\frac{p c}{a} - \frac{p c}{A}}$. Sumta deinde
 N pro cotangente lateris PS, et n, pro cotan-
 gente lateris Ps, erit $\frac{N}{r} = \frac{c}{A}$ et $\frac{n}{r} = \frac{c}{a}$, quibus sur-
 rogatis, regula tandem simplicissima habetur =
 $\frac{r r b}{p n - p N}$ siue potius $\frac{r r b}{p N - p n}$. Quia in aequatione 11.
 debuisset fieri $T = \frac{p Q - p q}{a p C - \Delta p c} A a$.

3. Per problema hoc inuenitur altitudo poli
 PZ, ex datis duarum stellarum declinationibus,
 earumque transitibus per verticalem communem
 ZSs: (namque ex hisce noti fiunt anguli ad P
 horarii). Inueniuntur quoque, azimuthum PZs, et
 altitudines verae ZS, Zs.

4. Si declinationes stellarum incognitae fue-
 rint, poterit ratio inueniri, quam habent tangen-
 tes declinationum; scilicet, earundem stellarum
 transitus obseruentur quoque per alium vertica-
 lem ZMN a priore diuersum. Ponatur in hoc
 altero transitu sinus anguli ZPM = M, et sinus
 anguli ZPN = m, item sinus anguli MPN = d.
 Quoniam in utroque casu latus PZ manet inua-
 riabile erit

$$1. \quad \frac{r r b}{p N - p n} = \frac{r r d}{m N - m n}$$

$$2. \quad p d N - P d n = b m N - b M n.$$

$$3. \quad (p d - b m) N = (P d - b M) n.$$

adeoque

$$N : n = (P d - M b) : (p d - m b). \quad Q. E. I.$$

5. Quod

5. Quod si vnus stellae cognita est declinatio, inuenitur alterius declinatio per problema praesens; quod quidem per se patet.

Problema Trigonometricosphaer. III.

1. In triangulis Sphaericis PZS et PZs, communem basin PZ, et latera ZS, Zs aequalia habentibus, sunt cogniti anguli ad P, et latera PS, Ps; quaeruntur reliqua.

Fig. VII.

Solutio.

Sit sinus lateris PS = A, cosinus = C.

— — Ps = a, — = c.

cosinus anguli SPZ = Q.

— — sPZ = q.

cosinus lateris ZS (= Zs) = y.

sinus baseos ZP = t, cosinus = z et cotangens = v

Cum in triangulo SZP denominata sint omnia latera, per ea definitur cosinus anguli SPZ, scilicet

1. $Q = \frac{ry - Cz}{Ac} r.$

2. $AQt + rCz = rry.$

eodem modo est

3. $q = \frac{ry - cz}{at} r, \text{ et}$

4. $atq + rcz = rry. \text{ Sic ex 2da et 4ta fit}$

5. $(AQ - aq)t = r(c - C)z$

6. $\frac{AQ - aq}{c - C} = \frac{rz}{t} = v. \text{ Q. E. L}$

2. Vt

32 PROBLEMATATA TRIGONOSPHERICA &c.

2. Vt regula brevis fiat, ponatur sinus semisummae laterum PS, Ps , esse $= f$, et sinus semidifferentiae $= g$, ita habetur $c - C = \frac{2fg}{r}$, quo valore suffecto regula abit in hanc $r \frac{\Delta Q - aq}{2fg}$.

3. Per hoc problema innotescit altitudo poli, ex cognitis duarum stellarum declinationibus, earumque transitibus per communem (ignotam licet) altitudinem.

4. Si declinationes cognitae non sunt, poterit ratio inueniri quae est inter cosinus declinationum, obseruando nimirum earundem stellarum transitus per alium a priore diuersum Almucantarat. Ponamus tum esse cosinum anguli $TPZ = M$ et cosinum anguli $tPZ = m$, erit

$$1. \quad r \frac{\Delta Q - aq}{2fg} = r \frac{\Delta M - am}{2fL}. \text{ siue}$$

$$2. \quad \Delta Q - \Delta M = aq - am.$$

$$3. \quad A: a = (q - m) : (Q - M). \quad Q. E. I.$$

5. Si fiat sinus semisummae angulorum SPZ et $tPZ = K$, et semidifferentiae $= L$. Item sinus semisummae angulorum sPZ et $tPZ = k$ et sinus semidifferentiae $= l$, erit $Q - M = \frac{2KL}{r}$ et $q - m = \frac{2kl}{r}$, adeoque prior analogia abit in hanc

$$A: a = kl : KL.$$

6. Data vnus stellae declinatione, inuenitur hac methodo declinatio alterius; inuenitur enim ratio cosinum declinationum vtriusque stellae.

Sin-



SINGVLARIS MODVS
OBSERVANDI SIDERVM DECLINATIONES
ET ALTITVDINEM POLL.
AVCTORE
F. C. Maiero.

I.

Declinationum inuentio cognitam poli altitudinem vulgo supponit, et vicissim altitudinis polaris inuentio requirit stellae alicuius declinationem notam; turbantur et eiusmodi inquisitiones a refractionibus. Incommodis hinc mereri conatus sum, modum nuper (d. 29. Maii 1729.) ostendens, qui praeter obseruationis possibilitatem nil supponit; visa tamen est bonitati methodi officere azimutha obseruandi difficultas. Hanc igitur euitare studui, nouumque modum excogitavi quo paria praestare licet. Eum nunc describam. Tabula III.

2. Eligantur duo circuli verticales, ignota licet azimutha, itemque duo almucantarati quorum itidem altitudines scire necesse non est; sint igitur duae stellae ignotarum declinationum, quae per quatuor istos circulos motu diurno transire possunt; obseruentur momenta transituum, item-

Toma. V.

E

Ex.

34 SINGVLARIS MODVS OBSERVANDI

que culminationes, vt hoc pacto innotescant anguli horarii ad polum.

Fig. 1.

Ex gr. ZO et ZR sunt verticales, quorum azimutha HO et HR ignota sunt. AB et BC sunt duo almucantarati, quorum altitudines AH et BH ignotae sunt quoque. DI et ES sunt paralleli duarum stellarum; f, g, A et λ sunt transitus stellarum per verticales, quorum momenta obseruare oportet ope horologii; m, n, p, q , sunt transitus stellarum per almucantaratos quos notare itidem oportet. Factis hisce obseruationibus, noti sunt anguli horarii ad P, quos formant declinationum complementa Pf, Pg, Pl, Pb, Pm, Pn, Pp et Pq, cum altitudine aequatoris PZ.

3. Ex cognitis angulis horariis ad P eruitur ratio quam habent tangentes declinationum quaesitarum, itemque ratio quae est inter cosinus earundem declinationum, ex datis autem duabus rationibus hisce ipsi cosinus vel tangentes, declinationum quaesitarum elicientur, sicuti ex problemate sequente palam fiet.

4. Datis rationibus quas habent duorum arcuum cosinus ad inuicem, itemque tangentes; inuenire ipsos cosinus et tangentes arcuum.

Sit ratio cosinum $= a:b$, et tangentium $= m:n$, cosinus arcus primi sit $= x$, adeoque cosinus

nus secundi = $\frac{bx}{a}$, conficitur inde tangens primi
 = $\frac{r\sqrt{rr-xx}}{x}$ secundi = $\frac{r\sqrt{rraa-bbxx}}{bx}$ et porro analogia

1. $m:n = \frac{r\sqrt{rr-xx}}{x} : \frac{r\sqrt{rraa-bbxx}}{bx}$
2. $m\sqrt{rraa-bbxx} = bn\sqrt{rr-xx}$.
3. $mmrraa-bbrrnn = mmbbxx - nnbbxx$.

$$\frac{r\sqrt{aamm-bn}}{bm\sqrt{nn}} = x. \quad \text{Q. E. I.}$$

5. Declinationibus sic inuentis, poli altitudo eruitur porro per ea quae alibi tradidi. Quin et verticalium vsurpatorum azimutha, et almucantaratorum altitudines prono calculo definiuntur, quorum aliquis vsus ad refractiones manifestandas et ad alias obseruationes faciendas esse potest.

6. Apparatus ad obseruationes huc pertinentes fere nullus est. Varia quidem possunt excogitari artificia, quibus verticale et almucantarati requisiti constituuntur; vt stellarum ad eos appulsus notari possit; sed multis non est opus; fila pendentia aut baculi perpendiculariter erecti, ferrei, rotundi, repraesentant verticale, quorum vnus dioptris tycho nicis versatilibus instructus est, quae pauca obseruationi transituum per verticale abunde satisfaciunt; transitus autem per Almucantaratos vulgari quadranti nullo fere negotio obtinentur. Solum horologium superest quo mensura aliqua capitur certa, et ex qua declinationes, polique altitudo eliciuntur. Quo ipso patet methodum hanc nec a refractionibus turbari, nec cognitae aliarum rerum mensuras supponere, nec tandem obseruationum difficultate premi.

DE PROGRESSIONIBVS TRANS-
CENDENTIBVS, SEV QVARVM TERMINI
GENERALES ALGEBRAICE DARI
NEQVEVNT.

Auct. L. Eulero.

I.

Cum nuper occasione eorum, quae Cel. *Goldbach* de seriebus cum Societate communi-
cauerit, in expressionem quandam generalem
inquirerem, quae huius Progressionis $1+1. 2+1. 2. 3+1. 2. 3. 4+$ etc. terminos omnes daret; inci-
di considerans, quod ea in infinitum continuata
tandem cum geometrica confundatur in sequen-
tem expressionem, $\frac{1 \cdot 2^n \cdot 2^{1-n} 3^n \cdot 3^{1-n} 4^n \cdot 4^{1-n} 5^n}{1+n \cdot 2+n \cdot 3+n \cdot 4+n}$
etc. quae dictae progressionis terminum ordine n
exponit. Ea quidem in nullo casu abrumpitur,
neque si n est numerus integer neque si fractus,
sed ad quemuis terminum inueniendum tantummo-
do approximationes suppeditat, nisi excipiantur
casus $n=0$, et $n=1$, quibus ea actu abit in 1. Po-
natur $n=2$, habebitur $\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6}$ etc. = ter-
mino secundo 2. Si $n=3$ habebitur $\frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 1 \cdot 4} \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 5} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{3 \cdot 3 \cdot 6}$
 $\frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 7}$ etc. = termino tertio 6.

§. 2. Quanquam autem haec expressio nul-
lum usum habere videatur in inuentione termi-
norum

norum; tamen ad interpolationem eius seriei, seu ad terminos, quorum indices sunt numeri fracti egregie accommodari potest. De hoc autem hic explicare non constitui, cum infra magis idonei modi occurrant ad idem efficiendum. Id tantum de isto termino generali afferam, quod ad ea, quae sequuntur quasi manuducat. Quaesivi terminum cuius index $n = \frac{1}{2}$, seu qui aequaliter interiacet inter primum 1, et praecedentem qui itidem est 1. Posito autem $n = \frac{1}{2}$, affectus sum seriem $\sqrt{\frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{6.8}{7.7} \cdot \frac{8.10}{9.9}}$ etc. quae terminum quaesitum exprimit. Haec autem series similis mihi statim visa est eius, quam in *Wallisii* operibus pro area circulari vidisse memineram. Inuenit enim *Wallisus* circulum esse ad quadratum diametri vt 2.4.4.6.6.8.8.10 etc. ad 3.3.5.5.7.7.9.9. etc. Si igitur fuerit diameter = 1, erit circuli area = $\frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{4.6}{5.5} \cdot \frac{6.8}{7.7}$ etc. Ex huius igitur cum mea conuenientia concludere licet, terminum indicis $\frac{1}{2}$ esse aequalem radici quadratae ex circulo, cuius diameter = 1.

§. 3. Arbitratus eram ante seriei 1, 2, 6, 24, etc. terminum generalem, si non algebraicum tamen exponentialem dari. Sed postquam intellexissem terminos quosdam intermedios a quadratura circuli pendere, neque algebraicas neque exponentiales quantitates ad eum exprimendum idoneas esse cognoui. Terminus enim generalis eius

E 3

pro-

progressionis ita debet esse comparatus, vt tum quantitates algebraicas tum a quadratura circuli tum forte ab aliis quoque quadraturis pendentes comprehendat; id quod in nullam formulam nec algebraicam nec exponentialem competit.

§. 4. Cum autem considerassem, dari inter quantitates differentiales eiusmodi formulas, quae certis in casibus integrationem admittant et tum quantitates algebraicas praebeant, in aliis vero non admittant et tum quantitates a quadraturis curuarum pendentes exhibeant; animum subiit huiusmodi forte formulas ad progressionis memoratae aliarumque eius similium terminos generales suppeditandos aptas esse. Progressiones vero, quae tales requirunt terminos generales, qui algebraice dari nequeunt, voco transcendentem; quemadmodum Geometrae omne id, quod vires communis Algebrae superat, transcendens appellare solent.

§. 5. Id ergo meditatus sum, quomodo formulas differentiales ad progressionum terminos generales exprimendos accommodari maxime conveniat. Terminus autem generalis est formula, quam ingrediuntur tum quantitates constantes, tum alia quaequam non constans vt n , quae ordinem terminorum seu indicem exponit: vt si tertius terminus desideretur oporteat loco n ponere 3. Sed in formula differentiali quantitatem quandam variabilem

riabilem inesse oportet. Pro qua non consultum est adhibere n , cum eius variabilitas non ad integrationem pertineat: sed postquam ea formula integrata est vel integrata esse ponitur, tum demum ad progressionem formandam inferuiat. In formula igitur differentiali insit oportet quantitas quaedam variabilis x , quae autem post integrationem alii ad progressionem spectanti aequalis ponenda est; et quod oritur, proprie est terminus, cuius index est n .

§. 6. Vt haec clarius concipiantur, dico $\int p dx$ esse terminum generalem progressionis sequenti modo ex eo eruendae; denotet autem p functionem quaecunque ipsius x , et constantium in quarum numero adhuc ipsum n haberi debet. Concipiatur $\int p dx$ integratum talique constante auctum, ut facto $x = 0$ totum integrale euanescat, tum ponatur x aequale quantitati cuidam cognitae. Quo facto in inuento integrali nonnisi quantitates ad progressionem pertinentes supererunt, et id exprimet terminum, cuius index $= n$. Seu integrale dicto modo determinatum erit proprie terminus generalis. Si quidem id haberi potest, non opus est formula differentiali, sed progressio inde formata habebit terminum generalem algebraicum; secus res se habet si integratio non succedit, nisi certis numeris loco n substitutis.

§. 7. Assumsi igitur plures huiusmodi formulas differentiales integrationem non admittentes
nisi

40 DE PROGRESSIONIBVS TRANSCEND.

nisi si ponatur loco n numerus integer affirmati-
uus, vt seriei termini principales fiant algebraici;
et inde progressionem formari. Earum itaque ter-
mini generales in promptu erunt, et a quam
quadratura quique eius termini intermedii pendeant
definire licebit. Hic quidem non plures eiusmodi for-
mulas percurram; sed unicam tantum aliquanto
generaliorum pertractabo, quae valde late patet,
et ad omnes progressionem, quarum quilibet ter-
mini sunt facta constantia ex numero factorum ab
indice pendente accommodari potest; quique factores
sunt fractiones, quarum numeratores et denomi-
natores in progressionem quacunque arithmetica pro-
grediuntur, vt: $\frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \text{etc.}$

§. 8. Sit proposita haec formula $\int x^e dx (1-x)^n$
 $-x)^n$ vicem termini generalis subiens, quae in-
tegrata ita, vt fiat $= 0$, si sit $x=0$; et tum posito
 $x=1$, det terminum ordine n progressionis inde or-
tae. Videamus ergo qualem ea suppeditet progressio-
nem. Est $(1-x)^n = 1 - \frac{n}{1}x + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}x^2 - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3$
etc. Et propterea $x^e dx (1-x)^n = x^e dx - \frac{n}{1}x^{e+1}$
 $dx + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}x^{e+2} dx - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{e+3} dx$ etc. Quare
 $\int x^e dx (1-x)^n = \frac{x^{e+1}}{e+1} - \frac{n \cdot x^{e+2}}{1 \cdot (e+2)} + \frac{n \cdot n-1 \cdot x^{e+3}}{1 \cdot 2 \cdot (e+3)}$
 $- \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot x^{e+4}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (e+4)}$ etc. Ponatur $x=1$, quia
constantis additione non est opus, et habebitur
 $\frac{1}{e+1}$

DE PROGRESSIONIBVS TRANSCEND. 41

$\frac{1}{e+1} - \frac{n}{1 \cdot (e+2)} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot (e+3)} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (e+4)} + \text{etc.}$ terminus generalis seriei inueniendae. Quae talis erit, vt si $n=0$, prodeat terminus $= \frac{1}{e+1}$; si $n=1$ term. $= \frac{1}{(e+1)(e+2)}$, si $n=2$, term. $= \frac{1 \cdot 2}{(e+1)(e+2)(e+3)}$ si $n=3$. prodeat terminus $= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(e+1)(e+2)(e+3)(e+4)}$ lex qua hi termini progrediuntur manifesta est.

§. 9. Hanc ergo affecutus sum progressionem $\frac{1}{(e+1)(e+2)} + \frac{1 \cdot 2}{(e+1)(e+2)(e+3)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(e+1)(e+2)(e+3)(e+4)} \text{etc.}$ cuius terminus generalis est $\int x^e dx (1-x)^n$. Termini vero ordine n ipsius haec erit forma $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n}{(e+1)(e+2) \dots (e+n+1)}$. Haec quidem forma sufficit ad terminos indicum integrorum inueniendos, sed si indices non fuerint integri, ex ea ipsi termini inueniri nequeunt. Iis autem proximis inueniendis inseruit haec series $\frac{1}{e+1} - \frac{n}{1 \cdot (e+2)} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot (e+3)} - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (e+4)} \text{etc.}$ Si $\int x^e dx (1-x)^n$ multiplicetur per $e+n+1$, habebitur progressio cuius terminus ordine n hanc formam habet $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{(e+1)(e+2) \dots (e+n)}$ cuius igitur verus terminus generalis erit $(e+n+1) \int x^e dx (1-x)^n$. Hic obseruandum est, progressionem semper fieri algebraicam, quando loco e assumatur numerus affirmatiuus. Ponatur e. g. $e=2$, progressionis terminus n^{mus} erit $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n+2)}$ seu $\frac{1 \cdot 2}{(n+1)(n+2)}$. Id quod ipse terminus generalis quoque indicat, qui erit $(n+3) \int x x dx (1-x)^n$. Nam eius integrale est $\left(C - \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{2(1-x)^{n+2}}{n+2} - (1-x) \right)$

Tom. V.

F -(1-x)

42 DE PROGRESSIONIBVS TRANSCEND.

$-\frac{(1-x)^{n+3}}{n+3})(n+3)$, vt hoc fiat $= 0$ si $x=0$,
 erit $C = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3}$. Ponatur $x=1$, erit
 terminus generalis $\frac{n+3}{n+1} - \frac{2(n+3)}{n+2} + 1 = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$.

§. 10. Vt igitur progressionem transcenden-
 tes adipiscamur, ponatur e aequale fractioni $\frac{f}{g}$.
 Erit progressionis terminus ordine $n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{(f+g)(f+2g)(f+3g) \dots (f+ng)} g^n$ siue $\frac{g \cdot 2g \cdot 3g \cdot \dots \cdot ng}{(f+g)(f+2g)(f+3g) \dots (f+ng)}$
 Terminus vero generalis erit $= \frac{(f+(n+1)g) \int x^e dx}{g} (1-x)^n$. Qui si diuidatur per g^n , erit pro pro-
 gressionem $\frac{1}{f+g} + \frac{1 \cdot 2}{(f+g)(f+2g)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(f+g)(f+2g)(f+3g)} \dots$ etc.
 cuius terminus ordine n est $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{(f+g)(f+2g)(f+3g) \dots}$. Eius
 progressionis igitur terminus generalis erit $\frac{(f+(n+1)g)}{g}$

$\int x^e dx (1-x)^n$. Vbi si fractio $\frac{f}{g}$ non sit numero
 integro aequalis, seu si f ad g non habuerit ra-
 tionem multiplicem, progressio erit transcendens,
 et termini intermedii a quadraturis pendebunt.

§. 11. Exemplum quoddam in medium af-
 feram, vt vsus termini generalis clarius ob ocu-
 los ponatur. Sit in paragraphi praecedentis pro-
 gressionem priore $f=1$, $g=2$, erit terminus ordi-
 ne $n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$, progressio vero ipsa
 haec $\frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \dots$ etc. cuius terminus generalis
 ergo erit $\frac{2n+3}{2} \int dx (1-x)^n / x$. Quaeratur ter-
 minus

DE PROGRESSIONIBVS TRANSCEND 43

minus cuius index $\frac{1}{2}$; fiet igitur $n = \frac{1}{2}$, et habebitur terminus quaesitus $= 2 \int dx \sqrt{x - xx}$. Quod cum significet elementum areae circularis, perspicuum est terminum quaesitum esse aream circuli, cuius diameter $= 1$. Proposita porro sit haec series, $1 + \frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ etc., quae est coefficientium binomii ad potestatem r eleuati.

Terminus ordine n est ergo $\frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}$

In §. praecedente habetur hic $\frac{(f+g)(f+2g)\dots(f+ng)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$

Hic, vt cum illo comparatur inuertendus est, vt habeatur $\frac{(f+g)(f+2g)\dots(f+ng)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$; multiplicetur hic

per $\frac{n}{(f+ng)}$, et erit is $= \frac{(f+g)(f+2g)\dots(f+(n-1)g)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}$

oportet igitur esse $f+g=r$ et $f+2g=r-1$, vnde fiet $g=-1$ et $f=r+1$. Eodem modo tractetur terminus generalis $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int x^f dx$

$(1-x)^n$. Prohibet pro progressionē proposita $1 + \frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}$ etc., hic terminus generalis,

$\frac{n(-1)^{n+1}}{(r-n)(r-n+1) \int x^{-r-1} dx (1-x)^n$. Sit $r=2$ erit hu-

ius progressionis $1, 2, 1, 0, 0, 0$, etc., terminus generalis $n(-1)^{n+1} : ((2-n)(3-n) \int x^{-3} dx (1-x)^n$).

Hic autem notari debet, hunc casum et alios quibus $e+1$ fit numerus negatiuus, non posse ex generali deduci, quia tunc integrale non non fit $= 0$ si $x=0$. Pro his vero $\int x^e dx (1-x)^n$ peculiari modo integrari conuenit, post integrationem enim constans infinita est adiicienda: quando ve-

44 DE PROGRESSIONIBVS TRANSCEND.

ro $e-1$ est numerus affirmatiuus, vt posui §. 8. constantis additione non est opus. Considerata autem progressionem, cuius terminus ordine n erat sequens, $\frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-n+2)}{1.2.3.\dots(n-1)}$, transmutari potest illa termini exponentis n forma in hanc $\frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{(1.2.3.\dots(n-1)(1.2.\dots(r-n+1))}$. Sed per §. 14. est $r(r-1)\dots(r-n+1) = \int dx (-lx)^r$, et $1.2.3.\dots(n-1)$ est $\int dx (-lx)^{n-1}$ et $1.2.\dots(r-n+1) = \int dx (-lx)^{r-n+1}$. Quamobrem ibi tractatae progressionis $1 + \frac{r}{1} + \frac{r(r-1)}{1.2} + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} + \text{etc.}$ hic habetur terminus generalis $\frac{\int dx (-lx)^r}{\int dx (-lx)^{n-1} \int dx (-lx)^{r-n+1}}$. Si fuerit $r=2$, erit terminus generalis

$$\frac{2}{\int dx (-lx)^{n-1} \int dx (-lx)^{3-n}}$$

cui respondet haec progressio $1, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \text{etc.}$ Vt si quaeratur terminus indicis $\frac{3}{2}$ erit is $= \frac{2}{\int dx (-lx)^{\frac{1}{2}} \int dx (-lx)^{\frac{3}{2}}}$

Dicta ergo area circuli $= A$, cuius diameter est $= 1$, quia est $\int dx (-lx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{A}$ et $\int dx (-lx)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{A}$, erit terminus medium interiucens inter duos primos terminos progressionis $1, 2, 1, 0, 0, 0, \text{etc.}$ huius formae $\frac{4}{3A}$, hoc est $\frac{2}{3}$ quam proxime.

§. 12. Progredior nunc ad progressionem, de qua initio dixi, $1+1.2+1.2.3$ etc. et in qua terminus ordine n est $1.2.3.4.\dots n$. Continetur haec progressio in generali nostra, sed terminus ge-

generalis peculiari modo inde deriuari debet. Hactenus scilicet terminum generalem habui si terminus ordine n est $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{(f+g)(f+2g) \dots (f+ng)}$, qui si ponatur $f=1$ et $g=0$, abit in $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, cuius terminus generalis quaeritur: substituuntur ergo in termino generali $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int f x^{\frac{f}{g}} dx (1-x)^n$, hi valores loco f et g , erit terminus generalis quaesitus $\int \frac{x^0 dx (1-x)^n}{0^{n+1}}$. Qui vero huius expressionis sit valor, sequenti modo inuestigo.

§. 13. Ex conditione, qua huiusmodi termini generales vsui accommodari debent, intelligitur loco x alias functiones ipsius x posse subrogari, dummodo eae tales fuerint, vt sint $=0$ si $x=0$ et $=1$ si $x=1$. Huiusmodi enim functiones si loco x substituuntur, terminus generalis perinde satisfaciet ac ante. Ponatur igitur $\frac{g}{f+g}$ loco x et consequenter $\frac{g}{f+g} x^{\frac{f}{g}}$ loco dx , quo facto habebitur $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int \frac{g}{f+g} dx (1-x)^n$. Iam hic ponatur $f=1$, et $g=0$, habebitur $\int \frac{dx (1-x)^n}{0^{n+1}}$. Cum autem sit $x^0=1$, habemus hic casum, quo numerator et denominator euanescent $(1-x^0)^n$ et 0^n . Per regulam igitur cognitam quaeramus

46 DE PROGRESSIONIBVS TRANSCEND.

ramus valorem fractionis $\frac{1-x^0}{0}$. Id quod fiet quaerendo valorem fractionis $\frac{1-x^z}{z}$ tum, cum z evanescit, differentietur igitur et numerator et denominator sola z variabili posita; habebitur $\frac{-x^z dz lx}{dz}$ seu $-x^z lx$, si iam ponatur $z=0$, prodibit $-lx$. Est itaque $\frac{1-x^0}{0} = -lx$.

§. 14. Cum igitur sit $\frac{1-x^0}{0} = -lx$, erit $\frac{(1-x^0)^n}{0^n} = (-lx)^n$, et propterea terminus generalis quaesitus $\int \frac{dx(1-x^0)^n}{0^n}$ transmutatus est in $\int dx (-lx)^n$. Cuius valor inveniri per quadraturas potest. Quamobrem huius progressionis 1, 2, 6, 24, 120, 720, etc. terminus generalis est $\int dx (-lx)^n$, eodem modo adhibendus, quo supra praeceptum est. Hunc autem esse terminum generalem progressionis propositae ex eo quoque cognoscitur, quod terminos, quorum indices sunt numeri integri affirmatiui, reuera praebeat, sit v. g. $n=3$, erit $\int dx (-lx)^3 = \int -dx (lx)^3 = -x(lx)^3 + 3(xlx)^2 - 6xlx + 6x$ constantis additione opus non est, cum facto $x=0$ omnia evanescant, ponatur igitur $x=1$, quia $l1=0$, omnes termini logarithmis affecti

fecti euanescent et restabit 6, qui est terminus tertius.

§ 15. Verum quidem est, hanc methodum terminorum istius seriei inueniendorum nimis esse operosam, eorum nimirum quorum indices sunt numeri integri, qui vtique facilius continuanda progressionem obtinentur. Verum tamen ad terminos indicum fractorum inueniendos per quam est idonea, quippe qui adhuc ne operosissima quidem methodo definiri potuerunt. Si ponatur $n = \frac{1}{2}$ habebitur respondens terminus $= \int dx \sqrt{-lx}$ cuius valor per quadraturas datur. Sed initio ostendi hunc terminum esse aequalem radici quadratae ex circulo cuius diameter est 1. Hinc quidem idem concludere non licet, ob defectum analysis; infra autem sequetur methodus eosdem terminos intermedios ad algebraicarum curuarum quadraturas reducendi. Ex cuius cum hac comparatione forte nonnihil ad amplificationem analysis deriuari poterit.

§. 16. Progressionis cuius terminus ordine n indicatur per $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{(f+g)(f+2g)(f+3g) \dots (f+ng)}$, terminus generalis est per §. 10. $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int x^f dx$
 $(1-x)^n$. Si autem terminus ordine n fuerit 1. 2. 3. - - - n , tum est terminus generalis $\int dx$
 $(-lx)^n$. Quae formula, si loco 1. 2. 3. - - - n
 sub-

48 DE PROGRESSIONIBVS TRANSCEND.

substituatur, habebitur $\frac{\int dx (-lx)^n}{(f+g)(f+2g) \dots (f+ng)}$
 $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int x^{\frac{f}{g}} dx (1-x)^n$. Ex quo efficitur $(f+g)$
 $(f+2g) \dots (f+ng) = \frac{g^{n+1} \int dx (-lx)^n}{(f+(n+1)g) \int x^{\frac{f}{g}} dx (1-x)^n}$

Quae expressio igitur est terminus generalis huius generalis progressionis $f+g, (f+g)(f+2g), (f+g)(f+2g)(f+3g)$ etc. Huiusmodi igitur progressionum omnium ope termini generalis omnes termini cuiuscunque indicis definiuntur. Quae infra sequentur de reductione $\int dx (-lx)^n$ ad quadraturas notiores seu curuarum algebraicarum, etiam hic usum habebunt.

§. 17. Sit $f+g=1$, et $f+2g=3$, erit $g=2$ et $f=-1$. Vnde orietur haec progressio particularis $1, 1.3, 1.3.5, 1.3.5.7$, etc. Cuius igitur terminus generalis est $\frac{2^{n+1} \int dx (-lx)^n}{(2n+1) \int x^{\frac{3}{2}} dx (1-x)^n}$.

Quanquam hic exponens ipsius x sit negatius, tamen id incommodum, de quo supra dictum, hic locum non habet, cum sit unitate minor. Ponatur $n=\frac{1}{2}$ vt inueniatur terminus ordine $\frac{1}{2}$, erit

$$is = \frac{2^{\frac{3}{2}} \int dx \sqrt{-lx}}{2 \int x^{-\frac{1}{2}} dx \sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{2} \int dx \sqrt{-lx}}{\int \frac{dx - x dx}{\sqrt{x-x^2}}}$$

autem constat dare $\int dx \sqrt{-lx}$ radicem quadratam
ex

ex circulo, cuius diameter = 1, sit peripheria eius circuli p , erit area = $\frac{1}{2}p$, adeoque $\int dx \sqrt{-lx}$ dat $\frac{1}{2} \sqrt{p}$. Deinde $\int \frac{dx - xdx}{\sqrt{x - xx}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{x - xx}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{x - xx}}$ sed $\int \frac{dx}{2\sqrt{x - xx}}$ dat arcum circuli, cuius sinus versus est x . Posito itaque $x = 1$, proueniet $\frac{1}{2}p$. Quamobrem terminus quaesitus erit = $\sqrt{\frac{2}{p}}$.

§. 18. Cum progressionis, cuius terminus ordine n indicatur per $(f+g)(f+2g) \dots (f+ng)$, terminus generalis per §. 16. sit $\frac{g^{n+1} \int dx (-lx)^n}{(f+(n+1)g) \int x^f dx (1-x)^n}$

similiter si terminus ordine n fuerit $(b+k)(b+2k) \dots (b+nk)$, erit terminus generalis $\frac{k^{n+1} \int dx (-lx)^n}{(b+(n+1)k) \int x^b dx (1-x)^n}$.

Diuidatur illa progressio per hanc, nempe terminus primus per primum, secundus per secundum et ita porro: deuenietur ad nouam progressionem, cuius terminus ordine n erit $\frac{(f+g)(f+2g) \dots (f+ng)}{(b+k)(b+2k) \dots (b+nk)}$. Et terminus generalis huius progressionis ex illis duobus compositus erit $\frac{g^{n+1} (b+(n+1)k) \int x^b dx (1-x)^n}{k^{n+1} (f+(n+1)g) \int x^f dx (1-x)^n}$

Qui vacuus est ab integrali logarithmico $\int dx (-lx)^n$.

§. 19. In omnibus huiusmodi terminis generalibus hoc maxime notandum est, non quidem
 Tom. V. G dem

dem loco f, g, b, k numeros constantes poni oportere, sed eos quomodocunque ab n pendentes quoque assumi posse. In integratione enim eae literae perinde atque n tractantur, omnes tanquam constantes. Sit terminus ordine n hic $(f+g)(f+2g) \dots (f+ng)$, ponatur $g=1$, sed $f = \frac{2n-n}{2}$. Quia progressio ipsa est $(f+g), (f+g)(f+2g), (f+g)(f+2g)(f+3g)$ etc. ponatur ubique x loco g , erit ea, $f+x, (f+x)(f+2x), (f+x)(f+2x)(f+3x)$. Sed loco f scribi debet in termino primo 0 , in secundo 1 , in tertio 3 ; in quarto 6 et ita porro, prodibit haec progressio $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, etc. cuius igitur ter-

$$\text{minus generalis } \frac{2 \int dx (-lx)^n}{(nn+n+2) \int x^{\frac{n-1}{2}} dx (1-x)}$$

$$\frac{2 \int dx (-lx)^n}{(nn+n+2) \int dx (x^{\frac{n-1}{2}} - x^{\frac{n+1}{2}})^n}$$

§. 20. Accedo nunc ad eas progressionem, unde compendium illud in definiendis terminis intermediis huius progressionis $1, 2, 6, 24, 120$, etc. tactus sum. Id enim fatius patet quam ad hanc solam progressionem, quoniam eius terminus generalis $\int dx (-lx)^n$ etiam in infinitarum aliarum progressionum terminos generales ingreditur. Aff-

fermo hunc terminum generalem $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int x^{\frac{f}{g}}$
 $dx (1-x)^n$, cui respondet terminus ordine n hic

$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{(f+g)(f+2g)(f+3g) \dots (f+ng)}$. Pono hic $f=n$, $g=1$,
 erit terminus generalis $(2n+1) \int x^n dx (1-x)^n$ vel
 $(2n+1) \int dx (x-xx)^n$ et forma eius ordine n ,
 $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}{(n+1)(n+2)(n+3) \dots (2n)}$. Progressio vero ipsa
 haec $\frac{1}{2}$, $\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4}$, $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6}$, etc. vel haec $\frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 2}$, $\frac{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$,
 $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$ etc. In qua numeratores sunt quadra-
 ta progressionis 1. 2. 6. 24. inter denominatores
 vero duos proximos aequidistantes facile inuenitur.
 Sit in progressionem 1, 2, 6, 24, etc. terminus,
 cuius index $\frac{1}{2}$, A, erit progressionis illius termi-
 nus ordine $\frac{1}{2} = \frac{AA}{1}$.

§. 21. Ponatur in termino generali $(2n+1) \int x^n dx (1-x)^n$, $n = \frac{1}{2}$ erit terminus huius exp-
 onentis $= 2 \int dx \sqrt{x^2 - xx} = \frac{AA}{1}$, unde $A = \sqrt{1 \cdot 2 \cdot \int dx \sqrt{x^2 - xx}}$
 $\sqrt{x^2 - xx} =$ termino progressionis 1, 2, 6, 24, etc.
 cuius index est $\frac{1}{2}$, qui ergo ut ex eo elucet est
 radix quadrata ex circulo diametri 1. Dicatur
 nunc terminus huius progressionis ordine $\frac{3}{2}$, A,
 erit respondens in assumpta progressionem $= \frac{AA}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
 $4 \int dx (x-xx)^{\frac{3}{2}}$ ergo $A = \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \int dx (x-xx)^{\frac{3}{2}}}$
 Simili modo inuenitur terminus ordine $\frac{5}{2} = \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \int dx (x-xx)^{\frac{5}{2}}}$
 $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \int dx (x-xx)^{\frac{5}{2}}$. Ex quibus generaliter
 concludo terminum ordine $\frac{p}{2}$ fore $= \sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (p+1) \int dx (x-xx)^{\frac{p}{2}}$. Hoc igitur modo
 inueniuntur omnes termini progressionis, 1, 2, 6,
 24, etc. quorum indices sunt fractiones denomi-
 natore existente 2.

G 2

§. 22.

32 DE PROGRESSIONIBVS TRANSCEND.

§. 22. Porro in termino generali $\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}$

$\int x^f dx (1-x)^n$, pono $f=2n$ manente $g=1$, prodibit $(3n+1) \int dx (xx-x^3)^n$ terminus generalis huius progressionis $\frac{1}{3}, \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 6}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{7 \cdot 8 \cdot 9}$ etc. Multiplicetur ille per praecedentem $(2n+1) \int dx (x-xx)^n$, prodibit $(2n+1)(3n+1) \int dx (x-xx)^n \int dx (xx-x^3)^n$. Qui dabit hanc progressionem $\frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6}$ etc. vbi numeratores sunt cubi terminorum respondentium progressionis 1, 2, 6, etc. Huius progressionis terminus ordine $\frac{1}{3}$ sit A, erit respondens illius $\frac{1}{3} = 2 \left(\frac{2}{3} + 1\right) \int dx (x-xx)^{\frac{1}{3}} \int dx (xx-x^3)^{\frac{1}{3}}$, ergo terminus ordine $\frac{1}{3}$ est $\sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot \frac{5}{3}} \int dx (x-xx)^{\frac{1}{3}} \int dx (xx-x^3)^{\frac{1}{3}}$ similiter term. ordine $\frac{2}{3}$ est $\sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{7}{3}} \int dx (x-xx)^{\frac{2}{3}} \int dx (xx-x^3)^{\frac{2}{3}}$. Atque terminus ordine $\frac{4}{3}$ est $\sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{11}{3}} \int dx (x-xx)^{\frac{4}{3}} \int dx (xx-x^3)^{\frac{4}{3}}$ et generaliter terminus ordine $\frac{p}{3}$ est $\sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p \cdot \left(\frac{2p+1}{3}\right)} (p+1) \int dx (x-xx)^{\frac{p}{3}} \int dx (xx-x^3)^{\frac{p}{3}}$.

§. 23. Si ulterius progredi velimus, ponenda $f=3n$, oportebit terminum generalem $(4n+1) \int dx (x^3-x^4)^n$ in praecedentes multiplicare, unde habetur $(2n+1)(3n+1)(4n+1) \int dx (x-xx)^n \int dx (x^2-x^3)^n \int dx (x^3-x^4)^n$ qui est pro hac serie $\frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \frac{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$ etc. Ex qua definiuntur termini pro-

DE PROGRESSIONIBVS TRANSCEND. 53

progressionis 1, 2, 6, 24, etc. quorum indicet sunt fractiones denominatorem 4 habentes. Nimirum

terminus cuius index est $\frac{p}{4}$ inuenietur $= \sqrt[4]{1.2.3.}$

$--- p. (\frac{2p}{4} + 1) (\frac{3p}{4} + 1) (p + 1) \int dx (x - xx)^{\frac{p}{4}} \int dx (xx - x^3)^{\frac{p}{4}} \int dx (x^3 - x^4)^{\frac{p}{4}}$. Hinc generaliter concludere

licet terminum ordine $\frac{p}{q}$ esse $= \sqrt[q]{(1.2.3. --- p)}$

$((\frac{2p}{q} + 1) (\frac{3p}{q} + 1) (\frac{4p}{q} + 1) --- (p + 1)) (\int dx (x$

$- xx)^{\frac{p}{q}} \int dx (x^2 - x^3)^{\frac{p}{q}} \int dx (x^3 - x^4)^{\frac{p}{q}} --- \int dx (x^{q-1}$

$- x^q)^{\frac{p}{q}}$. Ex hac igitur formula termini cuius-

cunque indicis fracti inuenientur per quadraturas

curvarum algebraicarum: ad id autem requiritur

(1.2.3. --- p) terminus cuius index est numerator

fractionis propositae.

§. 24. Eodem modo ulterius progredi licet

ad progressionem magis compositas, assumendis

terminis generalibus magis compositis, sed ea lon-

gius non persequor. Possunt etiam signa inte-

gralia multiplicari, vt terminus generalis sit $\int q dx$

$\int p dx$ nimirum integrale ipsius $p dx$ debet multi-

plicari per $q dx$, et quod resultat denuo integra-

ri, id quod demum dabit facto $x = 1$ termi-

num seriei. In vtraque autem integratio-

ne, vt sit determinata, oportet addenda constan-

te efficere, vt posito $x = 0$, integrale fiat itidem

$= 0$. Similiter tractandi sunt termini generales,

§4 DE PROGRESSIONIBVS TRANSCEN.D

qui pluribus signis integralibus continentur vt $\int r dx$
 $\int q dx \int p dx$. Attamen semper loco p, q, r etc. ta-
 les sunt sumendae functiones, vt, quoties n fue-
 rit numerus integer affirmatiuus, prodeant ter-
 mini ad minimum algebraici.

§. 25. Sit terminus generalis $\int \frac{dx}{x} x^e dx (1-x)$
 hic in seriem conuersus dat $\frac{x^{e+1}}{(e+1)^2} \dots \frac{n \cdot x^{e+2}}{1 \cdot (e+2)^2}$
 $+\frac{n \cdot n-1 \cdot x^{e+3}}{1 \cdot 2 \cdot (e+3)^2}$ etc. Posito $x=1$, habebitur ter-
 minus ordine n per hanc seriem $\frac{1}{(e+1)^2} - \frac{n}{1 \cdot (e+2)^2}$
 $+\frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2 \cdot (e+3)^2}$ etc. Progressio vero ipsa haec erit
 a termino cuius index est 0 incipiens $\frac{1}{(e+1)^2}$,
 $\frac{(e+2)^2 - (e+1)^2}{(e+2)^2(e+1)^2}$, $\frac{(e+3)^2(e+2)^2 - 2(e+3)^2(e+1)^2 + (e+2)^2(e+1)^2}{(e+3)^2(e+2)^2(e+1)^2}$,
 $\frac{(e+4)^2(e+3)^2(e+2)^2 - 3(e+4)^2(e+3)^2(e+1)^2 + 3(e+4)^2(e+2)^2(e+1)^2 - (e+3)^2(e+2)^2(e+1)^2}{(e+4)^2(e+3)^2(e+2)^2(e+1)^2}$
 etc. Lex huius progressionis
 manifesta est, et non indiget explicatione. Sit
 $e=0$, erit $\int dx (1-x)^n = \frac{1-(1-x)^{n+1}}{n+1}$ ergo termi-
 nus generalis est $\int \frac{dx - dx(1-x)^{n+1}}{(n+1)x}$, progressio ve-
 ro haec erit $\frac{1}{1}, \frac{4-1}{4 \cdot 1}, \frac{9 \cdot 4 - 2 \cdot 9 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{9 \cdot 4 \cdot 1}, \frac{16 \cdot 9 \cdot 4 - 3 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 1 + 3 \cdot 16 \cdot 4 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 1}{16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1}$ etc. Huius differentiae hanc con-
 stituent progressionem, $\frac{-1}{4 \cdot 1}, \frac{-9+4}{9 \cdot 4 \cdot 1}, \frac{-16 \cdot 9 + 2 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 4}{16 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1}$
 etc.

§. 26. In hac dissertatione ergo id, quod
 praecipue intendi, assecutus sum; nempe vt ter-
 minos

DE PROGRESSIONIBVS TRANSCEND. 55

minos generales inuenirem omnium progressionum, quarum singuli termini sunt facta ex factoribus in progressionem arithmetica progredientibus, in quibusque numerus factorum vt libuerit ab indicibus terminorum pendeat. Quanquam autem hic semper numerus factorum indici aequalis positus sit, tamen si is alio modo inde pendens desideretur, res nihil habet difficultatis. Index denotatus est litera n , si iam quis requirat vt numerus factorum sit $\frac{n+1}{2}$, alia operatione opus non est, nisi vt vbique loco n substituatur $\frac{n+1}{2}$.

§. 27. Coronidis loco adhuc aliquid, curiosum id quidem magis quam utile adiungam. Notum est per $d^n x$ intelligi differentiale ordinis n ipsius x , et $d^n p$, si p denotet functionem quampiam ipsius x , ponaturque dx constans, esse homogeneum cum dx^n , semper autem, quando n est numerus integer affirmatiuus, ratio quam habet $d^n p$ ad dx^n algebraice potest exprimi, vt si $n=2$ et $p=x^3$, erit $d^2(x^3)$ ad dx^2 vt $6x$ ad x . Quaeritur nunc si n sit numerus fractus, qualis tunc futura sit ratio. Difficultas in his casibus facile intelligitur, nam si n est numerus integer affirmatiuus, d^n continuata differentiatione inuenitur, talis autem via non patet, si n est numerus fractus. Sed tamen ope interpolationum progressionum, de quibus in hac dissertatione explicauimus, rem expedire licebit.

§. 28

§ 28 DE PROGRESSIONIBVS TRANSCEND.

§. 28. Sit inuenienda ratio inter $d^n(z^e)$ et dz^n posito dz constante, seu requiritur valor fractionis $\frac{d^n(z^e)}{dz^n}$. Videamus primo qui sint eius valores si n est numerus integer, vt postmodum generaliter illatio fieri possit. Si $n=1$. erit eius valor $e z^{e-1} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot e}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (e-1)} z^{e-1}$, hoc modo e exprimo, vt facilius postea ea quae tradita sunt huc referantur. Si $n=2$, erit valor $e(e-1) z^{e-2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot e}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (e-2)} z^{e-2}$. Si $n=3$, habebitur $e(e-1)(e-2) z^{e-3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot e}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (e-3)} z^{e-3}$. Hinc generaliter infero quicquid sit n fore semper

$\frac{d^n(z^e)}{dz^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot e}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (e-n)} z^{e-n}$. Est autem per §. 14,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot e = \int dx (-lx)^e \text{ et } 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (e-n) = \int dx (-lx)^{e-n}.$$

Quare habetur $\frac{d^n(z^e)}{dz^n} = z^{e-n}$

$$\frac{\int dx (-lx)^e}{\int dx (-lx)^{e-n}} \text{ vel } d^n(z^e) = z^{e-n} dz^n \frac{\int dx (-lx)^e}{\int dx (-lx)^{e-n}}.$$

Ponitur hic dz constans et $\int dx (-lx)^e$ vt et $\int dx (-lx)^{e-n}$ ita debent integrari, vt supra praeceptum est, et tum ponere oportet $x=1$.

§. 29. Non necesse est, quomodo verum eliciatur, ostendere, apparebit id ponendo loco n numerum integrum affirmatiuum quemcunq; Quaecratur autem quid sit $d^{\frac{1}{2}}z$, si sit dz constans. Erit ergo

$$e=1 \text{ et } n=\frac{1}{2}. \text{ Habebitur itaque } d^{\frac{1}{2}}z = \frac{\int dx (-lx)}{\int dx \sqrt{-lx}} \sqrt{z dz}$$

$\sqrt{z} dz$. Est autem $\int dx(-lx) = x$ et dicta area circuli A, cuius diameter est x , erit $\int dx \sqrt{-lx} = \sqrt{VA}$, unde $d^{\frac{1}{2}} z = \sqrt{\frac{z dz}{A}}$. Proposita igitur sit haec aequatio ad quampiam curvam $y d^{\frac{1}{2}} z = z \sqrt{dy}$, ubi dz ponitur constans, et quaeratur qualis ea sit curua. Cum sit $d^{\frac{1}{2}} z = \sqrt{\frac{z dz}{A}}$ abibit ea aequatio in hanc $y \sqrt{\frac{z dz}{A}} = z \sqrt{dy}$, quae quadrata dat $\frac{y^2 dz}{A} = z dy$: unde inuenitur $\frac{1}{A} lz = c - \frac{1}{y}$, vel $y lz = cAy - A$, quae est aequatio ad curuam quaesitam.

PROBLEMATIS

DE

STATIONIBVS PLANETARVM

CASVS ALTER.

AVCTORE

F. C. Maiero.

Sint datae duorum Planetarum orbitae ad eclipticae planum reductae, earumque positio; sit quoque data vnus distantia a Sole: Quaeritur distantia alterius stationaria.

Maiores orbitae axis AB sit = A.
 eiusdem eccentricitas dupla OF sit = F.
 eiusdem parameter ——— = P.

Tom. V.

H

Di-

58 DE STATIONIBVS PLANETARVM

Distantia planetae maioris OS fit = D.

In minore orbita fit parameter = p

distantia planetae OI = d.

Haec interioris orbitae distantia sumatur vt data: ergo et angulus IOF, quo axium positio definitur.

Sinus anguli FOI = s, cosinus = c.

Habetur autem praeterea ex natura ellipsos

Cofinus anguli FOS = $r \frac{2AD-AP}{2DF} = N$, eiusque sinus = M.

ex conditione stationis est

$$\text{Cofinus anguli SOI} = r D d \frac{P^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}}}{DDp^{\frac{1}{2}} + ddP^{\frac{1}{2}}} = q,$$

eiusque sinus = p.

Inde fit porro (ob angul. SOI = ang. FOI - ang. FOS):

$$1. \frac{Nc + Ms}{r} = q, \text{ ergo, } rq - Nc = Ms.$$

quadrandō fit

$$2. r^2 q^2 - 2rqNC + N^2 c^2 = M^2 s^2 = r^4 - r^2 N^2 - r^2 c^2 + N^2 c^2.$$

$$3. r^2 q^2 + r^2 c^2 + r^2 N^2 - 2rqNc - r^4 = 0:$$

facta substitutione aequivalentium, et diuisione per r^2 habetur

$$4. \begin{cases} r^2 D^2 d^2 \frac{P + 2\sqrt{Pp} + p}{(DDp^{\frac{1}{2}} + ddP^{\frac{1}{2}})^2} + r^2 A^2 \frac{(2D - P)^2}{4D^2 F^2} \\ - r c A d \frac{(2D - P)(P^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}})}{F(D^2 p^{\frac{1}{2}} + d^2 P^{\frac{1}{2}})} + cc - rr = 0. \end{cases}$$

Praecedens aequatio quarta ducatur in $4DDFF (DDp^{\frac{1}{2}} + ddP^{\frac{1}{2}})^2$.

$$5. \left\{ \begin{aligned} &4r^2 D^4 d^2 F^2 (P + P_{\frac{1}{2}} p_{\frac{1}{2}} + p) + r^2 A^2 (2D - P)^2 \\ &(DDp_{\frac{1}{2}} + ddP_{\frac{1}{2}})^2 - - - - \\ &- 4rcdAD^2 F(2D - P)(P_{\frac{1}{2}} + p_{\frac{1}{2}})(DDp_{\frac{1}{2}} + d/P_{\frac{1}{2}}) \\ &- 4s^2 D^2 F^2 (DDp_{\frac{1}{2}} + ddP_{\frac{1}{2}})^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Haec vero porro in ordinem redigatur

$$6. \left\{ \begin{aligned} &D^5 - rA \frac{2cdFp_{\frac{1}{2}} + 2cdFP_{\frac{1}{2}} + rApp_{\frac{1}{2}}}{c^2F^2p_{\frac{1}{2}} + r^2App_{\frac{1}{2}}} D^5 - \\ &\frac{+ 4r^2 d^2 F^2 P + 4r^2 d^2 F^2 p + 8r^2 A^2 P_{\frac{1}{2}} p_{\frac{1}{2}} d^2 + r^2}{4p(c^2F^2 + r^2AP)} \\ &\frac{A^2 P^2 p + 4rcdAFP_{\frac{1}{2}} p_{\frac{1}{2}} + 4crdAFPp + 8c^2 d^2 F^2 P_{\frac{1}{2}} p_{\frac{1}{2}}}{D^4} - \end{aligned} \right.$$

$$6. \left\{ \begin{aligned} &- 2rAd^2 P_{\frac{1}{2}} \frac{rApp_{\frac{1}{2}} + cdFp_{\frac{1}{2}} + cdFP_{\frac{1}{2}}}{p(c^2F^2 + r^2AP)} D^3 + d^2 P \\ &\frac{r^2 A^2 P_{\frac{1}{2}} p_{\frac{1}{2}} + 2rcdAFP + 2rcdAFP_{\frac{1}{2}} p_{\frac{1}{2}} + 2c^2 F^2 + 2r^2 d^2 AP}{2p(c^2F^2 + r^2AP)} D^2 \\ &\frac{r^2 A^2 d^4 p^2}{p(r^2 AP + c^2 F^2)} D + \frac{d^4 r^2 P^3 A^2}{4(r^2 AP + c^2 F^2)p} = 0. \end{aligned} \right.$$

Potest haec aequatio diuidi per aliam quadratici ordinis, vt postea patebit.

Scholion.

2. Idem problema potest aliter et breuius Fig. 3. solui, ita quidem vt aequatio non nisi quatuor dimensionum prodeat. Debent autem in subsidium adhiberi duo sequentia Lemmata.

Lemma I.

3. In omni quadrilatero FOIS, [positis OF = F, OI = d, SI = M, SF = N, OS = D, et FI = m]

$$= m] \text{ est, } F^2 d^2 + F^2 m^2 + d^2 m^2 + M^2 m^2 + M^2 N^2 \\ + m^2 N^2 - m^4 = F^2 D^2 + F^2 N^2 + D^2 N^2 + M^2 d^2 - \\ M D^2 + d^2 D^2 - D^4.$$

Nam $\triangle IOS + \triangle OSF = \triangle FIS + \triangle FIO$. Horum vero triangulorum areae exprimi possunt per sua latera, [quod aliunde notum est] igitur ad aequationem devenitur sequentem, $2D^2 d^2 + 2D^2 M^2 + 2M^2 d^2 - D^4 - d^4 - M^4 + 2D^2 F + 2D^2 N^2 + 2F^2 N^2 - D^4 - F^4 - N^4 = 2M^2 m^2 + 2M^2 N^2 + 2N^2 m^2 - M^4 - m^4 - N^4 + 2m^2 d^2 + 2m^2 F^2 + 2F^2 d^2 - m^4 - d^4 - F^4$, deletis vtrunque aequalibus, et divisione facta per 2, habetur $D^2 d^2 + D^2 M^2 + d^2 M^2 + D^2 F + D^2 N^2 + F^2 N^2 - D^4 = M^2 m^2 + M^2 N^2 + m^2 N^2 + m^2 d^2 + m^2 F^2 + d^2 F^2 - m^4$. Q. E. D.

Lemma 2.

4. Quadratum lineae SI (fig. 1.) iungentis planetas stationarios est $= \frac{D^4 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 P_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 p_{\frac{1}{2}} + d^4 P_{\frac{1}{2}}}{D^2 p_{\frac{1}{2}} + d^2 P_{\frac{1}{2}}}$

Ponatur linea SI = Z, ita fiet cosinus anguli SOI (per trigonometriae praecepta) $r \frac{D^2 + d^2 - Z^2}{2Dd}$ idem vero cosinus stationis tempore est $= r D d \frac{P_{\frac{1}{2}} + p_{\frac{1}{2}}}{D^2 p_{\frac{1}{2}} + d^2 P_{\frac{1}{2}}}$, ergo facta reductione aequationis legitima habetur $Z^2 = \frac{D^4 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 P_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 p_{\frac{1}{2}} + d^4 P_{\frac{1}{2}}}{D^2 p_{\frac{1}{2}} + d^2 P_{\frac{1}{2}}}$.

Q. E. D.

So-

Solutio Problematis altera.

5. Ducantur ex foco F lineae FI et FS, vt Fig. 2.
 obtineatur quadrilaterum FOIS, sumaturque linea
 FI vt data, quae nimirum situm axium determi-
 net; et ponatur esse = m. Est et praeterea OI
 = d, OS = D, OF = F, FS = A - D, et SI =
 $\frac{\sqrt{(D^4 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 P_{\frac{1}{2}} + d^4 P_{\frac{1}{2}})}}{\sqrt{(D^2 p_{\frac{1}{2}} + d^2 P_{\frac{1}{2}})}}$. Ex hisce po-

fitis aequatio formatur per Lemma 1. § 2., vti
 sequitur.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & F^2 d^2 + F^2 m^2 + d^2 m^2 + D^2 m^2 + A^2 m^2 - 2ADm^2 \\
 & - m^4 + m^2 \frac{D^4 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 P_{\frac{1}{2}} + d^4 P_{\frac{1}{2}}}{D^2 p_{\frac{1}{2}} + d^2 P_{\frac{1}{2}}} + \\
 & (A^2 - 2AD + D^2) \frac{(D^4 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 P_{\frac{1}{2}} + d^4 P_{\frac{1}{2}})}{D^2 p_{\frac{1}{2}} + d^2 P_{\frac{1}{2}}} \\
 & = 2F^2 D^2 + F^2 A^2 + D^2 A^2 + D^2 d^2 - 2F^2 AD - \\
 & 2D^3 A + d^2 \frac{D^4 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 P_{\frac{1}{2}} + d^4 P_{\frac{1}{2}}}{D^2 p_{\frac{1}{2}} + d^2 P_{\frac{1}{2}}} \\
 & + D^2 \frac{D^4 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 p_{\frac{1}{2}} - D^2 d^2 P_{\frac{1}{2}} + d^4 P_{\frac{1}{2}}}{D^2 p_{\frac{1}{2}} + d^2 P_{\frac{1}{2}}}.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Inde fit porro.

$$\begin{aligned}
 2. \left\{ \begin{aligned}
 & \left[\begin{aligned}
 & + m^2 \\
 & - d^2 \\
 & - F^2
 \end{aligned} \right] D^4 + 2A \left[\begin{aligned}
 & - m^2 p_{\frac{1}{2}} \\
 & + d^2 p_{\frac{1}{2}} \\
 & + F^2 p_{\frac{1}{2}} \\
 & + 2d^2 P_{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \right] D^3 - \left[\begin{aligned}
 & + F^2 A^2 p_{\frac{1}{2}} \\
 & + d^2 A^2 p_{\frac{1}{2}} \\
 & + m^4 p_{\frac{1}{2}} \\
 & - F^2 d^2 p_{\frac{1}{2}} \\
 & - F^2 m^2 p_{\frac{1}{2}} \\
 & - A^2 m^2 p_{\frac{1}{2}} \\
 & - d^4 p_{\frac{1}{2}} \\
 & + 2A^2 d^2 P_{\frac{1}{2}} \\
 & + 2F^2 d^2 P_{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \right] D
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

62 DE STATIONIBVS PLANETARVM.

$$-2Ad^2P_{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{array}{l} d^2 \\ m^2 \\ -F^2 \end{array} \right\} D + d^2P_{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{array}{l} F^2 d^2 \\ F^2 m^2 \\ 2m^2 d^2 \\ A^2 d^2 \\ A^2 m^2 \\ -m^4 \\ -F^2 A^2 \\ -d^4 \end{array} \right\} = 0.$$

Fiat cosinus anguli FOI = c, ut habeatur $m^2 = \frac{rd^2 - 2Fcd}{r}$ hoc valore in aeq. 2. substituto, ceterisque bene obseruatis, emerget

$$3. \left\{ \begin{array}{l} D + \frac{Fcp_{\frac{1}{2}}}{rdP_{\frac{1}{2}}} AD + \frac{APFcrp_{\frac{1}{2}}}{Fcp_{\frac{1}{2}}} + \frac{\left\{ \begin{array}{l} APFcrp_{\frac{1}{2}} \\ A^2 r^2 dP_{\frac{1}{2}} \\ F^2 r^2 dP_{\frac{1}{2}} \\ -2Fd^2 rcp_{\frac{1}{2}} \\ +2F^2 c^2 dp_{\frac{1}{2}} \end{array} \right\} D^2}{2rcFp_{\frac{1}{2}}} \\ + \frac{Ad^2P_{\frac{1}{2}}}{Fcp_{\frac{1}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} rd \\ -F \end{array} \right\} D - \frac{d^2P_{\frac{1}{2}}}{2Frcp_{\frac{1}{2}}} \left\{ \begin{array}{l} APFrc \\ 2F^2 c^2 d \\ -A^2 dr^2 \\ -F^2 dr^2 \end{array} \right\} \end{array} \right\} = 0.$$

Potest haec aequatio in factores resolui hoc modo.

$$\left(\frac{2Fcp_{\frac{1}{2}}}{rdP_{\frac{1}{2}}} D^2 - 2AD - AP \right) \left(2D^2 - 2AD + AP - 2d^2 + \frac{2Fcd}{r} \right) = \frac{4P^2 c^2 d^2}{r^2} - 4F^2 d^2 - A^2 P^2,$$

cuius aequationis radix D dabit distantiam alterius planetae, ideoque locum ipsum in orbita sua, in quo est stationarius.

Dan.

Dan. Bernoulli

NOTATIONES DE AEQVATIONIBVS, QVAE PROGREDIUNTVR IN INFINITVM, EARVMQVE RESOLVTIONE PER METHODVM SERIERVM RECVRRENTIVM: VT ET DE NOVA SERIERVM SPECIE.

Praelectio Prima.

I.

Frequentes admodum sunt aequationes, quae sine fine progrediuntur; solent autem hac forma esse praeditae

$$y = x + ax + bx^3 + cx^4 + ex^5 + \text{etc.}$$

aut euanescentibus terminorum alternorum coefficientibus

$$y = x + fx^3 + gx^5 + bx^7 + lx^9 + \text{etc.}$$

vbi coefficientes certa lege instar serierum numericarum se subsequuntur.

§. 2. Tales aequationes exhiberi potissimum solent pro quadraturis aut refectionibus, ita ut dum x rectam aliquam lineam variabilem indicat, exprimat per y spatium aliquod curvilineum, aut arcus lineae curvae, quae isti lineae rectae respondeant; quoniam autem saepenumero solutio desideratur problematis inuersi, quod postulat, ut ex arcu curvae definiatur recta iis re-

spora-

64 DE AEQVATIONIBVS INFINITIS.

spondens, ideo excogitata fuit methodus iauer-
tendi aequationes ad hanc formam

$$x=y+\alpha y^2+\beta y^3+\gamma y^4+\delta y^5+\text{etc.}$$

ita enim inuenitur

$$axx=ayy+2\alpha ay^3+2\beta ay^4+2\gamma ay^5+\text{etc.}$$

$$+a\alpha ay^4+2\alpha\beta ay^5+\text{etc.}$$

$$bx^3=by^3+3\alpha by^4+3\beta by^5+\text{etc.}$$

$$+3\alpha\beta by^5+\text{etc.}$$

$$cx^4=cy^4+4\alpha cy^5+\text{etc.}$$

$$ex^5=ey^5+\text{etc.}$$

Vnde si fuerit

$$(A) \quad y=x+axx+bx^3+cx^4+ex^5+\text{etc.}$$

erit substitutis singulorum terminorum valoribus

$$y=y+\alpha y^2+\beta y^3+\gamma y^4+\delta y^5+\text{etc.}$$

+a	+2\alpha a	+2\beta a	+2\gamma a
+b	+2\alpha\alpha a	+2\alpha\beta a	
	+3\alpha b	+3\beta b	
	+c	+3\alpha\alpha b	
		+4\alpha c	
		+e	

cuius aequationis identitas obtinetur, faciendo
 $\alpha=-a$, $\beta=2a^2-b$, $\gamma=-5a^3+5ab-c$, $\delta=14a^4-21aab+6ac+3bb-e$ etc.

Igitur aequatio (A) aequipollet huic conuersae

$$(B) \quad x=y-\alpha y^2+(\alpha^2-b)y^3-(5\alpha^3-5ab+c)y^4$$

$$+(14\alpha^4-21\alpha ab+6ac+3bb-e)y^5-\text{etc.}$$

§. 3. Quamuis autem, quum in generalibus
 subsistimus non facile perspiciamus legem, qua
 coefficients assumti α , β , γ , δ etc. progrediuntur,
 nisi

nisi post multorum terminorum considerationem, tamen in casibus particularibus ea saepe fit valde obuia. Sic v. gr. cum assumitur aequatio

$$y = x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \text{etc.}$$

haec conuertitur ope aequationis (B) in hanc

$$x = y - \frac{1}{2}yy + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{120}y^5 - \text{etc.}$$

cuius progressionis lex inspicienti cuius apparet.

Prior docet ad dati numeri $\frac{1}{1-x}$ logarithmum (y) accedere, altera ad dati logarithmi (y) numerum $\frac{1}{1-x}$.

§. 4. Exemplum huius rei cum mihi aliquando occurreret, volui periculum facere, an aliquod hac in parte auxilium praestare posset methodus illa singularis, quam in Comment. Tom. 3. exhibui pro inueniendis radicibus aequationum algebraicarum cuiuscunque ordinis, idque sola terminorum additione vel subtractione continua, quod cum tentarem, vidi istam methodum minime nos deficere appropinquare volentes ad radicem aequationis sine fine progredientis, dum modo certa ratione vtamur: in eo autem cardo rei vertitur, vt series, quae ad leges loco citato exhibitae formanda est pro norma aequationis propositae, quaeque incipit a tot terminis arbitrariis, quot dimensiones habet eadem aequatio, hic incipere fingatur ab infinitis nullionibus, quos omnes excipiat vnitas.

66 DE AEQVATIONIBVS INFINITIS.

§. 5. Sit nempe rursus aequatio (A) et in hac valor ipsius x proxime inueniendus, quod per aequationis conuersionem contenditur. Dico desiderato satisfactum iri, si aequationi (A) talis detur forma,

$$1 = \frac{1}{y}x + \frac{a}{y}rx + \frac{b}{y}x^2 + \frac{c}{y}x^3 + \frac{e}{y}x^4 + \text{etc.}$$

dein ponatur vnitas infinitis nullionibus subsequens hunc in modum

----- o. o. o. o. r.

formeturque postea series ita, vt quilibet terminus sit aequalis aggregato ex suo praecedente multiplicato per $\frac{1}{y}$, eoque qui hunc praecedit multiplicato per $\frac{a}{y}$, et qui hunc praecedit multiplicato per $\frac{b}{y}$ atque sic porro: series haec est

$$\text{----- o. o. o. r. } \frac{1}{y}, \left(\frac{1}{yy} + \frac{a}{y}\right), \left(\frac{1}{y^3} + \frac{2a}{yy} + \frac{b}{y}\right) \\ \left(\frac{1}{y^4} + \frac{3a}{y^3} + \frac{aa}{yy} + \frac{2b}{yy} + \frac{c}{y}\right), \left(\frac{1}{y^5} + \frac{4a}{y^4} + \frac{3aa}{y^3} + \frac{3b}{y^2} + \frac{2c}{yy} + \frac{2ab}{yy} + \frac{e}{y}\right) \text{ etc.}$$

Quibus sic factis, erit penultimus terminus diuisus per vltimum prope aequalis valori quaesito x , et eo quidem propius, quo plures fuerint termini. Erit itaque proxime

$$x = \left(\frac{1}{y^4} + \frac{3a}{y^3} + \frac{aa}{yy} + \frac{2b}{yy} + \frac{c}{y}\right) : \left(\frac{1}{y^5} + \frac{4a}{y^4} + \frac{3aa}{y^3} + \frac{3b}{y^2} + \frac{2c}{yy} + \frac{2ab}{yy} + \frac{e}{y}\right) \text{ vel}$$

$$(C) \quad x = \frac{y + 3aay + (aa + 2b)y^2 + cy^3}{1 + 4ay + (3aa + 3b)yy + (2c + 2ab)y^2 + ey^3}$$

et vbi maiori accuratione opus est facili negotio, et certe multo faciliori saepissime, quam si altera vtimur methodo, propius ad verum valorem accedemus. Lubet autem ad exempla nonnulla descen-

scendere, vt comparatio inter vtramque methodum institui possit.

§. 6. Sit aequatio (D) $1 = \frac{r}{2.3} - \frac{rr}{2.3.4.5} + \frac{r^3}{2.3.4.5.6.7} - \frac{r^4}{2.3.4.5.6.7.8.9} + \frac{r^5}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11} -$
 etc., in quam aliquando directe nulla facta conuerfione incidi, et quae ita est comparata, vt si diameter circuli denotetur per vnitatem, incognita r exprimat quadratum circumferentiae. Inuenitur per methodum paragraphi tertii (posito prius $\frac{r}{2.3} = q$, vt aequatio (C) obtineat formam aequationis (A) $q = \frac{1048067}{873730}$, ergo $r = \frac{6288402}{873730}$ ex quo sequeretur circumferentia circuli = 3.0550. Quod si autem methodo nostra calculum ponamus minore labore prodit numerus multo ve-rior, nempe $q = \frac{4191}{2533}$, et $r = \frac{25146}{2533}$, atque cir- cumferentia circuli = 3.1376.

Notabo hic in transitu, incognitam r in ae- quatione (D) non solum quadratum circumfere- tiae circuli, sed et eiusdem duplum, triplum ac quoduis multipulum exprimere, ita vt illa aequa- tio infinitas habeat radices reales, quarum regula nostra minimam indicat. *Conf. Diff. de seriebus recurr.*

§. 7. Huic exemplo aliud adiungemus inuer- sum, sit scilicet radius circuli = 1, chorda arcus cuiuscunque = x , arcus ipse = z ; notum est conuenire hanc aequationem aptissimam

$$1 - 2 \qquad (D)$$

68 DE AEQVATIONIBVS INFINITIS.

$$(D) z = x + \frac{1}{3 \cdot 2^3} x^3 + \frac{3}{5 \cdot 2 \cdot 2^5} x^5 + \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^7} x^7 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^{11}} x^9 + \text{etc.}$$

Huius aequationis tres tantum terminos priores considerabimus in vtraque methodo, ita vt tum in formula communi (B) tum in nostra (C) fit ponendum $a=0$, $b=\frac{1}{24}$, $c=0$ et $e=\frac{3}{840}$; igitur ex illa fit $x=z - \frac{1}{24} z^3 + \frac{1}{1920} z^5$, ex hac vero $x = \frac{1920z + 160z^3}{1920 + 240zz + 9z^4} = (\text{proxime}) z - \frac{1}{24} z^3 + \frac{1}{1920} z^5 + \frac{1}{7680} z^7$, sic vt neutra notabiliter differat ab altera.

§. Data igitur circumferentia circuli non inapte adhibebuntur hae formulae pro inuestigandis finibus ad datos arcus non admodum magnos: habent etiam formulae huiusmodi vsum in problematis geometricis ad circulum pertinentibus, vbi requiritur vt expressio algebraica pro sinu vel chorda ex assumto arcu adhibeatur proxime satisfaciens; quod si enim arcum posueris z pro radio r , tuto assumes chordam $= z - \frac{1}{24} z^3 + \frac{1}{1920} z^5$, vel $= \frac{1920z + 160z^3}{1920 + 240zz + 9z^4}$, eiusdemque arcus sinum $= z - \frac{1}{8} z^3 + \frac{1}{120} z^5$ vel $= \frac{120 + 40z^2}{120 + 60zz + 9z^4}$. huiusmodi formulas sed reciprocas, quae nimirum ex chorda arcuum proxime definiunt, iam olim dedit *Newtonus*, quas etiam ex aequatione (D) elicuisse mihi visus est.

§. 9. Ex his perspicuum est, satis apte methodum nostram adhiberi pro radice inuenienda
aequatio-

aequationum continuo progredientium, quandoquidem in his exemplis allatis multo rectius procedat, quam ordinaria. Qui autem haec et superiora in Tom. II. exposita recte affecti fuerint, perspicient terminorum omnium in infinitum aliquomodo rationem haberi propter vniformitatem legis, qua termini aequationis progrediuntur, quamuis in constructione radice pauci termini adhibeantur. Et hoc quidem modo fit, quod certe mirabile est, vt quoties aequatio infinita ad finitam reduci potest, id ipsum hac methodo indicetur, simulque radix iusta, recte se habentibus praemissis, constanter oriatur, vbicunque abrumaptur seriei paragraphi quinti constructio, quod a regulis consuetis minime est expectandum. De hoc proxima occasione agam; nunc finiam postquam monuero, succedere posse, vt series §. 5. non vergat ad naturam progressionis geometricae, quo in casu non conuenit valor aequationis (C). Illud tunc fit quando radix illa, quam minimam in Diff. de seriebus recurrentibus vocauit, est imaginaria; quomodo autem huic incommodo obviam iri possit, in eadem docui Dissertatione. His itaque et aliis similibus non amplius immorabimur.

Dan. Bernoulli

NOTATIONES DE AEQVATIONIBVS, QVAE PROGREDIVNTVR IN INFINITVM, EARVMQVE RESOLVTIONE PER METHODVM SERIERVM RECVRRENTIVM: VT ET DE NOVA SERIERVM SPECIE.

Praelectio Secunda.

I.

Postquam in prima harum notationum mearum praelectione ostendi modum generalem inuertendi aequationem, cuius alterutra indeterminata ceu incognita per omnes dimensiones in infinitum transit, in praesentibus potissimum monstrabo egregium consensum atque nexum methodi nostrae cum illis casibus, quibus aequatio infinitorum terminorum in aliam ordinariam finitam transmutari potest. Hunc autem in finem quaedam praemittam circa nouum aliquod serierum genus.

§. 2. Constructio harum serierum in hoc generaliter consistit, vt fingantur numeri data lege quacunqve progredientes, quos ponam esse

(A) $a. b. c. d. e. f.$ etc.

ex his autem formetur talis series

(B) $a.(aa+ab).(a^3+2ab+c).(a^4+3aab+2ac+bb+d)$
 $(a^5+4a^3b+3aac+3abb+2ad+2bc+e).(a^6+5a^4b$
 $c+6$

$+ 4a^2c + 6aabb + 3aad + 6abc + b^3 + 2ae + 2bd + cc + f$) etc. quae ita est comparata, vt quilibet terminus constet ex aggregato omnium praecedentium suo ordine multiplicatorum per a, b, c, d, e, f , etc. et noui termini in serie (A) subsequenti. Ita v.g. tertius terminus seriei (B) est aggregatum ex praecedente $(aa + b)$ multiplicato per a , ex antepaecedente (a) multiplicato per b et ex nouo termino c ex serie data (A) depromto.

§. 3. Singularis est harum serierum proprietas, quod quoties series (A) est algebraica, altera (B) fiat recurrens, seu exponentialis; atque adeo huius terminus generalis cum omnibus independentibus praerogatiuis habeatur. Voco autem seriem algebraicam, cuius terminus generalis habetur expressus per quantitates algebraicas racionales ordinarias, quarum denominatores variabilis non ingreditur, eiusmodi sunt omnes series numerorum figuratorum: series recurrentes quandoque etiam nomine exponentialium designo, quod in termino generali variabilis est in exponente; si modo series non sit recurrens spuria. Pertinent enim series algebraicae quoque ad recurrentes, quas tamen non vt recurrentes veras considero: Notabilem serierum nostratarum praefatam indolem, postquam obseruassem, tentavi modum generalem reducendi seriem B ad recurrentem subpraedicta lege: nec successus me fefellit, vti mox apparebit.

§. 4.

72 DE AEQVATIONIBVS INFINITIS.

§. 4. Sumantur in serie (A) quorumuis duorum terminorum proximorum differentiae, quae constituent seriem; ex hac secunda serie eodem modo formetur tertia, ex hac quarta donec perueniatur ad differentiam constantem, quae natura est huiusmodi serierum. Sit autem primus terminus in prima serie a , in secunda α , in tertia β , in quarta γ et sic porro, donec obtineatur series vltima, cuius singulos terminos inter se aequales vocabo δ , numerum denique harum serierum designabo per l , vel numerum differentiationum per $l-1$. Notetur porro indicem seriei recurrentis, dici $m, n, p, q, \dots r$, quando quivis terminus aggregatum est sui praecedentis per m , huiusque praecedentis per n , et eius qui hunc praecedit per p , et qui hunc per q , et sic deinceps, donec terminus multiplicandus per r occurrat. His ita definitis, fiat series recurrens, cuius termini initiales numero l iidem sint qui in serie B, nempe $a, (aa+b), (a^3+2ab+c), \text{etc.}$ et cuius index $m, n, p, q, \dots r$, se habeat vt sequitur.

$$\begin{aligned}
 m &= a + \frac{1}{1} \\
 n &= a - \frac{l-1}{1} a - \frac{l-1}{1 \cdot 2} \\
 p &= \beta - \frac{l-2}{1} \alpha + \frac{l-1 \cdot l-2}{1 \cdot 2} a + \frac{l-1 \cdot l-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \\
 q &= \gamma - \frac{l-3}{1} \beta + \frac{l-2 \cdot l-3}{1 \cdot 2} \alpha - \frac{l-1 \cdot l-2 \cdot l-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} a - \frac{l-1 \cdot l-2 \cdot l-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 r &= \delta - \dots + \gamma + \beta + \alpha + a + 1.
 \end{aligned}$$

Legem aequationum quivis facile percipiet: notet autem

autem vbique duo signa vltima non reciprocarī, et in postrema aequatione signa superiora valere, cum l est numerus par, at inferiora, cum est impar. Regulam hanc generalem exemplis quibusdam illustrabimus.

Exemplum 1.

§. 5. Sumatur pro (A) series vnitatum, erit $l=1$, $a=1$, reliquae autem litterae α , ρ , etc. $=0$, fiat series recurrens, vel potius in hoc casu geometrica, incipiens ab 1. cuius index simpliciter sit $=a + \frac{l}{2} = 2$, nempe 1. 2. 4. 8. 16. etc. vbi terminus generalis posito x pro exponente termini est 2^{x-1} et quae conuenit cum serie (B).

Exemplum 2.

Exponat iam series (A) numeros naturales 1. 2. 3. 4. 5. 6. etc. fit $l=2$, $a=1$, $\alpha=1$; $\rho=\gamma$ etc. $=0$, sumantur duo primi termini seriei (B) 1 et 3; et ex his constituatur series recurrens, cuius index $=m$, $n=3$, -1 , quae haec est 1. 3. 8. 21. 55. 144. etc. habens pro termino generali $((\frac{3+\sqrt{5}}{2})^x - (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^x) : \sqrt{5}$, quae rursus in praesenti casu cum aequatione (B) plane consentit.

Exemplum 3.

Sit porro loco seriei (A), quae sequitur 2. 2. 5. 11. 20. 32. etc. indicata generaliter per $\frac{3xx-9x+10}{2}$
Tom. V. K pro

74 DE AEQVATIONIBVS INFINITIS.

pro qua valet $l=3, a=2, \alpha=0, \beta=3$ euanescentibus reliquis valoribus. Hic igitur incipiendo a tribus primis terminis seriei (B), qui sunt 2, 6 et 21, et ex his formando seriem exponentialem, quae pro indice habeat 5, -7, 6, nempe hanc 2. 6. 21. 75. 264. 921. etc. deprehendimus adhuc, eam nequicquam differre a proposita (B), cuius terminus generalis data radicum extractione facile inuenitur.

Exemplum 4.

Sit denique (A) 10. -25. -10. 31. 74. 95. 70. etc. representata per terminum generalem $-4x^3 + 49xx - 154x + 119$, vbi $l=4, a=19, \alpha=-35, \beta=50, \gamma=-24$, reliquis in nihilum abeuntibus. Exinde fit (B) 10. 75. 490. 2956. 16944. 93800. etc. Si vero ab huius seriei quatuor primis terminis incipiatur atque ex illis series recurrens indicis 14, -71, 154, -120 formetur, haec eadem series (B) orietur, cuius proin terminus generalis erit $-\frac{1}{3}(2)^{x-2} + 3(3)^{x-1} - \frac{81}{2}(4)^{x-1} + \frac{128}{3}(5)^{x-1}$.

Corollarium I.

§. 6. Si series (A) terminus generalis sit $\frac{x-1}{1} \cdot \frac{x-2}{2} \cdot \frac{x-3}{3} \dots \frac{x-n}{n}$, conueniet series (B) cum serie recurrente, cui index est $\frac{n+1}{1}, -\frac{n+1}{1.2}, \frac{n+1}{1.2.3}, -\frac{n+1}{1.2.3.4} \dots + 1 + 1$, et cuius termini primi numero $n+1$ sunt 0. 0. 0.

--- 1. sic v. gr. si series (A) fuerit numerorum trigonalium 0. 0. 1. 3. 6. 10. 15. 21. etc., erit series (B) 0. 0. 1. 3. 6. 11. 21. 42. etc., ad quam peruenitur si posito $n=2$, formetur series recurrens ex tribus numeris 0, 0, 1, cuius index sit 3, -3, 2: si fiat $n=3$, dat series (A) tales numeros 0. 0. 0. 1. 4. 10. 20. 35. etc., altera (B) autem 0. 0. 0. 1. 4. 10. 20. 36. etc. quae series recurrens est, cuius index est 4, -6, 4, 0. Notetur autem terminum vltimum in indice esse vel 2 vel 0, prouti n fuerit numerus vel par vel impar.

Corollarium 2.

§. 7. Dantur etiam series algebraicae (A) tales vt altera (B) vncias exhibeat binomii ad certam dignitatem eleuati omnibus terminis reliquis in infinitum euanescentibus. Ita si (A) est - 1. - 1. - 1. - 1. - 1. etc. fit (B) - 1. 0. 0. 0. 0. etc. si (A) ponatur - 1. - 2. - 3. - 4. - 5. etc. fit (B) - 2. 1. 0. 0. 0. etc. et pariter si (A) - 3. - 6. - 10. - 15. - 21. - 28. etc. oritur (B) - 3. 3. - 1. 0. 0. 0. 0. etc. Igitur omnes hae series (B) quoque pertinent ad classem recurrentium, sed ita tamen vt termini aliquot postremi in indice sint considerandi, vt aequales nihilo. Hoc modo series dicta numerorum - 3. 3. - 1. 0. 0. 0. 0. etc. considerata est vt recurrens, quae habeat secundum regulam nostram generalem §. 4. indicem 1. 0. 0. 0. ponendo scilicet $l=4$, $a=-3$, $\alpha=-3$, $\beta=-1$, $\gamma=0$, quando-

K 2

quidem

76. DE AEQVATIONIBVS INFINITIS.

quidem ex his positionibus vtraque series (A) et (B) oriatur.

Scholion.

§. 8. Si series (A) sit talis, vt eius termini singuli reales et progressionem algebraicam inter se formantes, sint dato numero nullionum f interpolati, primumque terminum pariter datus numerus nullionum g praecedat, fit series (B) rursus recurrens; si nempe series talis $o. o. - - - o. a. o. o. - - o. b. o. o. - - o. c. o. o. - - o. d. o.$ etc. formeturque ex hac secundum legem §. 2. alia progressio considerando nulliones, vt terminos seriei non negligendos, habeantque se caeterum a, b, c, d etc. vt et $\alpha, \beta, \gamma - - - \delta$, nec non numerus l , vt dictum est in §. 4. erit series (B) genita rursus recurrens cuius indicem breuitatis causa non apponam generalem: exemplum tamen rei vnum alterumve apponam. Sit $f=1, g=0$, formentque litterae a, b, c, d etc. seriem numerorum naturalium $1, 2, 3, 4$ etc. Fit series (A) talis

$1. o. 2. o. 3. o. 4. o. 5. o. 6. o.$ etc. ipsaque (B)

$1. 1. 3. 5. 10. 19. 36. 69. 131. 250. 476.$ etc.

quae recurrens est habens pro indice $1, 2, 0, -7$;

Sit porro pro serie (A)

$0, 1, 0, 0, 3, 0, 0, 6, 0, 0, 10, 0, 0, 15, 0, 0, 21.$ etc.

ex qua generatur series (B)

$0, 1, 0, 1, 3, 1, 6, 7, 9, 22, 46, 71.$ etc. cui ceu recurrenti index est $0, 1, 3, 0, 0, -3, 0, 0, -3, 0, 0, 1.$

.59.

§. 9. Dictae autem series algebraicae siue continuat siue interpolatae non solae sunt quae alteram reddunt recurrentem; nam possunt etiam esse recurrentes qualescunque, haecque vt de algebraicis ostensum est, cum continuat, tum nullionibus interruptae. Sit v. gr. (A) 2.3.5.9.17.33.65.129. etc. cuius seriei terminus generalis est $2^{x-1} + 1^x$ siue $2^{x-1} + 1$, quaeque adeo recurrens est, indice 3, -2 praedita: fit series (B) 2.7.25.90.325.1175.4250.15375. etc. quae itidem recurrens indicem habet 5, -5. Sin autem fuerit (A) 2.0.3.0.5.0.9.0.17.0.33. etc. oritur (B) 2.4.11.28.73.189.491.1274.3308. etc. quae est series exponentialis quarti ordinis, cui index est 2, 3, -3, -2.

§. 10. Tota denique res in hoc consistit theoremate generali, vt si primus seriei (A) terminus intelligatur multiplicatus per x , secundus per x^2 tertius per x^3 et sic in infinitum, sicque habeatur $ax + bxx + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$ etc. respiciendum sit, an haec vltima series infinita in summam finitam algebraice expressam reduci possit nec ne? si prius indicium est, seriem (B) recurrentem fore; tunc autem summa aequalis statuenda est vnitati, posteaque aequationi concilianda est haec forma $1 = ax + \xi xx + \gamma x^3 + \delta x^4 + \dots + \Phi x^l$, quo facto erit index seriei (B) ceu recurrentis $a, \xi, \gamma, \delta, \dots, \Phi$ pertinens ad ordinem l . Si vero exposita series $ax + bxx + cx^3 + dx^4$

K 3

$+dx^4+ex^5+fx^6$ etc. in summam finitam algebraice expressam redigi non possit, erit series (B) transcendens nec formula finita indicari poterit. Et in hoc quidem continetur, quicquid haecenus circa hanc rem monitum fuit.

Iam vero redeo ad id, quod potissimum constitueram; nempe ad modum in prima harum notationum parte expositum inuertendi aequationem sine fine per omnes dimensiones incognitae progredientem, ostensurus nunc aequationes infinitas, cum ad finitas redigi possint, etiamsi non mutatas non aliter tamen resolui hac methodo, quam si prius ad formulam finitam fuissent reducta.

§. 11. Sit igitur aequatio proposita reducta, quod semper fieri potest, ad hanc formam (M)
 $x = ax + bxx + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 +$ etc. Ponantur autem litterae coefficientes $a, b, c, d, e, f,$ etc. progressionem formare, qualis §. 4. posita fuit, reliquasque etiam, $\alpha, \beta, \gamma, \dots \delta,$ ut et l valores suos ibidem definitos seruare. Sic igitur fiet, ut omnes termini aequationis in summam finitam, quod notum est, redigi queant. Si vero lex summae in diuersis casibus recte obseruetur, facile erit generaliter illam definire: hoc autem facto aequatio noua ita disponatur, ut ab vna parte sit vnitas et ab altera stent reliqui aequationis termini. Hoc modo aequatio proposita (M) abit in hanc

$$1 \left(\frac{l}{x} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & 1 \left(x - \frac{l-1}{1 \cdot 2} x x + \frac{l-1 \cdot l-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 - \frac{l-1 \cdot l-2 \cdot l-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \dots + x^l \right) \\
 & + a \left(x - \frac{l-1}{1} x x + \frac{l-1 \cdot l-2}{1 \cdot 2} x^3 - \frac{l-1 \cdot l-2 \cdot l-3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^4 + \dots + x^l \right) \\
 (N) & 1 = + \alpha (\dots x x - \frac{l-2}{1} x^3 + \frac{l-2 \cdot l-3}{1 \cdot 2} x^4 \dots + x^l) \\
 & + \beta (\dots x^3 - \frac{l-3}{1} x^4 \dots + x^l) \\
 & + \gamma (\dots x^4 \dots + x^l) \\
 & \vdots \\
 & + \delta (\dots x^5)
 \end{aligned}$$

Sunt itaque aequationes (M) et (N) aequivalentes; quod si autem prior secundum leges §. 4. partis primae harum notationum, et posterior secundum leges §. 12. dissertationis de seriebus recurrentibus Tom 3. resoluatur, modo numeri initiales requisiti non differant, ex vtraque methodo similis oritur series. Consensus iste clarius intelligetur, si valores §. 4. $m = a + \frac{1}{1}$, $n = a - \frac{l-1}{1} - \frac{l-1}{1 \cdot 2}$ etc. coincidere cum coefficientibus quantitatum x, xx, etc in vltima aequatione (N) obseruatum fuerit.

§. 12. Ex his modo dictis etiam fluunt, quae paragrapho 8. et 9. monita sunt. Ceterum quod dixi §. 5. part. 1. pro inuenienda radice aequationis infinitae intelligendam esse vnitatem infinitis nullionibus impositam, id non ita stricte sumendum esse, quasi non loco simplicis vnitatis quotcunque numeri arbitrarii adhiberi possent, per se patet. Hinc etiam loco seriei (B) §. 2. po-

80 DE AEQUATIONIBVS INFINITIS.

potuisset alia magis composita formari ex eadem serie (A) scilicet intelligendo praeter unitatem numeros $p, q, r, \dots s$ quoscunque, ex quibus series eadem lege construatur, qua series (B)

§. 2. simul autem intelligendo numeros $s, r, q, p, 1$ tanquam primos seriei terminos. Id vero si ita effectum fuerit, dico rursus seriem (B) recurrentem fore, si series (A) sit vel algebraica vel exponentialis eaeque siue purae siue nullionibus interpolatae, et indicem seriei (B) non alium fore; attamen hoc respectu terminos $s, r, q, p, 1$ non censendos pertinere ad seriem (B) Quod ut exemplo magis explicemus, fingemus aequationem resoluendam esse talem

$x = x + 3xx + 6x^3 + 10x^4 + 15x^5 + 21x^6 + 28x^7 +$
etc. Construatur series non incipiendo ut ante a simplici unitate, sed a numeris quocunque arbitrariis, v. gr. ab 3. 2. 1. sic ut sit 3. 2. 1. 25. 70. 216. 679. 2183. etc. quam dico rursus recurrentem esse, si modo tres primi termini 3. 2. 1. assumti a serie excludantur: neque differre indicem ab eo, qui vi regulae §. 4. reperitur nempe esse in hoc casu 4, -3, 1. Possunt itaque innumeris modis aequationes infinitae resolui, qui omnes indicant modum quo istae aequationes ad finitas reduci debeant, quoties id fieri potest. Solet autem methodus §. 5. part. 1. inter omnes esse maxime brevis.

§. 13. Et haec sunt quae de serierum nostrarum usu in resoluendis aequationibus infinitis

mo-

§ 2 DE AEQVATIONIBVS INFINITIS.

summa sub prioribus conditionibus $= \frac{m+n-ma}{1-s}$, vel (si termini m et n non ad seriem pertineant) $= \frac{ms+ns-ma}{1-s}$. Id vero apparet ex eo, quod huiusmodi series compositae semper resolui possunt in plures series simplices multiplicatas per litteram aliquam constantem. Atque hoc modo reperitur summa seriei (B) conueniens quotcunque terminis arbitrariis $m. . . . n. p. q. r.$ initialibus $= m. . . . + n + p + q + r + \frac{(m. . . . + p + q + r)s}{1-s} - \frac{m. . . . - n + p + q}{1-s} a - \frac{(m. . . . + n + p)b}{1-s} - \frac{(m. . . . + n)c}{1-s} - \frac{(m)\Phi}{1-s}$, vbi per Φ intelligitur terminus seriei (A) cuius exponens est numerus terminorum arbitrariorum vnitate diminutus: potest autem haec summa compendiosiori formula exprimi, nempe esse illam aequalem

$$\frac{m. . . . + n + p + q + r - qa - p(a+b) - n(a+b+c) - m(a+b+c) - \Phi}{1-s}$$

SOLVTIO PROBLEMATIS CATOPTRICO-GEOMETRICI

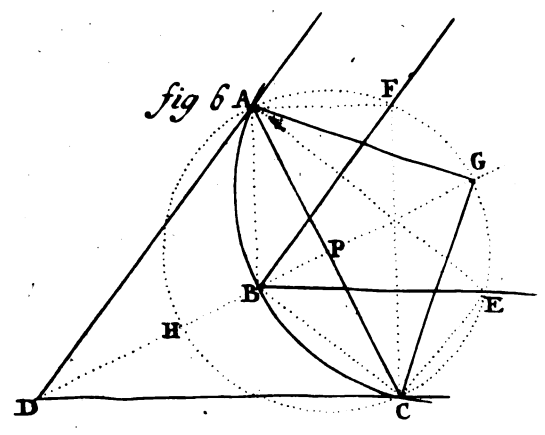
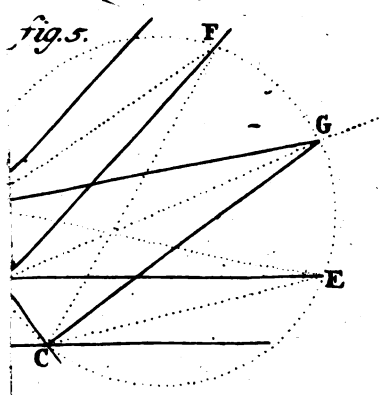
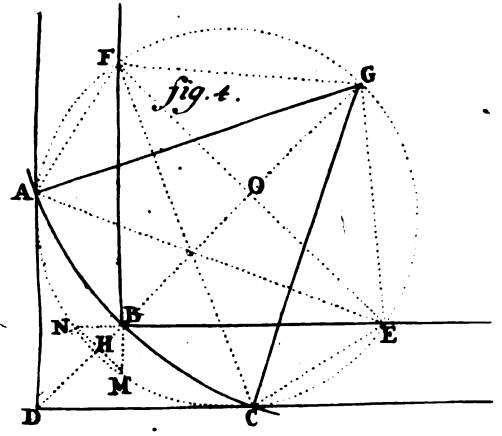
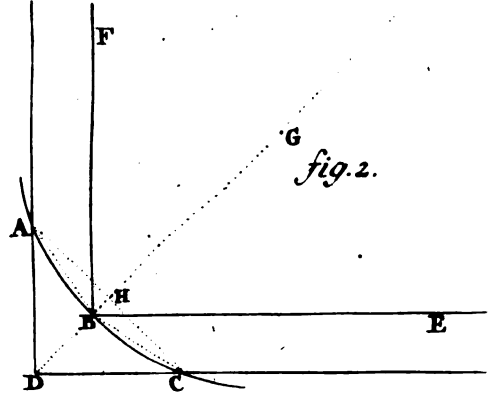
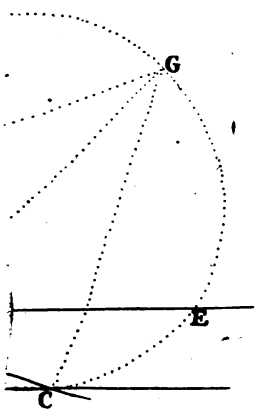
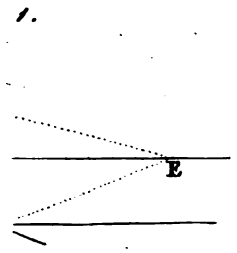
AVCTORE

Georg. Wolffg. Krafft.

§. I.

Tabula III
et IV.

Proposuit, sub finem anni proxime elapsi, *Clariss. Leutmannus* Problema aliquod Geometricum, cuius applicationem ad vsus Catoptri-



optricos, non exigui momenti futuram esse aiebat. Solutionem eius ex Algebrae fontibus deriuaturus statim vidi, eam ita comparatam esse, vt ad aequationes taedio plenas deducat, quaecunque fere optio incognitarum instituatur. Naturam vero huius problematis vltterius circumspiciens deprehendi, id ex eorum numero esse, quae feliciter per *Geometriam Linearem, absque calculo procedentem*, soluantur, quam per *calculus Analyticum*; id quod *Cel. Hermannus* nuperrime in *Tomo IV. horum Commentariorum pag. 47.* exemplo singulari ostendit, et pluribus adhuc confirmari posset.

§. 2. Problema autem *Clar. Leutmanni* hoc est: Sit angulus rectus ADC, huic angulo imponatur speculum sphaericum ABC ita, vt $DA=DC$. Deinde bifecetur arcus AC in B, ex B ducantur BE ipsi DC, et BF ipsi DA, parallelae. Quaeruntur iam in rectis indefinitis BE, BF, duo puncta E et F talia, vt ex eorum vtroque radii incidentes in C et A, in alterum punctorum quaesitorum reflectantur.

Tabula III
Fig. 1.

§. 3. Positis ergo, quae in §. 2. assumta sunt, et ducta recta DG per puncta D et B data, transibit haec DG per centrum speculi AC, et angulum rectum ADC bifecabit. Nam ductis chordis AB et BC erit in triangulis ABD, CBD, $AD=CD$, per hyp. $AB=BC$, ob *bifectum arcum spe-*

Fig. 2.

L 2

culi

culi in B, et DB vtrique communis; ergo trian-
gula ipsa aequalia erunt, et $\text{angulus } ADB = \text{an-}$
 $\text{gulo } CDB$, consequenter vterque semirectus. Du-
cta igitur adhuc chorda AC, quae secet rectam
DG in H, erit in triangulis ADH et CDH, rur-
sus $AD = DC$, $ADH = CDH$ *per modo dem.* et DH
communis vtrique; ergo rursus triangula haec ipsa
aequalia, consequenter $AH = HC$, et $AHD = CHD$,
hoc est, vterque rectus; quare recta DG chordam
AC bifecat ad angulos rectos in H, atque idcirco
per centrum arcus ABC, hoc est, per centrum
speculi, transibit.

Fig. 3.

§. 4. Iam vero quaesita puncta Problematis
facillime sic obtineri dico: *Per data tria puncta*
A, C, et G, describatur circulus, secabit is lineas
indefinitas BE, BF, in punctis desideratis E et F.

§. 5. Quod ut euincatur, demonstrandum pri-
mo est, ducti circuli GAC centrum esse in recta
DBG, iungente punctum bisectionis speculi B, et
verticem anguli recti D. Nam ponatur centrum
speculi, quod (§. 3.) est in recta DG, esse G,
erit ob $GA = GC$, arcus $AFG = \text{arctui } CEG$;
porro ob bisectum in B speculum, erit $\text{angulus } AGB = \text{angulo } CGB$; hinc, quia circulus per tria
puncta G, A, C, transit, erit etiam arcus $AH =$
 $\text{arctui } CH$. Ergo ob $AFG = CEG$, *per modo dem.*
erit etiam $HFG = HEG$, atque idcirco vterque ho-
rum arcuum semicirculus, hoc est, DBG transit
per centrum circuli HFGEH.

§. 6.

Fig. 4

§. 6. Ducantur nunc ex inuentis punctis E et F rectae EC, EA, FA, FC, dico, fore vt, si EC et EA considerentur vt radii incidentes, eorum reflexi sint CF et AF; et vice versa, si FA et FC considerentur vt incidentes, esse eorum reflexos AE et CE. Nam productis EB et FB vsque dum occurrant circulo GFHE in N et M, et ductis chordis NM et FE, quae secant diametrum in H et O, erunt anguli MNE et MFE aequales, quia eidem arcui MCE insistent. Ob eandem rationem aequales etiam sunt anguli NMF et NEF, qui eidem arcui NAF insistent. Sunt vero etiam anguli circa B aequales, quia sunt verticales; ergo triangulum HNB simile est triangulo BFO; et triangulum HMB simile est triangulo BEO, hinc erit analogia $BN: NH = BF: FO$; sed ob angulum FBE bisectum per rectam BG, erit $BF: FO = BE: OE$, ergo habebitur $BN: NH = BE: OE$, vnde triangulum BNH simile erit etiam triangulo BEO; quare porro triangula BFO et BEO similia erunt, et, ob latus BO commune, etiam aequalia; hinc $BF = BE$. Ex quo patet, puncta quaesita F et E, aequaliter a puncto medio speculi B esse remota. Ductis iam porro chordis FG, GE, erunt in triangulis BFG, BEG, $BF = BE$, per dem. angulus FBG = angulo EBG, per dem. § 3. et BG communis utrique, quare haec triangula aequalia erunt, idcirco $FG = GE$, aut arcus FG = arcui GE. Si iam ducantur rectae GC et GA, erunt hi radii speculi AC, et propterea normales punctorum

L 3

Cet

C et A. Sed anguli ECG, FCG; EAG, GAF, insunt arcibus aequalibus FG et GE, quare ipsi hi anguli erunt inter se aequales ex vtraque parte perpendicularium in speculum GC et GA; atque idcirco si EC et EA considerentur vt radii incidentes, erunt, per reflexionis legem, eorum reflexi CF et AF; et vice versa, si FA et FC considerentur vt incidentes, erunt eorum reflexi AE et CE. *Quod erat inueniendum et demonstrandum.*

Fig. 5.

§. 7. Quamuis vero *Clariff. Leutmannus* Problema hoc ad eum tantum casum restrinxerit, quo angulus datus ADC rectus est: extenditur tamen eadem solutio ad omnes casus, in quibus angulus datus ADC est obliquus vel obtusus quicumque; vti facile inuenietur, si quis ratiocinium hucusque adhibitum in angulo obliquo vel obtuso qualicumque ADC repetere velit.

Fig. 6.

§. 8. Imo vero, si loco speculi sphaerici adhibeatur aliud ABC iuxta curuam quamcunque, ita tamen, elaboratum, vt circa punctum medium eius B, rami BA, BC, vtrunque similes sint, et aequales, atque id angulo cuicumque ADC ita sit impositum, vt rursus $DA = DC$: eadem semper, quae antea, constructio locum obtinebit. Nam coniungantur puncta D et B per DG, bisecabit haec recta angulum ADC, et erit simul axis speculi ABC. Ductis enim chordis BA, BC,
et

et AC, quae secet rectam DG in P, erit $AD = CD$ per hyp. $AB = CB$, quia rami BA et BC sunt similes et aequales, et BD communis; quare DG bifecabit angulum ADC. Iam vero in triangulis ADP, CDP, anguli apud D aequales, et praeterea $AD = CD$, et DP communis; hinc dicta triangula aequalia et similia; anguli ad P vtrinque aequales, hoc est, vterque rectus, et $AP = PC$, vnde fit vt ordinatim applicata AC in P bifariam secetur sub angulo recto, et consequenter ipsa DBG sit axis huius curuae ABC.

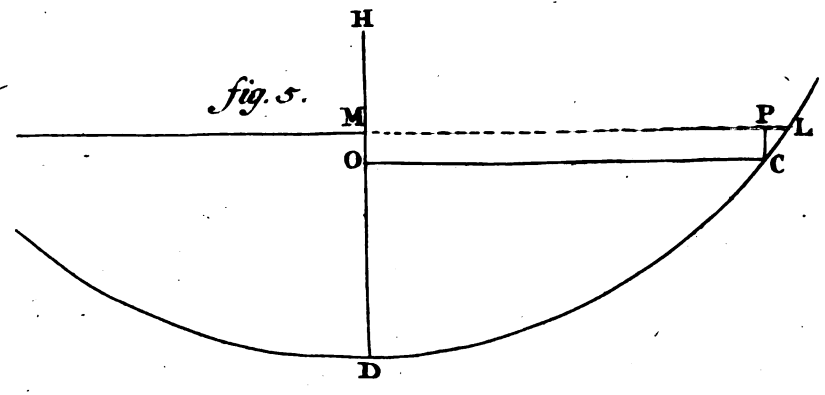
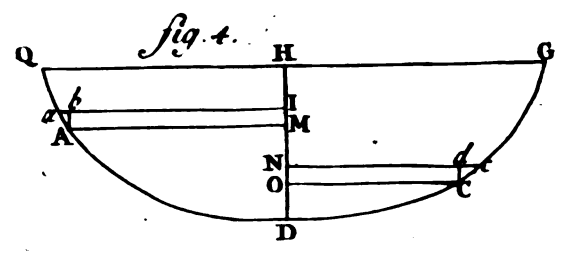
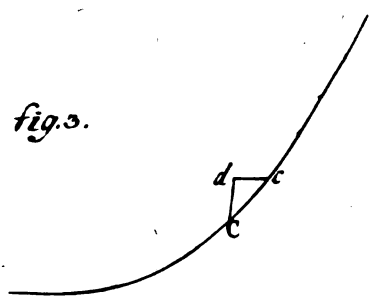
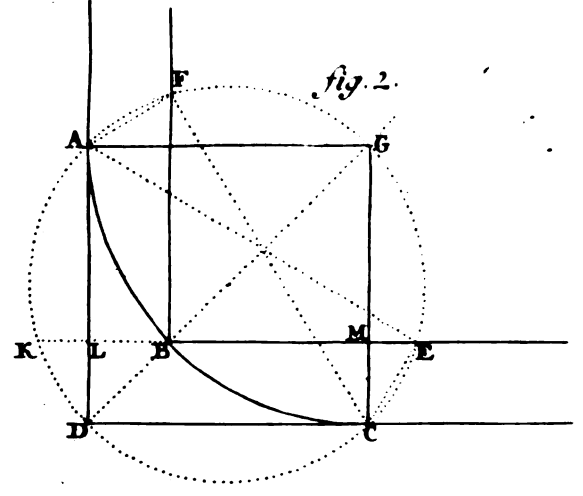
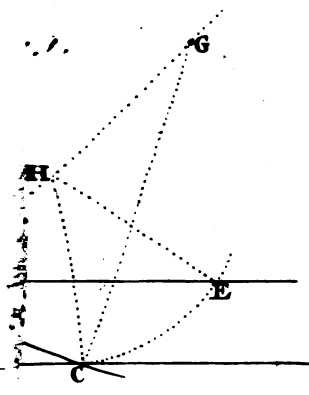
§. 9. Ductis itaque, pro natura curuae ABC data, normalibus AG, CG, ex punctis A et C, secabunt illae axem BG in vno eodemque puncto G, quod facile ex arcibus curuae BA, BC, similibus et aequalibus, per hyp. intelligitur. Inuento sic puncto G, describatur circulus, qui per data tria puncta A, G, C, transeat, secetque rectas BF, BE, in punctis F et E, erunt haec F et E iterum ipsa illa puncta quaesita.

§. 10. Quod, vt confirmem, demonstrandum primo rursus est, centrum circuli AGC in axem DBG incidere debere. Nam ob puncta curuae A et C homologa, et arcus BA, BC, aequales et similes, erunt normales AG, CG, aequales, vnde et arcus circulares AFG et CEG aequales quoque erunt. Est autem in triangulis DAG, DCG, $DA = DC$, $AG = GC$, et DG communis, quare angulus

lus $AGH =$ angulo CGH , et arcus circularis $AH =$ arcui circulari HC , unde arcus $HAG =$ arcui HCG , hoc est, erit vterque semicirculus, et hinc HG diameter, quae consequenter per centrum circuli AGC transit. Hinc pari ratiocinio, quo ante (§. 6.) euincitur, arcus FG et GE esse aequales. Ductis igitur rectis EC , EA , FA , FC , insistent anguli ECC , FCC , GAE , FAG , arcubus circularibus aequalibus GF et GE , proinde erunt omnes aequales. Sunt vero GC et GA ad puncta C et A normales, per construct. quare anguli ECC , GCF , erunt aequales, circa perpendicularem GC , hoc est, si radius EC consideretur vt incidens, erit ipse reflexus CF ; quod pariter etiam de EA , FA , lineis verum esse patet.

Tabula IV.
Fig. 1.

§. 11. Cum autem rarius accidere soleat, vt specula alia in vsus Catoptricos vocari soleant, quam sphaerica, applicabo iam solutionem antea (§. 4.) inuentam ad casum eum, qui frequentissime occurrere potest; nempe ad eum, cuius solutionem *Clariss. Leutmannus* requisit. Sit in hunc finem angulus rectus ADC , speculum sphaericum impositum ABC , ita vt sit $DA = DC$, rectae lateribus anguli parallelae sint BF , BE ; pro inueniendo puncto E ducatur radius CG , deinde ex puncto C recta alia CH , quae faciat angulum GCH aequalem dato HGC , et secet rectam BG in H , denique radio HC , centro H , describatur arcus CE , secans



cans rectam BE in E, puncto desiderato; alterum punctum F inuenietur sumendo $BF = BE$. Nam per hanc constructionem obtinetur centrum circuli, qui per G, C, A, puncta, transire debet, in recta DG, prout esse debet, iuxta §. 5. et ob $HG = HC = HA$, transibit circulus ex H descriptus per indicata tria puncta.

§. 12. Ad praxin iuuandam, si fortasse aliqua ex his speranda sit, indicabo sequentem methodum, cuius ope pro quouis radio speculi, et arcu ABC inquiri potest in distantiam puncti E aut F, a medio speculi puncto B. Cum enim in G supponatur esse centrum speculi sphaerici, datis radio speculi, et dimidio eius arcu BC, dabuntur in triangulo aequicuruo GHC, anguli aequales HGC, et GCH, nec non latus CG; vnde ex his inuenietur latus HG, quod subtractum a radio speculi GB relinquet latus HB. In triangulo igitur HBE dabuntur HB, HE, latera, cum angulo constante $HBE = \frac{1}{2} ADC = \text{semirecto}$, in hoc casu; ex quibus inuenietur desiderata distantia BE aut BF. Computaui hac methodo sequentem laterculum, in quo radius speculi sphaerici BG ponitur esse partium 10000.

ABC Arcus.	BE	ABC Arcus	BE
2.°	7072.	18°	7157.
4.	7075.	20	7177.
6.	7080.	22	7198.
8.	7088.	24	7222.
10.	7098.	26	7248.
12.	7109.	28	7275.
14.	7123.	30.	7304.
16.	7139.		

Tom. V.

M

§. 13.

Fig. 2.

§. 13. Ille casus, quo speculi sectio integrum quadrantem complet, simplicissimus est. Sit enim tale speculum ABC, eius medium B, angulus re-ctus, cui impositus est, ADC, ita vt sit $DA = DC$, centrum speculi in G; describatur ergo per tria puncta G, A, C, circulus GAC, secabit is re-ctas indefinitas BE, BF, in punctis quaesitis E et F. Iam vero ob parallelas AG et KE, erunt ar-cus AK et GE aequales; ductis vero radiis inci-dentibus et reflexis EC, CF; EA, AF; formabun-tur duo triangula EMC, et ELA, similia; sunt enim ad M et L re-cti anguli, et praeterea ECG, AEK, insistent modo dictis aequalibus arcibus, ergo ip-si anguli aequales. Hinc positis cognitis $GC = GA = 1$, $MC = a$, et incognita $ME = x$, erit $MG = LA = 1 - a$, quare ob dictam triangulorum simili-tudinem orietur statim analogia haec: $MC(a) : ME(x) = EL(1+x) : LA(1-a)$ quare $x^2 + x = a - a^2$, et hinc $ME = \pm \sqrt{a - a^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$.

DE

DE SUMMATIONE INNUMERABILIVM PROGRESSIONVM.

Auct. L. Eulero.

I.

QVae in praecedente dissertatione de progressionibus transcendentibus earumque terminis generalibus tradidi, multo latius patent, quam videri possent; et inter alia quam plurima, ad quae accommodari possunt, eximius earum potest esse vsus in inueniendis summis innumerabilium progressionum. Quemadmodum enim in superiore dissertatione innumerae progressionis ad terminos generales sunt reuocatae, quae communem algebram transcendunt; ita hic eandem methodum accommodabo ad terminos summatorios inueniendos progressionum, ad quas indefinite summandas communis algebra non sufficit.

§. 2. Progressio quaequam summari dicitur indefinite, si detur formula numerum indefinitum n continens, quae exponat summam tot terminorum illius progressionis, quot n comprehendit unitates, ita vt si ponatur v. gr. $n = 10$ ea formula exhibeat summam decem terminorum a primo numeratorum. Formula haec vocatur terminus summatorius illius progressionis, atque est simul

M 2

ter-

terminus generalis progressionis, cuius terminus quicumque aequatur summae tot terminorum illius progressionis, quot eius exponens in se continet unitates.

§. 3. Cum progressionibus quaeque exponantur terminis generalibus, quaestio de summendis progressionibus est haec, ut ex termino generali terminus summatorius inueniatur. Et quidem iam eo est peruentum, ut, quoties terminus generalis est functio rationalis ipsius indicis n exponentes sunt numeri integri affirmatiui, semper terminus summatorius inueniri queat. Quando autem exponentes ipsius n sunt negatiui, nisi excipiantur pauci casus, nemo adhuc terminos summatorios dedit. Ratio huius difficultatis est, quod tum termini summatorii plerumque algebraice exprimi nequeant, sed tales requirant formas, quae quadraturas in se contineant.

§. 4. Assumatur haec forma $\int \frac{1-x^n}{1-x} dx$, tanquam terminus generalis cuiusdam progressionis; quae scilicet integrata, ita ut fiat $=0$ si $x=0$ positoque $x=1$ daret terminum ordine n . Progressio quae hoc modo ex ea formatur erit haec $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, etc. cuius ergo terminus generalis est formula assumpta $\int \frac{1-x^n}{1-x} dx$

Series

Series vero haec inuenta summatoria est progressionis harmonicae $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ etc. cuius terminus generalis est $\frac{1}{n}$. Quamobrem huius progressionis terminus summatorius erit $\int \frac{1-x^n}{1-x} dx$, qui illius est terminus generalis.

§. 5. Cum terminus generalis progressionis $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, etc. sit $\int \frac{1-x^n}{1-x} dx$. Poterit ex hoc eam progressio interpolari, seu quilibet terminus medius inueniri: ut si requiratur terminus, cuius index est $\frac{1}{2}$, oportebit integrari $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} dx$ vel $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, cuius integrale est $2\sqrt{x}-2/(1+\sqrt{x})$ quod cum fiat $=0$ si $x=0$, ponatur $x=1$, erit terminus ordine $\frac{1}{2} = 2-2/2$. Deinde, quia generaliter terminus ordine $n+1$, terminum ordine n superat fractione $\frac{1}{n+1}$, erit terminus ordine $1\frac{1}{2} = 2\frac{2}{3}-2/2$, et terminus ordine $2\frac{1}{2}$ hic $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-2/2$, etc. Series igitur interpolata erit

$$2-2/2, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-2/2, \text{etc.}$$

§. 6. Ad hunc modum rem generalius complexus sum, et assumsi formulam $\int \frac{1-P^n}{1-P} dx$, ubi P denotat functionem quamcunque ipsius x. Integrale hoc ut semper ita debet accipi utposito $x=0$; id totum fiat $=0$. Deinde hoc facto

M 3

non

non ut ante pono $x=1$, sed ut latius pateat pono $x=k$. Forma hoc modo resultans erit terminus ordine n progressionis cuiusdam, cuius terminus generalis est forma assumpta $\int \frac{1-P^n}{1-P} dx$. Progressio vero ipsa haec erit $k, k+\int P dx, k+\int P dx + \int P^2 dx$, etc. ubi in integralibus $\int P dx, \int P^2 dx$, etc. loco x iam positum esse k pono.

§. 7. Progressio inuenta, si quivis terminus a sequente subtrahatur, praebebit hanc $k, \int P dx, \int P^2 dx, \int P^3 dx$ etc. Huiusque terminus summatorius aequalis est termino generali praecedentis progressionis, cuius terminus generalis est $\int P^{n-1} dx$, haec formula $\int \frac{1-P^n}{1-P} dx$. Sit $P=x^\alpha: a^\alpha$ erit progressionis huius $k, \frac{k^{\alpha+1}}{(\alpha+1)a^\alpha}, \frac{k^{2\alpha+1}}{(3\alpha+1)a^{2\alpha}}$ etc. terminus generalis $\frac{k^{(n-1)\alpha+1}}{(1+(n-1)\alpha)a^{(n-1)\alpha}}$ atque terminus summatorius hic $\int \frac{a^{n\alpha}-x^{n\alpha}}{(a^\alpha-x^\alpha)a^{n\alpha-a}} dx$.

§. 8. Inventus ergo est terminus summatorius pro omnibus progressionibus quorum termini sunt fractiones, harumque numeratores progressionem geometricam, denominatores vero arithmetica constituant. Ut vero facilius ad omnes casus accommodari possit, sumatur haec progressio,

INNMERABILIVM PROGRESSIONVM. 95

fit, $\frac{b}{c}, \frac{b^{i+1}}{c+e}, \frac{b^{2i+1}}{c+2e}, \frac{b^{3i+1}}{c+3e}$, cuius terminus generalis est $\frac{b^{(n-1)i+1}}{c+(n-1)e}$, comparet ut hic cum illo

$$\frac{k^{(n-1)\alpha+1}}{(1+(n-1)\alpha)a^{(n-1)\alpha}} \text{ vel } \frac{ck^{(n-1)\alpha+1}}{(c+(n-1)\alpha)a^{(n-1)\alpha}} \text{ erit } a \\ = \frac{e}{c} \text{ et } \frac{ck^{\frac{(n-1)e}{c}+1}}{a^{\frac{(n-1)e}{c}}} = b^{(n-1)i+1} \text{ atque } a =$$

$\left(\frac{ck^{\frac{(n-1)e}{c}+1}}{b^{(n-1)i+1}}\right)^{\frac{c}{(n-1)e}} = \left(\frac{ck}{b}\right)^{\frac{c}{(n-1)e}} \frac{k}{b^{\frac{c}{(n-1)e}}}$. Hic ne a pendeat ab n , debet enim a esse constans quantitas, oportet ut $\frac{ck}{b}$ sit $= 1$, erit ergo $k = \frac{b}{c}$, atque $a = \frac{b^{\frac{e-ci}{c}}}{c}$. Quocirca terminus summatorius est

$$\int \frac{b^{\frac{ne-nci}{c}} - c^{\frac{ne}{c}} x^{\frac{ne}{c}}}{b^{\frac{(n-1)(e-ci)}{c}} (b^{\frac{e-ci}{c}} - c^{\frac{e}{c}} x^{\frac{e}{c}})} dx. \text{ Quae ita debet integrari ut fiat } = 0 \text{ si } x=0, \text{ tum vero ponere oportet } x = \frac{b}{c}.$$

§. 9. Cognita summa progressionis indefinita habebitur summa progressionis in infinitum, si ponatur $n = \infty$. Terminus quidem summatorius inuentus non magis ad hunc casum quam ad aliumquemque accommodatus videtur. Est mihi vero alia methodus summas serierum infinitarum inuestigandi, quae latissime patet. Sit series $\frac{b}{c} + \frac{b^{i+1}}{c+1} + \frac{b^{2i+1}}{c+2}$

$\frac{b^{2i+1}}{c+2e}$ etc. Ponatur numerus terminorum n , et summa eorum A . Augeatur numerus n unitate, augetur summa A termino ordine $n+1$, qui est $\frac{b^{n+1}}{c+ne}$. Si nunc n et A tanquam quantitates fluentes considerentur, quia n est quasi infinites major quam 1 , erunt earum differentialia dn et dA inter se ut augmenta 1 et $\frac{b^{n+1}}{c+ne}$. Vnde prodit aequatio $dA = \frac{b^{n+1} dn}{c+ne}$. Quae integrata dabit aequationem inter summam A et numerum terminorum n .

§. 10. Ponatur $l(c+ne) = z$, erit $\frac{edn}{c+ne} = dz$ atque $e+ne = g^z$ denotante g numerum, cuius logarithmus est 1 . Est ergo $n = \frac{g^z - c}{e}$ et $b^{n+1} = b^{\frac{g^z - ci + 1}{e}} = b^{\frac{e-ci}{e}} b^{\frac{g^z}{e}}$, consequenter $dA = \frac{b^{\frac{e-ci}{e}} b^{\frac{g^z}{e}} dz}{e}$. Haec quidem aequatio ita generaliter instituta integrationem nisi per series non admittit. Si vero ponatur $i = 0$, ut prodeat seriei $\frac{b}{e} + \frac{b}{c+e} + \frac{b}{c+2e} + \text{etc.}$, habebitur aequatio $dA = \frac{b}{e} dz$ et $A = \frac{b}{e} z + lC = \frac{b}{e} lC(c+ne)$. Constans quidem C non determinatur, sed tamen aequa-

INNUMERABILIVM PROGRESSIONVM. 27.

aequatio ad definiendam differentiam inter duas summas inferuit: vt sit alius numerus terminorum m , et summa B erit $B = \frac{b}{e} lC(c+me)$. Ergo $A - B = \frac{b}{e} l \frac{c+me}{c+ne} = \frac{b}{e} l \frac{m}{n}$, quia m et n sunt infinita.

§. 11. Maneat $i=0$, et progressio erit haec $\frac{b}{e}, \frac{b}{c+e}, \frac{b}{c+2e}, \frac{b}{c+3e}$ etc. cuius terminus generalis est $\frac{b}{c+(n-1)e}$. Terminus autem summatorius est $\int \frac{b \frac{ne}{c} - c \frac{ne}{c} x \frac{ne}{c}}{b \frac{(n-1)e}{c} (b \frac{e}{c} - c \frac{e}{c} x \frac{e}{c})} dx$. Sumatur alia progressio $\frac{b}{c}, \frac{b}{c+2f}, \frac{b}{c+2f}, \frac{b}{c+3f}$ etc. cuius terminus generalis est $\frac{b}{c+(n-1)f}$ et summatorius $\int \frac{b \frac{nf}{c} - c \frac{nf}{c} x \frac{nf}{c}}{b \frac{(n-1)f}{c} (b \frac{f}{c} - c \frac{f}{c} x \frac{f}{c})} dx$; in quo integrato itidem ponere oportet $x = k = \frac{b}{c}$. Addantur hae duae progressionis, scilicet terminus primus primo, secundus secundo, et ita porro prodibit haec progressio $\frac{2b}{c}, \frac{2bc+b(c+f)}{(c+e)(c+f)}, \frac{2bc+2b(c+f)}{(c+2e)(c+2f)}$ etc., cuius terminus generalis est $\frac{2bc+(n-1)b(c+f)}{(c+(n-1)e)(c+(n-1)f)}$. Terminus vero summatorius erit $= \int dx \left(\frac{b \frac{ne}{c} - c \frac{ne}{c} x \frac{ne}{c}}{b \frac{(n-1)e}{c} (b \frac{e}{c} - c \frac{e}{c} x \frac{e}{c})} + \frac{b \frac{nf}{c} - c \frac{nf}{c} x \frac{nf}{c}}{b \frac{(n-1)f}{c} (b \frac{f}{c} - c \frac{f}{c} x \frac{f}{c})} \right)$

§. 12. Simili modo, sed vniuersaliter, pro termino generali in cuius denominatore n duas tenet dimensiones, inuenitur terminus summatorius, si illius progressionis p cuplum ad huius q cuplum addatur. Obtinebitur hoc modo progres-

Tom. V. N sio,

fit, cuius terminus generalis est $\frac{pb}{c+(n-1)e} + \frac{qb}{c+(n-1)f}$
 $= \frac{(p+q)bc+(n-1)b(pf+qe)}{(c+(n-1)e)(c+(n-1)f)}$. Terminus autem summa-

torius huic termino generali respondens erit

$$\int \frac{p dx}{b^{\frac{(n-1)e}{c}}} \left(\frac{b^{\frac{ne}{c}} - c^{\frac{ne}{c}} x^{\frac{ne}{c}}}{b^{\frac{e}{c}} - c^{\frac{e}{c}} x^{\frac{e}{c}}} \right) + \int \frac{q dx}{b^{\frac{(n-1)f}{c}}} \left(\frac{b^{\frac{nf}{c}} - c^{\frac{nf}{c}} x^{\frac{nf}{c}}}{b^{\frac{f}{c}} - c^{\frac{f}{c}} x^{\frac{f}{c}}} \right)$$

$$= \int dx \left(\frac{pb^{\frac{n(e+f)}{c}} - pb^{\frac{n(e+f)-f}{c}} c^{\frac{f}{c}} x^{\frac{f}{c}} - pb^{\frac{nf}{c}} c^{\frac{ne}{c}} x^{\frac{ne}{c}} +}{b^{\frac{(n-1)(e+f)}{c}}}$$

$$\frac{pb^{\frac{(n-1)f}{c}} c^{\frac{ne+f}{c}} x^{\frac{ne+f}{c}} + qb^{\frac{n(e+f)}{c}} - qb^{\frac{n(e+f)-e}{c}} c^{\frac{e}{c}} x^{\frac{e}{c}} -}{(b^{\frac{e}{c}} - c^{\frac{e}{c}} x^{\frac{e}{c}})}$$

$$\frac{-qb^{\frac{ne}{c}} c^{\frac{nf}{c}} x^{\frac{nf}{c}} + qb^{\frac{(n-1)e}{c}} c^{\frac{nf+e}{c}} x^{\frac{nf+e}{c}}}{(b^{\frac{f}{c}} - c^{\frac{f}{c}} x^{\frac{f}{c}})} \right). \text{ Ponatur } b=x$$

hoc enim modo vniuersalitati nihil decedit, erit-
 que terminus generalis $\frac{(p+q)c+(n-1)(pf+qe)}{(c+(n-1)e)(c+(n-1)f)}$. Sit cx

$=y$, erit $dx = \frac{dy}{c}$. Atque terminus summatorius ha-

$$\text{betur } = \int \frac{dy}{c} \left(\frac{p+q - py^{\frac{f}{c}} - qy^{\frac{e}{c}} - py^{\frac{ne}{c}} - qy^{\frac{nf}{c}} + qy^{\frac{ne+f}{c}} + qy^{\frac{nf+e}{c}}}{(1-y^{\frac{e}{c}})(1-y^{\frac{f}{c}})} \right)$$

in qua formula integrata, ita vt posito $y=0$ ea
 quoque fiat $=0$, oportet ponere $y=1$.

§. 13. Assumatur iam terminus generalis hic

$\frac{\alpha+\beta n}{\gamma+\delta n+\epsilon n^2}$. Qui comparatus cum $\frac{(p+q)c+(n-1)(pf+qe)}{(c+(n-1)e)(c+(n-1)f)}$

dabit $c = \sqrt{(\gamma + \delta + \epsilon)}$, $e = \frac{\delta + 2\epsilon + \sqrt{(\delta\delta - 4\gamma\epsilon)}}{2\sqrt{(\gamma + \delta + \epsilon)}}$, $f =$

$\frac{\delta + 2\epsilon - \sqrt{(\delta\delta - 4\gamma\epsilon)}}{2\sqrt{(\gamma + \delta + \epsilon)}}$ $p = \frac{\alpha\delta - \beta\delta + 2\alpha\epsilon - 2\beta\gamma + (\alpha + \beta)\sqrt{(\delta\delta - 4\gamma\epsilon)}}{2\sqrt{(\gamma + \delta + \epsilon)}(\delta\delta - 4\gamma\epsilon)}$ atque

$q = \frac{\beta\delta - \alpha\delta + 2\beta\gamma - 2\alpha\epsilon + (\alpha + \beta)\sqrt{(\delta\delta - 4\gamma\epsilon)}}{2\sqrt{(\gamma + \delta + \epsilon)}(\delta\delta - 4\gamma\epsilon)}$. His in termino sum-

matorio substitutis, prodibit terminus summatorius
 huius

INNUMERABILIVM PROGRESSIVVM. 99

huius progressionis $\frac{a+\epsilon}{\gamma+\delta+\epsilon}$, $\frac{a+2\epsilon}{\gamma+2\delta+4\epsilon}$, $\frac{a+3\epsilon}{\gamma+3\delta+9\epsilon}$,
 etc. cuius terminus generalis est $\frac{a+\epsilon n}{\gamma+\delta n+\epsilon n^2}$.

§. 13. Eodem modo si in termino generali n plures duabus dimensiones habuerit, eruetur terminus summatorius, combinandis tot progressionibus simplicibus, quot dimensiones n habere debet, quemadmodum idem in casu duarum dimensionum factum est. Attamen hac ratione non ad quasvis, quae in huiusmodi terminis generalibus contineri videntur, series perueniri potest. Nam quoties denominator $\gamma+\delta n+\epsilon n^2+\zeta n^3+\eta n^4$ etc. duos pluresue habet factores simplices aequales, tum progressio in tot simplices progressionem resolui nequit, neque igitur eius terminus summatorius inueniri.

§. 14. Hanc ob rem aliam tradam methodum, quae hos casus non excludat. Sit progressio quaedam simplex $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+2b}$ etc. cuius terminus generalis est $\frac{1}{a+(n-1)b}$. Huius terminus summatorius erit $\int \frac{x-\frac{nb}{a}x^{\frac{nb}{a}}}{x-\frac{b}{a}x^{\frac{b}{a}}} dx$, vel ponatur $ax = y$, erit is $\int \frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}} \frac{dy}{a}$, in quo integrato ponit oportet $y=1$. Multiplicetur hic in $y^a dy$ et summa huius facti $\int y^a dy \int \frac{dy}{a} \left(\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}} \right)$ erit secundum
 N 2 modum

modum descriptum tractata terminus summatorius huius progressionis $\frac{a}{a\zeta a}$, $\frac{a}{(a+b)(\zeta a+b)}$, $\frac{a}{(a+2b)(\zeta a+2b)}$ etc. posito brevitatis ergo ζ loco $a+2$. Huius progressionis terminus generalis est $\frac{a}{(a+(n-1)b)(\zeta a+(n-1)b)}$ vel
$$\frac{a}{b^2 n^2 + (ab + \zeta ab - 2bb)n + (a-b)(\zeta a - b)}.$$

§. 15. Assumamus progressionem generalem huius generis, quae facilius ad casus quosuis adaptatur, sit eius terminus generalis

$\frac{x}{a + (n-1)b + \frac{(n-1)(n-2)}{2}c}$. Hic cum illo termino generali comparatus dabit $a = \frac{(2b-c)^2 - 4ac + (2b-c)\sqrt{(2b-c)^2 - 8ac}}{4}$
 $b = \frac{2b-c + \sqrt{(2b-c)^2 - 8ac}}{4}$, $\zeta = \frac{2b-c - \sqrt{(2b-c)^2 - 8ac}}{2b-c + \sqrt{(2b-c)^2 - 8ac}}$. Hi valores si substituantur loco a, b , et a , (est vero $a = \zeta - 2$) in $\int y^a dy \int \frac{dy}{a} \left(\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}} \right)$ prodibit terminus summatorius progressionis propositae, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+2b+c}$, $\frac{1}{a+3b+3c}$ etc.

§. 16. Hoc modo viterius progredi licet; multiplicetur $\int \frac{dy}{a} \left(\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}} \right)$ in $y^{a-2} dy$, et facti integrale $\int y^{a-2} dy \int \frac{dy}{a} \left(\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}} \right)$ denuo in $y^{\zeta-a-1}$ huiusque producti integrale $\int y^{\zeta-a-1} dy \int y^{a-2} dy \int \frac{dy}{a}$
 $(1-y$

INNVMERABILIVM PROGRESSIONVM. 101

$\left(\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}}\right)$, erit terminus summatorius progressio-
 nis huius $\frac{a^2}{a \cdot aa \cdot 6a}$, $\frac{a^2}{(a+b)(aa+b)(6a+o)}$, $\frac{a^2}{(a+2b)(aa+2b)(6a+2b)}$
 etc. cuius terminus generalis est $a^2 : (a+(n-1)b)$
 $(aa+(n-1)b)(6a+(n-1)b)$ similiter $\int y^{\gamma-1} dy \int y^{\epsilon-a-1}$
 $dy \int y^{a-2} dy \int \frac{dy}{a} \left(\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}}\right)$ est terminus summatorius
 progressiois, cuius terminus generalis est
 $\frac{a^3}{(a+(n-1)b)(aa+(n-1)b)(6a+(n-1)b)(\gamma a+(n-1)b)}$. Hoc igitur
 modo ad omnes progressiones pervenitur, qua-
 rum termini sunt fractiones, numeratoribus exi-
 stentibus numeris constantibus, denominatoribus
 autem constituentibus quamcunque progressionem
 algebraicam.

§. 17. Si summae huiusmodi progressionum
 in infinitum continuatarum desiderentur, oportet
 ponere $n =$ infinito. Hoc posito postremum cu-
 iusque termini summatorii membrum scilicet $\int \frac{dy}{a}$
 $\left(\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}}\right)$ transmutabitur in hoc $\int \frac{dy}{a(1-y^{\frac{b}{a}})}$. Quia
 enim y semper est minus quam 1, praeter ca-
 sum ultimum, quo fit $y = 1$, evanescet $y^{\frac{nb}{a}}$ prae
 1. atque ideo $1-y^{\frac{nb}{a}}$ abibit in 1. Propterea hu-
 ius seriei $\frac{a}{a \cdot aa} + \frac{a}{(a+b)(aa+b)} + \frac{a}{(a+2b)(aa+2b)} +$ etc.
 in infinitum summa erit $\int y^{a-2} dy \int \frac{dy}{a(1-y^{\frac{b}{a}})}$, et

huius $\frac{a^2}{a \cdot a \cdot a} + \frac{a^2}{(a+b)(aa+c)(aa+c)} + \frac{a^2}{(a+2b)(aa+2b)(aa+2b)}$
 + etc., summa erit $\int y^{a-1} y^{a-2} dy \int \frac{dy}{a(1-y\frac{b}{a})}$
 et ita de reliquis omnibus.

§. 18. Sit $b=a$, ut fiat $\frac{b}{a}=1$, erit $\int \frac{dy}{a(1-y)}$
 $=A - \frac{1}{a}l(1-y)$. Quia posito $y=0$ totum integrale
 fieri debet $=0$, erit $A=0$, adeoque $\int \frac{dy}{a(1-y)} =$
 $-\frac{1}{a}l(1-y)$. Multiplicetur hoc in $y^{a-2} dy$ habebi-
 tur $-\frac{y^{a-2} dy}{a} l(1-y)$. Huius integrale ut inuenia-
 tur ponatur $1-y=z$, erit $y=1-z$, habebitur igi-
 tur integrandum $\frac{(1-z)^{a-2} dz}{a} l z = (1 - \frac{(a-2)}{1} z +$
 $\frac{(a-2)(a-3)}{1 \cdot 2} z^2 - \frac{(a-2)(a-3)(a-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \text{etc.}) \frac{dz}{a} l z$. Quia
 vero $z^\eta dz l z = C - \frac{z^{\eta+1}}{(\eta+1)^2} + \frac{z^{\eta+1} l z}{\eta+1}$, erit illius
 integrale haec series $\frac{1}{a} (C - z + z l z + \frac{(a-2)}{1 \cdot 4} z^2 -$
 $\frac{(a-2)}{1 \cdot 2} z^2 l z - \frac{(a-2)(a-3)}{1 \cdot 2 \cdot 9} z^3 + \frac{(a-2)(a-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 l z + \text{etc.})$
 Hoc integrale si fiat $y=0$ seu $z=1$ debet fieri
 $=0$, hanc ob rem erit $C = 1 - \frac{(a-2)}{1 \cdot 4} + \frac{(a-2)(a-3)}{1 \cdot 2 \cdot 9}$
 $- \frac{(a-2)(a-3)(a-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 16}$ etc.

§. 19. Perspicuum est ex hoc integrali, quo-
 ties a sit numerus integer unitate maior, tum
 semper integralis eius terminorum numerum fo-
 re finitum, atque ideo summam progressionis de-
 finiri. Attamen etiam si terminorum numerus sit
 infi-

in finitus, summa propositae feriei dabitur per aliam feriem infinitam quae vero plerumque magis conuergit quam proposita, atque ideo perquam est utilis ad summam determinandam.

§. 20. Sit summa progressionis in infinitum continuatae $\int \frac{-y^{a-2}}{a} dy l(1-y)$, quia hic est positum $b=a$, erit progressio ipsa $\frac{1}{aa} + \frac{1}{2(a+1)a} + \frac{1}{3(a+3)a} + \frac{1}{4(a+4)a}$ etc. Huius summa habetur si in illo integrali ponitur $y=1$, sed facto $y=1-z$ est integrale illud $\frac{1}{a} (1 - \frac{(a-2)}{1 \cdot 4} + \frac{(a-2)(a-3)}{1 \cdot 2 \cdot 9} - z + \frac{(a-2)z^2}{1 \cdot 4} - \frac{(a-2)(a-3)z^3}{1 \cdot 2 \cdot 9} + \text{etc.} + z/z - \frac{(a-2)z^2/z}{1 \cdot 2} + \frac{(a-2)(a-3)z^3/z}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \text{etc.})$. Si iam fiat $y=1$ vel $z=0$ erit summa seriei $\frac{1}{aa} + \frac{1}{2(a+1)a} + \frac{1}{3(a+2)a}$ etc. aequalis summae huius seriei $\frac{1}{a} - \frac{(a-2)}{1 \cdot 4} + \frac{(a-2)(a-3)}{1 \cdot 2 \cdot 9}$ etc. vel summa huius $\frac{1}{a} + \frac{1}{2(a+1)} + \frac{1}{3(a+2)}$ etc. aequalis summae huius $1 - \frac{(a-2)}{1 \cdot 4} + \frac{(a-2)(a-3)}{1 \cdot 2 \cdot 9} - \text{etc.}$

§. 21. Praeterea alium habeo modum series valde conuergentes inueniendi, quarum summa aequalis sit seriei propositae. $\int -y^{a-2} dy l(1-y)$ aequatur ita integratum ut fiat $=0$ si $y=0$ huic seriei $1 - \frac{(a-2)}{1 \cdot 4} + \frac{(a-2)(a-3)}{1 \cdot 2 \cdot 9} - \frac{(a-2)(a-3)(a-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 16} + \text{etc.}$
 $-z + \frac{(a-2)z^2}{1 \cdot 4} - \frac{(a-2)(a-3)z^3}{1 \cdot 2 \cdot 9} + \frac{(a-2)(a-3)(a-4)z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 16} - \text{etc.}$
 $+ z/z - \frac{(a-2)z^2/z}{1 \cdot 2} + \frac{(a-2)(a-3)z^3/z}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{(a-2)(a-3)(a-4)z^4/z}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$ existente $z=1-y$; sed cum sit $l(1-y) = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4}$ etc. erit $\int -y^{a-2} dy l(1-y) =$

$$= \frac{y^a}{a} + \frac{y^{a+1}}{2(a+1)} + \frac{y^{a+2}}{3(a+2)} \text{ etc.}$$
 Haec series si a est numerus affirmatiuus est aequalis illi quicquid sit y , et ita multis modis series eiusdem summae reperiuntur, quarum altera alterius ope facilius summatur.

§. 22. Exemplo rem illustrabo fit $a=1$, habebitur trium sequentium serierum summa aequalis huic

$$+1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \text{ etc.}$$

$$-z - \frac{1}{4}zz - \frac{1}{9}z^3 - \frac{1}{16}z^4 \text{ etc.} = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} + \text{ etc.}$$

$$+z/z + \frac{1}{2}z^2/z + \frac{1}{3}z^3/z \text{ etc.}$$

$$\text{Quia vero est } z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{3}z^3 \text{ etc.} = -l(1-z) =$$

$$-ly \text{ erit } 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} = \frac{y+z}{1} + \frac{y^2+z^2}{4} +$$

$$\frac{y^3+z^3}{9} + \frac{y^4+z^4}{16} + \text{ etc.} + ly/z, \text{ est hic } y+z=1,$$

et manifestum est tales loco y vel z numeros assumi posse, vt series maxime conuerget. Id vero euenit quando $y=z$ vel vtrumque $= \frac{1}{2}$, eritque hoc casu

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{ etc.} = 1 + \frac{1}{8} +$$

$$\frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{400} + \text{ etc.} + \square/z. \text{ Hoc modo summa}$$

$$\text{progressionis } 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{ etc.} \text{ valde}$$

$$\text{prope haberi potest, est enim } l2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} +$$

$$\frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16}. \text{ Summa progressionis } 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \text{ etc.}$$

$$\text{est quam proxime } = 1, 154481 \text{ et } \square/2 = 0,$$

$$480453; \text{ ergo summa seriei } 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$$

$$\text{etc. est } = 1, 644934 \text{ q. p. Si quis autem huius}$$

seriei summam addendis aliquot terminis initialibus determinare voluerit, plusquam mille termi-

nos

nos addere deberet, quo nostrum inuentum numerum reperiret.

§. 23. Ex his igitur methodum percipere licet, quomodo cuiuslibet progressionis, cuius termini sunt fractiones, quarum denominatores constituunt progressionem quamcunque algebraicam, terminum summatorium inueniri oporteat. Equidem vt hic rem considerauius, numeratores deberent esse quantitates constantes; sed non difficulter haec methodus extendetur ad eas quoque progressionem, in quibus numeratores progressionem etiam quamcunque algebraicam faciunt. Propterea haec methodus ad omnes progressionem quarum termini generales algebraice possunt exponi, accommodari potest, eiusque opetermini summatorii inueniri. Excipiendi tamen sunt casus, quibus terminus generalis irrationalis est.

DISSERTATIO BREVIS

DE MOTIBVS CORPORVM RECI-
PROCIS SEV OSCILLATORIIS, QVAE VBI-
QVE RESISTENTIAM PATIVNTVR QVA-
DRATO VELOCITATIS SVAE PRO-
PORTIONALEM.

*Vbi ostenduntur Theoremata, quorum ope expedit ad
calculus reuocantur motus pendulorum in mediis per-
fecte fluidis praesertim aëre cetero medio
temiissimo.*

AUCTORE

Dan. Bernoulli

Tabula IV.

Insertit Newtonus Libro secundo Princ. Math.
Phil. Nat. sectionem, quae sexta est, de mo-
tu et resistentia corporum funependulorum, vbi
praesertim operam dedit explicandae theoriae,
quae resistentias quadratis velocitatum proportio-
nales facit, neque id immerito, quandoquidem
ista hypothesis valeat pro plerisque fluidis, vel-
uti aqua, mercurio, aëre, oleis calidis aliisque,
eamque eo accuratius conuenire ostendunt expe-
rimenta ad calculum reuocata, quo celerius cor-
pora mouentur. Haec igitur mihi, postquam in-
cidissem in theorema illud Tomo IV. Commen-
tariorum pag. 136. insertum, occasionem dede-
runt explorandi quatenam theoremata alia circa

motum corporum pendulorum in mediis resistentibus fluidissimis exinde deduci possent et quodnam compendium in hisce calculis, qui prolixi admodum esse solent, expectandum esset. Communicabo hic, quae mihi talia tentanti se manifestarunt, postquam theorema ipsum huc transcripsero.

Theorema.

§. 2. Sit curva qualiscunque $aACc$, in qua corpus ita moueri ponatur, ut ubique resistentiam offendat quadrato velocitatis suae proportionalem: incipiat primo descendere gravitate sua in A , perueniatque priusquam retrogrediatur in C , dein descendere incipiat idem corpus in a , ascensuque suo integro perueniat in c , ducantur verticales Ab et Cd , atque horizontales ab et cd sintque omnia haec elementa infinite parua. Dico fore semper spatium percursum AC proportionale logarithmo rationis Ab ad Cd , id est, si symbolis utamur intelligaturque per n numerus constans, quem in schediasmate citato §. 5. definiui, simulque dicantur Ab et Cd , dx et dy , fore arcum percursum $AC = \frac{1}{2n} \log. \frac{dx}{dy}$.

Fig. 3.

Problema.

§. 3. Dato arcu descensus corporis in cycloide oscillantis, inuenire arcum ascensus in praesenti resistentiarum hypothesi.

Solutio.

Tabula IV.
Fig. 4.

Oscilletur corpus in cycloide QDG; sit diameter circuli generatoris DH, quae ponitur verticalis = a , in qua si sumantur abscissae, ducanturque ab vtraque parte applicatae horizontales, vti figura exhibet, erit per naturam cycloidis, vbique $DA^2 = 4a \times DM$; vnde si corpus ex punctis infinite propinquis, A et a delapsus ascensus suos *respectiue* perficere ponatur vsque in C et c, dicaturque arcus descensus $DA = t$, arcus ascensus respondens $DC = s$, $Aa = dt$ et $Cc = ds$, erit per praecedens theorema $t + s = \frac{1}{2n} \log. \frac{Ab}{cA} =$ (per naturam cycloidis) $\frac{1}{2n} \log. \frac{tdt}{sds}$. Ponatur numerus, cuius logarithmus est vnitas = c , erit $c^{2n(t+s)} = \frac{tdt}{sds}$; hinc $c^{-2nt} t dt = c^{2ns} s ds$, quae recte reducta dat $2nc^{-2nt} t + c^{-2nt} = -2nc^{2ns} s + c^{2ns}$. Ex qua aequatione per methodos passim traditas valor litterae s qua lubet accuratione haberi potest. Caeterum si aequatio differentialis vltima comparetur cum aequatione integrali, obtinetur alia differentialis quae facilius in series resoluitur, nempe haec $\frac{tdt}{1+2nt} = \frac{sds}{1-2ns}$, sine $2dt - 2nttdt + 4nnt^3dt - 8n^3t^4dt + \text{etc.} = sds + 2nssds + 4nns^3ds + 8n^3s^4ds + \text{etc.}$, quae per integrationem mutatur in hanc $\frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}nt^3 + \frac{4}{5}nnt^4 - \frac{8}{7}n^3t^5 + \text{etc.} = \frac{1}{2}ss + \frac{2}{3}ns^3 + \frac{4}{5}nns^4 + \frac{8}{7}n^3s^5 + \text{etc.}$ Q. E. I.

Theo.

Theorema.

§. 4. Corpus quod in cycloide quacun- que oscillatur eadem constanter in excursionibus decre- menta sumit si arcus descensus sint aequales, id est, si in diuersis cycloidibus arcus descensus sint aequales, sunt etiam arcus ascensus aequales.

Demonstratio.

Oppido liquet ex praecedente problemate, quandoquidem littera *a* diametrum circuli gene- ratoris denotans ex computo euanuerit.

Scholion.

§. 5. Cum facillimum sit theorema istud ex- perimento confirmare, rem tentavi sequentem in modum. Globum e filo tenui suspensum in aqua vibraui, ita tamen vt arcus descensus nec admo- dum magnus esset respectu longitudinis fili, quo sine notabili errore arcus circulares descripti pro cycloidicis haberi possent, nec tamen minimus, ne motus esset lentissimus, in quo casu fluidorum resistentia non amplius sat accurate sequitur ra- tionem quadratorum velocitatum; sicque differen- tiam obseruavi inter arcum descensus et arcum ascensus: mox vero eundem globum sed longe breuius suspensum in aqua ita rursus vibraui, vt arcus descensus idem esset qui antea, tuncque ad normam theorematum arcum ascensus similem quo- que obseruavi. Dein in aëre quia differentia mi- nima inter vtrumque arcum obseruari nequit sa-

tis accurate, numeravi in corpore sphaerico oscillante et ex diversis altitudinibus suspensio singula vicibus suspensionis centum oscillationes, post quas ultimae oscillationes semper inter se ab utraque parte aequales erant, cum primae inter se pariter aequales fuerant. In huiusmodi experimentis curandum est, ut corpus pendulum ex puncto firmo filoque tenui suspensum sit, oscillationesque fiant in eodem plano cum filo; facile enim oscillationes simplices in motum turbinatorium abeunt describente corpore figuram ellipsi formem, vel veram ellipsin, si filum suspendens ut infinite altum ratione corporis excursionum considerentur. Singulare corporibus turbinantibus accidit, quod axis figurae oblongae a corpore descriptae perpetuo in gyrum agatur in eandem plagam, si bene memini, qua corpus movetur, sicque imitantur motum planetarum, quorum aphelia et perihelia similiter locum mutant; istud autem corporis turbinantis phaenomenon tribui attritui filii contra suspensionis locum.

Theorema.

§. 6. Si corpus in medio admodum tenui arcus cycloidicos describat, erit semper excessus minimus arcus descensus super arcum ascensus proportionalis quadrato arcus descensus vel simpliciter proportionalis altitudini verticali descensus.

De-

Demonstratio.

Quum medium est tenuissimum, fit valor litterae n minimus; ut vero appareat quid ab hac positione resultet notari debet, esse $c^{-2nt} = 1 - 2nt + \frac{4n^2t^2}{1.2} - \frac{8n^3t^3}{1.2.3} + \frac{16n^4t^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$ similiterque $c^{2ns} = 1 + 2ns + \frac{4n^2s^2}{1.2} + \frac{8n^3s^3}{1.2.3} + \frac{16n^4s^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$ Iam vero si utamur aequatione differentiali paragraphi tertii, quae est $c^{-2nt} t dt = c^{2ns} s ds$, sufficet ex istis seriebus infinitis duos primos accipere terminos, (quia nempe valor n minimus est) atque sic ponere $c^{-2nt} = 1 - 2nt$ et $c^{2ns} = 1 + 2ns$, hosque valores in aequatione substituere, quae sic transmutatur in hanc $t dt - 2nt dt = s ds + 2ns s ds$, cuius integralis est $\frac{1}{2} t t - \frac{2}{3} n t^3 = \frac{1}{2} s s + \frac{2}{3} n s^3$. Quod si vero utamur aequatione tertii paragraphi integrata, nempe $2nc^{-2nt} t + c^{-2nt} = -2nc^{2ns} s + c^{2ns}$ non amplius sufficiunt duo termini ex seriebus praememoratis sumendi, quin imo quatuor requiruntur ita ut ponendum sit $c^{-2nt} = 1 - 2nt + \frac{4n^2t^2}{1.2} - \frac{8n^3t^3}{1.2.3}$ et $c^{2ns} = 1 + 2ns + \frac{4n^2s^2}{1.2} + \frac{8n^3s^3}{1.2.3}$, post quorum valorum substitutionem oritur iam $2nt - 4n^2t^2 + 4n^3t^3 - \frac{8}{3}n^4t^4 + 1 - 2nt + 2nnt - \frac{8}{3}n^3t^3 = -2ns - 4nns - 4n^3s^3 - \frac{8}{3}n^4s^4 + 1 + 2ns + 2nns + \frac{4}{3}n^3s^3$, quae recte dispositis terminis reiectisque $-\frac{8}{3}n^4t^4$ et $\frac{8}{3}n^4s^4$ atque facta divisione per $-4nn$ transit in hanc $\frac{1}{2} t t - \frac{2}{3} n t^3 = \frac{1}{2} s s + \frac{2}{3} n s^3$, ut antea. Diuisa autem ista aequatio per $s+t$ reduci potest ad hanc formam $t-s = \frac{4}{3}n(tt-st+ss)$, vel quoniam arcus s et t non

variabli-

tabiliter non differunt censendum est $t-s=\frac{4}{3}nt$, quod indicat excessum arcus descensus t super arcum ascensus s proportionalem semper esse quadrato arcus descensus vel per naturam cycloidis simpliciter proportionalem descensui verticali, ut habet propositio. Ceterum cum valor ipsius n sit loco supra citato specificè determinatus ex magnitudine globi oscillantis eiusque gravitate specifica ratione fluidi resistentis, facillimum nunc est diminutionem motus arcuumque descriptorum ad calculum omnibus circumstantiis definitum reuocare, qua de re mox quaedam superaddam. Q.E.D.

Corollarium.

§. 7. Si fluidum tenuissimum in quo corpus oscillatur modo grauius, modo leuius sit manentibus reliquis, erit differentia inter descensum ascensumque in ratione gravitatis specificae fluidi ad corpus; positis autem omnibus variabilibus erit eadem arcuum differentia in ratione composita ex directa descensus verticalis et gravitatis specificae fluidi, atque reciproca ratione, globi eiusdemque gravitatis specificae. Si autem fluidum non sit valde tenue, non amplius valet hoc theorem, et ne proxime quidem, quamuis *Newtonus* secus sentire videatur p. 306. edit. *Princ. Math.*

Scholion.

§. 8. Quia constat aerem liberum, (qui quidem sine notabili errore pro medio subtilissimo ha-

cenferi potest, si corpus nec minimum fit nec admodum leue) esse modo densiorem modo rariorem, poterit ratio grauitatum specificarum haberi ex numero oscillationum dati penduli, post quem oscillationes dato arcu diminutae fuerint. Et hinc mensura caloris fixa haberi potest, vt alia occasione monstrabo.

Problema.

§. 9. Si corpus in medio subtilissimo oscilletur arcus describens cycloidalis, inuenire ex primo arcu descensus arcum ascensus, quem corpus post magnum oscillationum numerum datum describet, aut vicissim ex utroque arcu dato inuenire numerum oscillationum.

Solutio.

Si primus arcus descensus = t , erit per §. 6. arcus subsequens ascensus = $t - \frac{1}{3}n^2t$: similiter reperitur arcus secundi ascensus = $t - \frac{8}{3}n^2t + \frac{3^2}{3}n^4t^3 - \frac{64}{3}n^6t^5$, et posito ultimo numero oscillationum l , erit arcus ultimo ascensu descriptus = $t - l(\frac{1}{3}n)nt + (ll-1)(\frac{1}{3}n)^2t^3 - (l^3 - \frac{5}{2}ll + \frac{3}{2}l)(\frac{1}{3}n)^3t^5 + etc.$, cui seriei sine notabili errore substitui potest haec altera geometrica $t - (\frac{1}{3}nl)nt + (\frac{1}{3}nl)^2t^3 - (\frac{1}{3}nl)^3t^5 + etc.$ tum ob paruitatem numeri n eius dimensiones inferiores prae maxima quasi evanescent. Est autem summa huius seriei geometricae = $t : (1 + \frac{1}{3}nlt)$, vnde si arcus ascensus post numerum oscillationum l dicatur r , erit

114 DE MOTIBVS CORPORVM RECIPR.

- I. $r = t : (1 + \frac{1}{2} nlt)$, siue
 II. $l = (t-r) : \frac{1}{2} ntr$. Q. E. I.

Problema.

§. 10. Ex dato decremento totali $t-r$, quod numero oscillationum l conuenit, inuenire decrementum minimum, quod soli primae aut soli vltimae oscillationi debetur.

Solutio.

Immediate fluit ex praecedente aequatione; quia enim $l = (t-r) : \frac{1}{2} ntr$, erit $\frac{1}{2} nt = \frac{t-r}{l}$, hincque facta multiplicatione per t obtinetur decrementum primae oscillationis seu $\frac{1}{2} (ntt) = \frac{t(t-r)}{l}$, pariterque decrementum vltimae oscillationis siue $\frac{1}{2} nrr = \frac{r(t-r)}{l}$. Vnde pro priori casu fit regula, vt sumatur quarta proportionalis ad arcum vltimo ascensu descriptum, ad arcum primi descensus et decrementum integrum diuisum per numerum oscillationum, quae quarta proportionalis dabit decrementum primae oscillationis, si autem inuertantur duo priores analogiae termini prodit decrementum oscillationis vltimae. Ceterum si decrementum integrum simpliciter diuidatur per numerum oscillationum, quod oritur vocari potest decrementum medium, et si in diuersis casibus sint decremента integra proportionalia initialibus arcibus, vti sunt in experimentis Neutronianis infra considerandis, patet decremen-

menta media rationem sequi decrementorum initialium. Q. E. I.

Problema.

§. 11. Eadem determinare pro arcibus circularibus, quae hucusque de arcibus cycloidicis eruta fuerunt.

Solutio.

Consideretur curva QDG vt arcus circularis, cuius radius = a , reliquis denominationibus quae paragrapho tertio factae fuerunt retentis; erit aequatio inter arcum descensus t et arcum ascensus s haec $c^{2ns} \times dC = c^{-2nt} \times b A$ vel (positis abscissis DO et DM, quae arcibus s et t respondent, S et T) $c^{2ns} dS = c^{-2nt} dT$, quae aequatio indeterminatarum permixtione non affecta per quadraturas et rectificationes construi aut etiam calculo analytico per approximationes resolui potest, ita vt arcus incognitus s ex dato t definiri queat: calculum autem nimis prolixum non apponam indicasse contentus compendium, quo tractari debet, si medium sit tenuissimum, quod corpori vibrato non admodum leui nec paruo resistit, prouti est aër ratione globi verbi gratia plumbei in aëre oscillantis.

Fig. 4

Notetur rursus n fieri minimum cum medium est tenuissimum, posseque censerit $c^{-2nt} = 1 - 2nt$ et $c^{2ns} = 1 + 2ns$; ita vero pro nostro hoc casu talis inseruet aequatio $dS + 2ns dS = dT -$

P 2

$2nt dT$

216 DE MOTIBVS CORPORVM RECIPR.

$2ntdT$ vel $dS + 2nsdS + 2nSds - 2nSds = dT - 2ntdT - 2nTdt + 2nTdt$, siue $S + 2nsS - \int 2nSds = T - 2ntT + \int 2nSdt$. Est vero $ds = \frac{ads}{\sqrt{(2aS-SS)}}$ et $dt = \frac{adT}{\sqrt{(2aT-TT)}}$; quibus valoribus substitutis oritur haec altera aequatio: $S + 2nsS - 2na \int \frac{Sds}{\sqrt{(2aS-SS)}} = T - 2ntT + 2na \int \frac{TdT}{\sqrt{(2aT-TT)}}$. Est porro $\int \frac{Sds}{\sqrt{(2aS-SS)}} = \sqrt{(2aS-SS)} + s$, pariterque $\int \frac{TdT}{\sqrt{(2aT-TT)}} = -\sqrt{(2aT-TT)} + t$; quibus valoribus denuo substitutis prodit $S + 2nsS + 2na\sqrt{(2aS-SS)} - 2nas = T - 2ntT - 2na\sqrt{(2aT-TT)} + 2nat$, ope cuius aequationis non difficulter admodum arcus ascensus s ex arcu descensus t definitur. Patitur autem vltima ista aequatio vltiorem reductionem, quae eo innititur, quod ex natura rei differentia inter t et s vt et inter T et S fit minima.

Ratio istarum differentiarum, quae huc potissimum facit, patebit ex figura, vbi AD est arcus descensus et DC arcus ascensus, et ex puncto D ducta est verticalis DA atque ex punctis A et C horizontales AM et CO, ac denique producta AM vsque in L, simulque CP, parallela ipsi DH. Est scilicet differentia arcuum CL, et differentia inter T et S est OM vel CP; et quia tam CL quam CP minimae sunt, erit per naturam circuli $CL(t-s) \cdot CP(T-S) :: \text{radius}(a) \cdot ML(\sqrt{2aT-TT})$. Posita igitur $t-s = q$ erit $T-S = q \cdot \frac{\sqrt{(2aT-TT)}}{a}$, vel $s = t - q$ et $S = T - q \cdot \frac{\sqrt{2aT}}{a}$.

$\sqrt{2aT-TT}$. Substituantur hi valores in aequatione
 ultimo loco exposita, ut habeatur $T - q \sqrt{2aT-TT}$
 $+ 2nt \sqrt{1 - \frac{2ntq\sqrt{2aT-TT}}{a}} - 2ntTq + 2nqq \sqrt{2aT-TT}$
 $+ 2na \sqrt{(2aT-2q\sqrt{2aT-TT})-TT} + \frac{2Tq\sqrt{2aT-TT}}{a}$
 $- \frac{2aTq\sqrt{2aT-TT}}{aa} - 2nat + 2naq = T - 2ntT - 2na$
 $\sqrt{(2aT-TT)} + 2nat$. In hac aequatione re-
 ficiendi sunt termini affecti quantitate qq vel nq
 reliquis incomparabiliter minore. Dein cen-
 dendum est $\sqrt{(2aT-2q\sqrt{2aT-TT})-TT} + \frac{2Tq\sqrt{2aT-TT}}{a}$
 $= \sqrt{(2aT-TT)} - q + \frac{Tq}{a}$: quibus omnibus obser-
 uatis oritur tandem aequatio finalis, quae im-
 mediate decrementum q desideratum exhibet, nem-
 pe $q = 4naa - \frac{4nt(a-T)}{\sqrt{(2aT-TT)}}$, vel si abscissae ex cen-
 tro sumantur dicaturque distantia puncti M a cen-
 tro $= \theta$, id est, si ponatur $a-T = \theta$, erit $q = 4n$
 $aa - \frac{4nt\theta}{\sqrt{(aa-\theta\theta)}}$. Atque sic denique ad aequationem
 simplicissimam reductum fuit problema de inue-
 niendis decrementis arcuum circularium in medio
 resistente tenuissimo, quod problema prima fronte
 calculum tantum non insuperabilem requirere vi-
 detur. Ceterum si arcus ascensus desideretur non
 post vnam sed plures oscillationes, ut ratione
 arcuum cycloidicorum §. 9. indicatum fuit, id alio-
 fere compendio fieri hic non potest, nisi ut sin-
 gula decrementa successive definiantur. Q. E. L.

Corollarium.

Si arcus descensus r sit valde parvus, ita ut
 pro cycloidico haberi possit, fit rursus ut §. 6.

P 3

q vel

118 DE MOTIBVS CORPORVM RECIPR.

q vel $t-s = \frac{1}{2}ntt$. Id vero ut appareat, accipiemus aequationem penultimam praecedentis paragraphi, nempe $q = 4naa - \frac{4nat(a-T)}{\sqrt{(2aT-1T)}}$. Quia autem T ut infinite parua quantitas consideratur censendum est $\frac{1}{\sqrt{(2aT-1T)}} = \frac{1}{\sqrt{2aT}} + \frac{T}{4a\sqrt{2aT}}$, atque proin $q = 4naa - \frac{4naat}{\sqrt{2aT}} - \frac{4naaT}{4a\sqrt{2aT}} + \frac{4naaT}{\sqrt{2aT}} + \frac{4naaTT}{4a\sqrt{2aT}}$, vel reiecto ultimo termino (quia $t = \infty T$) $q = 4naa - \frac{4naat + 3naaT}{\sqrt{2aT}}$; et cum praeterea sit arcus t quasi infinite paruus, fit $t = \sqrt{2aT} + \frac{T\sqrt{T}}{6\sqrt{2a}}$ (hincque $q = 4naa + \frac{36naaT - 48na^2 + 3naTT - 4naaT}{12a} =$) reiecto termino penultimo, qui infinite paruus censendus) $\frac{8}{3}naT =$ (per naturam circularis arcus eiusque infinite parui) $\frac{1}{2}att$, quod demonstrandum nobis proposuimus.

§. 13. Postquam sic determinavi oscillationes corporum in mediis ad nostram hypothese resistens tum pro arcubus cycloidalibus tum pro circularibus, communicabo hic theoremata quaedam de corporibus perfecte elasticis verticaliter in planum horizontale pariter perfecte elasticum decidentibus resilientibusque, sed sine demonstrationibus, quae ex praecedentibus quibus sibi fingeret.

Theorema.

§. 14. Decidat corpus ex altitudine infinita susque vi elastica resiliat redeatque ad secundam illisionem et sic porro; sit autem numerus illisionum $= l$, dico altitudinem ascensus fore post ultimam

timam illisionem $= \frac{1}{2n} \log. \frac{l+t}{l}$, adeoque nunquam saltus plane evanescere, quantumvis magnus sit eorundem numerus. Patet hinc ascensum ultimum pro eodem saltum numero rationem sequi diametrorum, quas globi habent, eorundemque gravitatum specificarum ratione mediorem resistentium.

Theorema Generalius.

§. 15. Sit iam altitudo primi descensus non amplius infinita sed qualiscunque, nempe $= t$, altitudo ascensus post datum numerum vibrationum $l = s$, retentis denominationibus reliquis supra adhibitis, dico fore $s = \frac{1}{2n} \log. [(l + 1 + c^{2nt} - l) : (lc^{2nt} - l + 1)]$

Theorema.

§. 16. Positis iisdem, si quaeratur numerus lapsuum l , quibus corpus ultra datam altitudinem s resiliat, erit $l = (c^{2nt} - c^{2ns}) : (1 - c^{2nt} - c^{2ns} + c^{2n(t+s)})$.
Si $t = \infty$, fit $l = 1 : (c^{2ns} - 1)$.

Exemplum.

Sit $t = \infty$; gravitas specifica corporis ad aërem in quo cadit ut 1000 ad 1; Diameter globi aequalis decimae parti unius pedis Anglici, denotet autem s altitudinem unius pedis Anglici, fit proxime $n = \frac{5}{800}$, $c^{2ns} = 1 \frac{3}{400}$, et $l = 1 : (c^{2ns} - 1) = 133$, quod indicat corpus tale vti perfecte elasticum et ex altitudine infinita delapsam atque etiam millies gravius quam aër, qui ei resistit,

NON

non ultra centum cum triginta tribus efficere saltus altitudinem vnus pedis Anglici transgredientes, reliquos autem omnes (quorum quidem numerus infinitus est), infra hanc altitudinem subsistere.

Conclusio.

§. 17. Si conferamus hactenus dicta cum iis quae *Newtonus* habet in suis *Princ. Math. Phil. Nat. Lib. 2. Sect. 6.* vbique consensum; aliquem percipiemus quamuis methodi nostrae valde sint diuersae. Sunt autem *Newtoni* propositiones plurimae tantum proxime verae, at nostrae saluis positionibus, omni rigore mathematico sunt praeditae. Quae *Newtonus* habet de velocitatibus absolutis, indeque deducendis resistentiis et oscillationum temporibus, idque pro diuersis resistentiarum positionibus, equidem ex iis quae alibi dedimus haud difficulter deducuntur; ea autem huc non afferò, quia animus tantum fuit exemplis illustrare vsum quem habet theorema nostrum fundamentale quod superiore anno cum Societate communicavi, et quod paragrapho secundo rursus exposui. Denique, quod attinet ad valorem litterae n eius valorem numeris absolutis dedimus in Tom. IV. p. §. 9. sicut et, in Tomis II. et III. Innititur autem valor ipsius n hypothesi a *Mariotto* stabilitae, quod fluidum directe in planam impingens data velocitate impetum faciat aequali ponderi cylindri eiusdem fluidi
at-

atque crassitiei, cuius cylindri altitudo talis sit, ut graue libere ex illa cadendo velocitatem acquirat, quae sit fluidi velocitati aequalis. Istam hypothesein plura experimenta de fluidis non admodum lente motis sumta confirmant. Quod si vero impetus iste fluidi sit augendus, in eadem quoque ratione erit augendus valor litterae n . Videamus autem nunc quid experimenta hac de re inquam. Horum autem extant plurima apud *Newtonum in Princ. Math. Pbit. Nat. Lib. sec. Sect. 6. p. 307. edit. nouissimae*, ubi *sobolium generale* exhibet: omnia ista experimenta videntur summa cum attentione facta et apprime ad rem nostram faciunt. Excerptam hic primam experimentorum classem, relinquens alii explicationem theorematum nostrorum ad experimenta, quae in aliis fluidis quam aëre facta sunt.

Experimenta Newtoni ad calculum reuocata.

Globum ligneum inquit *Newtonus* pondere unciarum Romanarum $57\frac{1}{2}$, diametro digitorum Londinensium $6\frac{1}{2}$ fabricatum, filo tenui ab unco satis firmo suspendi, ita ut inter uncum et centrum oscillationis globi distantia esset pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem et uncia vna a centro suspensionis distans, et e regione puncti illius collocaui regulam in digitos distinctam, quorum ope notare longitudes

Tom. V. Q "dines

"dines arcuum a pendulo descriptas; deinde nu-
 "meravi oscillationes, quibus globus octauam mo-
 "tus sui partem amitteret. Si pendulum deduc-
 "cebatur a perpendiculari ad distantiam duorum
 "digitorum et inde demittebatur, ita vt toto suo
 "descensu describeret arcum duorum digitorum,
 "totaque oscillatione prima ex descensu et ascen-
 "su subsequente composita, arcum digitorum fere
 "quatuor, idem oscillationibus 16 $\frac{1}{2}$ amisit octa-
 "uam motus sui partem, sic vt ultimo suo ascen-
 "su describeret arcum digitũ vnus cum tribus par-
 "tibus quartis digiti. Si primo descensu descrip-
 "sit arcum digitorum quatuor amisit octauam mo-
 "tus partem oscillationibus 121, ita vt ascensu
 "ultimo describeret arcum digitorum 3 $\frac{1}{2}$. Si pri-
 "mo descensu descripsit arcum digitorum octo,
 "sexdecim, triginta duorum vel sexaginta qua-
 "tuor, amisit octauam motus partem oscillatio-
 "nibus 69, 35 $\frac{1}{2}$, 18 $\frac{1}{2}$, 9 $\frac{1}{2}$ respectiue etc.

Primo loco patet quod, vbi arcus descriptũ
 paulo sunt maiores, nec adeoque motus sunt leu-
 tissimi, id annotante etiam *Newtono*, sint decre-
 menta vni oscillationi debita proxime proportio-
 nalia quadratis arcuum descriptorum, quod con-
 uenit cum theoremate § 6. Itacum in duobus
 penultimis experimentis primi arcus descensus erant
 16 et 32 digitorum requirebantur 35 $\frac{1}{2}$ et 18 $\frac{1}{2}$
 oscillationes, vt decremента essent 2 et 4 digi-
 torum. Igitur in casu priori si decremента æ-
 qualiter

qualiter distribuatur, vni oscillationi conuenit decrementum medium $\frac{2}{35\frac{1}{2}}$ et in casu posteriori decrementum medium $\frac{4}{18\frac{1}{2}}$; est igitur prius decre-

mentum ad posterius proxime vt 1 ad 4, id est vt quadrata arcuum descensibus initialibus descriptorum. Sunt autem decrementsa media vt decrementsa primae oscillationi vtrobique debita, quod demonstrari §. 10. quia decrementsa integra facta fuerunt arcubus initialibus proportiona-

lia. Est interim decrementum $\frac{2}{35\frac{1}{2}}$ ad alterum

$\frac{4}{18\frac{1}{2}}$ in ratione paulo maiori quam 1 ad 4, quod

indicat resistantiam aliam, quae solet statui momentis temporum proportionalis atque tenacitati medii tribuitur, sensibiliorem fuisse in priori experimento quam in posteriori, vbi motus iam erat velocior. Iam vero insuper videamus quaeenam fuerint decrementsa primae ab vtraque parte oscillationi debita. Ad hoc autem per regulam §. 10. simpliciter requiritur vt decrementsa

media inuenta $\frac{2}{35\frac{1}{2}}$ et $\frac{4}{18\frac{1}{2}}$ augeantur in ratione

vt 8 ad 7. siue t ad r . Ergo cum primus descensus erat 16. digitorum, fuit decrementum pri-

mae oscillationis $= \frac{8}{7} \times \frac{2}{35\frac{1}{2}} = 0,0644$ partibus

Q 2

di-

digiti vel $= 0,00536$ partibus pedis; pariter inuenitur decrementum primae oscillationis conueniens arcui 32 digitorum $= 0,02059$ pedis partibus. Deberent autem per §. 6. ista decrementa esse respectiue aequalia $\frac{1}{3}ntt$, seu quadrati arcus in pedibus Anglicis exprimendi multiplicato per $\frac{1}{3}n$. At erant grauitates specificae globi et aquae, prouti *Newtonus* indicat pag. 309. vt 55 et 97. Ergo posito tempore instituti experimenti fuisse grauitates specificas aëris et aquae vt 1 et 850, diuisaque diametro globi in partes millesimas pedis Anglici, erit $n = \frac{375}{48.3723}$ 0,001358. Est igitur in priori casu $\frac{1}{3}ntt = 0,00322$ et in posteriori $= 0,01288$. Sunt igitur decrementa ista calculi notabiliter minoræ decrementis ex obseruatione deductis, idque proxime in ratione vt 3 ad 5. Vnde concludendum foret, si nihil obstaret oscillationibus praeter resistantiam illam a nobis haëtenus consideratam et ab inertia particularum fluidi resistantis oriundam, non amplius valere pro aëris resistantia valorem n quem pro resistantia aquae stabiliuimus in superioribus Tomis tum ex ratione tum ex experimentis longe plurimis, et esse resistantiam aëris ad resistantiam aquae non habita ratione ad differentias grauitatum specificarum propemodum vt 5 ad 3. Cum vero alia sint experimenta alterius generis, quae suadent non aliter resistere aërem quam aquam, potius iudicandum est, esse impedimenta alia in motibus pendulorum consi-
de-

deranda, quorum rationem nondum habuimus, talia sunt I^oo resistentia, quam filum globum suspendens, offendit. II^oo Illisio siue attritus filii in locum suspensionis. III^oo Aliqualis filii rigiditas et IV^oo quod potissimum hic notandum, tenacitas medii, quae aliam resistentiam format momentis temporum vt creditur proxime proportionalem, quae resistentia posterior in oscillationibus corporum ideo consideranda praecipue est, quia motus oscillationum sunt valde lenti. Opportuna hic esset occasio monstrandi modum, quo altera haec resistentia etiam ad mensuras reduci possit, quod in oscillationibus minimis plane est necessarium, quodque non difficile esset, quandoquidem in potestate sit theorema nostrum fundamentale extendere ad vtrumque resistentiarum simul resistentium genus, quo theoremate generaliori facto omnia pari facilitate absolventur. Quoniam autem hae paginae iam in maius quam constitueram volumen excreuerunt, neque nunc per ista omnia ire vacat, haec et similia in proximam occasionem reseruabo.

Q3

Dan.

Dan. Bernoulli

ADDITAMENTVM

AD

THEOREMATA.

De Motu Corporum curvilineo in mediis resistentibus, in quo resistentiae considerantur quae partim quadratis velocitatum partim momenti temporum proportionales sunt.

MVLtus hucusque sui in commentandis motibus, qui sunt in mediis resistentibus, iisque ad mensuras quantum fieri potest accuratas reducendis. In Tomo secundo atque tertio motus consideravi rectilineos. In quarto autem et praesente curvilineos potissimum. Quod ad hos pertinet, theorema dedi in Tomo quarto alicuius ut puto usus in abbreviandis calculis alias saepe vix superabilibus; huiusque theorematris fertilitatem ostendi in dissertatione brevi, quam videre est in hoc tomo. Haec autem solam considerant hypothesein resistentiarum quadratis velocitatum proportionalium. Cum vero in motibus lentissimis alia quaedam resistentiae species se manifestet praeter modo dictam, quae cum ratione aliqua statuitur momenti temporum proportionalis (qua de re legi possunt quae in Tomo tertio exhibentur) cumque in fine dissertationis huic Tomo insertae me hanc quoque resistentiam explicaturum promiserim, facturus promissa, ostendere

ADDITAMENTVM AD THEOREMATA. 127

de re hic constitui modum, quo theoremata illa circa motum curuilineum exhibita extendi possint ad hypothesin resistentiarum partim quadratis velocitatum partim momenti temporum proportionalium, vt sic experimentis accuratissime instituendis intelligere possimus, an et quanam motuum lentissimorum in mediis resistentibus mensurae sperari possint. Breuis ero quia methodus vix differt ab illa quam in duobus praecedentibus Tomis adhibui, et si eui haecce non satis explicata videantur, hunc rogarim vt superiora cum istis conferre velit. Vt appareat analogia, transcribam ex tomo quarto ipsa theorematum illius verba paucis mutatis, quae sunt mutanda.

Theorema.

§. 2. Sit curua qualiscumque aAc super qua corpus moueri ponatur, ita vt vbique resistentiam offendat quadrato velocitatis suae, tum etiam momento temporis proportionalem. Incipiat primo descendere grauitate sua in A perueniatque priusquam retrogrediatur in C ; dein descendere incipiat idem corpus in a ascensuque suo maximo perueniat in c : ducantur verticale Ab et Cd atque horizontales ab et cd , sintque elementa Aa et Cc infinite parua, dico fore semper spatium percursum AC proportionale logarithmo rationis quam habet $bAg. - aAm$ ad $dCg. + Cc.m$, vbi per g et m intelliguntur constantes quae in demonstratione definiuntur.

Tabula IV.
Fig. 3v

Do-

Demonstratio.

Descendat primo corpus ex A perveneritque in punctum F, moxque post tempusculum infinite parvum dt in E: ducantur horizontalis FG et verticalis GE: ponatur velocitas in puncto F $= v$ in E $= v + dv$. Exprimatur actio gravitatis corpus fluido submersum animans per g , numerusque ille qui multiplicatus per quadratum velocitatis dat resistantiam fluidi priorem indicetur per n . Denique notetur, alteram resistantiam, quae nempe ponitur ubique momenti temporum proportionalis, talem esse vi ipsius positionis, ut in omni corporis situ aequaliter resistat nulla facta attentione ad corporis velocitatem: hanc igitur resistantiam vocabimus m , quae multiplicata per tempusculum dt dat incrementum velocitatis dv ; hinc igitur habetur aequatio

$$I. \left(\frac{g \cdot EG}{FE} - n v v - m \right) dt = dv$$

quae posito $\frac{FE}{v}$ pro dt in hanc aequationem

$$II. gEG - n v v \cdot FE - m FE = v dv.$$

Iam vero fingamus corpus idem descendere incepisse ex puncto a rursusque pervenisse in punctum F, moxque in E, dicatur retentis caeteris positionibus velocitas eius in F $= p$ et in E $= p + dp$; ita obtinebitur loco secundae aequationis haec altera.

$$III. gEG - n p p \cdot FE - m \cdot FE = p dp.$$

Subtrahantur termini aequationis tertiae a terminis aequationis secundae; sic erit facta ab utraque parte divisione per $pp - vv$. IV.

ADDITAMENTVM AD THEOREMATA. 129

IV. $n. FE = \frac{-pdp + vdv}{pp - vv}$

cui postremae aequationi id commodè accidit, quod integrari possit; ut vero debita constans addi possit, consideranda est velocitas corporis ex a delapsi in puncto A ; sit ergo velocitas illa $= a$, ita ut existente puncto F in A sit $p = a$ et $v = 0$, dicaturque numerus, cuius logarithmus est vnitas, $= c$, atque ita aequatio quarta si integretur dat

V. $pp = vv + c^{-2n \cdot AF} aa$.

Verum cum corpus ex A delapsum peruenit in C , sit $v = \theta$ et $AF = AC$, tunc igitur habetur $pp = c^{-2n \cdot AC} aa$ vel

VI. $2n. AC = \log. \frac{aa}{pp}$.

vbi iam per p intelligitur velocitas corporis ex a delapsi in puncto C . Superest ut inquiramus in rationem ipsius $\frac{aa}{pp}$, ut habeatur deinceps valor quaesitus ipsius AC . Denotat autem a velocitatem corporis ex puncto a delapsi vsque in A , et p velocitatem qua idem corpus ex C ascendere possit vsque in a . Quoniam igitur in utroque casu velocitates sunt infinite paruae, erunt resistentiae primae speciei nullae. Igitur si considerentur aA et Cc sicuti plana inclinata, super quorum priori corpus grauitate sollicitatum a statu quietis descendat resistentiam vniformem vbique offendens, dum super altero ascendit paribus conditionibus ad statum quietis vsque, inuenietur ex mechanicis esse (retentis significatiombus litterarum g et m) $\frac{aa}{pp} = \frac{bA \cdot g - aA \cdot m}{dC \cdot g + cC \cdot m}$. Hinc er-

Tom. V. R 50

go aequatio sexta exhibet hanc aequationem finalem et enunciato theorematis conformem, nempe

$$\text{VII. } AC = \frac{1}{2a} \log. \frac{bA \cdot g - aA \cdot m}{aC \cdot g + Cc \cdot m}. \quad \text{Q. E. D.}$$

Corollarium I.

§. 3. Si $m=0$, id est, si nulla habeatur ratio resistentiae, quae momento temporis proportionalis ponitur, oritur theorema, quod in tōmo quarto et praecedente dissertatione breui pertractauimus.

Corollarium 2.

§. 4. Si vero $a=0$, id est, si non respiciatur resistentia rationem duplicatam velocitatum affectans, fit $\frac{bA \cdot g - aA \cdot m}{aC \cdot g + Cc \cdot m} = 1$, seu $(bA - dC)g = (aA + Cc)m$, facti autem summa omnium elementorum $(bA - dC)$ altitudinem verticalem per quam corpus descendit, dum ex statu quietis ad quietem peruenit et summa omnium $(aA + Cc)$ efficit arcum curuae, quem corpus interea describit, unde si prior summa dicatur x , altera z , fit $xg = zm$, quae aequatio etiam oritur si directe quaeratur, ita ut sic casus particulares recte in aequatione catholica theorematis contineantur.

Scholion.

§. 5. Poterunt iam, quamuis calculo prolixiori, ope aequationis septimae omnia problemata solui atque theoremata inueniri similia illis
quae

ADDITAMENTVM AD THEOREMATA. 131

quae dedimus in superioribus; polo autem his nimium immorari; vnicum explicabo quod instituto nostro nunc est conuenientissimum. Nempe quomodo decrementsa oscillationum corporis arcus cycloidicos describentis ad calculum reuocari debeant, vt haec decrementsa tum calculo tum experimentis eruta atque inter se comparata ostendant quousque fidendum sit hypothefibus in motibus lentissimis.

Equidem praeferenda esset positio arcuum circularium positioni arcuum cycloidicorum, quia pendula simplicia de quibus experimenta sumi solent, reuera arcus circulares describunt. At verum quum computus fiat admodum prolixus in casu arcuum circularium, neque hi a cycloidicis notabiliter differant, si parui sumantur, prouti sumendi sunt, vt motus fiat lentissimus, operae pretium non est laborem calculi nimii subire; neque est cur vel minimus scrupulus hac in parte supersit. Si quis tamen cupiat arcus circulares etiam calculo subiicere, hanc viam strauimus in dissertatione huius Tomi §. 11. vbi methodo singulari rem totam absoluimus. Nunc agemus tantum de arcubus cycloidicis, tum pro mediis notabiliter resistentibus, tum etiam pro iis, quorum resistentia minima est neque aliter nisi post plurimas oscillationes percipi potest.

R 2

Pro-

Problema.

§. 6. Dato arcu descensus corporis in cycloide oscillantis, quod resistentiam duplicem supra explicatam vbiq̄ue offendit, inuenire arcum ascensus.

Solutio.

Tabula IV.
Fig. 4.

Sit cyclois proposita QDG; diameter circuli; generatoris DH, cuius situs est verticalis = a ; fingatur corpus ex A et a successiue delapsum ascensus facere vsque in C et c , ducantur horizontales AM, aI , CO et cH minimaeque verticales A b et Cd: sit DA = t , DC = s , Aa = dt , Cc = ds , erit per naturam cycloidis DM = $\frac{tt}{4a}$, DO = $\frac{ss}{4a}$, IM vel bA = $\frac{tdt}{2a}$, NO vel dC = $\frac{sds}{2a}$, quibus omnibus valoribus substitutis in aequatione vltima §. 2. oritur.

$$I. t + s = \frac{1}{2n} \log. \frac{gtdt - 2madt}{gsds + 2mads}$$

quae aequatio posito rursus c pro numero cuius logarithmus est vnitas transformari potest in hanc

II. $g.c^{2ns} s ds + 2ma.c^{2ns} ds = g.c^{-2nt} t dt - 2ma.c^{-2nt} dt$, cuius integratione facta oritur talis aequatio exponentialis

$$III. 2ng.c^{2ns} + (2mna - g).c^{2ns} = -2ng.c^{-2nt} t + (4mn a - g).c^{-2nt}$$

Hisce aequationibus aequiparet etiam haec simpliciter differentialis a quantitatibus exponentialibus libera, nempe

$$IV. \frac{gs + 2ma}{2ngs + 4mna - g} ds = \frac{gt - 2ma}{-2ngt - 4ma - g} dt,$$

Ex

Ex omnibus autem istis aequationibus facile est ad valorem arcus s ex dato t quantumlibet accedere. Q. E. I.

Scholion.

§. 7. Non prolixiorem calculum nec difficiliorem requirit positio vtriusque resistentiae quam solius eius quae sequitur rationem quadratorum velocitatum. Si autem in praesentibus aequationibus ponas $t = z + \frac{2ma}{g}$, et $s = q - \frac{2ma}{g}$, obtinebis aequationes prorsus similes illis quae in priore dissertatione §. 3. exhibitae fuerunt. Interim patet non amplius hic valere theorema §. 4. eiusdem dissertationis. Quod reliquum est pro instituto nostro resistentiam aëris eiusque theoriam potissimum spectante, id in sequenti propositione complectemur, ubi ponemus vtramque resistentiam valde parvam, et singula decremента minima esse ratione arcuum descriptorum; quae hypotheses faciunt vt quantitates u , w et t , s fiat infinite parvae censendae.

Problema.

§. 8. Inuenire minima oscillationum decremента corporis in cycloide oscillantis in medio admodum parum secundum vtramque hypothesein resistente.

Solutio.

Si x secundum naturam problematis sit valde parvus numerus, erit censendum $e^{2x} = 1 + 2nx$

R 3

et

134 ADDITAMENTVM AD THEOREMATA.

et $c^{-2nt} = 1 - 2nt$; quibus valoribus commutatis in aequatione secunda paragraphi 6. fit

$$2mas + (g + 4mna)sd + 2ngts ds = -2madt + (g + 4mna)tdt - 2ngtdt,$$

Haec autem aequatio post sui integrationem mutatur in hanc

$$2mas + \frac{1}{2}(g + 4mna)ss + \frac{2}{3}ngs^3 = -2mat + \frac{1}{2}(g + 4mna)tt - \frac{2}{3}ngt^3;$$

quae ad nihilum reducta et diuisa per $s + t$ abit in hanc

$$2ma + \frac{1}{2}(g + 4mna)(s - t) + \frac{2}{3}ng(ss - st + tt) = 0.$$

Et si in hac vltima aequatione ponatur simpliciter st loco $ss - st + tt$ (conferatur enim arcus s et t fere aequales) reperietur decrementum oscillationis seu

$$t - s = (2ma + \frac{2}{3}ngst) : \frac{1}{2}(g + 4mna)$$

Denique apparet posse simpliciter poni $g + 4mna$; hoc igitur facto oritur

$$t - s = \frac{4m}{g} + \frac{4}{3}nt. \quad \text{Q. E. I.}$$

Corollarium.

§. 9. Quo longius est pendulum eo magis ceteris paribus decrefcunt oscillationes, dum in hypothese vnicæ resistantiae quae sequitur rationem quadratorum velocitatum penduli nihil confert ad decrementa oscillationum, prouti demonstraui in priore dissertatione §. 4.

Problema.

§. 10. Data summa decrementorum post magnam oscillationum in medio tenuissimo numerum

merum, inuenire decrementum soli primae oscillationi debitum.

Solutio.

Mutatis mutandis eadem est, quae in dissertatione antecedente §. 9. et 10. quapropter ratiocinium non repetam, sed dicam tantum, quid methodo illa recte adhibita oriatur. Sit primus arcus descensus = t , arcus ultimo ascensu descriptus = r , numerus oscillationum = l ; et cum primum decrementum sit per praecedentem §. = $\frac{4m\sigma}{g} + \frac{4}{3}nlt$, inueniendus est huius decrementi valor; dico autem fore posito recte ubique calculo

$$I. r = (t - \frac{4m\sigma}{g}) : (1 + \frac{4}{3}nlt),$$

quae aequatio inseruit, ut possit ultimus arcus ascensus inueniri ex primo arcu descensus t et numero oscillationum l . Dein inuenietur numerus oscillationum l ex utroque arcu t et r , tali utendo aequatione.

$$II. l = (t - r) : (\frac{4m\sigma}{g} + \frac{4}{3}ntr).$$

Denique, quod saepissime requiritur, est ut ex toto decremento $t - r$ inueniatur decrementum primae oscillationis, nempe $\frac{4m\sigma}{g} + \frac{4}{3}nlt$. Hic vero locum non obtinet compendium illud, quo usi sumus in superiori dissertatione loco modo citato multiplicando aequationem per t . Hinc nec ita concinna fiet regula; sic autem pertractabimus aequationem secundam; inde est nempe $\frac{4m\sigma}{g} = \frac{t-r}{l} - \frac{4}{3}ntr$;

πtr ; addatur ab vtraque parte $\frac{1}{2}nnt$, vt habeatur $\frac{4ma}{g} + \frac{1}{2}nnt = \frac{t-r}{1} - \frac{1}{2}ntr + \frac{1}{2}nnt$, quae aequatio mutata paulo facie haec tandem est.

III. $\frac{4ma}{g} + \frac{1}{2}nnt = \frac{t-r}{1} + \frac{1}{2}nt \times (t-r)$, quae monstrat decremento toti diuiso per numerum oscillationum addendum esse numerum minimum $\frac{1}{2}nt \times (t-r)$, exprimendo scilicet arcus t et r in pedibus Anglicis. Q. E. L.

Corollarium.

§. 11. Non differunt aequationes duae priores nec forma nec valore ab suis correspondentibus dissertationis prioris §. 9. si ponatur $m=e$; tertia autem aliam tunc habet formam quam aequatio eiusdem dissertationis §. 10. sed valores non differunt nisi in quantitibus quas vt minimas tractauimus.

Conclusiones Physicae de natura oscillationum in aëre et fluidorum resistentium.

§. 12. Licet vtique aërem considerare ceu medium minimae resistentiae, ita vt propositiones praecedentes applicari possint ad inuestigandam resistentiam aeris, si modo haec resistentia pura fit, sunt autem alia insuper obstacula oscillationibus; nempe sibi aliqua rigiditas eiusque impulsus contra locum suspensionis, vt et resistentia quam aër contra filum exercet, quorum obstaculorum

lorum in calculo nullam habuimus considerationem. Licet autem obstaculum a rigiditate filii eiusque impulsu contra latera foraminis, per quod filii summitas transit, referre ad classem resistentiae illius quam fecimus momenti temporum proportionalem, dum resistentiam aëris contra filum putabimus ipsi globo superuenire. Quibus ita positis apparet non mutari naturam aequationum praemissarum, sed augeri tantum valores litterarum m et r quia vero incertum est quantum augeantur, eos determinabimus per experimenta, atque sic postea examinabimus, an aequationes duobus experimentis accommodatae conueniant cum reliquis experimentis de eodem pendulo sumtis. Itaque utemur prima aequatione §. 10. nempe $r = (1 - \frac{1}{8} \frac{ma}{g}) : (1 + \frac{3}{8} \frac{gl}{t})$, vel quia in eodem pendulo eodemque fluido non mutantur litterae a et g , ponemus

$$r = (1 - l\alpha) : (1 + \frac{3}{8} \frac{gl}{t})$$

atque in duobus casibus particularibus inquiremus in valores litterarum a et g . Hos autem casus sumemus ex *Newt. Nat. Princ. Math.* p. 310. edit. 3.

I. Certus globus ex certa altitudine suspensus describens primo descensu sextam partem vnius pedis post 374 oscillationes ascensu fecit octauam partem vnius pedis.

Hic $t = \frac{1}{6}, r = \frac{1}{8}, l = 374$, vnde $\frac{1}{8} = (\frac{1}{6} - 374\alpha) : (1 + \frac{374g}{6})$

II. Idem globus similiter suspensus describens primo descensu tertiam partem vnius pedis post 272 oscillationes ascensum fecit aequalem quartae parti pedis.

Tom. V.

S

Hic

135 ADDITAMENTVM AD THEOREMATA

Hic $t = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{2}$, $l = 272$; ergo $\frac{r}{t} = (\frac{r}{t} - 272a) : (1 + \frac{272a}{3})$
 Ex combinatis istis aequationibus fit $a = \frac{85}{1831104}$
 et $\delta = \frac{5712}{1831104}$, hinc igitur substitutis his valo-
 ribus oritur $r = (t - \frac{85}{1831104}) : (1 + \frac{371271}{1831104})$, vel
 $r = \frac{1831104t - 85}{1831104 + 371271}$

Videamus nunc quantum vltima haec aequatio con-
 ueniat cum reliquis experimentis ibidem memo-
 ratis. Sic cum primus arcus descensus erat $= \frac{2}{3}$
 et numerus oscillationum $162\frac{1}{2}$, erat vltimus ar-
 cus ascensus $= \frac{1}{2}$; sed secundum formulam debe-
 bat esse $= \frac{8206924}{2449904}$, quae sic satis conueniunt.
 Dein posito $t = \frac{1}{3}$ et $l = 83\frac{1}{3}$, obseruatum fuit esse
 $r = 1$; est autem secundum aequationem $r =$
 $\frac{2434389}{2483707}$, quae pariter non multum dissentiunt.
 Mox cum t erat $= \frac{8}{3}$, $l = 41\frac{2}{3}$, obseruatum fuit
 $r = 2$, dum formula nostra indicat $r = \frac{4619403}{2483707}$;
 Denique existente primo arcu descensus $5\frac{1}{3}$ pe-
 dum, obseruabatur vltimus ascensus quatuor pedum
 post oscillationes $22\frac{2}{3}$: debet autem secundum ae-
 quationem esse vltimus ascensus $r = \frac{9763962}{2521622}$. Om-
 nes hi casus egregie consentiunt cum theoria prae-
 ter vltimum, qui aliquantum magis ab illa rece-
 dit, quod non defectui alicui formulae sed alia
 circumstantiis tribuendum esse nullus dubito, ve-
 luti quod arcus circularis nimis fuerit, quam ut
 pro cycloidico haberi possit, aut quod in obser-
 natione non satis distincti fuerint arcus a chordis
 respondentibus, cum diuisiones factae fuerint in
 regula horizontaliter posita. Simile autem quid
 con-

ADDITAMENTVM AD THEOREMATA 139

contigisse ex eo liquet, quod numeri oscillationum semper magis vergere observati fuerint ad rationem duplam praeter ultimam observationem, cuius numerus rursus diuergit, nam praecise dupla est ratio inter $83\frac{1}{3}$ et $41\frac{2}{3}$, dum ratio inter $41\frac{2}{3}$ et $22\frac{2}{3}$ minor est dupla, et si ex inductione de ultimo isto numero oscillationum quis iudicaret, vix illum ultra $20\frac{2}{3}$ extensurus fuisset.

Similiter computum apponam experimentorum de eodem pendulo sumtorum et pag. 307. recensitorum eiusque conspectum in sequenti tabula dabo.

Primus de- scensus in pod. Anglic.	Numerus of- cillatio- num.	Ultimus asc. per observ.	Ultimus asc. per theori- am.	Differentiae in fractionibus de- cim. ped. Angl.
$\frac{1}{8}$	164	$\frac{7}{28}$	$\frac{291244}{1987232}$	+0.0007
$\frac{1}{3}$	121	$\frac{7}{28}$	$\frac{600083}{2061488}$	-0.0005
$\frac{2}{3}$	69	$\frac{7}{42}$	$\frac{1214871}{2093838}$	-0.0029
$\frac{4}{3}$	$35\frac{1}{2}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{2438451}{2101472}$	-0.0059
$\frac{8}{3}$	$18\frac{1}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{4881372}{2112898}$	-0.0223
$\frac{16}{3}$	$9\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{9765066}{2123389}$	-0.0711

Atque sic quidem apparet non incongruenter adhiberi formulas §. 10. cum in illis litterae m et n seu inde pendentes α et β ope duorum experimentorum determinantur, quod fecimus in hisce calculis. Si tamen dicendum, quod res est, negari non potest hanc methodum plane non con-

S 2

uenire

240 ADDITAMENTVM AD THEOREMATA.

uenire cum oscillationibus perquam exiguis veluti
vnius digiti aut adhuc minoribus. Tunc enim de-
berent decremēta singula esse inter se aequalia,
atque proin decremētorum aggregatum propor-
tionale numero oscillationum, quod minime con-
uenit cum experimentis de globo plumbeo oscil-
lante a *Newtono* sumtis et in eodem scholio ge-
nerali p. 310. recensitis, vbi dicitur, globum quē
primo descensu perfecit arculum duorum digito-
rum, perfecisse ascensu ducentesimo vigesimo octā-
uō septem quartas digiti partes, eundemque glo-
bum similiter suspensum ascensu ducentesimo vi-
gesimo sexto arculum descripsisse septem partium
octauarum digiti cum primo descensu descriperat
vnum digitum, quae duae obseruationes non satis
conciliari possunt cum superioribus aequationibus
nostris, si simul respiciamus reliquas obserua-
tiones. Vnde tandem concludo, quod etiam
vberius explicauī in dissertatione Tom. 3. moti-
bus paulo velocioribus inseruire hypothesin sim-
plicem resistantiam quadratis velocitatum propor-
tionalem, motibus lentioribus eandem hanc resi-
stentiam coniunctam cum altera quae momentorum
temporum rationem sequatur egregie satisfacere,
motibus autem plane lentissimis, quales fiunt in
oscillationibus perexiguis neutram ex asse satisfacere
eorumque theoriam incertam adhuc esse, nec
fortasse dari posse ob inconstantiam incertitudinem-
que circumstantiarum multiplicium. Si dicas fluida
resistentiam exercere aliquam momentis temporum
ad

ADDITAMENTVM AD THEOREMATA. 141

ad amissim proportionalem, sequitur praeterea fila corporum pendulorum in fluidis iis sustineri posse extra situm verticalem, et quidem ab eodem notabiliter remota, quod nec in aëre nec in aqua imò nec in oleis plerisque vnquam obseruatum fuisse crediderim; quamuis id in fluidis valde tenacibus veluti oleis quibusdam aut melle si modo fluida sint vocanda, fieri posse nullum sit dubium. Dubito igitur an aëri vel aquae simpidae et purae dici possit vllam tenacitatem, quae subsensus cadat, inesse et an resistentia illa quae se manifestat cum corpus lentius se mouet in hisce fluidis ortum trahat ab eorundem tenacitate, quo in casu magis sequeretur rationem momentorum temporis, vti offendi in citata dissertatione Tom. 3. Vt vero redeam ad oscillationes minimas pendulorum, quamuis vix puro comprehendere illas se pati certis regulis tamen monendum duxi, theoriam non protinus reiiciendam esse, ideo, quod non cum omni rigore experimentis de illa re sumtis respondeat, quandoquidem huiusmodi experimenta satis accurate minime institui possint. Vix fieri potest vt minor quam decima pars lineae recte et aliqua cum certitudine obseruetur: et tali particulae in experimentis *Newtonianis* ad oscillationes minimas globi plumbei praememoratas pertinentibus respondent propemodum quindecim oscillationes, ita vt non videam quomodo affirmari possit minorem oscillationum numerum requisitum fuisse vt octaua motus pars amitteretur, cum primus descensus fuerit vnus digiti quam cum fuerit duorum digitorum, praesertim cum id dissentire vi-

142 ADDITAMENTVM AD THEOREMATA.

deatur cum reliquis obseruationibus. Scio tamen id fieri posse, imo debere in arcibus sat paruis, si resistentiae statuatur momentis temporum perfecte proportionales.

Quoniam autem ex omnibus phaenomenis concludi posse videtur corpora in fluidis paulo celerius mota praeter resistentiam quadratis velocitatum proportionalcm aliam offendere, quae statui posset momentis temporum proportionalis, quaeestio se menti offert, qui ergo fiat, vt nullum corpus aqua vel minimum grauius in eadem suspensum haereat, idemque cur e filo suspensum semper situm infimum assumat, denique cur in motu lentissimo ista resistentiarum positio plane non conueniat. Haec si recte intelligerentur, sperari posset illam scientiam quae fluida spectat haud parum hinc promotum iri. Interim suspicari licet in motu non admodum lento particulas fluidi a se inuicem quasi diuelli, hanc autem diuulsionem in motu lentissimo ideo non superuenire; quod vna particula super aliam se mouendo sat cito locum a corpore moto relictum occupet: ita duo specula laeuigata sibi super imposita sine ingente vi diuelli non possunt, dum facile vnum super altero mouetur. Nisi simile quid succedat statuaturque particulas fluidi liberrime super se inuicem moueri; sicque locum corporis solidi moti profecto occupare non video, quare pendula corpora in fluidis locum infinitum semper perfecte assumant.

QVO-

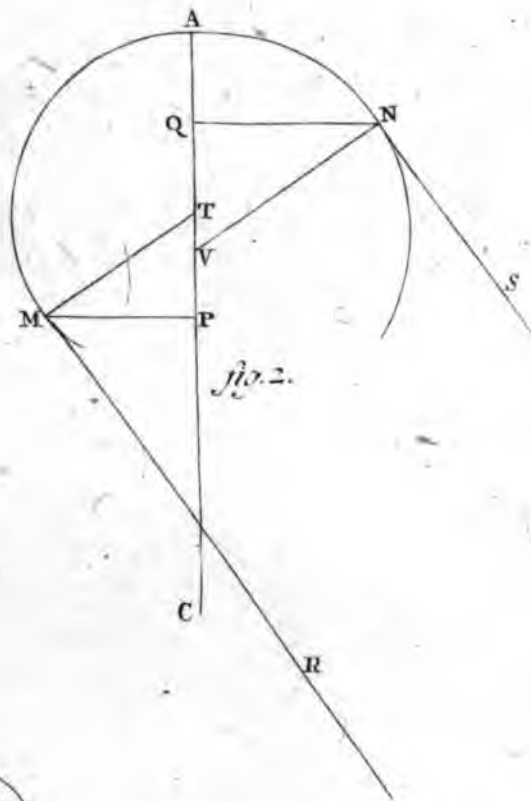
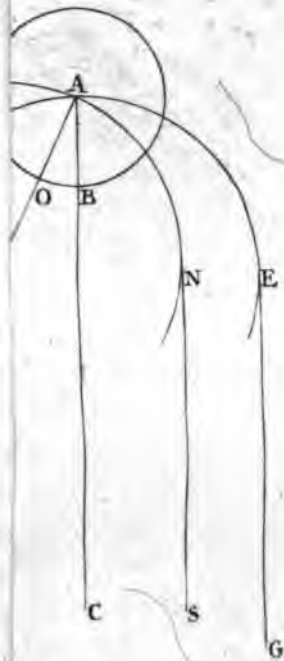


fig. 2.

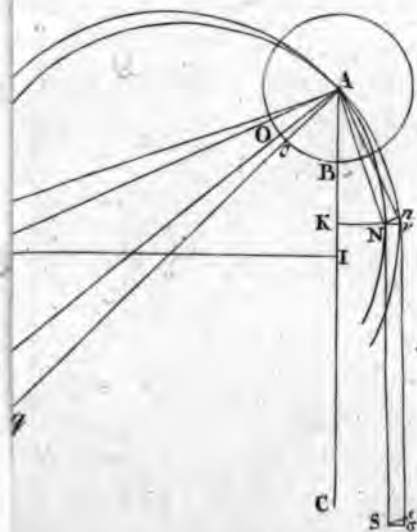


fig. 3.

QVOMODO DATA QVACVNQVE
 CVRVA INVENIRI OPORTEAT ALIAM, QVAE
 CVM DATA QVODAMMODO IVNCTA AD
 TAVTOCHRONISMVM PRODVENDVM
 SIT IDONEA.

Auct. L. Eulero,

1.

Meditanti mihi ante quadriennium de cur-
 ua tautochrone ad Horologium Domini
Sullii accommodata, vid. Comm. A. 1727.
 occurrit aliud quoddam oscillationum genus, quod
 duabus continetur curvis, et tale est, ut data ea-
 rum altera, altera semper inveniri possit. Quam-
 obrem quaestio de hoc tautochronismo indeter-
 minata est, et infinitas admittit solutiones. Quae
 proprietates, quae mihi elegans esse, et usum quen-
 dam fortasse in praxi habere posse visa est; praeter-
 ereaque ipsa solutio, quae problematis trajecto-
 riarum reciprocarum similis est solutionis, et pro-
 pter id peculiarem hucusque non multum usita-
 tum solvendi modum requirit, me impulerunt,
 ut meam methodum ad huiusmodi problemata
 soluenda admodum idoneam iterum proponerem,
 huicque casui accommodatam traderem.

Tabula V.

§. 2. Originem autem duxit praefens pro-
 blema ex certo quodam oscillandi genere, quod
 hic

Tabula
 Fig. 2.

hic ante omnia exponere convenit. Concipio trochleam ABP circa axem per centrum eius A transeuntem mobilem. Huic trochleae duae affirmatae sint laminae incurvatae AD , AE , filis circumductae, quae laminae semper deferant, ubi tangentes sunt verticales, ut in D et E , unde verticaliter dependeant tracta a potentiis vi inertiae destitutis, ne vi opus sit ad eas mouendas. Sit situs $FDAEG$ status aequilibrum, ducatur ex A verticalis ABC , quae una cum trochlea circa A moveri concipiatur; Ita ut machina tum sit in quiete, cum recta ABC fuerit verticalis. Ex hoc igitur iam ratio distantiarum punctorum D et E a recta AC determinatur, si datae fuerint potentiae in F et G applicatae.

§. 3. Detorqueatur machina ex statu quietis in situm quemvis $RMANS$, ut recta quae ante fuerat verticalis AC , in situm AQ perueniat, angulo CAQ percurso. Tangent ergo fila MR , NS , a datis potentiis sollicitata laminae in M et N , ut sint verticalia. Ex hoc perspicuum est vim potentiae F in R translatae ad vertendam trochleam esse auctam, alteram vero G in S translatae esse diminutam. Ex quibus consequitur, machinam in $RMANS$ positam nequaquam in quiete permanere posse, sed ad situm $FDAEG$, in quo ponitur aequilibrium, perpetuo tendere. Reipsa igitur, cum nihil impediatur, in situm aequilibrum feretur; idque motu, quia continuo versus eum

eum pellitur, accelerato: eo igitur situ quiescere non poterit, sed ex eo in contrariam plagam excurret, et ita perpetuo oscillationes peraget.

§. 4. Machina hac descripta, hoc est, quod mihi proposui, problema. *Quomodo laminae AD, AE sint incuruandae, ut oscillationes reddantur isochronae, seu ut omnes eodem tempore absoluantur.* Manifestum est, problema praesens ex eorum esse numero, quae indeterminata appellantur, propter duas curvas AD et AE determinandas, quarum vna tantummodo ex conditione problematis determinatur. Problema igitur tale est, ut data harum curvarum altera, altera inueniri possit. Erunt deinde sine dubio casus, quibus hae duae curvae sunt inter se aequales et similes. Quamobrem hanc quaestionem bipartitam propono, vnde duplex nascitur solutio. Primo nempe methodum tradam, *qua data altera curvarum altera inueniri queat; deinceps, quomodo ii eruendi sint casus, quibus ambae curvae sunt inter se aequales et similes.*

§. 5. Ad solutionem harum quaestionum animum attendere conuenit ad duo puncta curvarum AD et AE homologa, quae mihi sunt ea, in quibus simul laminae a filis tanguntur, ut D et E, item M et N. Horum punctorum haec est mutua relatio, ut dispositis curuis ad communem de-

Tom. V. T bitum-

bitumque axem AQ , tangentes in iis punctis sint parallelae ut MR , NS . In ipso statu aequilibrii $FDAEG$ sunt eae tangentes ipsi axi parallelae, in aliis positionibus non item, sed faciunt cum axe angulum; ex quo *angulus declinationis* CAQ , seu qui metitur distantiam situs machinae a statu quietis cognosci poterit, sunt enim inter se aequales. Quia enim NS parallela est AC , erit angulus, quem SN producta cum axe QA constituit, aequalis angulo CAQ .

Fig. 2.

§. Vt hoc diligentius persequar, sint AM et AN duae curvae quaesitae, quarum axis communis sit AC . Capiantur in iis duo puncta homologa M et N , erunt tangentes MR , NS inter se parallelae. Ducantur applicatae MP , NQ , erit summa angulorum $PMR + QNS$ aequalis duobus rectis. Siue ducantur normales MT , NA in curvas, erunt anguli PMT , QNV inter se aequales. Sed quia subnormales PT , QV , ad contrarias plagas diriguntur, erit angulorum PMT , QNV , alter alterius negativus. Porro cum anguli tangentium cum axe AC sint aequales angulis PMT , QNV , sequitur angulum declinationis machinae aequalem esse alterutri angulorum normalibus et applicatis contentorum.

Fig. 3.

§. 7. His expositis ad ipsius machinae motum me conuerto. Peragat trochlea ABO oscillationes, et dum ad statum naturalem tendit, pervenerit

venerit in situm $RMANS$, et axis in AQ , distans a verticali AC angulo CAQ , seu BAO . In sit in puncto O velocitas ex altitudine v oriunda, qua circumferentia trochleae conuertitur. Sit pondus trochleae $=P$, erit vis viua, quae inest in trochlea, si ea fuerit vbique aequaliter crassa et grauis, $=\frac{1}{2}Pv$. Nam si omnes trochleae partes eadem velocitate ex alt. v acquisita mouerentur, tum foret vis viua $=Pv$. Cum autem partes, quo centro fiat propinquiores, eo tardius moueantur, vis viua dimidio fit minor, vt computum instituenti liquebit.

§. 8. Progrediatur puncto temporis machina in situm $rmAns$, axisque AQ in Aq , vt ergo angulo OAO angulus declinationis diminuatur. Punctum igitur M perueniet in m , et N in n , eritque ang. $OAO = MAm = NAn$ propter vniformem totius machinae motum angularem. Interim potentia in R applicata descendit in r , at altera in S ascendit in s ; eritque ob $MR = mr$, lineola Rr parallela et aequalis lineolae Mm . Et simili modo Ss parallela erit et aequalis elemento Nn . Ducantur horizontales, $r\varrho$, $S\sigma$ nec non $m\mu$, $N\nu$, quae producantur in I et K ad verticalem AC vsque. Transitu hoc per Oo aucta erit velocitas circumferentiae trochleae, vt sit nunc $=$ veloc. ex alt. $v + dv$ acquisitae. Vnde vis viua trochleae in praesenti situ est $=\frac{1}{2}P(v + dv)$.

T 2

§. 9.

§. 9. Absoluto ergo angulo $O A o$, vis viva trochleae aucta est elemento $\frac{1}{2} P d v$, quod incrementum ortum suum debet potentiis in R et S applicatis. Quamobrem inuestigabo quanta hac temporis particula ab his potentiis genita sit vis viva. Sit pondus potentiae in R aequivalens $= R$ pondus potentiae in S aequivalens $= S$. Perspicuum est a potent. R descensu per R_2 , genitam esse vim viam $R. R_2$ seu $R. M \mu$. At vero a potentia S propter ascensum per σs destructa est vis viva $S. s \sigma$ seu $S. n \nu$. His coniunctis generata habebitur vis viva $= R. M \mu - S. n \nu$. Huic vi genitae, aequale esse debet incrementum reipsa deprehensum $\frac{1}{2} P d v$. Quocirca haec acquiritur aequatio, $\frac{1}{2} P d v = R. M \mu - S. n \nu$.

§. 10. Propter triangula similia $M m \mu$, $m A I$, et $N n \nu$, $A N K$, erit $M \mu = m I$ $M m : A m$ et $n \nu = N K$. $N n : A N$. Est autem $M m : A m = O o : A O$. Ergo $M \mu = m I. O o : A O$; et $n \nu = N K. O o : A O$. Propterea haec emergit aequatio $\frac{1}{2} P. A O. d v = R. m I. O o - S. N K. O o$. Est vero $O o : A O = \text{ang. } O A o$. ergo $\frac{1}{2} P. d v = (R. m I - S. N K) O A o$. Hic autem angulus $O A o$ est elementum anguli $B A O$, qui aequalis est angulo, quem applicata curvae $A M$ vel $A N$ in axem $A Q$ ducta cum normali in curvam constituit. Huius igitur anguli elementum aequatur elemento $O A o$. Ex quo apparet elementum $d v$ in quantitatis ex curvis datis exprimi, neque lineas vtriusque curvae inter se esse
per

permixtas. Datis itaque curuis laminarum hoc modo motus trochleae inuenietur, et inde oscillationes, de quibus iudicari poterit, vtrum sint isochronae, an secus.

§. 11. Consideremus nunc eam conditionem, qua oscillationes trochleae isochronae esse debent. Accipiamus in circumferentia trochleae punctum, quod in infimo loco stat machina quiescente, id quod est punctum O. Necessse ergo est, vt et hoc punctum oscillationes isochronas conficiat, seu vt aequalibus temporibus, vbicunq; motum inchoauerit, ad infimum punctum B perueniat. Ad hoc oportet, vt accelerationes puncti O versus B sint vt viae describendae, donec ad B perueniant, id est, vt anguli OAB. Ex quo fluit fore dv vt BO.Oo, pono autem $adv = BO.Oo$.

§. 12. Valore hoc loco dv in superiore aequatione substituto, haec prouenit aequatio $\frac{1}{2}P.AO.BO.Oo = R.a.mI.Oo - S.a.NK.Oo$. Diuidatur per Oo, et multiplicetur per 2. orietur $P.AO.BO = 2R.a.mI - 2S.a.NK$. Quae a differentialibus quantitatibus prorsus est libera. Mutetur paululum constans, eritque $P.b.BAO = R.mI - S.NK$. Potest autem ang. BAO in ipsis curuis AM, AN exhiberi, et quantitatibus ad eas pertinentibus exprimi. Vnde sequitur aequationem inuentam sufficere ad problema soluendum.

T 3

§. 13.

§. 13. Quod aequatio primum differentialis inuenta sit, ea vero diuisione facta per quantitatem differentialem ad integram sit reuocata, id indicat sine differentialibus statim ad inuentam algebraicam aequationem perueniri posse sequenti modo multum breuiore et faciliore. Momentum potentiae R, ad trochleam conuertendam est $R.mI$, alterius potentiae S, est $S.NK$. Quia hoc illi contrarium est atque minuit, trochlea ab O ad B sollicitatur a vi $R.mI - S.NK$, huicque vi proportionalis est acceleratio, quae, ut oscillationes sint isochronae, debet esse ut via describenda id est ut BO, vel BAO, vel quoque ut P.b.BAO. cui aequalis poni potest, eritque ut supra P.b.BAO $\equiv R.mI - S.NK$.

Tabula VI.
Fig. 1.

§. 14. Sunt vero mI, NK , perpendiculara ex A in tangentes; et BAO aequatur angulo, quem tangentes cum axe constituunt. Facta igitur applicatione ad sequentem figuram reperitur haec aequatio P. b. $ATM = R.AP - S.AQ$. Sumatur eius differentialis P. b. $dATM = R.dAP - S.dAQ$. Est vero $d.ATM = \text{angulo}$, quem duo elementa curuae proxima inter se constituunt, idcirco $= \text{angulo}$ a duobus normalibus infinite propinquis intercepto, qui habetur elemento curuae per radium osculi diuiso; qui quotus in vtraque curua idem esse debet propter tangentes parallelas, in altera vero negatiuus esse debet eius, qui in altera accipitur. Hanc ob rem pono $AM = y, AP = p, PM =$

$=\sqrt{yy-pp}=q$, atque $AN=z, AQ=r, QN=\sqrt{zz-rr}=s$. Erit radius osculi ibi $=ydy:dp$. hic vero $=zdz:dr$. Deinde elementum curuae in illa $=ydy:q$; in hac $=zdz:s$; vt ergo elementum ang. ATM. sit ex illa curua $=dp:q$, ex hac $=dr:s$. Oportet vero esse $dp:q=-dr:s$.

§. 15. His valoribus substitutis, proueniet haec aequatio $Pbdp:q=Rdp-Sdr$. Est vero $-dr:s=dp:q$, vnde $dr=-sdp:q$, quo substituto aequatio resultans $Pbdp:q=Rdp+Ssdp:q$ diuidi poterit per dp , quo facto, et multiplicato per q . habebitur ista aequatio $Pb=Rq+Ss$. Ex qua haec fuit proprietas curuarum quaesitarum, vt summa $R.PM+S.QN$ semper sit constans sumtis tangentibus parallelis. Habentur ergo duae haec aequationes $Pb=Rq+Ss$ et $sdp+qdr=0$. Ex quibus iunctis problemati facile satisfiet.

§. 16. Applicemus haec ad axem AT. Ducantur applicatae MX, NY; sitque $AX=x, XM=y$, et $AY=v, YN=z$. Erit $PM=q=\frac{x dx+y dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ et $QN=s=\frac{v dv+z dz}{\sqrt{dv^2+dz^2}}$. Atque ob tangentes PM, QN inter se parallelas erit $dx:dy= dv:-dz$, seu $dz=-dvdv:dx$. Superior vero aequatio $Pb=Rq+Ss$ transmutabitur in hanc $Pb=R(x dx+y dy):\sqrt{dx^2+dy^2}+S(v dv+z dz):\sqrt{dv^2+dz^2}$ substituatur loco $dz, -dvdv:dx$; erit $Pb=R(x dx+y dy):\sqrt{dx^2+dy^2}+S(v dx-z dy):\sqrt{dx^2+dy^2}$. Vnde elicietur $z=v dx:dy+(R(x dx+y dy)-Pb\sqrt{dx^2+dy^2}):S dy$. Vocetur $dx:dy=\xi$: et
 $(R(x dx$

$(R(x dx + y dy) - PbV(dx^2 + dy^2)) : S dy = B$.
 erit $z = \xi v + B$; vnde $dz = \xi dv + v d\xi + dB = -dv dy : dx = -dv : \xi$. Consequenter $dv + \xi \xi dv + v \xi d\xi + \xi dB = 0$; diuidatur per $V(1 + \xi \xi)$ erit
 $dv V(1 + \xi \xi) + v \xi d\xi : V(1 + \xi \xi) + \xi dB : V(1 + \xi \xi) = 0$. Quae integrata dat $v V(1 + \xi \xi) + \int \xi dB : V(1 + \xi \xi) = C$. Quocirco erit $v = \frac{C - \int \xi dB : V(1 + \xi \xi)}{V(1 + \xi \xi)}$
 ac $z = \frac{C \xi + B V(1 + \xi \xi) - \xi \int \xi dB : V(1 + \xi \xi)}{V(1 + \xi \xi)}$.

§. 17. Est autem substituto loco B valore debito nempe $(R(x \xi + y) - PbV(1 + \xi \xi)) : S, \int \xi dB : V(1 + \xi \xi) = R x V(1 + \xi \xi) : S - \frac{Pb}{S} \int \frac{\xi \xi d\xi}{1 + \xi \xi}$.
 Vnde fit $v = \frac{CS - Rx V(1 + \xi \xi) + Pb \int \xi \xi d\xi : (1 + \xi \xi)}{S V(1 + \xi \xi)}$ atque
 $z = \frac{Cs \xi + Ry V(1 + \xi \xi) + Pb \xi \int \xi d\xi : \xi \xi (1 + \xi \xi)}{S V(1 + \xi \xi)}$. Data ergo curua alterutra AN, seu aequatione inter v et z , si in ea loco v et z valores inuenti substituantur, habebitur aequatio inter y et x , seu altera curua. Sed si ad commoditatem constructionis attendamus, detur curua AM seu aequatio inter x et y , et inuenietur ex dato quouis puncto M, eius homologum N, propter AY et YN, quae per quadraturas facile determinantur. Perspicuum vero est alteram curuam ex altera construi ope quadraturae circuli; et ideo vtramque non posse esse algebraicam.

§. 18. Si habeatur pro alterutra curua aequatio inter perpendicularum in tangentem et ipsam tangentem, totum negotium multo facilius expe-

pedietur. Positis enim $AP=p$, $Pm=q$, et $AQ=r$, $QN=s$, erit per §. 15. $Pb=Rq+Ss$ atque $sdp+qdr=0$, vnde elicitur $s=(Pb-Rq):S$. atque $dr=-sdp:q=-dp(Pb-Rq):Sq$. Data ergo aequatione inter p , et q , inde inuenietur aequatio inter s et r . Seu facilius si habeatur aequatio inter r et s , substituuntur pro s et r valores in p et q , prodibitque aequatio inter p et q . Data ergo alterutra harum curuarum, altera facile reperitur.

§. 19. Illustremus hanc regulam exemplis nonnullis. Sit altera curua AN circulus, cuius peripheria per A transit, sit eius radius $=a$. Erit $rr-2ar+ss=0$ seu $r=a+\sqrt{aa-ss}$ indeque $dr=-sds:\sqrt{aa-ss}$. Ponatur loco dr , $-dp(Pb-Rq):Sq$ et loco s , $(Pb-Rq):S$, ergo loco ds , $-Rdq:S$, proueniet haec aequatio $dp=-Rq dq:\sqrt{SSaa-(Pb-Rq)^2}$. Quae aequatio exprimit naturam alterius curuae, et quia est separata, per quadraturas construi potest. Quum hoc modo inueniantur puncta homologa, poterit altera vtcunque applicata respectu axis AT, altera quoque applicari, hoc obseruato, vt tangentes in punctis homologis vnico tantum in casu sint parallelae; perspicuum ergo est, easdem curuas infinitis modis applicatas satisfacere posse.

§. 20. Sit altera curua AN rursus circulus, centrum in A habens erit r constans et $s=0$, vnde

de $q = Pb : R$, adeoque constans. Est igitur ob hanc proprietatem curva quaesita nata ex evolutione circuli, idque talis cuius radius est $Pb : R$. Modus vero huius applicandae hic est, ut centrum circuli generatoris ponatur super centro trochleae A. Quod haec curva talis esse debeat, ex *Dissert. de nouo quodam tautochr. genere* in *Comm. A. 1727.* inserta colligi potest. Cum enim altera curva AN sit circulus centrum in A habens pondus seu potentia S, in quouis situ eundem exerit effectum, ut ergo altera curva sola tautochronismum producere debeat. Qui, cum sit ille casus citatus, necesse est, ut curva quaesita eadem sit, ut ibi, genita ex evolutione circuli.

Tabula VI.
Fig. 2.

§. 21. Progredior iam ad alterum problematis casum, et inuestigo casus quibus ambae curvae sint inter se eadem et circa axem similiter applicatae. Sint ergo curvae AM, AN eadem circa axem AC similiter positae. Oporteret inuenire talem aequationem inter coordinatas AX, x et XM, y, ut posito in ea $x = AY, v$, fiat $y = NY = z$. Ad hoc efficiendum duas hasce proprietates inuentas considero; primo, ut ductis normalibus MT et NV seu nV, sit ang. $XMT = YNV = YnV$; deinde ut sit $Pb = R. PM + S, QN$. Sed quia curvae sunt aequales et similiter applicatae, necesse est ut sit $R = S$, ponatur autem $Pb : R = 2c$, erit altera proprietas hac aequatione contenta, $PM + QN = 2c$, seu $PM + qn = 2c$.

§. 22.

§. 22. Huc ergo problema est reductum, vt inueniatur curua Am talis, vt, si in ea accipiantur duo puncta M et n , ex quibus normales MT et nV ductae cum applicatis MX , nY angulos constituent, alterum alterius negatiuum, seu quae se mutuo ad angulos rectos interfecent; ductis deinde tangentibus MP et nq , in easque demissis ex A perpendicularis AP , Aq , vt, inquam, sit summa $PM + nq$ constans seu aequalis, $2c$. Quamobrem quaero aequationem inter tangentem PM , et angulum XMT , seu quantitatem independentem, quae facto angulo negatiuo, ipsa quoque negatiua euadat, talem, vt, si loco anguli XMT , seu quantitatis vicem eius gerentis eius negatiuum ponatur, PM transmutetur in aliam quae cum PM efficiat summam $2c$.

§. 23. Cum sinus anguli cuiusuis, facto angulo negatiuo, abeat in sui negatiuum, loco anguli adhibeo eius sinum, sit igitur sinus anguli $XMT = \xi$, et tangens $PM = q$, requiritur aequatio inter ξ et q , in qua, loco ξ posito $-\xi$, q abeat in s , vt sit $q + s = 2c$. Hanc ob rationem pono $q = c + Q$, designante Q functionem quamcumque imparem ipsius ξ , facto enim ξ negatiuo et Q abibit in $-Q$, vt ergo sit $s = c - Q$, summa igitur $q + s$ erit $= 2c$, vt requirebatur.

§. 24. Inuenta autem aequatione inter q et ξ , oportet ex ea aequationem inuenire inter coordinatas

dinatas AX, XM seu inter x et y ; id quod sequenti modo efficietur. Si $AX=x$, et $XM=y$, erit sinus anguli $XMT=dy:\sqrt{dx^2+dy^2}$, et tangens $MP=(xdx+ydy):\sqrt{dx^2+dy^2}$. Erit itaque $\xi=dy:\sqrt{dx^2+dy^2}$ et $q=(xdx+ydy):\sqrt{dx^2+dy^2}$. His igitur valoribus in aequatione inter ξ et q substitutis, resultabit noua aequatio inter x et y , ex qua curua qualis sit cognoscetur. Ponatur vero $dy=pdx$, erit $\xi=p:\sqrt{1+pp}$ vnde patet ξ abire in negatiuum, si p fiat negatiuum. Quamobrem loco Q poni potest functio quaecunq; impar ipsius p , et erit $q=(xdx+ydy):\sqrt{dx^2+dy^2}=c+Q$, seu $(x+py)\sqrt{1+pp}=c+Q$.

§. 25. Aequatio ergo inter x et y pro curua quaesita talis esse debet, vt posito $dy:dx=p$, sit $(x+py):\sqrt{1+pp}=c+Q$ denotante Q functionem imparem ipsius p , siue cum et $Q\sqrt{1+pp}$, ob $\sqrt{1+pp}$ functionem parem ipsius p , sit functio impar, scribatur loco $Q\sqrt{1+pp}$ solum Q ; et erit $x+py=c\sqrt{1+pp}+Q$. Substituendis igitur loco Q determinatis functionibus ipsius p , et deinde loco p eius valore $dy:dx$, habebuntur aequationes, quas non nisi x et y cum suis differentialibus et constantibus ingrediuntur.

Tabula VI.
Fig. 3.

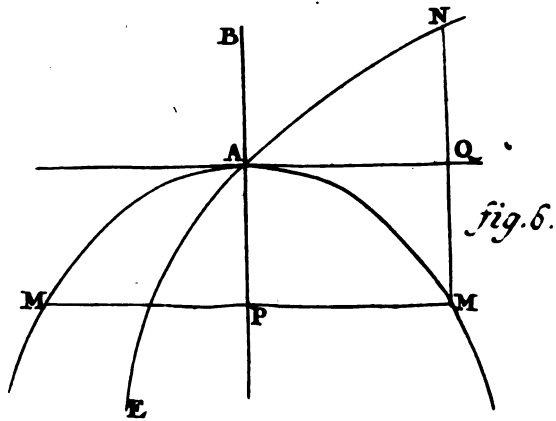
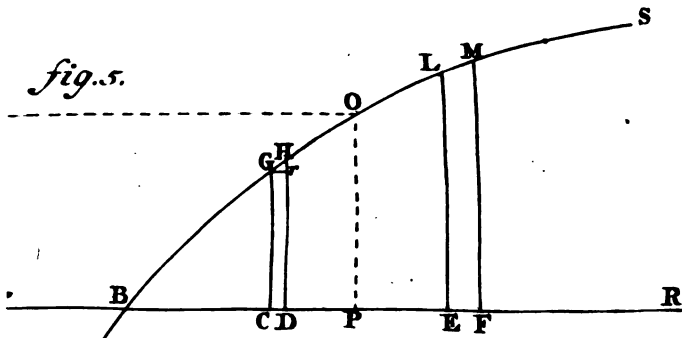
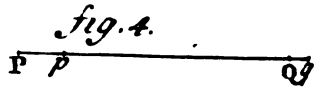
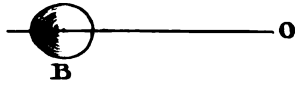
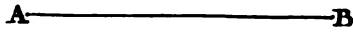
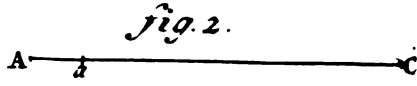
§. 26. Relatio, quam Q et p inter se habere debent, optime exprimetur curua MAm , quae circa punctum A habet arcus similes et aequales
con-

contrarie positos, vt ex inspectione palam est. Si enim per punctum A, quod tanquam centrum est figurae, ducatur recta Pp, eaque tanquam axis consideretur, in quem demittantur applicatae PM. Dico abscissis AP exprimentibus p, applicatas PM designare posse Q. Nam sumta AP negatiua vt Ap, applicata pm erit applicatae PM aequalis, eiusque negatiua, vt ergo quantitas applicatam PM exprimens sit functio ipsius p impar, et propterea Q exhibere possit.

§. 27. Quaeritur nunc quomodo ex curua hac data inueniri et construi possit curua quaesita coordinatis orthogonalibus x et y contenta; seu quomodo ex p et Q datis inueniri et construi possint x et y. Id quod sequenti modo efficietur. Cum sit $x + py = c\sqrt{1 + pp} + Q$, erit $dx + pdy + ydp = cpdp : \sqrt{1 + pp} + dQ$. Quia vero est $dy = p dx$, erit $dx = dy : p$; vnde $dy(1 + pp) + ypdp = c p p dp : \sqrt{1 + pp} + p dQ$. Diuidatur per $\sqrt{1 + pp}$ et habebitur $dy\sqrt{1 + pp} + y p dp : \sqrt{1 + pp} = c p p dp : (1 + pp) + p dQ : \sqrt{1 + pp}$. Quae integrata dat $y\sqrt{1 + pp} = c s p p dp : (1 + pp) + s p dQ : \sqrt{1 + pp}$. Quamobrem erit $y = \frac{cp - c s dp(1 + pp) + s p dQ : \sqrt{1 + pp}}{\sqrt{1 + pp}}$. Quoniam vero est $x = Q + c\sqrt{1 + pp} - py$, erit $x = \frac{c + c p s dp(1 + pp) + Q\sqrt{1 + pp} - p s p dQ : \sqrt{1 + pp}}{\sqrt{1 + pp}}$. Ex quibus constat et x et y, in meris p et Q dari, et consequenter curuam quaesitam ex data MAm construi posse.

§. 28. Ut exempla habeamus huiusmodi curvarum tautochronarum, pono $Q = ap$, erit $x + py = c\sqrt{1 + pp} + ap$, unde, facto $y - a = z$, fiet $xx + 2pxz + ppzz = cc + ccpp$, ergo $pp = \frac{2pxz + xx - cc}{cc - zz}$ consequenter $p = \frac{xz + c\sqrt{xx + zz - cc}}{cc - zz} = dy : dx = dz : dx$, siue $ccdz - zzdz - xzdx = cdx\sqrt{xx + zz - cc}$. Hanc aequationem, etsi ad rationalitatem redactam, nullo modo neque separare neque integrare potui, id quod mihi magnopere mirum videtur, cum uti perspicuum est curva nihilominus constructi possit. Est enim $y = \frac{cp - a\sqrt{1 + pp} - cfdp : (1 + pp)}{\sqrt{1 + pp}}$ seu $z = \frac{cp - cfdp(1 + pp)}{\sqrt{1 + pp}}$ et $x = \frac{c + cfdp(1 + pp)}{\sqrt{1 + pp}}$. Aequatio ergo inuenta construibilis est, quanquam consuetis modis reducendi nequaquam separari vel integrari possit. Non dubito, quin ex facie constructionis huius aequationis cognita multa praecleara de aliis aequationibus inseparabilibus inveni queant.

§. 29. Modum hunc ad aequationes separatam difficiles perueniendi conferens cum schediastate *Celeb. Hermanni* actorum Tomo II. inserto, pag. 188. quo methodum tradit infinitas aequationes differentiales construendi, deprehendi *Virum Celeb.* ope similis aequationis ei, ex qua nostrae aequationes deducuntur, quam vocat *Canonicam*, ad eiusmodi aequationes peruenisse. Ea igitur methodo omnes aequationes, quae nostro problemati satisfaciunt, quaeque forte cuiquam prorsus



prorsus inseparabiles videri queant, construi poterunt. Et sane *Hermannus*, cum aequationem §. 28. cum eo communicassem, eam statim ope methodi suae separavit, eandemque constructionem inuenit, quam ego a posteriori cognitam hic apposui. Dubitari itaque nequit, quia Vir Celeb. plurium aequationum, quae adhuc inseparabiles habitae sunt, separationem sit daturus.

DE COMMVNICATIONE MOTVS IN COLLISIONE CORPORVM.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. I.

EXperientia constat corporum in se mutuo incurrentium motus immutari; quaestio igitur hinc nata est, quae sit huius alterationis motus causa. Dubitari quidem non potest, quin in ipso corporum conflictu ratio huius phaenomeni inuestigari debeat; corpus enim omne siue quiescens siue motum perseuerat in suo statu, nisi a vi quapiam cieatur et ex statu suo deturbetur. Quamobrem quaestio huc est reducta, vt definiatur; qua in re insit haec vis et quanta sit, quae motus mutationem in conflictu corporum producere valet. Praeterea etiam determinari debet, quantum

Tabula VII.

tam

tam in collisione vtriusque corporis motus mutationem subeat.

§. 2. Inuentae sunt iam superiore seculo a viris maxime meritis *Wrenno*, *Wallisio* et *Hugenio* regulae communicationis motus ex quibus cognoscitur, duobus corporibus in se inuicem incurrentibus, quanta futura sit vtriusque corporis post conflictum celeritas. Regulae etiam istae experimentis egregie confirmantur, vt de earum veritate nefas esset dubitare. Variis tamen incedentes vris illi ad has regulas peruenierunt, et postmodum ab aliis plures ac diuersae inuentae sunt demonstrationes. Harum autem nulla, quantum mihi videtur, est genuina, sed deriuatae sunt omnes ex alienis principiis.

§. 3. Accedit ad hoc, quod nullus adhuc ipsam alterationis motus causam monstrauerit, neque quomodo corpora in se mutuo agere possint, explicuerit. Hanc ob rem operae pretium fore existimari, istam dissertationem proponere, in qua regulae communicationis motus ex certissimis mechanicae principiis deducantur; simulque ostendatur, quomodo in ipsa collisione corpora in se mutuo agant motusque immutent.

§. 4. Accipio hic tanquam indubitatum principium, omnem motus vel diminutionem vel augmentationem vel directionis mutationem produci

3 po-

a potentiis, idque successiue non saltu. Facile hoc a quoquam concedetur: nihil enim contra id afferri possit, nisi ipsa motus in collisione communicatio, in qua an natura non faciat saltum a multis est disputatum. Statuo igitur in concursu duorum corporum vtriusque corporis celeritatem a potentia inter corpora illa delitente immutari.

§. 5. Corpora in se mutuo impingentia vim actionis potentiae similem sentire elucescit praecipue in mollioribus corporibus vt cera vel argilla: facile enim perspicitur impressiones, quas sunt consequuta, non subito sed pedetentim esse factas; ex quo etiam ad duriora corpora concludere licet, successiue et per gradus mutationem fieri. Omnia autem corpora conflictu sibi mutuo impressiones imprimunt, quanquam hoc non de omnibus apparet. Sunt enim corpora, quae impressionem seu mutatam in conflictu formam non retinent, sed pristinam formam recuperant, quae elastica vocantur; illa vero quae mutatam in conflictu formam seruant, mollia.

§. 6. Inter haec duo genera innumerabiles continentur gradus intermedii; eorum scilicet corporum, quae impressiones acceptas ex parte tantum, non penitus, exuunt, ad quorum classem sine dubio omnia quae in mundo sunt corpora, pertinent. Neque enim perfecte reperietur corpus elasticum neque perfecte molle, sed omnia medii

Tom. V. X inter

inter haec generis deprehenduntur. Corpora porro tam elasticitate destituta seu mollia, quam elastica etiam differunt ratione duritiei, secundum quam alia aliis magis vel minus sunt dura. Durius autem vocatur corpus quod ab eadem vi minorem impressionem accipit, ex hocque intelligitur, quid sit corpus perfecte durum, quod nimirum a quaque vi finita infinite parvam tantum impressionem accipiat. Prout ergo haec impressio vel restituitur vel secus, corpus perfecte durum vel ad elasticorum vel non elasticorum classem pertinebit

§. 7. Quando duo corpora elastica inter se collidunt alterum comprimit alterum, et sibi impressiones infligunt; postmodum vero se rursus in pristinam formam restitunt. Quamdiu corpora comprimuntur vel vtrumque corpus vel alterutrum saltem de motu suo amittit. Quando vero se restitunt, tum etiam motus in compressione amissus restituitur, sed aliter inter corpora distribuitur. In non elasticorum conflictu autem impressionem quam vtrumque accepit maximam retinet. Ad motum igitur corporum elasticorum post conflictum determinandum, requiritur, ut vtriusque corporis inuestigetur celeritas tum quando sunt prorsus restituta. Pro corporibus vero non elasticis, inueniri debet vtriusque corporis celeritas quam habet in statu maximae impressionis.

§. 8. Quemadmodum ad omnem motum generandum opus est potentia, ita etiam ad partes
COR-

corporis comprimendas et impressiones faciendas potentia requiritur; corpus enim omne vi inertiae vti motui ita quoque impressioni accipiendae resistit, quae a potentia superari debet. Hanc impressionis accipiendae difficultatem vt clarius percipiamus, corporibus annexa concipio elastra in loco, quo impressiones recipiunt. Loco igitur impressionum elastra haec comprimi pono; eodem enim redit siue id, quod comprimitur, sit ipsius corporis pars, siue elastrum corpori adiunctum.

§. 9. Inter corpora igitur A et B concurrentia pono elastrum *ab*, quod dum pergunt ad se inuicem accedere comprimatur. Haecque compressio elastri tamdiu durat, quoad motus, quo ad se inuicem accedunt, vim elastri potest superare, tunc ergo elastrum erit in statu maximae compressionis. Deinde si corpora sunt elastica, pono elastrum hoc interpositum vi sese restituendi polere, si vero non sunt elastica, concipio, elastrum cum in statum maximae compressionis est reductum, subito omnem vim sese expandendi amittere.

Fig 2.

§. 10. Hac ratione conflictum considerantes poterimus ex legibus Mechanicis, quas potentiae in alterandis motibus seruant, mutationes motuum in collisione corporum supputare. Notum enim est quantam eeleritatem data potentia in datum corpus agens dato tempore generare, nec non si fuerit motus corporis potentiae contrarius, de-

X 2

struere

fruere valeat. Elastrum autem inter corpora concurrentia conceptum, dum se expandere conatur vices potentiae subit, et quo id magis comprimitur, magis etiam corporum motus diminuitur.

§. 11. Quo magis elastrum istud comprimitur, eo etiam maiorem habeat oportet vim sese expandendi, sed quanta ea sit in quolibet compressionis gradu, non est opus vt sciamus; quamcunque enim seruet legem, eadem tamen denique post conflictum prodit motus distributio. Quantitatem ergo vis elastri expansivae generali littera vtcunque variabili P designabo et a nulla alia pendente. Scilicet P mihi erit pondus, cuius nisi deorsum aequalis est vis elastri expansiva.

Fig. 2.

§. 12. Incurrat corpus A in elastrum AC vim P se expandendi habens, celeritate tanta quanta ex altitudine v graue cadendo acquirit; progrediatur puncto temporis per spatium $Aa = dx$, sitque celeritas quam in a habeat genita ex altitudine $v + dv$. Perspicuum est si esset $P = A$ corpus eodem modo retardatum iri, quo sursum proiectum a vi grauitatis retardatur, fore nempe $dv = -dx$, si esset $P = nA$ foret $dv = -Pdx : A$, si vis elastri motui corporis est contraria: sed si motum promoueat, erit $dv = +Pdx : A$.

Fig. 3.

§. 13. Moneatur corpus A in linea AO celeritate altitudini a debita, corpus vero B minori celeritate

celeritate in eadem directione versus O ex altitudine b oriunda, occurrent haec corpora sibi inuicem, fietque conflictus. Pono ea tum in se mutuo agere incipere, cum distantia centrorum fuerit $=f$. Iphis igitur corporibus vt punctis consideratis interpositum concipio elastrum longitudinis f . Sit id AB, quando ergo corpus A reperietur in A, et B in B conflictus incipiet, elastrumque, quia A celerius mouetur quam B, magis continuo comprimetur.

Fig. 4

§. 14. Reductum iam sit elastrum ad longitudinem PQ, quam pono $=f-x$. Sit celeritas quam corpus A cum in P venerit habet, ex altitudine v orta, celeritasque corporis B in Q ex altitudine u , et vis elastri quam nunc habet se expandendi sit $=P$. Tempusculo quam minimo progrediatur corpus A per elementum $Pp=dr$ et corpus B per $Qq=ds$; sitque altitudo exhibens celeritatem quam corpus A in p habebit $=v+dv$, et respondens altitudo celeritati corporis B in q $=u+du$. Erit $pq=PQ+Qq-Pp=f-x+ds-dr$, sed pq aequatur ipsi PQ vna cum suo differentiali, i. e. $pq=f-x-dx$. Habebitur consequenter $dx=dr-ds$.

§. 15. Quia elementa Pp et Qq simul ponuntur percursa, erunt ipsis celeritatibus, quibus percurantur proportionalia. Quocirca est $dr:ds=Vv:Vu$, sunt enim ipsae celeritates vt radices qua-

X 3

dratae

dratae ex altitudinibus generantibus. Siue habe-
tur $\frac{dr}{\sqrt{v}} = \frac{ds}{\sqrt{u}} = \frac{dr-dx}{\sqrt{u}}$; ex hac aequatione reperitur
 $dr = \frac{dx\sqrt{v}}{\sqrt{v}-\sqrt{u}}$, atque $ds = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}-\sqrt{u}}$.

§. 16. Corpus vero A dum progreditur per
 $Pp = dr$ contrariam habet vim elastri expansiuam
P, eritque propterea ex §. 12. $dv = -Pdr : A$. Si-
mili modo corpus B per $Qq = ds$ transiens a vi
elastri P acceleratur eritque $du = +Pds : B$. Ex
his aequationibus coniunctis reperitur $-Adv - Bdu$
 $= Pdr - Pds = Pdx$. Sumantur integralia erit const.
 $-Av - Bu = \int Pdx$, fiat autem $\int Pdx = 0$, si ponatur
 $x = 0$. Ad constantem determinandam ponatur $x = 0$,
eritque tum $v = a$ et $u = b$, est propterea const.
 $= Aa + Bb$. Habemus igitur istam aequationem
 $A(a-v) + B(b-u) = \int Pdx$.

§. 17. Resumamus aequationes $Adv = -Pdr$,
et $Bdu = Pds$, substituamusque pro dr et ds va-
lores inuentos, erit $Adv = \frac{Pdx\sqrt{v}}{\sqrt{u}-\sqrt{v}}$ et $Bdu = \frac{Pdx\sqrt{u}}{\sqrt{v}-\sqrt{u}}$
Habetur ergo ex illa $Pdx = -\frac{Adv\sqrt{v} + Bdu\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$. Erat
autem ante $Pdx = -Adv - Bdu$. Ex hisque pro-
dit $Adv\sqrt{u} = -Bdu\sqrt{v}$ seu $\frac{Adv}{\sqrt{v}} = -\frac{Bdu}{\sqrt{u}}$. Qua in-
tegrata obtinetur $A\sqrt{v} + B\sqrt{u} = \text{const.} = A\sqrt{a} + B\sqrt{b}$. Talis enim esse debet constans ut etiam
aequatio ante conflictum verum praebear.

§. 18. Duas ergo inuenimus aequationes istas
 $A(a-v) + B(b-u) = \int Pdx$; atque $A(\sqrt{a} - \sqrt{v})$
 $+ B(\sqrt{b} - \sqrt{u}) = 0$. Ex quibus celeritates
cor-

tes corporum in quouis compressionis statu durante ipso conflictu inueniri possunt. Ad hoc vero requiritur, vt P sit cognita functio ipsius x , quo possit integrale sumi et in eo pro x status compressionis assumtus substitui.

§. 19. Hic autem praecipue celeritates vtriusque corporis post conflictum desiderantur. Quae-ramus eas primo pro corporibus elasticis, hocque in casu finitus est conflictus, quando fit iterum $x=0$, adeoque $\int P dx = 0$. Ex quo erit $A(a-v) = -B(b-u)$. Diuidatur altera aequatio per hanc, prodibit $\sqrt{a} + \sqrt{v} = \sqrt{b} + \sqrt{u}$. Atque ex postremis his duabus aequationibus facile eruitur $\sqrt{v} = \sqrt{a} + \frac{2B(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{A+B}$ et $\sqrt{u} = \sqrt{b} + \frac{2A(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{A+B}$. Hic \sqrt{v} et \sqrt{u} denotant ipsas corporum A et B celeritates, quas post conflictum habebunt; at vero \sqrt{a} et \sqrt{b} celeritates eorum ante conflictum.

§. 20. Si corpora fuerint omni elasticitate destituta, conflictu finietur, quando elastrum est maxime compressum, hoc euenit si est $dx=0$ seu $dr=ds$, i. e. vbi $v=u$. Aequales ergo corpora non elastica habebunt post conflictum celeritates, adeoque coniuncta manebunt. Erit autem eorum communis celeritas \sqrt{v} vel $\sqrt{u} = \frac{A\sqrt{a} + B\sqrt{b}}{A+B}$.

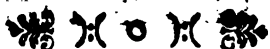
§. 21. Posui in his vtrumque corpus secundum eandem plagam moueri, hoc vero non impedit quo minus hae regulae sint vniuersales. No-
tum

tum enim est plagam mutari, mutata celeritate in negativam. Ita si poneretur -Vb loco Vb haberentur regulæ communicationis motus pro corporibus in plagas oppositas motis.

§. 22. Simili modo inueniri possunt regulæ communicationis motus pro corporibus non perfecte elasticis: ad hoc vero requiritur, vt et nota sit lex vis elasticæ elastri, et quousque se restituere valeat. His autem definitis facile erit motum vtriusque corporis post conflictum determinare.

§. 23. Si corpora oblique in se impingant, aut si plura corpora simul collidant, quos post conflictum habitura sint motus, hic esset superfluum inuestigare. Propositum enim tantum erat hic regularum collisionis genuinam dare {demonstrationem: magis autem compositi casus ex his regulis resoluuntur, eatenusque sunt extra dubium positi, quatenus ab his simplicibus pendent.

DE



DE
CURVIS RECTIFICABILIBVS
ALGEBRAICIS
 ATQVE
TRAIECTORIIS RECIPROCIS ALGEBRAICIS.

Auct. Leonh. Eulero.

Quiaquam admodum facile est innumeras dare curvas algebraicas, quae rectificari possunt, quaerendis vel evolutis vel causticis curvarum algebraicarum; tamen si ordines curvarum consideremus, rarissime in iis occurrunt, quae rectificationem admittant. In ordine linearum secundo, qui ex sectionibus conicis constat, nulla est huiusmodi; in tertio duae habentur rectificabiles, quantum quidem constat. Cum autem ante aliquot annos in inveniendis traiectoriis reciprocis algebraicis occupatus essem, methodum *Celeb. Iob. Bernoulli* primum sequutus diligentissime curvas rectificabiles anquirebam, ut iis ad propositum vterer. Detexi etiam in ordine sexto curvam rectificabilem, quae mihi praebat traiectoriam algebraicam ordinis quarti, eaque satisfeci quaestioni tum agitatae, de exhibendis simplicioribus traiectoriis reciprocis algebraicis. Inveni quoque multas aequationes generales curvas rectificabiles dantes, ex quibus in promptu erat omnes curvas re-

Tom. V. Y ctifica-

ctificabiles simpliciores eruere. Haec iterum nunc perlustrans deductus sum ad generalissimam quandam aequationem curuas rectificabiles omnes in se continentem. Insunt enim in ea plures quantitates vniuersales, pro quibus quicquid substituatur, curua rectificabilis prodit. Sit quantitas quaedam variabilis z , cuius differentiale ponatur constans, sintque P et Q huius variabilis z functiones quaecunque saltem algebraicae. Si iam huius modo construatur curua ut eius abscissa, quae ponatur x , sumatur aequalis $P + \frac{dQ(dp^2 - dQ^2)}{2Qddp - dPdq}$ et applicata quam uoco $y = \frac{(dp^2 - dQ^2)^{\frac{1}{2}}}{dQddp - dPdq}$. Erit huius curuae longitudo s appellata aequalis $Q + \frac{dp(dp^2 - dQ^2)}{dQddp - dPdq}$. Semper igitur quicumque valores literis P et Q tribuantur, curua erit rectificabilis et algebraica. Demonstrationem huius dare non opus esse iudico, cuiuslibet enim, si sumserit differentialem coordinatarum x et y et curuae s , innotescet esse $dx^2 + dy^2 = ds^2$ labore tantum est opus nullo autem artificio.

Haec forma quidem latissime patet, sed habeo tamen aliam adhuc multo generaliore, imo generalissimam sequentem. Designantibus ut ante literis maiusculis L , M et N functiones quascunque variabilis z , si sumantur

$$x = L + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dLdN + dM^2 dL^2 + dM^2 - dN^2)}{dLdNddL + dM^2 dNddM - dL^2 dN - dM^2 ddN - dLdM - dMddL} \sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}$$

$$y = M + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dM^2 dN + dL^2 dM^2 + dM^2 - dN^2)}{dLdNddL + dM^2 dNddM - dL^2 dN - dM^2 ddN - dLdM - dMddL} \sqrt{(dL^2 + dM^2 - dN^2)}$$

erit longitudo curuae respondentis

$$s = N$$

DE CURVIS RECTIFICABILIBVS ALG. 171

$$s = N + \frac{(dL \cdot M - dN^2)(dL^2 + dN^2)}{dL \cdot dN \cdot dL + dM \cdot dN \cdot dM - dL^2 \cdot dN - dM^2 \cdot dN + (dL \cdot dM - dM \cdot dL) \sqrt{(dL^2 + dN^2) \cdot dN}}$$

Formulae hae in praecedentes mutantur, si ponatur $M=0$, sunt igitur illae in his contentae.

Facile perspicitur, si literae L, M et N non solum significant quantitates algebraicas, sed etiam transcendentales quasque; in istis formulis omnes prorsus contineri curvas tam algebraicas quam transcendentales. Quia enim hae functiones L, M et N nullo modo a se inuicem sunt pendentes, nulla excogitari potest aequatio inter x et y , siue sit algebraica siue transcendens, quae non ad praescriptas formulas esset reducibilis.

Simili modo si manente N functione vniuersalissima, ita tamen ut $\frac{dN}{dx}$ sit functio algebraica L vero et M denotent functiones algebraicas, omnes prorsus curvae algebraicae in formulis datis comprehenduntur; erunt autem eae rectificabiles si N assumatur functio algebraica, at vero si N non fuerit functio algebraica, sed transcendens seu a quadratura curuae cuiusdam pendens, curva resultans non erit rectificabilis, sed eius rectificatio pendebit a quadratura eius curuae. Hoc igitur modo soluitur etiam celebre illud problema multum inter Geometras agitatum, postulans methodum quadraturarum curvarum ad rectificationes curvarum algebraicarum reducendi, cuius solutiones duae datae sunt in Actis Lipsiensibus a Viris Celeberr-

leberrimis *Iac. Hermanno* et *Iob. Bernoullio*. Ex istis vero formulis ita soluetur; sint curvae, cuius quadratura ad rectificationem curvae algebraicae est reducenda, coordinatae x et y quarum utraque sit functio algebraica ipsius x . Sumatur $N = R + af y dt$, ubi R etiam designet functionem ipsius x algebraicam quamcunque. Hoc posito dabunt formulae traditae omnes curvas algebraicas, quarum rectificatio a quadratura curvae propositae, scilicet $a \int y dt$ pendent, si quidem L et M assumantur, ut iam est monitum, functiones algebraicae ipsius x . Alter usus harum formularum, quem hic exponere constitui, respicit ad inventionem trajectoriarum reciprocarum; reperitur enim ex his aequatio uniuersalissima omnes trajectorias reciprocas in se complectens, quae etiam facillime ita restringitur, ut algebraicas tantum easque omnes praebet.

Tabula VII.
Fig. 6.

Nititur autem haec inuentio theoremate *Bernoulliano*, quo ex rectificatione curuarum diametrum habentium construuntur trajectoriae reciprocae, hoc modo: MAM est curva huiusmodi diametrum habens AP , et verticem A in quo tangens AQ , est perpendicularis ad diametrum AP . Per huius curuae singula puncta M ducantur rectae diametro parallelae, in iisque sumantur MN aequales arcibus AM , constituent puncta N curuam NAE trajectoriam reciprocam, cuius axis conuersionis est ipsa diameter PAB . Huius curuae si sumatur abscissa

scissa AQ et applicata QN, erit $AQ = PM$ et $QN = AM - AP$. Quamobrem si curvae MAM coordinatae AP et PM eadem sumantur, quae ante vocatae erant x et y , habebitur statim aequatio pro traiectoria reciproca EAN. Quia vero non omnis curva in locum MAM collocari potest, in aequationibus supra traditis literae L, M et N quodammodo restringi debent, vt tantum curuas ad institutum accommodatas praebent. Cum omnes lineae AP, PM et AM sint functiones ipsius x , ita eae in x determinentur, vt sumto x affirmatio prodeat curuae MAM ramus dexter, at posito x negatio vt prodeat ramus sinister. Ad hoc requiritur, vt AP quia in utroque casu eadem manet, sit functio par ipsius x , seu functio quae inmutata manet, etiamsi x fiat negativum. At PM et AM esse oportet functiones ipsius x impares, i. e. quae fiant negativae mutato x in $-x$. Quamobrem esse debet L functio par ipsius x M vero et N functiones impares. His enim positis abscissa aequabitur functioni pari, applicata vero et ipsa curva functionibus imparibus. Nam dL erit functio impar, ddL functio par, dM et dN functiones pares, atque ddM et ddN functiones impares. Ex quo perspicietur lineas AP, PM et AM requisitam habituras esse proprietatem. Erit igitur

$$AQ = M + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dMdN + dL\sqrt{dL^2 + dM^2 - dN^2})}{dLdNdL + dMNdM - dL^2dN - dM^2dN + (dLdM - dMddL)\sqrt{dL^2 + dM^2 - dN^2}}$$

Atque traiectoriae reciprocae EAN applicata erit

$$QN = N - L + \frac{(dL^2 + dM^2 - dN^2)(dL^2 + dM^2 - dLdN - dM\sqrt{dL^2 + dM^2 - dN^2})}{dLdNdL + dMNdM - dL^2dN - dM^2dN + (dLdM - dMddL)\sqrt{dL^2 + dM^2 - dN^2}}$$

342

Ex hac constructione fluent omnes trajectoriae reciprocae, si loco L, M et N substituantur functiones non solum algebraicae, sed etiam transcendentes. Algebraicae vero trajectoriae reciprocae omnes habebuntur, si eae quantitates fuerint functiones algebraicae, et quidem ut requiritur L functio par, atque M et N functiones impares.

Notandum porro est etiam $\sqrt{dL^2 + dM^2 - dN^2}$ esse debere functionem ipsius x imparem quemadmodum dL . Ponatur igitur $\sqrt{dL^2 + dM^2 - dN^2} = dL - dS$, ubi dS est functio impar ipsius x , adeoque S functio par erit $\frac{dN^2 - dM^2 + dS^2}{2dS} = dL$, ex quo erit dL functio impar ut requiritur, et $\sqrt{dL^2 + dM^2 - dN^2} = \frac{dN^2 - dM^2 - dS^2}{2dS}$. Erit igitur $L = \frac{1}{2} \int \frac{dN^2 - dM^2}{dS} + \frac{1}{2} S$. Quamobrem ut trajectoria reciproca fiat algebraica, oportet $\frac{dN^2 - dM^2}{dS}$ esse integrabile. Erit autem abscissa $AQ = M + \frac{(dN^2 - dM^2 - dS^2)((dN + dM)^2 - dS^2)}{4dS(dsddM + dsddN - dNdds - dMdds)}$ et $QN = N - \frac{1}{2} \int \frac{dN^2 - dM^2}{dS} - \frac{1}{2} S + \frac{(dN^2 - dM^2 - dS^2)(dMdn + (dN - dM - dS)^2)}{4ds, dsddM + dsddN - dNdds - dMdds}$. Quamdiu autem $\sqrt{dL^2 + dM^2 - dN^2}$ manet quantitas surda, non opus est peculiari determinatione, est enim radix quadrata ex functione pari non quadrato tam functio par quam impar.

Spe-

SPECIMEN
THEORIAE NOVAE
DE
MENSURA SORTIS.

AVCTORE

Daniele Bernoulli.

I.

EX eo tempore, quo Geometras considerare coeperunt mensuras sortium, affirmarunt omnes, *valorem expectationis obtineri, cum valores singuli expectati multiplicentur per numerum casuum quibus obtingere possunt, aggregatumque productorum dividatur per summam omnium casuum: casus autem considerare iubent, qui sint inter se aequae proclives: Hacque posita regula, quodcunque reliquum est in ista doctrina huc redit, ut casus omnes enumerentur, in aequae proclives resoluantur atque in debitam classem disponantur.*

§. 2. Demonstrationes huius propositionis, quarum quidem in lucem prodierunt multae, si recte examines, omnes videbis hac inniti hypothesisi, *quod cum nulla sit ratio, cur expectanti plus tribui debeat vni, quam alteri, unicuique aequae sint ad iudicandae partes; rationes autem nullas considerari,*
quae

personarum statum respiciant, solasque illas perpendi, quae ad conditiones sortis pertineant. Talem sententiam ferant iudices supremi publica auctoritate constituti, at vero hoc loco non iudicia sed consilia danda sunt; regulae nempe, quibus quisque suam sibi aeternitate debeat sortem pro diuersa rerum iustum constitutione.

§. 3. Vt appareat, non male hoc ita moneri, pone casu aliquo homini plane pauperi sortem contigisse, qua pari probabilitate aut nihil aut viginti millia ducatorum obtinebit, an sortem suam hic aestimabit decies millenis ducatis, et malens sibi consuluerit cum nouem millibus eam vendiderit? Id mihi non videtur, quamuis et credam hominem admodum opulentum sibi deficere, cum illam si potuerit eodem pretio acquirere recuset: si vero hac in re non fallor, perspicuum est, non posse omnibus hominibus pro eodem modulo mensuram sortis assignari nec proinde adhaerendum esse regulae §. 1. Sed et quiuis perspiciet, qui haec attente considerare voluerit, ita definiri posse vocem *valoris*, qua in ista regula vsi sumus, ut tota deinceps sine scrupulo omnibus sit accipienda, nempe *valor* non est aestimandus ex pretio rei, sed ex *emolumento*, quod unusquisque inde capessit. Pretium ex re ipsa aestimatur omnibusque idem est, *emolumentum* ex conditione personae. Ita procul dubio pauperis magis refert lucrum facere mille ducatorum quam diuitis, etsi pretium vtrique idem sit.

§. 4

est *lucrum quoduis semper emolumentum afferre summae bonorum reciproce proportionale*. Dum hanc hypothesein illustrem, dicam quid *bonorum summa* mihi significet, nempe omnia ea, quae victum, amictum fortunam commodam, imo et luxum omniumque desideriorum expletionem subministrare et largiri valent, ita ut nemo nihil habere dici possit nisi quem fames extingit, sitque plurimis bonorum potissima pars industria, quae vel ipsam mendicitatem in se continet: qui mendicando decem annuatim aureos sibi comparat, is non facile accipiat summam quinquaginta aureorum cum conditione ut nihil unquam sibi mendicet aut alio modo acquirere tentet, iisque expensis salutem omnem habeat rescissam; quinimo de iis etiam, qui nihil habentes aere premuntur alieno, dubito, an se eo liberari simulque summam longe maiorem dono accipere velint cum tali conditione. Iam vero si mendicus pactum inire nolit nisi summam paratam obtineat minimum centum aureorum, nec ille qui aere alieno laborat nisi mille aureos accipiat, priorem centum, alterum mille aureis diuitem dicemus quamuis communi loquendi modo ille nihil, hic vero minus quam nihil habeat.

§. 6. His ita definitis redeo ad id quod in superiori paragrapho indicaui, nempe nisi quid insoliti interueniat, *aestimari posse emolumentum lucri valde parui summae bonorum reciproce proportionale*. Equidem cum recte considero, qua natura homines

COR-

comparati esse soleant, video hanc positionem plerisque applicari posse. Pauci sunt, qui non annuos suos redditus dispendant omnes: iam vero, si unius bona valeant centum mille ducatos, alterius totidem semiducatos; si ille annuos inde redditus obtineat quinque mille ducatorum, hicque rursus totidem semiducatorum; perspicuum est omni respectu priori ducatum esse quod alteri semiducatum, atque adeo lucrum unius ducati priori non plus valere, quam lucrum semiducati alterum inuat. Si igitur uterque lucrum faciat unius ducati, alter duplum inde emolumentum accipiet duos nempe lucratus semiducatos, quod exemplum quoniam instar omnium est, alia afferre superfluum puto. Eo verior est haec propositio, quod maxima hominum pars bona alia praeter industriam vix habet, et ex hac sola perpetuo vivit. Sunt tamen quibus unus ducatus magis cordi est, quam sunt plures ducati homini minus diviti magis autem generoso. Quia vero nos deinceps considerabimus unum eundemque hominem nihil id ad nos attinebit. Qui minus lucro delectatur, is quoque patientius fert damnum. Verum tamen quia aliquando particulares esse possunt causae quibus res secus se habet, pertractabo argumentum generalissime, quam ad specialem nostram descendam hypothesin, ut sic omnibus satisfiat.

§. 7. Denotet igitur AB summam bonorum ante sortem decisam; dein producta AB construat
Z 2 tur

Tabula VII.
Fig. 5.

sur super BL curua BGS cuius applicatae CG, DH, EL, FM etc. ceu *emolumenta* respondeant abscissis BC, BD, BE, BF etc. vt lucris. Sint porro m, n, p, q etc. numeri denotantes quot modis obtineantur lucra BC, BD, BE, CF, etc. erit (per §. 4.) *emolumentum* medium $PO = \frac{m \cdot CG + n \cdot DH + p \cdot EL + q \cdot FM}{m + n + p + q} + \text{etc.}$ Si vero nunc in linea AQ ad lineam AR perpendiculari sumatur $AN = PO$, erit recta NO = AB, id est, BP lucrum legitime expectandum seu fors quaesita. Iam si porro scire velimus, quantum debeat esse depositum pro sorte ista obtinenda, continuanda est curua in partem contrariam, ita vt nunc abscissa Bp denotet vbique iacturam, applicata vero pO damnum iacturae. Quoniam autem in ludo iustae conditionis damnum iacturae debet esse aequale emolumento lucri, erit sumenda $An = AN$, vel $pO = PO$, atque sic denotabit Bp depositum, ultra quod nemo ire debet, qui rebus suis bene consulere cupit.

Corollarium I.

§. 5. In hypothesei hactenus ab auctoribus adhiberi solita, qua ponitur lucrum quodvis ex se solo esse aestimandum, semperque *emolumentum* asserre sibi simpliciter proportionale, fit linea BS recta: unde sequitur si fuerit $PO = \frac{m \cdot CG + n \cdot DH + p \cdot EL + q \cdot FM}{m + n + p + q} + \text{etc.}$ fore etiam sumris ab utriusque parte proportionalibus $BP = \frac{m \cdot BC + n \cdot BD + p \cdot BE + q \cdot BF}{m + n + p + q} + \text{etc.}$ quod conforme est cum regula communiter adhibita.

Co

Corollarium 2.

§. 9. Si AB fuerit infinita ratione lucri vel maximi BE, quod speratur, erit arcus BM instar lineolae rectae infinitae parvae considerandus, hocque in casu rursus locum habet eadem ista regula vulgaris, quae adeoque valet proxime in omnibus ludis qui haud magni sunt momenti.

§. 10. Postquam sic argumentum pertractauimus generalissime, pergemus ad hypothesin illam particularem supra memoratam, quae sane praee omnibus aliis considerari meretur. Ante omnia quaerenda est natura curuae sBS manentibus positionibus paragraphi septimi: quia vero vi hypothesi lucrula infinite parua sunt consideranda, censebimus lucra BC et BD tantum non aequalia, ita differentia CD sit infinite parua; ductaque Gr ipsa BR parallela erit rH *emolumentum* infinite paruum hominis cuius bona sunt AC et qui facit lucrum minimum CD. Istud vero *emolumentum* non solum ex lucrulo CD, cui utique caeteris paribus est proportionale, sed et ex summa bonorum AC, cuius rationem sequitur inuersam, est aestimandum. Igitur si ponatur $AC = x$, $CD = dx$, $CG = y$, $rH = dy$; $AB = a$, demoretque b constantem quantitatem quamcunque, erit $dy = \frac{bdx}{x}$, vel $y = b \log. \frac{x}{a}$. Est itaque curua sBS logarithmica cuius subtangens ubique $= b$ et cuius asymptotus est Qq.

Z 3

§. 11.

§. 11. Si nunc comparentur haec cum iis, quae paragrapho septimo dicta sunt, apparebit esse $PO = b \log. \frac{AP}{AB}$, $CG = b \log. \frac{AC}{AB}$, $DH = b \log. \frac{AD}{AB}$; et sic porro; ergo cum fuerit $PO = \frac{m.CG + n.DH + p.EI + q.FM}{m+n+p+q} + \text{etc.}$, erit nunc $b \log. \frac{AP}{AB} = (mb \log. \frac{AC}{AB} + nb \log. \frac{AD}{AB} + pb \log. \frac{AE}{AB} + qb \log. \frac{AF}{AB} + \text{etc.}) : (m+n+p+q + \text{etc.})$; vnde deducitur $AP = (AC^m \cdot AD^n \cdot AE^p \cdot AF^q \cdot \text{etc.})^{1:(m+n+p+q + \text{etc.})}$, et cum ab hac subtrahitur AB remanebit BP sortem denotans quaesitam.

§. 12. Subministrat praecedens paragraphus hanc regulam: *lucrum quoduis summa bonorum auctum eleuetur ad dignitatem indicatam per respondentem numerum casuum; dein omnes hae dignitates inter se multiplicentur et ex curuarum producto extrahatur radix ordinis indicati per numerum omnium casuum: tum denique a radice subtrahatur summa omnium bonorum: quod residuum est, indicabit sortem quaesitam.* Atque haec propositio est principalis pro dimetienda sorte in variis casibus, cui nunc vt factum est hactenus in hypothesi communi, theoriam integram, quod opus tum vtilitate tum nouitate sua se commendare posset, superstruerem, si id alii incepti labores permetterent. Nunc quidem inter ea, quae se mihi prima obtulerunt fronte, notabiliora quaedam tantum allegabo.

§. 13. Et primo quidem apparet, quum conditiones ludi finguntur vel aequissimae, vtrumque col-

collusorum tamen praeiudicium exinde accipere; egregium profecto naturae documentum vitandae aleae. Sequitur id autem ex concavitate curvae sBS versus BR , qua fit, ut facto deposito Bp aequali lucro sperato BP , sit *detrimentum po*, quod ex sinistro euentu oritur semper maius emolumento PO quod speratur. Quamvis autem id satis per se pateat Geometris, attamen ut intelligatur ab omnibus exemplo illustrabo. Sint duo collusores, quorum quivis in bonis centum habeat ducatos, horumque partem dimidiam sorti in vtramque partem aequè proclivi committat. His ita positus habebit quivis quinquaginta ducatos vna cum spe centum ducatorum: vtriusque autem summa per regulam paragr. 12. valet tantum $(50.150.)^{\frac{1}{2}}$ seu $\sqrt{50.150.}$ id est, minus quam octoginta septem ducatos, ita ut vterque a ludo quamvis aequissimae conditionis detrimentum capiat plusquam tredecim ducatorum: at vero ut simul appareat veritas illa, quam quivis naturalis luminis instinctu agnoscit, eo maiorem nempe esse aleatoris imprudentiam quo partem bonorum suorum notabiliorem fortunae exponat, considerabimus idem exemplum hoc solo interposito discrimine, alterum collusorem ante depositos quinquaginta ducatos habuisse ducentos: is tunc damnum accipit, quod exprimitur per $200 - \sqrt{150.250.}$ nempe parum ultra sex ducatos.

§. 14.

154 SPECIMEN NOVAE THEORIAE

§. 14. Cum itaque inconsiderate agit, quicumque paribus conditionibus vel minimam bonorum suorum partem alearum fortunae credit, conueniet hic inquirere quamnam in deponendis nummis quibus praerogatiuam habere debeat prae collusore, ut sine praeiudicio ludum inire possit. Ludum vero fingemus simplicissimum rursus, duobus nempe definitum casibus, aequè procliuius altero secundo altero contrario; sit lucrum euentu prospero impetrandum $= a$, depositum euentu sinistro perdendum $= x$; summa bonorum $= a$; sic igitur erit $AB = a$; $BP = a$; $PO = (\S. 10) b \log. \frac{a+a}{a}$ et quum (per §. 7.) sit $pp = PO$, erit per naturam logarithmicæ $Bp = \frac{a}{a+a}$; denotat autem Bp depositum x ; est igitur $x = \frac{aa}{a+a}$, quæ quantitas semper minior est quam lucum speratum a ; exinde etiam deducitur, stulte hunc agere qui omnia sua bona periclitatur spe lucri quantumuis magni, quod nemo difficulter sibi persuadebit, si rectè perpenderit definitiones nostras præmissas. Hinc etiam est, quod in vita ciuili vnanimiter videtur receptum, hominem nempe cum ratione rem dubiam tentare posse, quam alius non possit.

§. 15. Hic præsertim consideratu digna sunt quæ mercatoribus solennia sunt in vadandis mercibus, quæ mari vehuntur; id vero sequenti explicabo exemplo. Caius Petropoli degens mercēs cõmit Amstelodami, quas si præsentem habeat Petro-

Petropoli, vendere potest pro decem millibus Rubelonibus. Curat igitur ut mari aduehantur, dubitat autem an vade uti debeat nec ne? Interim non ignorat inter centum naues eo anni tempore Amstelodamo Petropolia proficilcentes quinque perire tantum solere; nec tamen vadem reperire potest infra pretium octingentorum Rubelonum, quod enorme putat. Quaeritur igitur quanta Caii bona esse debeant praeter praedictas merces, ut eum ratione sponsonem negligere possit: sint illa $=x$; erunt eius bona vna cum spe mercium fel-

cis appulsus $=\sqrt[100]{(x+10000)^{96}} \cdot x^6 = \sqrt[20]{(x+10000)^{19}} x$, si sponsonem non fuerit usus; si vero usus fuerit, habebit summam certam $x+9200$. Aequatis autem hisce quantitatibus fit $(x+10000)^{19} x = (x+9200)^{20}$ seu proxime $x=5043$. Si proin Caius plus habuerit

praeter mercium suarum expectationem quam quinque mille quadraginta tres Rubelones, bene faciet recusando sponsonem, sin minus accipiendo.

At si quaeratur quanta bona ille qui pro octingentis Rubelonibus se sponsorem exhibuit minimum possidere debeat, ut cum ratione sponsonem in se suscipere possit, ponimus eius bona $=y$; et

erit $\sqrt[20]{(y+800)^{19}} \cdot (y-9200) = y$, seu proxime $y=14243$, qui numerus sine nouo calculo ex praecedente colligi etiam potuisset. Qui minus diues est inepte se vadem offert, quod tamen opulentior non sine ratione facit. Hinc intelligitur quam commode huiusmodi sponsones introductae

fuerint, cum parti utrique magno inservire possint emolumento. Pariter si sexcentis Rubelonibus Caius vadem habere possit, imprudenter recuset eum, si minus habeat quam 20478. R. nimisque timide agit, si plus quam 20478. diues merces vadatur. Ita quoque inconsiderate ageret qui minus quam 29878. R. habens se Caio sponso-rem offerret pro sexcentis Rubelonibus; bene autem sibi consulat, si id faciat quum plus habet. Nemo interim, quantumvis diues rebus suis bene prospiceret, si quingentis Rubelonibus sponsonem in se susciperet.

Tabula VI.
Fig. 2.

§. 16. Praeterea ex hac nostra theoria alia sequitur regula hominibus non inutilis futura; scilicet consultius esse bona illa, quae periculo sunt obnoxia, in plures distribuere partes quam omnia simul periclitari; hanc rursus explicabo. Sempronius bona habet praesentia in uniuersum 4000. duc. et in terris exoticis insuper merces possidet pro 8000. duc. quae non aliter quam mari aduehi possunt. Constat autem ex diuturno rerum usu ex decem nauibus vnā perire. His ita stantibus dico Sempronii, si omnes 8000. duc. vni naui credat, expectationem a mercibus valere 6751. duc. qui nempe numerus est $\sqrt[10]{12000 \cdot 4000} - 4000$. Si vero partibus aequalibus duabus nauibus merces committat, expectatio sibi valebit $\sqrt[10]{12000 \cdot 8000} - 4000$, id est, 7033. duc. Atque sic augebitur Sempronii expectatio, quamdiu partem vni
naui

navi committendam diminuit, nec tamen unquam excedet ista expectatio valorem 7200. duc. Idem hoc monitum inseruet iis etiam, qui bona sua litteris cambialibus credunt, aut aliis fortunae casibus exponunt.

§. 17. Plurima certe sunt alia nova plane eaque haud inutilia, quae nunc praeterire cogor. Maximam quidem eorum partem quivis cordatus tacito naturae instinctu aliquo modo videt et sequitur, nemo autem fortasse crediderit, posse ea tam praecise defini, ut in his exemplis factum est. Cum igitur ita sit ut omnia haec theoremata tam egregie consentiant cum iis, quae natura edocti sumus, iniquum esset ceu nudas veritates hypothesebus precariis innixas, ea negligere. Confirmabitur id etiam sequenti exemplo, quod hisce meditationibus occasionem dedit, et cuius historia haec est. Proposuit aliquando Cel. *Nicolaus Bernoulli*, in Academia Basiliensi Iuris utriusque Professor, Honoratissimus meus Patruelis, Cl. *Montmortio* quinque problemata, quae videre est dans l'analyse sur les jeux de bazard de Mr. de Montmort p. 402. Horum problematum ultimum huc redit, *Petrus in altum proiicit nummum, idque donec in terram delapsus notatam semel ostenderit frontem: si vero id primo contingat iactu, tenetur Paulo dare ducatum unum; si secundo duos; si tertio quatuor; si quarto octo, et sic porro duplicando quovis iactu ducatorum numerum. Quaeritur sors Pauli?*

A 3 2

Huius

Huius problematis mentionem fecit praefatus meus Patruelis in epistola, quam ad me dedit, cupiens de eo sententiam meam scire. Quandoquidem calculus dicit, sortem Pauli infinitam esse, nec tamen ullus sanae mentis, ut dicit, futurus sit, qui non libentissime spem suam vendiderit pro summa vigintiducatorum. Reuera quoties principiis communibus rem aggredimur, inuenimus sortem Pauli infinitam, quamuis nemo eam pretio vel admodum mediocri sibi sit comparaturus. Quum vero nostris principiis calculum absolimus, intelligimus demum huius nodi solutionem. Solutio problematis ad principia nostra accommodata haec est.

§. 18. Infiniti sunt casus hic considerandi: horum autem pars dimidia facit ut ludus primo *finiatur* iactu; pars quarta ut finiatur iactu secundo; octava ut tertio, decima sexta ut quarto et sic deinceps. Si proin numerus casuum omnium quamuis infinitus indicetur per N ; patet esse casus numero $\frac{1}{2}N$, quibus Paulus luatur unum ducatum; $\frac{1}{4}N$ quibus duos; $\frac{1}{8}N$ quibus quatuor; $\frac{1}{16}N$ quibus octo, et sic sine fine. Fuerint nunc Pauli bona uniuersa $= \alpha$, et erit fors ipsius quaesita $= \sqrt[N]{(\alpha + 1)^{\frac{N}{2}} \cdot (\alpha + 2)^{\frac{N}{4}} \cdot (\alpha + 4)^{\frac{N}{8}} \cdot (\alpha + 8)^{\frac{N}{16}} \cdot \text{etc.}} - \alpha$, siue $= \sqrt{(\alpha + 1) \cdot \sqrt[4]{(\alpha + 2) \cdot \sqrt[8]{(\alpha + 4) \cdot \sqrt[16]{(\alpha + 8) \cdot \text{etc.}}}} - \alpha$.

§. 19. Ex hac formula sortem Pauli indicante, sequitur hanc crescere crescentibus bonis, et nunquam

quam fieri infinitam, nisi cum simul bona sunt infinita. Corollaria specialia haec sunt. Si nihil habuerit Paulus, fors eius erit $= \sqrt[2]{1} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{4} \cdot \sqrt[16]{8}$. etc. quae praecise sic ipsi valet duos ducatos. Si decem habuerit ducatos, proxime tres valebit expectatio, et quatuor cum triente praeter propter si centum habuerit, ac denique sex cum mille habuerit. Facile hinc iudicatu est quam immensas quis diuitias possidere debeat, ut cum ratione viginti ducatis sortem Pauli emere possit. Pretium autem quo emi debet, quamvis differat a sorte quae iam possidetur, quia tamen admodum exigua est differentia, quando a est numerus magnus, vnum alteri aequale statui potest: accurate autem posito emtionis pretio $= x$, determinatur, eius valor hac aequatione $\sqrt[2]{(a+1-x)} \cdot \sqrt[4]{(a+2-x)} \cdot \sqrt[8]{(a+4-x)} \cdot \sqrt[16]{(a+8-x)}$ etc. $= a$, cui proxime satisfacit cum a est numerus magnus haec aequatio $x = \sqrt[2]{(a+1)} \cdot \sqrt[4]{(a+2)} \cdot \sqrt[8]{(a+4)} \cdot \sqrt[16]{(a+8)}$. etc. $- a$.

Praelecta hac dissertatione coram Societate mihi eius apographum supra memorato D.no Nicolao Bernoulli ut intelligerem quid de mea propositae suae difficultatis solutione sentiret. Is vero in epistola, quam A. 1732. ad me scripsit, testatus est nequaquam sibi displicere meam de mensura sortium sententiam, si modo quiuis suae sortis aestimator sit, aliter vero se

rem habere, si tertius instar iudicis secundum aequitatem et iustitiam unicuique collusorum sortem assignare debeat. Id ipse pariter in §. 2. exposui. Communicavit deinque Vir Clar. mecum sententiam, quam de eadem difficultate tulit Cel. Cramerus aliquot ante annis, quam dissertationem meam conscripseram et quam usque ad eo meae conformem inveni, ut mirum sit in tali argumento tam accurate nos consentire potuisse. Igitur operae pretium erit verba apponere, quibus Cl. Cramerus ipse sententiam suam aperuit in litteris A. 1728. ad Patruelem meum datis: ita autem ille:

“ Je ne sai si j'ene me trompe, mais je crois
 “ tenir la resolution du cas singulier, que Vous
 “ avez proposé à Mr. de Montmort dans Votre lettre
 “ du 9. 7bre 1713. Probl. 5. pag. 402. Pour ren-
 “ dre le cas plus simple je supposerai que A jette
 “ en l'air une piece de monnoye, B s'engage
 “ de lui donner 1 ecu si le coté de la croix tombe
 “ le premier coup, 2 si ce n'est que le second,
 “ 4 si c'est le troisieme coup, 8 si c'est le quatrieme
 “ coup &c. Le paradoxe consiste en ce que le cal-
 “ cul donne pour l'equivalent que A doit donner à B
 “ une somme infinie, ce qui paroît absurde, puisqu'il
 “ n'y a personne de bon sens, qui voulut donner 20.
 “ ecus. On demande la raison de cette difference
 “ entre le calcul mathematique et l'estime vulgaire.
 “ Je crois qu'elle vient de ce que (*dans la théorie*)
 “ les mathematiciens estimant l'argent à proportion
 “ de sa quantité & (*dans la pratique*) les hommes de
 “ bon

bon sens à proportion de l'usage qu'ils en peuvent faire. Ce qui rend l'esperance mathématique infinie c'est la somme prodigieuse que je peux recevoir, si le coté de la croix ne tombe que bien tard, le centieme ou le millieme coup. Or cette somme si je raisonne en homme sensé, n'est pas plus pour moi, ne me fait pas plus de plaisir, ne m'engage pas plus à accepter le parti, que si elle n'étoit que 10 ou 20 millions d'ecus. Supposons donc que toute somme au dessus de 10 millions ou (pour plus de facilité) au dessus de $2^{24} = 166777216$ d'ecus lui est égale, ou plutôt que je ne puisse jamais recevoir plus de 2^{24} ecus, quelque tard que vienne le coté de la croix, et mon esperance sera

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 4 + \dots + \frac{1}{2^{23}} \times 2^{24} + \frac{1}{2^{24}} \times 2^{24} + \frac{1}{2^{27}} \times 2^{24} + \&c. = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \text{ jusqu'à } 24 \text{ termes, } + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \&c. = 12 + 1 = 13.$$

Ainsi moralement parlant mon esperance est réduite à 13 ecus et mon equivalent à autant, ce qui paroît bien plus raisonnable que de le faire infini.

Vaga est hætenus ista solutionis explicatio et contradictioni obnoxia; si enim verum sit, non maiorem nobis videri summam 2^{25} quam 2^{24} , nulla omnino attentio facienda erit ad summam, quam acquirere possim post vigesimum quartum iactum, quippe ante vigesimum quintum iactum faciendum iam possideam $2^{24} - 1$, quod non differt in hac theoria ab 2^{24} . Eodem igitur iure spem meam 12 scudos valere dici potest quam 13. Id vero nequaquam dico ad impugnandum Auctoris prin-

principium, quod meum quoque est, que les hommes de bon sens doivent estimer l'argent à proportion de l'usage qu'ils en peuvent faire, seu potius ne quis inde occasionem capiat male sentiendi de ipsa theoria. Verum id ipsum etiam expressis indicat verbis Cl. Cramerus in sequentibus, quae plane ad mentem nostram sunt. Sic igitur pergit:

“On le (l'équivalent) pour ra encor trouver
 “plus petit en faisant quelque autre supposition de
 “la valeur morale de richesses; car celle que je viens
 “de faire n'est pas exactement juste, puisqu'il sera
 “vrai que 100. millions font plus de plaisir que 10
 “millions quoiqu'ils n'en fassent pas 10. fois plus.
 “Par exemple si l'on vouloit supposer que la valeur
 “morale des biens fut comme la racine quarrée
 “de leurs quantités mathematiques, c'est à dire,
 “que le plaisir que me fait 40000000. fut double
 “du plaisir que me fait 10000000., à lors mon
 “esperance morale seroit

$$\frac{1}{2}\sqrt{1} + \frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{4} + \frac{1}{16}\sqrt{8} + \text{etc.} = \frac{1}{2-\sqrt{2}}$$

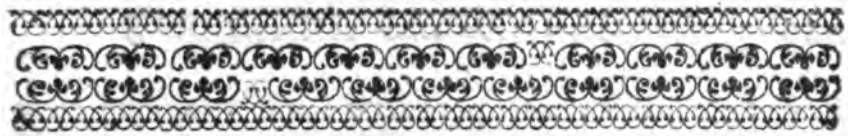
“Mais cette quantité n'est pas l'équivalent, car
 “l'équivalent doit être non pas égal à mon espe-
 “rance, mais tel que le chagrin de sa perte soit
 “égal à l'esperance morale du plaisir que j'espere
 “de recevoir en gagnant. Donc l'équivalent doit
 “être (par supposition) $(\frac{1}{2-\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{8-4\sqrt{2}} = 2,$
 “9 &c., moins que 3 ce qui est bien mediocre
 “& que je crois pourtant approcher plus de l'esti-
 “mo vulgaire que 12. &c.

CLASSIS

CLASSIS SECVNDA
CONTINENS
PHYSICA.

Tom. V.

Bb



DE
GLANDVLIS RENALIBVS
EVSTACHII.

AVTORE

J. G. Du Vernoi.

§. I.

Glandulas Renales nil aliud esse quam simplices Capsulas ad vsum Renum potissimum fabricatas, id opinor tam earum partium ante et post partum contemplatione, quam circumstantiis aliis non tam conicere quam demonstrare proclive est: Viceversa, cum praeconcepta glandulae idaea, quae multorum animis inhaeret, eas minus consentire improsperasque fore eiusmodi principio subnixas disquisitiones fere existimandum esse. Quamobrem, ad illustrandam hancce Corporis Humani particulam, operae pretium esse, insigniora phaenomena seu obseruationes tam e Foetuum quam Adultorum perlustratione eò spectantes, coram Academia paucis exponere, visum est.

Obs. I. Glandulas Renales in vtrouis latere Renibus constanter assidentes inuenio, quumque

Bb 2

Ren

Ren extrahitur, eas perpetuo sequi vnamque cum eo massam conficere video, sicuti is situs a *Cel. Rbuyscb. Thes. 1. n. V. not. 2. seqq.* verbis describitur: *Superior inquit pars Renis veri, succenturiato non solum est contigua, verum etiam membranofo et admirando nexu inter se connectuntur, sc. Ren succenturiatus excavatus est parte sui inferiore, quam in cauitatem supremam partem Renis veri tanquam in acetabulum admittit, in modum articulationis ossium, quae per artbrodiam fit.*

II. Exterior earundem conformatio, frequentius quam in aliis partibus variabilis visa est, idque non in diuersis solummodo, sed quoque in vno eodemque subiecto: Nam interdum in latere dextro, alia figura, alia magnitudine, alia soliditate quam in laevo visae sunt.

III. In nonnullis foetibus monstrisque, fossulae fere visae sunt, absque sensu intermedio sensibili.

IV. In aliis foetibus, eas humore sanguinis aemulo, rubicundo, fluidore distentas saepenumero obseruavi.

V. In Respiratione vtentibus contra, complanatas et depreffas deprehendi.

VI. Quoad magnitudinem, cum in foetu tum in adultis Renem haud aequant.

VII. Flatu seu liquore iniecto, earum latera facile a se inuicem diduci possunt.

VIII.

VIII. Flatu per venam immisso, momento surgent ac in tumorem eleuantur.

IX. Aperta glandula, modum exploraturus quo ista inflatio fieret, iniecti mercurium: Mox in interiore superficie plurimi ductus mercurio impleti sunt, e quorum orificiis mercurius exsillabat: Qualia orificia iam à *Wartbono* obseruata reperio.

X. Duplex ad vnamquamque Glandulam arteria cum simplici vena tendit: id vero animaduersione dignissimum est, ductus innumerabiles radiorum forma circa glandulam protensos esse, circumque admirabilem circa eam efformare.

XI. E pariete inferiori glandulae, vas exiguum quod arteriae magnae propago est, e glandula prodire visum, in comitatu arteriae spermaticae, apud viros ad testes, apud foeminas ad ouaria descendere visum est.

§. 2. Postrema obseruatio ante reliquas ventrari meretur, quoniam supra allegatam glandulae ideam, certis ductibus humorem peculiarem deuehentibus subnixam corroborare videtur. Isti ductus referente *Valisnerio*, a *Celeb. Valsalua* primum detecti sunt, qui postquam certos ductus in viris ad Epididymides, in mulieribus vero ad ouaria tendentes obseruasset, in eam perductus est coniecturam eas forte ad generationem conferre. Eiusmodi autem ductum iuxta *Obs. XI.* e glandula prodire visum ac in utroque sexu versus organa genera-

tionis tendentem conspiciere quoque procliue erat, in cuius certe disquisitione, ob vasculorum exilitatem et profundum glandulae situm, singulari cautione, et industria opus est. Quamobrem ea similitudine inter ductum *Valsaluae* et Nostrum apparente, ad Viri Cl. sententiam initio accedebam, sperans videlicet, postquam eo inuento praecipuae difficultates ad ductuum existentiam spectantes sublatae essent, amplam tam inuenti quam vsus nos aliquando seu ex ipsismet Cl. Autoris observationibus seu propriarum disquisitionum ope accepturos esse: Tum temporis enim, omnes in praefatis *Observationibus* X. et XI. obviae circumstantiae haud satis perspectae erant, quae tamen ad propositae disquisitionis intelligentiam scitu necessariae et vtilissimae sunt, vti ex sequentibus perspicuum erit: Nempe, contra meam praefatam sententiam, ductibus a *Valsalua* descriptis *Observationes* nostras minime respondere intellexi, prouti eorumdem ortus et proprietates iuxta praefatas observationes, satis euincunt: Illae enim ductum e glandula more vasis excretorii ortum trahere, Hae contra e trunco Aortae, vt caetera vasa sanguinea, ductum prodire declarant. Pro iisdem ergo ductibus haberi non posse manifestum est. Caeterum omnes eiusmodi *Observationes*, Cl. *Viri* inuentum minime quidem infirmare, vel eidem e directo aduersari fateor; pro eodem tamen veri studio haud dissimulandum est, quod

I. crebra et longa Glandularum Renalium disquisitione

tione ad ductum originem inuestigandam instituta, ductus e glandula oriri visus, vera et simplex sit arteriae magnae propago exilissima, sub glandula incedens eique firmiter agglutinata, sed falso pro ductu *Valsaluae* initio habita. 2. Si eius Arteriae a *Cl. Viro* nulla distincta et specialis mentio facta sit, vereor ne Vir caeteroquin oculatissimus et solertissimus, falsa imagine deceptus, in eam sententiam perductus fuerit.

§. 3. Glandulae Renales seu ante seu post partum diligentius consideratae, e laeuigato subluteoque cortice seu substantia, singularem adipis speciem mentiente constatae sunt, subque praefato cortice ampla cavitatis continetur, qua humoris fluidi et sanguinis aemuli *Obs. IV.* notabilem copiam includi, frequens observatio est: Quare mutato nomine, Sinus seu capsulae rectius appellantur, non tam propter praefatam excavationem a glandulae notione alienissimam, sed potissimum ob eandem texturam et substantiam, quae ex singulari materia adiposa, concreta et conformata visa est.

§. 4. Nunc ad Capsularum usum, quantum rei obscuritas patitur, inuestigandum me transfero. Ac primo sententiam Clarissimi Viri *Antonii Molinetti*, mihi plurimum placuisse fateor: Nam res notatu dignissima est, quo tempore Organa urinae secretioni dicata sopita iacent, in foetu videlicet, capsulae tumidae et sanguine imbutae

com-

conspiciuntur: Vice versa post partum, quando illorum actio fit perfectior, hae vacuae et depressae cernuntur. Caeterum ea esse organa quae nexum cum Renibus intimum habent, iisque specialiter dicata sunt, Nemo qui praefatas observationes attentius euoluerit, assensum hodie denegabit. His praemissis, duplici modo Renes considerari possunt. 1. Partes eorum essentielles, quae proprium corpus seu parenchyma Renis constituunt. 2. Partes eorundem exteriores et proxime ambientes, quibus Renes veluti *Fascia* inuoluti, a caeteris visceribus distinguuntur, vnde sequitur, praefatas capsulas vel prioribus vel posterioribus proprie inseruire Renum partibus, earumque in gratiam necessario fabricatas fuisse.

§. 5. Si in exteriores partes cogitationem et oculos intendamus, ac in fauorem earum capsulas inseruire velimus, erit sane ratio in admirabili congerie et fabricâ innumerabilium vasculorum, forma radiorum circulariter glandulam ambientium in eamque tendentium (Obs. X.) quae forte totidem vasa reductoria sunt, quibus e partibus exterioribus sanguis, ne per plurima distincta vascula venae cauae infunderetur, in capsulam corruatur, in ea permiscetur, et mediante vena ampliore, e praefata capsula ad communem alueum defertur. Is enim, quum per angustias sacculorum adiposorum, praecipue in foetu, magna vti videtur difficultate progrediatur, eiusque ad
venam

Venam caenam immediata reductio tam in Foetu quam Adulto minus tuta fuisset, haud praeter rem esse videtur, ut secundum admirabilem Naturae legem, eiusmodi structurae ratio in eum fieri adesset, tametsi ad praefatam mechanice magis illustrandam, multum meditationis et experientiae adhuc desiderari sciam.

§. 6. Si vice versa eas Capsulas Renibus ipsis inferuire contendamus, Rationes nonnullas invenire haud difficile erit: Ac inter alias conditio Renum ante Partum praecipua visa est, qua urinae secretionem eo temporis spatio vel nullam vel exiguam fieri constat, haecque causa est cur Vesica Foetus vacua invenitur, et cur in recens natis, si recte memini, mictio primo et altero die haud succedit. Interdum tamen fieri potest, ut absque secretionem urinae in Renibus, Vesica urinam contineat, nempe per alias vias nobis incognitas, quibus nunc inuestigandis non vacat; sed illius Renum in Foetu conditionis clarum testimonium offert diversitas magna earum partium in foetu et adulto, ob quam per Renes pariter ac per Pulmonem, et caetera viscera quae in Foetu pallida et fere exanguia cernuntur, exigua duntaxat pars sanguinis transmitti potest, tametsi in vasis maioribus copia sanguinis inclusa sit: In quem finem certa, et in adulto haud obuia organa Foetui concessa sunt, quibus circuitus sanguinis illaesis visceribus absolui potest, in quorum propterea

numerum capsulis referre, naturae haud inconformum est: Is enim sanguis qui Renibus destinatus est, modo per arterias capsulares et adiposas incedens, sapienti naturae consilio, in partes exteriores quae versum sese diffundit: Inde vero per fabricam supra expositam, in cauum capsulae infunditur, et mediante capsulari Vena ampliore aliisque venis adiposis, ad venam cauam tutissime defertur.

• Antonii Molinetti. sententia. legi potest. Dissert. Anat. Pathol. VI. 7.

DE
FIGURA ET SITV
VESICAE VRINARIAE*

AVTORE

Jos. Weitbrecht.

Tabula VIII.

CUM ante biennium sectioni alicuius cadaueris in Nosocomio Marino incumberem, vesicamque excisam inflarem: figuram eius longe aliam esse intelligebam, quam ex anatomico-

mico-
* Cum haec de figura Vesicae urinae observatio ab autore facta, et una cum icone et obiecto ipso, mense Julio 1730. in Academia proposita fuisset; accidit postmodum, ut Epistolae Morgagnianae Lugduni Batavorum 1728. impressae ad has oras afferrentur, in quibus Epist. I. §. 61. haec eadem observatio, verbis tantum non iisdem, ab Illustri hoc Anatomico recensetur. Quis vero nulla haecenus inter hos binos Autores intercesserat communicatio; in Epistolis etiam nulla figura sit adiecta; si quoque Scriptores, qui post Epistolas





DE FIG. ET SITU VESICAE VRINAR: 195

micorum descriptionibus atque iconibus memoria conceperam. Mutua ophatio confirmavit, me non fuisse falsum. Sed tum temporis ex unico obiecto nihil certi concludere licebat aut stabilire, pro Iusu naturae, quod aiunt, rem omnem habenti.

§. 2. Postquam vero, sequentibus occasionibus oblatis in octo saktim cadauenibus continuo dissectis, observationem dictam deuo ad examen reuocarem: *constantem* illam deprehendi, et veritate rei coactus iudicavi descriptiones atque figuras anatomicas vesicae, publici iuris factas, quodcumque erroris causa fuerit, cum natura ipsa in sexu hominis masculino non conuenire.

§. 3. Quod si enim praecipuos Autores Anatomicos, *Vesalium, Columbum, Spigelium, Bartholinus, Veslingium, Diemerbroeckium, D. de Marchettis, J. van Horne, Verbeyenium*, aliosque descriptores potius, quam scriptores euoluamus: patet, quod secundum vnam consensus illorum, *vesica* sit *vas cauum, membranaceum, oblonge rotundum, superne latius, inferne angustius, sensimque in collum arctum terminans, binc lageniforme, aut pyriforme*. Atque haec descriptio cum iconibus quoque ita conuenit, vt locus, vbi *vrachus* insertus est, pyri umbilicum, collum vero petiolum referat.

Cc 2

§. 4.

Stolas Morgagnianas compendia ediderunt, ad hanc descriptionem nullatenus addenderunt; praesens denique dissertatio non de figura sola sed et de situ vesicae agat: statutum fuit illam nihilominus in Commentarios referre. Quod ideo monetur, ne quis censor molestias auctori creet.

§. 4. Haec si cum obiecto ipso conferamus,prehendimus contra: quod Vesica *cava* quidem sit et quadantenus rotunda, sed ita, vt diameter a fundo ad locum inferiorem, circa collum et vterum infertionem, sit *longissima*; ab vno latere ad aliud *breuior*; a parte anteriore ad posteriorem, *breuissima*: quod pars superior, quae vulgo *fundus* nuncupatur, non magis ampla sit, sed potius magis *acuminata* quam inferior: quod collum vesicae non ex coarctatione vesicae *sensim* facta oriatur, sed pro appendicula, tamquam obrumentam in dolio sit habenda: quod idem collum non ex parte, quae fundo opposita est, ex vesica procedat, sed ex infimo latere anteriore, et distantia colli *anterior* ab vracho duplo *breuior* sit, quam distantia eiusdem per posterius latus mensurata: quod denique tantum absit, vt vesica ex fundo *sensim* in collum arctum terminetur, vt potius infima sui pars, qua intestinum accumbit, et cui duae vesiculae seminales applantantur, *planitiem* quandam, non vero rotunditatem prae se ferat. Quod igitur nec pyriformis nec lagenae similis sit, et consequenter primae tum descriptiones tum figurae merito pro falsis iudicentur.

§. 5. Haec de *figura* vesicae: iam de *situ*. Ille autem talis est. Primo quidem id omnium maxime attendendum est, vt de positione ossium, ex quibus cauitas illa, quam peluim dicunt, componitur, certi sumus. Etenim os Sacrum non ita applantatur spinae dorsi (loquor autem de homine pedibus

pedibus recta insistente) ut cum hac in linea recta et ad horizontem perpendiculari descendat: sed deflectitur illud retro deorsum in linea ad horizontem obliqua. Neque minus ossa pubis et ischii plurimum ad interiora reclinantur, et cum osse sacro tantum non parallele currunt. Hinc ossis sacri superficies interna non tam anteriora, quam inferiora, externa autem non tam posteriora, quam superiora respicit: neque minus os pubis exterius magis deorsum quam antrosum, interius vero magis sursum quam retrorsum spectat.

§. 6. Ex his sequitur, verissimum quidem esse id, quod Vesica urinaria in cavitare, quae pelvis dicitur, contineatur: falli autem eos, qui cum *Columbo* statuant: illam sub osse pubis sitam esse. Non enim certe vesica sub osse pubis haeret, sed potius eidentissime huic ossi oblique superincumbit.

§. 7. Usus huius observationis potissimum triplex est. Nam primo quidem *Vesalio* suus honos restituitur, qui non *apicem* vesicae, seu partem superiorem, cui vrachus connectitur, uti perperam fecerunt Scriptores posteriorum temporum, sed *humilimam* vesicae corporis *sedem*, *sursum* dixit, qui quidem fundus proprie planities illa (§. 4.) est, qua vesica intestino recto ineumbit. Deinde commodum haud spernendum redundat in illos, qui excidendorum lapidum causa methodo *Chesterdeniana* circa partem hanc versantur, quippe operatio in hac ipsa planitie instituitur. Imaginaria denique ratio tollitur, quam de antiquo situ ant-

comici quidam ex male intellecto *Vesalio* reddiderunt, quod scilicet hunc in finem a natura institutus sit, ne vesica a superincumbente utero atque intestinis *premeretur*; qui quidem metus per se vanus erat, quia nulla talis pressura aocius ab intestinis quietis et ubique firmiter alligatis proficisci potest; deinde vero, ex consideratione *restituti* situs necessario id, quod motuebant, euenire debet; ut igitur excogitata illa ratio hoc modo plane et iustissime obliteretur.

Tabula VIII. Vesica urinaria hominis.
 a. Summitas vesicae, vulgo fundus. e. Vesiculae feminales accumbunt.
 b. Latus anterior. f. Vasa duo deferentia.
 c. Latus sinistrum. g. Infectio vteris sinistri.
 d. Planities inferior, cui intestinum et b. Cervix cum principio vetricae rectum et

DE RADICIBVS ET FOLIIS CICHORII

DISQVISITIO ACADEMICA

G. B. *Bulffingeri*.

Academicam molior *Disquisitionem*, non promitto expositionem dogmaticam. Demonstrationes de hoc argumento nullas possideo. Recit observationes et condidi coniecturas. Quod Philosophis Graecis *Academia* reliquit, adhibui, sensus scilicet, et probabilem de phaenomenis discursum. Primo igitur *Visa* accipe, deinceps *Cogitata*.

§. 2.

VISA.

§. 2. Lusi per hanc hiemem colendo radices Cichorii. A domestico vsu negotium adorsus, finiam in *observatione Botanica*. Dolio vinario aliquot centenis pertuso foraminibus, ita terram, tenui arena mixtam, et radices memoratas, commisi alternis ordinibus, ut e singulis foraminibus prominere radices horizontaliter positae vertex. Eo facto attendi phaenomenis, quae moderatus parturiebat hypocausi calor.

§. 3. Vulgare, nec praeter expectationem fuit, folia sic protrudi, ut sursum vniuersa reflecterentur, atque omnem dolii ambitum, erescendo in dies corona, cingerent. Eam mihi spem fecerant visa, quae *Dodartus* narravit in *Memoriis Academiae Scientiarum Parisinae ad A. 1700. p. 74.*

§. 4. Rarius illud existimaui visum, quod circa ordinem et modum originis radicularum animadverti. E radice longioribus cultro abscindere segmenta necessum fuit. Vidi autem post aliquot tempus, ubi radices quasdam extrahere dolio contigit, novas in sectione illa radículas prodire, scilicet in sectionis transversae parte ea, quae corticem a substantia separat lignosa, primo tubercula exire, atque ex illis, ubi rumperentur, radículas. Hic locus erat quasi proprius. Paucissimas vidi erumpere alibi, atque omnino ibi, ubi insertiones erant, quas vulgo vocant.

§. 5.

§. 5. Segmenta radicum reiectanea neglecti primo, nisi quod maiora ob domesticos vsus in corbem coniecta, ne illico marcescerent, terra obtexi. Vidi post aliquod temporis intervallum etiam in his sectionibus prodire tubercula, atque ex illis protrudi aut radículas aut foliola.

§. 6. Ea res fecit, vt terrae meliori denuo inserta fuerint haec segmenta, in qua omnino germinarunt egregie. Segmentorum variae species erant. Altera transuersim ad radicis axem secta, altera secundum axem: maiora altera, altera minora: altera vtriusque resecta, altera ex vno solum latere.

§. 7. Dissecui *coram Societate* frustum radicis fortioris transuersim et secundum axem in partes complures, atque omnino in quadrantes segmentorum diuisi: nec omnis illa laniena impediuit, quo minus laetissime *singula* germinarent.

§. 8. Cum adeo obsequentes atque in germinando pertinaces deprehenderem radices nostras, cogitavi, annon fallere illas liceat modo, quo deludi arbores solent. Notum est, earum aliquas, vt v. gr. tilias, salices etc. etsi *inuerso situ* positas germinare, et radicem conuertere in ramos, ramos mutare in radices. Hic obstinatiores reperi radices meas, sed tandem tamen vincibiles.

§. 9. *Inuerso* plantatae *situ* sequentia exhibuerunt phaenomena. Quas terrae totas commisi, sic vt et superne eadem obtegerentur, tubercula vtriusque protruserunt, atque ex illis superne radices

DE RADICIBVS ET FOLIIS CICHORII. 201

ces, inferne folia. Illae super sectionem repentes mox in terram reclinatae sunt: Haec vbi sectionem perreperant, sursum inflexa.

§. 10. Erat inter hasce radices aliqua, cuius vertex a vermibus non nihil erosus erat: eam inuerse posui sicut ceteras, sic tamen vt ex opposita parte e terra emerret. Nullas haec radices e superiori sectione protrudit, sed ex inferiori folia magno numero. Ea autem per planum sectionis repentia intrarunt in specus, vermium habitacula, et trans ipsam radicem sursum enixa sunt. Miseratus eorum sortem separaui radicem in duas partes, et denuo terrae commisi eodem situ. Vidi pergere folia, et intra 13. dies supra terram emergere.

§. 11. Vidi et aliud segmentum, quod ex vtraque parte tuberculis conspicuum erat. Id inuerso situ terrae commisi, sic tamen, vt emerret pars, quae olim infima nunc summa erat. Vidi crescere indies tubercula, sed non diffilire per 4. hebdomades. Donec tandem ex eorum aliquo prodiret radícula vix lineam aequans longitudine: cui etsi postmodum attendi, nullum accedere incrementum obseruaui. Post alios 13. dies ex vno tuberculorum etiam *surculus* prodiit, quem incauta manus abrupit, sed nouo foecunda mater natura suppleuit. Huius quidem radice iconem spectatorum oculis imitabunda naturae tabula exhibet nostra.

Tom. V.

D d

§. 12.

§. 12. In alio vidi similia segmento; sed tenuia admodum et paruula erant foliola, vt nisi alia simul ad latus excreuissent, negassem illis honorem delineationis, quo in Tab. eadem fruuntur.

§. 13. Vidi etiam sponte oblatum, quod hactenus sectione mediante quaesiueram. In radice, cuius vertex putrescere incipiebat ad altitudinem vnus pollicis, sub illa putrida parte novos prodire surculos et folia animaduerti, quae lactius pullularunt, vbi libera ab eo onere putrescente praestiti.

§. 14. Aliquando cum in radice inuersa posita surculus iam pene ex terra emergeret, de nouo inuerti radicem, vt situm naturali similem manisceretur: vigi denuo sese reflectere *surculum* et ad auras eniti. Imaginem facti videas in Tabula sequenti.

§. 15. Vidi etiam illud, quamdiu noua germina sub terra eniterentur, rarissime expansa esse in folia, sed quasi surculos retulisse: atque ipsa etiam, si quae erant foliola, fuisse, quam minime explicita, latitudinis praeter altera, quae supra terram conspicitur, contemptibilis.

§. 16. Vidi etiam surculos eiusmodi ab radice abruptos, et terrae commissos, nouas egisse radículas, et folia protrusisse.

§. 17. Perterebravi et lasciam, eidemque sic inserui radices, vt deorsum vertex spectaret; alteras sine foliis, alteras iam insignes foliis, utrasque

que quoad situm naturalem verticaliter inuerfas. Radicem terra circumdedi, vertice, vt dixi, infra asciam prominente. Vidi prodire folia, et alia coronam formare circa foramen suum, alia sursum reflecti per ipsum foramen, et trans terram incumbentem eniti in superiores auras.

§. 18. Si quando segmentum radiculis suis insigne sic inuerterem, vt illae supra terram emerent: vidi illas adeo non augeri aut reflecti versus terram, vt potius marcerent breui tempore.

§. 19. Similiter, cum aliquando radices horizontaliter ita ponerem, vt media tantum parte terra tegerentur, eminentibus extra eam terminis radicum: vidi folia prodire et germinare egregie, sed marcere fines radicum.

§. 20. Inter plurima plantarum mearum folia, eorum sex mihi forte obuia fuerunt bifida, hoc est ex vno stylo in duas diuisa partes, quarum singulae folium exhibebant. Non erat diuaticatio perfecte similis, nec in eadem radice omnia, sed in diuersis obseruaui, singula scil. super alias radices, et mixtas foliis ordinariis. Imaginem non curauit describere. Si quis eam desiderat, fingat pennam in *Actis Naturae Curiosorum Dec. I. Ann. 2. Obseru. 80.* delineatam esse folium, et habeat, in quo acquiescat.

COGITATA.

§. 21. Visus, quae dicta sunt, iudicavi *miram* *crescendi pertinaciam* esse his radicibus insitam. No-uum mihi fuit, segmenta ista omnia germinare, vtcunque male habita sectionibus praeuiis. Postea tamen inueni, id et aliis annotatum esse. *Marchantium* deprehendi similia narraffe in *Memoriis Academiae Scientiarum Parisinae. ad A. 1709. pag. 82. 83.* Aliqua tamen cum differentia. Verba sunt :

On sait par experience, qu'il y a des racines charnues, qui etant coupées par rouelles de l'épaisseur de trois ou quatre lignes, ou verticalement fendues en quatre parties, multiplient fort bien leurs espèces. Ces rouelles et ces morceaux de racines ne sont pourtant que des parties tronquées assez minces, qui etant replantées produisent a leurs circonférences quantité d'autres racines fibreuses, dont il s'élève dans la même année des plantes, qui viennent a leur perfection, et tout a fait semblables à celle, d'où on les a pris.

§. 22. Equidem Vir Industrius protrudi vult radículas in circumferentia segmentorum: id non dubito fieri in pluribus. Obseruavi id in raphano siluestri, quem lecto hoc eius monito tentamini exposui, sed obseruavi ea cum limitatione, vt non nisi ex insertionibus agi radículas vidērem, non promiscue ex omni parte segmenti.

Verum

DE RADICIBVS ET FOLIIS CICHORII. 205

Verum in nostris vix vnum alterumue succurrit exemplum, quod ex circumferentia radices extruserit. Cetera omnia ex confinio corticis et substantiae lignosae, eo praecise ambitu, quo post sectionem succus prodit lacteus et amarus. Fortassis operae pretium fuerit, idem et in aliis experiri radicibus ex eorum genere, quae succum ferunt lacteum.

§. 23. Illud nescio an recte intulerit, quando superioribus statim adiungit:

D' où il s' ensuit, qu' il faut, que la vapeur humide de la terre dilate d' abord les semences, qui sont dans ces petites parties tronquées, et que la matière, qui sert a la formation des racines, s' y rencontre, pour produire les nouvelles racines, qui paroissent quelques jours après, et qui en fin donnent naissance a ces nouvelles plantes.

Cur vnica fit planta solum, si euoluantur semina plantarum futurarum segmento illo contentarum? Cur non integra prodit earum caterua, qualis prodit si plura semina capsae suae inclusa terrae committuntur? Sunt ne matura in ipsis radicibus semina futurarum plantarum, an solus immaturitatem supplet locus et succus praeparatior?

§. 24. Annon potius sufficit viso huic explicando sola structurae per integram radicem homogeneitas, qua fit, vt vnumquodque segmentum alteri segmento, ipsique adeo radici toti homo-

Dd 3

logum

logum fit, et iisdem producendis effectibus aptum. An dici potest, plantas eiusmodi esse exercitus plantarum, quae pro circumstantiis aut singulae euoluantur in maiores, aut vnā totalem omnes efficiant?

§. 25. Ingeniose *Illustris Fontenellius*, intelligi hic de plantis, quod de anima humana dictum accepimus. *Principium vegetandi* (dic, si ita velis, animam vegetatiuam) esse *totum in tota radice*, et *totum in qualibet eius parte*. Vid. *Histor. Acad. Paris. ad A. 1709. p. 55.*

§. 26. Cogitavi et *de altera plantarum mearum pertinacia*, qua sursum enitebantur surculi et folia, quicquid etiam impedimenti opposuerim. Visa nostris similia iam ante hos triginta annos enarrauit in *Memoriis Scientiarum Parisinis*, *Dodartus*, *ad A. 1700. p. 61. seqq.* quaeritur de probabili visorum origine.

§. 27. Qui sursum emergere surculos voluerunt, *ob minorem crescendi difficultatem*, dimidium phaenomeni soluere studuerunt cum detrimento partis alterius. Ita enim et radices sursum, non deorsum, niti deberent. Nec attenderunt phaenomeno, quo grana seminum humefacta, sed in aëre posita, radices deorsum emittunt, germina sursum. Neque reptatum explicabunt, §. 9 et 10. indicatum: neque fugientia retro germina §. 17. excusabunt. Sed infantia haec fuit explicationum huius phaenomeni.

§. 28.

§. 28. Meliora profatus est, quem ante dixi, *Dodartus*, vel ob solam in sententia dicenda modestiam memorandus cum encomio. Diuersam facit structuram fibrarum in radicibus et surculis: illas tales vult, vt a vaporibus ascendentibus in ima sui parte abbrevientur, et in superiore a calore folis per rarefactionem succi sui et aëris contenti expandantur; has autem tales, vt a calore folis abbrevientur per dissipationem succi sui, et in parte inferiore per introductos qui e terra ascendunt vapores prolongentur. Nihil opus est aduersus hanc sententiam disputare. *Monuit ipse Dodartus*, quae desiderari possint. *Negat*, se acquiescere huic solutioni: atque enumerat, quae illi desint. *Vide loc. cit. p. 72.*

§. 29. *La Hirium* vidimus ingeniosam quaestioni solutionem applicare, quae non male conueniat viso, quale ipsi proponitur. Dum ex semine germen et radix prodit, hanc crassiori succo, adeoque grauiori, et fortius deorsum nitente nutrit, illud vaporibus, et sursum nitente fluido. Ita punctum quasi aliquod diuisionis concipias, ex quo radicem crassiori, et germen spirituosiori fluido nutriendum incoes, quorum igitur vtrumque diuersis vrgetur directionibus, donec in situm illis conatibus aptum deueniat. *Vide Memorias Acad. Scient. Paris. ad A. 1708. p. 297. seqq. et Histor. eius Anni p. 82.*

§. 30.

§. 30. Iucunda haec sunt, sed fateor, me haerere ob visa nostra §. 9. an etiam hic vaporibus folia nutriri contigit, et radulas crassiori succo; cum illa prodirent infimo, hae summo segmenti loco? neque punctum diuisionis hic locum habuit, circa quod tanquam motus sui centrum in contrarias plagas niterentur aut reuoluerentur partes subtiliori aut crassiori succo nutriendae. Fortassis etiam hoc vtile fuerit attendere, si furculorum directio sursum enitens, etiam in ipso aëre, a nisu vaporum oritur, necessum erit nutriri furculos vaporibus, qui aërem leuitate superent specifica; namque ii soli sursum tendunt in aëre. Id autem an facile admiseris, nescio.

§. 31. Quicquid aliis videatur, mihi *Astruciana* prae caeteris expositio placet. Vult 1. succum nutritium ferri in fistulis secundum longitudinem plantae, extensis: 2. fistulas invicem communicare vel immediate, vel ope canaliculorum horizontalium ex medulla egredientium, more radiorum circuli: 3. in tubis ad horizontem parallelis vel inclinatis fluida grauitare in parietes fistularum inferiores, et nequaquam in superiores: igitur 4. succum nutritium proprio pondere cadere in fistulas plantae inferiores, ibidemque colligi in copia maiori, quam in superioribus: vnde 5. tubuli isti amplius extendantur, et pori fiant apertiores: 6. succum in eos maiori copia penetrare, et inferiorem plantae partem crescere fortius. Ex

e0

eo 7. fieri, vt, dum inferior pars magis quam superior augetur, extremitas illius sursum reuertetur, tamdiu 8. donec in eum planta situm deniat, quo vtraque pars aequaliter nutriatur, hoc est, in verticalem. 9. Fieri autem hoc in partibus plantarum flexibilibus, hoc est, in extremitatibus plantarum adhuc mollibus. Quin imo 10. in ipsis seminibus, quae adeo vtcunque proiecta sursum germinant. 11. Ex aduerso radices nutriri ab extrinseco humore: igitur 12. superiorem fortius crescere partem, quam inferiorem, quia 13. ceteris, licet omnibus, paribus, humor sua grauitate iuuet ingressum in partes radices superiores, in inferiores impediat.

§. 32. Habet haec expositio characterem, qui rebus competit naturalibus. *Simplex* est, et *minimum laboris* naturae imponit. *Demus* succum nutritium ferri in fistulis communicantibus: *cetera se omnia bene habebunt, nisi quod emendari debeat, quod numero 3. dicitur.* In canaliculis ad horizontem inclinatis etiam superior paries premitur a fluido stagnante altiori. In horizontalibus, qui communicant cum altioribus tubulis res eadem obtinet. Sed inferiores tamen tubuli, et inferiores tubulorum parietes fortius premuntur, quam tubi superiores, vel eorundem tubulorum parietes superiores. *Sufficit* id scopo Viri. *Nec obest,* differentiam esse exiguam: est enim continua; est contra obiectum molle; nec illi effectus imputatur citus, sed omnino lenis et lentus.

Tom. V.

Ee

§. 33.

§. 33. Sunt etiam *phaenomena* mihi, quae *prae-*
cipuas hypotheseos et ratiocinii *partes confirmant*.
 Inferiores fortius nutriti fibras egregie patuit mihi
 in raphano, quem *Excellentissimus Comes de MUNICH*
 Academiae spectandum transmisit. Eius haec fa-
 cies erat: scissus per medium tres exhibuit caui-
 tates communicantes; quibus externae totidem emi-
 nentiae respondebant; in superioribus duobus quae
 collaterales erant, et cum inferiore, per longitu-
 dinem raphani excurrente, communicabant, folia
 varie inflexa conspiciebantur, quorum vnum deor-
 sum inflexum per totam raphani longitudinem ex-
 currebat, et ubi ad finem cavitatis peruenerat,
 non nihil reflectebatur sursum: folium bene nu-
 tritum erat, et forte, sed coloris ex flauo albi-
 bicantis, quod tamen postea aëri expositum hi-
 lariter euiruit. Folium illud primarium in situ
 raphani, quamdiu terrae infixus erat, directe deor-
 sum ibat, circa latus cavitatis: sed postea ubi ter-
 rae humidae a me super imponebatur raphanus in
 situ horizontali, erexit sese folium, egitque ra-
 diculas, et noua protrusit folia. Ea quidem omnia
 huc proprie non pertinent: quare etiam a proli-
 xiori harum et aliarum circumstantiarum descri-
 ptione me abstineo. *Duo* autem sunt, quae omni-
 no lucem dictis foenerantur nostris. *Alterum*, quod
 folia, quae varie in cavitatibus superioribus reflexa
 erant, omnia rugas ostenderent in latere infimo,
 quoties deorsum aut horizontaliter crescere de-
 buerunt; nullas autem haberent in superiore latere,
 quoties

DE RADICIBVS ET FOLIIS CICHORII. 211

quoties eadem reflexa sursum pergerent: *Alterum*, quod nullas superne rugas haberent lacinae folii primarii sursum reflexae, etsi contra destinationem sibi ordinariam dirigerentur; imo nullas etiam acquirerent, cum inuerso iterum situ raphani in directionem naturalem denuo reflecterentur. *Ista* quidem omnino ostendunt, in ea plantae parte, quae nutritur ab intrinseco, *inferiores fortius* crescere fibras, quam superiores; plane, vt requiritur.

§. 34. Sed radices ab extrinseco nutriri, crescere, et conseruari docent phaenomena nostra, superius exposita §. 18. et 19. Itaque mirum non est, contrariam illarum sortem esse, atque omnino talem, qualem *Vir Insignis* postulat §. 31. No. 11. seqq.

§. 35. *Ista* quidem de secunda hac plantarum nostrarum pertinacia. Superest *tortium* quid, quod nescio an simulationem interpretari debeam, an serium naturae phaenomenon. Obtinui tandem, vt ex inferiori radice parte sursum versa surculus prodiret: sed non nisi post magnum tuberculi incrementum. Quid dicam? An hic in contrarium succus iuit protrudens surculum, vbi radix debebat prodire? Vix videtur, quoniam et inferius prodire surculi maiore copia. An dici debet, tuberculum quasi plantam exhibere integram, e cuius summo surculus prodiit, cum ex imo radix

E e 2

pro-

212 DE RADICIBVS ET FOLIIS CICHORII.

prodire deficiente nutrimento externo non posset?

§. 36. Optassem, ut dicereliceret, quod sub terra prodeat compactum, radicis specie, idem in aëre expansum prodire furculi et foliorum specie. Fuiſſet hoc affine, explicationi arborum inuerſe positarum §. 8. et commodum phaenomeno §. 12. Non id vero licuit, postquam ab extrinſeco radices nutriri vidimus §. 34.

§. 37. Igitur in eo haecenus manere placet, esse vbique, quod furculis, et esse quod radicibus formandis conueniat; sed alteris euoluendis nutrimentum deberi internum, alteris externum.

§. 38. Illud *curioſulis* dictum esto: *Occurrere in radicibus nostris, quod in magnete.* Si magnetem feces transuerſe ad axem polorum suorum, superficies antea contiguæ virtutes nanciſcuntur contrarias, altera australes, boreales altera. Ita in radicibus nostris, si transuerſim ſecentur, superficies contiguæ contrarias acquirunt ſortes, altera radices protrudit, altera furculos et folia. Id, si velis, portentis loco habe. Si minus, ſinge directionem ſucci interni, et ſiſtularum ſtructuram eſficere, ut ille nonniſi ſecundum vnam directionem nutriat, adeoque in illam partem crescere debeant; quae ab intrinſeco nutriuntur.

Aër

AER INTESTINORVM
TAM SVB EXTIMA QVAM INTIMA
TVNICA INCLVSVS
OBSERVATIONES ANATOMICAE.

^A
J. G. D.

Art. 1.

EIusmodi Tumorum intestinalium, an vllum alibi exemplum literis consignatum sit nec ne, Problema esto; nempe, super intestini exteriori facie, per insignem tractum, plurima spatia, in quibus in tumorem extima intestini tunica vesicae instar attollitur, conspicua sunt. Eiusmodi autem elevationum quaedam latiores, quaedam contractiores, plus minus eminentes, quaedam instar annuli totum ambitum intestini complectentes iisque locis crassitiem notabilem concilians, omnes colore intestinorum proprio praeditae conspiciuntur. Caeterum, extus et superficie tenus consideratae diaphana et candida materia turgere, comprimenteque digito crepitantium vesicularum sensum imprimere, intus vero post incisionem cellulas candidas, fauum mellis aemulantes, siccas ac humore vacuas referre visae sunt.

2. Inverso intestino, super interiore facie, et quod animadversione magis dignum est è dire-

Ee 3

cto,

214 OBSERVATIONES ANATOMICAE.

2o, eiusmodi tumores seu eleuationes pari numero forma et amplitudine, qua in exteriori superficie, conspicuae erant; Earum enim nonnullae contractiores, aliae circulum efformantes et ex earum numero nonnullae adeo protuberantes erant, vt fere cauum canalıs obturarent. Caeterum, etsi areae glandulosae speciem mentiantur, re penitus perspecta cum prioribus ad amissim conuenire obseruauı. Iis qui Anatomicis administrationibus adfuere, phaenomenon haud ab simile obseruare licuit, quod eorum Tumorum seu eleuationum elegantem imaginem oculis sistit, quando videlicet parte aliqua membranoso-cellulosa vel ex instituto vel casu praeter animi sententiam insufflatâ, ea per aëris impulsione[m] collectionemque in tumorem artificialem praefatis tumoribus simillimum eleuatur.

3. Indicem operum *Rhuyschianorum* euoluenti, tumor intestinorum flatulentus in *Catalogo Rariorum* p. 141. sistitur, quo nomine an eiusmodi eleuationes quales nostrae sunt, *Cl. Autor* velit nec ne. id ex praefato catalogo, si ad manus esset, exponere procliue foret.

4. In *Historiâ Acad. Paris. 1703.* Tumorum ieiuni et ilei cauum obsidentium obstruentiumque in Foemina cruciatu ventris assiduo, sex mensium ante vitae finem spatio exagitata, commemoratio facta est, quâ a *Cl. Littrio* causa simul indicatur, vide-

videlicet, Glandularum intestinalium, mole, figura te consistentia vitiatarum tumefactio: cuiusmodi fateor tumoris generatio inter rarissima phaenomena numeranda est, quoniam conceptu arduum est, glandulas minutissimas visum effugientes quales intestino concessae sunt, in eam extendi molem magnitudinemque posse, ut cauum intestinale totum fere impleant, et quod magis admirandum est, vita superstita, et doloris in vna tantummodo ventris sede sensu, tametsi totam iciani ileique tractum praefati tumores occupauerint.

5. Ingens ergo et essentialia discrimen inter istos et Petropoli obseruatos tumores eorumque generationem, perspicere proclive est. Glandularum enim loco, tam in extima (in qua certe nullas dari glandulas constat) quam interiore intestini facie, vesiculoso-racemosa textura, e congerie exiguarum et pellucidarum vesicularum efformata, et (quod a glandularum intestinalium indole quoque alienum est,) annuli vel armillae instar diffusa, tunicasque intestini absque alia eiusdem immutatione solummodo diffocians distendensque, ac tandem geminum tumorem e regione sibi oppositum excitans, intuentibus conspicua est, propter quam adeo indolem conformitatemque situs cum duplici corpore celluloso intestinis proprio,* rationem istorum phaenomenorum in praefata substantia sitam esse perspicuum est: Cuiusmodi viti-

* Vid. Comment. Acad. Imper. Tom. IV.

tio corpus subcutaneum adiposo cellulofum frequenter obnoxium esse solet, quando aut serosa aut aërea aut alia materia eius vesiculas distendente, in variis cutis regionibus, vel *Emphysematis*, vel *Tympanitidis*, vel *Anasarcae* specie, superficies corporis exterior vesicae instar intumescit.

6. Caeterum in istiusmodi partibus haud aequè mirum id videri debet ac in intestinis, quorum videlicet textura solidior particularumque nexus et contactus intimior praefatam tunicarum diuulsionem separationemue perarduam nedum impossibilem reddere videtur: Imo diligentior rei consideratio effecit, vt de originis et formationis in intestinis ratione dubitem, an eiusdem generis intumescentiarum communi origini ea respondeat? vel contra, (quod mihi verosimillimum videtur) peculiari causae propriaeque dispositioni intestinorum, quâ videlicet materia aërea intestinorum cauum permeans, eorumdem tunicas peruadendi facultatem acquirit.

7. Vt irruptio aëris locum habere queat, sufficit si per admixtionem actionemque particularum e praua alimentorum potulentorumque qualitate resultantium, is aër ad maiorem subtilitatis tenuitatisque gradum dispositionemque poris minutissimis peruadendis aptam perducatur, inque cellulis ac flexibus intestinorum, ad membranam seu tunicam interiorem applicetur, qua dispositione
con-

continuata, haud difficile erit, vt in pluribus locis, per raram et spongiosam tunicæ interioris tunicam aëri caeteroquin imperuiam, particulae aëris magis liberae et magis pressae in contiguam texturam vesicularem paulatim irrumpentes eam extendant (speciemque intumescens intus producant: quarum reditu seu regressu in cauum intestini impedito, etiam procliue erit ad alterum exteriorem contextum cellulosum, data huius cum interiori communicatione, transitum moliri ac ita efficere, vt in extima superficie consimilis ac in interiori facie tumor oriatur.

8. Pari, sed paulo diuersa ratione, aëre externo nullam mutationem alterationemue, vt in praecedente hypothese, subeunte, aëris irruptionem explicare licet, si videlicet a praua alimentorum potulentorumque indole, tunicæ interioris quam aëri imperuiam diximus, dispositio natua sic immutetur, vt vel defectu vel liquefactione materiae illinientis, vel ob aliam quamcunque causam, eius resistentia contra nitenti aëri debilior sit; ob quem nisum, pororum amplitudine incrementum paulatim assumentem, aër introrsum penetrans, similia iis quae commemorauimus phaenomena tam in contiguo seu interiori, quam exteriore contextu celluloso producere potest.

9. Aliam adhuc rationem eorum phaenomenorum excogitare fas est, si in quibusdam locis, tunica

Tom. V. Ff inte-

intestinorum interior exteriorque, a frigoris violentia vel ab aliis causis sic constipata fuerit, ut halituosorum effluuiorum perspiratio fieri nequeat: nam hac materia intra cellulas collecta eiusmodi emphysemata generari posse verosimile est. Caeterum, quia tam ad causarum quam symptomatum concomitantium veram exactamque historiam elaborandam, *Mortuorum contemplatio* quae in partis affectae simplicem notionem nos ducit sola haud sufficit, absque singulorum olim vsque ad vitae finem sese excipientium phaenomenorum obseruatione, pergratum fateor fuisset nosse, qualis eiusmodi Tumoribus sociata fuerint symptomata grauius ne, uti suspicor, truculenta, varia, anomala? an contra exigua, parum molesta vitaeque minime aduersa? sed vndenam et a quo *notitiam* quam hic desidero, obtinere possumus?

DE
QVADRVPEDE VOLATILI
RVSSIAE
OBSERVATIONES.

A
J. G. D.

PRaeter *Vespertilionem*, quem Historiae animalium scriptores animal cuiusdam inter murem et auem speciei, proptereaque *Murem alatum* vel animal *volucre biforme*, quod cum nullo animal

man

mante nobis noto similitudinem habet, vocant, nulla inter Europaea Animalia eiusmodi species anomala obseruata fuit, quae a sua communi indole eatenus discedit, vt similitudinem ambiguum videlicet auis et quadrupedis simul induat, vitaeque actiones vtrique proprias exerceat: talia enim, vt caprae, leones, equi, boves alati pro chimaera seu pro non entibus in Poëtarum aut Pictorum cerebro effectis aut pro monstris apud exultas nationes haberi solent, de quibus vid. *Fort. Licetus Ambros. Paracus.* An eiusmodi Animantia praeter *Vespertilionem*, ob aëris aduersam qualitatem in ea quam inhabitamus orbis terrarum parte haud dentur, id alii viderint. In caeteris autem terrae partibus, in Africa videlicet, in Asia et America, praeter ingentem copiam Animalium rarissimorum quae institutis terra et mari peregrinationibus conquisita et perlustrata fuere, eiusmodi species anomalas quae contra sui generis indolem volatiles sunt, tam inter aquatica quam terrestria animalia inueniri spectabiles et dignissimi Viri testantur. Vid. *Raii Synops. Anim. Du Hamel Hist. Acad. Paris. Ephemerid. N. C. R. P. Souciet in Obs. Astron. Geograph. Physicis.* Vid. etiam Peregrinationes Nauigationesque in nouam Hispaniam, Virginiam aliasque Americae Regiones ab Hispanis, Lusitanis, Batavis, Gallis, Anglisque olim susceptae, in quibus *Pisces volantes, Lacertae alatae, Feles alatae* inque eorum numero *Sciuri* quoque *alati* inueniuntur.

Ff 2

Certe

Certe ob hanc ipsam Animalium diuersissimorum perlustrationem, peregrinationum nauigationumque incredibilis vtilitas necessitasque intelligitur, quae praeter communia et familiaria ad escam vsitata et pauca alia apud nos obuia animalia, reliqua sub alio sole viuentia maxima et minima, totumque adeo mundum animale perlustrare, Autorisque et Opificis immensas opes, maiestatem, sapientiam intelligentiamque in creatione et conseruatione eorumdem conspicuam suspicere fas est. Haud tamen in externarum rerum nuda contemplatione quales sunt ortus, conformatio, varietas, indoles, ingenium, vitae genus et infinitae aliae admirandae proprietates, quae insignem animi delectationem voluptatemque in omni homine honesto excitant, verum praecipue in singularum partium internarum fabricae actionumque, in iisque excellentiae, magnitudinis, subtilitatis, prouidentiae et intellectus, quorum conspectu longe maiori voluptate et admiratione animus perfunditur, contemplatione et cogitatione, vera Animalium cognitio et vtilitas versatur.

Etsi vero initio eiusmodi animantia anomala apud Europæos dari negauerim, notatu tamen dignum est, quandam speciem pulcerrimam *Moscuae* primum, deinde *Petropoli* in syluis et montibus haud infrequentem innotuisse, quae *Sciuro Americanorum volanti Rati* et *R. P. Souciet* proxime accedit et ab incolis quoque *sciurus volatilis* appellatur, sub quo
titu-

titulo sub finem superioris anni, eiusmodi animalculum, cuius descriptionem etsi haud sufficienti numero obseruationum subnixam hic subiicio, Academiae oblatum fuit, quod etsi Russiae aequae ac Americae commune ac perpetuum, minus mirandum est, quod ignotum fuerit, si ad alia animalium attendamus. Caeterum (vt notionem aliquam generalem praemittam) totius corporis, deinde capitis, auricularum, rostri, labii superioris, dentiumque tam figura quam numero, pedum, unguium, caudae conformatione, tandem villosa cute cum *sciurorum* specie omnino conuenire, mole autem ei cedere, et pilorum canescentium et nigricantium colore differre visum est. Num ea corporis constitutione praedita Animantia absque aliis adminiculis aëri sese committere possint, iis, qui ratione pollent diiudicandum relinquo: Quadrupedis reverâ potius quam volatilis imaginem ea denotare fateor.

Ad eam in terrestri et quadrupede Animali extraordinariam proprietatem, quae artem infiniti intellectus plenam inuoluit, plures diuersasque actiones ac varia instrumenta elegantissimo et summo artificio elaborata et disposita adeoque ab incomparabili Opifice excogitata desiderari existimo, quemadmodum obseruationum quarundam selectiorum expositione nemo non intelligere potest.

Ff 3

Pellis

Pellis igitur, quâ in eo Animantium genere totum corpus stricte tegitur, iusto laxior et amplior, ad vtrumque latus ventris sese prolongans et ad extremitatem pedis vsque ad palmarem fere latitudinem elongata singularem illam Alae proprietatem mentitur, qua in huiusce animalculi admirationem pertrahimur, et ob quam ad volatilia Animantia Anomala ab incolis, qui propriis oculis praefatum volandi actum contemplati sunt, refertur, narrantes videlicet, eis quando vult procliue esse, earum appendicum subsidio corpus in altum efferre, et sic ab vna arbore versus alteram euolare.

Primum illud instrumentum obuium expansio est, leuissima tenuissimaque propriae cutis, *supra et infra villosa*, quae cutis dorsum, ventrem cruraque anteriora et posteriora inuoluentis prolongatio est, ex duabus conflata laminis, totumque adeo replens spatium laterale, quod cruri anteriori et posteriori, quibus ceu fulcris alligata est, interiacet. Id vero obseruandum est, eam latitudinem prope crus posterius ad duorum vsque pollicum latitudinem reduci: nam ea ab extremo cruris anterioris, oblique introrsum versus crus posterius tendens, sinuosumque marginem efficiens in eo itinere paulatim de sua latitudine amittit, quare earum expansionum in vtroque latere figura ad triangulum fere accedit. Caeterum earum sub-

stan-

stantia, vti iam dictum est, cutanea, ex duabus aequalibus planisque laminis sibi inuicem agglutinatâ conflata, ac instar subtilissimae cuticulae tenuissima leuissimaque et pellucida: Pili vero, vt in reliqua cute, subtilissimi serici ad instar molles et cinereo nigricante colore visi sunt. Tantum de earum expansionum *aliformium* externa facie.

Secundi generis instrumenta praefatarum laminarum interstitio inclusa, per laminarum disiunctionem caute aggressam conspectui oblata fuerunt. Ambae laminae ita separatae, simplices pelliculas omnium tenuissimas et politissimas absque pinguedinis et sanguinis vlllo vestigio manifesto referre visae sunt. In ea itaque duplicatura duo obseruanda sunt: 1. congeries quaedam fibrarum subtilium albarum et spongiosarum, e dorsi vertice descendunt, et curuis veluti lineis excurrentium, laminisque praefatis adhaerentium, breui autem itinere confecto visum rursus effugientium, quibus ad extensionem aequae ac contractionem paratis, laminas diduci et contrahi posse clare intellexi. 2. Postquam laminae a se inuicem in totum vsque ad marginem exteriorem diuarcatae sunt, alia fibrarum series quae a praecedenti tam situ quam directione diuersa est, videlicet fasciculus tenuissimus teres, longus, in extrema ora exteriore praefatae duplicaturae inclusus cernitur, cuius altera extremitas longae apophysi acutae quae ad latus carpi promi-

prominet connata, altera vero extremo cruris posterioris alligata est.

Tertii generis instrumenta, partium haecenus descriptarum proprie fulcra et gubernacula sunt, videlicet 1. vniuersa ossium compages, 2. ossicula quaedam singularia praefatarum appendicum aliformium actionem immediate spectantia. De ossibus in genere obseruandum est, integram compagem, qua ultra centum ossa continentur, exiguae auiculae skeleton pondere vix aequare, adeo subtilitate soliditateque eximia, eius Animalculi vere quadrupedis ossa, auicularum ossibus affinia sunt. Sed artuum anteriorum diligentio-rem perustrationem instituti ratio praecipue postulat, quoniam praefata membra auium et quadrupedum aemula, non solum ad gressum incessumque, sed ad apprehensionem quoque, admirabilem aptitudinem nata sunt. In eorum compage sequentia ossa obseruare fas est. 1. Os Clauiculae. 2. Os Scapulae. 3. Os humeri. 4. et 5. Ossia ulnae et radii. 6. Ossicula carpi, pollicis et quaternorum digitorum. 7. tria ossicula supernumeraria.

Os clauiculae, ossiculum 8. lineas longum, obliquo situ inter sternum et scapulam collocatum, illi ligamenti tenuissimi, teretis, laxioris, huic duorum ligamentorum ope, vno crassiore latiusculo cotulae ad instar excavato ad acromii latus, altero tenuissimo, tereti ad principium

cipium processus Coracoidis annexum est. Facie collum respiciente leuiter concauum, opposita vero parum conuexum, vtrinque vero complanatum, cuius extremum alterum quod scapulam respicit latius, et aduncum euadit, alterum contractius et crassius: medium vero lineae latitudinem aequat, caeterum soliditatis eximiae particeps.

Os Scapulae durum, pellucidum tenuissimumque, costa inferiore clauiculae longitudinem aequans, latitudinem vero 4. linearum haud excedens, forma a reliquis animantibus in eo discrepat, quod planum superius conuexum deorsumque versus oppositam superficiem incuruatum, planum inferius contra sursum extrorsum versus superficiem externam inflexum sit cum margine sulcato: propterea duplex conuexitas seu testudinea superficies videlicet vna exterior iuxta longitudinem costae superioris, altera inferior iuxta costae inferioris longitudinem efformatur. 2. duplex spina, vna naturalem situm obtinens, altera inuersa in opposita facie dorsum respiciente conspicua est: diceres duarum scapularum lateraliter sibi iunctarum compagem iunctionemque esse, quoniam vtrinque duae cavitates infra et supraspinatae efformantur. Spina inuersa dicta, a basi incipiens, ad lineae altitudinem excrescens et processu acromio carens prope ceruicem euanescit. Altera vero situm naturalem obtinens non solum ad 2. linearum altitudinem excrescit, sed processu gaudet

Tom. V.

Gg

insi-

in signi supra caput ossis humeri eminente et admodum amplo, ad quadranguli figuram fere accedente; costae denique superioris extremitas cervici proxima in insignem crassum et tricornerum processum (vulgo processus coracoïdes) terminatur. Duo superiora cornicula alterum longius alterum brevius, parum incurvata fulcoque intermedio disiuncta, admirabili ratione ossis humeri cum scapulae ceruice cotyloide, iunctioni inseruiunt: Tertium vero corniculam, mediante ligamento, iunctionem cum clavicula prope eius extremum efformat.

Os humeri humano perquam simillimum est, nisi quod protuberantiae capiti laterales proportionem excedere visae sint.

Ossa vlnae et radii ad eundem modum quo in vulgari Sciuro, Lepore, Vulpe, Echino etc. conformata et disposita sunt, videlicet situ minime plano seu a latere, sed vnum super alterum: Os radii anteriorem, os vero vlnae posteriorem locum tenens 2. Eadem ossicula, more aliorum animalium, ab vno extremo ad alterum a se inuicem haud debiscunt: Os enim vlnae, circa medium ossis radii haerens, ac eoque tantum debiscens, subito ei adnascitur, et spinæ piscium similis cum eo concrescit et evanescit: Os dices bifidum, circa medium in 2. portiones inaequales diuisum, quarum altera tenuior os vlnae, crassior os radii ordine inuerso constituit: Nam quod
sum

ma admiratione dignum est, eorum ossiculorum ordo seu constitutio ordinaria sic immutata visa est, ut os ulnae ossis radii speciem, os contra radii speciem ossis ulnae referat: os enim brevius et subtilius quod 12. lineas longum, spinaeque piscium tenuioris intus sulcatae aemulum est, superiore suo extremo duplici rostro siveque sigmoideo ad ossis humeri trochlearem processum accommodato, praeditum est. Os contra longius et crassius 16. linearum longitudinem aequans, radiumque mentiens superiore extremo, quod teres et excavatum est, ossis humeri inferius extremum excipit, ob quam rationem potior pars trochlearis processus, radio inarticulata est, postica tantum eius parte in sinum recepta sigmoideum ossis ulnae, cuius adeo alterum rostrum, quod inferius est, propter dictam radii oppositionem, quando cubitus flectitur, sinum ossis humeri anteriorem attingere minime potest, alterum contra rostrum more aliorum animalium sinum posteriorem absque ullo impedimento ingreditur. In eiusdem ossis radii extremo inferiore id pariter animadversione dignum est, quod praefata extremitas ad ossium carpi receptionem sola inseruiat.

Tam ossicula carpi plurima, quam metacarpi pollicis, digitorum unguiumque, structura cum praefatis animalibus convenire visa sunt.

G g 2

Ad

Ad latus externum carpi ossiculum prominet, cornu acutum referens, osseae tamen et solidissimae substantiae, leuiter inflexum, diametro in principio 3. lin. et in fine dimidiam, longitudine vero 16. lineas aequante, cuius basis seu principium bicornis, hoc est duplici rostro cum sinu inter medio constans, ei quod diximus lateri externo carpi annexum est, caeterum ab omni alio nexu liberum, praefatis expansionibus aliformibus interiacens, suo tantummodo apice ad fasciculi fibrosi supra descripti extremum alligatum est. In eiusdem ossiculi gratiam, duo alia in *vola ossicula* minima ad carpum pertinentia et *extra ordinem* sita exstant, alterum transuersim positum ac pollice firmatum, alterum radii extremo annexum et oblique cum praecedenti ossiculo copulatum, quae ambo ad angulum acutum inuicem coeuntia a sinu ossiculi excepta, rostrisque eiusdem firmata, eam articulationem admirabilem efficiunt, qua praefatum ossiculum variis motibus edendis aptum et idoneum redditur.

Ea, quae haecenus breuiter exposita sunt, videlicet incredibilem leuitatem animalculi fere totum quantum membranacei, expansionumque cutanearum tenuissimarum leuissimarumque ossiumque ad eas spectantium singularem fabricam connexionemque attentius consideranti, ratio, opinor, qua eiusmodi animalculum in altum efferri suspensoque in aere corpore aliquamdiu certum

volandi actum exercere valet, minus obscura cen-
feri debet, quamvis inter eam et volucrum con-
stitutionem, magnam dissimilitudinem intercedere
fatendum sit; cum Vespertione contra, ob ana-
loga organa, ingentem conformitatem animaduer-
tere fas est. Quare per latus in utroque ventris latere
conspicuas telas summa flexilitate et tenuitate prae-
ditas eumque in modum dispositas, ut quemadmodum
alae avium ad pectus accommodantur retrahun-
turque, rursusque a pectore diducuntur et dilatan-
tur, eae pariter ad contractionem aequae ac dila-
tationem proclives sint, per telas inquam prae-
memoratas futuram esse corpusculi animalis in aëre
suspensionem progressionemque; censendum est, quan-
do per crurum subitam et velocem extensionem,
qualis in saltu et cursu accidit, eodem momento ab-
ductio et complanatio earumdem oritur, qua prior
easdem contrahens et complicans, videlicet actio
vis fibrarum e dorso ad telas tendentium superatur;
nam incedente aut quiescente animalculo, per ea-
rum fibrarum actionem telae sursum reuocatae ad
latus ventris sese accommodant, ne pendulis aut
fluctuantibus illis vel ipsae laederentur, vel inces-
sus difficultas auferretur; Eodem tempore, quo
extensis per saltum cruribus corpus in altum ele-
uatur, telaeque iis quasi fulcris annexae etiam com-
planatae praefatam corporis suspensionem adiu-
vant, ossiculum seu cornu longum et acutum su-
pra descriptum ad externum manus latus promi-
nens, eidem operationi apprime inseruit; Nam

G g 3.

quans

quum articulatione admodum mobili cum carpo polleat, qua sursum deorsum, antrorsum et retrorsum sese conuertendi facultatem obtinet, eius functio similis est *Remigatiōni*, quandoquidem per varias et velocissimas eius particulae agitationes tractationesque, telarum eam arcte amplectantium robur firmitasque ad percutiendum verberandumque aërem non solum augetur, sed etiam regendo, dirigendo, et variis modis inflectendo, ista in aëre progressio perficitur, quorum motuum instrumentum praeter musculos carpi, is praecipue fasciculus fibrarum summo eiusdem particulae apici alligatarum, vt primarium censei meretur.

Tantum pro hac vice, speciminis solummodo gratia, de structura exteriori *Quadrupedis volutilis Russiae*, quae omnino digna sunt, vt intimius persequantur elaborenturque, quoniam, vt ait *Seneca* quando de Naturae mysteriorum studio imprimis de terrae motuum causis locutus haec subiicit: Nulla res consummata est dum incipit, nec in hac tantum re omnium maxima ac inuolutissima, in qua etiam cum multum actum erit, omnis aetas quod agat, inueniet, sed in omni alio negotio, semper a perfecto suere principia. * Quamobrem, vt de partium internarum constitutione earumque rudi admodum descriptione, quam hic subiicio, sententiam meam aperiam, eam pro elaborata et Naturae satis consentanea descriptione,
ad

* L. An. Senec. Natur. Quaest. L. 6. c. 5.

ad quam multum sedulitatis, peritiæ et contemplationis adhibitum sit, minime haberi volo, sed hac vice solummodo generalem rudemque conspectum partium internarum exhibere animus est.

1. Adeo tenuia sunt et pinguedine destituta integumenta, ut per illa partes subiectæ fere transluceant.

A cerebro molli et copioso, eiusque structuræ interioris nec non organorum sensoriorum inuestigatione studio abstinui.

In orbitæ inferiori parte, e glandula ibi locata ductum excretorium iuxta dentes molares maxillæ superioris hiantem, qui a *Cl. Nuckio* quartum appellatur, observavi.

Ductus excretorius e glandula maxillari claviculam fere attingente ortus, sub lingua defluens pariter in conspectum venit.

Foramen linguae vulgo cœcum dictum, distincte apparuit. Tantum de capite.

2. In collo rem quæ sine exemplo visa est, et cuius contemplatio summam admirationem excitat, a me quidem animadvertam, sed tanta diligentia quanta res postulabat, haud persecutam fuisse fateor, silentio tamen prætermittere haud licet. Primo Laryngis operculum ad linguae radicem sic
retra-

retractum erat, ut primo intuitu praefata functio operculi aegre locum obtinere videretur: eius enim apice, sine ullo cum cartilagine thyroide neku, ultra eius oram quo alias initium Epiglottidis est, vix protenso, reliqua epiglottidis substantia valvulam sigmoideam e linguae tunica efformatam, tam substantia quam forma mentitur, ad quam utrinque exilis musculus e cartilagine arytaenoide ad apicem extremum sese extendens conspicuus est. Porro in eiusdem particulae perlustratione viam seu ductum geminum sub praefata Epiglottide in linguae radicem substantiamue penetrantem offendimus. Sed attendite ad Tracheae compagem, quam more aliorum animantium tam terrestrium quam volatilium, ex annulis nequaquam constare, sed ex variis anomalis et nescio quibus characteribus signatam et conflata esse animaduersione dignissimum est. Certe nihil elegantiae tam coloris coccinei quam figurae praefatorum characterum, quod peritissimi *Chalcographi* opus esse diceret, super addi posse existimo. Omnes qui rem contemplati sunt, illam ut diximus vere se habere confirmauerunt. Alii vero qui audient tantum, vereor ne inter fabulas recenseant culpamue vel in me vel in pictorem reiciant, quale iudiciorum genus hodie satis frequens est, ubi phaenomena naturae minus ordinaria euulgantur. Vtcunque res cedat, eorum characterum formam ab Academiae pictore bona fide

fide delineatam hic exhibendam esse duxi, donec eius rei penitus illustrandae occasio offeratur. Sed quod maxime lepidum silentioque haud praetermittendum est, figura nouem characterum hic delineatorum, totidem litteris in Russica Grammatica vŕitatis exacte responderet. Sed de hac re fatis.



In pulmone in quo nihil memoratu dignum oblatum est, an bronchia similibus characteribus signata essent nec ne? inuestigare conatus fui: Ea vero cum annulis tum characteribus carere, nudasque fistulas esse visa sunt.

In corde quod auelanae instar rotundum faculoque inuestitum erat, 1. valvularum mitralium defectum. 2. cuiusdam foraminis oblongi, in dextro sinu more foraminis oualis in venam pulmonalem tendentis praesentiam obseruasse mihi visus sum: tametsi fateor vtriusque obseruationis veritatem cauere nolim.

Postremo, omento, liene, glandulisque mesaraicis Abdomen vacuum: Intestina ad modum taeniarum in longum complicatarum, vel organorum instar musicorum disposita, ac inter illa coecum figurae Y: Ambo ductus biliaris videlicet et pancreaticus simplici intestinorum inflatione subito sese manifestantes: Duo fibrarum plana vnum a dextris, alterum a sinistris, ventriculi

Tom. V.

Hh

triculi

tricoli orificium sinistrum amplexantia: Glandularum renalium cauitas perampla: hepatis in plures lobulos diuisi moles ambo hypochondria occupans punctaque rubella candidae substantiae intermixta illud variegantia et a *Malpighio* in Sciuro vulgari obseruata. *vid. Exerc. de hep. p. 11.* Postremo, in Renibus vice plurium caruncularum, vnica papilla foramen peluis instar Epistomii obturans: Vesicae vrinariae longissimum collum cum accumbente profata: ea inquam sunt, quae obiter in partium internarum in hocce animalculo perlustratione absque sedulo examine oblata sunt.

DE
NOTIS CHARACTERISTICIS
OSSIVM.

AVTORE

Jos. Weitbrecht.

Tabula IX. **D**Vm circa dealbationem ossium ad Sceleta con-
ficienda destinatorum occupatus eram, acci-
dit, quod fieri solet, vt illa nonnumquam mi-
nora praeprimis, a vento, aliaue causa
disiicerentur, atque inter se confunderentur. Haec
res ab initio vehementer me torfit, quia suum
cuique locum denuo assignare sine errore non erat

fig. 1.

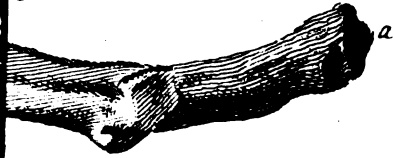


fig. 2.

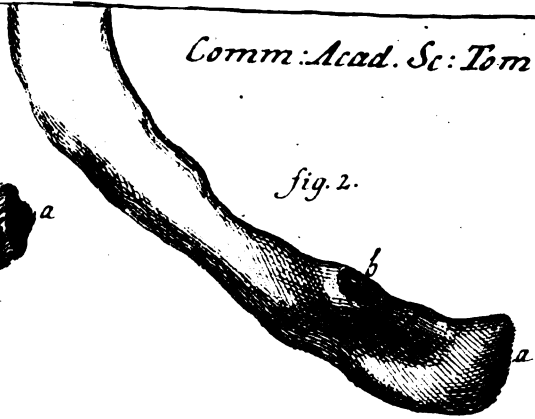


fig. 4.

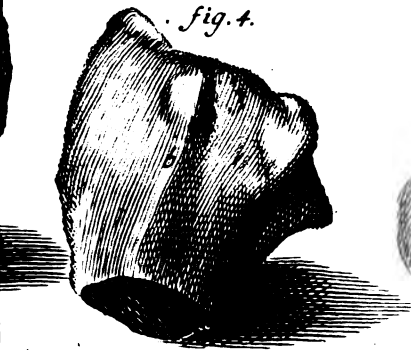


fig. 5.



fig. 6.

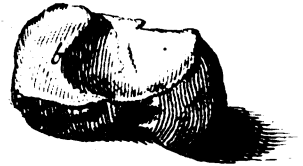


fig. 8.



fig. 9.



fig. 10.



fig. 11.

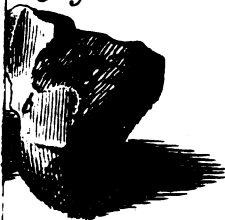


fig. 13.



fig. 14.



fig. 15.



in mea potestate, nec definitiones autorum ad ossa distinguenda mihi sufficiebant. Cogitavi igitur de *methodo*, qua huic incommodo mederer; cumque illa nimis rudis et anatomico indigna videretur, quae ossa signo quodam notare, aut vinculis carceribusque coercere iubet; *notas* quasdam *characteristicas* ex accurata ossium ipsorum cognitione hausas mihi familiares reddidi, incitatus exemplo *Vesalii*, qui, vti de se in *Hum. Corp. Fabr. L. I. Cap. XL.* testatur, *longo indefessoque spectandi usu edoctus etiam obuinctis oculis cum sodalibus interdum deponere ausus fuerat, vnius mediae horae spatio nullum os ex tot aceruis, in coemeteriis, porrigi posse, quod, cuiusmodi esset, tactu non diiudicaret.* Nec meus me fefellit labor. Diligenti enim contemplatione tales exquisiui *notas*, quarum ope, ossa *Sceleti* quomodocunque inter se mista, facili negotio in ordinem redigere didici. Iuuabunt ista forte et alios: dabo igitur descriptiones harum notarum et delineationes. Suppono autem, qui haec in vsus suos conuertere velint, cognitione ossium iam imbutos esse quodammodo: non enim osteologiam scribo, sed ossium solos characteres opto.

I. Circa *caput* non opus est, vt diu haeream. Raro enim accidere solet, vt illud in plures quam in duas partes diuidatur, quae etiam facillime sibi iterum imponuntur. *Caput* autem integrum in sua ossa, ex quibus *caluaria*, *nares*, *maxillae* componuntur, resolvere partim in *Sceletis* conficiendis

Hh 2

locum

locum non habet, partim vero. plus artis, patientiae atque imaginationis requirit, quam quod a tyrone expectari possit. Dentes quidem inter coquendum nonnunquam excidunt: facile autem redaptantur, si ad discrimen inter dentes incisorios, molares, et caninos notissimum, itemque ad proportionem, quae inter alueolos dentesque intercedit, attenderis.

II. In *vertebris* ordinandis in usum trahenda est generalis illa diuisio, quatenus in cervicales, dorsales et lombares dispescuntur. Singulis enim speciebus sui peculiare sunt characteres. Cum enim id in spina dorsi in genere observandum sit, ut *a principio ad finem*, quoad crassitiam et robur semper *crescat*, aliter ac in brutis, in quibus eodem ordine ad lumbos usque *decrescit*: propterea vertebrae colli sunt omnium minimae, lumborum sunt maximae, dorsales autem magnitudinem mediam seruant; sed ita, ut quo magis descendant, eo magis etiam crassescant. Corpora vertebrarum colli, pro altitudine sua *latiuscula* sunt, corpora vertebrarum dorsi superiora eandem videntur seruare proportionem; mox vero altitudo et latitudo sibi *aequalis* est; tam, quae sequuntur, apparent *altiora* quam *latiora*; infima autem et corpora vertebrarum lumbarium denuo *latitudine* maiori pro altitudine sua gaudent. Vertebrae praeterea dorsi ad corporum suorum margines laterales leues *sinus* habent, quibus costae implantantur. Vertebrae colli habent *processus*

cessus spinosos, *breuissimos* et plerumque bifurcos, excepta septima et prima: *Dorsales* habent eosdem processus *longos*, ad corpus valde oblique positos, apice suo ad horizontem spectantes, exceptis duabus ultimis, quae iam rectitudine sua insequentes lumbares aemulantur: *lumbares* enim eosdem habent processus breuiores, latos, ad angulum rectum perpendiculariter positos. Omnem denique ambiguitatem tollunt processus *transuersi*. In vertebrae enim *colli transforati* sunt pro transmittendis vasis cervicalibus; in *dorsa* ad apicis latus leuiter *exsculpti* et ob cartilaginum vestigia laeuigati sunt propter applantatas utrinque duodecim costas; in *lumbis* autem *simplices* sunt, recti, et potissimum acuti. Ne vertebrae inuersim ponas, ut superiora respiciant, quae deorsum spectare debebant, signum peti potest, partim a processibus spinosis, utpote qui maximam partem ex duabus quasi laminis ad angulum oblique spectantibus compositi sunt, partim vero, et quidem securissime omnium, a processibus superioribus inferioribusque, qui sinus suos superficiales, quibus se mutuo recipiunt vertebrae, ita positos habent, ut in *superioribus extrorsum*, in *inferioribus* autem *introrsum* spectent; quae quidem compages in spina naturaliter adhuc cohaerente oculos mirifice delectat. Haec de vertebrae in genere. Ut vero quaeuis species sigillatim collecta in ordinem reducatur, partim tentando inuenies, quae sibi proxime adiacere debeant: par-

tim ad ea confugiendum est, quae superius de magnitudine corporum, et reliquis vertebrarum differentiis diximus: partim adminicula quaedam particularia conquirenda sunt. Et quidem in vertebrae colli ad haec attende: Vertebra prima *caret corpore*, et processum *spinosum* habet *nullum*, septima habet *longissimum*, secunda dente suo satis distincta, *crassissimum*; praeterea in vertebra prima illi sinus, qui processus ossis occipitis recipiunt, et profundius cauati, et longius *protracti* ac *lunati* quasi sunt, quam quibus cum vertebra secunda articulatur. Reliquae colli vertebrae, quo magis descendunt, eo et *tenuiorem* spinam habent, et *longiorem*. Ordinem vertebrarum dorſi imprimis adiuuant illi *sinus*, quos costarum gratia corporibus inſculptos ſupradiximus. Quia enim costae, exceptis prima et duabus vltimis, applantantur ad margines et confinia corporum duorum; hinc quaeuis vertebra *duos sinus* habet, vnum in limbo superiore, alterum in inferiore; sed quo magis vertebrae descendunt, eo magis quoque costae ab illo confinio recedunt, et sinus illi in limbo inferiore decrescunt, donec in tribus vltimis plane euanescant, et costa duodecima in vertebra duodecima sola, circa medium corpus fere illius requiescat. Atque horum *sinuum augmenta* et *decrementa* in redigendis spondylis dorſi plurimum te iuuabunt. Vertebrae lombares praeter crassitiem corporum sensim auctam nullas peculiare notas habere videntur, nisi quod *tertia* seu media processum transuersum habeat

beat *longissimum*, in reliquis autem ille pro distantia a tertia augeatur et decrescat.

III. Circa *os sacrum* nulla est remora. Neque enim quemquam adeo rudem ac ineptum esse existimem, ut illud ita reponat, ut superficies altera, prominentiis suis ad modum processuum spinosorum exasperata versus peluim sit directa. Ossicula coccygis nonnumquam ab osse sacro rumpuntur; illorum autem superficies, quae peluim respicit, quadantenus *plana*, opposita e contrario, *convexa* est.

IV. In *costis* opera danda est, ut illas primo omnes, quae ad *idem latus* pertinent, colligas, deinde, *quo ordine* in quouis latere se inuicem sequantur, attendas, tertio, ut quaenam collectio ad *dextrum sinistrumue* latus pertineat, distinguas. Ut finem *primum* obtineas, scito, omnes costas eiusdem lateris homogeneitatem quandam figurae servare, ita ut partim *curvatura* extremitatum sursum deorsumue spectans, partim *acutum inferius* labrum partim vero, et imprimis quidem monticuli illi, qui articulationi costarum cum processibus transversis vertebrarum inseruiunt, simili directione ac positione, simili modo gaudeant. Selige igitur aliquam costam, e. gr. *longissimam*, et cum hac reliquas confer: si dicta omnia simili modo se habent, ad idem illud latus, pertinent; sin minus, lateri opposito erunt adscribendae. Ordo autem
costa-

costarum talis est: *Prima* est breuissima, *latissima* et curuitate gaudens maxima; tum quae sequuntur, semper posterior priore *maiolem* curuaturae *angulum* habet, siue ad rectitudinem inclinatur, ita, ut vltima propemodum aequae quidem breuis ac prima, sed tenuis, et tantum non recta sit. Deinde a prima ad quintam longitudo semper *crescit*; quinta et sexta plerumque *aequaliter* longae; a sexta ad duodecimam longitudo iterum *minuitur*; quae duo, *curuatura* nimirum et *longitudo*, simul considerata ab errore satis cauebunt. Est tamen alia quaedam nota, quae ab *extremitate posteriori* desumi potest. Illa enim, quateus sub terminis articulationum binarum cum corpore vertebrarum et harum processu transuerso, comprehenditur, in quatuor superioribus costis, tenuis, *teres* et *longa* est, at in succedentibus semper pro ratione ordinis crassior, *latior* ac *breuior* euadit. Atque haec quidem observationes in decem mediis costis potissimum locum habent. Costae autem prima et vltima tantisper seponendae sunt, donec innotuerit, quaenam collectio ad hoc vel illud latus pertineat; id quod sequenti modo expiscaberis: omnes viginti aut octodecim (nam et in vndecima haec nota nonnumquam deficit) ita coram te reponas, ut extremitates posteriores dexterarum tuarum, anteriores autem sinistrarum, et quidem *auersum* sitas, respondeant: quae in hoc situ locum articulationis cum processu vertebrae transuerso *conspiciendum* praebent, ad latus *dexterum* pertinent; quae vero

Tabula IX.
Fig. 1. 2.

vero locum illum *occultant*, lateri *sinistro* affigito; similiter in tali positione sulcus labri inferioris *ibi* apparet, *hic* occultatur. Porro in memoriam reuocandum est, quod *súpra* dixi de vertebris, quod ad corporum suorum margines leues sinus habeant, quibus costae implantantur, quodque haec costarum cohaesio ad duorum corporum *confinia* fiat, et vna eademque costa binis simul vertebris adplicata sit. Obseruabis enim, tuberculum illud costae *ex. gr.* septimae, quod finum corporis vertebrae septimae subit, magnitudine et latitudine superare alterum, ad angulum oblique ipsi adiacens, quo eadem costa sinulum ad marginem corporis vertebrae sextae intrat. Quia vero haec costae cum vertebra superiore cohaesio in duodecima, et nonnumquam in vndecima quoque, deficit, imo et articulatio illarum cum processibus transuersis obliteratur; hinc in harum duarum costarum ordinatione facile errabis, cauebis autem, si ad angulum *tuberosum* adtendis, qui iuxta articulationem primariam situs eo inseruit, vt costae cum praecedente vertebra per ligamenta connectantur. Tandem costae primae ita a se inuicem discernuntur: repone nimirum eas coram te, vt extremitas posterior manui tuae dexterae, anterior autem sinistrae respondeat: tum quae extremitatem posteriorem *fursum* vergentem habet, *sinistro* lateri adscribes, quae autem plane iacentem monstrabit, *dextro* lateri adiudicabis. Praeterea latus costae primae internum, pectori obuersum, conuexitatem

Tom. V. Ii quan-

quandam prae se fert, externum vero sulcōsum est.

V. *Sternum* in duo plerumque ossa diuiditur, quorum superius ensis *manubrio* ab autoribus aequiparatur; alterum vero *gladius* dicitur. Illud triangulare quodammodo, exterius cavitatibus et monticulis exasperatum, intus vero planum est; hoc vix pollicem latum, sex autem longum in cuspidem nunc vnum nunc duos desinit, cui *cartilago ensiformis* adhaeret; *extus* similiter *asperum*, *intus leue*, planum et aliquatenus concauum est.

VI. *Scapula* dextra a sinistra distinguitur: si illarum superficiem externam ita respicis, vt spina *oblique sursum* vertat, si enim ad dextram spectat, tum et dextra illa scapula est; si ad laeuam, laeua; quod idem ex positu cavitatis glenoidis pro recipiendo humero addiscitur.

VII. *Claucula* duas extremitates habet, quarum, quae *rotunda* est, *sterno* applantatur, plana autem processui coracoidi scapulae incumbit. Haec planities in superficie accumbente *aspera*, in externa laeuis est. Ne autem dexteram pro sinistra accipias, scito, extremitatem rotundam habere angulum protuberantem *versus gulam*, quo per ligamentum interclauiculare connectuntur; deinde mox corpus clauiculae incuruari, ita, vt longe a gula deorsum recedat, conuexitasque costas respiciat; tum vero denique collum versus reflectatur.

VIII

VIII. *Ossa innominata*, quae in sceletis adultorum in vnum os coalita deprehenduntur, primo *acetabulum*, id est, cavitatem insignem pro articulatione femoris habent, et quidem extrorsum spectantem; deinde ileum externe vbique laeue est, interne autem, et quidem versu posteriora pro receptione ossis sacri plurimis exasperationibus gaudet. Neque minus incisura magna inter os ilei et ischii posteriora respicit. Quae quidem notae ad discernenda dextra a sinistris sufficiunt, si forte disiuncta fuerint.

IX. *Ossa humeri, cubiti, radii, femoris, tibiae, fibulae* hanc inter se similitudinem habent, vt omnium sceleti ossium, pro latitudinis ac profunditatis ratione longissimae sint. Notae autem peculiare, quibus inter se distinguuntur, sequentes sunt. *Femur* et longissimum et crassissimum est. *Superne* vnum caput ad angulum obliquum sursum prominet a corpore, et ex opposito eius latere processum insignem, qui *trochanter maior* dicitur, habet. In *inferiore* extremitate duo sunt capita, quibus cum tibia articulatur. Corpus ipsum satis *teres* quantenus a linea recta deflectit, superiusque ac inferius incuruatur, ita vt conuexitas anteriora respiciat. Atque haec curuatura tibi pro norma erit, in assignando latere: si enim contemplando illam, caput superius magnum tibi a dextris erit, os quoque dextrum habebis; si a sinistris, sinistrum; praeterea, quod inter duo capita inferiora

Ii 2

exter-

externum est, superficiem suam cartilagine incrassari solitam paullo *altius* positam habet, quam *internum*, et hoc quoque magis *deorsum* producitur.

X. Ossa *tibiae* tam extremitate sua superiore, utpote pro corporis sui ratione crassissima, duabusque cavitatibus glenoidibus pro receptione capitum femoris donata, quam protuberantia *angulosa* lineari, secundum longitudinem ossis anteriorem producta, et cuius contusionem tam difficulter ac dolorose ferimus, nota se praebent. Extremitas inferior basin suam, qua *talum* recipit, propemodum *quadratam* habet, et ad latus *internum* alteri scilicet e regione oppositum processu quodam crasso ac lato munitur, qui vulgo *malleolus interior* audit, et in parte antica in apicem breuem desinit. Cum igitur memorata *protuberantia* acuta longitudinalis *anterius*, *malleolus* autem *interius* ponatur, id tibi notam *dextrae* ac *sinistrae* tibiae sufficientem praebet, quod et porro ex cavitatibus supra dictis in extremitate superiore, sub qua antea in medio protuberantia insignis pro implantatione tendinum, extendendae tibiae inseruientium conspicitur, elucescit; cum enim caput femoris *internum* longius *deorsum* produci diximus, necessario illius causa cavitatis tibiae interna, illi capiti respondens, profundior quoque esse debuerat.

XI. *Fibula* plurimum facessit negotii. A reliquis ossibus sui similibus quidem tenuitate sua, et
figura

figura corporis prismatica distinguitur: suo autem quaevis lateri assignatur notis sequentibus. Extremitatum duarum illa, quae *crassior* et brevior ac rotundior est, (si quidem, quod angulosum est, rotundum dici potest) *superius*, quae autem *lterior* tenuiorque est, *inferius* cum tibia connectitur; neque minus *facies* illa, qua inferius ad latus tali applicatur, *spatiosior* est et amplior, quam ubi superius tibiae adiacet; porro *fibula* locum a corpore aversum obtinet, siue, *exterior* posita est. Tandem quia corpus prismaticum esse diximus, *tres* lineas seu *angulos* obtinuit, quae *tria latera* terminant; quae autem harum linearum longitudinalium maxime *obtusa* et rotunda est, *exteriora* occupat, quae maxime *acuta* est, *anterior* prospicit. Denique extremitas superior in apicem obtusum e *medio* prominentem desinit, inferior autem apicem similem non in medio, sed a *latere*, et quidem *posticitus* descendentem obtinuit. Atque his respectibus observatis, quae dextro femori applicari debeat *fibula*, quae sinistro, dignosci potest.

XII. Viciniae gratia, quae de patellis dicenda sunt, hic inspergamus. Has quidem *Vesalius* L. I. c. 32. tam eleganter ac perfecte descripsit, ut secundum illius ductum, eas quam facillime distinguas: ne tamen a nobis intactae relinquantur; ad haec tria totum illarum discrimen reducamus. Primo, illarum superficies interior, qua femori ac tibiae applicantur, *laevis* est, et in medio protube-

rans, exterior contra *aspera* est, foraminulis scatens longitudinalibus; deinde triangularis quaedam *appendicula deorsum* spectat, cum superne corpus satis aequabile sit; denique protuberantia memorata superficiem internam diuidit in duos quasi *sinus* superficialios, quorum qui *latior* est, *externo* foemoris capiti applicari debet. Atque his notis adiutus, quae dextera sit, quae sinistra, mox intelliges.

XIII. *Brachium* tria ossa constituunt, os *humeri*, *ulna* et *radius*; horum longissimum et crassissimum est os *humeri*, quod imprimis in extremitate superiori capite *globo* munitum est, quo in cavitatem glenoidem scapulae possit immitti, quale nullum aliud os habet. Hoc autem caput corpori ossis non perpendiculariter insidet, sed ad latus quasi appositum est, siquidem et memorata cavitatis non deorsum sed extrorsum spectat. Ad distinctionem dextri a sinistro tres notae satisfaciunt: *sulcus* proxime ad caput corpori ossis secundum longitudinem eius inscriptus, et recipiendo tendini longo musculi bicipitis destinatus; *processus* maior ad latus alterum iuncturae inferioris; et *fouea* profunda pone dictam iuncturam, motui olecrani finem ponens. Quod si igitur os humeri ita locaueris, ut caput et processus maior interiora, sulcus anteriora, fouea autem posteriora respiciant, in loco conuenienti reposuisti.

XIV.

XIV. Ossa *cubiti* similitudinem quandam inter se habent; nam corpora illorum sunt eiusdem fere crassitiei, eiusdem quoque propemodum figurae cum spina acuta longitudinali, qua se mutuo respiciunt; et, ni *vlnae olecranium* appositum esset, eiusdem quoque longitudinis. Ambo gaudent apophysi altera *crassa*, altera *tenui* et rotunda, sed ordine inuerso, et figura diuersa. *Vlna* enim in superiore extremitate cavitatem insignem, *sigmoidem* dictam habet, a latere postico, processu ingente, quem iam aliquoties *olecrani* nomine allegauimus, munitam; inferior autem *vlnae* extremitas in capitellum *globosum*, cum breui processu *styloide* laterali definit. At *radius* superne apophysin habet *rotundam*, vbique aequalem, cum cavitata glenoidae, qua tuberi in iunctura ossis humeri sibi destinato insidet, et ad omnes motus, flexorium, pronum et supinum aptus redditur; inferne autem latera eius apophysis fovea *duplici* per lineam in medio protuberantem discreta ordinem carpi superiorem recipit, et manus extremae motum agilem reddit. Superne ad latus processus *vlnae sinulus* insculptus est, ad recipiendam *cristam*, qua radii capitulum superius quasi circumuoluitur; inferne vicissim in radio simili modo *sinus* excauatus est, recipiendi *vlnae capitelli* gratia. Quibus obseruatis apparebit, quomodo ossa cubiti sibi inuicem immitti debeant. Ne autem *radius* sinistrum ad *vlnam* dextram applies: considera manum situ *supino*, tunc enim intelliges, *radius* obtinere locum

cum

Fig. 3. cum a corpore auersum, et respondere *pollici*, *planam* vero obuerti corpori et respondere digito auriculari. Quia vero talis proximitas circa iuncturam tantum cum osse humeri perpetuo constans sit, mutato autem situ manus supino in pronum illa inuertatur, hac ratione soli *vlvae* suum latus conuexiens assignatum manet; radii vero gratia hoc addendum, illius extremitatem inferiorem habere latus *supinum* siue *vlvae* manus respondens, *planum* et aequabile, *prorum* vero siue dorso manus continuum, *conuexum* crenisque ac sulcis *exasperatum* pro transmittendis dirigendisque tendinibus musculorum digitos extendentium. Ad quam proprietatem si attenderis, illa sola ab errore te praeseruabit.

Fig. 4.

XV. Ossa *carpi* ac *tarsi* id inter se commune habent, ut figuris gaudeant omnium totius sceleti ossium maxime irregularibus, inter se ipsa autem nullam plane conformitatem seruent; hinc vel hic solus character ossa *carpi* et *tarsi* a reliquis discernit. Ossa *tarsi* autem ab ossibus *carpi* vincuntur irregularitate et magnitudine; unde factum esse conicio, cur ossa *tarsi* peculiariora nomina ob figuras suas satis adhuc simplices a veteribus acceperint, ossa *carpi* vero nulla. Sed cuius ossi suum assignare locum memoriter, id non sine imaginatione pertinaci erit efficiendum. Tentabimus tamen aliquid in re perplexa, initium a *carpi* ossibus octo facientes. Ut sciamus, de quo osse sermo sit, retine-

tinebimus methodum veterum, qui ea primum, secundum, tertium etc. octauum dixerunt. Disperuntur in duos ordines, superiorem et inferiorem, qui se mutuo recipiunt articulatione ad enarthrosin quam proxime accedente. Quaterna ordinem conficiunt. *Primum* et *secundum* ordinis superioris, vbi cum radio cohaerent, *gibba* sunt, et per ginglymum cum illo articulantur; *Tertium* secundo applantatur ad latus a corpore *auersum*: *Quartum solitarium* cum tertio articulatur. Neque minus primum et secundum conficiunt ex opposito latere cavitatem *communem* profundam pro receptione ossium ordinis inferioris; *Tertium* cavitatem illam *complet*. Immittuntur autem in eandem ex ordine inferiore, imprimis os *septimum tubere* insigni; os *sextum* et *octauum* vero ad latera septimi posita caput pro implenda cavitae *adaugent*. *Quintum* cum primo et sexto iungitur, et recipiendo *pollici* destinatum est. Haec quatuor ossa ordinis inferioris quasi in arcu circuli posita esse videntur, et inferius superficies suas fere *triangulares*, non tamen planas habent, quibus quinque ossa metacarpi, superficiebus respondentibus coaptantur. His praemissis, ossa propius contemplabimur, incipiendo ab iis, quae in oculos luculentius incurrunt. Os *minimum quartum* est, semiglobosum, *vnica* iunctura seu vnico sinu gaudens pro receptione tertii. Os *octauum* imprimis *lingula* sua prominente, cui ligamentum annulare carpi internum adnascitur, discernitur.

scernitur. *Septimum* quodammodo pyramidale est, loco apicis in *tuber* insigne, globosum, desinens. *Os primum latum* est, et *oblongum*, in medio *cauatum*, pro recipiendo latere interno tuberis ossis septimi, extus *conuexum*, et duplici iunctura per sulcum transuersum distincta, tam pro sinu radii, quam pro osse quinto et sexto, eminens. *Os secundum* extus similiter *globosum* est, pro articulatione radii, intus vero *concauitatem lunatam* aequabilem habet, propter summitem eiusdem memorati tuberis, et complendae cavitatis communis gratia. His remotis restant *officula tria*, a quibus *tertium* imprimis superficiali et *ouali* iunctura cum osse quarto distinguitur. *Os sextum* vero *quatuor* sinibus seu excavationibus ad angulum non plane rectum positus quasi Trapezium format. *Os quintum* singularem iuncturam habet, quam alibi* descripsi pro articulo pollicis, et *fossulam* longitudinalem ad latus iuncturae pro transitu tendinis radiaei interni, versus volam, inter duas protuberantias, quarum altera intra confinia ossis primi et sexti se immittit, altera lingula ossis octaui opposita firmando ligamento annulari inferuit. Iam si in ordinem suum redegeris haec ossa, curandum est, ut, quae ad latus quoduis pertinent, colligas. In hoc autem partim plurimum adiuuenti afferent ea, quae iam diximus, et imprimis observatio iuncturarum pro ossibus metacarpi; partim vero ea, quae iam de singulis ossibus notamus. Sunt autem sequentia.

* Vid. Comment Acad. Imper. Tom. IV. p. 238.

Os *primum* quasi ex duobus compositum videtur, quae per *fulcum* supra memoratum distinguuntur. Repone igitur illud coram te secundum latitudinem suam, ut et conuexitatem duplicem, et *fulcum* respicere possis. Si ille *fulcus* a sinistra versus dextram oblique descendet, os sinistrum erit, si e contra a sinistra ad dextram oblique ascendit, ad *carpum dextrum* os illud pertinebit.

Fig. 5.

Offis *secundi* *cavitas lunata* alterum cornu habet *acutum*, alterum *latiusculum*, *acutum* in *dorso* manus apparet, *latiusculum* in *vola*. Ad *latus* *cavitatis* alterum est *sinus* leuiter *exsculptus*, similiter *lunatus*, ad alterum *sinus* propemodum *quadrangularis*: *sinus* *lunaris* offi primo *coaptatur*, *sinus* *quadrangularis* offi tertio. Hae *notae* *dextram* et *sinistram* determinabunt.

Fig. 7.

Fig. 6. 7.

Os *tertium* tres habet *iuncturas* pro *conne-*
xione cum *osse secundo*, cum *quarto*, et cum *octa-*
uo. Respice igitur simul ad *binas* *iuncturas* *pri-*
mas; si *tertia* *dexteræ* *tuæ* *respondet*, os *dextrum*
quoque est, si *sinistra*, *sinistrum*.

In *osse quarto* imprimis *rotundum* aliquod *tu-*
berculum *insigne* *protuberat*, versus *volam* *spe-*
ctans, pro *insertione* *vlaris* *interni*, et quo, *me-*
diante *ligamento*, cum *lingula* *offis* *octau* *con-*
iungitur; deinde in illo *tuberculo* *conspiciuntur*

Fig. 8.

vestigia insertionis fibrarum ligamenti annularis dicti; denique externe corpus huius ossis aequabiliter conuexum est, interne vero, volam versus, inter iuncturae marginem et corpus ipsum, sulcus aliquis leuis latiusculus conspicitur; quo supra dictum tuberculum tanto magis eleuatur. His obseruatis, vnumquodque loco suo proprio reseruari poterit.

- Fig. 9. Os *quintum* pro pollice habet in iunctura sua *sinus* duos, angustiores et profundiores in latere dorsum manus respiciente, *ampliores* in latere opposito. Neque minus fossula seu *sulcus supra* memoratus conspici debet superius in vola. Talis situs determinabit dextrum et sinistrum.
- Fig. 10. Os *sextum* sinus habet quatuor, qui *maximus* est, metacarpi ossibus sustinendis inseruit, et *lunatus* est, ita vt cornua digitum medium respiciant. Cornu autem in *vola* positum *acutius* est; in dorso, latius.
- Fig. 11. Os *septimum* basin pro sustinendo metacarpo propemodum triangularem habet, ita, vt apex in vola terminetur. In latere autem altero singularis *iunctura* lambdoides apparet secundum *longitudinem* ossis *producta*, et iuncturae simili in osse octauo, cum quo articulatur, correspondens.
- Fig. 12. Os *octauum*, si ad quadrangularem basin, cui duo ossa metacarpi insistent, respexeris, *Lingulam* suam

suam aduncam ita positam habet, vt versus pollicem inclinetur, et cavitatem illam conficiat, in qua tendines flexorum sub ligamento annulari reconduntur.

XVI. *Tarsus* habet *septem* ossa. Primum *calcaneum* maximum est; secundum *talus*, seu *astragalus*, sequitur magnitudine, inter calcaneum ac tibiā interiācēt, et imprimis *globoso* capite distinguitur. Dein pari passu ambulant os tertium *nauculare* seu *scaphoides*, et quartum *cuboides*; illud *oblongum* cavitāte sua sphaeroide se prodit, hoc *angulosum* est; illud caput astragali recipit, hoc sinui calcanei se immittit. Reliqua tria *cuneiformia* iuxta se posita ossis nauicularis faciei triplici applicantur, et cum tribus metatarsi ossibus articulantur. Illorum, quod *maximum* est, *interius* iacet et pollicis respondet, *minimum* duo reliqua *interiacens* digito secundo; quod magnitudinem mediam seruat, exterius digito medio. Quartum et quintum os metatarsi recipit cuboides. *Calcaneum* igitur infimam ac *posticam* pedis extimi partem constituit, *talus* *superiorem*, ossa *cuneiformia* *anterius*, *scaphoides* autem et *cuboides* situ *medio* locata sunt.

Calcaneum habet processus *quatuor* notabiles, *posticum*, cui insistimus; *anticum*, cui os cuboides applicatur, *superiorem* et *lateralem* pro receptione tali. Inter processum lateralem et posticum cal-

calcaneum quasi *excauatum* videtur, cum in latere opposito aequabiliter tuberosum sit; ista *excauatio* semper in *interiore* parte pedis debet esse constituta. Obseruato igitur respectu processuum caeterorum, si *lateralis* processus tibi a sinistris est, calcaneum ad pedem dexterum pertinet, si a dextris, ad sinistrum.

Astragalus seu *talus*, iuncturas quatuor habet prae reliquis notandas: *caput anteriora* prospicit; iunctura *concaua inferior calcaneo* immittitur; *superior conuexa quadrangularis* tibiā sustinet; *lateralis triangularis* fibulam recipit. Cum vero fibula in externo pedis latere posita sit, hinc illa iunctura triangularis similiter *exteriora* occupare debet; in dextro igitur pede a dextris, in sinistro a sinistris erit.

Os *saphoidis* margo superior atque interior crassus est, et apophysin magnam lateralem habet; quae quidem *apophysis* si ceteris rite positis *interius* apparet, cuiam pedis os annumerandum sit, satis patet.

Os *cuboidis* iunctura posterior, qua ad calcaneum apponitur, faciem fere *plani* semicirculi habet, cuius arcus exteriora occupat. Neque minus iunctura anterior, quae cum metatarso copulatur, ad iuncturam posteriorem *inclinatur*, *angulo* similiter *extrorsum* producto, in dextro pede dextrorsum, in sinistro sinistrorsum. Facies superior *plana* est, inferior autem *sinuosa* et protuberans.

Os

Os *quintum*, seu *cuneiforme* maximum, anteriorem iuncturam habet *lunatam*, cui primum os pollicis adaptatur; *cornua extrorsum*, siue reliqua cuneiformia respiciunt. Ceterum hoc os si cuneiforme nomen meretur, inuerso certe situ positum est, acie tenui sursum, corpore autem crasso deorsum spectante. Est autem in latere suo conspicuo conuexum, in occulto concauum, ut rotunditati pedis succurrat; ibi quoque iuncturam *lambdoidem*, iuncturae simili in osse *sexto respondentem* exhibet, cuius quidem latus alterum superius *parallele* antrorsum currit, alterum perpendiculariter descendit.

Fig. 20.

Fig. 23.

Os *sextum* et *septimum* vere cuneum aemulantur; corporis facies *lata sursum* spectat, acies vero deorsum. Iuncturae, quae inuicem copulantur, sunt ad latera partis posticae. Iuncturae autem anticae et posticae sunt triangulares, posticae tamen latiores et breuiores anticis. Iam si os *sextum* iuncturam *lambdoidem* in latere sinistro habet, ad pedem dextrum pertinet, quia os *quintum* a sinistris est; quod vice versa de osse sinistro erit dicendum. Os *septimum* vero lateraliter per iuncturam triangularem cum osse cuboide copulatur; quae iunctura si a dextris apparet, os quoque dextrum est, si a sinistris, sinistrum.

Fig. 24. 25.

XVII. Offa postbrachialis seu *metacarpi*, et *metatarsi*, longa et teretia sunt; ut inter se distinguantur,

Tabula X.
Fig. 16, 17.

quantur, nota haec: ossa metacarpi, vbi cum digitis iunguntur, capitulum habent *crassius et latius*; ossa metatarsi autem pro ratione longitudinis suae sunt subtiliora ac tenuiora.

Ossa *metacarpi* soleo numerare *quinque*; nam primum os pollicis in metacarpo refero, secundum in phalanga digitorum prima, tertium in phalanga digitorum extrema, ita vt pollex phalanga media carere dicendus sit, quod item de pollice pedis intellectum velim. Os pollicis primum, a reliquis metacarpi ossibus differt brevitate et crassitie, deinde per peculiarem *iuncturam* cum osse quinto carpi iungitur, quam loco citato descripsi. Vt dextrum a sinistro distinguas, videbis, latus ossis *internum*, seu a reliquis digitis auersum, semper esse *brevius* quam externum, deinde, sinus alter iuncturae angustior est in latere indicem respiciente, amplior in latere opposito. Caetera *quatuor* ossa sibi inuicem succedunt longitudine decrescente, ita, vt quod *indicem* sustinet, *longissimum* sit, quod *auricularem* *brevissimum*; reliquorum duorum *crassius* vero digitorum *medium*; quamquam non eadem proportio huius decrementi obseruetur. Vt scias, quae ad sinistram pertineant, sequentes retine notas: Os *indicis*, vbi cum carpo iungitur, *capitulum* habet omnium *crassissimum*, et in eo *protuberantiam* magnam, qua in fo-ueam, quae est inter sextum et septimum os carpi, immittitur; porro ex vno latere tantum articula-
tur

fig. 17.



fig. 18. fig. 19.



fig. 20.



fig. 22.

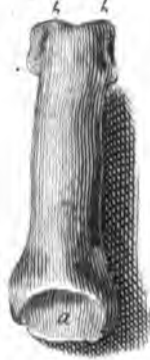


fig. 23.



fig. 24.



fig. 25.

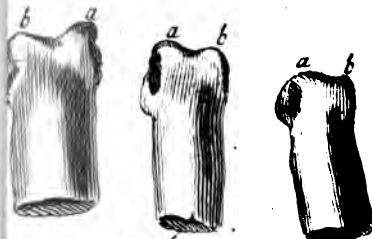


fig. 26.

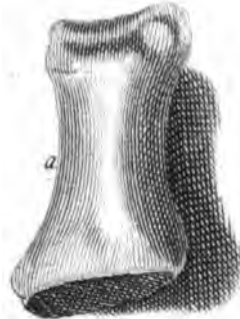


fig. 27.



Handwritten scribble or mark in the top left corner.

atur cum osse metacarpi sequente per iuncturam duplicatam. Cum igitur, ubi haec iunctura est, os digiti medii applicatur, hinc si ad dextram pertinet manum, a dextris quoque debet esse; si ad sinistram, a sinistris.

Os, quod *medium* digitum sustinet, in latere capituli ad carpum, habet *processum* acutum in dorso manus conspicuum, iuxta os antecedens; Fig. 16. 17 porro eadem iunctura duplicata conspicitur in vno latere, quae in osse praecedente, in altero vero *duae* *cavitates* glenoides paruulae *rotundiusculae*, pro recipiendis *capitulis* lateralibus ossis sequentis. Ex quorum omnium situ dextrum a sinistro discernere poteris. Eadem concludi possunt in osse *quarto* metacarpi, annularem sustinente, ex iisdem *capitulis lateralibus* elatioribus. In latere capitulis his opposito, sinulus latiusculus horizontalis apparet, et simplex, pro recipiendo osse *quinto*. Os *quintum* enim ex vno tantum latere articulatur, ex altero liberum est; ubi igitur iunctura deficit, illud latus terminum manus ponit.

XVIII. Ossa quinque *metatarsi*, vt ordine crescunt, ita longitudine decrescunt: haec autem differentia cum inter os *tertium* et *quartum* non semper ita euidentis sit ac inter secundum et tertium, in specie notandum est, *basin* ossis *quarti*, qua cum osse cuboide articulatur, magis *rotundam* esse, quam longam, et in aliquibus *concauam*, et cum ossibus

Tom. V. L1 fociis

- Fig. 19. fociis vtrinque articulatione *simplici* iungi, cum contra os *tertium* ex vno latere cum *secundo* iungatur articulatione duplici. Os pollicis a reliquis differt magnitudine sua, crassitie, et corpore prismatico. Os *quintum* vero per processum oblongum lateralem circa extremitatem superiorem distinguitur, qui versus exteriora protuberat. Ex curvitate horum ossium plantam et dorsum facile dignoscimus. Dextra autem et sinistra his notis seligitur. *Pollicem* ad os cuneiforme per iuncturam *lunatam* adaptari supra diximus, cornua autem iuncturae extrorsum siue ad reliqua ossa *spectare*; id igitur in pollicis iunctura quoque erit *observandum*. Deinde ossa metatarsi in capitulo inferiore habent duos processus paruos, *aduncos* quasi, et versus plantam recuruos, quorum qui pollicis proximus est, *breuior*, alter vero *longior* est.
- Fig. 20.
- Fig. 21.

- Fig. 22. 23. XIX. *Phalangae* digitorum *manus* superant digitos *pedum* longitudine et crassitie, si pollicem pedis exceperis. Digni quoque *pedum* corpora habent *tenuia* ratione *capitulum* suorum. Differentia inter phalangam digitorum manus primam et secundam ab articulationibus peti potest. Prima enim in extremitate superiori iungitur cum ossibus metacarpi per *enarthrosin*, hinc ibi *foveolam* vnicam habet; in extremitate autem inferiore iungitur cum phalanga secunda per *ginglymum*, et hunc in finem capitulis *duobus* cum interiecto sinulo instructa est, quibus vicissim *duae* foveolae
- Fig. 24.

cum interiecta lineola media eminente respondent in extremitate superiore ossium phalangae secundae. Haec ossa ut et reliqua digitorum, a latere volae sunt *plana* et recurva, in *dorso* autem conuexa et rotundiuscula. *Longissimum* illorum ad digitum *medium* pertinet; ex duobus breuissimis quod *crassius* est, *pollici*, quod *tenuius auriculari* adiudicari debet; quod aliorum duorum ad *indicem* pertinet, id *plerumque breuius*, sed *crassius*, quod ad *annularem*, id *longius* sed *tenuius* esse solet: non igitur eundem ordinem longitudinis cum ossibus metacarpi seruant. Regula autem discriminis inter dextrae et sinistrae manus ossa haec videtur esse. Ex capitulis duobus in extremitate inferiore, semper paulo *altius* et *crassius* solet esse id, quod *digitum medium* respicit; in *medii* autem *digiti* osse in specie capitulum in vicinia *annularis* altius est; in pollicis phalanga praeterea latus a digitis *auersum longius* productum esse videtur quam latus oppositum.

Fig. 25.

Phalanga *secunda* eundem propemodum ordinem seruat, quam *prima*; quod enim *longissimum* est, ad digitum *medium* pertinet, quod *breuissimum*, ad *minimum*. Reliquorum quod *crassius* et *breuius* ad *indicem*, quod *longius* et *tenuius* ad *annularem* pertinet. Discrimen inter dextra et sinistra peti debet ex *articulatione* cum phalanga *prima*. Nam quemadmodum ibi capitula versus *medium* digitum (et in ipso medio digito versus *annularem*) paulo *altiora* ac *crassiora* sunt, ita et

Ll 2

pha-

phalangae secundae foveolae illis capitulis correspondentes, etiam *profundiores* ac toto habitu maiores conspiciuntur.

Ossa phalangae *tertia* inter se vix distingueris: en notas: *Pollicis* est *maximum*; postea digiti *minimi* est *minimum*; *medii* est inter reliqua tria *crassissimum*, non semper et *longissimum*; quod restat *longissimum*, ad *annularem* pertinet, ultimum ad *indicem*. Sed dextra a sinistris discernere; id quidem effectui dare haecenus non potui, si os pollicis excipias, quod in latere a digitis averso foveolam *spatiosorem* habere videtur.

XX. *Primum* digitorum *pedis* internodium similiter differt a reliquis internodiis longitudine, et in quouis ordine quod pollicis propius est, longius quoque est. Os pollicis singulari sua et proportionata magnitudine a ceteris quatuor distinguitur, et si os quartum ac quintum sibi fere longitudine similia sunt, differentiam a *crassitie*, quae ossi *quinto* conuenit, petere oportet. Os pollicis habet latus internum, siue a digitis auersum longius quam id, quod oppositum est; ceterorum extremitas inferior quae cum internodio digitorum secundo iunguntur per *ginglymum*, capitulum alterum, quod est pollicis *propius*, *altius* quoque habet, uti id in phalangis digitorum manus obseruatum est; quamuis id propter ossium exiguitatem difficile sit cognitu.

Reliqui duo ordines quemadmodum pro distantia a pollice, longitudine decrescere dicti sunt;

ita

ita et difficilius est, dextra a sinistris discernere; id quod partim ab *exilitate* horum ossiculorum provenit, partim vero a diversa figura, in quam pedes ab usitatis calceis torquentur, dependet. Saepem in digito tertio et quarto phalanga extrema cum media coaluit. Solum os pollicis extremum ad latus iuncturae internum, i. e. a reliquis digitis *aversum*, protuberantiam *latiorem*, longiorem et *asperiorem* habet, quam in latere externo opposito.

Fig. 27.

XXI. Restant ossa *sesamoidea*, quae cum reliquis confundi posse dubito. Illa sola, quae internodio pollicis pedis primo apposita sunt, conformitatem aliqualem habent cum osse *quinto carpi*, quia vero praeter suam convexitatem *nulla* alia protuberantia praedita sunt; hinc ab ossiculo carpi facile distinguntur.

Si quae sunt, quae ex descriptione non satis intelligentur, eas fortasse aptius peti possunt *ex figuris*, quae imaginationem plurimum adjuvare solent, quasque adicere hic libuit. Vbi generaliter notandum est, ossa omnia e dextro latere desumpta esse.

Tabula IX. et X.

Fig. 1. Extremitas posterior costae quartae.

Fig. 2. Extremitas posterior costae octavae.

In ambabus est:

a. articulatio cum corpore vertebrae.

b. articulatio cum processu transverso.

Fig. 3. 4. Extremitas radii ad carpum.

a. superficies plana.

b. superficies convexa, aspera.

Fig. 5. 6. Os carpi primum.

a. sulcus.

b. sinus lunatus pro recipiendo osse secundo.

c. cavitas pro recipiendo tubere ossis septimi.

Ll. 3

Fig. 7.

- Fig. 7. a. Ossis carpi secundi cornu acutum.
 b. concauitas lunata.
 c. sinus quadrangularis.
- Fig. 8. a. Ossis quarti carpi tuberculum.
 b. sulcus latusculus.
- Fig. 9. Os carpi quintum.
 a. sinus iuncturae profundior. b. sulcus.
- Fig. 10. a. Ossis sexti sinus lunatus.
 b. sinus pro adaptando osse quinto.
- Fig. 11. a. Ossis septimi tuber.
 b. iunctura lambdoides, quae iungitur ossi sequenti.
- Fig. 12. a. Ossis octavi lingula.
 b. iunctura longitudinalis lambdoides.
- Fig. 13. 14. Os tarsi sextum cuneiforme.
 a. iunctura lambdoides.
 b. iunctura duplicata, cui similem habet
- Fig. 15. b. Os septimum.
- Fig. 16. Os metacarpi tertium.
 a. processus acutus.
 bb. duae cauitates glenoides.
- Fig. 17. bb. duo capitula in osse quarto metacarpi.
- Fig. 18. aa. ossis metatarsi tertii articulatio duplex.
- Fig. 19. a. Ossis quarti articulatio simplex.
- Fig. 20. Iunctura lunata ossis metatarsi pollicem sustentis.
- Fig. 21. Capitula inferiora ossium metatarsi.
 a. processus aduncus longior, b. breuior.
- Fig. 22. Os phalangae primae digitorum manus.
- Fig. 23. Os phal. primae digitorum pedis.
In utroque nota ur
 a. fouea in extremitate superiore.
 b. duo capitula in extremitate inferiore.
- Fig. 24. a. foueola duplex in osse phalangae secundae digitorum manus.
- Fig. 25. Extremitates superiores phalangae primae digitorum manus.
 a. capitella altiora.
 b. breuiora.
- Fig. 26. a. latus productius ossis primi pollicis pedis.
- Fig. 27. a. protuberantia aspera ossis pollicis extremi.

DE
AVGMENTO PONDERIS,
 QVOD CAPIVNT QVAEDAM CORPORA,
 DVM IGNE CALCINANTVR.

AVTORE

Joh. Georg. Gmelin.

§. 1.

PLurima esse corpora, quae dum calcinantur, augmentum ponderis sui capiunt, extra omne dubium positum est, si vel sola *Boylei* considerentur experimenta, quae Tr. suo de flammae ponderabilitate recenset. Verum ratio huius augmenti plurimis videtur obnoxia dubiis. Vnam quidem generalem et communem esse in omnibus, quae id augmentum patiuntur, corporibus, verisimillimum est.

§. 2. Si igitur vni corpori eam rationem assignare queamus, eandem et reliquis applicare licebit. Ex vnius ergo corporis exacto examine nostro forte potiemur scopo. Malumus tale feligere, quod plurium iam manibus tritum est; ita enim hunc finem non solum nos impetrare, sed et experimenta haecenus instituta vel corrigere vel conciliare posse confidimus.

§. 3. Antimonium in hunc censum venit. Id enim non solo carbonum, sed et solari igne tor-
 sum

sum est. Conuenit ergo recensere experimenta haec cum eo instituta, et quid ex eis concludi possit aut in qua re adhuc deficiant, dispicere.

§. 4. *Bouleduccius*,* postquam antimonium igne carbonum, lento quidem, qualis semper ad hoc opus requiritur, in vase fictili calcinasset, eius octo uncias ad sex uncias et septem fere drachmas redegit, quam decrementi proportionem et ego propemodum, cum in ferreo vase calcinationem instituerem, obseruauit. *Kunckelius*,** libram antimonii calcinatione sensim sensimque decrementum patitur prope unciam, ex eo tempore pondus recuperare pristinum, et ad unam, imo ad unam cum semisse, insuper augeri scribit, quod superioribus contrariari videtur obseruationibus. Mihi tamen id euenit, ut, cum antimonii octo ad sex uncias calcinando redegerim, eae postea, ubi calcinatione ulterius institui, ultra sex drachmarum incrementum adhuc capefferint. Ut vero ad pristinum tale antimonium redeat pondus, imo quid ultra adhuc lucretur, id mihi haud ita visum est; continuando enim sex harum unciam, quae sex drachmis auctae erant, calcinationem, fumus albicans, lenissimo igne ex calcinata materia exhalans, satis indicabat, sulphuream partem ut plurimum auolasse, et metallicam in fumum resolui, ut omnis ulterior expectatio frustranea fuisset.

Itaque

* Hist. A. R. S. ed. Paris. 1701. L. V. P. II. S. I. C. IV. §. 1.
 ** Laborat. Chym. P. III. C. XXXIV.

Itaque haud errasse videtur *Kunckelius*, dum tradit, antimonium ab igne augmentum capeffere; sed iacturam, quam patitur, maiorem non debuisset pronuciare augmento. Illud enim decrementum ponderis et in Msto quodam Diario Regii cuiusdam Laboratorii consignatum inuenio, vbi antimonii crudi vncias duas ad tredecim drachmas cum semisse ope speculi caustici intra decem dies redactas eiusdemque vnicam vnam duabus drachmis mensuraeque quarta parte igne carbonum immixtam fuisse memoratur. Pluribus vero in eadem re factis obseruationibus concordantibus maior haberi potest fides prae vna dissentiente.

§. 5. *Du Clofus* * regulum antimonii in marmore tritum atque in tenuissimum puluerem comminutum ope speculi vstorii post vnam horam decima pristini ponderis parte auctum deprehendit, quod experimentum igne carbonum quoque institutum, regulum octaua ponderis parte auctum praebuit. *Hombergus* ope lentis *Sereniss. Duc. Orleanens.* idem tentamen instituens, reguli antimonii martialis puluerisati quatuor vncias, $1\frac{1}{2}$ ped. a vero lentis foco locatas, vnius horae spatio, cessante nimirum fumo, qui per totam horam insignis fuit, trium drachmarum et granorum quorundam incrementum sumsisse obseruauit, imo computo facto post reductionem reguli calcinati, qui
 Tom. V. M m post

* Hist. A. R. S. L. I. S. II. C. I. §. 2. et 3.

** Memoires 1705. p. 124. et 125.

post eam tres saltem uncias cum semisse pendeat, sex drachmis solis radios hunc regulum auxisse concludit, quandoquidem semiuncia, quae regulo reducto defecit, ea ipsi videatur, quae durante calcinatione fumo perdita fuit. *Kunckelius* * reguli antimonii libram unam calcinatione ad sex scrupulos, (videtur legi debere sex drachmas) imo quandoque ad unciam augeri, mensura vero aliquam partem minui tradit, cui posteriori *Georg. Ernest. Stablius* etiam suffragari videtur, cum et rationes, a *Kunckelio* pro se adductas in suam demonstrationem trahat. *Vid. eius Experim. et Obseru. Chym. et Phys. p. 347.* In diario superius citato inuenio, reguli antimonii martialis unciam unam per calcinationem carbonum igne institutam quatuor scrupulos pondere et quartam partem mensura auctam fuisse, speculo vero caustico idem antimonii pondus calcinatum aliquot dierum spatio scrupuli unius incrementum accepisse.

§. 6. Ex hisce experimentis concludi posse puto: Regulum antimonii calcinatione ponderis sui augmentum acquirere. De antimonio res probabilis quidem est (§. 4.) at non dum euicta. Et *Kunckelii* enim et meae obseruationes ea cura et sollicitudine institutae non sunt, qualis hic requiritur. Etsi annotatum non sit, qualia vasa adhibuerit *Kunckelius*, id tamen certum est, quod si adhibuerit ferrea, vti ego, id obseruationem maxime suspectam

* Chymische Tractátlein p. 29.

Etiam reddere; haec enim et ab ignis actione et perpetua spathae agitatione facilem patiuntur abrasionem, prouti ab aliis iam notatum est. Huic damno lapidea vel et fictilia vasa, imprimis plum-bata, obnoxia non adeo sunt, hisceque vsu esse *Bouleduccium* annotauimus. (§. 4.) Sed nec in hu-ius nec reliquorum, solum *Hombergi* exceptis, ex-perimentis gradus ignis, qualis adhibitus fuerit, proditum est, cum tamen pro vario ignis gradu et antimonium et eius regulus diuersimode augean-tur. Nec inuenio in experimentis igne carbonum institutis, vllas infumitas fuisse cautelas, ne fauilla carbonum, saepius afflatu eorum in aëra se disper-gens, vel scintillulae igneae, adhaereant calcinan-dae materiae, ex quo tamen augmentum facile capere posset. *Kunckelii* experimenta (§. 4. 5.) praeter rationes supra allatas ideo etiam suspecta sunt, dum antimonium calcinatione plus incrementi capere scribat, ac regulum antimonii, quod omnium reliquorum experimentis contrariatur. Finis etiam calcinationi assignandus est. Si enim diutius, ac requiritur, calcinatione vrgeas haec corpora, etsi antea augmentum capefferint, decrementum notabile postmodum rursus patiuntur; si breuius, augebuntur quidem pondere, ast quantum, tunc ignorabis, quia plus adhuc auferentur, si calcina-tione vltierius insisteres. Hanc cautelam a *Hom-bergo* obseruatam superius recensitae (§. 5.) testan-tur obseruationes. Interim hanc obseruandi negli-gentiam rationem esse dissensus memoratorum ex-perimentorum coniectura facili assequi licet.

§. 7. Ex augmento, quod haec corpora calcinatione capiunt, concludimus, aliquid iis accessisse. Cum vero nihil in hac operatione addatur, quod sub sensus incurrit, praeter solarem vel carbonum ignem, ideo plurimis haec conclusio placet, particulas quasdam igneas, vel materiam quandam subtilem, vel, ut alii expriment, *Φλογιστόν* quid accessisse. Hasque particulas sulphureas maxima pars existimat. Sed vtraque res dubia est. Nunquam talis calcinatio in vase aëre vacuo instituta fuit, etsi *Boyleus* quoddam recenset experimentum, vbi eam in vase clauso peregit. Quam facile est, ut particulae hinc inde in aëre volantes adhaerere possint antimonio, illudque repraesentare, quod *Du Hamelio* l. c. sub fibrosorum corpusculorum nomine venit. Concessis vero particulis igneis, de quibus hactenus saltem dubitamus, disquiremus, an eas sulphureas appellare liceat? Notum est, in reductione calcium metallicarum hanc cautelam tradi, ut ad eam promouendam purissima alcalia haud seligantur, sed ea, quae sulphureo principio abundant, e. g. impurum sal Tartari, vel et Tartarus ipse, ob hanc maxime rationem, quod sulphureum principium calcinatione auolauit, idque restitui debeat. Particulas vero sulphureas nouas accessisse, et auolasse pristinas, hypotheseum amorem sapit. Nec quicquam roboris particulis his sulphureis addit experimentum *Du Hamelii* l. c. productum, quod spiritus vini calcinato antimonio (videtur ex aliis circumstantiis, regulum

antimonii intelligere Cel. Autorem) affusus post aliquam digestionem rubram Tincturam ex eo decerpat, antimonium vero remaneat eiusdem prorsus ponderis atque erat ante calcinationem. Oporteret iuxta hypothesein Cel. Viri antimonium (vel regulus) post hanc extractionem ponderis esse minoris ac ante calcinationem, quia durante calcinatione magna pars fumo perdita fuit. Vel igitur experimentum in dubium vocari poterit, vel particulae hae igneae non omnes sunt sulphureae, eae nempe non sunt, quae post Tincturam a Spiritu extractam remanserunt. Sed cum particulae igneae adeo simplices sint, ut dubitari de earum existentia possit, quomodo compositae comprehendi poterunt? Quidni liceat Tincturam hanc a sulphure reguli antimonii particulis quibusdam abscondito, per calcinationem vero sui iuris facto, deducere? Nec enim calcinato antimonii regulo omne sulphur denegari potest, quandoquidem egregii Viri vim eius emeticam a subtili quodam et narcotico sulphure deriuant.

§. 8. Alii particularum ignearum osiores, aliam rationem augmenti huius quaesiverunt. *Kunckelius* enim existimat, corpora porosa suspendi quasi ab aëre, hinc leuora reddi, magis vero compacta comprimi et ita grauiora fieri. Antimonii vero regulum magis compactum esse post ac ante calcinationem exinde probat, quod mensura eius post calcinationem minor sit. Actionem aeris ex

M m. 3.

me-

metallorum in aqua et aëre pensorum collatis ponderibus elucere putat; pluraque pro defensione hypotheseos suae affert experimenta, quorum insignius hoc est: Catinus probatorius, si vel vehementissimo igne torqueatur, pondere non augebitur; quam primum vero plumbum ei impositum intra poros suos recepit, plus ponderabit, ac plumbum et catinus seorsim pensa. Poros igitur catini cum plumbo repletos concessisse aëre inquit, ut corpus catini, quod hac ratione magis compactum est, comprimatur, hincque pondere augeat. Sed omnia haec dubiis obnoxia sunt. Contrariam de mensurae imminutione, quam praetendit, observationem in superioribus (§. 4.) allegavi; Huicque maiorem adscribo fidem, quod Boyleus afferat, * plumbi, si per ignem calcinetur, gravitatem absolutam augeri quidem, sed specificam minui. Utraque tamen observatio in hoc etiam deficere videtur, quod modus, quo mensurae vel augmentum vel imminutio notata fuere, haud describatur. Si enim is per vasculum quoddam celebratus sit, tum vel maior vel minor quassatio vasis, et vel maior vel minor subtilitas atque teneritas mensurandi magnam differentiam inferre potuerunt. Experimentum insuper, quod Kunckelius, ceu maxime stringens, pro se adducit, eam vim habere vix verisimile est. Ut haud vream, quae de catino probatorio vehementissimo etiam igne pondere non augendo adducit et Boy-

infi-

* Detect. penetrah. vitri exp. III.

lei * obseruationi accuratissimae et summa cura institutae contraria plane sunt, id ei vehementius aduersatur, quod et plumbum iuxta proprium eius assertum et *Io. Freindii* ** obseruationes calcinatione grauius euadat. Ab hoc igitur catini sui augmentum maiori compendio et perspicuitate deriuari poterit. Actio aëris in respectu ad grauitatem labili nititur fundamento. Aliam sine consideratione aëris norunt Physici allegare rationem imminutionis grauitatis corporum in aqua.

§. 9. Tantis igitur, cum ea, quae haecenus recensuimus, dubiis obnoxia sint, experimenta ita adornare necesse est, ut vel in verisimilem quandam, vel si fieri potest, perspicuam atque certam rationem aliquando penetrare liceat. Ignis carbonum huic scopo non conuenire videtur, quod exceptio possit fieri, augmenti rationem in corpusculis forte carbonum sitam esse. (§. 6.) Ideo solaris seligendus, illo nimirum purior.

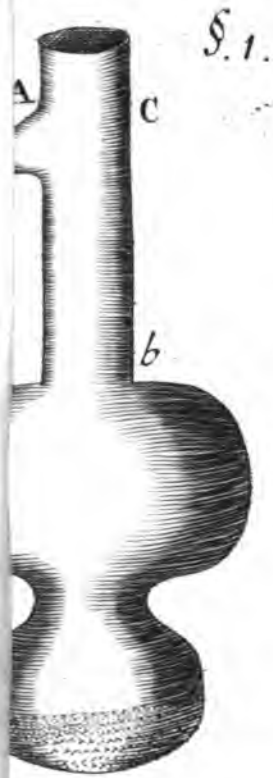
§. 10. Ut causa augmenti innotescat, calcinatio in vacuo instituat. Si enim et tum augmentum capiant corpora, iusta omnino est conclusio, particulas igneas id effecisse. Sed cum corpus calcinandum durante calcinatione perpetuo agitari et ut vera ratio augmenti innotescat, subinde statim examinari debeat, iis difficultatibus et in vacuo obuiam eundum.

§. 11.

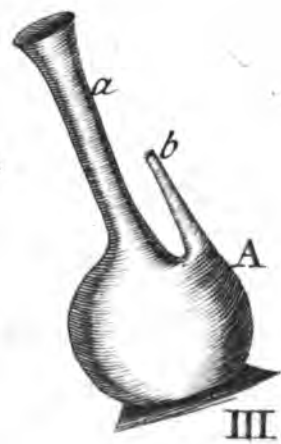
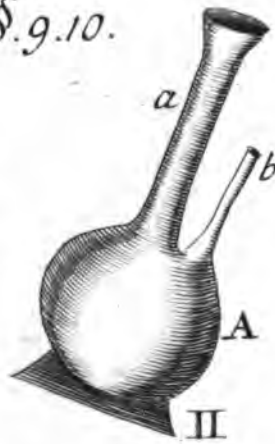
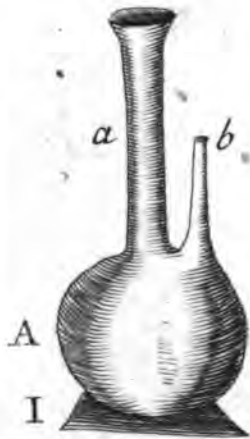
* Exp. de flammæ ponderab. Exp. VIII. ** Prael. Chym. p. 14.

§. 11. Pro perpetua agitatione concilianda instrumentum selegi, quo alias motus in vacuo perfici solet, loco vero brachii, qui alias inferiori extremitati connexus est, orbem quendam minorem pluribus aculeis vel cuspidibus orichalceis in extremitate sua rotundiusculis adaptare curavi. Alterae difficultati ita succurri poterit. Catinus antliae, campana et omnia, quae ad corpus calcinandum non pertinent, attamen pro calcinatione in vacuo instituenda necessaria sunt, statera antea pendantur. Sic, vtut aëris accessus haud admittatur, corporis subinde incrementum diiudicari potest, statera pen̄sis omnibus simul detractoque pondere eorum, quae non ipsum corpus calcinandum constituunt.

§. 12. Cum vero catinus antliae non possit a cylindro eius in machina *Leupoldiana* ita separari, vt manente vacuo, in orbem verti non debeat, quae versio materiam calcinandam in catino vndiquaque dispergeret, ideo cylinder antliae simul cum catino et campana appendi necesse est. Sed tum ad aliquot grana certi esse non possumus, quia statera ingens requireretur. Ideo fieri curavi tubum orichalceum, 3. circiter pollic. Angl. longum, cui inferne cochlea foemina et superne cochleæ mas, inque medio epistomium, adaptata sunt. Cochlea foemina recipit cochleam marem tubuli ex cylindro antliae prodeuntis, et mas recipitur a cochlea foemina catini. Mediante hoc
tubo



§. 9. 10.



rasa in bullam instrumenti (*a*), et ita disponatur plumbum, .yt in aqua natans instrumentum tubulum (*c*) perpendiculariter erigat. Tunc caute eximatur ex aqua, ne plumbum alium situm occupet, et admoueaturn igni, vt cera liquefacta, et iterum refrigerata, inuoluat et contineat plumbum, quo minus alium situm assumat.

§. 2. Instrumenti A tubulus (*c*), habeat brachium dependens (*d*), solido ex vitro, tantae longitudinis, vt eius extremum (*g*) etiam in leuissimo liquore, e. gr. Spiritu Vini alkohol. non attingat superficiem.

Deinde paratus sit tubulus (*f*), in inferiore parte clausus. Is imponatur in instrumentum A, vt ceram coagulata attingat. Instrumentum immittatur in vitrum aqua repletum, et iniiciatur in tubulum (*f*) tantum plumbi, donec brachium (*d*) superficiem aquae lambat, postquam extremum (*g*) pinguedine aliqua fuerit illinitum.

§. 3. Postea eximatur instrumentum A, et in liquorem alium priore grauiorem, e. g. aquam salis, immittatur, et quia brachium (*d*) propter altius natans instrumentum, non attinget superficiem aquae, iniiciantur ponduscula cylindrica orichalcea, exacte ad trutinam docimasticam librata, tot, quot requiruntur, vt brachium (*d*) superficiem liquoris etiam lambat.

§. 4.

§. 4. Tandem ponduscula eximantur, et grauitates eorum, in ipsis signatae, colligantur, et apparebit, quanta inter vtrasque aquas sit differentia specifica grauitatis.

§. 5. Si vero experiri cupias, vtrum differentia liquorum, per instrumentum inuenta, respondeat proportioni, quae indicatur a bilance, ad quam liquor vterque libratus est, hoc modo age:

§. 6. Assumatur lagena vitrea A, cui embolus vitreus (b) ita terendo aptatus est, vt ad tertias repleta lagena spiritu vini, si inuerso modo statuatur in loco, soli, vel calori ad fornacem exposito, per 12. horas, expansus per solis calorem liquor, et aër, ne guttulam quidem exprimere valeant de Spiritu Vini, in embolum incumbente: id quod indicio erit exacte clausae lagenulae.

§. 7. Tunc repleatur lagena liquore aliquo librando, vsque ad summum, imprimatur embolus, vt superfluat liquor, abstergatur linteo, et libretur ad bilancem mediocrem, sed celerrimam, qualis mea, quae 5. libr. aggrauata adhuc $\frac{1}{4}$ graen. superpondii indicat, et colligantur pondera. Hoc etiam instituat cum altero liquore, eodem modo, et ponderum differentia indicabit differentiam liquorum specificam.

§. 8. Deinde, eodem tempore, liquores eadem, quae in lagena fuerunt, examinentur per instrumentum antea descriptum, et inuenies, quod concordet proportio differentiae grauitatis specificae, vtroque modo quaesita inter binos liquores.

Nn 2

§. 9.

§. 9. *Magnus Hombergius* egregium etiam dedit modum, quo mediante idem volumen diuersorum liquorum obtineatur. Scilicet lagenulam vitream A, cum praecedente tubulo breuiori (b), quam lagenulae collum (a) est, adornauit. Per hunc infusi liquoris tantum effluit, quantum tubulus (b) permittit, et sic idem volumen liquoris remanet in lagenula, qualiscunque etiam is fuerit.

§. 10. Mihi vero aptior videtur modus a me propositus, cum lagena embolo clausa, quia *Hombergii* instrumentum postulat situm in plano horizontali I, vt id perpendiculariter erigatur. Decliuui enim in plano positum II. aut plus liquoris remanet in lagenula, aut minus III, prout situm fuerit nacta. Et quanquam exigua percipiatur differentia, tamen aliqua inuenitur, libratis liquoribus ad bilancem exactam.

§. 11. Deinde clausum mea methodo vitrum vna cum liquore librari potest, sine effusionis metu, et grauitas vitri subtrahi: quod ad plura experimenta valde vtile atque commodum inueni-

DE

DE
SALIBVS ALKALIBVS FIXIS
PLANTARVM.

AVTORE

J. G. Gmelin.

§. 1.

EX quo vsus salium fixorum plantarum in Medicina inualuit: ex eo tempore varie disceptatum est, an salia fixa a diuersis plantis acquisita re ipsa diuersa sint, nec ne; et si differant, in quam re haec differentia consistat. Nec vero haec lis in hunc usque diem diremta. Vt enim multus de hoc sermo fuerit, is in opinionibus tantum versatus est, nec vilo experimento solide exactus. Quo magis arduum videtur, rem pensitare altius. Id et Medicae artis interest, cum plures sint, qui differentiam salium fixorum plantarum nauci habentes promiscue singula praescribunt sine delectu, alii, qui eam insignem credentes, ubi delectum instituunt, non sine mordacis conscientiae stimulis aegris propinari posse credunt.

§. 2. Salia fixa sunt salia sui generis, notisque gaudent, quibus facile ab aliis distinguuntur. Quod si ergo pura sint, ea semper eadem esse oportet. Pura rarissime obtinentur, nisi calcinatione eorum

N n 3

in-

intensius instituta, et saepius post nouas solutiones repetita. Talis vero in praeparatione salium plantarum non adhibetur, vel rarissime. Ergo ea impura vt plurimum esse oportet.

§. 3. Generalis obseruatio est, id, quod salia fixa impura reddit, esse vel terrestre quid, vel pingue, vel acidum, vel et nonnunquam alcalinum volatile. Prout corpora, e quibus extrahuntur, vno horum abundant, vel prout nexus horum omnium obtinet, ea ratione hoc magis quam illo abundant. Quodsi igitur plantae diuersae diuersae quantitatis obtinent principia, necesse est, vt et salia fixa exinde elicita diuersa sint. *Illud vero ex analysi constat.*

§. 4. Haec differentia ex indole Plantarum diuersa fluit. Fateor, multas accedere posse causas, differentiam hanc naturalem augentes. Eadem planta diuerso igne combusta diuersum sal alcali exhibebit. Si ex eorundem cinerum dimidia parte lixiuum aqua feruida, ex altera vero frigida extrahatur, diuersum orietur sal. Haec omnia *G. E. Stablius** praeclare et abunde docet. Sed huius loci non sunt; differentiam enim salium fixorum plantarum essentialem, non accidentalem et ab ingenio artificis pendentem demonstrare animus est.

§. 5. Vt pigitur salia fixa inter se comparentur, opus est, vt eodem modo ex plantis extracta sint, nimirum, vt idem ad sensum ignis gradus,
idem-

* *Fundament. Chym.*

idēque certus quidam in combustionē plantarum obseruetur, vt combustio ad certum vsque statum continuetur, atque lixiuum eodem et vniformi modo ex cineribus plantae paretur. Impediemus primā et secunda cautela, vt partium volatiliū in vna planta, caeteris paribus, non plus auolet, quam in altera; per tertiam curabimus, vt sulphurearum et terrearum partium plantae aequalis fiat solutio: feruida enim aqua extractum lixiuum plus sulphurearum et terrearum partium continebit, quam tale, quod frigida extractum est. Ita vero facile fit, vt plantae eadem diuersa quantitate principia exhibere possint.

§ 6. Certi hi gradus determinandi sunt. Cum salia plantarum vsui tantum Medico haecenus adaptata sint, scopus a Medicina intentus in praeparatione eorum ante oculos habendus est. Is vero duplex videtur. I. Vt humores corporis salino suo principio alterando in pristinum eos redigant statum. II. Vt, si possibile, etiam agant in corpus humanum specifica plantae, e qua extracta sunt, virtute. Curandum ergo est, vt volatiles partes, quantum penes artificem est, ab auolatione praeseruentur, et sulphureae moram acquirant, vt salii fixo se associare queant, ne ante hanc copulam dissipentur. Fieri enim potest, vt, si quid specificum in planta, id vel volatilibus vel sulphureis partibus intricatum cum illis in auram abeat, quod remaneret, si gradus ignis remissior adhibitus fuisset. Optima igitur methodus est, si
plant

plantae ita comburantur, vt in luculentam flammam non erumpant, sed gliscant tantum. Hoc tamdiu continuandum, vsque dum in cineres factificant, nec calcinatio vterius protrahenda, ne perditio partium volatilium vel sulphurearum nimia fiat.

§. 7. Salia ex cineribus cum frigida extrahi debent, vt veri salis formam induant. Cumque aquae fontanae, fluuiales, pytales, pluuiiales &c. speciesque vnius generis multum inter se differant; vt ex tentaminibus iustae fieri possint conclusiones, cum aqua aliquoties destillata lixiuum extrahendum est, idque in vase vitreo vel terreo non plumbato, ne vlla suspicio supersit, aliquid heterogenii sali admistum fuisse. Si omnibus his obseruatis cautelis lixiua plantarum inter se differunt, certum est, salia eorum fixa differre.

§. 8. Auspicato incidit in manus meas Diarium laborum Chymicorum, Regis Sueciae auspiciis institutorum, manuscriptum, vbi omnes hae cautelae in diuersis plantis obseruatae fuerunt. Singulae plantae, vnaquaeque in suo catino inter prunas candentes posito, lente et ex parte combusta sunt, donec in cineres dilapsae fuerint, nullo carbonum relicto vestigio. Cineribus postea in vitro puro locatis, aqua simplex destillata affusa, haecque, vbi aliquod tempus super eos relicta erat, diuersis liquoribus permixta fuit. Taediosum esset, diuersa phaenomena, quae euenerunt, prouti relata

lata

VI FIXORVM ADMIXTIONE INDVCTAE FVERVNT.

Cu-ae.	A Sale Ephrasiae.	A Sale Tuffi- laginis.	A Sale Fu- mariae.	A Sale Hy- fopi.	A Sale Ma- trifyluae.	A Sale Hy- perici.	A Sale Mar- rubii.
efficit. parum uefcit.	effe- parum effe- uefcit.	parum effe- uefcit.	fortiter ef- feruefcit.	fortiter effe- uefcit et lu- tescentem co- lorem acqui- rit.	fortiter effe- uefcit.	effe- uefcit.	effe- uefcit et obfcurior eu- adit.
				fortiter effe- uefcit et lute- fcientem colo- rem acquirit.			
				parum effe- uefcit, colore lu- tescente tingi- tur et praeci- pitatur cum floccis.			
inae con-	fpiffior euadit tenuioris gela-	gelatinae inftar fpiffi-	gelatinae in- ftar fpiffatur.	gelatinae in- ftar fpiffatur.	gelatinae in- ftar fpiffatur.	gelatinae in- ftar fpiffatur.	gelatinae in- ftar fpiffatur.
uefcit.						colore flauo effe- uefcit, fed fubrubeo fine effe- uefcientia tingitur.	diaphanus ma- net.
						albo colore praecipitatur.	
ar.	denfatur.	in opalinum fere mutatur colorem, fed non fpiffatur.	denfatur.	denfatur.	denfatur.		fpiffatur.
reo pita-	fulphureo co- lore praeci- pitatur.	co- miniato colore praecipitatur.	fulphureo colore praeci- pitatur.	citreo colore praecipitatur.	fulphureo co- lore praeci- pitatur.	opalino colore praecipitatur.	miniaturum co- lorem induit.
bal- pita-	flauo colore praecipitatur.	subalbo colore praeci- pitatur.	flauo sub- albo colore praecipita- tur.	flauo subal- bo colore praeci- pitatur.	albo colore praecipitatur.	inftar feri la- ctis praeci- pitatur.	praecipitatur lutescenti co- lore.
no tin-	thalaffino co- lore tingitur.	aeruginoso co- lore tingitur et denfatur.	cyaneo cla- ro colore tingitur et denfatur.	cyaneo cla- ro colore tingi- tur et denfa- tur.	cyaneo cla- ro colore tingi- tur et denfa- tur.	vix fere mu- tatur.	in thalaffinum colorem muta- tur et fpiffatur.
oco- den-	turbido opali- no colore tin- gitur.	turbido opali- no colore tin- gitur.	turbatur.	turbatur cum floccis.	turbatur.	opalino colore tingitur.	turbatur.

non immutata fuit, vti nec a Refin. folutione Salia Meliloti, Origani, Filicis.

lata sunt, huc transcribere, imprimis, cum Diarium germanico idiomate conscriptum sit. Maxime opportunum autem visum est, tabellam formare, ex cuius primo intuitu tota differentia phaenomenorum, quae cum diuersis salibus obuenerunt, patesceret. Hanc igitur hic offero. Praecisa colorum significatio, quam germanico idiomate habent, cognita et probe perspecta mihi est. Vt latinis eos exprimam hominibus, secutus sum *Vrbani Hiernii* App. de coloribus, Parasceui suae 1712. impressae adiunctam. Qui vero hoc Tractatu non indicati sunt, donec haec doctrina diffusior tradatur, ita nominavi, ut ideam satis claram eorum habiturum confidam, qui vel sola nomina legat. Plantae, e quibus salia memorati Diarii extracta fuerunt, sine dubio omnes officinales sunt, ut opus haud fuerit, integrum earum ex Botanicis Autoribus adponere nomen. Exsiccatae etiam probe fuerunt, nam Mens. Decembr. demum combustae sunt. Folia sola plantarum adhibita fuerunt, si excipias *Carduum benedictum*, cum toto, *Tanacetum*, *Melilotum* et *Saxifragiam* vna cum floribus assumpta, et *Chamomillam* cum floribus et stipitibus.

§. 9. Cum lixiua diuersarum plantarum cum iisdem liquoribus diuersa phaenomena exhibuerint, experimentis comprobatum est, salia fixa inter se differre. Confirmatur haec differentia ex diuersitate cinerum, e quibus salia elixiuata sunt, et

Tom. V.

Oo

lix-

lixiorum ipsorum, sensibus nudis patente. Color cinerum Artemisiae, Centauri minoris, Chae-refoli, Anethi, fusco-cinereus erat; Barbae Caprae, Pulmonariae, albus; Saniculae, candicans; Absinthii pontici, ex albo et viridi cinereus; Rutae, Agrimoniae, Saxifragiae, subfuscus; Tanacetii, obscure viridis; Cuscutae, viridis; Euphrasiae, Abortani; Absinthii vulgaris, Scabiosae, cinereus; Cochleariae, ex albo cinereus; Hyssopi, Millefolii, Anserinae, obscure cinereus; Meliloti, Quercus foliorum, Plantaginis, Farsariae, summitatum Pini, Fumariae, obscure fuscus; Marrubii lucidior paululum; Pulegii, lucide fuscus, albis maculis intermixtis; florum Sambuci, Salviae nobilis, Serpilli, lutescens; Fragariae, sulphureus; Nepetae, obscure rubens; Prunellae, obscure lateritius; Matrisyluae, coeruleascens; Filicis, nigricans; Hyperici, Matricariae, Origani, Pimpinellae, niger.

§. 10. Pondus cinerum, ad plantarum pondus exactum, inaequale erat. Pulmonaria paulo minus quam septimam partem cinerum exhibebat; Cardui benedicti folia, paulo minus praebuerunt, quam nonam; Tusfilaginis, nonam fere; Plantaginis, paulo minus quam undecimam; Pulegii, minus; Nepetae, Matrisyluae, duodecimam; Marrubii paulo minus; Serpilli, minus quam decimam tertiam; Fumariae, plus; Tanacetii, minus quam decimam quartam; Absinthii pontici, Cochleariae, florum Sambuci, plus; Barbae Caprae, Prunellae, minus quam decimam quintam; Meliloti,

loti, Saxifragiae, Salviae nobilis, Fragariae, plus; Absinthii vulgaris, Anserinae, Artemisiae, Chae-
refolii Romani, Euphrasiae, Rutae, Scabiosae, de-
cimam sextam; Matricariae, minus; Agrimoniae,
minus quam decimam septimam; Hyssopi, minus
quam decimam octauam; Abrotani, Chamomillae,
minus quam decimam nonam; Trifolii fibrini, mi-
nus quam vigesimam; Anethi, Pimpinellae, Quer-
cus, minus quam vigesimam vnam; summitates Pi-
ni, minus quam vigesimam tertiam; folia Cen-
taurii minoris, Filicis, vigesimam quartam; Ori-
gani, minus quam vigesimam septimam; Hyperici,
minus quam vigesimam octauam. Raritas vero
cineribus eadem erat, exceptis cineribus Chamo-
millae, qui satis compacti videbantur.

§. 11. Lixiua limpida fuerunt. Cineres qui-
dem Anserinae, Trifolii Fibrini, Cuscutae, Ma-
trifyluae, herbeum aquae adfusae ab initio colo-
rem; Cochleariae, Euphrasiae, coeruleum subui-
ridem; Saxifragiae, Salviae nobilis, Tanaceti, lu-
cide viridem conciliarunt. Ii vero colores intra
aliquot dies euauerunt, limpidis relictis lixiuiis.

§. 12. Lixiua Anserinae, Matrifyluae, Hyf-
sopi, Plantaginis, Pulmonariae, peracria erant;
Marrubii, Matricariae, Saxifragiae, Scabiosae, Sal-
viae, florum Sambuci, Prunellae, Tanaceti, Pim-
pinellae hortensis, Abrotani, Nepetae, Cardui
benedicti, Millefolii, Trifolii fibrini, Origani, Ane-
thi,

thi; Meliloti, Artemisiae, Rutae, Saniculae, Cochleariae, Fumariae, Cuscutae, acria; Filicis, Absinthii vulgaris, et pontici, Agrimoniae, Centaurii minoris, Chamomillae, Chaerifolii, Pulegii, Euphrasiae, Quercus, mediocriter acria; Hyperici, Tussilaginis, subacria. Sapore vix vlllo gaudebat lixiuum Fragariae, et lixiuum Barbae Caprae loco acridinis dulcedinem gustui offerebat, sed nullus plane sapor dignosci poterat in lixiuo Serpilli.

§. 13. Pimpinellae, Anethi, Fragariae, lixiua sulphureum odorem spirarunt; reliqua inodora erant.

§. 14. Praeter Phaenomena, quae in tabella continentur, sequentia adhuc obseruata sunt: sal Filicis solutionis Vitrioli Martis colorem exaltat, infusionem vero succi Heliotropii non mutat, ac Syrupum Violarum prassino diluto colore tingit. Sal Origani solutionem scoriarum reguli Antimonii rubro colore tingit; sal Plantaginis eandem solutionem colore intensiorem reddit, in utroque tamen casu diaphana manet. Sal Matricariae ab eadem nullam mutationem patitur.

§. 15. De differentia ergo salium fixorum plantarum dubitare non licet. Difficilius est determinare, in quo differant. Cum praeter terram, vel pingue, vel acidum, vel alkali volatile, salibus plantarum nihil admisceri soleat, (§. 3.) ideo non opus est, vt plura experimenta instituantur,
quam

quam quae sufficientia sint, horum praesentiae vel absentiae, copiae vel paucitatis detegendae. Sufficientia igitur sunt experimenta et observationes recensitae. Dubitare enim licet, an ferrum in cineribus cuiusvis plantae, ex observationibus *Geoffroy*, praesens, sali etiam sese insinuet atque cum eo solvatur. Praeter difficultatem, quam alcalia salia habent in soluendo ferro, id phaenomenon contrarium est, quod ferrum in cineribus plantarum *Magnetis* ope demonstrari possit, quod fieri haud posset, si ferrum vel acido quodam vel sulphureo solutum esset.

§. 16. Ex phaenomenis in tabella recensitis evidens est, salia omnia, quotquot ibi memorantur, salium fixorum notis gaudere, praeter solum sal *Filicis*, societatem vegetabilem igne respuens. De hoc vero postea.

§. 17. Salia *Absinthii vulgaris* et *pontici*, *Hyperici*, *Euphrasiae*, *Quercus*, *Artemisiae*, *Neptae*, *Saxifragiae*, *Matrisyluae*, sunt salia alcalia fixa, terrestri materia diversimode temperata. Salia alcalia, quo plus terrae et sulphuris continent, eo minor acor eorum est. Quae igitur sulphur non continent, nec acore magno praedita sunt, ea multum terrae continere certum est. Id phaenomena, quae cum salibus *Absinthii vulgaris* et *pontici*, *Hyperici*, *Euphrasiae*, *Quercus*, euenerunt, confirmant. Et ex diversis efferuescentiae gradibus, quos haec

salia cum spiritu Vitrioli subierunt, patet, salia Euphrasiae et Absinthii vulgaris maiori terrae copia foeta esse, ac salia Hyperici et Quercus, haecque maiori, ac sal Absinthii pontici. Salia Artemisiae, Nepetae, Saxifragiae, cum acriora sint, minus terrae continebunt, et sal Matrifyluae, cum acerri- mum sit, minus adhuc. Id quidem omne phaeno- menis consonum est.

§. 18. Quale id sal Hyperici fuerit, de quo *Du Hamelius*, * illud solutionem Mercurii sublimati lacteo colore praecipitasse, diuinare nescio; an forte essentiale fuerit? Id vero ob alias *circumstantias* concludere haud licet; an diuersum sal Hyperici gallici a suecico, vti sal commune gallicum diuersum ab hispanico?

§. 19. Salia Agrimoniae et Chaerifolii sunt alkalia fixa, forte pauco alkali volatili imbuta. Id ex phaenomenis, quae in solutione Vitrioli Veneris occurrunt, elucere videtur. Nollem tamen nimis praecipitasse in hanc conclusionem ruere. Forte colores non rite nominantur, nam phaenomena sibi nonnunquam contrariantur; deinde in sublimati solutione nullum volatilium indicium habetur. Res ergo anceps est, et eodem iure haec salia ad ea referri possunt, quae §. 17. describuntur. Multa terra vtrumque gaudet, Chaerifolii tamen minori quam Agrimoniae.

§. 20.

* Hist. Ac. Sc. ed. Par. 1702. p. 77.

§. 20. Salia Anserinae, Tussilaginis, Plantaginis, Pulegii, Tanaceti, Centauri minoris, Barbae Caprae, sunt alkalia fixa, paucò acido refracta. Cum salia Plantaginis et Anserinae cum spiritu Vitrioli, illud ne hilum quidem, hoc parum efferuescat, atque sublimati solutionem illud subcroceo, hoc obscure flauo colore praecipitet, multo acido foeta sunt. Illud plus acidi habet, quam hoc, hoc vero plus quam sal Tanaceti, hoc plus quam sal Tussilaginis, hoc denique plus, quam sal Pulegii. Hanc maiorem in sale Plantaginis copiam solutio etiam scoriarum reguli Antimonii indicauit, quae cum nullo reliquorum vel ullam mutationem subiit. Sal Barbae Caprae salis tartarei particeps esse videtur. Phænomena quidem non dissentiunt, dulcedò vero eius id suadet. Cum porro salia Plantaginis et Anserinae acerrimo sapore gaudeant, minorem terrae copiam, salia Tanaceti, Tussilaginis, Pulegii, Barbae Caprae, et Centaurii minoris maiorem continere debent. Hancque copiam terrae in causa fuisse, cur eadem salia cum solutionibus sulphureis nullam mutationem subierint, admodum verisimile est.

§. 21. Salia Abrotani, Cardui benedicti, Hyssopti, Pimpinellae, Rutae, Cuscutae, Prunellae, Serpilli, Matricariae, sunt salia alkalia fixa, sulphure foeta. Sulphur, quod continent, diuersimode manifestatur. Salia Abrotani et Cardui benedicti spiritum Vitrioli, hoc obscuro flauo, illud subfusco diluto colore tingunt, solutio vero Lunae albo inde

~~prae-~~

praecipitatur colore. Ex altera igitur parte sulphur adesse indicatur, ex altera eius praesentia negatur. Et vice versa, salia Cuscutae, Prunellae, Serpilli sulphur suum per solutionem Lunae produunt, in spiritu Vitrioli ne halitum sulphureum indicantia. Tandem salia Hyssopi, Pimpinellae, Rutae et Matricariae et spiritum Vitrioli et solutionem Lunae indices sulphuris sui agnoscere debent. An igitur diuersae indolis sulphura? Id *Homburgus* et *Hiernius* pluribus experimentis edocti facti sunt, etsi in hunc usque diem plures adhuc reclament. Haec differentia vero in delicatis experimentis tantum agnoscitur. Quis rudis artifex norit, Cupra, Ferra, Antimonia, ubi experimenta chymica cum iis instituuntur, inter se diuersa esse? *Boyleus* tamen se experientia id addidisse fatetur. *Homburgus* inter sulphur vegetabile seu animale, bituminosum et minerale distinguit.* Primum rudioribus particulis constare asserit, tertium subtilioribus, secundum mediae naturae esse inter primum et tertium. Haec ingeniosus Vir ad explicandam aquarum regalium et fortium actionem. *Hiernius* sermonem alio modo flectit; vterque agnoscit, sulphura specie diuersa dari. Existimo igitur, salia Abrotani et Cardui benedicti minerale sulphur fouere, illud quidem in maiori copia quam hoc; salia vero Cuscutae, Prunellae, Serpilli, vegetabile solum vel animale, prius maiorem copiam quam posterius, hocque maiorem

ac

* Memoires de l'Academie des Sciences 1702 p. 49. ed. Bat.

ac sal Prunellae; tandem salia Hyssopi, Pimpinellae, Rutae et Matricariae bituminosum sulphur, siue sulphur mediae naturae inter vegetabile et minerale, duo posteriora quidem in maiori copia, ac priora. Hyssopi et Rutae salia minorem terrae copiam gerunt, ac salia Pimpinellae et Matricariae. Mirari tamen licet, sal Pimpinellae, etsi minorem prae reliquis sulphuris eiusque ob copiosam terram magis diluti quantitatem foueat, ubi solutum erat, odore suo sulphur indicasse, quod reliqua maiori quantitate sulphuris et pauciori terra foeta non fecerant. Sal Serpilli multa terra abundat, quod et ex eius insulso sapore diiudicari potest.

§. 22. Sal Fumariae est alkali fixum, sale communi foetum. Id constat ex solutione lunae, quae feri lactis instar praecipitata est. Terrae parum continet.

§. 23. Sal Marrubii sulphure quodam minerali et sale communi scatet.

§. 24. Salia Trifolii fibrini, Chamomillae, Meliloti, Pulmonariae, Fragariae, florum Sambuci iuxta sulphureum principium acido aliquid participant. Ex colore cinerum flor. Sambuci et Fragariae (§. 9.) sulphuris praesentia iam indicatur, imo lixiuum Fragariae odore suo, id manifeste monstravit. Salia Sambuci, Fragariae et Trifolii fibrini quoad copiam sulphuris primo lo-

Tom. V. Pp co

eo stant, postea salia Meliloti, Pulmonariae, Chamomillae. Quoad aciditatem copiam primum locum obtinet sal Fragariae et florum Sambuci, postea Pulmonariae, Meliloti, Chamomillae, Trifolii fibrini. Mutationes colorum in spiritu Vitrioli et solutione Lunae hunc in finem saltem consulendae. Sed quae paradoxa hic? Fragariae sal vix quodam sapore gaudet, attamen plus effervescent, quam salia Meliloti et florum Sambuci acria, et sal Pulmonariae peracre. At ex prioribus responderi posse existimo. Quo minus salia heterogeneis corporibus foeta sunt, eo magis acria sunt. Et vice versa. Iam vero palam est, Fragariae sal praee omnibus reliquis multo sulphure scatero. Hoc obtunditur sal; hinc et sapor fere perit. Verum hoc non impedit, quo minus Vitrioli spiritus cum sale colluctetur. Impedit saltem, ne eo gradu colluctetur, ac si sulphur absens vel eius copia minor fuisset. Hinc et sal florum Sambuci fortius effervescent. Salia Trifolii fibrini, Chamomillae, Meliloti, iuxta sulphur terram multam continere videntur, Chamomillae tamen minus quam reliqua. Sal Pulmonariae bituminosi sulphuris notas exhibet, idem vero exigua quantitate adest, et contra acidum sal inibi copiose continetur. Id quidem acorem non impedit, sed effervescentiam minuit, conformiter phoenomenis.

§. 25. Salia Origani, Millefolii, Pini, Scabiosae, Salviae, Anethi, Saniculae, sunt Alkalia fixa, sulphure

phure foeta et pauxillo alkali volatilis. Salia Origani et Millefolii in omnibus circumstantiis prope eadem sunt, saltim Origani sal sulphuris bituminosi, sal vero Millefolii sulphuris mineralis indicia praebet. Et quoniam solutio scoriarum Reguli Antimonii a sale Origani in rubrum colorem mutata est, et solutio sublimati in obscure flavum, aliquid etiam acidi sali Origani inesse patet. Salia Pini, Scabiosae, Salviae, vix a se invicem differunt, sulphure abundant bituminoso, et priores sulphuris copia multum superant.

§. 26. Salia Anethi et Saniculae sulphure multo scatere certum est. Id vel odor saltim lixivii cinerum Anethi indicat. Solutio Lunae rem dubio omni eximit. Et phaenomena illa omnia, quae cum spiritibus Vitrioli, Salis, Nitri, solutionibus sachari Saturni, Aluminis, sublimati, Lunae, Vitriolorum Veneris et Martis, euenerunt, omnia ob sulphur euenisse nullus dubitet. Sed quale id sulphur? An bituminosum? Illud vero spiritus Vitrioli colorem saltim mutat, nec in eo praecipitatur, spiritusque Salis et Nitri immutatos relinquit. Cuncta phaenomena, huic sali propria esse asserere ausim; ideo et sulphur, a quo exorta sunt, peculiaris plane indolis est. Nec mihi ultra progredi licet; sed non dubito, quin haec salia ob sulphur in iis contentum peculiare plane effectus habitura sint, si alia cum iis experimenta instituantur. Et tum specialiora de iis dici poterunt.

runt. Sal Anethi ditius est sulphure, quam sal Saniculae. Volatile, quod hisce salibus inest, ex fumo cum spiritu Nitri cognoscitur. Sal Saniculae et acidi paucillum continet, quod ex sublimati solutione croceo saltem inde colore tincta diiudicari potest.

§. 27. Sal Filicis est sal tertium, ammoniacalis naturae, sulphure foetum. Omnia indicia salis communis exhibet, sed quod cum spiritu Nitri fumum edat, et Alkali volatilii. Hoc in causa est, cur hoc sal ammoniacalis naturae pronunciauerim. Sulphur, quod continet, *minerale est*. Id Phoenomena cum spiritu Vitrioli et salis produunt. An exaltatio coloris in Vitrioli Martis solutione obseruata a volatili, an ab adstringente quadam re processerit, decidere nolo.

§. 28. Perspicuum itaque est, salia fixa plantarum differre, et qua re differant, argumentis sufficientibus monstrari. Sententia exinde ferri potest, an differentia haec in re Medica aliquod momentum habere possit? Nimis sane differunt, quam vt differentia eorum negligatur. Si sal Tartari e. g. a sulphuris, vel acidi, vel volatilii, admixtione immutari creditur, ita, vt alium tunc effectum in corpore humano editurum esset, ac sine vlla admixtione ingestum: quid impedit, quod et diuersis plantarum salibus diuersos effectus adscribere queamus?

§. 29.

§. 29. Sed falso supponitur, salia plantarum virtutem specificam plantarum, e quibus parata sunt, ita retinere, vt effectum eius sensibilem in corpore humano edere queant. Folia Absinthii, Cardui benedicti, Centauri minoris, eundem prope effectum edere creduntur, attamen salia eorum multum differunt. Vice versa, Nepetae et Euphrasiae folia, folia Tussilaginis et Plantaginis, Prunellae et Serpilli folia, diuersum effectum edunt, cum salia vix fere differant. Hoc, vti verum est, satis monstrat, salia plantarum eundem effectum non edere, ac eorum plantae. In effectum vero alicuius rei virtus specifica consistit, et haec causam sensibilem habere debet. Inest e. g. foliis Absinthii certus amaror, qui a sale et oleo peculiari modo permixtis prouenit; is vero in combustione plantae perit. Ergo et effectus inde proueniens in sale nullus erit. Non negauerim, possibile esse, vt halitus quidam subtilissimi alicuius rei, quae in planta non combusta existerant, et peculiarem effectum ediderunt, in sale remanere queant. Eos vero adeo subtiles et paucos esse oportet, vt sensibus nullo modo pateant. Id enim obseruatio euincit. Nullo modo me vrget exemplum Viri, a foliis Absinthii singulariter abhorrentis et varia inde symptomata sustinentis, et ab vsu salis Absinthii eodem modo affecti; * id enim rarissimum est. Et halitus subtiles e plan-

P p 3

ta

* Ephem. Nat. Curios.

294 DE SALIBVS ALKALIBVS FIXIS PL.

ta in sale remanentes, qui hic effectum produ-
xerunt, cum omnibus prope hominibus insensi-
biles sint, nec effectum sensibilem in aliis pro-
ducent.

CLASSIS TERTIA.

CONTINENS.

HISTORICA.



CONVERSIONES
RERVM SCYTHICARVM
TEMPORIBVS
MITHRIDATIS MAGNI
ET PAVLLO POST MITHRIDATEM.
T. S. B.

Venio ad tempus maximis rebus gestis insignitum, monumentorum miserabili strage atque interitu deforme, septemtrionalibus autem fabulis foecundum. Nam Scythae tam a Mithridate Eupatore adflicti sunt, quam a Getis pulsi: inde iam de Othino Afisque fama ducta, Troianis admittis originibus. Quae ex instituto nostro sic tractabimus, vt quantum veritatis in hoc altissimo puteo demersum esse sentiemus, tantum pro virili parte proferamus et a vanis perpurgemus. Haud sum ignarus, ab exitu Alex-
Tom. V. Qq andri

andri Macedonis vsque ad hunc Mithridatem annos ducentos intercedere: eos tamen veluti deferta loca et inculta tesqua relinquere nos oportet. Illa est videlicet monumentorum istius aetatis conditio. Quantum est, quod vel in primis de Lyſimacho nobis relictum fuit? Tamen, si recordemur, Thraciam eum tenuisse et Ponticas provincias, fieri non potest, quin Graecas toto litore Ponti Euxini colonias idem quoque dicto audientes habuerit, vt tanto magis illius rebus Scythicas contineri sentiamus. Fuisse Lyſimachum, quem regem! quam potentem! fuisse igitur tantummodo constat: et tum fere, captum bello a Dromichaete Getarum rege et dimissum, (1) vel *τραγωδύμενα* de eius liberis interferuntur, denique Seleuci Nicatoris senis de sene Lyſimacho victoriae. Veluti canis e Nilo, ita tantas res delibant *οἱ δαυμόγιοι*. Fateor, scriptores eorum temporum Graecos nobis periisse: tamen, si exstarent, credo eos Laconicum isthuc nobis exorsuros, *ἄμμες ποτ' ἤμες ἄλκιμοι*. Quid enim simile vetustis historicis illa aetas protulit? Nunc, cum etiam isti interciderunt, sit sane in ducentis annis *Σκυθῶν ἰζημία*. Nam Macedonum reges ad Philippum vsque, quos rerum suarum praecones nacti sunt? Philippus qualem cuperet, habuit Polybium Megalopolitanum, magnum virum, sed qui de Scythicis rebus, in his, quae ex incomparabili opere exstant, non vacauit, nisi vbi occasione belli, quod

(1) Strabo pag. 209. et 211. ed. Casaub. conf. Plutarchum in Demetrio.

quod Byzantii cum Rhodiis habuere, de Maeotide et Ponto et mercatura Pontica quaedam interfatus est lectu dignissima. (2)

Quamobrem de Mithridate nos hic, quantum potest, videamus. Strabo, (3) Mithridatis ducumque eius armis, regionem, inde a Tira fluuio, quem alibi Danastrim esse demonstrauius, per Maeoticas gentes et per omne, vsque in Colchidem, litus Ponticum, illustriorem, quam dudum fuerat, factam praedicat. Modo res Ponticae et ipsius Mithridatis illa nunc in luce versarentur, vt dudum. Si Memnon, ne quid dicam de reliquorum scriptorum ruina, sub qua illa tempora sepulta iacent, igitur, si vel vnus Memnon hodie exstaret, quam multa de Mithridate sciremus. Photius effecit, vt eum maxime desideremus, quem is tanta dignum diligentia iudicauit, quanta haud facile alterum aliquem, et in quo tam multas reperimus veluti e naufragio tabulas rerum obscurae et intermortuae memoriae. Photius ex Memnone, (4) *Mitbridates*, inquit, *postquam regnare coepit, κατ-εστρέψατο πολέμῳ ἢ τὰς περὶ τὴν Φάσιν βασιλεῖς, ἕως τῶν κλιμάτων, τῶν ὑπὲρ τὸν Καύκασον, ἢ τὴν ἀρχὴν ἠύξησε, bello deuicit reges circa Pbasin fluuium vsque ad regiones, quae super Caucaso monte sitae sunt et regnum suum auxit.* Haec maximarum victoriarum summa est. Tantundem fere nobis ex

Qq 2

Trogo

(2) p. 425. seq. ed. Gron. (3) p. 10. ed. Casaub. (4) p. 378. ed. Moesk.

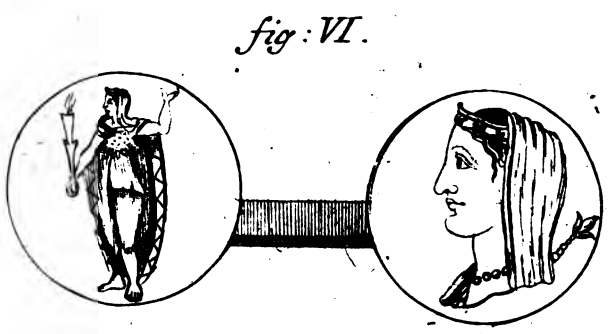
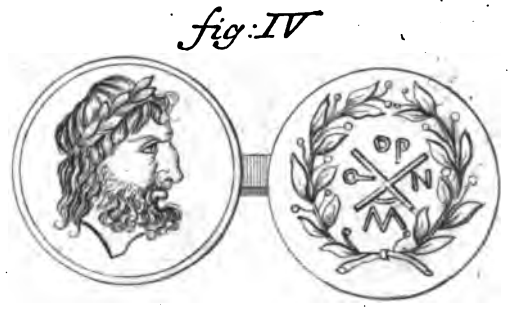
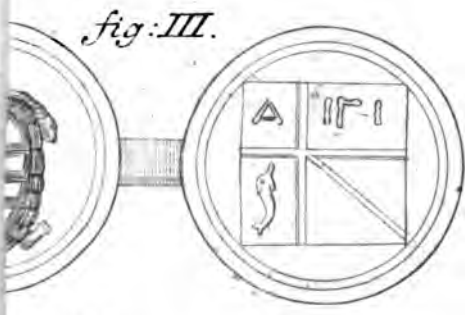
Trogo Pompeio Iustinus reliquit: (5) *ad regni administrationem cum accessisset, statim non de regendo, sed de augendo regno cogitavit*: itaque Scythas, inuictos antea, ingenti felicitate perdomuit. Sic item Appianus Alexandrinus: (6) ἐχειρώσατο δὲ τὰ περιόικα τῶν βαρβάρων καὶ Σκυθῶν ὑπὸ ἡγεῖο πολλῶν, καὶ Ῥωμαίαις τεσσαρακοντέτη πόλεμον ἐγκρατῶς ἐπόλεμυσεν, *deuicit circumiectos barbaros et Scytharum multos subiecit et cum Romanis summa vi bellum gessit annos quadraginta*. Has res igitur nobis curae esse oportere iudicauimus.

Mithridate Euergete defuncto, Mithridates, ut Sallustius ait, (7) *extrema pueritia regnum ingressus, matre veneno interfecta*. Historia Miscella: (8) *regnauit annis quadraginta, alii triginta*. Perperam utrumque. Nam cum, M. Tullio Cicerone, C. Antonio Nepote, *Coff. A. V. C. 691*. quod certo constat, interiit, is, si quadragesimus fuit annus, ne quid dicam de tricesimo, sequitur, Mithridatem A. V. C. 652. imperium adiisse. At numum Mithridatis vide, similem illis, quos Ioannes Valens in Achaemenidarum imperio produxit, cuius ἔκλυπον Buxbaumius CPlI redux mecum communicauit. Habes in eo annum ΒΣ signatum, siue 202. Si is Seleucidaens fuit, in autumnum A. V. C. 643. incidit: sin Pontica illa fuit Epochā secundum Ioannis Valentis rationes, erit A. V. C. 649.

A p

Tabula XII.
Fig. 1.

(5) l. XXXVII. 3. (6) p. 412 ed. Tol. (7) In Fragmentis e Suetonio. (8) p. 40. ed. Murat.





71.

Apparet igitur ex titulo numi ΒΑΣΙΛΕΩΣ ΜΙ-
ΘΡΑΔΑΤΟΥ ΕΥΠΑΤΟΡΟΣ ante A. V. C. 652 regem
fuisse Mithridatem. Quare ex codice Ambrosia-
no veram in Paulo Diacono lectionem restituit
Ludouicus Muratorius V. C. *vixit LXXII, con-
tra Romanos bellum habuit annis XL.* Ita natus
fuit A. V. C. 620. Appianus dubius haeret, (9)
annosne LXVIII. aut LXIX. vixerit: regno tri-
buit LVII sicuti Plinius (10) LVI. Eutropius, T. Li-
nium fere solitus sequi: *regnauit annis sexaginta,
vixit septuaginta duobus.* Ab hac sententia in an-
nis regni non abhorret vel Strabo, (1) cui ἐνδεκά
ἔτη γεγονώς patri successisse dicitur, videtur enim
mihi Strabo δωδέκα scripsisse, vel Memnon (2)
cui τρισκαυδεκάετης ad regnum peruenisse dicitur,
neque ita multo post a matris fratrisque aut fictis
insidiis aut veris sese vindicasse parricidio. Igi-
tar A. V. C. 632. regnare coepit, vnde ad illius
exitum, anni sunt sexaginta Eutropii, aut potius Li-
nii. Sed cum Paulus Diaconus et Appianus annos
quadraginta bellum cum Romanis gessisse scribunt,
manifesti erroris tenentur. Vix enim XXXI anni
numerari possunt, si inde a Cappadocia Ariobar-
zani regi L. Sullae ductu restituta et ab A. V. C.
660. tamquam a belli Romani prima occasione
secundum Dionysium Petauium exordiaris: nam
A. V. C. 666. demum, nudatis Mithridatis confi-
liis, bellum a Romanis indictum gerique coeptum
est. Ergo anni fere triginta ante bellum Roma-

Qq 3

num

(9) p. 411. 412. (10) l. XXV. 2. (1) p. 309. (2) p. 378.

num vacui fuerunt bellis Scythicis, quae Mithridates mature suscepit gerenda. Iam velim pro se quisque consideret, qui vigor animi in hoc regem iam senem fuerit, quae latissime regnandi et cupiditates et spes et per barbaricam militiam ad maiores res indurandi militis fiducia, ut inde concludamus, qualem adolescentiam exegerit Mithridates.

Nihil est reliquum, quam ut de bello Scythico passim undique colligamus veterem memoriam, praesertim vero ex Strabone. Huic enim in Mithridaticis multum tribuo. Nam Strabonis mater neptis Lagetae fuit, proneptis *Dorylai eius*, qui apud Mithridatem Euergeten multum potuit. Huius Dorylai frater Phyletaerus filium reliquit et ipsum Dorylaum nomine, quem Mithridates summis honoribus admovit. Lagetam quoque Strabonis proavum et Stratarcham Lagetae fratrem ad se vocatos coluit. Stratarcham Strabo ultima senectute vidit. Mosphernes matris Strabonis patruus, extremis temporibus Mithridatis illustris evasit: ne nunc totum genus Strabonis hic repetam, Mithridaticis deinceps turbis, ut res istae etiam intra domus Strabonis famam contineri potuerint. Modo non ita exiliter res tantas tractasset Strabo, quod condonari possit alio in argumento versanti, nisi etiam confuse et suobscure tractasset, quo vitio in toto opere laborat. Strabone igitur auctore (3) Mithridates cum ad
regnum

(3) p. 372.

regnum peruenit, Pontum tenuit iis finibus, quos pater rexerat. Haly fluuio versus orientem a Cappadociae regno diuidebatur, inde litus omne ad Amastriam vsque et Paphlagoniae quaedam partes ea in ditione censebantur: in mediterraneis vero prouinciae ultra Halyn extendebantur. Sinope erat regia, ubi et natus est Mithridates.(4) Hic deinde Heracleam, Graecam urbem et liberam, sibi subiecit et litus omne Ponticum, quod Cappadociae praetendebatur vsque ad Colchidem.(5) Occupauit quoque Armeniam minorem, quae Cappadociam ab oriente claudebat, per Euphratem a reliqua Armenia diuisa. Et cum Tibareni ultra Trapezuntem Chaldaei que vicini sub dynastis Armenis fuissent, eos quoque sibi subiecit, *Ἀντιπάτριος τῆ Σισιδος παραχωρήσαντος*, *Antipatro Sifide se suaque tradente*. Armenia, ob situm regionis maximis munimentis refugioque fortunarum, si quis casus postularet, peropportunum, in primis curae fuit Mithridati, ut in ea ad quinque et septuaginta castella exstruxerit, inque iis opum suarum magnam partem recondiderit.(6) Sic aditus in Colchidem patefactus erat, (7) regionem admodum accommodatam Scythicum bellum cogitanti, propter tum subsidiorum ad naualem rem copiam, tum expeditionis meditatae et occasionem et expropinquo facilitatem. Deinde iam, qui Mithridatica scripserunt, (8) Achaeos, Zygos, Heniochos, Cer-

(4) Strabo p. 375. (5) ibid. (6) Strabo p. 382. (7) ib. p. 343.
 (8) Apud Strabonem p. 342.

Cercetas, Moschos, et Phreirophagos et Θοάνας, siue ut in excerptis Strabonis est, Σοάνας aliasque paruas circa Cáucasum gentes commemorant, per quas via aperienda erat et Scythas et Borysthenem Istrumque petituro. Proximi Bosporanis Achaeci, Zygi medii inter Heniochos Colchis proximis; nam reliquae gentes iam intra montes reiectae. Hos populos partem vi, partem dolo et conditionibus in potestatem redegit Mithridates. Heniochi qui quatuor reges habuerunt, ita fidi fuere postea Mithridati, ut, cum a Cn. Pompeio victus in Bosporum fugeret, (9) in eorum regionem sese reciperet sine metu, non item committere se fortunamque suam ausus Zygiis, quorum in litoribus magna molestia iter fecit, naues subinde conscendens, donec Achaecos teneret, qui eum cupide receperunt. Notae deinde Maeoticae gentes, Sindi, Dandarii, Toreatae, Agri, Arrechi, Tarpetes, Obidiaceni, Sittaceni, Dosci, (10) quae gentes a Ponti litoribus circumiectae Bosporanis, ad Maeotin et Tanaim, Caucasumque pertinebant. Incertum, Scythaene, an Sarmatici corporis. Nam ad orientem iam Sarmatae planiciem, usque ad Volgam, incolebant. (1) Illae autem gentes etiam postea saepe Bosporanis subiectae, saepe sui iuris fuerunt. (2) Sed ut erat Mithridates promptus atque arte fallendi nulli secundus, ita omnes illos populos conciliaffe sibi videtur,

(9) Strabo p. 342. (10) Strabo p. 341. (1) Strabo p. 343. (2) ib. p. 341.

detur, et in societatem belli contra Scythas accepisse.

Scythiae autem hunc fere statum iis temporibus fuisse reperio. Cherrhonesus in tres quasi ditio- nes diuisa erat. Litora Graecae coloniae inde ab vltima aetate obsederant: Bosporani tyranni partem agri tenebant orientalem, Scythae, quos Tauros et Γεωργῆς nostri vocant, occidentalem. (3) Sed Bosporanae prouinciae in obiecta Asia vltra Bosporum Cimmerium multo ampliores fuerunt. Panticapaeum sedes tyrannorum fuit: Theodosiopolis siue Theodosia, quae nunc *كاسا* *Casa*, extrema versus Tauros vrbs. (4) Hi autem Scythae Tauri ab Isthmo, vbi ceteris connexi fuerunt Scythis, maximam Cherrhonesi incoluerunt regionem. Haec tum Scythia Minor dicta. Regio omnis copiosa, quod Scythae agros suos impigre colerent. Tantis inde frumenti prouentus fuit, vt Leucon tyrannus Atheniensibus ab Theodosia vndecies millia medimnorum submiserit, quamquam Chrestomathiae Straboniana tantum centum et quinquaginta millia edunt. (5) Ceterum quod Bosporani dynastae ante Mithridatem tyranni vocantur, id argumento est, potentiam illam ex Graecis coloniis esse ortam, quae etiam iustam dominationem et a se delatam vltro, non fere alio magis quam tyrannidis nomine nuncuparunt, vt Miltiades tyrannus vocatus est apud Cornelium Nepotem. *Strab. Tom. V.* R r bo:

(3) ib. p. 214. (4) p. 214. 215. (5) p. 91. ed Hudc.

bo: (6) ἐκαλήντο δὲ τύραννοι, καίπερ οἱ πλείους ἐπιεικέως γεγονότες, nuncupabantur vero tyranni, quamquam plerique eorum clementes fuerunt. Non est, quod miretur Isaac Casaubonus tamquam in re insolita, tyrannos dici, qui aequitati studuerint. Hic ipse vir longe doctissimus tyrannos illos ex Diodoro Siculo et Strabone nobis, quamquam non accurate, exposuit, tamen ita, (6) ut, quando neque ista tempora, neque res ad nostram curam pertinent, eorum recensione supersedere possimus. Archæanaëtidae, Milesiorum apud Panticapaeum coloniam, magistratus magis, quam reguli, inde usque ab Olymp. LXXV. quo fere tempore Xerxes in Graeciam traiecit, annos duos et quadraginta rebus praefuerunt. Spartacus primus tyrannorum Olymp. LXXXV. 3. post Corinthiaci initium belli fuit. Ad Olympiadem CXXIV. Diodorus Siculo nos deserit, ut anni centum et octoginta ad initia Mithridatis vacui maneant, quos ex obscuris Strabonis testimoniis, Isaac Casaubonus non ausus est restituere. Parysades tum maxime tyrannus Bosporanorum fuit cum Mithridates bellum Scythicum gereret. Minori Scythiae Strabo accenset partem regionum extra Isthmum usque ad Borysthenem, magnam videtur dicere, quae ad Tyram Istrumque pertinebat, (7) quamquam hic locus in Strabone corruptelae mihi suspectus est. Id enim vero dicere apparet, Scythas non latius coluisse iis temporibus, quam Herodorus

(6) Comment. in Strabonem p. 117. (7) p. 215.

proditi, nisi quod Istro traiecto agri nescio quantum tenere, Thracibus vi eiectis. Nam Strabo hic Mithridatica tempora illorumque scriptores respicit. Scythae illi pecudibus studebant et lacte victitabant, agros vero elocabant colendos, quibus visum esset exiguum tributum pendere: non solventibus bellum inferebant. (8) Igitur permisti Scythis alii populi fuerunt. Scymnus Chius, qui Mithridate opibus florente periegesin scripsit, de Tomitis, cum canit: ὑπὸ Σκυθῶν ἐν κύκλῳ οἰκισμένους prodidit. Et de Dionysopoli idem

Ἐν μεθαρτίοις δὲ τῆς Κροβύζων ἢ Σκυθῶν
Χώρας, μιγάδας Ἑλλήνας οἰκηλάς ἔχει.

*In confinibus autem Crobixorum et Scytharum
Terraе, Graecos habet barbaris permistos incolas.*

Tenuere igitur Mithridatico aevo Scythae etiam regiones ultra Istrum. In superioribus regionibus vicini Germanis Bastarnae et Tyrigetae, quos Strabo Germanici populos corporis fuisse suspicatur. (9) Roxolani denique ἀρκλικώλατοι μελαζὺ τῆς Ταναΐδος ἢ τῆς Βορυσθένους νεμόμενοι πεδία, ὑπὲρ δὲ Ρωξολανῶν εἰ τινας οἰκῶσιν, ἕκ ἴσμεν, maxime ad boream reiecti agros intra Tanaim et Borysthenem incolunt, an super Roxolanis alii colant, ignoramus. Hic tantum velim, ut veterum opinio unicuique ob oculos versetur, quae Tanais fontes multo, quam sunt, magis sub borea ponerent, ut superiorem Volgam

Rr 2

cum

(8) ib. (9) p. 211.

Cercetas, Moschos, et Phreirophagos et Θοάνας, siue ut in excerptis Strabonis est, Σοάνας aliasque paruas circa Cáucasum gentes commemorant, per quas via aperienda erat et Scythas et Borysthenem Istrumque petíturo. Proximi Bosporanis Achaeci, Zygi medii inter Heniochos Colchis proximos; nam reliquae gentes iam intra montes reiectae. Hos populos partem vi, partem dolo et conditionibus in potestatem redegit Mithridates. Heniochi qui quatuor reges habuerunt, ita fidi fuere postea Mithridati, ut, cum a Cu. Pompeio victus in Bosporum fugeret, (9) in eorum regionem sese reciperet sine metu, non item committere se fortunamque suam ausus Zygiis, quorum in litoribus magna molestia iter fecit, naues subinde conscendens, donec Achaecos teneret, qui eum cupide receperunt. Notae deinde Maeoticae gentes, Sindi, Dandarii, Toreatae, Agri, Arrechi, Tarpetes, Obidiaceni, Sittaceni, Dosci, (10) quae gentes a Ponti litoribus circumiectae Bosporanis, ad Maeotin et Tanaim, Caucasumque pertinebant. Incertum, Scythaene, an Sarmatici corporis. Nam ad orientem iam Sarmatae planiciem, usque ad Volgam, incolebant. (1) Illae autem gentes etiam postea saepe Bosporanis subiectae, saepe sui iuris fuerunt. (2) Sed ut erat Mithridates promptus atque arte fallendi nulli secundus, ita omnes illos populos conciliaffe sibi videtur,

(9) Strabo p. 342. (10) Strabo p. 341. (1) Strabo p. 343. (2) ib. p. 341.

detur, et in societatem belli contra Scythas accepisse.

Scythiae autem hunc fere statum iis temporibus fuisse reperio. Cherrhonesus in tres quasi ditio- nes diuisa erat. Litora Graecae coloniae inde ab vltima aetate obsederant: Bosporani tyranni partem agri tenebant orientalem, Scythae, quos Tauros et Γεωργῆς nostri vocant, occidentalem. (3) Sed Bosporanae prouinciae in obiecta Asia vltra Bosporum Cimmerium multo ampliores fuerunt. Panticapaeum sedes tyrannorum fuit: Theodosiopolis siue Theodosia, quae nunc *كاس* *Casa*, extrema versus Tauros vrbs. (4) Hi autem Scythae Tauri ab Isthmo, vbi ceteris connexi fuerunt Scythis, maximam Cherrhonesi incoluerunt regionem. Haec tum Scythia Minor dicta. Regio omnis copiosa, quod Scythae agros suos impigre colerent. Tantus inde frumenti prouentus fuit, vt Leucon tyrannus Atheniensibus ab Theodosia vndecies millia medimnorum submiserit, quamquam Chrestomathiae Strabonianae tantum centum et quinquaginta millia edunt. (5) Ceterum quod Bosporani dynastae ante Mithridatem tyranni vocantur, id argumento est, potentiam illam ex Graecis coloniis esse ortam, quae etiam iustam dominationem et a se delatam vltro, non fere alio magis quam tyrannidis nomine nuncuparunt, vt Miltiades tyrannus vocatus est apud Cornelium Nepotem. Stra-
 Tom. V. R r bo :

(3) ib. p. 214. (4) p. 214. 215. (5) p. 91. ed HudC.

bo: (6) ἐκαλῶντο δὲ τύραννοι, καίπερ οἱ πλείους ἐπιει-
 κεῖς γεγονότες, *nunciabantur vero tyranni, quam-*
quam plerique eorum clementes fuerunt. Non est,
 quod miretur Isaac Casaubonus tamquam in re
 insolita, tyrannos dici, qui aequitati studuerint.
 Hic ipse vir longe doctissimus tyrannos illos ex
 Diodoro Siculo et Strabone nobis, *quamquam non*
accurate, exposuit, tamen ita, (6) vt, quando ne-
que ista tempora, neque res ad nostram curam
pertinent, eorum recensione supersedere possimus.
 Archæanaclidæ, Milesiorum apud Panticapæum
 coloniam, magistratus magis, quam reguli, inde
 usque ab Olymp. LXXV. quo fere tempore Xer-
 xes in Graeciam traiecit, annos duos et quadra-
 ginta rebus praefuerunt. Spartacus primus tyran-
 norum Olymp. LXXXV. 3. post Corinthiaci ini-
 tium belli fuit. Ad Olympiadem CXXIV. Dio-
 dorus Siculus nos deserit, vt anni centum et octo-
 ginta ad initia Mithridatis vacui maneant, quos
 ex obscuris Strabonis testimoniis, Isaac Casau-
 bonus non ausus est restituere. Parysades tum ma-
 xime tyrannus Bosporanorum fuit cum Mithrida-
 tes bellum Scythicum gereret. Minori Scythiae
 Strabo accenset partem regionum extra Isthmum
 usque ad Borysthenem, magnam videtur dicere,
 quae ad Tyram Istrumque pertinebat, (7) quam-
 quam hic locus in Strabone corruptelae mihi sus-
 pectus est. Id enim vero dicere apparet, Scy-
 thas non latius coluisse his temporibus, quam He-
 rodotus

(6) Comment. in Strabonem p. 117. (7) p. 215.

rodoti, nisi quod Istro traiecto agri nescio quantum tenuere, Thracibus vi eiectis. Nam Strabo hic Mithridatica tempora illorumque scriptores respicit. Scythae illi pecudibus studebant et lacte victitabant, agros vero elocabant colendos, quibus visum esset exiguum tributum pendere: non solventibus bellum inferebant. (8) Igitur permisti Scythis alii populi fuerunt. Scymnus Chius, qui Mithridate opibus florente periegesin scripsit, de Tomitis, cum canit: ὑπὸ Σκυθῶν ἐν κύκλῳ οὐκ ἐμὲνς prodidit. Et de Dionysopoli idem

Ἐν μεθορίοις δὲ τῆς Κροβύζων ἢ Σκυθῶν
Χώρας, μιγάδας Ἑλλήνας οὐκ ἐμὲνς ἔχει.

*In confinibus autem Crobizzorum et Scytharum
Terrae, Graecos habet barbaris permistos incolas.*

Tenuere igitur Mithridatico aevo Scythae etiam regiones ultra Istrum. In superioribus regionibus vicini Germanis Bastarnae et Tyrigetae, quos Strabo Germanici populos corporis fuisse suspicatur. (9) Roxolani denique ἀρκλικώλατοι μετὰ τῆς Ταναΐδος ἢ τῆς Βορυσθένος νεμόμενοι πεδία, ὑπὲρ δὲ Ρωξολανῶν εἰ τινας οὐκ ἴσμεν, *maxime ad boream reiecti agros intra Tanaim et Borysthenem incolunt, an super Roxolanis alii colant, ignoramus.* Hic tantum velim, vt veterum opinio vnicuique ob oculos versetur, quae Tanais fontes multo, quam sunt, magis sub borea ponerent, vt superiorem Volgam

Rr 2

cum

(8) ib. (9) p. 211.

cum Tanai confudisse videantur. Igitur Roxolani intra fontes Borysthenis ad Tanaim forte et ad Volgam coluisse videntur Mithridaticis temporibus. Frustra adhuc illa in gente, quae tum primum cognita, deinde etiam Romanis bellis celebrata fuit, ad hunc diem laboratum fuit. Nihil ego inuenio, in quo satis acquiescam. Sed cum Budinos Fennorum maiores fuisse arbitror, ut alias exponam amplius, Fenni autem etiam nunc Suedos *Rosjalein*, *Ros*, *populum* vocant, potest sane eas res nos aduertere.

Cum his gentibus gesturus bellum *Mithridates*, a *Cherrhonestis* ad opem ferendam inuitatus est. Strabo: (10) *Χερρόνησος ἦν πρότερον αὐτόνομος πορθεμένη δὲ ὑπὸ τῶν βαρβάρων ἠναγκάσθη προσάτην ἐλέσθαι Μιθραδάτην τὸν Εὐπάτορα, στρατηγὸν ἐπὶ τῆς ὑπὲρ τῆς Ἰσθμοῦ μέχρι Βορυθένης βαρβάρων καὶ τῆς Ἀδρίας. Cherrhonestus urbs erat antea sui iuris, vexata agro vastato a barbaris (καταλαρχομένη Chrestomathiae Straboniana habent, quod facit, ut captam atque dirutam fuisse non ausim interpretari) coacta est patronum et defensorem sibi adsciscere *Mithridatem Eupatora*, qui tum bellum mouebat aduersus barbaros supra *Isthmum Cherrhonesti Fauricae* usque ad *Borysthenen* et *Hadriaticas* regiones. Oportet igitur in vicino iam fuisse *Mithridatem*, *Scythasque* ad *Tanaim* petiisse, cum a *Cherrhonestis**

(10) p. 213. (1) p. 88. ed. Hudf.

fitis in auxilium vocaretur. Misit copias, ut videtur, navales ex Colchide, cum Cherson urbs aliter ab eo adiri non posset. Strabo ita pergit narrando: *Mitridates hoc cognito, ἄσμενος πέμψας εἰς τὴν Χερσόνησον Σκυλίαν, ἅμα πρὸς τε τῆς Σκύθας ἐπολέμη Σκυλῶν τε ἢ τῆς Σκυλῶν παῖδας, τῆς περὶ Παλακῶν, ἣς Ποσειδώνιος μὲν περὶ Πηλοποννησίου, Ἀπολλωνίδης δὲ ὀγδοήκοντα, ἅμα δὲ τῆς τε ἐχειρώσατο βία ἢ Βοσπόρου καλέσῃ κύριος, παρ' ἐκόντος λαβῶν, Παρισάδου τῷ καλέχοντος.* Locus hic corruptelae accusatus fuit, quod interpretes τῆς περὶ Πάλακων *Palacum ipsum*, more utique Graecorum loquendi explicarent, non cohaerente deinde sensu, Casaubonus vero Παλάκιον castellum reponeret, quo usus sit Scilurus aduersus *Mitridatis legatos*. Huius sane meminerat Strabo: (2) sed idem paullo ante (3) Παλακῶν τῶν Σκυλῶν commemorat, eamque lectionem veram esse sentio, quam codices proponunt, eum autem in sensum accipio, quod filii nepotesque Sciluri, Palacum ut vel maiorem natu, vel testata virtute virum ducem secuti sint, patre ob senectutem imbelli. Non minus enim hanc interpretationem usus Graecorum loquendi quam alteram admittit, loci autem huius natura eam solam. Conuerto igitur Latine: *Mitridates cupide misit exercitum Cherrbonensem, simul contra Scythas bellum gessit et contra Scilurum. Scilurique liberos, qui cum Palaco erant, quosue*

R r 3.

Ro-

(2) p. 216. (3) p. 211.

Posidonius ait quinquaginta, Apollonides vero numero ad octoginta fuisse: et simul bosce subegit et Bosporum in potestatem recepit Parisade concedente, qui regionem tenebat. Ita et res diuersae et tempora vno in sermone proponuntur. Duces memorantur, Diophantus, quem Memnon quoque inter praecipuos commendat, et Neptolemus. Diophantus videtur Chersonitis subsidio venisse contra Scilurum et filios. Nam Strabo testatur, (4) contra eos a Diophanto Mithridatis duce Eupatorium castellum esse conditum ad Carcinitin sinum: occidentale id Tauricae litus erat. Eodem teste, (5) Scilurus et filii castella in Cherrhoneso condiderunt iisque vsi sunt belli arcibus contra duces Mithridatis, Παλάκιον τε ἔχοντες καὶ Χαῦρον καὶ Νεάπολιν, haec tria tantum nominat Strabo. Itaque praelium quoque cum Palaco in Cherrhoneso commissum videtur, quoniam Diophantus fuit, qui eum vicit. Hic Palacus Scythas et Roxolanorum, duce Thasio, submissa auxilia secum habebat numero ad quinquaginta milia, Diophantum vero multo minori instructum exercitu aggressus, contra phalangem ordinatam armatamque egregie, cum ista multitudine adeo nihil effecit, ut multis suorum amissis recipere sese cogeretur. Scythae interim etiam Parisaden Bosporanorum tyrannum urgebant adeo, ut ex desperatione salutis Mithridati se suaque traderet. (6) Strabo: Παρισάδης ἔχοντες τὴν εἰς τὴν ἀντιλήχην πρὸς τὰς βαρ-

(4) p. 216. (5) ib. (6) Strabo p. 214.

Βαρβάρους Φόρον πραττομένους μείζω τῷ πρότερον, Μιθριδάτῃ τῷ Εὐπάτορι παρέδωκε τὴν ἀρχήν. *Parisades cum non posset resistere barbaris tributum poscentibus maius, quam antea, Mithridati Eupatori tradidit principatum.* Huic Parisadae subsidio venisse videtur Neoptolemus dux. Illius cum Scythis duas pugnas recenset Strabo duobus locis. Vno in loco equestre certamen super glacie Maeotidis paludis ponit ante nauale praelium eadem in Maeotide. (7) Οἱ δὲ, inquit, πάγοι παρ' αὐτοῖς τοῖσ'τοι τινὲς εἰσιν ἐπὶ τὰ νότια τῆς λίμνης τῆς Μαωλίδος, ὡς' ἐν χωρίῳ, ἐν ᾧ χειμῶνος ὁ τῷ Μιθριδάτῃ στρατηγὸς ἐνίκησε τὰς βαρβάρους ἵππομαχῶν ἐπὶ τῷ πάγῳ, τὰς αὐτῆς καλιναυμαχῆσαι θέρους, λυθέντος τῷ πάγῳ. *Glacies apud eos tanta est in ostio lacus Maeotidis, ut eodem in loco, in quo hieme Mithridatis dux barbaros equestri certamine super glacie vicit, nauali praelio eosdem superaueravit aestate, glacie soluta.* Alibi praelium nauale ponere videtur ante equestre et hibernum, (8) ita enim factus est: *Νεοπτόλεμον δὲ Φάσι τὸν τῷ Μιθριδάτῃ στρατηγὸν, ἐν τῷ αὐτῷ πόρῳ θέρους μὲν ναυμαχίᾳ περιγενέσθαι τῶν βαρβάρων, χειμῶνος δ' ἵππομαχίᾳ.* *Neoptolemum, aiunt, Mithridatis ducem eodem in traiectu, aestate nauali praelio superiorem fuisse barbaris, hieme autem equestri certamine.* Sed apparet priorii loco eum multo curatius temporum ordinem respexisse, in altero rem magis quam tempus. Ostium Maeotidis, traiectus

(7) Strabo. p. 50. (8) id. p. 212.

iectus est, seu Bosporus Cimmerius, de cuius congelata glacie etiam Herodotus testatur, (10) ἢ δὲ Φάλασσα πηγνύλα καὶ ὁ Βόσπορος πᾶς ἔστι Κιμμέριος, καὶ ἐπὶ τῷ κρυστάλλῳ οἱ ἐντὸς τὰ Φερα Σκύθαι καθοικημένοι στρατεύονται καὶ τὰς ἀμάξας ἐπελάυνουσι πέραν εἰς τὴν Ἰνδὴν. *Mare autem congelascit et Bosporus Cimmerius totus, super glacie Scythae qui intra fossam sunt, (in Cherrhoneso Taurica) praelia committunt et super eadem plaustris vecti usque in Indiam iter faciunt.* Et gelu quidem condensari facillime potuit tum Bosporus tum magna Maeotidis et Ponti pars, quod iis locis passim limo inducto aggestaque harena vada praebentur, qua de re prolixè disputat Polybius. (1) Ex loco autem, in quo praelia commissa sunt, concludo, Bosporano tyranno hunc maxime Neoptolemum auxilio esse missum contra Scythas et victoribus Mithridaticis Parisadem ἐκόντα ἀεὶ κωλί γε θυμῷ Bosporanas regiones tradidisse. Scymnus Chius de Panticapaeo tyrannorum sede, in fragmentis Holstenianis:

Ἐπὶ αὐτῆς τῆς σέμαλος τῆς Μαυρίδος
 Λίμνης τὸ Παντικαπαίων ἐστὶν ἕχαλον
 Τῆς Βοσπόρου Βασιλείου ἐπωνομασμένον.

*In ipso ostio Maeotidis
 Paludis Panticapaeum est extremum
 Bospori Regia cognominatum.*

Scriptit Scymnus, ut Henricus Doduellus argumentis veritati consentaneis demonstravit, A. V. C.

664.

(10) l. IV. c. 28. (1) p. 308. 309. ed. Casaub.

664. periegesin illam Nicomedi Chresto regi Bithyniae, Mithridatis clienti dedicatam, ad quam haec fragmenta refero. Igitur cum a Mithridate, aliquot annis ante, constitutum esset regnum Bosporanum, hunc nominis honorem consecutum est Panticapaeum. (*) Historia Miscella: (2) *Mithridates totum Ponticum mare in circuitu cum Bosporo tenebat.* Sed ultra Carcinitin sinum et Borysthenem nihil tenuisse videtur. Ad curam Mithridatis de ornando Panticapaeo refero, quod Plinius scribit: (3) *circa Bosporum Cimmerium in Panticapaeo vrbe, omni modo laboravit Mithridates rex et ceteri incolae, sacrorum certe causa, laurum myrtumque habere: non contigit.* Pertenuis igitur haec memoria est a Strabone conseruata, ceterarum rerum nulla, nisi quod ad Ctenuntem extrema tentasse inuenio Scythas, ab ea autem vrbe depulsos tota denique Cherrhoneso cessisse. (4) Tributum deinde Bosporani, in quo nomine iam omnes et Graeci et Scythae, qui Cherrhonesum tenebant, censebantur, Mithridati pependerunt in singulos annos frumenti medimnos ad centum et octoginta millia, argenti ducenta talenta. (5)

Romani, inquit Memnon, (6) cum suspecta haberent Mithridatis consilia, τοῖς Σκυθῶν βασιλεῦσιν ἐψηφισαν τοὺς παλῶας αὐτὸν ἀρχὰς ἀποκα-
Tom. V. S s. ταθῆ-

(*) Quae vrbs nunc كبيرش Gbiersch seu Kbiersch et Kersch dicitur.
(2) p. 34. ed. Muratorii. (3) l. XVI. c. 32. (4) Strabo p. 216. (5) p. 215.
(6) Photius p. 378.

ταθῆσαι, decreuerunt, ut *Mitbridates Scythiae regibus suas regiones restitueret*. Ille vero nihili fecit S. C. Romanum et societate cum Parthis, Medis et Tigrae Armeno inita, etiam Σκυθικῆς βασιλείης ἕ τὸν Ἰβήρα προσῆλαρίζετο, *Scytharum reges et Iberum in amicitiam pertraxit*. Haec, ait Memnon, accidisse circiter ea tempora, cum S. P. Q. R. Nicomeden Nicomedis et Nysae filium regem daret Bithynis, Mithridates vero Socratem superioris Nicomedis fratrem et ipsum Nicomeden cognomine Chrestum opponeret. Constat satis A. V. C. 664 ista accidisse. A. V. C. 665. hunc Nicomeden Chrestum a Senatu hostem iudicatum ipse Mithridates, qui euexerat, de medio sustulit. A. V. C. 666. Bithyniam aperto bello inuadens Mithridates, Romanorum arma in se conuertit. Hoc ei tempus opportunum visum, cum partim fregisset Scythicos populos, partim discordiis litibusque serendis distractos, iuando comiter factionem suam contra validiores, firmauisset ad obsequia. Iustinus: (7) *ab Scythia quoque exercitum venire iubet*. Gallograeci etiam et Sarmatae Basternaeque per legatos ad auxilia ferenda sollicitati. Ex eo tempore tamquam turbo aliquis defauiens, simul totam Asiam, simul Graeciam insulasque omnes in potestatem accepit. L. Cornelius Sulla cum redegisse videbatur in ordinem, cum rex pace inita coactus est in regnum suum se recipere A. V. C. 670.

Erant

(7) I. XXXVIII. 3.

Erant tum Romae C. Marii plebisque vires contra optimates praeualidae: optimatibus studebat Sulla. Interim dum ad componendas res urbis Sulla proficiscitur, Mithridates, ut ait Memnon, (8) πολλὰ διὰ τὴν ἐν ἧ καλινέχθη συμφορὰν ἀποσάντων ἐθνῶν ἐξ ὑπαρχῆς χειρωσάμενος, *multis gentibus, quae propter calamitatem, qua repente corruerat, defecerant, receptis*, vires recuperavit. Id puto accidisse, postquam L. Muraena Sullae legatus reuocatus est a Mithridate lacecendo. Nam cum Sulla pacem regi dedisset, Muraena e Cappadocia eum laceſſebat. Hoc amoto, Appianus quoque testatur, (9) Mithridatem res Bosphoranas ordinasse et Macharem filium genti praefecisse, Achaeos denique Colchis finitimos subegisse. Haud ita multo post, L. Lucullus ex consulatu in Ciliciam prouinciam et ad bellum Mithridaticum, M. Aurelius Cotta eius in consulatu collega cum classe ad Propontidem Bithyniamque tuendam venerunt. P. Rutilius Cottae legatus ad Chalcedonem caesus, maximam exercitus partem amisit. Gloria victoriae penes Basternas maxime fuit, qui peditibus Romanis in fugam coniectis, magnam stragem ediderant. (10) Basternarum ad triginta ceciderunt, ex reliquo exercitu regio septingenti. Romani pedites ad quinque millia et quingentos. Haec regi victoria A. V. C. 680. obtigit. Basternae autem, quorum in exercitu Mi-

Ss 2

thridatis

(8) p. 380. (9) p. 363. (10) Memnon p. 378.

thridatis virtus eluxit, quantum ex Scymni Chii eorum temporum aequalis fragmento constat, Thracibus vicini coluere, alterius tamen corporis populus, ita enim fatus est. (1)

Οὔτοι δὲ Θραῖκες Βασάρναυ τ' ἐπήλυδες.

Et Strabo eos haud ita multo post haec tempora ad Tyram fluuium collocat (2) in mediterraneis, ad Danubii vsque ostia, *χεδόν τι ἢ ἀπὸ τῆς Γερμανικῆς γένεως ὄντας*. Cornelius Tacitus (3) discrete: *Peucini quos quidam Basternas vocant, sermone, cultu sede ac domiciliis et Germani agunt*. Itaque vel inde colligitur, quantum regionum Mithridates partem vi, partem beneuolentia sua sibi deuinxerit. Sed cum L. Lucullus acie toties superior, e Cappadocia Ponticas prouincias iuaderet, Mithridates πρὸς τὰς Σκυθῶν βασιλείας, *ad reges Scytharum*, et ad Parthum legatos de auxiliis misit, ἀλλ' οἱ μὲν ἀπᾶλλον, *Scythae ei negarunt*. Testem habeo Memnona. (4) Appianus in Mithridaticis scribit, (5) mississe regem εἰς Σκύθας τὰς ὁμήρους, *ad Scythas finitimos* aurum muneraque alia per Dioclen legatum: hunc cum auro ad Lucillum transfugisse. Igitur tum quidem in exercitu regio contra Romanos Scythae publico nomine militarunt nulli. Fuit quidem in castris Romanis e Mithridatico exercitu transfuga ἀνὴρ Σκύθης, ὄνομα Ολκάβας, utar enim Appiani verbis, (6) qui a L. Lucullo ad

(1) p. 46. ed. Hudson. (2) p. 212. (3) De moribus Germanorum p. 46. (4) p. 373. (5) p. 375. ed. Tollii. (6) p. 376.

ad secretos sermones saepe admissus, cum ad eum meridianam breui pugione accinctus veniens a seruis accessu prohiberetur, siue suspectum sese esse sentiens, siue praeferox iracundia, quod ignominiam accepisset a seruis, ad Mithridatem rediit atque Σοβάδακον Scytham, vt transiturum ad Romanos criminatus oppressit. Sex. Iulius Frontinus in stratagematis (7) auctores habuit, quibus hunc *Adathantem*, sic enim adpellat, subornatum a Mithridate scribit, ad occidendum ex insidiis Lucullum. Scytham eum fuisse, non confestim crediderim Appiano. Nam Plutarchus in Lucullo (8) hunc Ολθακόν vocat, et *Dardariorum dynasten* fuisse prodidit, γένος δ' εἰσὶν οἱ Δαρδάριοι βαρβάρων τῶν περὶ τὴν Μαιώτιν οὐκένων, *Dardarii genus barbarorum ad Maeotin colentium*. Hic populus prope Lazios situs fuit, isthic fere, vbi etiam nunc in tabulis Delislianis est *Dandars*. Quare mihi dudum in mentem venit, Plutarchum scripsisse Δανδάρης. Stephanus ex Hecataeo Δανδάριοι ἔθνος περὶ τὸν Καύκασον. Strabo quoque Dandarios, Sindos et Toreatas Maeoticis accenset. (9) Cornelius Tacitus (10) quoque *Sozam Dandaricae* (vt quidem Beatus Rhenanus emendauit, erat enim antea Dandari-dae) *oppidum a Mithridate relictum sine praesidio et cultoribus*, scribit. Hos Dandarios Lucas Holstenius, (11) *Indicam gentem circa fontes Indi fuisse censuit*. Nempe in hoc quidem vehementer er-

Ss. 3.

rauit

(7) I. II. c. V. 30. (8) p. 502. (9) p. 341. (10) *Annal.* XIII. 26.
(11) In Stephanum p. 91.

Scythas hic, dicit Appianus, populos ad occidentale litus Ponti Euxini. Ab Dioscuriade enim Mithridates Heniochos petiit, qui a quatuor regibus tenebantur. His transitum comiter praebentibus, Zygios vitavit, cum ob locorum difficultatem, tum ob feritatem gentis: itaque eorum in provincia secundum litus maris iter fecit, naues saepe conscendens, vbi terrestris via non patebat. (5) Inde cum Achaeos admisisse, scribit Strabo, Appianus (6) obsistere ausos et repullos fuisse. Maeoticas regiones ingressus Mithridates, multis subditis regulis, ob famam rerum gestarum ab omnibus benigne hospitaliterque deductus est: munera utrimque data, foedus initum firmatumque elocandis inter principes filiabus regiis. (7) Machares, vbi cognovit, patrem *claustra Scythica*, vt Appianus loquitur, Caucasea, inquam, transisse, omniaque intra Maeotia et Tanain (in qua regione Bosporani regni Maeoticae gentes a veteribus collocari solent) tenere, e Bosporo Cimmerio in Pontum ad Romanos fugit, medioque in cursu, vel ipse sibi manus intulit, vel, vt Dio Cassius refert, ab amicis suis interfectus fuit. Cn. Pompeius Mithridatem persequens, Colchidem intrauit et ad Phasin fluuium, Seruilium cum classe, qua Ponti oram tuebatur, obuium habuit. At postquam cognovit, per quae loca, quam difficili itinere adeatur Bosporus, quam deinde anceps in longinquis regionibus et inquietis bellum futurum esset,

(5) Strabo p. 342. (6) p. 399. (7) Appianus l. c.

esset, relictis ad tuendam Ponti oram naualibus pedestribusque praefidiis, Iberos et ad Caspium mare Albanos in potestatem redegit, inde in Pontum et Syriam reduxit exercitum.(8) Mithridates consilia agitabat, neque pro praesenti fortuna, neque pro aetate. Constituerat enim secum, adiunctis sibi Scythicis Geticisque auxiliis, per Pannoniam inuadere Alpes,(9) et omne barbaricum nomen in Romanos concitare. Eo et delectus militum habebat acerrime et arma telaque comparabat et exactiōibus crudelissimis congerebat in aerarium opes, et eunuchos ad Scythiae regulos mittebat, qui auxilia peterent, filiasque regias deuinciendae caussa amicitiae inter regulos elocarent. (10) Euchi cum filiabus regiis, a quingentorum militum praesidio deducebantur. At haud longe digressi a Mithridate milites, eunuchos interfecerunt et puellas ad Cn. Pompeium adduxerunt. Iam et Castor, praefectus Phanagoriae nouis rebus studebat, (1) et passim vrbes exercitusque deficiebant, qua occasione Pharnaces vsus, paternum regnum rapuit, Mithridates violenta morte interiit, M. Tullio Cicerone, C. Antonio Nepote Coss. ante C. N. 63. Quemadmodum Scythae toties Cherrhonesi possessione euersi sunt, ita regnum Bospotanicum suis finibus tum in Cherrhoneso tum in obiectis ad orientem versus Caucasum prouinciis, fere vsque ad Valeriani Imp. tempora

Tom. V. T t pora

(8) Appianus l.c. Plutarchus in Pompeio p. 637. (9) Appianus p. 400
 (10) Omnia ex Appiano. (1) Historia Miscella ex T. Liuiο. p. 40.

pora (2) stetit et aduersus finitimas gentes, ne Asiaticas Romanorum prouincias infestarent, propugnaculo fuit. Tertius a Mithridate Asander, qui ab anno ante C. N. 45. regnauit et apud Caesarem Augustum gratiosus fuit, Isthmum Cherrhonesi muro ducto clausit, denis in singula stadia turribus exstructis. (3) Nostrum non est, res Bosporanas hic amplius persequi, potestque Ioannis Valentis industria eas cognoscere cupienti sufficere. (4)

Fractis eum in modum Scythis, ab occidente Getae grauiorem procellam mouerunt, quam nunc certo alicui temporis non possemus adsignare, nisi Dionis Prusaei Sophistae oratio Borysthenitica exstaret. Quod Mithridatis temporibus Oëbia vrbs floruerit, ex Scymni Chii fragmentis Holstenianis (5) intelligimus:

Ἐπὶ δὲ ταῖς κατ' Ὑπαίν καὶ Βορυθένην
 τῶν δυσὶ πόλεωσιν συμβολαῖς ἐστὶ πόλις
 Κτιθῆσα, πρῶτερον Ολβία καλεμένη.
 Μετὰ ταῦθ' ὑφ' Ἑλλήνων πάλιν Βορυθένης
 Κληθῆσα, ταύτην τὴν πάλιν Μιλήσιοι
 Κτιζουσι κατὰ τὴν Μηδικὴν ἐπαρχίαν.
 Διακοσίων δὲ καὶ τεσσαράκοντα σταδίων
 τὸν ἀνάπλεον ἀπὸ θαλάττης τῷ Βορυθένῃ
 Πόλεωσιν ἔχει.

Οὕτως

(2) Zosimus p. 23 ed. Oxon. (3) Strabo p. 615. (4) In Achemenidarum imperio.

Οὗτος δὲ πάντων ἐστὶ χρεωδέστατος,
 Κῆλη μεγάλη καὶ πολλὰ καὶ καρπὸς Φέρων
 Τῶς Φυομένως, νομὸς τε τοῖς βοσκήμασι.

*Vbi ostiis iunctis in unum confluunt
 Hispanis Borysthenesque, structa est ciuitas,
 Quae nomen antea obtinebat Olbiae:
 Deinde Graecis dicta denuo fuit
 Borysthenis: Milesii quoque struxerant
 Hoc oppidum florente regno Medico,
 Ad quod ducentis stadiis ascenditur
 Quaterque denis ex mari Borysthenem
 Per flumen.
 Hic annis vnus omnium utilissimus
 Vastis abundans plurimisque piscibus
 Frugumque copia atque laetis pascuis.*

vt Lucas Holstenius conuertit. Recte Scymnus
 vigente adhuc Medico regno conditam a Milesiis
 scripsit, nam Ensebius Olymp. XXXI. 2. colo-
 niam deductam fuisse testatur, annis ante C. N. 655.
 tertio anno Phraortis regis Medorum, sedecim annis
 ante, quam Cimmerii a Scythis ex his regionibus pulsi
 sunt, vt nostrae rationes in Chronologia Scythica
 postulant. Ob tantam vetustatem urbis et propter
 maximam opportunitatem mercaturae, tantae ci-
 uium fuere opes, vt, Herodoto teste, Olbitae di-
 ci mallent, quam Borysthenitae, sicuti a Graecis
 ceteris ipsoque Herodoto nuncupabantur. Olbia
 autem, si interpreteris nomen, *felicitatem et ad-
 fluentiam* continet, qua se *beatos* iudicarunt ciues.

Tt 2

Post

Post id tamen nomen Borysthenitarum, a vicino ductum fluuio, sic obtinuit, ut Dio Chryso-
 stomus ipsa in vrbe, Borysthenitas dicere minime
 reformidaret. Iam de hac vrbe sic ait Dio So-
 phista: (5) ἡ δὲ πόλις τῶν Βορυσθενιῶν τὸ μέγε-
 θὸς ἐστὶν ἔτι πρὸς τὴν παλαιὰν δόξαν, ἀλλὰ τὰς συν-
 εχῆς ἀλώσεως καὶ τὰς πολέμους, *vrbs Borysthenita-
 rum pro veteri gloria non item nunc ampla est, quod
 saepe capta, multa bello pertulit.* Tum vero com-
 memorat, τὴν τελευταίαν καὶ μεγίστην ὄλωσιν, ἔτι
 πρὸς πλειόνων ἢ πεντήκοντα καὶ ἐκατὸν ἐτῶν. ἔειπον δὲ
 τούτῃν Γέλοι καὶ τὸς ἄλλας τὰς ἐν τοῖς ἀριστέροις τῆ
 Πόντου πόλεις, μέχρι Ἀπολλωνίας, *extremam vrbs
 expugnationem omnium acerbissimam, annis non amplius
 centum et quinquaginta ante eum diem: ceperunt autem
 Getae cum banc urbem, tum ceteras sinistro litore
 Ponti, vrbes, usque ad Apolloniam.* Denique cete-
 ra persequitur, ut Getae, poenitentia ducti da-
 mnumque id suum rati, si vrbs antea mercatibus
 frequentissima et fructuosissima Scythis, in ruinis
 iaceret, Graecos immunitate aliisque commodis
 propositis ad restaurandam eam allexerint. Bo-
 rystheniticam Dio dixit, ut ab eruditis viris ob-
 seruatum fuit, A. C. 94. Ergo res illae Geticae
 in annum ante C. N. 56. A. V. C. 698. septimum
 ab interitu Mithridatis incidunt. Postquam Getarum
 regnum crebris bellis concussum, Βοιρεβίσις
Voereuistas ex Δεκωνέσις *Decenaei* aut praestigiatio-
 ris, aut sapientis viri, sententia restituit, etiam

Ro-

(5) p. 437. ed. Morell.

Romanis terrori fuere Getae. Illo a seditiosis ciuibus sublato, regnum inter plures principes diuisum fuit. Modo eorum quatuor fuerunt, modo quinque et vel plures vel pauciores numero. (6) Ante Augustum Caesarem adeo validi fuere Getae, vt ad ducenta millia in aciem possent producere, Augusti vero temporibus, tum dissidiis inter se, tum bellis, sic attriti sunt, vt sub Tiberii Caesaris aetatem Strabo testetur, non fuisse amplius quam quadraginta millia virorum, qui arma ferrent. Getas vt opinor dicit, qui in maiorum sedibus permanferant, cum ceteri nouas quaesissent. Huiusce rei indicium est capta ante C. N. 94. Olbia. Et inde fere in Scythicis campis frequentius Getarum nomen, quam Scytharum est. Sed de his rebus praestat copiosius dicere in Memoriis Geticis, quam hoc loco.

Nam nos hic potius dicemus de Othino eiusque expeditione in septentrionales regiones, quam in his Geticis Scythicisque turbis contineri sentio. Othini memoria vera, vt puto, est, sed adeo deformata ab figmentis tum vulgaribus, tum eruditibus, vt vix colorem quendam veritatis retineat, vtque mirum non sit, cum in his quae de eo traduntur, tanta exstet apud scriptores septentrionales dissensio. Dum pro se quisque omnia ad suam gentem trahit, dum aliena appetit, non apparet, quid teneat tamquam proprium vel in historia

T t 3

vel

(6) Strabo p. 210.

vel etiam in fabula. Cum vero diuinus cultus Odino per omnem ferme Europam septentrionalem est tributus, id mihi idoneum argumentum videtur esse, vt credam, existisse aliquem prisco aeuo celebrem virum, magnis facinoribus perpetratis insignem, quem hominum simplicitas ex heroum numero paulatim euexerit ad deos et denique praecipuo honore ante deos alios coluerit. Ne quem vero moueat, cum et fabulam concedam esse Othinum, et veritatem in fabula requiram, figmenta reiiciam. Plerique populi et praefertim libertatis virtutisque amantes, rerum ante se gestarum admiratione moti, si non scripto, tamen sermone et carmine aliquam priscoe memoriae recordationem conseruarunt. Fabulae a veris sermonibus narrandi obscuritate differunt, non tota natura sua, vti falsa et commentitia. Sic in Graecarum fabularum plerisque inest rerum gestarum quaedam veritas, sed velis occultata suis et tenebris. Eleganter Strabo: (7) Φιλεδήμων ὁ ἄνθρωπος, προόμιον δὲ τῆς τῶ Φιλύμουθον, et idem paullo post non minus vere: οἱ πρῶτοι ἰσορικοί ἢ Φυσικοί, μυθογράφοι. Quam sententiam Palaephatus, Eustathius et magnus Grammaticorum populus in explicandis fabulis Graecis sequuntur. In Romanis autem nolite credere, Fabium Pictorem aut L. Sisennam, vel Claudium Quadrigarium et Q. Valerium Antiatem ab Euandri, Carmentae, Saliorum carminibus abstinuisse, aut nihil

(7) P. 13.

nihil traxisse a fama. Is quidem vehementer errat, qui nihil secus factum putet in primordiis Romani nominis, quam ut scriptis eruditorum hominum continetur. Ingenuam T. Liuii confessionem vide, aut Dionysii Halicarnassensis a T. Liuiio diffensionem. Priscis autem fabulis, (quas a *fando* seu obscuro rumore haud absurde putamus dici) multa figmenta paullatim admista fuerunt, quae pro suo quisque ingenio aut rescidit aut interpretatus est. Est tamen difficile in omni fabula sentire, quid falsi admistum sit vero, aut quantum in earum aliqua vetus rumor a putido commento discrepet: multo deinde difficilius est, si diuersorum populorum diuersae fabulae vnum in corpus confusae sint: difficillimum, si qui eruditi homines, ut ampliores ornatioresque priscas facerent fabulas, otio suo intemperanter sunt abusi, eorum pigmenta a rudibus fabulis ut seiuugas. Quare, quemadmodum Flamini Diali non licebat vel nominare vel tangere fabam, ita videri alicui possit, a fabulis omnibus abstinere oportere historicos. At timent merito, ne in obscuris temporibus, simul cum fabulis tenuem verae historiae memoriam amittant, eo, ut quisque iudicio valet, ita vero similia in iis confectatur. Mihi vero duabus de causis non videntur negligendae: tum, ne quis vana et commentitia ex iis in historiam importet, nimio veteris rumoris studio, tum, si qua in iis, veris consentanea transluceant, ea ut nobis seponamus. Septemtrionales fabulae eandem

eandem naturam, quam Graecae habent. Sermone hominum et cantu conseruabantur, pertenui sane et fallaci ad fidem ministerio, praesertim si vera facta adulando extollerentur in maius. Olaus Verelius initio animaduersionum in Gothrici et Rolfi historiam, narrationes de rebus praeclare gestis per ora hominum traditas et in concionibus conuiuisque celebratas fuisse demonstrauit. Quid enim aliud Islandorum, Noruagorum Danorumque Scaldri egerunt, quam ut pro suo quisque ingenio, seu veterem rumorem, seu sui facta temporis con-celebraret? (8) Eorum fidem Arrius Polyhistor (9) et eius fere aequalis Saemundus Sigfasi filius et post alios, quos Thormodus Torfaeus et Arngri-mus Ionas recensent, Snorro Sturlaeus (10) secuti sunt. Sapienter hic fidei suae cauit Snorro, vir, ut ex illius monumentis ingenii apparet, magno iudicio, neque minori integritate et fide, par de-nique optimis prisca aevi scriptoribus, praeterquam cum a tenui eruditione delusus est. Is enim ait (1) scripsisse se, *ductu partim eorum, quae in antiquissi-mis veterum annalibus, quibus reges virique illustres alii stirpes suas recensuerant, partim quae ex antiquis canilenis rhytmisque, oblectationis causa quondam de-cantatis, ad memoriam posteritatis peruenerunt: quam-uis autem, inquit, plenam harum rerum scientiam polli-*

(8) Vide Thormodi Torfaei prolegomena in historiam Noruagicam et Orcadensem. (9) A. C. 1117. Thorm. Torfaeus in serie regum Daniae l. 1. c. 4. Prolegomenis Historiae Noruagicae p. 4. Arngrimus Ionas in Crymogaea et specimine Islandico (10) A. C. 1241. caesus. Ioannes Peringskiöldus Praefat. in Snorronem et Torfaeus l. c. (1) Historiae Noruagicae t. 1. p. 1.

polliceri non audemus, exempla tamen baudquaquam nos deficiunt, quibus certiores reddimur, viros olim eruditissimos fidem talibus habuisse. Similiter in Danis Saxo Grammaticus, (2) Snorrone quidem nullo modo comparandus, et testatur in praefatione, vetera carmina se respexisse, et ipso in opere exhibuit. Non est neesse, vt addam aliquid de Gronlandis, quorum carmina Thornmodus Islandus(3) edidit et in historiam transtulit. Tenemus initium vndecimi seculi, cum, quidquid veri, rumor et fabulae continere viderentur, in historiam congeri coeptum est. Ex eo tempore septemtrionalis historia firmioribus ad fidem monumentis sese extulit. Nam in superioribus temporibus, tametsi operam omnem atque ingenium viri boni adhibuerunt, tamen non modo in vetustis fabulis, sed in propioris aetatis carminibus et fama, facile fuit falli. Snorro in praefatione sic ratiocinatus est secum: *bauð dubitamus, singula illa, quae in carminibus traduntur, de expeditionibus rebusque gestis, veritati consentanea ducere: quamuis hic poetarum mos sit, vt eorum, quae sibi proposuerant, encomia, summo decantent opere, vix tamen crediderim, quemquam ausurum fuisse, domino ea narrare facinora, quae auscultantibus pariter et ipsi falsitatis vanitatisque nomine perspecta forent, quippe in dedecus potius, quam laudem vergentia.* Prudentem virum audio et recte secum ineuntem rationes, sed quae non
 Tom. V. V v tme

(2) A. C. 1193. Stephanus Stephanius in prolegomenis p. 21. (3) A. C. 1030. Arngrimus Ionas in specimine Islandiae historico p. 151.

item omnium carminum auctoritati inferuiant. Quot enim poetae de vetustis ante se rebus cecinerunt, qui fallerentur ipsi, qui ne pudorem quidem mentiendi haberent, cum proptet rerum vetustatem, nemo esset, qui eos refelleret! Si Theocritus in Ptolemaei Philadelphi encomio, si in Olympionicis ceterorumque ludorum victoribus Pindarus nihil falsi rebus ipsis, quas tractant, admiscuerunt, non tamen iisdem credideris in ceteris, quae ex superiori memoria interferunt. Nempe omnibus in gentibus, quanto longius aetas nepotum a maiorum temporibus absuit, tanto intentius accepta a parentibus, in foro, circulis, conuiujs personuerunt: et amissa etiam continenti memoria, quaedam magnarum rerum scintillae in animis hominum exstingui non potuerunt. Haec quia tamquam e longo interuallo vix noscebantur, vt obscura et male cohaerentia, aucta deinde solertia captantium e vanis miracula, multo incertiora euaserunt, quam fuerant dudum. Multum igitur refert, quis ista tum lubrica tractarit. Saxo Grammaticus vsum se scribit Thulensium, sic enim Islandos vocat, narrationibus: iisdem vsus est Snorro Sturlaeus. Vide quid homo homine discrepet: plane inter sese non conueniunt. Quare aut Saxo deprauata carmina et figmentis scitentia integrioribus praetulit, aut diuersa miscendo, ab ratiocinijs suis declusus concidit. Quamobrem tantopere indignatus est Ionas Iacobus Venusinus historiographus Regis Daniae, quod Saxo Scaldro

drorum carminibus nimium tribuerit, *quaedam enim, inquit, eiusmodi sunt, ut apertae veritati vim faciant: quae si pro veris acceptaremus, nae nos in historia nihil vidisse videremur.* Multo grauius in eum insurgit Angrimus Ionas apud Stephanium (4) qui ei ne quidem viri boni nomen relinquere videtur. Sed Saxonem etiam in propioris memoriae rebus, his ipsis rebus coeui scriptores condemnant. Nescio tamen, an eruditio ab Romanis Graecisque monumentis intemperanter a quibusdam ad fabulas adhibita, plus mali importarit, quam aliorum vanitas. Multa eiusmodi ἐπαυλοφώρῳ deprehendi. Ioannes Lyfscander, qui tantum sibi in Danica historia permisit, Saxoni Grammatico irascitur, (5) quod toto in opere Cimmericorum memoriam, ac ne Cimbrorum quidem apud Danos vel Islandos inuenerat, ut nec Snorro Sturlaeus. Post Saxonem docti homines, cum sibi aliquid apud Romanos Graecosque visi sunt reperisse, hanc partem beuigne expleuerunt, sed medius fidius admodum imprudenter: inde aliis audacia, ut eam quoque veluti antiquam septentrionalium gentium famam venditarent. Cum Arngrimus Ionas in Crimogea ostendisset, Islandiam Noruagicorum scriptorum testimonio ab A. C. 874. primum coli coepisse; e contrario Ioannes Isaacus Pontanus in commentario de insulis borealibus omnem eam monumentorum Islandicorum fidem idcirco conuul-

V v 2

fam

(4) In Prolegomenis p. 36. 37. (5) Antiquitatum Danicarum sermone VIII. p. 69.

sam voluit, quod Thules mentionem iam Graeci iniecerant et in iis praesertim Pytheas. Scilicet multa apud antiquos est memoria Tules, quam cum Adamus Bremensis comperisset, Islandiae attribuendam iudicavit. Eum secuti sunt alii, ut ne dubitarint quidem ita esse. Peperit haec disputatio insignem librum Arngrimi Ionae, quod specimen historiae Islandicum inscripsit, in quo libro mihi Pontano satisfecisse videtur, nihil ad Islandiam pertinere Thulen demonstrans et potius Britannicis insulis esse inferendam. Venit deinde tamquam in controuersi et vacui nominis possessionem Olaus Rudbeckius, (6) qui id ipsum toti Scandinaviae vindicavit. At Thormodus Torfaeus (7) specie concedentis tam graues difficultates Rudbeckio mouit, ut Thule citius Islandia sit, quam Scandinavia. Tamen sibi quoque obstare veterum loca sensit, vir veritatis, si quis umquam, studiosissimus, Torfaeus. Scilicet ne veteres quidem de vna et eadem insula id nominis vsurparunt, ut iam tum in vocabulis quibusdam ingeniose ludere sunt soliti. Serius item ab externa eruditione, sed tenui illa atque ex sanguine Dacorum nomen Danis tributum est. Vetera monumenta ignorant: recentiores quidam errorem istum gratanter acceperunt, non modo iam nomen solum, verum etiam res Dacorum ad Istrum gestas, Daniae vindicantes, quos quidem grauissimis verbis Ioannes

nes

(6) In Atlantica cap. de Thule p. 514. (7) Historiae Noruagicae T. 1. p. 10. seq.

nes Isaacus Pontanus explofit. (8) Sed infinita sunt, in quibus immatura eruditio septemtrionalibus historiis nocuit. Quae cum ita sint, vt omni in fabula, ita in Othino, quantum humana mens cauere potest, prouidendum est, vt non minus sequioris aetatis commenta, quam ab eruditione petita pigmenta, a vetusto rumore sciungamus.

Complures Odinos in monumentis septemtrionalibus commemorari, Ioannes Schefferus, (9) et Olaus Verelius (10) obseruarunt, ne dicam alios. Saxo Grammaticus visus est septem eodem nomine et honore diuinitatis inseruisse. Thormodus Torfaeus (1) tamen, re accuratius considerata, vnum vbique Othinum deprehendit. *Quod autem, inquit, Odino suo tam prodigiosam aetatem adscripserit, in eo illum parum circumspexitum fuisse confiteri conuenit.* Nempe, cur Saxoni non liceret in Othino deo, quod Graeci in Ioue, Apolline, ceterisque diis immortalibus sibi permiserunt, vt non modo istis temporibus, quibus hi heroes fuerunt in hominibus, sed multis etiam seculis post producerent adulteros. Sin a Saxone discedas, trium praecipue aut duorum Othinorum memoriam praescam extare inuenies: nam si Mithodinum excipias, Odinus Priscus et Odinus Vpsaliensis relinquuntur. Hanc Brynolfi Suenonii sententiam placuisse video Nicolao Kedero, summi ingenii, eru-

V v 3

ditio-

(8) p. 640. (9) In Vpsalia c. 7. (10) In historiam Gothrici et Hrolfi p. 40. (1) In Dynastiis Daniae serie. I. II. c. 5.

ditionis autem excellentis viro. (2) Equidem illum Vpsalientem vulgo dictum solummodo inter mortales existisse puto et ab eodem superstitionem manasse, donec procedente tempore se ipso antiquior et verus deus crederetur. Snorro Sturlaeus in historiis Noruagicis Odini Vpsaliensis famam ex Arrio Polyhistore consignauit, in Edda autem Odini Prisci, seu eiusdem Odini, qui iam haberetur vt vetus deus. Sed cum Snorro, Odinum ex priscis sedibus in septemtrionem vt deduceret, regionum situm describit, manifestum est, cum ab eruditione tenui litterarum Latinarum, qua iam tum aliqui in Noruegia calebant, sic delusum fuisse, vt tamen etiam hic aliquid veteris famae subodorari queamus. Tanto diligentius expendenda erunt omnia. Oceanum, inquit, ambire terram, atque maria sua passim in sinus diffundere: ex his esse mare a *Noruaesund*, seu *Gaditano freto*, vt Ioannes Peringskiöldus V.C. explicuit: isthinc ad Palaestinam vsque protendi atque inde in longitudinem porrigi, aquilonem versus, Mare Nigrum, seu Pontum Euxinum: ad boream iuxta Mare Nigrum esse *Suioniae* (3) regnum, quod quidam vastae *Serklandiae* (4) comparent, alii *Blalandiae*, (5) quam Peringskiöldus *Aetbiopiam* interpretatur: septemtrionalem plagam propter intensissimum frigus et inclementiam caeli incultam iacere,

(2) In numo aureo Othini p. 3. conf. *Noua Litteraria maris Balthici A.* 1700. p. 363. (3) *Suttioet*. (4) *Serkland*. (5) *Blaland*.

iacere, Africam ad meridiem torreri aestu nimio solis: plurimos in Suionia esse tractus, diuersis distingui linguis et varia populorum multitudine abundare: esse isthic gigantes, pygmaeos, pugiles subfusci coloris, gentes prodigiosas, tum serpentes stupendae magnitudinis. Ex montium borealium iugis descendere Tanaim, olim dictum *Fanaquisl*, seu *Vanaquisl*, (*Vanorum fluium*) qui per *Suitiot* deuectus in Mare Nigrum sese exponeret: regionem huius fluii brachiis interclusam, *Vanaland*, vel *Vanabeimur*, *Vanorum terram* dici. Ab Tanai illo tres orbis regiones diuidi et Europam ab Asia discerni.

Hancine adeo formam terrae Snorro Sturlaeus paullo ante A. C. 1241. edere potuit? Nempe nihil eorum dicit, quae tum propter crebras Scandinauorum terra marique profectioes nota erant: libellis quibusdam lepidis hercle et eruditis auscultare maluit. Septentrionalem tractum habitari posse negat, et nescio quae monstra iis in locis diseminat. Quid autem? nihilne ei Biarmiae seu Permiaae, ad borealem vsque oceanum cultae, in mentem venit? quam vero Noruagos ad quaerendas sibi diuitias nauibus adiisse, vel ex Snorrone constat. Minime gentium, audiendi erant potius illi, qui ex Graecis Latinisque hauserant. Hi vero septentrionem omnem solitudine et terroribus immitis caeli implerunt, hi, teste Eustathio Thessalonicensi in praefatione commentario-
rum

rum Iliados, solitudines mapparum suarum, pygmaeis atque aliis istiusmodi monstris exornarunt. Tanais Europam ab Asia discernit: recte, si Strabonem (6) audias. Tanais item tertiam orbis regionem a duabus? nempe ingeniosum hoc est. Ex borealibus montibus, Tanais in Pontum Euxinum descendit, Pontus, ut verba Snorronis non obscure indicant, in septemtrionem extenditur. Sunt haec eiusmodi, quae ex fabulis Argonauticis orta, situm harum terrarum sic interuenterunt, ut Pontus Euxinus haud longe abesset a boreali oceano, de quo errore saepius monui. Sed ut hic Snorronis magister Herodoteam orbis terrae diuisionem, quae apud optimum quemque veterum Geographorum locum inuenit, secutus est, ita etiam ex Ephoriana aliquid recepit. Nam Ephorus orbem terrarum in quatuor partes distribuebat, (7) Celticam ab occidente, Scythiam sub septemtrione, et sub illis Aethiopiam et Indiam. Aethiopia magistro Snorronis, fuit *Bland*, ex Scythia, propter tenuem convenientiam vocis, factum est *Suitiod* et ex *Scythia magna*, ut fautores Ephoriana sententiae loquebantur, *Suitiod Miklu*. *Serkland* Ephoriana est India. *Perringskiöldus* ad Theodorici regis vitam, (8) cum ex Hialmteri regis historia refert, Ingonem Manheimiae regem filio suo classem tradidisse, cum qua in Arabiam, Sarklandiam aliaque loca orientalia

(6) p. 338. 339. (7) Confer ea, quae diximus in *Memoriis Scythicis* p. 354. seq. et p. 386. (8) p. 407.

taliam proficisceretur, *Sarklandiam* explicat *Sarcedoniam*, siue *Carthaginem Africae*. Quidquid sit de illa expeditione, *Sarkland* et *Serkland* profecto non potest fieri, ut sit regio aliqua alia quam *Serica*, *Serica*. In commentationibus de *Serica* et *Seribus* ostendam, regionem illam, ob mercaturam *Serici* celebratam, ab *Mesopotamiensibus*, qui eam exercebant mercaturam, شرق et شرقية *Scherk*, *Scherkab*, *Scharkeb*, id est, orientem fuisse dictam. Et fuit quidem illa regio non ita ampla ut *India*, tamen fama sui nominis sub *Augusto Caesare* et postea, *Romanum orbem* implevit. Idcirco auctores, quos *Geographus Ravennas* secutus est, (9) *Indiam* et *Sericam* vno nomine comprehenderunt, *Indiam Sericam* appellantes. Et commode hoc accidebat *Ephorianae* sententiae studiosis, quod prisca *Geographi*, ut *Ptolemaeus*, *Agathemerus*, *Marcianus Heracleota*, in *Scythiam* protenderent regionem *Sericam*, ut *India* *Ephori* facile posset cedere nobiliori nomini *Sericae*. At enimvero, inquires, potuitne *Ingonis*, *Manheimiae* regis, filius nauibus suis proficisci vsque in *Sericam*, siue *Indiam*? Scilicet, si nihil aliud sententiae meae obstet, ut concedam, vera ista esse, quae de *Ingone* hoc referuntur, neque enim a fide abhorreo, tamen nihil absurdi sentio. Recognoscite mecum veterum *Normannorum* navigationes, vim atque audaciam. Primos omnium *Europaeorum* in *Americam* nauigasse, utcumque aliquis mirabitur.

Tom. V.

XX

tur

(9) Vide eum in primis p. 43. ed. Porch.

tur, Snorronis auctoritate moueor, vt credam. Quidni iidem pro reliqua fortuna sua et incredibili audacia viam inuenerint circum Africam nauigandi? Id ego autem nunc non postulo, magis enim inclinatus animus, vt credam, eos primum petiisse Alexandriam, deinde ex sinu Arabico nauibus fuisse deuectos in Indiam Sericae mercaturae causa.

Postquam Snorro orbis terrarum situm confusus inter se vetustatis lineamentis depinxit, regionem, ex qua Othinum profectum compererat, subobscure item monstrat. Terram, inquit, ad orientem Tanais exstitisse, nomine *Asaland*, vel *Asaheimur* et metropolim eius *Asgard*, in qua et princeps fuerit nomine *Odinn* et locus sacrificiis cultuque deorum celebris. Cum principe fuisse duodecim praefectos, quos ipsi *Diar*, *edur Drottmar* vocarint, quibus curam sacrorum gesserint, et ius dixerint populo. Odinus longinquis peregrinationibus bellisque nobilitatus multas victorias reportauit, multa regna sibi subiecit, ex quo fama fuit, vbi pugnaret, ab ea parte stare victoriam. Tandem exercitum suum eduxit (*bendur Voenum*) contra *Voenos*, qui regni sui fines valide tutati sunt. Rursum, inquit, Snorro, ab ortu solis aestiui vsque ad occasum solis hiberni longissima montium iuga protenduntur, disteminantia *Suidiod Miklu*, *Scythiam magnam* a ceteris regnis. Haud ita procul ab horum montium australi parte, *Teucra* sita est;

ibi

ibi magnos quoque tractus possidebat Othinus. Verum enim vero plena haec sunt praepostero πολυλογίας studio. Quoniam ex veterum geographorum sententia Tanais Asiam ab Europa determinabat, isthuc autem vocabulum *Asia* cum *Asarum* nomine congruebat, inde tenui ratiocinio Asae visi sunt ex Asia profecti. Itaque Georgius Hicelius: (10) *Famosus ille Othinus et eius affectae se pro deastris seu diis aut semidiis venditantes ex Asia oriundi sunt: itaque As in plurali Aser diis septemtrionalibus nomen gentile erat.* Contra ea Gudmundus Andreae Islandus, in notis, quae *Voluspae* a Petro Resenio ex Saemundi Edda editae subiunguntur, (1) *Ab Asa Asia, solum diuinum, sacra terra: non hi ab Asia nomen, sed regio ab illis suscepit.* Haud eo inficias, *as*, dei, et *aeser* deorum nomen veteri lingua, non modo Scandinauica, sed etiam Celtica viguisse. Hesychius *Αισοί, Θεοί ὑπὸ Τυρρηγῶν*. Suetonius Tranquillus in vita Caesaris Augusti: (2) *Aesar Etrusca lingua deus.* Inde ara quoque videtur dicta, et priscis Italis *asa*, Numae Pompilii lex: (3) PELEX. ASAM. IVNONIS. NE. TAGITO. *Pellex aram Iunonis ne tagito.* Sic: *Furii, Valerii, ero, mures, melior, foederum, plurima, arena*, vulgo apud priscos Romanos, et in Saliorum carminibus, (4) dicta sunt, *Fusii, Valesii, eso, muses, foedesum, plusima, asena.* Apud Turcas *as, pa-*

X x 2 rum,

(10) In thesauro linguarum septemtrionalium t. 1. p. 193. (2) ad v. 30. (3) c. 97. (4) Apud A. Gellium. l. IV, c. 3. (4) Varro apud Macrobius l. III. c. 2. et de Latina lingua l. VI.

rum, parcum, apud Sławonos *as, unum*, sicuti apud Russos *odin*. Sed ut Asiam ab istis diis, vel deos septemtrionales ab Asia fuisse dictos existimemus, maiori opus est vi ad persuadendum nobis. Potius ego, ut paullo ante dixi, ea in sententia sum, convenientiam tenuem soni in utraque voce, erroris causam existisse, ut Orinum cum asis suis ex Asia repeteret ille Polyhistor Arius, cui aurem praebeuit Snorro. Sed multo grauius peccatum in *Teucris*, cuius nominis tanta non est cum *Turcis* societas. Vbi a Perinskiöldo *Teucra* editur, ibi ipso in Snorrone est *Tyrkland*! (5) Nimirum postquam Illustris Stierntielmus (6) coniecturam expediuit, *Turcas* vetustis septemtrionis monumentis celebratos esse, digna visa est Peringskiöldo coniectura, quam sequeretur. Alio loco ubi Snorro de Leifuri in Vinkandiam profectioe agit, comes eius commemoratur *Turkir Sudurmadur*, (7) ibi Peringskiöldus: *sociorum unus Turkirus*, omisit enim in Latina versione, *vir e regione meridionali*, quod in Suedica interpretatione exstat. Mihi vero nihil aliud dicere voluisse Snorro videtur, quam *Turcam ex australi terra*. Neque illud *Tyrkland* quidquam aliud est, quam *Turcia*, non illa in Turkestan, sed ad Danubium et Danastriam et Danaprin Tanaimque et in Cherrhoneso Taurica. Cherrhonesum et superiores regiones usque ad fontes Tanais, ut a Constantino Por-

(5) c. r. p. 5. 75. (6) Apud Olava Verelium ad Heriolar Saga p. 5. 109. (7) T. I p. 312.

Porphyrogenneta describitur, Chazari tenuerunt, multis ante hunc Imperatorem aetatibus ex Turcestania profecti. Theophanes Byzantius: (8) τῶς Τύρκως ἀπὸ ἐῶας, ἕς Χαζάρως ὀνομάζουσιν εἰς συμμαχίαν ἐκαλᾶτο. Et lingua Chazarorum nulla alia, quam Turcica fuit, quod multis exemplis constat. Quocirca etiam liber Cosri, qui disputationem Iudaei cum Chazaro continet, Turcice scriptus fuit. Supra Chazaros Turcae alii, eorum cognati, a fontibus Tanais vsque ad Istrum confederunt. Et tamen, quod ex Constantino Porphyrogenneta constat, circiter A. C. 893 a Pazinacitis toto illo agro eiectione fuerunt, tamen ad Istrum et in Pannonia sedes suas collocarunt. Ex hac igitur regione praefata fama Othinum eduxit, in qua cum Turcas viderent colere, eo *Tyrkland* nomen regionis, ut tum erat, ediderunt. Vox illa *Diar* Turcica reuera est, et *domus complures, regionem, prouinciam* significat. Sic ديار بكر, *Diar Bekir*, ديار ربيعة, *Diar Rabia*, ديار مصر, *Diar Mezir*, ديار الجزيرة, *Algjezira*. Praeterea in dignitatum nominibus videtur fuisse, isthuc *Diar*: nam et Kioviae Princeps Oskoldus, qui circiter A. C. 865. fuit, *Diar* in Russicis Annalibus vocatur, quod nominis, imitatione Turcarum gefisse videtur. Tenemus igitur regionem, quam Getae Scythaeque incoluerunt iis temporibus, quibus Othinum fuisse, fama perhibet. Non nego, Snorronem Tyrklandiae nomine aliam regionem in animo habuisse.

X x 3

Nam

(8) p. 263.

Nam cum de Othini expeditione agit, eam ad orientem Tanais collocat, Othinumque profectum dicit *fürst vestur in Gardariki, oc tha Sutbur i Saxland*, (9) *primum, occidentem versus in Gardarikiam*, (quae nunc media Russiae regio est) *deinde meridiem versus in Saxoniam*. Scilicet cum illius aetate, Turciae eius, quam modo commemoravi, iam oblitterata esset memoria, contra ea Turcae orientales celebrarentur, eodem se vertit Snorro. Sed si ex Getis fuit Othinus, non iam mirum est, sermonem illius tam in Germania quam in Dania et Scandinavia, peregrinum fuisse visum, ita tamen ut non plane abhorreret ab his linguis, quemadmodum Turcica. Testantur sane septentrionales, diversam illius fuisse linguam, eamque *Asamal, Asarum sermonem* vocant. Olaus Verelius, (10) postquam ostendit, sibi cum Arngrimo videri, ab omni aetate in septentrione hanc linguam Noruagicam obtinuisse, (id autem mihi quodammodo a vero non videtur alienum esse) Eddam producit his verbis: *Asiatici matrimonia in his terris inierunt, genusque suum in Saxonia et arctoo orbe admodum propagarunt: sola ipsorum lingua hic in usu fuit: et satis liquet, quod in septentrionem linguam suam intulerint per Noruegiam et Daniam, Sueoniam et Saxoniam*. Eo in loco ipsa Noruagica lingua ex *Asamal* orta atque facta dicitur. At Verelius, seu dissimulans Eddae auctoritatem, siue aliquem eius errorem sentiens, ita fatetur: *Vocabatur haec lingua Asamal, hoc est, Asiatico-*

(9) p. 5. (10) In historia Gothrici et Hrolfi p. 2.

ticorum sermo: sed a priori, non nisi dialecto differ-
 bat: utriusque enim communis mater Scythica fuit:
 si quid autem peculiare posterior haec habebat, vulgo
 id minus receptum, Scaldis tantum frequentabatur,
 novo hoc lepore carmina sua condire studentibus: quae
 propterea minus facilia intellectui, nostro praesertim
 aeuo, cum vulgaris pariter ac poetica dictione vetus in
 usu esse desit. Eddam cum citet, prologum eius
 dicit, quem alibi merito exhibilat. Eo in prolo-
 go, Olai Magni codices haec tantum habent: ex
 indigenis ibi *Asae* uxores sibi et filiis suis delegerunt,
 ut hae familiae intra breue tempus per Saxoniam et
 omnem orbem Arctoum dispergerentur et lingua Asia-
 norum facta esset propria et communis omnibus has
 terras incolentibus. Codex vero Regius et Ste-
 phaniani non modo ista addunt, quae Verelius pro-
 duxit, sed etiam alia. Noruegis, Suecis, Danis,
 Anglis. Quod confirmant litteris mandata prisorum
 Asiaticorum nomina propria, quae una cum hac lingua
Asae, in septentrionalia haec regna, Noruegiam, Sue-
 ciam, Daniam et Saxoniam transtulerunt, occurrunt
 etiam in Anglia locorum et urbium vetusta nomina,
 quae alia lingua, quam ibi iam viget, videntur in-
 dita. Totum locum, at iterum in medio omissis
 quibusdam verbis, Ioannes Peringskiöldus produ-
 xit, (1) ut ostenderet, mox ab Odini profectioe,
 sermo-

(1) Ad Theodorici vitam p. 353. Idem ex alio MS veteri p. 354.
 Haec adfert: "Omnes historiae et relationes, quae lingua Noruegica conscri-
 ptae sunt, atque veritatem comitem habent, a Turcarum et Asianorum in-
 Septentrionem migratione ibidemque habitatione initium sumunt: quae propter"
 "verre"

sermonem illum, per uniuersam Germaniam, Galliam et Britanniam mox propagatum fuisse, a qua opinione Verelius abhorruit. Quid autem in ea est, quod aliquis probet? Si Odinus toto cum populo suo, Pompeii, ut nobis concedunt omnes, aetate, in septentrionem concessisset, non potuissent tamen Germani Asarum sermonem tam cito cognoscere, ut eodem iam sub Iulio Caesare et Augusto vterentur omnes. Locutos autem inuenio eam linguam, quae nunc fere est. Non adeo confestim magnis in populis veteres linguae intereunt, nouae recipiuntur: non tantum alicuius tyranni imperium valuit, quae natura sua fieri non possunt, ea ut impetraret. Redeo igitur ad Verelium, qui *Asamal* dialectum diuersam esse concedit, eandem tamen linguam esse contendit: nam inquit, *utriusque mater Scythica fuit*. In eo petit sibi concedi, quod maxime controuersum est. Non video, quemquam Scythicae linguae rationes tam congruentes Scandinauicis et Teutonicis reperisse, ut Lithuanicae Mathaeus Praetorius in Orbe Gothico demonstrauit esse. *Lapides Praetorio minatus est Peringskiöldus, forte mihi alius minabitur. Enimuero his armis non opus est, non defensoribus illis. At iocari video Peringskiöldum atque addere, litteratos. Ne illis quidem ob-*

“ vere dicendum est, eam linguam, quam Noruegicam vocamus, ipsos secum
 “ huc in aquilonem transduxisse, quae lingua postea Saxoniae, Daniae, Sue-
 “ ci e, Noruegiae et alicui parti Angliae communis facta est. Huius populi
 “ princeps erat Odinus Thori filius.

obruetur Praetorius. Sed Scythiam Verelius non dicit eam, quae sola fuit Scythia, ut ex Herodoto patefecimus, verum Ephorianam illam, reuera autem, nisi antiquissimo cuique suae gentis auctori refragetur, Turciam. Dicat mihi nunc quisquam, quemadmodum Turcica lingua mater et Germanicarum et Scandinauicarum esse potuerit: aut quemadmodum sola dialecto discrepet.

Qui *Teucriam* ex *Tyrkland* excuderunt, iidem hanc orientis regionem a Snorrone designatam ex oculis relinquunt, aliam sine duce quaerunt. Peringskiöldus ad Theodorici regis vitam (2) hunc ex Heruarae historia locum produxit: *ibessu sam-tüda komm austan Afsae menn oc Tirkjar oc bigdu Nordurlaund*, atque ita latine conuertit: *circa idem hoc tempus ex oriente aduenerunt Afiani atque Turcae, (i. e. Teucris, Troiani) qui boreales has oras excolere coeperunt*. Verelius, cum Hernaram ederet, nihil de Teucris et Troianis suspicatus est. (3) Mutata scena est per Stiernhielmi coniecturam. Huic autem coniecturae patrocina batur vetus opinio; Othinum a Troia et ex Phrygia fuisse profectum. Quantum Troia distat ab oriente Tanaï, in qua regione iidem Asgardum situm fuisse prodiderunt?

qua opera si credam illis,

Vna opera alligem canem fugitiuam agnitis lactibus.
Tom. V. Y y Fue-

(2) p. 352. (3) p. 6. 37. 38.

Fuerunt igitur eruditi viri, ut aetas quaeque tulit eruditos, qui Homericis delectati Musis hoc totum excuderunt. Qui vero? nempe vel solum nomen *Fryggæ*, quae Othini fuit coniux, admonere eos Phrygiae potuit; saepe enim multae atque longae una ex voce cufae sunt fabulae. Et cum *Asgard* adeo celebraretur, pro ingenio istius seculi, nullam aliam urbem, quam Troiam recordabantur. Vetus tamen ista est opinio. Non ego heic ad prologum Eddae prouocabo, in quam Olaus Verelius vehementer inuectus est. (4) *Maximam*, inquit, *prologi istius partem, utpote adulterinam et a sciolo quopiam ex mythologia Graeca et Latina confutam non agnoscit genuina Edda Snorronis*. Attamen etiam genuina in Edda, mythologia septima haec inuenio: *in medio orbe Borsonii condiderunt Asgardum dictam: haec Troia erat. (Asgardur; thad er Troia)*. Quod Olaus Magnus *medio in orbe* reddidit, in Snorrone est, *i Midum heime*. Quid si isthuc potius tamquam proprium nomen edidit Snorro? quid si *Media* ea sit? Nam tali in eruditione, qualis tum obtinuit, mirum non est, si quis in Noruegia atque Islandia crediderit, Turciam et Mediam eandem esse regionem, eandem deinde Teucriam et Phrygiam, ibi Troiam fuisse celebrem urbem. Et potuit ab illis totum hoc ad Tanaim reñici, quando Geographus Rauennas, apertissimus seculo suo auctor, sic ait: (5) *iuxta regionem Maeotida est patria maxima, quae dicitur Dardania*.

(4) In. notis ad Heruaur Saga. c. 2. add. p. 5. (5) p. 141. ed. Porchi

dania. Est haec Dandaria, de qua supra diximus: at Rauennas ille profecto *Dardanos* sibi visus est deprehendisse: quid enim aliud sibi velit isthuc *patria maxima*?

Venit mihi hoc loco in mentem Platonis in secundo de Republica dictum: primum quidem et vel maxime reprehensionem habere, si quis mentiatur, praecipue tamen, ἐόν τις μὴ καλῶς ψεύε-
ται. Quid autem potest esse imperite mentiri, si haec, quae produximus, aliquid ingenii habent? Non est ita deplorata historia Romana, ut Q. Pompeii temporibus, aliquod nomen fuisse vel Dardanum vel Teucrium putemus: non illa tunc Troia fuit, ut Asgardigloria, vel Othini regia, eius vastitati conueniat. Neque Turcia illa Orientalis Romanorum vumquam arma audiuisse videtur. Getae vero ad Istrum senserunt etiam iis temporibus, quibus fere Pompeius fuit, cum, ut ex Appiani Alexandrini Illyricis constat, bella in Illyrico Romani gesserunt. Snorro Sturlaeus, (6) de aetate Othini sic testatum reliquit: *per id tempus, Romanorum imperatores arma sua, longe lateque per orbem circumferentes, cunctas nationes sub iugum misere: quo fiebat, ut possessiones suas multi domini desererent. Romani imperatores, Snorrioni, Rumveria Höstingiar*, vocabulo aptissimo ad rem et amplissimi sensus, ut quemcunque magistratum Romanum contineat. Prologus Eddae diserte Pompe-

Y y 2

ium

(5) T. I. p. 5.

ium nominat, quod item ab eruditione Romana
 petitum est. Neque aspernantur hanc aetatem
 doctissimi viri, neque nos sane refragamur. Nam
 postquam ex multis difficultatibus, quae Othinum
 circumfident, eluctati sumus, nihil inuenimus, in
 quo acquiescamus, nisi Geticas gentes et hoc fere
 tempus, cum tantae Getarum vires, vt supra di-
 ximus, in Scythicos populos incubuerunt. Inpri-
 mis autem Othinus Neuros forte et Gelonos se-
 migraecos ex sedibus suis excitasse et cum Getis
 suis septemtrionem occidentemque versus duxisse
 videtur, fortassis etiam Scythis multis signa eius
 sequentibus. Nam quod ex *Herodoto constat*,
 Budini, Neuri, Gelonique in Scythico nomine et
 corpore olim continebantur, cum origine Scythica
 non essent, lingua quoque vterentur alia, quam
 Scythica. Itaque in incorrupta fama apud Snor-
 ronem, Vani illi et Voeni, quibuscum foedera
 confociauit Othinus, diuersi sunt ab incolis Gar-
 darikiae, quae regio tum vtique a Scythis tene-
 batur. Recolamus nunc ex Herodoto, qui mo-
 res Neurosum maxime, quae studia praestigiarum
 illo in populo fuerint, eaque conferamus cum
 Voenis Snorronis, (7) aut cum his Fennis, qui
 nunc sunt. Ne *λυκανθρώπους* quidem Neurosum
 obliuioni traditos reperiemus. Quare hi mihi cum
 Budinis et Gelonis Voenorum populus fuisse vi-
 dentur, siue Fennorum. Fennos autem paullo
 post hanc aetatem, Romanis referentibus et cum
 pri-

(7) T I. p. 3. seq.

primis Cornelio Tacito, ad Vistulam totaque in Polonia vagantes reperimus, neque alii nunc mihi videntur Aestii fuisse in Prussia et Curonia, *orientales* dicti Germanis Balthici maris accolis, commo ad situm vocabulo. Cum Getis autem Othinus videtur reliquam migrationem confecisse. Est deinde in Othini nomine aliquid, quod, cum Budinos praestigiatores cogito, non puto penitus esse dissimulandum. Ab Adamo Bremensi et Varnefrido et in Genealogia veteri, quam Schefferus in Vpsalia produxit, Othinus vocatur *Wodin*. Ita passim scriptoribus, Germanicis praesertim, *Vodan*, *Voden* et *Vodin*. Eggehardus Vragiensis ad A. C. 943. praedium Lutarii Comitum *Wodeneswego* commemorat, tamquam *Wodeni viam* dicas, iuxta *Sunterslewo*, oppidum. Si *Wodin* pronuncies, tum maxime isthuc *Budivos* seu *Vudinos* (vt veteres Graeci dicebant) auditur, nomen populi Budini. Fuere alii Budini trans Tanaim in Asia ad Caucasum, qui cum fere notiores sint in iis scriptoribus, quorum secundum Herodotum monumenta exstant, facile fallere potuerunt eruditos Noruagos et Islandos, illum praesertim Polyhistorem, vt cum de Budinis fama exstaret, non de his ad Borysthenem, sed de aliis ad Tanaim et Caucasum cogitarint. Ceterum Getas, quorum ducem Othinum fuisse autumo, etiam alia tenuis fama indicat, cum de Thracibus admiscetur, vt dicam postea. Praeterea hoc velim, vt quis in Strabone animaduertat, quanta Getici nominis ante eum potentia

tia fuerit, quam exilēs autem postea vires exstiterint: (8) αὐξηθέντες δ' ἔν ἐπιπλείσων ὅι τε Γέλαϊ' ὅι τε Δάκοι, ὥσε ἕκοσι μυριάδων ἐκπέμπειν Σραλίαν, νῦν ὅσον εἰς τέτταρας μυριάδας συνεσαλμένοι τυγχάνουσι, καὶ ἐγγύς μὲν ἤκεισι τῷ ὑπακίαν τοῖς Ρωμαίοις. *Cum autem Getae et Daci vehementer aucti essent, ut exercitum ad ducenta millia educerent, nunc ad quadraginta fere millia reducti sunt, et prope abest, ut Romanis se subiiciant.* Quamobrem non est absurdum statuere, maximam Getarum partem cum Othino emigrasse. Denique ut Snorro indicat, habitum praestigiis honorem fuisse in Othini populo, tamen illis in rebus superiores et quasi magistrōs exstitisse Voenos, sic Strabo (9) apud Getas, ἄνδρα γόητα, qui ex Aegypto diuinationes repetierat suas, hoc est, a populo alio, quam Getico, commemorat, cuius artibus Βοιρεβίσις princeps Getarum vsus, rempublicam eam formauerit. Et ut Othino istae praestigiae diuinitatis opinionem conciliarunt, ita Geticus populus ad honorem illum praestigiis deferendum procliuis in hoc vel Deceneo vel Ceneo fuit Strabo: Προσημασίας ἐκμεμαθηκώς τινας, δι' ὧν ὑπεκρίνατο τὰ θεῖα, δι' ὀλίγων καθίστατο θεός. *Diuinationes quasdam edoctus, per quas deorum responsa dabat, parum absuit quin fieret deus.* Sed alio in loco: (1) ὁ παρὰ τοῖς Γέλοις θεός, τὸ μὲν παλαιὸν Ζαμόλξις Πυθαγοραῖός τις, καθ' ἡμᾶς δὲ, ὁ τῷ Βυρεβίσις Θεοπίζων Δεκαίνεος. *Deus apud Getas, olim quidem Zamolxes*

(8) p. 211. (9) p. 210. (10) p. 210. (1) 524.

molxes ille Pythagoraeus, nostra vero memoria Decaeneus, qui Byrebistae vaticinatur. Aetas hominis nos admonet, hunc Decaeneum fortassis ipsum illum Othinum fuisse, qui Voereuista rege occiso, populo autem Getico diffidiis distracto, migrationem eam susceperit.

Expofui sententiam, quae de aetate Othini communior in septemtrione fuit, inque ea, quae vana essent, annisus sum expurgare, quae similia vero, confirmare. Alia praeter hanc in prologo Eddae proposita est. Ostendi iam supra, quod Verelii de prologo isto iudicium fuerit. Neque eo minus illustris Stiernhielmus succensuit (2) his prologi, ἰπαλεκλυρόσι, γρυπαέλοις, τραγελάφας,

Α ἐν τοῖσι παραπελάσμασι τοῖς Μηδικοῖς γράφουσι.

Tamen multi fuerunt, qui pleraque, vti veterem famam, reciperent. Itaque operae pretium est, vt arcana huius adyti patefaciamus. Apparebit enim, quibus *fornum bokum, libris antiquis*, vt Heruarae auctor loquitur, vsi fuerint septemtrionales, quantumque cauendum sit, ne eruditula commenta amplexemur, pro vetusta Scandinavicarum gentium fama. Nam ille prologi auctor Othinum Pompeii aetate fuisse scribit, eundem vero viceffimum a Priamo Troiano recenset. Nimirum ex duabus sententiis hic corrector fecit vnam. Si cuique patrum eius annos triginta dederis, erit
fama-

(2) Vide notas Verelianas ad *Heruarae Saga* p. 5. 89.

summa in Othino collecta sexcentorum annorum. Et, si Troia capta sit A. P. I. 3530. vt optimus quisque Chronologorum censet, illa summa adiecta, Othinus A. P. I. 4130. annorum fuerit triginta: hoc autem ab eo Othino, de quo diximus, interuallum est annorum amplius quingentorum. Biornus Ionaë Skardsfaeensis, *maximus inter Islandos antiquarius*, vt eum Stephanus Olai ad Vaticinium Volae appellat, in commentariis ad Voluspam, ex Saemundi Oddensis annalibus Odinum Priscum refert ad annum a Troia capta 667 hoc est, ad A. P. I. 4197. Eum et producit et reprehendit Thormodus Torfaeus *doctissimus aequè Islandus*, tamquam alicuius Islandi commenta pro Saemundi rationibus sequentem: ipse autem ita sentit, vt in calculo annorum, annis in singulos distribuendis XXXV. ad A. P. I. 4230. excedat. (3) *Si, inquit, coniecturis locus esset, suspicari liceret, cum Thraces Dario Hystaspi circa haec tempora se dederunt, regem eorum ab Thore Memnonis filio oriundum metu seruitutis in Scandinauiam concessisse.* Enimuero hic annus Torfai iam in Xerxem regem congruit, non in Darium. Genealogiam regis Thracici a Thore Memnonis filio non huius facimus, neque cetera moramur. Nam mythologus aliquis Noruagus hic videtur in Herodoto Budinorum migrationem in alteram Borysthenis ripam respexisse, quam ad A. P. I. 4168.

con-

(3) In Serie regum Danicae p. 120. In Historia Noruegica Part. I. p. 138.

contigisse, in Chronologia Scythica diximus: a quo anno Biorni calculus propius abest, quam noster. Non, quod iam tum Budinus aliquis, aut ille Othinus Priscus fuerit, aut quod emigratum sit in septemtrionem, sed quod in nomine Budinorum offendentes mythologi, porta eburnea insomnium vigilantes admiserint. Et sunt in Herodoto alia, quae aucupati videntur fuisse. Credo ego, cum de Arimaspiis legissent, ex eo talem sibi suum Othinum finxisse. Saxo Grammaticus: (4)

vulgo dicitur Othin

Armipotens, vno semper contentus oculo.

Edda Snorronis, mythologia decima quarta fabulatur, Othinum, cum e fonte Mimi sapientiam bibere vellet, Mimero fontis domino oculum oppignorasse, vnde in vaticinio Volae: (5)

Omnino noui Odine, ubi oculum abdidisti,

In recenti illo fonte Mimeri.

Saxo Grammaticus iterum ait: (6) *Odinum orbem oculo, hispido amiculo circumactum, bellorum usum caluisse.* Totidem verbis ille Aristæas Proconnesius de Arimaspiis:

Ὀφθαλμὸν δ' ἐν ἑκαστῷ ἔχει χαρίεντι μετώπῳ,
καίησι λάσσιαι, πάντων σιβαρῶνται ἀνδρῶν.

Oculum unum habent in fronte,

Hirsuti capillos, omnium fortissimi hominum.

Deinde quae mythologi habent de *Sif* muliere, (quam propter vnius congruentiam syllabae, pro

Tom. V.

Zz

reli-

(4) P. 32. (5) V. 31. (6) P.

reliqua facilitate sua *Sibyllam* interpretantur) eā sunt ex Herodoti illo loco surrepta, vbi de Hercule et virgine semidracone. Sed quid ceteris de Tyra fabulis atque isti genealogiae Thracicae in prologo Eddae faciemus? Admiscet Mythologus *nigri Memnonis arma*, tamquam ille Troam Priami filiam duxerit atque ex ea genuerit Tyren. Hoc est eiusmodi, vt illud alterum, Priamum fuisse Odinum et a Frigga coniuge eius Phrygiam regionem appellationem habuisse. Multa quidem in Aurorae filio Memnone Graeculi post Homerum. sibi permisere, omnes tamen eum Aethiopibus et Indis praeficiunt, filiam autem Priami *elocare* eidem ausus est nemo. Constantinus Manasses, (7) vbi Πανλίαν Indum Priamo subsidia misisse per Memnona canit, de exercitu eius ita *latus* est:

Οὐ δὲ στρατός ἦσαν Ἰνδοὶ, πάντες μελανοχρῶτες.
 Adeo, in quibus lusit Homerus, in iis posteritas feriam confectata historiam, noua quotidie excudit, quasi subleuatura poetae fidem. Qui autem poterant auctori prologi, Priami ista γεγελοῦσμένα in mentem venire? Potest fieri, vt aliquid ex veteri fama de Thracibus Getarum populo cognatis vicinisque percubuerit. In Fastis Siculis ex Semironio Babylonio refertur, (8) quod post Ninum in Assyriis regnauerit Θεζάρης ὀνόματι, ὄντινα μελινώμασεν ὁ τῆς πατρὸς Ζάμης τῆς Ρέας ἀδελφός, Ἀρεα, εἰς ὄνομα τῆς πατρὸς ἀσέρος.
 Tbur-

(7) p. 25 ed. Paris. (8) p. 68. ed. Raderi.

Tburras, cui ipsius *Tburrae pater*, *Rbeae frater*, nomen *Martis* imposuit, a *planeta*. Hunc deinde *Thurram* ait, expeditione suscepta versus boream, *Caucasum* quendam ex stirpe *Iapeti* bello aggressum, denique in *Thracia* obiisse. Est sane illa tenuis memoria *Tyrae* *Thracum* parentis, de quo *Samuel Bochartus* in *Phalego*, quantum satis est, egit. Hic est *Tbor* in mythologiis septentrionalibus, a quo videtur *Tyr* in *Edda Snorronis* (9) distingui, at in prologo confunduntur nomina. *Tyr* in septentrionalibus linguis *magnum quemque virum* significat, et in compositis augendi vim habet, vt *Georgius Hiccius* animadvertit. (10) Credo eandem vim vocis apud *Sarmatas* obtinuisse. Nam *Lucianus* in *Toxari* testatur, si quis praelio superatus *Ζίρω* exclamarit, eius vitae *Sarmatas* percipisse, veluti ἐπὶ λύτρῃς ἤκανλος, hoc est, veluti qui diceret, vt ille in *Rhapsodia Dolon*:

Ζωγῆτ', ἀὐτὰρ ἐγὼν ἐμὲ λύσομαι.

Hesychius: τυρωθένια, τὰν παραχθένια, κνηθένια. Sed utcumque inter *Thracas* vicinosque *Getas* et *Scythas* *Sarmatasque* celebre hoc *Tyrae* nomen fuerit, tamen ipso in prologo *Eddae* nihil aliud, quam hoc nomen arreptum aliunde sentio. *Thraces* vero, quos *genealogiae Priami* immisceri videmus, non sunt *Europaei*, sed *Asiatici*. Acceperat igitur mythologus, *Thracas* cum *Rhaeso* suo *Troia-*

Zz 2

nis

(9) Conf. in *Edda* mythol. 19. et 23. (10) In *Thesuro linguarum septentrionalium* T. I. in *Grammatica Moeo-Gothica* p. 102. It. p. 18. et *Rudolphus Jonas* in *Lexico Islandico* voce *Tyr*. *Eddae* mythologia 23.

nis rebus ab Homero adspergi. Hi sunt illi Thracæ, quos Herodotus (1) cum Phrygia in Asia posuit. Eustathius ad Dionysium Periegeten (2) de his Thracibus, καλύμενοι δὲ πᾶσι Βρίγες, εἶτα μεταβάλλεις εἰς Ἀσίαν μετέπεσον εἰς τὸ Φρύγων ὄνομα, dicti Briges atque cum in Asiam traiecissent, mutato nomine Phryges. Ista migratio, si qua fuit, tam vetusta est, quam Dardanus. Nam is, ut Eustathius alio loco, (3) in cataclysmo ex Samothracia nauigasse dicitur in Asiam, εἰς τὰς Τρωικὰς τόπους. Macedones item referebant Herodoto, (4) Briges finitimos Macedoniae agros tenuisse, transgressos in Asiam dictos fuisse Phryges. Hos Thracas Xenophon quoque ab Cyri expeditione rediens reperit. Brigum autem nomen Hesychius nobis explicat ex Iuba: Βρίγα λέγεσθαι ελευθερον, Lydia lingua: quod nostrum videtur esse Frey, fry, liber, sui iuris, est enim hoc simile iis vocibus quas Plato ex Phrygicis in Cratylo recensuit, quas nos etiam hodie in linguis nostris agnoscimus. Mythologus autem ista quidem ignoravit: quae in mentem temere venerunt, ea sic posuit, ut historia eius Horatianae tabula esset

*Per similes, cuius, velut aegri somnia, vanae
Finguntur species, ut nec pes, nec caput omni
Reddatur formae.*

Sed sunt ex Graecis, qui in Homero Thracas Europaeos interpretentur: quare minora scholia (5)

non

(1) I. III. 90. (2) ad v. 323. (3) ad v. 524. (4) I. VII. 73
(5) D. K. v. 435.

non patiuntur Rhesum Eiones esse filium, ut Homerus cecinerat, sed Strymonis edunt fuisse: nam is fluuius in Thracia Europaea erat. Deinde alii Thracas ab Ilio duxerunt in Europam, eo maxime argumento, quod hic quoque reperiebant Dardanos. Appianus in Illyricis Graecis Hoeschelianis: (6) ὑλώδης δ' ἔστιν ἡ Παιόνων ἢ ἐπιμήκης ἐξ Ἰαπόδων ἐπὶ Δαρδάνου, *uliginosa est Paeonum regio et a Iapodibus ad Dardanos protenta*. Paeones autem ipsi de Iliacis originibus gloriabantur. (7) Itaque fieri potest, ut in vetusta Othini fama de Thraeibus Europaeis aliqua memoria conseruata fuerit, quae deinde ex Homericis fabulis aliisque Graeculorum figmentis sit foedata. Nam ipsum Getarum nomen ad extremum in Othini fabula reperimus, ubi de morte eius Snorro: (8) *morti uicinus perhibuit, Godbeim sibi petendum esse, ut amicos suos ibi exhilarare posset. Godbeim Peringskiöldus deorum sedes reddit, inuito utique Snorrone, qui paullo ante dixerat: hanc Svithiod (Sueciam) uocarunt Mannheima, sed alteram Miklo Svithiod (magnam Suetiam, siue Scythiam) appellarunt Godheima: de hoc Godbeim multa exstant memoriae prodita.*

Postquam Othinum ab Istro et Borysthene deduximus, non opus est, ut totum illius iter in Saxoniam, Daniam, Suediam ex Snorrone per-

Zz 3

sequa-

(6) p. xi. Imperite vetus interpres, ut solet: "Paeones natio ingens circa Istrum per longum incolens, ab Iapodum populis supra Dardanos protentissima" (7) Herodotus l. V. c. 13. (8) p. lii.

sequamur. Nam satis nunc est, quod memoriam conuersionum iis in regionibus, quas tractandas suscepi, recolimus. Ceterum non displicet mihi Olai Verelii sententia, cum de Othino sic ait: (9) *Fuit hic Ouinus per orbem arctoum longe celeberrimus, non tam illustribus facinoribus, quam praestigiis et artibus magicis.*

(9) In indice ad *Herrauds Saga* voce *Sonar Odins*.

Coniectura de nomine Balthici maris.

Matthaeus Praetorius in orbe Gothico Balthicum mare ab *albis litoribus* dictum censuit. Pruteni enim litorales, quoad linguae Prussicae, quae nunc plane est extincta, usus obtinuit, *Baltikkei* appellati sunt, id est, *albae terrae incolae*, a *baltikkas*, quod *album* significabat. Est autem hoc vocabulum etiam Litthuanicum. *Baltas*, *baltinu*, *dealbare*, *balkstu*, *subcandidum esse*, *baltis* et *balties*, *cerussa*, *baltis*, *baltimas*, *albugo*, *baltulis* et *baltinelis*, *candidum*. Vendice *biola*, Esthonicè, *walge*, Fennice, *walckia*, Russice, *bielo*. Quemadmodum litorales Prussi lingua sua *Baltikkei* dicti fuerunt, ita inuenio, Ordinis Teutonici Equites litus isthuc, in quod succina eiiciuntur, *Wittland*, id est, *albam terram* appellasse. Vidi duo diplomata Hannonis Sangerufani, ex quibus hoc didicimus. Vnum hic apponam:

Frater Anno Hospitalis S. Mariae Theut. Hierosolym. Magister uniuersis praesens scriptum visuris salutem in Domino sempiternam. Recognoscimus et tenore praesentium protestamur, quod, cum nos et Fratres nostri, quandam munitionem, ut securus pateat introitus et exitus nauibus ad terras Prussiae applicantibus, in loco, qui Wittlandes-ort vulgariter appellatur, construere intendimus: qui siquidem locus, pro tertia parte Venerabilem Dominum Episcopum Sambiensem et pro duabus partibus nos contigit, idem Episcopus, ut dicta munitione
a nobis

360 CONVERSIONES RERVM SCYTHICAR.

*a nobis ac nostris Fratribus in Christianitatis subsidium
construenda felicem ac prosperum assequeretur effectum,
eam dicti loci partem, qui ipsum in longitudinem et la-
titudinem usque ad nemus adiacens contingit, nobis Fra-
tribus ac Ordini nostro cum utilitate, iurisdictione et iure
in veram proprietatem contulit ac donavit perpetuo libe-
re possidendam. Nos vero de Fratrum nostrorum consi-
lio dicti Episcopi grato occurrentes assensui, tres manjos
et praeterca tantum terrae spatium in longitudine et la-
titudine, quantum nobis, Fratribus nostris ac Ordini, dicto
loco, scilicet Witteslandes-ort, ut praemissum est, con-
tulit ac donavit, praefato Episcopo suisque successoribus cum
omni utilitate, iurisdictione et iure in veram proprietatem
pro restauro conserimus et donamus in eo loco, quo dictus
Episcopus Cathedralem suam sedem decreuit collocare.
Praeterea hoc adicimus (adiicimus) supra dictis, quod, si
in dicto loco, videlicet Wittlandes-ort conigerit inueniri
lapides, qui Burnstein (succinum) vulgariter appellantur,
dictorum lapidum duae partes nobis ac Fratribus nostris
et pars tertia cedit Episcopo memorato. Et si necesse
fuerit expensas haberi in collectione seu conquisitione la-
pidum praedictorum, nos et Fratres nostri ipsas pro dua-
bus partibus faciemus et saepedictus Episcopus pro tertia
parte sua, tertiam partem faciet et per sacrum. In hu-
ius itaque rei testimonium, sigillum nostrum est appensum.
Datum anno Domini 1264. mense Iulii.*

NV-

NUMVS AEGIENSIS

ILLVSTRATVS.

T. S. B.

CAPUT barbātum et laureatum ΑΙΓΕΩ: = Signum decussatum in speciem Graecae litterae X, cuius ima crura A describunt, appostitis litteris, in summo API, in medio ΤΟΔ, in imo ΜΟC, quas laurea complectitur. Numus in museo Imperatoriae Academiae Petropolitanae.

Tibull. III. Fig. 2.

I. Exstant numi ΑΙΓΙΕΩΝ. ΑΙΓΕΙΩΝ. ΑΙΓΑΙΩΝ. ΑΙΓΕΑΙΩΝ. ΑΙΓΑΕΩΝ nominibus inscripti, in quibus doctissimi antiquarii haesitarunt, cui unumquemque numum urbi, cui populo unumquodque Ἐθνικὸν attribuerent. Hic numus Aegiesum in Achaia est. Id me optimo iure censere, εὐλόγητο, τὸ Ἐθνικὸν demonstrat. Stephanus Byzantius enim, postquam ex Eudoxo Achaiae urbem Aegium esse docuit, ὁ πολίτης, inquit, Ἀγίως, et auctoritatem oraculi adfert, quod quis Eustathius (1) altero versu plenius protulit, ex hoc malumus citare quam e Stephano:

Υμεῖς δ' Ἀγίως ἕτε τρίτοι, ἕτε τέταρτοι,
 Οὐδὲ δωδέκατοι, ἕτ' ἐν λόγῳ, ἕτ' ἐν ἀριθμῷ.

Neque aliter Polybius, Pausanias, Strabo. *Aegieses* T. Liuiο dicuntur. Et esse hunc numum Achaicum, Tom. V. A a a cum,

(1) Il. B. p. 292. ed. Rom.

cum, praeterea signum decussatum confirmat, quod nihil aliud significat quam Achaïam. Bernhardus Montefalco quidem (2) isthuc signum AIGI EIΩN monogramma esse censet, nihil vero optimi sensus iudicio atque doctrinae detractum velim, si hic eum sequi non ausim. Nam Aegiensium nomen Graece non effertur Αιγίων, neque magis quidquam in oculos incurrit, quam signum isthuc ex A et X esse conflatum. Videtur autem Montefalco in circulum legisse, ut, si ab A pergas sinistrorsum, putes habere te in superiori crure I. cui proximum sit Γ, tum redire ordinem ad A: et in superiori I desinere, ut sint AIGAI. Sed Aegae in Cilicia, Macedonia, in peninsula Thracaeisiorum, Myrrhina, Aeolide, Lydia, Locride, Aetolia, Euboea (tam multae enim eodem nomine fuere Aegae) gentile omnes habuere teste Stephano, Αιγαίων aut Αιγεάτων. Aegae vero in Achaia, tum quidem, cum hic numus est signatus, fuere nullae, agro Aegaeo multis ante temporibus attributo Aegiensibus. (3) Exstant denique numi apud Golzium et Begerum his cum monogrammatibus:

in quibus nemo ne haesitauerit quidem, AXAIΩN esse legendum. Est etiam numus in gaza Regis Prussiae

(2) In Palaeogr. Graeca p. 143. (3) Strabo ed. M. Petri p. 441.

Prussiae, in quo Aegienses signum illud Achaiae tetragono incluserunt. Eo in signo A rarius ad Phoeniciae formam litterae factum, ut hic in numo ipso cernitis, quem primus protulit Laurentius Begerus, (4) et ex Begero Bernardus Montefalco in Antiquitatibus explicatis. (5) Alios duos numos Nicolaus Haymus (6) edidit. Vterque habet caput Iouis: vnus praeterea circa Achaiae monosyllabum, Corinthi nomen, alter obscuriores litteras, in quibus Tyri monogramma mihi suspicionem mouit, ut postea quoque dicam, de Tyro oppido in Argolica regione, haud longe ab Inacho fluuio. Scilicet ex quo tempore vrbes in Peloponneso pleraeque ad vnum corpus et concilium Achaicum aggregatae fuerunt, ius monetae cudendae singularum vrbiū fuit: numi autem erant communes Achaeorum omnium, quacunque in vrbe essent signati. Inde commune populi Achaici monogramma impressum fuit, nonnumquam appposito nomine vrbis eius, in qua cusi sunt, haud raro etiam praetermissio. Sic Polybius tradit, Achaeos amicitiam sociali foedere iniuisse, *ἢ νόμοις χρηῖσθαι τοῖς ἀλλοῖς ἢ σταθμοῖς ἢ μέτροις ἢ νομίμασι*, ut legibus, ponderibus, mensuris iisdem, pecunia denique communi vterentur omnes. Hoc enim aliis in vrbus Graeciae minime obtinebat, ut vna in vrbe signati numi, alterius populi in vrbus reciperentur. Testem habeo Galenum in protre-

Fig. 2.

Fig. 3. 4.

A a a 2

prico,

(4) T. I. p. 447. (5) T. III. parte I. tab. 89. (6) In thesauro Britannico T. II. p. 96.

prico, (7) τὰ κατὰ πόλις νομισματὰ παρὰ τοῖς ἱε-
 μένοις ἰσχυράτα, παρ' ἄλλοις ἐστὶ κίβδηλα, *numi sin-*
gulis in ciuitatibus cusi, apud eos utique pretium ha-
bent, a quibus signati sunt, at aliis in ciuitatibus
non recipiuntur. Quam ob causam Aristoteles in
 Nicomachiis (8) νόμισμα παρὰ τὸν κόμον dictum
 afferit, quod εἶον ὑπάλλαγμα τῆς χρείας γέγονε
 κατὰ συνθήκην, ἢ ἔστι ἢ φύσει, ἀλλὰ νόμῳ ἐστὶ ἢ
 ἐφ' ἡμῖν, μεταβάλλειν ἢ ποιῆσαι ἄχρησον. Hoc enim
 non tantum eo pertinet, quod in Oeconomicis
 tradit, (9) Hippium tyrannum Athenis omnem nu-
 mum ἀδάκιμον esse iussisse, atque eodem ex ar-
 gento cudendos nouo signo elocasse alios: verum
 etiam ad singularum leges urbium respexit, per
 quas suum cuique numo pretium fuit.

In aduersa numi parte caput Iouis est lau-
 reatum, siue is sit ΖΕΥΣ ΣΩΤΗΡ, cuius simu-
 lacrum Aegii in foro dedicatum fuit, (10) siue
 ΖΕΥΣ ΟΜΑΓΥΡΙΟΣ, cuius delubrum in mariti-
 ma urbis regione existit. (1) Homagyrius, (tam-
 quam congregatorem populi in unum concilium dicas-
 in eius conuentus honorem positus videtur, qui
 a Panachaeis Aegii est habitus. Quamquam Pau-
 sanias id nomen eo interpretatur, quod Agame-
 mnon hoc loco principes Graeciae de summa belli
 Troiani in consilium adhibuerit, tamen id veluti
 vanum et futile nemo morabitur. Fuit et Iupi-
 ter

(7) p. 7. ed. Paris. (8) l. v. c. 8. (9) l. x. c. x. (10) Pausanias
 p. 533. (1) ib. p. 534.

ter Infans patria Aegiensium religione cultus, cuius simulacrum aeneum ab Agelada Argiuo fabricatum, quotquot annis sacerdos lectus in aedibus suis adseruabat. Huic Ioui priscis temporibus sacerdos venustate inter ceteros eximia legebatur puer, eoque pubescente alius. (2) Tenuit religio Iouis Aegiensis ea maxime causa, quod ad urbem hanc Iouem a capra nutritum ferebant, (3) vnde et Aenarium, haud procul ab Aegio, lucus Achaeorum comitiis frequentatus, Ioui sacer erat, teste Strabone. Ea causa etiam Iunonis vultum Aegienfes signarunt in numo Golziano. In eiusdem numi auersa Lucina est sic, vt signum deae Aegienfis Pausanias descripsit. (4) Damophon Messenius fecerat, os, manus et pedes e marmore Pentelico, reliquum corpus e ligno: a vertice ad calcem tenuis carbasus simulacrum tegebat, ἢ τὰς χερσὶ, inquit Pausanias, τῇ μὲν ἐς εὐθὺ ἐκτέταται, τῇ δὲ ἀνέχει δᾶδα. Id ἐς εὐθὺ τέταται, quemadmodum intelligendum sit, figura in numo declarat. Quem vero Iouem hoc in numo Aegienfi positum dicemus? Nempe Homagyrium potius, quam Sotera. Non enim tantummodo in Aegienfium, verum etiam in aliarum quoque numis urbium, qui Achaici nominis essent et corporis, Iupiter spectatur, vt non peculiariter Aegii cultum Sotera, sed Panachaeorum tutelam Homagyrium signari manifestum sit. Et mos erat, vt praetores Achaei primo comitiorum die omnis

Tab. XII.
Fig. 6.

Α α α γ

caus-

(2) Pausanias p. 584. (3) Strabo p. 441. (4) p. 582.

caussa pronuntiarent Iouem, Apollinem, Herculem. (5) Crotoniatis, Sybaritis et Coloniatis in Magna Graecia, ΖΕΥΣ ΟΜΟΠΙΟΣ cultus est, teste Polybio. (6) In quo paene inclinatus animus, ut e Pausania reponere malim ΟΜΑΓΥΠΙΟΝ. Nam ut Sybaritae ceteraeque urbes hoc nomine dedicarent Iouem, ad cuius delubrum conuentus agerent et commune ciuitatum concilium, Achaeorum imitatione institutum est. Miserunt enim legatos in Achaiam, qui mores legesque Achaeorum addicerent, secundum quas similem suis in urbibus rem publicam conderent. (7)

Laurentius Begerus in numo Aegiensi (8) vultum Neptuni, non, ut nos, Iouis, explicat. *Haud procul ab Helice, inquit, Neptunus Heliconius colebatur: huic Iones in Panioniis sacra fecerunt: ita verosimile fit, Achaeos pulsos Ionibus, eiusdem religionis numinis fuisse tactos. Fama tenet, Ionas ab Achaeis repetiisse simulacrum dei ac formam illius, Achaeos noluisse concedere, qua sine alia, quam quod illud numen ab se solis coli vellent? Patrae urbs in Achaia et ea in urbe Neptunus quoque cultus. In eam sententiam praestantissimus vir iudicauit. Mouit autem eum res perexigua ut ita statueret, quod in auersa numorum quorundam Achaicorum tridens Neptuni visitur. Sed quid auersae illa nota ad caput laureatum? quid Neptuno cum laurea? Deni-*

(5) Lilius l. XXXII. c. 25. (6) p. 176. (7) Polybius l. c. (8) Theauri Bland. T. I. f. 445.

nique aliis in numis auersa habet fulmen Iouis et elauam Herculis, numquid et illa ad Neptunum iure meritoque referemus? Quod Begerus vrget amplius, ante Helicen euersam, Achaeos aequae, vt antea Ionas, concilium Aegii celebrasse atque adeo sua sacra Neptuno Heliconio fecisse, id nos nihil mouet. Nam cum Aegiensium in luco Ioui sacro conuenere Achaei, non potuere, quin Ioui illius praesidi luci facerent. Ea consuetudo tenebat in Graecia, vt quo in loco conuentus instituerentur populi, illic sacra instaurarentur illi deo deaeue, cuius numini is ipse locus sacer erat: Amphictiones Delphis faciebant Apollini, Panionium Ephesi Dianae. Praeterea Helicae et ad Neptuni Heliconii, conuentum Panachaeorum indictum reperio fuisse nullum, immo ne Aegii quidem fuisse, nisi aliquanto tempore post Helicen euersam. (9) Iones autem ab Achaeis victi, e fuga sese receperunt Helicen: inde etiam e pacis foedere, Ionibus dimissis, Achaei sine populi concilio fuere sub regibus: vbi liberi corporis coeperunt esse, quod Strabo testatur, (10) in Aenario luco, is Aegiensi in agro erat, conuentum est. Neptuni autem Heliconii adeo nulla Achaeos religio mouit, vt repositibus Ionibus illius simulacrum dei formamque templi, Helicensibus auctores essent Achaei, vti redderent. Testis Strabo. (1) Helicensibus nihilo magis ad reddendum permotis, infecuta est et Helices et fani Heliconii

(9) Pausanias p. 538. (10) p. 441. (1) p. 439.

nii clades a terrae motu et fluctibus maris. (2) Achaei hoc in religionem vertentes, Ionibus sua sibi sacra habere iusserunt. Quamvis igitur post istam cladem ager omnis Helicensis Aegiensibus esset attributus, (3) tamen ad fanum Neptuni Heliconii non Achaei, sed Iones sacra fecere, ad Strabonis usque aetatem. Clades Heliconia, eiusdem testimonio Strabonis, duobus ante Leuctricam pugnam annis contigit. Pugnatum est, Olympiadis CII. anno tertio ineunte: terrae motu igitur concussa est Helice Olympiadis CI. anno quarto. Eum annum Pausanias (4) disertis verbis edidit, ut Eusebium non moremur, qui ad Olympiadem C. refert. Et Aristoteles vero in meteorologicis tradit (*) Achaicum illum terrae marisque motum eodem tempore, quo magnus cometa apparuit, hieme videlicet, Ἀριστάς ἀρχωντος. Locum corruptum Seldenus iam emendavit, ut esset Ἀσείης. In marmoreo chronico ΑΡΧΟΝΤΟΣ ΑΘΗΝΗΣΙΝ ΑΣΤΕΟΥ ΚΑΤΕΚΑΗ ΔΕ ΤΟΤΕ ἔ ἐπανάς, ut supplavit Seldenus, seu potius ut Palmerius: ἔ ἐπανά δονίς ἐν ἐπανά. Asteus archon fuit Olymp. CI. 4. Ab eo tempore Aegium praecipua dignitate urbs fuit, ut habet Pausanias eo in loco, (5) quem cum Begerus non accurate inspexisset, Helicae putavit conuentus Achaeorum ante hanc cladem fuisse solitos celebrari, quod Romuli Amasaei quidem sermo indicat, nequaquam vero ipse Pausanias: itaque

(2) Strabo l. c. Pausanias p. 522. (3) Pausanias p. 589. (4) l. c. (5) l. c. p. 528.

que mea isthaec est sententia, in aduersa numi nostri ceterorumque Achaicorum Iouem Homagyrum conspici, in auersa praeter monogramma Achaicum, eius symbolum dei-exstare, cui deo vrbs quaelibet, in qua numus est cusus, peculiari religione deuota fuit. Aegienses autem praeter Iouem publice coluerunt Neptunum et Herculem, teste Pausania: aliae vrbes deos deasue alios. Ita aut tridentem Neptuni signarunt in auersa, aut fulmen Iouis, aut cytharam Apollinis, aut caput Mineruae, aut clauam Herculis. Retineo me, ne, dum vt satisfaciam lectoribus, quaero, per omnes Achaicos numos vagando nimium ab instituto deflectam.

Quas ego vero dicam in auersa exstare litteras? Ludouicus Nonnius cum in numis Achaicis Goltii, Myrtilum, Callimachum, Pandiona, Thelamonem, videret, *nomina*, inquit, *forte sunt praetorum et damiurgorum*. (6) APICTOΔAMOC, vt ego lego in hoc numo, est nomen magistratus Aegiensis. Nomen in Peloponneso frequens. Aristodemum habemus ex Herculis posteris, a quo duae regiae domus apud Spartanos: Aristodemum alium Spartanorum regis necessarium, tutorem eius liberis datum: Aristodemum tyrannum Megalopoli, quo expulso, concilio Achaeorum adscripti sunt Megalopolitani: Aristodamum, qui cum Callicrate, Agefia et Philippo legatus, ab Achaeis in castra venit

Tom. V. Bbb ad

(6) P. 42.

ad L. Aemilium Paullum, ob victoriam de Perse rege gratulatum. Et quorsum omnes Aristodemos hic annumerem? Quem autem magistratum gessisse Aristodemum? quo tempore signatum hunc numum esse existimem? Indicium aliquod temporis extrema littera facit, quae ut ab Ioanne Harduino et Bernardo Montefalcone annotatum est, sub Caesare Augusto in lunulam mutari coepit, cum antea, ut est in gripho Euripidis, ἑὸς πυχός τις et in aenigmate Agathonis tragocdi, arcui Scythico similis videretur. Cleomedes ἐν Κυκλιῇ Θεωρίᾳ (7) lunam cornutam σιγμοειδέα τῷ γήματι dixit: at is Augustei scriptor seculi est. *Ante Hadrianum Imperatorem* figura ista τῶν σίγμα vetus in marmoribus et numis adhiberi profus desuit. Quoad autem Augustus rebus Romanis praefuit, Achaia in prouincijs censita est, in quas rectores a Senatu, non a Caesare sunt missi. Nerone Claudio Druso Caesare, C. Norbano Coss. A. Dionysiano 15. *Achaiam et Macedoniam onera deprecantes leuari in praesens proconsulari imperio tradique Caesari placuit*, ut auctor est Tacitus: (3) ex quo tempore prouinciae Moesiae, quae iam antea Caesaris Augusti et Tiberii Caesaris in potestate fuerat, adiecta. Cur graue Achaeis proconsulare imperium fuerit, multis disputat ad hunc locum Ioannes Fredericus

cus

(7) P. 75. (8) Anal. l. I. c. 76. 80.

VIII.



fig: IX



X.



fig: XI.



fig: XIII.



fig: XIV

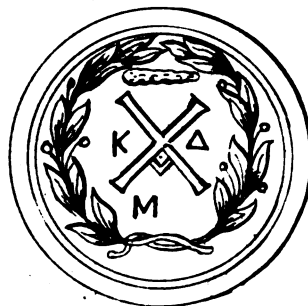


fig: XVI.



cus Gronouius. Sed mihi numi Achaici omnes libera
 populi Achaici republica cusi videntur. Aristodamus
 autem non fuit aliquis praetorum Achaicorum, sed
 Aegiensis magistratus. Ioannes Harduinus in numis
 vrbium hunc ipsum numum produxit iis verbis:
 ΑΙΓΙΕΩΝ *ex parte auersa nomen Archontis* ΑΡΙ-
 ΣΤΟΔΑΜΟΣ. A. *hoc est, Αρχων, vel Praetor fuit.*
Apud illustrem Harlaeum et in musco nostro. Quam-
 quam Harduinus duos numos vidit, tamen vereor,
 ne A. isthuc tantummodo in monogrammate Acha-
 iae sibi deprehendisse sit visus: nam quod τὸ σί-
 γμα aliter, quam in nostro est, exprimit, hoc
 vero suspicionem mihi mouet, aliquid humani cla-
 rissimo antiquario accidisse. Si in eo non est er-
 ratum, tamen archontem incommode praetorem
 exponit. Nam praetores vt dicerent Romani τῶς
 στρατηγῶς Graecorum, consuetudo perpetua obti-
 nuit: apud Achaeos autem στρατηγῶν quotannis vnum,
 ἀρχοντας vero ciuitatum rectores fuisse complu-
 res, infra declarabo ex instituto. Eundem in mo-
 dum Cimon et Methrodorus Manecadis filius in nu-
 mis Golzianis Patreensium archontes fuerunt, Dy-
 maeorum vero Myrtilus, Phliuntiorum Callimachus,
 in numis item Golzianis. Vt plane intelligatur, quos
 Dymaeis et Phliuntiis adscribam, cum nihil appa-
 ruerit doctissimis ante nos antiquariis, cur numos
 istos Achaicos his potissimum vrbibus adsignarent,
 digrediar equidem non inuitus ab Aegio atque in
 Achaia per ceteras vrbes vagabor.

Tab. XII. 7.
 Tab. XIII. 8.
 9. 10.

Bbb 2

Ita

Ita igitur sentio, numos Achaicos, eius urbis, a qua signati fuere, nomen, aut litteris referre, aut quodam monogrammate. Apponam tum litteras, tum monogrammata mea cum interpretatione.

ΦΟΡ Κορινθίων sine dubio. Est enim illa littera, vetus a Phoeniciis acceptum κάππα, diuersum a κάπκα, vt vel ex Eustathio iam abunde notum.

Δ Δυμείων.

Α Αργείων.

Μ Μεγαλοπολιῶν, siue Μεσσηνίων. Vbi in mentem venit, quod Eustathius ad Iliadem scriptum reliquit: (9) Lacedaemonios scutis signi in locum inscripsisse Λ litteram, λαμβδα, ἐκ τῆς κατάρχοντος; σοιχείω χαρὰ κτηρίων, ita vt Messenios τὸ Μ. Adfert autem eam in rem ex Euroli, ἐξεπλάγην γὰρ, ἰδῶν σίλβον τὸ λάμβδα, hoc est, *scutum Laconicū militis.*

Κ Κλεωνάων.

Φ Φλισυλίων aut Φεγεάτων.

Ν Ναυπλιέων.

ΜΙ Μυκηναίων, compositum monogramma tribus ex litteris, Μ et Υ et Φ veteri.

ΕΑ Φαράων seu Φηραίων, urbs enim est in Achaia Φάρα. Sic, inquam, vt in numis ΕΑΔΕΙΩΝ

(9) si. 293. edi. Rom.

ΩΝ et **FASTION**, de quibus Ezechiel Spanhemius.

I In numis Begerianis, quod nomen urbis sit, non recordor. Puto virum doctissimum **I** legisse in numis, in quibus **P** fuit scriptum. Scitis enim, quam tenui capite isthuc **P** in numis scribatur, ut videri possit nullum extare caput et plane ipsum **I** esse. Tum vero **Pis** numus fuerit, urbis non ita celebris quidem, at in qua tamen Liuius concilium Achaicum aliquando conuenisse testatur.

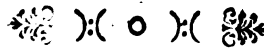
† **Tupis** oppidi in Argolide.

Iam primus ex Haymo numus, quem supra produxi, a Corinthiis, Naupliensibus et Megalopolitanis, alter ex eodem Haymo a Pharaeis, Mycenæis, Tyriis est cusus. Vndecimus e gaza Regis Prussiae a Dymaeis et Rhio oppido, duodecimus ab Argiuis Naupliensibus, Pharaeis, tertius et decimus a Dymaeis, Megalopolitanis aut Messeniis, Rhioque vrbe, quartus et decimus a Cleonaeis, Dymaeis, Megalopolitanis, quintus et decimus a Cleonaeis, Argiuis, Megalopolitanis, sextus et decimus a Naupliensibus Phliuntiis siue Pheneatis et Messeniis seu Megalopolitanis. Omnes e numophylacio Prussico. Itaque videtis, cur Myrtilum Dymaeis, Phliuntiis Callimachum archontem dederim. Quintus et decimus in his numis habet praeterea epocham Achaicam **ZB** adscriptam. Annus Achaicus **LXII.** est, cum praeturam gessit Eperatus. Haec epocha quae sit, e fastis Achaicis intelligetur.

Tabula **XIII.**
Fig. **11. 12.**
13. 14. 15. 16.

Ebb 3

FASTI



FASTI ACHAICI.

T. S. B.

A.P.I.	A.V.C.	Coff.	Olymp.	A.A chaic	Pract.
443 ¹	471	P. Cornelius Dolabella Cn. Domitius Calvinus	CXXIV. $\frac{1}{2}$		
443 ²	472	C. Fabricius Lucinus Q. Aemilius Pappus	$\frac{2}{3}$		
4433	473	L. Aemilius Barbula Q. Marcius Philippus	$\frac{3}{4}$		
4434	474	P. Valerius Laevinus T. Coruncanius Nepos	CXXV. $\frac{4}{1}$	1	
4435	475	P. Sulpicius Saverio P. Decius Mus	$\frac{1}{2}$	2	
4436	476	C. Fabricius Lucinus II. Q. Aemilius Pappus II.	$\frac{2}{3}$	3	
4437	477	P. Cornelius Rufinus II. C. Iunius Brutus II.	$\frac{3}{4}$	4	
4438	478	Q. Fabius Gurges II. C. Genucius Clepsina	CXXVI. $\frac{4}{1}$	5	
4439	479	M. Curius Dentatus III. L. Cornelius Lentulus	$\frac{1}{2}$	6	
4440	480	Ser. Cornelius Merenda M. Curius Dentatus	$\frac{2}{3}$	7	
4441	481	C. Fabricius Lucinus IV. C. Claudius Canina	$\frac{3}{4}$	8	
4442	482	L. Papirius Curfor II. Sp. Carullius Maximus II.	CXXVII. $\frac{4}{1}$	9	
4443	483	C. Quinctius Gulo Claudus L. Genucius Clepsina	$\frac{1}{2}$	10	
4444	484	C. Genucius Clepsina II. Cn. Cornelius Blasio	$\frac{2}{3}$	11	
4445	485	C. Fabius Maximus Pictor Q. Ogulnius Gallus	$\frac{3}{4}$	12	

His XXV. annis omnis Pappus Achaicus seu Scriba et Strategus

Sub verem huius anni Pyrrhus rex in Italiam traiecit. Vide infra Fastos illustratos. c. I. 6. Dymaei, Patrenses, Tritacenses, Pharacenses Achaicam rempublicam eodem vere condunt. I. 6. 7.

4446

A.P.I.	A.V.C.	Coff.	Olymp.	A A-Pract. chaic.	Pract.
4446	486	P. Sempronius Sophus App. Claudius Crassus	CXXVIII. 1 2	13	<i>seni Praetores duo, quotannis lecti, rebus praefuerunt.</i>
4447	487	A. Atilius Regulus L. Iunius Libo	1 2	14	
4448	488	T. Iunius Pera N. Fabius Pictor	3 4	15	
4449	489	Q. Fabius Maximus Gurges III. L. Mamilius Vitulus	3 4	16	
4450	490	App. Claudius Caudex M. Fulvius Flaccus	CXXIX. 1 2	17	
4451	491	M. Valerius Maximus M. Ottacilius Crassus	1 2	18	
4452	492	L. Postumius Megillus Q. Mamilius Vitulus	2 3	19	
4453	493	L. Valerius Flaccus T. Otacilius Crassus	3 4	20	
4454	494	Cn. Cornelius Scipio Afina C. Duilius Nepos	CXXX. 1 2	21	
4455	495	C. Aquilius Florus L. Cornelius Scipio	1 2	22	
4456	496	A. Atilius Calatinus P. Sulpicius Paternulus	2 3	23	
4457	497	Cn. Cornelius Blasio C. Atilius Regulus	3 4	24	
4458	498	M. Atilius Regulus II. L. Manlius Vulfo Longus	CXXXI. 1 2	25	
4459	499	M. Aemilius Paullus Ser. Fulvius Nobilior	1 2	26	
4460	500	Cn. Cornelius Afina II. A. Atilius Calatinus II.	2 3	27	
4461	501	Cn. Seruilius Caepio C. Sempronius Blaesus	3 4	28	
4462	502	C. Aurelius Cotta P. Seruilius Geminus	CXXXII. 1 2	29	
4463	503	L. Caecilius Metellus C. Furius Pacilius	1 2	30	
				1	MARCVS Carynensis vnus vnus anni praetor. I 7.
				2	His annis e Dynaeorum, Tritacensium et aliarum urbium ciuibus praetores lecti. c. II. I.
				5	MARCVS Carynensis II. r. Sicyonii, pulso Cal. Iunius Nicocle tyranno, accedunt corpori Achaico. II. I.
					Aegienses, Buri, Carynenses accedunt corpori Achaico. I. 8. II. I.

API	A.Y.C.	Coff.	Olymp.	A.A. chaic.	Pract.	
4464	504	C. Atilius Regulus II L. Manlius Vulfo	$\frac{2}{3}$	31	6	
4465	505	P. Claudius Pulcher L. Iunius Pullus	$\frac{3}{4}$	32	7	
4466	506	P. Scruilius Geminus II C. Aurelius Cotta II.	CXXXIII. $\frac{4}{1}$	33	8	
4467	507	L. Caecilius Metellus II. M. Fabius Buteo	$\frac{1}{2}$	34	9	
4468	508	M. Fabius Licinus M. Otacilius Crassus II.	$\frac{2}{3}$	35	10	
4469	509	M. Fabius Buteo II. C. Atilius Balbus	$\frac{3}{4}$	36	11	ARATVS Sicyonius I. c. II.
4470	510	A. Manlius Torquatus C. Sempronius Blaesus II.	CXXXIV. $\frac{4}{1}$	37	12	3.
4471	511	C. Fundanius Fundulus C. Sulpicius Gallus	$\frac{1}{2}$	38	13	ARATVS II. c. II. 2. Corinthii, Epidaurii, Troezenii, Megarenfes, accessere Achaia. c. II. 2.
4472	512	C. Lutatius Catulus A. Postumius Albinus	$\frac{2}{3}$	39	14	ARATVS III. c. I. c. II. 7. Cleonis Nemea celebrat praetor c. II. 7.
4473	513	Q. Lutatius Catulus Cerco A. Manlius Torquatus II.	$\frac{3}{4}$	40	15	
4474	514	C. Claudius Cento M. Sempronius Tuditanus	CXXXV. $\frac{4}{1}$	41	16	ARATVS IV. Bellum Aetolicum. II 7. 8.
4475	515	C. Mamilius Turrinus Q. Valerius Flaccus	$\frac{1}{2}$	42	17	ARATVS V. c. II. 7. 8.
4476	516	Ti. Sempronius Gracchus P. Valerius Falto	$\frac{2}{3}$	43	18	ARATVS VI. c. II. 7. 8.
4477	517	L. Cornelius Lentulus Q. Fulvius Flaccus	$\frac{3}{4}$	44	19	ARATVS VII. c. II. 8. Aristippus tyrannus op- pressus c. II. 8.
4478	518	C. Licinius Varus P. Cornelius Lentulus	CXXXVI. $\frac{4}{1}$	45	20	DIOETAS c. II. 8. Me- galopolis Achaia tradita a Lyfiadetyranno c. II. 7.
4479	519	C. Atilius Balbus II. T. Manlius Torquatus	$\frac{1}{2}$	46	21	ARATVS VIII. c. II. 6.
4480	520	L. Postumius Albinus Sp. Caruilius Maximus	$\frac{2}{3}$	47	22	LYSIADES Megalopoli- tanus I. c. II. 6.
4481	521	Q. Fabius Maximus M. Pomponius Matho	$\frac{3}{4}$	48	23	ARATVS IX. c. II. 6.
4482	522	M. Aemilius Lepidus M. Publius Malleolus	CXXXVII. $\frac{4}{1}$	49	24	LYSIADES II. c. II. 6.

A P I A V C. Coff.		Qlymp.	A. A.	Pract.		
4483	523	M. Pomponius Matho II. C. Papirius Maso	$\frac{1}{2}$	50	25	ARATVS X. c. II. 6.
4484	524	M. Aemilius Barbula M. Iunius Pera	$\frac{2}{3}$	51	26	MARCVS Carynensis. Vincitur bello nauali cum Illyriis et naue mer- sa perit. c. II. 6.
4485	525	L. Postumius Albinus Cn. Fuluius Centumalus	$\frac{3}{4}$	52	27	IYSIADES III. c. II. 5. 6. Athenae Achaeorum factae per deditioem.
4486	526	Q. Fabius Maximus II. S. Caruilus Maximus	CXXXVIII $\frac{4}{1}$	53	28	ARATVS XI. c. II. 5.
4487	527	P. Valerius Flaccus M. Atilius Regulus	$\frac{1}{2}$	54	29	ARISTOMACHVS Argi- uus. c. II. 5. Simultates cum Cleomene Spartano- rum tyranno susceptae.
4488	528	M. Valerius Messala L. Apustius Fullo	$\frac{2}{3}$	55	30	ARATVS XII. c. II. 5. Clades Achaeorum ad Lycacon. Mantinea oc- cupata, ad Megalopolin res male, ad Orchome- nium bene gesta.
4489	529	L. Aemilius Papus C. Atilius Regulus	$\frac{3}{4}$	56	31	TIMOXENVS c. II. 5.
4490	530	Q. Fuluius Flaccus II. T. Manlius Torquatus	CXXXIX. $\frac{4}{1}$	57	32	HYPERBATES. c. II. 5. Clades Achaeorum ad He- catombacon accepta.
4491	531	C. Flaminius Nepos P. Furius Philo	$\frac{1}{2}$	58	33	ARATVS XIII. c. II. 5. Bellum Cleomenicum paullo ante hunc prac- torem hieme coepit.
4492	532	M. Claudius Marcellus Cn. Cornelius Scipio II.	$\frac{2}{3}$	59	34	TIMOXENVS c. II. 5. 9. Cleomenes victus fuga- tusque, Sparta capta.
4493	533	P. Cornelius Afina M. Minucius Rufus	$\frac{3}{4}$	60	35	ARATVS XIV. c. II. 9. Clades Achaeorum ad Caphyas. Sociale bel- lum in Actolos decer- nitur. c. II. 9.
4494	534	L. Veturius Philo C. Lutatius Catulus	CXL. $\frac{4}{1}$	61	36	ARATVS minor, Arati, practoris filius. c. II. 9. Bellum sociale gestum.
4495	535	M. Livius Salinator L. Aemilius Paullus	$\frac{1}{2}$	62	37	EFFRATVS Phaeacensis c. II. 9.

Tom. V.

Ccc

4496

A.P.I.	A.V.C.	Coff.	Olymp.	A. A.	Pract.	
4496	536	P. Cornelius Scipio Ti. Sempronius Longus	$\frac{2}{3}$	63	38	ARATVS XV. c. II. 9. Pax cum Actolis.
4497	537	C. Flaminius Nepos II. Cn. Seruilius Geminus	$\frac{3}{4}$	64	39.	
4498	538	C. Terentius Varro L. Aemilius Paullus II.	CXLI. $\frac{4}{1}$	65	40	
4499	539	Ti. Sempronius Gracchus Q. Fabius Maximus III.	$\frac{1}{2}$	66	41	
4500	540	Q. Fabius Maximus IV. M. Claudius Marcellus	$\frac{2}{3}$	67	42.	
4501	541	Q. Fabius Verrucosi F. Maximus Ti. Sempronius Gracchus	$\frac{3}{4}$	68.	43	ARATVS XVI. c. II. 4. Philippus rex Messenios adfligit c. II. 4.
4502	542	App. Claudius Pulcher Q. Fulvius Flaccus III.	CXLII. $\frac{4}{1}$	69	44	ARATVS XVII. c. II. 4. Veneno perit.
4503	543	P. Sulpicius Galba C. Fulvius Centumalus	$\frac{1}{2}$	70	45	EVRYLEON. c. III. 2.
4504	544	M. Claudius Marcellus M. Valerius Laevinus II.	$\frac{2}{3}$	71.	46.	CYCLIADES. c. III. 2. Actoli et Elei ad Larif- iam cum Achaeis praec- lium, committunt.
4505	545	Q. Fabius Maximus V. Q. Fulvius Flaccus IV.	$\frac{3}{4}$	72.	47.	
4506	546	M. Claudius Marcellus T. Quinctius Crispinus	CXLIII. $\frac{4}{1}$	73	48	NICEAS c. III. 2.
4507	547	M. Lulius Salinator II. C. Claudius Nero	$\frac{1}{2}$	74.	49	PHILOPOEMEN Megalo- polititanus I. c. III. 2. Ad Mantineam victi. Spartani.
4508	548	Q. Caccilius Metellus L. Veturius Philo.	$\frac{2}{3}$	75.	50	PHILOPOEMEN II. c. III. 2.
4509	549	P. Cornelius Scipio. L. Licinius Crassus.	$\frac{3}{4}$	76	51	ARISTAENETVS Diae- us c. III. 2.
4510	550	M. Cornelius Cethegus P. Sempronius Tuditanus	CXLIV. $\frac{4}{1}$	77	52.	
4511	551	Cn. Seruilius Caepio C. Seruilius Geminus	$\frac{1}{2}$	78	53.	
4512	552	Ti. Claudius Nero M. Seruilius Geminus.	$\frac{2}{3}$	79	54.	LYSIRRVVS c. III. 3.
4513	553	Cn. Cornelius Lentulus. P. Aelius Pactus	$\frac{3}{4}$	80	55	PHILOPOEMEN III. c. III. 3.
4514	554	P. Sulpicius Galba C. Aurelius Cotta	CXLV. $\frac{4}{1}$	81	56	CYCLIADES, c. III. 4.
4475		Cornelius Lentulus P. Villius Tappulus.	$\frac{1}{2}$	82.	57.	ARISTAENVS Megalo- polititanus. c. III. 4.

A.P.I.	A.V.C. Coff.	Olymp.	A. A. chaic.	Praet.		
4516	556	Sex. Aelius Paetus Catus	2	83	58	NICOSTRATVS c. III. 4
		T. Quinctius Flaminius	3			
4517	557	C. Cornelius Cethegus	3	84	59	ARISTAENVS. c. III. 4
		Q. Minucius Rufus	4			
4518	558	L. Furius Purpureo	CXLVI.	85	60	
		M. Claudius Marcellus	1			
4519	559	M. Porcius Cato	1	86	61	ARISTAENVS II. c. III. 4
		L. Valerius Flaccus	2			
4520	560	P. Cornelius Scipio Africanus II.	2	87	62	
		P. Sempronius Longus	3			
4521	561	L. Cornelius Merula	4	88	63	
		Q. Minucius Thermus				
4522	562	L. Quinctius Flaminius	CXLVI.	89	64	PHILOPOEMEN IV. c. III. 5.
		Cn. Domitius Ahenobarbus	1			
4523	563	P. Cornelius Scipio Nasica	1	90	65	DIOPHANES c. III. 5.
		M. Acilius Glabrio	2			
4524	564	L. Cornelius Scipio	2	91	66	
		C. Laelius	3			
4525	565	Cn. Manlius Vulfo	3	92	67	PHILOPOEMEN V. c. III. 6.
		M. Fulvius Nobilior	4			
4526	566	M. Livius Salinator	CXLVIII.	93	68	PHILOPOEMEN VI. c. III. 6.
		M. Valerius Messala	1			
4527	567	M. Aemilius Lepidus	1	94	69	PHILOPOEMEN VII. c. III. 7.
		C. Flaminius Nepos	2			
4528	568	Sp. Postumius Albinus	2	95	70	
		Q. Marcius Philippus	3			
4529	569	Ap. Claudius Pulcher	3	96	71	ARISTAENVS c. III. 7.
		M. Sempronius Tuditanus	4			
4530	570	P. Claudius Pulcher	CXLIX.	97	72	LYCORTAS c. III. 7.
		L. Porcius Licinius	1			
4531	571	Q. Fabius Labeo	1	98	73	PHILOPOEMEN VIII. a Messeniis capitur et veneno necatur. c. III. I. 7.
		M. Claudius Marcellus	2			
			3			
4532	572	L. Aemilius Paullus	3	99	74	LYCORTAS c. III. I.
		Cn. Baebius Tamphilus	4			
4533	573	P. Cornelius Cethegus	4	100	75	
		M. Baebius Tamphilus				
4534	574	A. Postumius Albinus	CL.	101	76	LYCORTAS c. IV. I.
		C. Calpurnius Piso	1			
4535	575	Q. Fulvius Flaccus	1	102	77	HYPERBOLUS c. IV. I.
		L. Manlius Acidinus	2			

Ccc 2

4536

A.P.I. A.V.C. Coff.		Olymp.	A.A-Pract.	chaic.	
4536	576 M. Iunius Brurus	$\frac{2}{3}$	103	78	CALLICRATES Leon- tefius c. IV. 2.
	A. Manlius Vulfo	$\frac{3}{4}$	104	79	
4537	577 C. Claudius Pulcher	$\frac{3}{4}$	104	79	
	Ti Sempronius Gracchus				
4538	578 Q. Petilius Spurius	CLI.	105	80	
	Cn. Cornelius Scipio Hi- spalus	$\frac{4}{1}$			
4539	579 P. Mucius Scaeuola	$\frac{1}{2}$	106	81	XENARCHVS c. IV. 2.
	M. Aemilius Lepidus II.				
4540	580 Sp. Postumius Albinus	$\frac{2}{3}$	107	82	
	M. Mucius Scaeuola				
4541	581 L. Postumius Albinus	$\frac{3}{4}$	108	83	
	M. Popilius Laenas				
4542	582 C. Popilius Laenas	CLII.	109	84	ARCHON c. IV. 2.
	P. Ailius Ligur	$\frac{4}{1}$			
4543	583 P. Licinius Crassus	$\frac{1}{2}$	110	85	XENON alterutro ex his annis praetor fuit. c. IV. 3.
	C. Cassius Longinus	$\frac{1}{2}$			
4544	584 A. Hostilius Mancinus	$\frac{2}{3}$	111	86	ARCHON c. IV. 3.
	A. Atilius Serranus	$\frac{3}{4}$	112	87	
4545	585 Q. Marcius Philippus	$\frac{3}{4}$	112	87	
	Q. Seruilius Caepio				
4546	586 L. Aemilius Paullus II.	CLIII.	113	88	
	C. Licinius Crassus	$\frac{4}{1}$			
4547	587 Q. Aelius Paetus	$\frac{1}{2}$	114	89	Mille Achaei et amplius Romam euocati ad caus- sam dicendam
	M. Iunius Pennus	$\frac{1}{2}$			
4548	588 C. Sulpicius Gallus	$\frac{2}{3}$	115	90	CALLICRATES c. IV. 4
	M. Claudius Marcellus	$\frac{3}{4}$			
4549	589 T. Manlius Torquatus	$\frac{3}{4}$	116	91	
	Cn. Octavius Nepos				
4550	590 A. Manlius Torquatus	CLIV.	117	92	
	Q. Cassius Longinus	$\frac{4}{1}$			
4551	591 Ti. Sempronius Gracchus	$\frac{1}{2}$	118	93	
	M. Iuuenius Talna	$\frac{1}{2}$			
4552	592 P. Cornelius Scipio Nasica	$\frac{2}{3}$	119	94	
	C. Marcius Figulus	$\frac{3}{4}$			
4553	593 M. Valerius Messala	$\frac{3}{4}$	120	95	
	C. Fannius Strabo	$\frac{4}{1}$			
4554	594 L. Anicius Gallus	CLV.	121	96	
	M. Cornelius Cethegus	$\frac{4}{1}$			
4555	595 Cn. Cornelius Dolabella	$\frac{1}{2}$	122	97	
	M. Fuluius Nobilior	$\frac{1}{2}$			
4556	596 M. Aemilius Lepidus	$\frac{2}{3}$	123	98	
	Popilius Laenas II.	$\frac{3}{4}$			

A.P.J.	A.V.C	Coff.	Olymp.	A. A. chaic.	Pract.
4557	597	Sex. Iulius Caesar L. Aurelius Orestes	$\frac{3}{4}$	124	99
4558	598	L. Cornelius Lentulus C. Marcius Figulus	CLVI. $\frac{4}{1}$	125	100
4559	599	P. Cornelius Scipio Nasica M. Claudius Marcellus II.	$\frac{1}{2}$	126	101
4560	600	Q. O. imius Nepos L. Postumius Albinus	$\frac{2}{3}$	127	102
4561	601	Q. Fulvius Nobilior T. Annius Lufcus	$\frac{3}{4}$	128	103
4562	602	M. Claudius Marcellus III. L. Valerius Flaccus	CLVII. $\frac{4}{1}$	129	104
4563	603	L. Licinius Lucullus A. Postumius Albinus	$\frac{1}{2}$	130	105
4564	604	L. Quinctius Flaminius M. Acilius Balbus	$\frac{2}{3}$	131	106
4565	605	L. Marcius Censorinus L. Calpurnius Piso	$\frac{3}{4}$	132	107
4566	606	Sp. Postumius Albinus L. Galpurnius Piso	CLVIII. $\frac{4}{1}$	133	108
4567	607	P. Cornelius Scipio Africanus C. Livius Drufus	$\frac{1}{2}$	134	109
4568	608	Cn Cornelius Lentulus L. Mummius Achaicus	$\frac{2}{3}$	135	110
4569	609	Q. Fabius Maximus Aemilianus L. Hostilius Mancinus	$\frac{3}{4}$	136	111
4570	610	Ser. Sulpicius Galba L. Aurelius Cotta	CLIX. $\frac{4}{1}$	137	112

MENALCIDAS Spartanus c. IV. 5.
 DIAEVS Megalopolitanus c. IV. 5. Achaei e custodia a Romanis dimiffi. c. IV. 4.
 DAMOCRITVS c. IV. 5.
 DIAEVS c. IV. 5.
 CRITOLAVS. Cecidit in acie aduersus Romanos c. IV. 5.
 DIAEVS suffectus c. IV. 5
 Corinthus deleta. c. IV. 5.

FASTI ACHAICI ILLUSTRATI.

T. S. B.

CAPVT PRIMVM.

INITIA REIPUBLICAE ACHAICAE.

Achaei magnum Homericis temporibus nomen, Spartam, Argos et omnem inferiorem Peloponnesum olim incoluerunt. Cum autem Heraclidae eos his agris expulissent, recepti sunt ab Ionibus, qui tunc inde a finibus Corinthi occidentum litus Peloponnesi tenebant, regionem ab ipso situ Aegialeum dictam, deinceps enim Ionia ab incolis nominata est. (1) Rex tum erat Achaeorum Tisamenus Orestis filius. Inde coorto dissidio Iones ab Achaeis tota regione exterminati sunt. Pulsis Ionibus, sub regum potestate Achaei manserunt usque ad Ogygum seu Gygem: utrumque enim nomen apud Polybium existat. (2) Ogygi autem filiorumque eius impotentia exacerbati Achaei, sublata tyrannide, popularem statum induxerunt. Ex eo diuisum est Achaicum nomen in duodecim πόλεις, *ciuitates*, seu, ut alias iidem scriptores edunt, μέρη, *regiones*. Non tamen eadem ciuitates semper recensitae sunt eo in numero, aliis delectis clade aliqua, aliis in Achaicum corpus illarum loco receptis. Herodotus (3) haec nomina suae aetatis ciuitatum edidit: *Pellenen, Aegiram, Aegas, Buram, Helicen, Aegium, Rhybes, Patrees, Pharees, Olenum, Dymen, Tritaeces*. Ταῦτα, inquit, δωδέκα μέρη τῶν Αχαιῶν ἐστὶ καὶ τότε γὰρ Ἰώνων

(1) Strabo, Pausanias. (2) p. 178. 375. (3) l. l. c. 145.

Ἰώνων ἦν. Polybius (4) autem has libera in re-
publica ciuitates recenset: *Patras*, (*Patrees* Hero-
doti) *Dynam*, *Pbaras* (*Pbarees* Herodoti) *Tritae-*
am (*Tritaees* Herodoti) *Leontium*, *Aegiram*, *Pelle-*
nen, *Aegium*, *Buram*, *Cerauniam*, *Olenum*, *Helicen*.
Nullae tum Herodoti *Aegae* et *Rhypes*. Earum
in loco successere *Leontium* et *Ceraunia*. Pausanias
tamen (5) nomina Achaicarum ciuitatum, vt fue-
re sub regibus, paullo aliter edidit, quam Hero-
dotus, vt nunc quidem in Pausaniae exemplaribus
est: *Dynam*, *Olenum*, *Pbaras*, *Tritiam*, *Rhypes*, *Ea-*
ssum, *Cecyrinam*, *Buram*, *Helicen*, *Aegas*, *Aegiram*,
Pellenen. Pro eo, quod est in Pausania *Εάσιον*,
Amasaenus *Θάσιον* censuit legendum: at Sylburgius
non absurde pro *Εάσιον* scriptum a Pausania pu-
tat *Αἴγιον*, vt in eo nihil ab Herodoto differat.
Cecyrinam vero Pausaniae idem Sylburgius recte
censet, eiusdem Pausaniae et Strabonis *Κεραυνίαν*,
aut potius, vt Pausanias aliis in locis, *Κερύειαν* esse:
Καρυείαν tamen malim, ex quo est *Καρυεύς*
Polybii. Haec ciuitas ex posterioris memoria tem-
poris irrepsit in catalogum Pausaniae. Nam cum
haec duodecim nomina sint, tamen non multo
post Pausanias etiam *Patras* adscribit, vt sint tre-
decim ciuitates, inuito et repugnante ipso Pau-
sania. *Carynia* loco mota, repositis *Patris*, emen-
dato *Easio*, vt sit *Aegium*, Herodotus et Pausa-
nias in nominibus concordant. *Aegas* et *Rhyphas*
cur praetermiserit Polybius, Strabo declarat: (6)

Aegam:

(4) p. 179. (5) p. 536. (6) Strabo p. 441. 442.

Aegam enim, seu alio nomine Aegas, non habitari tradit, agrum Aegiensium esse: Rhypes autem, Mytcelli illius patriam, qui Crotonem condidit, item esse nullas, agro inter Aegienses et Pharienses diaiso. Et Pausanias quoque tantum ruinas Rhyparum sua aetate existisse ait. Crotona a Mytcello condita est Olympiade XI. aut XII. (7) quod satis verus tempus est florentissimae urbis. Quaevis τῶν δωδέκα μερίδων rursus in septem aut octo δήμους seu *populos* distribuebatur: τρισῆτον, inquit Strabo, (8) εἰανδρῆν τὴν χώραν συνίβαιεν. Inde vsque a libertate recuperata, nulla admodum re, nisi iustitiae et aequitatis laude celebrati sunt Achaeci. Neque enim Persicis in bellis subsidia misere ad Thermopylas, aut ad Euboeam aut Salaminem. Sic Pausanias. (9) Quod autem addit, εἰδὲ σφῶς καλῶλογος συμμάχων ἔχει Λακωνικὸς ἢ Ἀττικὸς, id ad illa ipsa bella pertinet. Nam tamen, ut idem testatur Pausanias, ad Plataeas subsidia misere Graecis aduersus Mardonium, tamen, quia non venerunt in tempore, in communi Graecorum donario, quod Olympiae dedicatum est, Achaeorum nomen ceteris sociis non fuit adscriptum. Bello Peloponnesiaco, ut vel e Thucydide constat, Atheniensibus fauerunt, nullo admodum insigni motu rerum. Quare oraculum, ut supra posui, perquam ignominiose tractauit Aegienses, ut Achaeorum longe vilissimos. Ast
vbi

(7) Strabo p. 291. eodem anno, quo Syracusae. V. etiam Heraclidem in politis Graecorum p. 2833. ed. Gronouii. (8) p. 441. (9) p. 536.

Vbi Helice terrae motu concussa (id autem accidit Olympiadis CI. 4. vt supra declaravi) Aegium agri Helicensis accessione auctum, caput extulit, (10) iam inde dignitate et opibus longe inter ceteras vrbes maximis fuit. Id accidit duobus ante Leuctricam pugnam annis. Postquam ea in pugna fractae sunt Lacedaemoniorum vires, Arcades autem et Messenii contra eos arma ceperunt, Thebani a Macedonibus deuicti, Athenienses debilitati, nihil in commune consulebatur, Achaeci diuturna pace et libertate (praeter Pellena, quae tum adhuc sub tyranno erat) viribus ad audendum comparatis, aliquo haberi in honore coeperunt. Hanc potentiam, praesertim cum ad Chaeroneam in acie stetisset contra Philippum regem, (1) Macedones inique ferre, premere deinde Achaecos, donec diuersis studiis partium animos populi diffociarent, vt aliae ciuitates tyrannos, aliae praesidia Macedonica reciperent. (2)

II. Tandem conspirarunt Dimaei, Patrenses, Tritaenses, et Phareenses ad concordiam et recuperandam libertatem, Ol. CXXIV. quarto anno. Quinto post anno, Aegienses, eiecto praesidio Macedonico et Buri, interfecto tyranno, Carynenses autem (Καρυνᾶς fuere, qui Κεραινας Polybii et Strabonis, vt supra retuli, incolebant) tradente vrbe tyranno, in vnum et idem concilium coierunt. Accessere mox Sycionii extra Acha-

Tom. V. Ddd iam

(10) Pausanias p. 589. (1) E Pausania et Polybio L. II. c. 38. seq.
 (2) Polybius l. c.

iam. Forma ea rei publicae. Erat suus cuique civitati senatus, ut Liuius habet. (3). Hi sunt ἀρχοντες Polybii. (4). Is autem scribit, cum Attalus Aegii in concilio postulasset, ut honores Eumenis regis fratris sui restituerentur, decretum concilii ad ciuitates esse missum, quo iubebant τοῖς ἀρχοῖσι πᾶσας ἀποκαταστήσαι τὰς Εὐμένους τιμὰς. Per se autem quisque intelligere potest, τὰς ἀρχοντας senatus cuiusque fuisse praesides et rectores. Erant et Damiurgi pro ciuitatum numero, donec decem Damiurgi lege instituerentur, summus populi Achaici magistratus. (5). Primis quinque et viginti annis omnes Achaei Γραμματεῖα κοινὸν ἐκ περιόδου ἢ δύο Στρατηγούς, Scribam unum communem e singulis secundum ordinem ciuitatibus et duos praetores elegerunt. (6). Post id visum est populo commodius factum, si vnus Στρατηγός seu praetor quotannis exercitui praeficeretur, et secundum eum Ἰππάρχης esset, seu magister equitum, magistratus ipse, Ἰππαρχία. (7).

III. Praetorem ius erat conuocare damiurgos, damiurgi de quibus rebus erat consultandum, praetore communicante, senatum populumque singularum urbium consulebant. Deliberatione privatis in concionibus inita, Damiurgi vocabant concilium Achaicum etiam extra tempus lege statutum, si ita videretur. Concilia enim populi statuta tantummodo bis habita quotannis, sub verem et autumnum. Vbi in vnum conuenerant, praetor qui con-

(3) II. XXX. c. 19. (4) p. 1246. (5) Liuius I. XXXVIII. 30. XXXIIII. (6) Polybius p. 182. (7) Polybius p. 181. 1244. 1398.

concilio praesidebat, Ioue, Apolline, Hercule auspicii causa vocatis, de quibus consultandum esset, in medium proponebat. Suadentibus aliis, aliis disuadentibus, si maior Damiurgorum pars consentiret, referrebat ad populum. Tertio die decretum iusti concilii fieri, ex lege erat. Eo in concilio, quod de bello aduersus Philippum regem cum Romanis gerendo habitum est, Sex. Aelio Paeto, T. Quinctio Flaminino Coss. quinque Damiurgi relatores se ostendebant: quinque alii duos dies tenebant, ne decretum recitari et perrogari sententiae possent, donec Memnon Pellenensis aduersae partis vnus et minis et precibus Rhisiassi, pater is erat Memnonis, ad Damiurgorum, qui Romanis studebant factionem tertio die traductus, numero iubentium accessit. Sic relatam est ad populum. Dymaei et Megalopolitani, priusquam lex ferebatur a populo, ne ea tenerentur, concilio excefferunt. Aliis de rebus, quam de quibus ante concilium cum senatu populoque singularum ciuitatum communicatum fuisset, agi in conciliis non placuit. Itaque Caecilio legato Romano negarunt concilium gentis se daturus Damiurgi, nisi scripta mandata ederet, de quibus antea domi consideraret populus. Praetoris erat, hortari, vt de communi re sua conferrent, suaderent, disuaderent, expenderent aequa lance rationes suas, ex animi sui sententia nihil ipse dicebat, si de bello disceptaretur. Quapropter Philopoemen praetor apud Liuium: (8) *bene comparatum apud Achaeos esse, ne*

Ddd 2

prae-

praetor cum de bello consulisset, ipse sententiam diceret: statuere quam primum ipsos, quid vellet iussit, praetorem decreta eorum cum fide et cura executurum. Caeteris in rebus inuenio praetorem sententiam dixisse suam, suasorem disuasorem fuisse. Cum de Eumenis regis honoribus Aegii ageretur, Archon praetor ut Attali legatorum precibus subueniret, surrexit ad dicendum. Res enim, inquit Polybius, ipsa postulabat, ut praetor diceret. Pauca in rem locutus, ne corruptus fuisse censeretur, e consilio discessit. At tum Polybius, qui magister equitum erat, surrexit, et sermonem habuit, factumque eius in verba decretum est. (9)

IV. Huius concilii fundamenta primus iecit Marcus Carynensis, Philopoemen opus perfecit, Lycortas confirmavit. Primo tempore cum pro regno status coepit esse popularis, concilia in Aenario luco sunt coacta: post recuperata libertate, Aegii haberi placuit. Sic Pausanias et Strabo. Liuius, (10) *seu dignitate, inquit, urbis seu loci opportunitati datum est.* Nonnumquam tamen postea Argis, et Sicyone, et Corinthi, et Tegeae, et Rhii, et Megalopoli extra ordinem conuentus indicti. Id vero etiam egit Philopoemen: praetor, ut omnibus in ciuitatibus, quae Achaici essent nominis, conuentus ex ordine celebrarentur. Cum super ea re legem pararet promulgare, conuentumque Argos indiceret, Damiurgi Aegium euocarunt populum. M. Fuluius Aegiensium faucebat caussae, Argos tamen venit, ubi cum

(8) l. XXV. 25. (9) p. 1244. Caetera fere e Polybio p. 1179. et Pausanias. p. 544r. (10) l. XXXI. 25, XXXII. 19.

cum diu multumque disceptatum esset, praetorquem inclinatum cerneret, ab incepto desistit. (1) Obtinere tamen ceterae urbes, ut tandem etiam aliis in urbibus conveniretur.

V. Conventus, ut dixi, iusti in modum concilii coacti sunt quotannis duo. Unus vere exeunte sub exortum Pleiadum, ut testatur Polybius, (2) alter sub auctumno. Henricus Doduellus (3) cum variae sint huiusce sideris in parapegmatibus Graecis ἐπιολαί, putat a Polybio isthuc tempus indicari, quo aestas ceperit secundum Plinium. Nam Plinius ita fatetur: (4) *Vergiliae priuatim attinent ad fructus, ut quarum exortu aestas incipit, occasu hiems, semestri spatio inter se messes vindemiasque et omnium maturitatem complexae.* Et ille quidem pro parapegmate Romano ad VI. Idus Maias Vergiliarum exortum constituit. Varro autem (5) ad VII. Idus Maias, a quo die Columella quoque aestatem orditur, ut in Plinio putem emendandum, sic ut est in Varrone. Geoponici scriptores, Florentinus (6) (quamquam hic quoque Varronem sequitur et praeterea corruptus est) Quintilii fratres, Proclus, Ioannes Tzerzes Hesiodesus scholiasta (7) intra initia Maii atque Nouembris rusticis suis definiunt et verem potius exeuntem, quam aestatis initium in Vergiliarum exortu ponunt. Georgius Syncellus (8) Μάϊς ἐννάτη τὴν τῶν Πληιάδων ἐπιολήν

Ddd 3

con-

(1) Livius I. XXXVIII. 30. (2) p. 424. 487. (3) in Cyclis p. 292.
 (4) l. XVIII. 29. (5) de re rustica l. I 28. (6) p. 4. 14. (7) p. 91.
 (8) Variarum Dissertationum Petavii l. II. c. 29.

constituit: hoc item est VII. Id. Maias. Sed non opus est, ut multa hic colligam: nam Dionysius Petavius (*) summa diligentia et accuratione id ipsum egit, ut ostenderet, ad XI. Maii martinum ortum Φαινόμενον eius sideris fuisse relatam. Iam cum exortu Heliaco Pleiadum et aestas et messis exordiebatur in Graecia et annus Achaicus. Heliodus

Πληιάδων Ἀλλαγένων ἐπιπελλομένων
 Ἀρχεῶδ' ἀμῆτῃ, ἀρότοις δὲ δυσσομενάων

Aratus: Iupiter, ait, Pleiadibus

ἢ θέρους ἢ χιμάλιος ἀρχομένων
 Σημαίνειν ἐκέλευσεν, ἐπερχομένους τ' ἀρότοις.

Sic Manlius, sic omnes. De anno Achaico Polybius (9) τὸ μὲν ἔν κατὰ τὴν Ἀράτῃ τῷ νεωτέρῳ στρατηγίᾳ ἔλος ἐτύγχανε δεκληλυθὸς περὶ τὴν τῆς Πλειάδος ἐπιβολὴν. ἔτω γὰρ ἦγε τῆς χρόνος τὸ τῶν Ἀχαιῶν ἔθνος, *annus praeturae Arati elapsus erat circiter Pleiadum exortum: sic enim agebat annum populus Achaicus.* De concilio autem (10) in quo comitia legendis praetoribus egerint Achaei, eundem in modum, iisdem verbis, περὶ τὴν τῆς Πλειάδος ἐπιβολὴν. In verno igitur concilio designati sunt. Sed intercedebat aliquot dierum tempus inter comitia eumque diem, quo die praetores designati magistratum iniuerunt. Nam cum Actoli Messenios Olympiadis CXXXIX. 4. adorti et in solemni concilio querelae sociorum ad Achaeos perlatae essent, bello

(*) l. c. (9) l. V. c. 1. (10) p. 487.

bello in Aetolos decreto, Aratus designatus est praetor. Cum autem Timoxenus, qui a concilio praeturam nondum deposuerat, lentius agere videretur delectu habendo rebusque apparandis, Aratus id ipsum aegre ferens, ut maturaret auxilium, quinque diebus magistratum anticipavit, et a Timoxeno publicum sigillum recepit, id enim praetoris in manu erat. (1) Et de Archone Polybius, (2) decretum fuisse in concilio, in quo fuerat designatus, ut illico procederet praetor, quia bellum instabat Romanum cum Perseo. Ex quibus intelligo, initium anni Achaici fuisse ipso in exortu Heliaeo Pleiadum circiter XI. Maii eodem quoque die praetores iniisse magistratum atque ita esse interpretandum Polybii alterum locum *περὶ τὴν ἐπιτολήν ipso in exortu*: alterum, ubi de concilio agit, *circiter exortum* significare, seu aliquot diebus ante, ut populus ab ipso concilio tempus haberet proficiscendi in agros, ad messem faciendam. Polybius igitur etiam disertis verbis testatur, (3) exeunte vere designatos fuisse praetores, ineunte aestate, hoc est, non ita multis post diebus coepisse in magistratu esse. Eandem rationem servatam puto in concilio altero stato *sub auctumno*, ut Livii ipso verbo utar: (4) fuisse enim celebratum exeunte auctumno, medio anno Achaico, cum rebus bello gerendis tempus iam exiisset et operae aegrestes feriarentur.

VI.

(1) Polyb. l. IV. 6. (2) p. 1244. (3) p. 424. (4) l. 6.

VI. Primi ex Achacis Dymaei cum Patren-
sibus, Tritaenensibus et Pharaeensibus in libertatem
et commune concilium conspirarunt Olympiade
CXXIV. ut Polybius testatum reliquit. Plutarchus,
qui sua ex Arati Sicyonii praetorii viri commen-
tariis accepit, annum edidit nullum, tantum cum
Pyrrhi in Italiam expeditione motum populi Achaici
connectit. Nimirum Pyrrhus res primum gessit
cum P. Laeuino Cos. A. V. C. 474. sed magistra-
tum inierat Kal. Quintilibus A. P. I. 4433. ut tum
fuisse compertum habemus, (6) itaque Olympiadis
CXXIV. 4. paullo ante inito. Bellum Tarentinum
anno ante Pyrrhi expeditionem coepit, teste Pau-
sanias in Atticis: (7) τῆλοις δὲ τῷ πρότερον ἔτη πρὸς
Ῥωμαίους συνεσήκη πόλεμος, ut Casaubonus docte
emendauit in commentario Polybiano. (8) Causa
belli, ut ex Dionysii excerptis constat, C. Fa-
bricio, Q. Aemilio Coff. probro apud Tarentinos
adfectis legatis Romanis. Inter eos Coff. et P. Va-
lerium Laeuinum annus intercessit vnus, quo L.
Aemilius, Q. Marcius Coff. bellum cum Tarentinis
ex voto gesserunt. Tum vero Tarentini bello im-
pares, A. V. C. 473. extremo, Pyrrhum auxilio
vocarunt, isque cum classe, ne expectato quidem
vere, ut Zonaras e Dionysio docet, in Italiam
profectus: ergo A. V. C. 474. Olymp. CXXIV. 4.
A. P. I. 4434. Id amplius stabiliendum duco. Po-
lybius (9) Romanos cum Gallis pacem fecisse scri-
bit

(5) Polyb. l. IV. c. 6. Plutarchus in Arato p. 1049. (6) V. Dodwellus
a cyclis Romanis p. 586. (7) p. 28. (8) p. 118. (9) p. 151.

barbarorum excursionem per ceteras in Graecia vrbes. Eam autem excursionem clademque Delphicam et transitum Gallorum in Asiam, vt ex verbis perspicuum est, vno et eodem in anno recenset. Sic Eratosthenes quoque: ἡ τῶν Κελτῶν εἰς Ἑλλάδα στρατῶνα τε καὶ ἀπώλεια. Hoc vero interest inter Eratosthenem et Polybium, quod is rem vtramque Olympiadis CXXV. 2. refert, hic autem anno vno ante, siue primo eiusdem Olympiadis. Nisi quid in Polybii verbis deprauatum sit, memoriae is lapsus fuit: nam is ipse Polybius alio in loco, vt supra declarauī, annos duos inter Pyrrhi expeditionem et Delphicam Gallorum cladem dedit. Denique Polybius notam temporis (2) expeditionis Italicae edidit, Ptolemaeum Lagi, Seleucum Nicatora, Lysimachum, Ptolemaeum Ceraunum non magno interuallo decessisse. Hi vtique circa initium, medium et finem Olympiadis CXXIV. obierunt, qua ex re nihilo minus confirmata nostra est sententia.

VII. Hoc primum constituto, vt, si Pyrrhus vere A. V. C. 474. Italiam cum classe petiit, eodem autem anno Dymaei cum ceteris vrbibus Achaicae reipublicae fundamenta iecerunt, annus is sit ab V. C. 474. Olympiadis CXXIV. 4. vergens in Olympiadem CXXV. audiendus porro est Polybius. (3) Annos, vt ex eo supra declarauī, primos XXV.

(2) I. II. 41. I. II. 70. (3) I. II. c. 43. Strabo tantum. 20. annos p. 449
 εἰς ὡς ἐν παρόδῳ paullo negligentior

XXV. scribam vnum et praetores duos habuere Achaei: ab illo autem tempore Marcum Carynensem praetorem vnum, vnos praetores deinceps in singulos annos. Igitur Marcus Carynensis praetor est factus anno XXVI. post Achaicam rem publicam constitutam, A. V. C. 499. Olympiadis CXXXI. 1. in ipso Vergiliarum exortu, vt supra quoque demonstraui. Atque ita etiam Casaubonus in chronologia Achaica.

VIII. Circiter quintum annum, hoc est, 30 Achaico A. V. C. 503. Olympiadis CXXXII. $\frac{1}{2}$ Aegienses praesidium Macedonicum oppido eiecerunt: secuti eos Buri, occidere tyrannum. Iseas autem tyrannus Carynensis id ipsum metuens, urbem tradidit. (4) Inde, vt dicam postea, alii atque alii focii accefferunt, eorumque nomina lapideo foederis monumento, fidei caussa inscripta sunt. (5)

Caput Secundum

De decem atque septem praeturis Arati Sicyonii.

VT praetores populi Achaici suis annis inferamus diligentia maxime adhibenda est in ordinandis septemdecim praeturis Arati Sicyonii: has vt constituamus, ante omnia opus est, annum cognosci, quo Sicyon libertatem recupera-

E e e 2

uit

(4) Polybius l. II. c. 41. (5) Polybius p. 387. (6) p. 323.

uit Arati ope. Polybius hoc quod quaerimus, docet. Sed animus adhibendus est, ne in interpretando Polybio offendamus. Τελέπρω δ' ὕστερον ἔτη τῷ προσηρημένῳ σπαρτηγῦνλος annos natus viginti Aratus patriam liberavit. Vt antea exul fuerit Argis, ut comparata parua manu Sicyonem nocte occupauerit, ut Nicocles tyrannus fuga salutem quaesierit, Plutarchus in Arati vita narrat. Ne vero sic interpretere Polybium, ut Casaubonus: Marcum Carynensem praetorem quartum fuisse, cum Sicyon liberata est a tyranno. Hoc enim Henricum Doduclum summum virum, in cyclis Laonicis (σ) fefellisse opinor, ut post Marcum praetorem crederet praetorem primo fuisse Aratum Olympiadis CXXXII. i. Nempē Polybius hic per saltum incedit. Marcum Carynensem Olympiadis CXXXI. i. et parte maxima anni secundi, seu ab ipso initio aestatis A. V. C. 499. ad Θερινήν ὥραν A. V. C. 500. praetorem fuisse supra ostendimus. Ab hoc praeturae anno quartum dicit Polybius, quo res gessit Aratus Sicyone. *Post Marci primam praeturam quarto anno, eodem praetore Marco, inquit Polybius.* Non quod Marcus continuauerit magistratum, alioqui dicturus fuerat, τῷ προσηρημένῳ τὸ τέταρτον σπαρτηγῦνλος, non τελέπρω ἔτη τῷ αὐτῷ σπαρτηγῦνλος, eodem, qui quatuor annis ante fuerat, praetore. Et diserte tradunt scriptores annuam fuisse praeturam, tum vero etiam Polybius a Marco primum praetore e Dimaeis, Tritaeensibus aliarumq;

vr.

urbium ciuibus praetores fuisse lectos, quorum nomina interciderunt. Igitur Sicyon capta est anno Achaico XXX Olympiadis CXXXII $\frac{1}{2}$. Addit Plutarchus (7) ipsum diem V. Daesii, qui cum in Olympiadis CXXXII. primum annum incidit, ipsas Kalendas Iunias demonstrat iuxta tabulas Doduellianas. Monet nos Plutarchus, mensem eum Anthesterion a Atheniensibus vocitatum. Antestherion non excessit medium Martium in cyclo Harpali, nedum ut attingeret Maium, cum Daesius intra Maium et Iunium iis temporibus coerceretur. Sed ratio illa Plutarchi, comparandi menses Macedonicos cum Atticis, nondum satis explorata est, ut eum audeam erroris postulare. Ergo Sicyon capta est, cum Marcus Carynensis non ita multis ante diebus praeturam suscepisset.

II. Iam, inquit Polybius, anno constituto, quo Sicyon Achaeorum facta, ὀγδόω δὲ πάλιν ἔτη σπρᾶληγός ἀπειθείς τὸ δεύτερον *Acrocorinthum cepit Aratus*. Cepit autem urbem atque arcem, quae in Macedonum potestate erat, astu, ut prolixè narrat Plutarchus. Archelaus dux, ubi viuis in manus Achaeorum venit, dimissus est: Theophrastus ducum alter, quod excedere vrbe nollet, occisus: Perlaeus tertius, dum arx oppugnatur, fugit Cenchreas. Ille Zenonis philosophi sectator, cum postea aliquando de Zenonis paradoxo, solum sapientem bonum esse ducem disceptaretur, fer-

E e e 3

tur

(7) p. 1051.

tur dixiff: τῆτο μάλιςα κἀμοί ποτε τῶν Ζήνωνος ἤρεσκε δογμάτων. νῦν δὲ μελαβάλλομαγ νεθετηθῆς ὑπο τῆ Συκωνίη νεανίη, vt est apud Plutarchum. (8) Si numeremus ab illo, quem supra dixi, anno, octo alios annos, praetor iterum Aratus fuit Olympiadis CXXXIV. $\frac{1}{2}$. Aliam notam temporis Polybius subiecit: Corinthum captam esse ab Achaëis, anno vno antequam Carthaginienses magno bello victi a Romanis, pacis condiciones acceperunt. Cladem dicit Carthaginiensium ad Aegates insulas a C. Lutatio Cos. acceptam. Eam acceptam esse A. V. C. 512. Olympiadis CXXXIV. 2. exeunte, satis constat. Nondum enim adulta aestate commissum nauale est praelium: itaque paulo ante tertium eiusce Olympiadis annum. Fuit igitur Aratus praetor iterum a Maio mente, qui incidebat in Olympiadis CXXXIV. primum annum, vsque ad Maium, qui Olympiadis CXXXIV. 2. anno agebatur. Nam res Aratus ad Corinthum gessit τῆ περὶ θέρου ἀκμάζον ὥρα, plenilunio: (9) hoc est, adulta aestate, quae eam aestatem antecessit, qua Carthaginiensis classis est victa. Ex quo Doduellus (10) argumentum ducit, nocte ea Acrocorinthum esse occupatam, quam Metageitnionis XVI. seu Sextilis Iuliani XII. dies excepit. Accessere rei gestae magnitudine perculsi ad corpus Achaicum Epidaurii, Troezenii, qui Argoli-

(8) p. 1037. adde Athenaeum p. 162. Polyaeum in Stratagematis l. VI. 24. Pausaniam p. 130. (9) Plutarchus p. 1036. (10) in cyclis p. 292.

golicum litus tenebant et extra Isthmum Megarenfes.

III. Nunc quoque prima praetura e Plutarcho deprehenditur. Scribit autem Plutarchus, Aratum pulso Sicyonio tyranno adolescentem annorum viginti equo meruisse et magistratibus (damiürgos populi et archontas ciuitatum puta) percarum, praetoribus, siue Dymaeus aliquis, seu Tritaenſis, seu ex aliquo alio oppido eſſet, dicto audientem enixe fuiſſe, cum cerneret exules a ſe Sicyonem redúctos praediorum ſuorum poſſeſſoribus moleſtos, vt de vtriſque bene mereretur, profectum ad Ptolemaeum (is tum erat Euergetes Philadelphi filius) argenti ſummam, quanta ſatis erat, ad controuerſias Sicyonias ſedandas impetraſſe et regis animum confirmatſe Achaeis. Inde iam ille reuerſus, cum ſumma apud Achaeos eſſet gratia, praetor factus eſt: ἐνιαυτῷ δ' ὕſερον, inquit Plutarchus, αὐθις ſπαρτηγῶν, anno interiecto iterum praetor, Corinthum aggreſſus eſt. Si praetor fuit anno interiecto, prima praetura attribuenda eſt anno Achaico XI. qui inierat ineunte aeſtate Olympiadis CXXXIII. 3. Plutarchi interpres ἐνιαυτῷ ὕſερον enunciatur Latine *inſequenti anno*. Perperam vero hoc, vt multa alia: nam id Plutarchus potius dixiſſet τῷ δ' ἐξῆς ἐνιαυτῷ. Et quod ipſe teſtatur Plutarchus, quod nobis etiam in progreſſu diſquiſitionis noſtrae ſpectandum eſt, Aratus alternis fere annis praetor fuit. Pausanias quidem
vbi

vbi tradit, (1) Sicyonios ab Arato liberatos, *ἀντιλα δὲ σπαθηγὸς ἀπὸ τῶν Αἰχαιῶν ἡγήτο* ait. Sed confusa sunt omnia eo in loco Pausaniae, quaedam etiam suspecta. Vt, cum scribit, Aratum Sicyonios, libertate restituta, sui iuris esse voluisse, post vbi Macedones Antigono Philippi tutelam gerente, Graecis formidarentur, Sicyonios, quamquam Dorici generis erant, recepisse in Achaicum concilium. Cui rei palam aduersatur Polybius (*) cum sic ait: Aratus annos viginti natus patriam ereptam iugo tyranni virtute sua et fortitudine, *προσένειμε πρὸς τὴν τῶν Αἰχαιῶν πόλιν, ἀρχῆθεν εὐθείας ἐρασις γενόμενος τῆς προαιρέσεως αὐτῶν, Achaicae rei publicae adiunxit: iam inde statim a principio studiosus institutorum populi Achaici.* Habet sua ex Arati ipsius commentariis Polybius: Pausanias vero videtur aurem praebuisse Phylarcho, cuius quae fides sit, Polybius (2) declaravit. Iam Sicyonios Achaeis adscriptos demum habuit secundum Pausaniam annus Achaicus 52. quoniam Demetrius rex vt infra demonstrabo A. V. C. 525. decedens, Philippum filium sub tutela Antigoni reliquit. Quae cum attigit Pausanias, tum ille vero *ἀντιλα δὲ σπαθηγὸς Ἀρατος.* Aut igitur vndecimam praetoram Arati anno 53. in animo habuit: aut primam si dicere voluit, vides vt omnia perturbaverit per summam negligentiam. Primam autem dicere

(1) p. 129. 130. Sic Strabo p. 440. scribit: "Aratum praetorem Antigono Acrocorinthum admississe et patriam suam Achaeis adiecit et Megarenenses et Argos et Hermiona, Phliuntem, Megalopolin." Quibus in verbis nihil accurati, nihil chronologicum est. (*) p. 181. (2) p. 196.

dicere voluit, nam ea in praetura ait, contra Amphiffenses, Locros atque Aetolos duxisse, Corinthumque cepisse. Iterum alia perturbatio. In prima praetura quidem Aratus. Locros et Calydoniam populatus Baeotis subsidio venit, pugna ad Chaeroneam commissa et Aboeocrito Boeotarche ab Aetolis caeso: Corinthum vero ea in praetura non cepit, sed vt ex iis, quae supra tradidi, colligitur, anno Achaico 38. Olympiadis CXXXIV. 2. anno inito.

IV. Nunc reliquas Arati praeturas persequemur. Plutarcho (3) et Polybio testibus, Aratus multas praeturas aut continuatas aut alternis annis gessit, donec in decima et septima praetura lento veneno a procuratore Philippi regis, Taurione, necatus est. (4) Plutarchus maxime alienatum a Philippo rege scribit Aratum, postquam ille classem Romano bello amiserat: tum enim regem infesto animo inuasisse Messenios, Arato vehementer Messeniorum vicem dolente. Polybius autem in excerptis mortem Arati ponit intra id tempus, cum M. Marcellus Syracusas expugnauit, et Philippus rex Lissum in Illyrico. Syracusae sunt captae, Q. Fulvio Flacco III. App. Claudio Coss. cum dies festus Dianae ageretur. (5) Hi Coss. fuisse, A. Varroniano 542. ab Olympiadis CXLI. 4. anno, ita vt iis Coss. Olympiadis CXLII. 1. annus inierit. Philippo autem regi suspecto iam

Tom. V. Fff antea

(3) P. 1038. (4) Plut. p. 1047. Polyb. p. 722. (5) Liuius l. XV. 23

antea bellum denique illatum est Q. Fabio Maximo IV. M. Claudio Marcello Coss. (6) A. V. C. 540. Philippus Apolloniam cum classe adortus, sublatis velis vertit ex improviso et Oricum cepit. M. Valerius praetor Romanus ad Oricum venit cum classe instructa, urbem recepit, Apolloniae infestum regem per Q. Naeuium praefectum socium oppressit, inde classem ipse opposuit regiis. Cum se teneri sentiret Philippus, subductis aut incensis nauibus, Macedoniam terrestri itinere petiit, magnam partem inermi exercitu et spoliato. Res paullo ante hiemem gesta: classis Romana Orici hibernauit. Haec est illa Philippi regis classis, quam amissam fuisse Romano bello Plutarchus scribit. Post id vero res contra Messenios gestae et Aratus offensus. Porro etiam Linius (7) Philippi in Illyrios bellum, quo bello Lissus est capta sub veterem A. V. C. 544. M. Marcello M. Laeuino Coss. explicat. Fuit igitur Aratus veneno sublatus inter A. V. C. 542. et A. V. C. 544. Iam, si Philippus A. V. C. 541. Messenios fines, populi, sui quidem iuris, non alieno tamen ab Achaeis animo (8) inuasit, eo anno primum similitates inter regem et veterem eius amicum consiliorumque participem Aratum sunt natae, ob quas Arato lentum venenum paullo post a Taurione, ut Polybius ait, exhibitum, ex quo decimum et septimum praetor exstinctus est. Ut Philippus rex Demetrium filium miserit cum aliquot nauibus in Peloponnesum, ut

is

(6) Linius l. XXV. 40. (7) l. XXVI. 25. (8) Pausanias p. 380.

is astu et celeritate summa arcem Messeniorum occupauerit, Pausanias narrat. (9) Id necesse est, contigisse tempore aliquo, quo nauigari potuerit, nec tamen adhuc obsessum a Romanis fuerit mare. Puta me dicere sub A. V. C. 541 verem. His autem rebus gestis Philippum regem ipsum adfuisse ad Messenam, e Polybii excerptis teneo, (10) eodem quoque venisse Aratum cum Arato filio. Et fuit Aratus eo tempore praetor. Nam Plutarchus (*) scribit, Messenios seditionibus agitados, cum magistratus a multitudine diffideret: *ὁ μὲν Ἀράτος ὑσέρεμ βοηθῶν, ὁ δὲ Φίλιππος, ἡμέρα μὲν πρότερον ἐλθὼν εἰς τὴν πόλιν*, non modo aluit seditionem, sed etiam auxit, vt apertam in vim erumperet. Si Aratus ἐβοήθη, praetor fuit. Haec igitur est decima sexta Arati praetura. Anno post res in Peloponneso Philippus gessit nullas: imminabat enim Macedoniae M. Valerius praetor cum classe. Quid igitur tandem? quo anno dicemus Aratum praetorem XVII. fuisse? A. V. C. 542. an A. V. C. 543. Casaubonus extremam Arati praeturam posuit Olympiadis CXLI. 2. A. V. C. 539. quod cum iis testimoniis, quae produxi, pugnat. Cum optio alterutrius anni nobis est relicta, nihil aliud ad suspicandum de vero anno occurrit, quam veneni lenti mentio. Discessit a rege hostilia omnia metuens ab eo, qui priuatim in domum suam deliquerat, publice Messenios adfligebat, Achaeis insidiari videbatur, nulla fide, nullo

F ff 2

be-

(9) p. 349. (10) p. 703. (*) p. 1050.

beneficiorum respectu. Philippus autem, vni e ducibus et familiaribus suis Taurioni negotium dedit, vt quam occultissime Aratum veneno aggredere- tur. Is postquam in familiaritatem Arati irrep- sit, cogitata perfecit: dedit autem venenum, vt ait Plutarchus, *λένθον τε μαλακὰς τὸ πρῶτον ἐν τῷ σώματι ἢ βῆχα κινῆν ἀμβλῆαν, εἶτα ἕτως καὶ μικρὸν εἰς φθορὰν περαῖνον*. Ergo non tantum veneno, sed etiam Taurioni tempus erat conceden- dum: veneno, vt grassaretur, Taurioni, vt se apud Aratum neque Philippo, neque familiaribus eius pro- num ad insidias, insinuaret. Quae mecum consi- derata sic habui, vt inclinaret *animus*, Arati praec- turam extremam A. V. C. 543. inferendam po- tius esse, quam A. V. C. 542. Sed, vt infra osten- dam, A. V. C. 543. praetor fuit, et vel sic satis temporis et Taurioni ad praebendam venenum et veneno ad nocendum tribui potuit, praesertim si extremo tempore praeturae decessit Aratus. De- cessit, vt Pausanias tradit, (1) Aegii: inde corpus Sicyonem ductum honoresque diuini eius meritis decreti.

V. Venio nunc ad duodecimam praeturam Arati suo anno inferendam. Plutarchus scribit: (2) duodecimum praetorem male pugnisse contra Cleo- menem ad Lycaeon. Elapsus autem, collectis e fuga copiis, Mantineam sociam Cleomenis urbem oc- cupauit. Ad Megalopolin cunctari visus, oppu- gnauit.

(1) p. 132. (2) p. 1043. Pausanias scribit p. 131. 539. ad Dymen fuisse pugnatum, vbi Aratus praetor agros habuit.

gnantibus Spartanis urbem. Lysicles Megalopolitanus, qui eum in annum praeturam cum Arato petierat, iam antea infensus Arato, sine mandato praetoris aggressus Laedaemonios, fortiter pugnans occubuit, invidia in Aratum redundante, veluti destituisset aemulum laudis. Quam ob rem annum exercitus stipendium praetori multam dixit. Ad exercitus raptim Aegium concessit, populusque Orchomenium vindicavit ignominiam devictis Spartanis et Megistono Cleomenis vitrico capto. His rebus gestis Aratus praetura non modo decessit, sed eam etiam in perpetuum abiuravit: motus tamen postea Achaeorum discrimine recepit, ut infra declarabo. Praetorem fuisse duodecimum A.V.C. 531. Olympiadis CXXXIX $\frac{1}{2}$ ex sequentium annorum rebus colligitur. Nam post Arati hanc praeturam Timoxenum in magistratu illo fuisse, Plutarchus testatur: (3) post Timoxenum fuisse praetorem Hyperbaten, e Plutarchi Arato (4) et Cleomene (5) colligo. Hyperbate praetore, Mantinea amissa, Achaei ad Hecatambaeon in Dymaeis ingenti praelio fusi, acciuerunt Cleomenem, quem pace facta, ducem sibi legerent. Hic vero Aratus, quod poterat, tum vi, tum artibus suis obtinuit, ut Cleomene deluso, res Achaea ad opem Antigoni tutoris spectaret. Ergo Cleomenes bellum Achaeis indicit, (nam antea magis tumultus, quam iustum bellum fuerat,) Pellenen oppugnat elapsoque Hyperbate praetore, urbe potitur. Ar-

Fff 3

giii

(3) p. 1044. (4) p. 1045. (5) p. 811.

gini quoque et Sicyonii rebus nouis studebant: Corinthiorum violentas manus vix euasit Aratus. Inde Corinthii se suaque Cleomeni dederunt: Achaeci vero ad Aratum frequentes conuenerunt Sicyone, praetoremque cum libera cum potestate, quod alii nemini honori datum, et cum praesidio delectorum adolescentium creauerunt. Hanc praeturam, quae, ut vides, decima tertia fuit, certissimis ratiociniis suo in anno constituere possumus, ex quo deinde rationibus subductis annus quoque duodecimae praeturae exhibit. Bellum hoc Cleomenium Olympiade CXXXIX. gestum esse, satis constat. Est vero a Cleomene iniunctum ipso tempore, cum Nemea celebrarentur, teste Plutarcho. (6) Ergo primo anno Olympiadis CXXXIX. Nam tertio anno eiusdem Olympiadis cum Nemea altera instaurarentur, ut e Polybio (7) constat, bello Cleomenico finis est impositus. Nemea autem tertio cuiusuis Olympiadis anno ineunte aestiua, primo exeunte hiberna erant. Hiberna, ut videtur, duodecimo secundi hiberni mensis die. Igitur praetura decima tertia Arati, orto bello Cleomenico, coepit sub anno secundo eius Olympiadis seu A. V. C. 531. cum ipso aestatis principio. Plutarchus de hac praetura, (8) τριάκοντα μὲν ἔτη ἢ τρία πεπολιτευμένους ἐν τοῖς Ἀχαιοῖς, πεπρωλευκῶς δὲ ἢ δυνάμει ἢ δόξῃ τῶν Ἑλλήνων. Iam quae sententia Plutarchi sit, vide. In reipublicae gerendae praeceptis, (4) ἔτιω, inquit, παρῆλθεν εἰς δόξαν

(6) p. 812. (7) p. 216. (8) p. 1046.

ξαν Αρατος, ἀρχὴν ποιησάμενος πολιτείας τὴν Νικακλέως τῆς τυράννου κατὰ λυσιν. Cum versatum in republica dicit, ab eo tempore, quo Nicoclen tyrannum Sicyonium oppressit, isthuc quidem non plane significat, inde iam vsque in magistratibus esse coepisse, at Plutarchi tamen animo eam opinionem sedisse, non absurdus est, qui suspicetur. Illi autem triginta tres anni non possunt ab alio principio duci, quam ab eo tempore, cum praetura annua fuit constituta ab Achaëis. Nam in decima tertia praetura, ut vides, Aratus tertius et tricesimus praetor annuus fuit. Sic, puto, tempus ipse in commentariis insigniuerat Aratus: non, quod tot annos magistratus gesserit, sed quod, hoc illius formae reipublicae spatium exstiterit. Antequam decimum et tertium praetor fuit, sub Nemeis ludis, bello Cleomenico indicto, Aratus cum Antigono egit, ut auxilio veniret Achaëis contra Spartanos. Et cum Antigonus alia conditione quam tradendae Corinthi sese moturum non esse ostendit, Aratus misso ad regem Arato filio de foedere conuenit in eam conditionem, quod tum Corinthus auulsa a nomine Achaico Spartanis se deditisset. (10) Autumnus erat cum Antigonus aduentaret Cleomenesque exercitum haberet ad Isthmum: interea Argos per Aristotelem Argium proditione receperunt Achaëi. (1) Dux memorabilis rei Aratus, sed Macedonicis cum copiis, ut priuatum eo tempore fuisse appareat. (2) Ciuita-

(9) p. 804. (10) Polybius p. 191. 192. (1) Polyb. l. c. (2) Plut. p. 104.

uitates aliae quae defecerant, metu percussae redierunt ad foedus Achaicum: Cleomenes ne a Macedonibus et Achaeis includeretur, recessit, Antigonus Acrocorintho recepta hibernauit Corinthi et Sicyone. Ineunte vere Antigonus Tegeam mouit eaque vrbe et Mantinea Orchomenoque captis, ipse ad conuentum Achaeorum sub auctumno profectus exercitum in hiberna dimisit. Haec igitur maximam partem perpetrata sunt, Arato praetore: erat adhuc praetor, cum Cleomenes otiosos arbitratus hostes in hibernis agere, Megalopolin admotis copiis cepit, primo autem vere fines Argiuorum inuasit. Initio denique aestatis, hoc est, cum praetor nouus Achaeorum inisset magistratum, Antigonus in Laconicam mouit, Cleomenemque tandem magno praelio vicit, in quo Philopoemenis adolescentis virtus eluxit, quem postea praetorem nominabo saepius. Cleomenes nocte, quae diem consecuta est, e Sparta auffugit in Aegyptum: vrbs capta, vetus reipublicae forma et disciplina restituta. Paucis diebus post, Antigonus, audito, Illyrios impressionem fecisse in Macedoniam, motis castris Argos venit sub ipsum tempus Nemei ludicri. Haec aestiua erant Nemea XII. Panemi siue Olympiadis CXXXIX. 3. A. V. C. 532. XVI. Quintilis secundum Doduell tabulas. Olympiadis CXL. 1. Lacedaemonii nouis rebus studentes Agesipolin et Lycurgum crearunt reges: is annus, inquit Polybius, (3) erat a fugato-
Cleo-

Cleomene tertius. Ita omnia in hac parte chronologiae confirmata sunt. Illo autem anno, quo victus fugatusque est Cleomenes, Timoxenum Achaeorum praetorem fuisse, inuenio, vt paullo post dicam amplius. Ante Aratum praetorem duodecimum, in magistratu fuit Aristomachus Argius. Hoc plane intelligere mihi sum visus e Plutarcho. (4) Nam is narrat, Aristomachum Argium tyrannum, cum Aratus eum ad societatem Achaicam pellexisset, spe praeturae proposita, quae gloriosior esset, quam tyrannis, aurem prae-buisse conditioni, Lysiadem autem, qui tum praetor erat, vt suum isthac meritum esset, Aristomachum sibi conciliaffe. Cum de summa rei ageretur in concilio, Aratus Aristomachum perculit, mox permisit tamen auctorque adeo fuit, vt non modo reciperetur, sed etiam, vt praeturam in proximum annum Aristomacho decernerent Achaei. Ea in praetura Aristomachus, inuito Arato, cum Cleomene tyranno Lacedaemonio similtates aluit, quae erupere in tumultum. Cum ad Pallantium Cleomenes se obtulit, Aratus autem Aristomachum absterruit, ne signa conferret, ea calumnia Lysiaes duodecimam praeturam petenti Arato se extorsurum putauit. Nihil tamen egit. Apparet autem e Plutarchi Cleomene (5) etiam, Aratum paullo ante Aristomachum praeturam gessisse. Nam cepit Caphyas Aratus: ea occasione Cleomenes cum copiis mouit, opposi-

Tom. V. Ggg tusque

(4) p. 806. 1043. 1047. (5) p. 806.

tusque Cleomeni est Aristomachus praetor. Habes ordinem rerum illum, ut non modo, quo anno Aristomachus praetor fuerit, intelligatur, sed etiam ut Aratus ante Aristomachum, ante Aratum Lysiaes collocandus sit. Hic Lysiaes tres praeturas gessit. Auctorem habeo Plutarchum. (6) Sed haec ceteraque quae inter secundam et duodecimam Arati praeturam intercessere, accuratius expendenda duco.

VI. Demetrius rex Macedoniae, quo anno Philippum filium orbem, Antigonum autem tutorem reliquerit, Polybius declarat, sub ipsum inquam tempus expeditionis Romanorum in Illyrios. Demetrius Illyriorum regem Agronem concitavit, qui suscepto bello haud dubie superior, nimis laetus ea felicitate, mortem commestrationibus acceleravit, relicta in regno vxore Teuta. Teuta proxima aestate novas copias in Graeciam immisit, quo tempore cum Achaei submisissent Aetolis auxilia naualia, pulsi ab Illyriis, Marcum Carynensem, qui exercitum ductabat, amiserunt. Submersus enim est cum naue. (7) Eadem aestate Cn. et L. Coruncanius legati Romani de iniuriis expostulatum venere ad Teutam. Hi, dum redeunt, summissis percussoribus caeduntur. Ea causa anno post Cn. Fulvius Centumalus L. Postumius Albinus Coss. cum exercitu profecti in Illyricum, vno anno bellum confecerunt. Obiit igitur De-

(6) p. 1041. (7) Polybius p. 137.

Demetrius rex A. V. C. 525. Antigono Tutori Dexippus et Porphyrius annos XII. Eusebius XX. attribuunt. Antigonus autem, cum, vt supra demonstraui, A. V. C. 532. capta Sparta, raptim moueret in Illyrios, adulta aestate hostes acie vicit. Hic, cum lateribus non pepercisset clamando monendoque milites, sanguinem vomere coepit ex eoque morbo non multo post diem obiit supremum. (8) Ergo vix octo annos rebus Macedonicis praefuit et sub A. V. C. 553 fato functus est. Simul apparet, Marcum Carynensem A. V. C. 524 praetorem fuisse. Paulo antequam Aristomachus consilia de tyrannide ponenda communicauit cum Arato, hic Athenas occupauerat et Piraeum, Munichiam, Salaminem et Sunium datis CL. talentis Diogeni praefecto Macedonici praesidii, receperat. (9) Mortuus tum maxime erat Demetrius rex. Obit autem A. V. C. 525. Et eo anno Athenis in concilium Achaicum receptis, praetorem, non Aratum, sed alium fuisse, diserte testatur Plutarchus. (10) Scribit enim, Athenienses, accepto, Demetrium decessisse, acciuisse Aratum: ὁ δὲ καίπερ ἑτέρῃ μὲν ἄρχοντος τότε τῶν Ἀχαιῶν, tamen accurrit. Bene igitur in hunc annum Lyfiadis praetura conuenit, vt qui superiori anno Arati factione a tertia praetura depulsus, tamen eum nunc aequo iure petere et consequi est visus. Marco Carynensi Lyfiadem cedere oportuit, cum tertiam peteret praeturam. Obstitit enim Aratus priuatim

Ggg 2

tim

(8) Polybius p. 215. 216. (9) Pausanias p. 130. (10) p. 1047.

rim infensus Lyfiadi. (1) Antea autem *παρ' ἐναυ-
τὸν ἦρχε μὲν ἐναλλάξ τῷ Ἀράτῳ στρατηγῶν Λυσιά-
δος*, ut ait Plutarchus. Sic Arati X. IX. et VIII.
praeturam, simul cum duabus Lyfiadis ordinavi-
mus.

VII. Lyfiades antea tyrannus Megalopolita-
nus Aratum metuebat adeo, ut Aristippo Argi-
uorum tyranno sublato, vnice in se verum-
tandem leniendum obsequio et deponenda ty-
rannide censeret. Quod cum accidit, eo an-
no non erat praetor Aratus. Accitus enim Me-
galopolin ad Lyfiadem venit, (2) quod *eum factu-
rum non fuisse praetorem, puto*. Consentit de-
nique ipsa fere ratio, ut Lyfiadem se suosque anno
Achaico 45. tradidisse, anno autem 47. praeto-
rem fuisse ponamus, quod non videntur paucis in-
teriectis diebus aut mensibus Lyfiadi praetori rem-
publicam tradituri fuisse Achaeci, quem paullo an-
tea oderant tyrannum: annus vnus interiectus eluere
poterat inuidiam. Igitur A. V. C. 518 a Lyfiade,
ut dicebam modo, Megalopolis est tradita Achaecis.
Et ita se gessit Lyfiades (seu ut Pausanias atque
Plutarchus *Λυσιάδης* et *Λυσιάδας*: quamquam nos
Polybium potius sequimur, apud quem est *Λυσι-
άδης* et *Λεωσιάδας*: Dorice) ita, inquam, se gessit,
*ὡς Ἀράτῳ παρισωθῆναι τὰ εἰς δόξαν, ut vitae di-
gnitate atque publica existimatione Arato nihil conce-
deret*, quod ait Pausanias. (3) Quod de Aristippo

(1) Plutarchus p. 1041. (2) Plutarchus p. 1047. (3) P. 617.

tyranno dictum est, id vero explicatius edifferemus: aperiet enim nobis aditum ad patefaciendam nouam praeturam Arati Aratus statuit, (4) sublato per insidias Aristomacho, Achaeos in libertatem vindicare. Prodito consilio, Aristomachus nihilo magis tutus, a seruis suis obtruncatur. Sed Aristippus tyrannidem occupat, frustra cum subsidiariis copiis Arato aduolante. Aristippus Achaeos, quod in pace arma cepissent, iudicio postulauit, priuatim vero vel in primis infensus Arato, instinctu Antigoni Gonatae regis percussores submisit. Frustra tamen laqueos tendebat viro inter suos spectabili et gratioso. Aratus cum exercitu adortus Aristippum ad Charoneta fluium acri praelio pugnauit. Vbi hostilem exercitum auctum subsidiis sensit, Cleonas sese contulit, eaque in vrbe Nemeorum ludicrum instaurauit. Haec Nemea aestiua acta sunt Olympiadis CXXXIV. 3. anno incunte, mensis aestiui secundi die XII. In hunc solum annum illa Nemea quadrant. Nam in eiusdem Olympiadis primo anno exeunte, quae acta sunt Nemea hiberna, ea nondum ita laeta fuere Achaeis, vt Aratus Argos spectare posset. Immo post illa Nemea Aratus primum praetor res ad Corinthum gessit. Etiam Nemea hiberna Olympiadis CXXXV. 1. anni huc trahi non possunt. Nam eo maxime anno Aratus cum Aetolis bellum gessit. Plutarchus, (5) vt semel narrationem instituerat de rebus Argiuis,

Ggg 3

ita

(4) Plut. 1039, 1040. (5) Pl. 1041.

ita eam persecutus est, resque Megalopolitanas et Lyfiadis subiunxit, denique, quod omiserat eo in sermone, Aetolicum bellum attingit. Sane et Aristippi caedes et Lyfiadis res omnes post isthuc bellum collocandae sunt: non item illa Nemea. Nam in hunc ipsum primum Olympiadis CXXXV. incidere non poterant, quia Aetolico non Argiuo bello distinebatur Aratus: neque in tertium annum eius Olympiadis, post Aetolicum bellum A. V. C. 517. quoniam duobus annis ante et amplius Antigonus Gonatas rex iam obierat, quem tum maxime, cum eas res ad Chareta gessit Aratus, superstitem fuisse, Plutarchus declarat. *Do duellus* rationes perturbavit. (6) Putat enim Aratum Olympiadis CXXXII. $\frac{1}{2}$ primum fuisse praetorem; ea autem in praetura bellum Aetolicum esse gestum censet. Hoc de bello Aetolico repugnat omnibus rationibus nostris; quas puto satis esse firmatas. De prima praetura Arati atque secunda multis iam supra diximus, quo in loco Polybii quoque testimonium, quod offensionem fuit *Do duello*, expendimus. Nunc vide alia, quae *Do duello* obstant. Aratus persuasit Agidi Lacedaemoniorum regi, ut societate cum Achaeis inita, Aetolos a Megaricis finibus depelleret. Cum ad Corinthum conuenissent et Agis censeret pugnandum esse cum Aetolis, antequam Peloponnesum inuaderent, Aratus obstitit, ὅτι βέλλιον ἤγατο τὰς καρπὰς σχεδὸν ἅπαντας συγκεκομισμένων ἤδη τῶν γεωργῶν, παρελθῶν

(6) In Cyclis p. 323.

ελθῆν τῆς πολεμίας. Agis offendit se facturum, quod visum esset Arato, ἔ γὰρ πρεσβύτερόν τε εἶναι ἔ σπαρτηγῆν Ἀχαιῶν. Sic Plutarchus ex Arati commentariis. (7) Aratus, ut regem plane in sententiam suam adigeret, magnam partem exercitus dimisit: Agis ubi sese deseri sensit et ipse se recepit Lacedaemonem: ubi per Agesilaum ephorum omnia turbata inuenit, ad Chalcioecum confugit, Cleombrotus alter rex in aede Neptuni sedit supplex. Leonidas ab exilio reuocatus, regnum, e quo fuerat pulsus, recepit, Cleombrotum exulare iussit, Agim insidiosè captum coniectumque in carcerem ephorum iudicio tradidit. Hi laqueo ceruicem regis eliserunt. Leonidas rex Agiatiden Agidis uxorem opulenti haeredem patrimonii, probis mulierem moribus et forma praestanti, vi coegit, ut Cleomeni filio suo nuberet. Illa socerum mariti sui interfectorem summo odio prosequuta est, περὶ δὲ αὐτὸν τὸν νεανίσκον ἦν ἀγαθὴ γυνὴ ἔ φιλόσοργος. Iam paullo ante Cleomenicum bellum, Democrates exul Lacedaemonius, Cleomenis indolem spectans et vigorem aetatis, Arato undecimum praetori (ut satis e Plutarcho (8) apparet, si cum rationibus nostris eius testimonium conferatur) dixit: ὦρα σοι ταχύνειν, πρὸ τῆς κέντρα φύσαι τῦτον τὸν νεοσσόν. Fuerit licet hic νεοσσός annorum triginta, tum cum Aratus praetor XI erat Olympiadis CXXXVIII. † ergo Olympiadis CXXXII. 2. vix annorum septem puer fuit: qui
ma-

(8) p. 801. (8) p. 806.

malum potuit ducere Agiatiden? Quae, cum ita sint, non is extremus annus Agidis fuit. E contrario bellum cum Aetolis nullum gerere poterant Aethaei adulto paullo Demetrii Macedonis regno. Nam contra illius potentiam Aethaei Aetolique foedus iniuerunt. Ergo cum ceterae rationes consentiant, nihil autem repugnet, Aetolicum bellum gestum est Olymp. CXXXV. 1. seu, ut ex iis, quae e Plutarcho protuli, liquet, auctumao, messe iam conuecta ab agricolis A. V. C. 514. Post autem, vbi Demetrius Antigono Gonatae successerat, Athenas aggressus est Aratus, (9) sextum praetor.

VIII. Redeo ad Aetolicum bellum. Ab Corintho, ut dixi paullo ante, socios dimisit Aratus, ipse denique recessit: Agis rex nonnihil moratus, ut magnum ostentaret et Spartano dignum animum, tandem et ipse se recepit. Per hanc opportunitatem Aetoli Peloponnesum ingressi Pelopenen ceperunt: at Aratus repente ea in vrbe adortus Aetolos lasciuientes, acie ante moenia vrbis vicit et cum hostium agmine irrupit in vrbem. Verum, inquit Plutarchus, (10) cum multae atque validae gentes conspirarent in Aethaeos, Aratus statim cum Aetolis et pacem et foedus confirmavit. Has gentes puto, primum Macedonas, quos aequae metuebant Aetoli Aethaeique, qui nunc defuncto Antigono Gonata, nouo sub rege Demetrio

(9) Plutarchus p. 1046. (10) 1046.

trio videbantur in ordinem redigi posse, qui Aristippum Argiuorum tyrannum aluerant aduersus Aratum: praeterea Argiuos ipsos et Megapolitanos, qui sub tyrannis adhuc erant: denique Spartanos, qui Agide illa hyeme sublato, acta illius improbare videbantur. Quare nihil verosimilius, quam Aratum sequentibus etiam tribus annis fuisse praetorem, cum tot terrores Achaicum nomen circumfisterent. Noli autem mirari continuatas Arati praeturas summo in discrimine rerum. Plutarchus de Arato sic habet: (1) *tantum polluisse auctoritate, ὡς' εἰ μὴ κατ' ἐναυλὸν ἐξῆν, παρ' ἐναυτὸν αἰρεῖσθαι στρατηγὸν αὐτὸν, ut, si non quotannis contingeret eum praetorem legi, tamen secundo quouis fieret.* Tum is ipse quoque, ubi narravit, quantis terroribus agitatus Aristippus tyrannus, quantum sibi cauerit, ad Aratum flectens sermonem, εἰ δ' ἔχ' ὄπλοις κατὰ βίαν, νόμῳ δὲ ὑπ' ἀρετῆς ἀκατάπαυσον ἀρχὴν πεποιημένος, *libere tamen egit.* Quid ἀκατάπαυσος ἀρχή, nisi continuatae praeturae? Et hoc commemorat Plutarchus ita, ut facile intelligas, cum extrema Aristippi spectare. Aristippum autem Arato VIII praetore oppressum esse, ex eo colligo etiam, quod mox Lysides id ipsum metuens, se suaque tradidit Achaeis anno Achaico 45. Praetorem tum fuisse Dioetam puto. Illum, inquam, de quo Polyaeus in stratagematis. (2) *Διοίτας στρατηγὸς Ἀχαιῶν τὴν Ἑρεαίων πόλιν Φανερῶς ἐλεῖν ἔδυνάμενος, ἀΦανῶς εἶλε, Φθείρας μεγάλων.*

Tom. V.

Hhh

λοις

(1) p. 1028. (2) l. II. extremo.

λοις χρήμασι τῶν Ηραίων τινας. Bene Casaubonis: *scribendum* τὴν Ηραίων πόλιν *et* μοx Ηραιεῖς. Nam ita est τὸ ἔθνικόν apud Polybium et Pautaniam et Stephanum Byzantium: vrbs ipsa Ηραῖα in Arcadia, haud procul a Messene, vt ille Stephanus, ad Alpheum fluum, vt notum e Pausania. Nulli sane anno magis conuenit vrbs capta et attributa Achaeis, (recepti autem sunt ab Dioeta in fidem, ὡς εἰσαῦτις ὑπήκοοι γενησόμενοι τοῖς Αχαιοῖς,) quam huic anno. Reliqui enim anni nullum interuallum relinquunt Dioetae praetori. At cum Aratus XIII. praetor erat, Heraeenses ad Lacedaemonios defeecerant. Nam quod Polybius *testatur*, (3) Antigonus Tutor Mantinea per deditioem occupata, Heraeam et Telpussam duxit, παραλαβὼν δὲ ἃ τὰς πόλεις, ἐθέλοντι προσχωρησάντων αὐτῶ τῶν καλομένων Aegium ad concilium populi profectus est. Mansit vrbs sub praefidiis Macedonicis, donec anno Achaico 57 Philippus rex, *reddidit Heraeam et Triphyliam Achaeis*, vt ait Liuius. (4) Fuit igitur antea Achaeorum Heraea, quam ad Lacedaemonios, inde ad Macedonas traducta est.

IX. Reliquae sunt praeturae duae Arati, decima quarta et decima quinta, vtraque facile expedienda. De decima quarta prius dicam paucis. Celebris ea est clade Achaeorum ad Caphyas accepta. Aetoli post Antigoni Tutoris mortem inuasere

(3) p. 194. (4) l. XXXII. 5.

uere Messenios anno Achaico 35. cum Timoxenus praetura nondum abiisset, (5) Aratus autem praetor esset designatus. Eo lentius peragente negotium, Aratus quinque diebus anticipato magistratu mandata dedit ad ciuitates, ut Megalopolin conuenirent, qui arma possent ferre. Inde duxit in Aetolos et clade maxima ad Caphyas est adfectus. Aetoli victoria usi, Pellenenses et Sicyonios agros populati, per Isthmum discessere domum, quod aestas utique vergeret et Philippum aduentare fama esset. Philippus Corinthi congregatis sociis, bellum in Aetolos decernit, quod ex eo sociale dictum. Paucis post diebus solemne concilium Achaeorum conuenit, in quo Aratus omnibus probris sententiisque proscissus, populum dicendo et commemoratione rerum suarum placuit. Id concilium Olympiadis CXXXIX. 4. habitum fuisse diserte tradit Polybius, (6) sic inquit ut vergerit in Olympiadem CXL. Interim Aratus e decreto concilii socios in arma concitat, exercitum conscribit, bellum parat. Polybius istius anni notam quoque indicat, quod tum Saguntini ab Hannibale petiti fuerint, (7) sed ita tradit, ut appareat eum res Carthaginienses accommodare ad Achaicas. Primum enim refert Aratam Arati filium patri successorem datum, (8) eo autem praetore Saguntinos petiisse Hannibalem. Saguntus oppugnari coepit M. Liuius, L. Aemilio Coff. ut Polybius Liuiusque memoriae prodiderunt. Horum

Hhh 2

con-

(5) Plut. p. 1049 Polybius p. 383. (6) P. 394. (7) P. 413. 425. (8) p. 424

consulatus incidit in A. V. C. 535. ab Idibus Martiis, ut tum erat, cum adhuc procederet tum primus annus Olympiadis CXL. tum praetura Arati minoris superiori anno suscepta. Fuit Aratus filius patris dissimillimus et segnis imperator. Eo praetore bellum sociale coepit. Aratum minorem Eperatus Phageensis in praetura secutus est, depulso ab illius spe magistratus Arato patre per Philippi regis factiones, ut Plutarchus (9) et in primis Polybius (10) testantur. Eperato praetore Polybius scribit Hannibalem petiisse Italiam, P. Scipione Ti. Sempronio Coss. ipso teste Polybio (1) Olympiadis CXL. 2. Bene hoc conuenit. Bellum sociale *finem habuit Olympiadis CXL. 3.* ut Polybius duobus locis testatur. (2) Tum autem praetor fuit decimum quintum Aratus pater. Nam Philippus rex segnitiam Eperati pertaesus, cum Arato Sicyone rediit in gratiam, ut anno post Eperatum praetor fieret. (3) Arati praeturas suis annis adsignauimus ita, ut multorum aliorum quoque praeturas constitutas simul habeamus.

X. Vnum ad extremum non praetermittam. Iosephus Scaliger in *ισοζωών συναγωγῆ* (4) narrat, Agin Eudamidae filium in Eleos mouisse, Megilopolin oppugnasse, Pellenen cepisse, praelio cum Mantinensibus commisso, et re male gesta incidisse in Aratum et tum exercitum amisisse, tum vitam. Haec testatur in canonibus isagogicis (5) Scaliger se edidisse, *ut gesta colligi potuere, ne forte putes ex*

MSto

(9) p. 1049. (10) p. 480. (1) p. 525. (2) p. 414. 617. (3) Pappian. l. V. c. 30. (4) p. 366. (5) p. 342.

MSto quodam fragmento haec eum edidisse. Nimirum secutus est Pausaniam, qui haec ita de Agide tradita relinquit, (6) ut ipsam aciem, qua ab Arato Sicyoniorum et Achaeorum duce atque Lysade Megalopolitano victus fuerit Agis, instruat. Fuit, ut ait, eodem in praelio Podares dux Mantineensis, eius Podaris, qui aduersus Epaminondam pugnans cecidit ἀπόγονος τρίτος, quod nisi reddas pronepotis filium, sane non video, quomodo in istius Agidis tempora congruat, cuius res supra attigimus. Sed is Agis bello non cecidit: necatus est admodum iuuenis in carcere: ac ne gessit quidem bellum, nisi cum Achaeis ipsoque Arato contra Aetolos. Alio loco Pausanias, (7) cum dicit, Eleos inuitos secutos fuisse Lacedaemonios contra Athenienses in bello Peloponnesiaco, (ut constat etiam ex Thucydide,) tum vero addit, συνέστησαν δὲ μετὰ ἑὸς πολλὸν χρόνον ἐπὶ Λακεδαιμονίῃς Μαντινεῦσιν ὁμοῦ ἢ Ἀργείοις et denique res Philippi Amyntae regis ponit. Rursum alio in loco (8) bellum inter Lacedaemonios Eleosque causam accepisse prodit eo tempore, cum a Thebanis victi Lacedaemonii Olympico ludicio arcerentur. Denique alio in loco (9) hunc Agida Eudamidae sic designat, ut nullum sit dubium, quid senserit, quemue Agidea indicauerit. At cum Agia scribit, (10) Pellenen Achaeorum vi cepisse, ab Arato autem Sicyonio mox fuisse eiectum, hic ego vero Pausaniam teneo in manifesto errore, ut qui legerat Agide opem ferente Achaeis captam ab Aetolis

Hhh 3

Pel-

(6) p. 619. (7) p. 383. (8) p. 454. (9) p. 657. (10) p. 539.

Pellenen et mox recuperatam ab Arato. Quare nihil est verius, quam quod fecit infinitis in locis Pausanias, idem fecisse in Agide Eudamidae multaque diuersorum temporum facta et ducum nomina confundisse; quod multis verbis refellere huius neque loci neque argumenti est. Satis est, si explodatur Pausanias, ne quem incautum fallat.

Caput Tertium

De octo Philopoemenis praeturis.

Philopoemen annum agens *LXX.* praetor octauum a Messeniis captus et veneno sublatus est. Fuisse eum hoc anno praetorem, Plutarchus sub extremo vitae neque dicit, neque penitus dissimulat. Scribit vero Philopoemenem Argis ex febre male habuisse, cum de Messeniorum tumultu adferretur, ad eum nuncium aduolasse nihilominus vno die Megalopolin stadia amplius quadraginta, atque inde cum equitibus quos voluntarios secum ducebat, ad Colonidem obsidione liberandam festinasse. Nihil praetorii in toto illo sermone, donec necato Philopomene subiicit, Achaeos εἰδ' ἠγλιῶν ἀναβολὴν ποιήσασθαι τῆς τιμωρίας ἀλλ' ἐλομένους στρατηγὸν Δικέριαν impressionem fecisse in Messenium agrum, vbi necem eius vlti, combusto cadauere, cinerem magnam cum pompa funeris deuexerunt. Tulit autem vnam, vt is quoque habet, Polybius Lycortae praetoris filius, cuius historias nunc magis lugemus adeo
cru-

crudeliter laniatas, quam Achaei Philopoemenem amissum. Iustinus scribit, (1) Philopoemenem antequam cicutam biberet, quaesisse, *an Lycortas praefectus Achaeorum euasisset*. Puta eum dicere praetorem, aut magistrum equitum. At Plutarchus tantum de Lycorta sine magistratus nomine quaesisse tradit. Cum autem adeo raptim lectus est praetor Lycortas, vides utique desideratum fuisse imperatorem. Et fuisse Philopoemenem praetorem, Liviō tutissime credas, qui Polybium studiose expressit. Sic autem ait: (2) *cum bello superiores essent Achaei, Philopoemen praetor eorum capitur, ad praeoccupandam Coronem profectus*. Addit cetera etiam, quae Plutarchus habet, septuaginta annos iam natum et diutino morbo viribus attenuatis equites nobilissimos gentis nuper a se lectos relinquendi pudore, eos in laqueos sese induisse. Addit deinde de Lycorta, quod nobis lucem praebet in Iustino fidum auctorem Trogum Pompeium secuto: *is, inquit, alter imperator Achaeorum erat*. Sane cum et Liviū et Iustinus simul de Lycorta et equitibus quaesisse tradunt, argumento id quoque est, Lycortam tum *ἰππάρχην* Achaeorum fuisse. Iam Pausanias quidem (3) de Philopoemene, *ὡς δὴ τῶν Ἀχαιῶν ἔγδοον ἀπεδέχθη τότε ἡγεμῶν, a Messeniis captus est*: caue autem sic Pausaniam interpreteris, veluti tum maxime Philopoemen octauum praetor in sequentem annum fuerit designatus: nam sic alias etiam loquitur, cum non designatum, sed in magistratu fuisse aliquem

(1) l. XXXII c. 2. (2) l. XXXIX. 49. (3) p. 704.

aliquem tradit. Octauam hanc Philopoemenis praeturam fuisse, exploratum quoque habeo e numero superiorum praeturarum. Et Plutarchus disertè: ἤδη γεγωνῶς ἔτος ἑβδομηκαστὸν, ὄγδοον δὲ τῶν Ἀχαιῶν στρατηγῶν. Quidam Graecorum insignem anni istius notam ponunt, Philopoemenem, Annibalem, P. Scipionem Africanum decessisse haud magno interuallo, anno vno, vt est apud Liuium. (4) Valerius Antias apud eundem, (5) Annibalem mortuum prodidit Q. Fabio Labeone, M. Claudio Marcello Coss. Alii alio in anno mortuum ferunt: item in Scipione maiore controuersia est, quae in Philopoemene esse potest nulla. Nam his plane Coss. casum eius refert Liuius. Liuium cum dico, puta me dicere Polybium, quem is accurate persequitur. Et quis accuratius poterat nouisse tempus, quam Polybius, qui Philopoemenem extulerat? Philopoemenis in locum Lycortas magister equitum successus est. Nam, quod supra e Plutarcho ostendi, vt nuncius de clade praetoris allatus est, repente a concilio Achaico iussus est praeturam suscipere. Hic vno impetu oppressit Messenios, de intersectoribus supplicium cepit, summam vero rei Messenicae ad concilium, quod tum Megalopoli conuenerat, reiecit. Δευτέρην σύνοδον vocat Polybius (6) vt intelligas, conuentum eum sub auctumno fuisse. Ergo tempus deprehendimus, quo tempore Messene in ordinem redacta est. Polybius (7) secundo Olympiadis CXLIX. anno legatos Achaeorum venisse Romam scribit,

(4) l. XXXIX. 50. (5) l. XXXIX. 56. (6) p. 1206. (7) 1202.

scribit, et tum maxime adfuisse Q. Marcium legatum Romanum, quem iisdem Coss. Senatus miserat, ut, quoniam Messene descuerat a concilio Achaico, res sociorum in Peloponneso adspiceret, cum e Macedonia rediisset, in quam potissimum mittebatur. (8) Ex his facile intelligas, superiori hieme defecisse Messenios, ut peruagata rei fama, Roma excire eius exitu veris legatum Romanum posset. Venit primum in Macedoniam, tum in Peloponnesum, quod aliquantum temporis interualum requirebat: tamen cum Romam rediit, nihil de Philopoemenis exitu adferebat, e contrario Achaeorum potentiam criminantis in modum praedicabat. Fuit igitur initio aestatis, cum Q. Marcius in Achaeis ageret, nihil magnae rei susceptum: paullo post vero Philopoemen praetor captus et necatus, Lycortas suffectus sub auctumno in concilio Messenios restituit. (9) Quis autem mihi repugnabit, si eundem Lycortam post suffectum magistratum, praeturam quoque sequentis anni ob rem bene gestam suscepisse dicam? Sic meritus erat, sic mihi videor Achaeos pernouisse, ut merita nulla sine praemio virtutis relinquerent.

II. Insignis quoque est secunda Philopoemenis praetura, in qua Nemeum ludicrum spectauit, non magno interuallo a pugna ad Mantineam, insigni honore et populi plausu exceptus, teste Plutarcho. (10) Nemea illa alia esse non possunt, quam Olympiadis CXLIII. 3. anno ineunte. Sic autem
Tom. V. Iii Plu-

(8) Lilius l. XXXIX. 48. (9) Polybius p. 1296. (10) p. 362.

Plutarchus fatus est: Λέγεται τῆς τῶν Νεμείων πανηγύρεως συνεσώσης, ἑρατήθη ἄντα τὸν Φίλοποιμενα τὸ δευτερον ἢ νενικηκότα μὲν ἐπ' αὐτῶν τὴν ἐν Μαντινείᾳ μάχην, τότε δὲ ἄλλοι ἀγόντα τὴν ἑορτήν κ. τ. λ. Loquitur de ea pugna, qua Philopoemen praetor Machanidam tyrannum Spartanum ad Mantineam vicit manuque sua interemit. Si istius pugnae tempus inuestigauero, praeturam quoque primam tenebo. Polybius (1) pugnam ponit, inter Asdrubalem Hannibalis fratrem a M. Liuiο, C. Claudio Nerone Coss. deuictum, et res a P. Scipione in Hispania aduersus Asdrubalem Gisgonis gestas. Hae res perpetratae sunt sub verem, A. V. C. 548. cum Q. Caecilius Metellus, L. Veturius Philo idibus Martiis contulatum inissent, ut satis e T. Liuiο ipsoque Polybio constat. Iam vero Philopoemen antequam Machanidam est adortus, tum emendandis populi moribus ordinandaeque republica, quam Philippus rex nonnihil perturbauerat, tempus impendit, tum vero ἐδ' ὅλας ἐκλήω μῆνας *menses non integros octo*, ut ait Polybius, apparando bello. Si hos octo menses a primis auspiciis praeturae numeres, res gesta mense Decembri A. V. C. 547. sin aliquantum temporis ordinandae reipublicae praecipimus, ut hi octo menses solo in apparatu postea sint consumti, incidemus in ipsum verem, paullo ante vernum Achaeorum concilium. Quid autem potius credamus, quam media hieme nihil mouisse Philopoemenem ex hibernis vero duxisse in Spartanos. Eo in

prae-

(1) Polybius p. 879.

praelio magister equitum fuit Aristaenetus Dy-
maeus. (1) Quid deinde est manifestum magis,
quam continuatum Philopoemeni fuisse magistratum,
si, vt Plutarchus tradit, non dudum victis ad Man-
tineam Spartanis iterum praetor Nemeis interfuit
Olymp adis CXLIII. 3. ineunte. Nam si interfuisset
praetor iterum Nemeis Olympiadis CXLIV. 1. ex-
eunte, non poterat pugna ad Mantineam recen-
tis memoriae officia in populo Achaico concitare.
Anno autem post, quem potius legerint praetorem,
quam Aristaenetus Diaeum, qui ad Mantineam equi-
tum magister praeclare pugnauerat. Nam ob rem
bene gestam summus magistratus ei debebatur, nisi
Philopoemenis potius fuisset habenda ratio, cui
continuaretur. Sic Lycortas, etiam re male gesta
captoque Philopoemene praetore, e magistro equitum
suffectus est praetor. Et persuadet hoc quoque nobis
error Plutarchi, Aristaenetus hunc confundentis
cum Aristaeno Megalopolitano, qui ex eo videtur
ortus, quod vtrumque praetorem commemorari
sciebat Plutarchus. Ante Philopoemenem Niciam
praetorem ponendum duco. Et Liuius quidem Ni-
ciae praeturam aestati illi inseruit, qua aestate M.
Liuius, C. Claudius Coss. fuere. (2) Sed nescio quo
seductum errore fuisse dicam. Nam ita fatus est ipse:
*Cum de finiendo Aetolico bello ageretur, nuncius affer-
tur, Philippo regi, Machanidam Olympiorum solemne
ludicrum parantes Eleos aggredi statuisse: praeuertend-
um id ratus cum expedito agmine Corinthum descendit.*

Iii 2

Audi-

(1) Polybius p. 879. (2) l. XXVIII. 7. 8.

Audito Machanidam recessisse, *Aegium se ad concilium Achaeorum recepit.* Recte isthuc sane, quoniam ante Olympii ludicri tempus Aegii solemne concilium legendo praetori conuenire solebat. Reddidit tum Philippus Achaeis Heraeam et Triphyliam. Inde cum Achaeis repentinam impressionem classe deuectus in Aetoliam fecit. Ex Aetolia cum praeda Niciam praetorem Aegium remisit, ipse ad confirmandos sibi animos aduersus Attalum regem, Graeciam obiit. Vides sane eo in concilio praetorem fuisse lectum Niciam, Liumque res sub primam Olympiadem ineuntem transtulisse in alterum annum. Ante Niciam Cycliades praetor fuit anno Achaico 71. Nam Lilius (3) sic ait: *Solemni Nemeorum peracto, paucisque additis diebus Dymas est profectus Philippus: Cycliadas, penes eum summa imperii erat, Achaicque ad Dymas regi occurrerunt.* Paucis post diebus ad Larissum fluuium pugna cum Aetolis, Eleis Romanisque acerrima commissa, (4) Philippus rex fusus est. Fuisse tum magistrum equitum Philopoemenem, Plutarchus testatur. (5) Quod cum vix commemorasset Lilius, tum vero *exitu huius anni, inquit, T. Quinctius Crispinus Cos. ex vulnere moritur.* Quae quidem longe grauissima est offensio. Nam Nemea dixerat, non sane ea, quae acta sunt Olympiadis CXLIII. primo anno exeunte, quod omnes temporis istius rationes penitus conturbaret et in M. Liii C. Claudii consulatum incidere: sed ea Nemea; quae acta sunt superioris Olympi-

(3) L. XXVII. 31. (4) ib. c. 31. 32. (5) p. 360.

Iympiadis tertio anno ineunte, hoc est A.V.C. 544. Ante Cycladen praetor fuit Euryleon, de quo Polybius in excerptis: (6) Ευρυλέων ὁ τῶν Ἀχαιῶν στρατηγὸς ἀτολμος ἦν ἢ πολεμικῆς χρείας ἀλλότριος. Tum vero, inquit, quia tempus est, ut ad res Philopoemenis progrediatur, recte sibi factum videri, si mores et ingenium tanti ducis describeret. Hoc dum persequitur, καλασαθεὶς ὑπὸ τῶν Ἀχαιῶν ἱππάρχης ἐν τοῖς προερημένοις καιροῖς. Videt eum Euryleone praetore, de quo paullo ante dixerat, etiam magistrum equitum fuisse? Non diffiteor tamen, in excerptis Polybianis saepe difficultatem maximam nobis obuersari, cum de tempore quaestio est. Nam cum saepe ab instituto recedat Polybius, tum ubi recefferit haud facile deprehendas. Potest igitur fieri, ut Philopoemenes magister equitum fuerit tantummodo praetore Cycliada. Isthuc tamen ex excerptis Polybianis manifestum est, Euryleonem praetorem fuisse tempore aliquo inter expeditionem Hispanicam P. Sulpicio, Cn. Fulvio Coff. et Nemea, quae Cycliade praetore acta demonstrauimus, nullo sane alio, quam 68. anno Achaico.

III. Iam tertiam praeturam quando gesserit Lilius testatum reliquit. P. Sulpicio Galba, C. Aurelio Coff. (7) Cycliaden praetorem fuisse tradit, cum Philippus rex ad Achaeorum concilium venit: *consultabant, inquit, de bello aduersus Nabin tyrannum Eacedaemoniorum, qui translato imperio a*

Iii 3

Pbi-

(6) P. 1387. (7) Lilius l. XXXI. 25.

Philopoemene ad Cycliaden, nequaquam parem illi ducem, dilapsa cernens Achaeorum auxilia, redintegraverat bellum. Decretum est eo in concilio ut exercitus contra Nabin cogeretur. Simul Cycliadis alteram et Philopoemenis tertiam praeturam deprehendimus. Et Cycliaden artibus Philippi regis praeturam obtinuisse, Philopoemene repulso, e Plutarcho constat. (8) Ante Philopoemenem praetorem fuisse Lyfippum, vide ut cognouerim. Plutarchus, (9) Lyfippum praetorem, Messeniis expugnatis scribit mouere non ausum esse in Spartanos: at Philopoemenem priuatum suis cum ciuibus Messenen hostium potestati eripuisse. Nullam notam temporis apposuit: sed hunc 79 annum Achaicum nobilem illa praetura fuisse sic colligo. Polybius tradit, Machanida sublato, Nabin Spartaee inuasisse tyrannidem et tres annos quieuisse ab externo bello, ciuibus opprimendis vnice occupatum, (10) quod tempus fere incidit hoc anno, cum, Machanidas caesus superioris Olympiadis anno secundo exeunte. Iam Philopoemene praetore, quem ab ipsa necessitate legisse videntur Achaei, et Messene recuperata laeti, quieuit Nabis: Cycliade autem praetore, ut ait Liuius, redintegravit bellum. Haec quia optime cohaerent, mouent me sane, ut hoc, quo dixi, anno potius Lyfippum praetorem recenseam, quam superiori.

IV. Post tertiam praeturam Philopoemenes cernens Philippum regem sibi aduersari, neque

Achaeos

(8) p. 362. (9) p. 363. (10) p. 938.

Achaeos sibi satis aequos esse, animis in Philippum plus quam in libertatem versis, profectus est in Cretam, ut Gortyniis operam in bello nauaret: Philopoemenem anno Achaico 82 profectum esse inuenio. Nam Pausanias scribit, eum expectasse, donec noui magistratus legerentur, ubi sese excludi sensit, excessisse et ut Plutarchus declarat, eo maxime tempore, cum patriae periculum immineret a Nabide. Quare cum Achaei Aristaeum praetorem auxilio misissent, Megalopolitani in Philopoemenem graues sententias tulerunt, tamquam in desertorem patriae, Aristaeus autem etsi ab eo in republica dissidebat, tamen impediuit, ne quid grauius statueretur. Praetor autem Aristaeus (sic eum Polybius, (2) sic Liuius, sic Pausanias, qui Megalopolitanum fuisse tradit, vocant, quorum apud me maior est auctoritas quam Plutarchi Aristaeum vocantis) anno Achaico 82 fuit, ut mox demonstrabo. Erant autem bello Romano flagrante Macedonia, tres factiones in Achaia, una res trahentium ad Philippum regem, principem habebat Cycliaden, altera Romanarum partium Aristaeum, Philopoemenem solam rempublicam et libertatem complectebatur. Philippus rex, ut tamquam mercede delinitis Achaeis magis obnoxiam sibi eorum rempublicam haberet, Cycliade praetore condiciones tulit de bello Spartano suis opibus

(1) Plut. p. 363. Pausan. p. 701, 702. (2) Ille quidem in excerptis Porphyrogeneteis p. 1421. etiam *Ἀρισταίνετον* appellat, hoc vero potius Graeculo Constantini grammatico, quam Polybio tribuerim, Ortus error, quod Aristaeus Diaeus confunderetur cum Aristaeo Megalopolitano.

bus conficiendo. Promissa regis insidiosa erant, caue caussa ab ipso Cycliade sunt reiecta. L. Cornelio Lentulo, P. Villio Cos. hieme, aut potius primo vere in Achaiam legatos misit Philippus, qui, inquit Linius, *iusiurandum (ita enim pepigerant quotannis iuratos in verba Philippi) exigerent: simul qui redderent Achaeis Orchomenon et Heraeam et Triphyliam.* (3) Erat eo tempore adhuc praetor Cycliades, cui initio aestatis successit Aristaenus, qui et Megalopolitanos a Nabide liberauit et Romanam factionem defendens, Cycliadem pepulit. De eare Linius ita habet: (*) *Elatiam obsidenti consuli rei maioris spes affulsit, Achaeorum gentem a societate regia ad Romanam amicitiam auertendi: Cycliadem principem factionis ad Pbilippum trabentium res, expulerant, Aristaenus, qui Romanis gentem iungi volebat, praetor erat.* T. Quinctium Flamininum Cos. dicit. Is magistratum inierat idibus Martiis. Iam licet eo tempore, tanta *προέμπρωσις* anni Romani, quantum Iosephus Scaliger et Dionysius Petauius quoque statuerunt, vt Ianuarius congruerit cum Septembri Iuliano, non fuit, expunxit enim hanc opinionem Ismael Bulialdus in epistola ad Gronouium patrem: tamen vnus mensis aut paullo amplius confusionem fuisse, nemo negare aufit. Reuera igitur initio Februarii Iuliani ipsiusque veris A. Varroniano 556. consulatum iniit T. Quinctius. Venit autem Brundisio cum classe in Epirum maturius, vt ait Patauius ille pater historiarum, quam ante eum soliti fue-

(3) Linius l. XXXII 5. (*) l. XXXII. 19.

fuerant consules. Delectus et prodigia procuranda non ita multos dies eum retinere potuerunt Romae. Soluerit extremo mense Februario Iuliano, et post nauigationem, vt is habet, quadraginta dies moratus, vno collocutus cum rege, tertio post hunc diem in faucibus Epiri summo praelio decertauerit, ante idus Apriles Iulianas, poterat victor discedere. Inde considera Liuium, quas res gesserit consul. Poterat circiter Kal. Maias obsidere Elatiam, eoue tempore cum populo Achaico agere per legatos, cum neque verna tempestas exisset, neque Aristaeus decessisset praetura. Fateor me quam arctissimis gradibus incedere in istius temporis vestigiis, sed ita me ipse Liuius cogit, qui adeo perspicue post ortum Pleiadum A. V. C. 556. Nicostratum fuisse praetorem demonstrat. Nam cum sequenti hieme Cos. ad Maliacum sinum prope Nicaeam Philippo cum rege colloqueretur, erat, vt Liuius refert, cum Philippo Cycliades ille praetorius Achaeorum exul, cum consule *Achaei duo Aristaeus et Xenophon.* (4) At cum ex iis ipsis hibernis consul Argos peteret ad colloquium cum Nabide, eodem, inquit, *Nicostratus Achaeorum praetor cum auxiliaribus paucis venit.* (5) Fuit igitur eo tempore Aristaeus priuatus, Nicostratus autem praetor. Exacto eo anno Achaico, seu vt Liuius, (6) initio veris cum Boeotis egit T. Quintius, vbi etiam Aristaeus praetor Achaeorum auditis suadere Boeotis societatem Romanam. *Initia*

(4) l. XXXII. 32. (5) l. XXXII. 39. (6) l. XXXIII. 1. 2.

tio veris nondum poterat inisse praetoram Aristaenus. At siue in tempore aliquantum aberrauerit Liuius, seu alia qua causa Aristaenus maturius inierit magistratum, cogit tamen nos res ipsa, vt sic praetoras constituamus, vt in fastis constitutas vides. M. Porcio L. Valerio Coss. ab aestate praetorem fuisse Aristaenum, Liuius declarat. (7.) Duxit enim illa aestate T. Quinctius aduersus Nabidem, Aristaenus autem cum Achaeis eadem in expeditione fuit. Poterat hic quoque nobis scrupulum iniicere Liuius, quoniam post hiberna Romana illico et concilium habitum de bello gerendo scribit, et Aristaenum praetorem nominat, tamquam superioris anni reliquam praetoram eo vere. At quod Liuium legenti occurret, tota illa aestate Aristaenus praetor Achaeos duxit. Vnus hac in re scrupulus, quod Liuius tradit, (8.) cum T. Quinctius bello confecto et Nabidi tyranno Spartanisque pace data exercitum reduxit Elatiam in hiberna, Argiuos ludicrum Nemeorum indixisse. Haec Nemea sunt hiberna, anno primo Olymp. exeunte, mensis hiemalis secundi die XII. At idem Liuius testatur, die stata propter belli mala praetermissum ludicrum, in aduentum Romani exercitus ducisque fuisse indictum. Nihil igitur scrupuli restat.

V. Redeo ad Philopoemenem. Hic vero tum maxime e Creta aduenit in patriam, cum T. Quinctius et Achaei Nabidem oppugnarent, illis Coss. illo, quo rem gestam esse demonstrauius anno. Testem habeo Plutarchum. (9) Is quidem etiam
sic

(7) l XXXIV. 24. 25. 26. (8) l XXXIV. 41. (9) p 303.

sic ait: ἐφ' ὧν ἐνθὺς ἀπεθῆς ἀρχῶν. At non ita festinauere Achaei in legendo duce Philopoemene, quod eorum animos profectioe Cretica offendisset. T. Lilius (10) P. Cornelio, M'. Acilio Coss. praetorem Philopoemenem nauali praelio a Nabide victum scribit: is enim Antiochi regis aduentu elatus rebellauerat. Sed superiori aestate haec gesta fuisse et a Lilio duarum aestatum res coniungi, manifestum est. Nam cum M'. Acilium Coss. traiecisse refert, tum vero rebus istis inserit Diophanem praetorem, (1) qui res aduersus Messenios gesserit. Illis Coss. quoque Nabidem tyrannum cecidisse scribit Lilius, (2) tum vero *Philopoemen audita caede tyranni profectus Lacedaemonem, cum omnia turbata metu inuenisset, societati Achaearum Lacedaemonios adiunxit.* Plutarchus quidem refert, cum exercitu eum venisse Spartam et partem vi, partem gratia effecisse, vt Achaici corporis esse vellent ciues, vt eum tunc praetorem fuisse tibi persuadeas: at Pausanias rem tacit planissimam. (3) Commemorata enim Nabidis necesse scribit, Philopoemenem aduolasse Spartam et coegisse Lacedaemonios, vt se attribui concilio Achaico paterentur, non multo post Titum aduenisse (T. Quinctium dicit, qui tum legatione fungebatur, minime vero, vt Pausanias habet, dux Romanorum eo bello fuit) et Diophanem Diaei filium Megalopolitanum, ἀρχεν ἐν τῷ τότε ἡρημένον τῶν Ἀχαιῶν, cui tum praetura mandata erat ab

Kkk 2

Achae-

(10) l. XXXV. c. 25. (1) l. XXXVI. 31. (2) l. XXXV. 35. (3) p. 703. Plut. p. 365.

Achaëis, Lacedaemonem inuasisse. Philopoemen vero, inquit, καὶ περ ἐν τῷ παρόντι ἰδιώτης ὢν, *quamquam priuatus erat eo tempore*, portas urbis claudi iussit. Ob quod meritum cum multa a Lacedaemoniis Philopoemeni tribuerentur, ille pecuniam reiecit suasitque, ut ea potius Timolaum, qui in Achaico conuentu plurimum auctoritate valebat, amicum sibi redderent. Eandem rem attigit Plutarchus.

VI. Rursum praetor Philopoemenes Cn. Manlio, M. Fulvio Coss. Testis Lilius. (4) Graue eius decretum in Spartanos, videri ab iis foedus violatum: Spartani renunciandum societati decreuerunt mittendumque ad Fulvium Cos. Cephalleniam legatos, qui se suaque dederent Romanis. Ea causa ab Achaëis bellum Lacedaemoniis indictum: *ne extemplo gereretur, hiems impedit*, inquit Lilius. Habes notam temporis, ut intelligas, haec accidisse intra concilium autumnale et initium hiemis. Nam paullo ante quae de loco concilii controversia inter Philopoemenem et Damiurgos fuerit, a Lilio relatum est. Cum Fulvius Cos. aduolasset postulassetque, ut de controversia cum Spartanis legatos Romam mitterent, missi Diophanes et Lycortas. Is omnia Senatui permisit, hic ex praecipis Philopoemenis postulabat, ut Achaëis ex foedere et legibus suis, quae decreissent, agere liceret. Responsum a Senatu ita perplexum accepere, ut Achaëi omnia sibi concessa iudicarent. Hac veluti victoria elati Achaëi bellum gerendum decernunt.

Phi-

(4) L. XXXVIII. 31.

Philopoemeni, inquit Liuius, *continuatur magistratus*. Eo in magistratu exules Spartanos reduxit Lacedaemoniosque Lycurgi disciplina repudiata, Achaeorum instituta sequi iussit, muros ut diruerent, alia multa immitia mandauit.

VII. Reliqua est septima Philopoemenis praetura, quam vide ut indagauerim. Lycortas praetor fuit P. Claudio, L. Porcio Coss. ita ut successorem habuerit Philopoemenem octauum praetorem. Nam his Coss. tradit Liuius (5) legatos, quorum princeps Appius Claudius fuit, missos et ad Philippum et ad Achaeos venisse, Lycortam autem praetorem iis Clitore in Achaia dedisse concilium. Polybii excerpta (6) Olympiade CXLVIII. datum fuisse testantur, seu ipso initio praeturae. Missi sunt legati postquam initio illius anni, puta sub verem, Q. Caecilius ceterique legationem renunciarant Consulibus Senatuique Romano. Ergo huic Q. Caecilio superiori anno Megalopoli dederat concilium populi Achaici Aristaenus praetor, (7) cum a Philippo rege veniens Caecilius pro Lacedaemoniis disceptaret. Eo in concilio Diophanes cum Aristaeno sentiebat, cum Philopoemene Lycortas et Archon. Aristaenus vir, quantum Philopoemenes in armis, tantum ipse ciuili disciplina et eloquentia potens: Romanorum vero, cum res Achaiae patiebatur, studiosissimus. (8) Spectata fuit eius prudentia illo in concilio, in quo tum Caecilium, tum ceteros legatos audiuit. Erant legati alii, qui a

Kkk 3

Pro-

(5) l. XXXIX. 33. (6) p. 1188. (7) Polybius p. 1179. (8) l. p. 1439

Ptolemaeo rege, alii qui Roma a Senatu redierant. Utrosque miserat Philopoemenes praetor. Ergo anno vno ante Aristaenum praetor septimum fuit Philopoemenes. Miserat autem Philopoemenes legatos Romam, postquam M. Lepidus Cos. ostenderrat, Senatui displicere, quae in Lacedaemonios statuta fuissent, (9) ut ex eo intelligas, quo anno praeturam gesserit Philopoemenes, qua in praetura belli Boeotici causas quaesivit, paene ut in vim erumperet. (10) Hunc in modum praeturas octo Philopoemenis ordinatas digestasque habemus.

VIII. Diodorus Siculus in excerptis Valestianis, (1) de Philopoemene sic scribit: πολλὰκις μὲν στρατηγίας ἠξιώθη, τεσσαράκοντα ἔτη τῷ πολέμῳ ἠγύμενος. Hi quadraginta anni procedunt a decima tertia praetura Arati. Tunc quoque Plutarchus (2) eum annos natum triginta in praelio aduersus Cleomenem cum equitatu Achaico mirifice se extulisse scribit. Praelium ipsum a Polybio descriptum habemus. (3) Plane haec concordant. At ab eo tempore si dicas rempublicam tractasse Philopoemenem, nihil hoc ad praeturas, aut alium magistratum quem gesserit. Nam ab ipso praelio profectus est in Cretam, nec rediit nisi Euryleone praetore, cum illico magistrum equitum eum legerant Achaei. Testis Plutarchus.

Caput

(9) Polybius p. 1173. (10) ib. p. 1174. (1) p. 298. (2) p. 35.
(3) p. 202. seq.

Caput Quartum

*De praetoribus post Philopoemenem usque
ad euersam rempublicam.*

Lycortam dixi Philopoemeni successum necem eius esse ultum, tum continuatam ei praeturam videri. Quantum in eo fuit, rempublicam confirmavit in futurum. (4) Anno Achaico 108. eundem fuisse praetorem Lycortam e Polybio, is Lycortae fuit filius, cognoui. Scribit enim in excerptis, (5) Ptolemaeum Epiphanem legatum misisse ad Achaeos cum amplissimis muneribus, ut societatem cum Achaeis iniret firmissimam: Achaeos cupide recepisse et post concilium ipsos quoque destinasse legatos tum alios, tum Lycortam: hunc autem ea causa διὰ τὰ κατὰ τὸν καιρὸν καθ' ὃν ἐποιεῖτο τὴν ἀνανέωσιν τῆς συμμαχίας ὁ Πτολεμαῖος, ἐπαληγῆναι τότε συνεργῆσαι αὐτῷ, quod cum foedus societatemque reparavit Ptolemaeus, ipse praetor fuit et enixe rem iuuit. Igitur extremo tempore praeturae in concilio, in quo successor Lycortae datus est, de societate, inde etiam de Lycorta legato mittendo conuenit. Sed Lycortas fines non excessit, διὰ τὸ μεταλλάξαι Πτολεμαῖον περὶ τῆς καὶ ῥῆς τῆς. Decessit Epiphanes Olympiadis CL. anno secundo inito A. V. C. 575. Fuit igitur Lycortas praetor anno superiori. Secundum Lycortam praetorem fuisse Hyperbatum Polybius testatum reliquit. (6) Is ex eorum factione fuit, qui

R. O.

(4) Polybius p. 177. (5) p. 1215. (6) p. 1216.

Romanis fauebant, auctor mittendi Romam legatum Callicratem, omnium Achaeorum gratissimum. Callicrates ut rediit, quia nondum percrebuerat vulgo, quam perniciofa adulatione Senatum Romanum armauisset in Graecos, praetor creatus est in sequentem annum, ut excerpta Polybiana proditum memoriae reliquerunt. Quod postquam de Lycorta praetore proditum est in Polybii excerptis, mox excerpta sequuntur de Hyperbato praetore, ea cum praefatione, ὅτι κατὰ τὸν καιρὸν τῆτον ἀναδόνητος Ὑπερβότου τῆ στρατηγῆ διαβύλιον, id nondum nos ita certos de tempore relinquit. At postquam etiam de Callicratis praetura narratum est, tum vero in excerptis, C. Claudii, T. Sempronii Coss. expeditiones recensentur, ut adpareat, nos veris annis praeturas adsignasse.

II. Eo tempore, cum iam moueret in Graeciam bellum Perseus rex, Xenarchus praetor erat, haud obscure iam antea non satis aequus Romanis, (7) nunc vero regem et res novas non videbatur aspernari. Incidit vero, ut e Liuiio (8) intelligimus, praetura Xenarchi in aestatem, qua P. Scaeuola, M. Aemilius Lepidus Coss. fuerunt. Eodem teste Liuiio, (9) Xenarchi frater fuit Archon eiusdem in republica sectae homo, Aegirates, si is ipse est Archon, quem Polybius tradit, (10) postea legationem in Aegypto obiisse. Hic praeturam gessit eo tempore, quo Q. Marcius Philippus legatus Graccas ciuitates obiit, cum Perseo collocutus est de induciis, Boeotorum commune dissoluit et Argis in concilio ab Achaeis impetrauit,

(7) Polybius p. 1198. (8) l. XLI. 23. (9) l. c. cap. 24. (10) p. 1228.

uit, vt Chalciden praesidio suo tutarentur. Legatione ea Q. Marcius defunctus est κατὰ χειμῶνα, vt ait Polybius, (1) quod Liuius explicat, (2) *principio hiemis*. Et hic quidem legationem recenset P. Licinio, C. Cassio Coss. sed apparet plane, ante eos Coss. superiori aestate Q. Marcium fuisse in Graecia. Nam renunciata legatione principio veris P. Licinius Cos. in Graeciam cum exercitu profectus est.

III. Iterum praetor fuit Archon A. Achaico 112. Nam Polybius tradit, (3) A. Hostilium Procos. ex hibernis in Thessalia legatos misisse circum ciuitates, qui etiam ad Achaeos peruenerint. Datum iis est concilium Aegii. Ab eo profecti in Aetoliam et Acarnaniam. Dum hic commemorantur, Achaei inter se consultant, quid facto opus sit. Decretum est, vt illico praeturam adiret Archon, attollentibus animos Achaeis, quod Hostilius superiori aestate rem male gesserat. Ea causa Romae quoque maturata sunt comitia creandis consulibus. Creati sunt Q. Marcius Philippus II. Q. Seruilius Caepio (4) ante diem V. Kal. Februarias, vt Pighius Liuium restituit. Archoni praetori, qui vt casum a republica auerteret, Romanis auxilia mittenda esse suaserat, datus est magister equitum Polybius, (5) is cuius historias tanti facimus. Archonem praeturam magnis impensis sibi comparasse, Polybius quoque tradit.

IV. Magnae tum in Achaico populo erant auctoritatis, Arcesilaus, Ariston Megalopolitanus, Stratius Tritaeensis, Xenon Patarensis, Apolloni-
Pom. V. LII des

(1) p. 1228. (2) l. XLII. 44. (3) Polybius p. 1241. (4) Liuius XLIII. 11. (5) Polybius p. 1244.

des Sicyonius eiusdem cum Archone sententiae et Straton alterius factionis pro Perseo, Lycortas neutrarum partium. Erant praeterea etiam Diophanes, Hyperbaton, Callicrates, Theodorides Sicyonius, Andronidas, Ageſias, Aristodamus, Philippus, Lyciscus, Eureas, Charopus, Telecles Megalopolitanus, Anaxidamus, alii. Et quanta multitudo fortium et nobilium virorum fuerit, ex ipsa reipublicae ruina est cognitum, de qua equidem dicam paucis verbis, quia de historia rerum Achaicarum scribere non institui. Callicrates, quem anno Achaico. 103 praetorem fuisse ostendi, anno ante legatus cum esset Romae, cauillando *criminandoque* vulnera patriae retexit. Hic primum cognouere Romanis, posse fieri, vt oppressa libertate Achaica ipsi soli omnia pro arbitrio agerent. In bello cum Perseo Achaicis auxiliis non admodum sunt vsi Romani, quod infidam societatem fore crederent, cum nonnulli e criminatione Callicratis suspecti essent. Confecto autem bello Macedonico, iam quasi per otium dissoluendi corporis Achaici consilia agitabant. Perseo deuicto ex Achaia legati Callicrates, Aristodamus, Ageſias, Philippus, in Macedoniam venire gratulatum de victoria. Inde Q. Aelio, M. Iunio Coss. e decem legatis Romanis, qui ad ordinandas res Macedoniae venerant, C. Claudius, Cn. Domitius profecti sunt in Achaiam. (6). Ibi vero criminose accusati in concilio Achaei, tamquam Macedonicis rebus magis quam Romanis aequi, nominatque vno verbo.

(6) Polyb. p. 1284. Liuius l. XLV. 31.

verbo omnes, qui bello cum Perse rege praetores fuissent. Xenon autem magnae vir auctoritatis in concilio surrexit fiduciaque innocentiae, quoniam et ipse praetor fuerat, se vero ostendit adeo nihil in Romanos deliquisse, ut vel Senatum Romanum iudicem non reformidet. Hoc dictum arripuit legatus Romanus, iussique Romam venire ad causam dicendam Achaei mille et amplius. (7) Ἐσπαρίγγορα μὲν Ἀχαιῶν ἔργῳ, inquiebat Xenon apud Pausaniam, cui autem anno eum ego praetorem adscribam? Quoniam C. Popilio, P. Aelio Coss. bellum indictum est Perseo, aut ante priorem Archonis praeturam, cum glisceret bellum, aut ante secundam Archonis praeturam, cum et gestum est et confectum. Quo me vertam nescio. Post septimum et decimum annum trecenti et paullo etiam minus, qui soli ex omni illo numero supererant, dimissi sunt e carceribus, cum satis poenarum luisse viderentur. (8) Dimissi sunt igitur L. Marcio, L. Calpurnio Coss. Inde controuersiae cum Lacedaemoniis. Missus est Sulpicius Gallus, qui Lacedaemonios Argiuosque discipantes conciliaret: is causam reiecit ad Callicraten, ipse ex auctoritate Senatus quam potuit plurimas ciuitates ab Achaico concilio auellere instituit. Fuit igitur tum praetor Callicrates. Modo item constaret, quo anno C. Sulpicius Gallus consularis legatus fuerit in Graecia. Constat autem ex excerptis Polybianis (9) et Diodori Siculi (10) et ex Polybii excerptis Peirescianis, (1) eum A. V. C. 598 apud Sardes legatum de Eumene rege iudicium quam acerri-

LII 2

me

(7) Pausanias f. 548. 549. (8) Pausanias f. 549. seq. (9) p. 1298. 1299 (10) legat. 21. (1) p. 144.

me exercuisse. Videtur igitur superiori anno fuisse in Achaia. Nam Polybius Peirescianus sic de eo: C. Gallus χωρίς τῶν ἀρτιζήθεντων ἀλογημάτων παραγενόμενος εἰς τὴν Ἀσίαν. Nulla sane alia imprudenter facta, quam quae in Achaia perpetravit. Fuit igitur Callicrates praetor anno Achaico 115. veluti in mercedem prodicionis magistratus ei delatus sit ab Achaeis Romano fulmine attonitis. Tandem Athenienses Oropios adflixerunt: Oropii Achaeos Menalcida praetore aſciuerunt, e quo fonte extrema calamitas manavit. Habeo auctorem Pausaniam et ita habeo, vt extremae praeturæ ex eo referri possint.

V. Menalcidas Spartanus, Diaeus, Damocritus, Diaeus iterum, Critolaus, Diaeus tertium, praetores successerunt, teste Pausania. Horum praeturae ordinandae sunt. Incipiam a Critolao. Ad hunc praetorem legati venere Romani, qui concilium gentis sibi vt daretur, postularunt. Critolaus eos reiecit ad sextum mensem et statum gentis concilium sub auctumno. (2) Venerunt igitur legati sub ipsis auspiciis praeturae. Inde Critolaus conventum Achaeorum Corinthi indixit, vbi bellum esse gerendum cum Romanis decretum est. Q. Caecilius Metellus, pro praetore is Macedoniam tenebat, accepto nuncio, L. Mummius Cos. bellum mandatum Achaicum, maturandum duxit, vt belli Achaici confecti gloriam praeciperet. Primum per nuncios Achaeis edixit, vt quosdam alios populos, qui se a

con-

(2) Pausanias p. 557.

concilio Achaico seiunxerant, sui iuris esse paterentur, sic commissorum veniam consecuturos et aequas pacis condiciones. (3) Interea Metellus copias deducit e Macedonia, Critolaus vero pacis mentione repudiata Heracleam obsidet. Aduentante iam ex Macedonia Metello, Scarphean recedit. Ipso in itinere Metellus hostes affecutus cecidit. Critolaus nusquam neque inter viuos, neque inter mortuos repertus est. Liuius (4) veneno sibi mortem consciuisse prodidit. At Pausanias in palude ad Oentan montem forte demersum putat et incertus animi, multa alia in eum modum se suspicari posse ostendit, vt, quod verissimum sit, non adpareat. Hanc cladem alii ad Heracleam; alii ad Scarphean, Liuius ad Thermopylas acceptam ferunt. Scilicet inter Heracleam et Scarphean Thermopylae interiectae sunt, quas iam traiecerat, teste Pausania, Critolaus, cum eum Romani consecuti essent, vt clades illa ab tribus locis commode insigniri queat. Refellendus mihi quoque vno verbo est Flori error, (5) qui sic fatus est: *Critolai manum Metellus Cos. per patentes Elidis campos toto cecidit Alphaeo et vno praelio peractum erat bellum.* Nihil vsquam sani. Neque enim in Elide, sed longe extra Peloponnesum prope Macedoniam pugnatum est: neque vno certamine confectum bellum: neque Q. Caecilius Cos. fuit, sed propraetore Macedoniam ordinauit. Fuit enim praetor Macedoniae A. V. C. 605 vicitque Andrium Pseudophilippum. Iulius Obsequens in prodigiis,

LII 3

giis,

(3) P. uf. p. 558. (4) epit. 52. (5) l. II. c. 16.

giis, Sp. Postumio, L. Pifone Coss. Olympionicon synagoge ad primum annum Olympiadis CLVIII. Praetorem rem gessisse, Velleius Paternulus, immo alii omnes produnt. Eodem tempore, dum in Macedonia Metellus praetor bello persequitur Andricum, Damocritus praetor Achaeorum novus Spartanos petiit, ut Pausanias refert. (6) Iam cum Damocritus A. Achaico 133 praetor fuit, Diaeus autem anno post rebus Achaicis praefuit, ut e Pausania constat, tum vero Diaeum excepit Critolaus, vides Critolaum A. Achaico 135 lectum praetorem, eadem aestate fufum ad Thermopylas esse. Diaeo praetore, A. Achaico 132 legatis Romanis Corinthi datum concilium, in quo cum essent propemodum violati, ignominiose, utriusque habiti, causam excidio urbis praebuere. (7) Nam etiam hic in Floro error refellendus: *Critolaus causa belli, qui legatos Romanos, dubium an manu certe oratione violavit.* Diaeum dicere oportuit: Critolaus legatis Romanis in concilio nullum responsum dedit, iussis redire post sextum mensem: neque tamen vel verbo vel re molestus fuit. Iam et Menalcidae praeturam et *Diaei* primam vides recte collocatam. Mutuo enim sese omnes illae praeturae, quas produximus e Pausania, exceperunt. Postquam Critolaus cecidit, Diaeus, *Achaici motus primus auctor*, ut vere Livius, ei successus, copias collegit et *ad Isthmum a L. Mummius Coss. victus est*, ut habet epitoma Livii. Nam Metellus per Thebanum agrum, Megaram, inde ad Isthmum duxit. Dum se ad praelium accingit, Mummius Coss.

in

(6) p. 554. (7) Paus. p. 556.

in castra venit. Sic Pausanias. (8) Florus: *et vno praelio peractum erat bellum: iam et urbem terrèbat obsidio, sed cum Metellus dimicasset, ad victoriam Mummius venit.* Et S. Aurelius Victor: (9) *L. Mummius aduersus Corinthios missus, victoriam alieno labore quaesitam interceptit: nam cum illos Metellus Macedonicus apud Heracleam sudisset et duce Critoluo priuasset, cum lictoribus et paucis equitibus in Metelli castra properauit et Corinthios ad Leucopetram vicit duce Diaeo.* Fuit sane in his rebus dissensio scriptorum classicorum, ne quid ab his, qui infra classem sunt, confictum putes. Nam in historia miscella, (10) Metellus praetor dicitur Achaeos Boeotosque socios duobus praeliis sudisse, vno ad Thermopylas, iterum in Phocide, illic viginti millia, hic septem caesa. Claudium puta Quadrigarium ea referre. Valerius Antias, inquit, *in Achaia pugnatum et viginti millia Achaeorum cum duce suo Dieuco cecidisse confirmat: at vero Polybius Achius, quamuis in Africa cum Scipione fuerit, tamen quia domestica cladem ignorare non potuit, semel in Achaia pugnatum cum Critolao duce adserit: Dieucum vero adducentem ex Arcadia milites ab eodem Metello oppressum cum exercitu docet: igitur post extincta totius Achaiae praesidia euerfionem urbium Metello praetore meditante, Consul Mummius repentinus venit in castra.* Dieucus scribarum vitio est Diaeus praetor. Ceterum facile vides, Liuii hoc esse fragmentum corruptis deprauatisque verbis, vt multa sunt alia in historia miscella et Paulo Diacono. Controuersum reliquit Liuius, Metellusne an Mummius praelio vicerit Diaeum. Pausanias autem (11) Mummius tradit pepulisse Diaeum, Diaeum fugisse Megalopolin et occisa

(8) p. 560. (9) in. vitia illustribus c. 60. (10) p. 25. ed. Murat. (11) p. 560.

occisa vxore, venenum hausisse: Mummium die post pugnam ad Corinthum adfuisse, portisque apertis in summa perturbatione, non ausum ingredi, quod insidias metueret: tertio die vi cepisse et incendisse urbem. Plinius: (2) *capta est Olympiadis CLVI. anno tertio, nostrae urbis LCCVII*. Hic annus urbis conditae nos admonet, Olympiadem CLVIII. scriptam fuisse a Plinio. Olympionica Scaligeri ad Olymp. CLVIII. 3. *κατὰ τὸν αὐτὸν καιρὸν, ὡς τισι δοκεῖ, Κόρινθος κατὰ Μύμμιος καλεσκάφη*, et anno quarto, triumphum L. Mummii de Achaeis et Corinthiis ponunt. Sic Velleius Paterculus (3) eodem anno et Carthaginem et Corinthum excisam scribit *Cn. Lentulo, L. Mummio Coss. Ad Olymp. CLX. cum stadio vicit Diodorus Sicyonius, annum primum, Antitheo archonte, eadem Olympionicon synagoge κατὰ τινος Μύμμιος τὴν Κόρινθον καθεῖλεν*. Id quale sit, Pausanias declarat, (4) cum eodem anno, eodem archonte, ne stadionica quidem alio adscripsit: *ὁ δὲ πόλεμος ἔχεν ἔτιως τέλος*. Igitur e Pausania hoc inferuit Scaliger. Nam excisa Corintho, clades belli etiam alias vrbes absumsit et forte Olymp. CLXI. primus praetor Romanus missus est in Achaiam. L. Mummus Cos. *quidem omnem e ciuitatibus popularem statum sustulit, remque publicam tradidit optimatibus, concilia quoque singularum urbium dissoluit: non multis tamen annis post, Romani sui cuique genti concilia restituerunt*. Haec cum commemorauit Pausanias, *ἡγεμῶν δὲ ἐτι, inquit, ἢ ἐς ἐμὲ ἀπεσέλλετο*. Praetorem dicit Achaeiae, cui etiam Graecia parebat, quae quondam Achaeos habuerat principes.

OB.

(2) l. XXXIV. c. 2 (3) l. l. c. 12. 13. (4) p. 563.

OBSERVATIONES
ASTRONOMICÆ
ET
PHYSICÆ
IN RVSSIA
INSTITVTAE.

Tom. V.

Mmm

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

THE EAST ASIAN LIBRARY

1100 EAST 58TH STREET
CHICAGO, ILLINOIS 60637
TEL: 773-936-3200
FAX: 773-936-3201

**ECLIPSIVM IOVIS SATELLITVM
IN OBSERVATORIO PETROPOLITANO OB-
SERVATARVM CONTINVATIO,
PER**

Josepbum Nicolaum De L' Isle.

Aani	Scilo novo.	Tempore vero:	
		H.	' "
1735	Maii 21	13 52	37 I mmersio 1. satellitis tu- bo Catadioptrico ma- iori obseruata. Obserua- tio non admodum certa, ob nimium crepusculum, cœlumque aebulosum & caliginosum.
	Aug. 16	9 19	32 Emersio 1. tubo Cata- dioptrico maiori visa, cœlo admodum sereno et tranquillo.
	Oct. 10	6 31	50 Emersio 1. tubo Cata- dioptrico maiori obserua- ta. Cœlum equidem erat serenum & tranquillum; Iupiter autem non admo- dum eleuatus.
1736	Iunii 1	13 30	21 Immersionis primi Sa- tellitæ tubo Newtoniano obseruatæ tempus, si quartam minuti primi par- M m m 2 t m

Anni	Stilo nouo.	Tempore vero. H. / M.	
1736			tem exceperis, fatis cer- cum; Iupiter enim valde depressus, crepusculumque sat magnum erat.
	Iunii 21	12 50. 0.	Immersio 4. tubo New- toniano. Iouis altitudo admodum demissa, cre- pusculique magnitudo ob- seruationem ad minuti primi intervalum, red- dunt incertam.
	Iulii 10	14 10 39	Immersio 2. tubo Ca- tadioptrico. Hæc obser- uatio dubia, ob nebulam.
		17 13 40 43	Immersio 1. tubo 15. pedum Campaniano, cæ- lo claro atque sereno.
		40. 53.	Tube Newtoniano.
	Aug. 2	11 56 42	Immersio primi Satellit- tis hoc momento obser- uata: potius eiusdem oc- cultatio à Iouis disco ap- pellanda erat; quoniam unam ab altera, ob vici- nitatem satellitis & Iouis distinguere haud licuit. Cælum erat serenum, et Iupiter, meridiano squi- dem proximus, in sum- ma ferè altitudine. Tur- bum

ECLIPSIUM IOVIS SATELLITUM 453

Anni	Stilo nouo.	Tempore vero H.	Observationes
1736.			bum Newtonianum in ob- servatione adhibui, per quem satellitem infra plu- rima minuta disco Iouis, antequam penitus immer- geretur, adhærentem ma- gis magisque semet-oc- cultantem obseruavi.
	Aug. 22	8 50 58	Emersio 2. tubo Cata- dioptrico. Observatio cer- ta cælo sereno.
	29	11 31 12	Ioue à nube, quæ eum per 24. minutorum pri- morum spatium occulta- uerat emerso, secundus satelles iam, sed omni- suæ claritati nec dum re- stitutus, conspiciebatur; tubo Newtoniano.
	Sept. 13	7 51 37	Immersio 4. Satelles hic iam à pluribus minu- tis sensim imminutus ap- parebat; quod autem ita lentè fiebat, vt momen- tum verum immersionis ad aliquot minuta secun- da incertum sit. Præ- terea occultationi pro- ximus satelles iterum pau- lo maiori lumine fulgere,
			Mmm 33 ac

Anti 1736.	Scilo nove	Tempore vero. H. / "	ac deinde illud iterum amittere visus fuit.
	Sept. 23	9 5 30	Hoc ipso momento, quo Iupiter, quem nubes per horæ dimidium visui eripuerant, apparebat, secundus satelles è Iouis umbra iam emer- sus conspiciebatur tubo Newtoniano, multò mi- nori tamen luce quam cæteri satellites. Obser- uationem hanc <i>ventus</i> vehemens reddidit diffi- cillimam.
	Oct. 5	7 45 23	Emersio 1. tubo Cata- dioptrico, satis accurata, coelo claro atque sereno & Iove Meridiano pro- ximo.
1737	Iulii 4	13 39 55	Immersio secundi, tu- bo Newtoniano. Cre- pusculum iam ingruerat satis forte.
	9	12 51 1	Immersio tertii, tubo Catadioptrico, cœlo se- reno.
	22	11 39 42	Immersio primi, tubo Campaniano 15. pedum.
		39 53	- - - tubo Catadioptrico. Cœlum sudum.

ECLIPSIUM IOVIS SATELLITUM. 455

Aug. 7	9	56	44	Immersio primi, tubo Newtoniano. Cœlum per interualla nubibus obtegebatur.
21	12	57	17	Immersio tertii, circiter æstimata, namque 15. min. secundis ante hoc tempus Iupiter & Satellites à nubibus abscondebantur, cum tertius immersioni proximus, iam valdè diminutus appareret, tubo reflectente.
28	15	43	26	Immersio primi, tubo Newtoniano, intra aliquot minuta secunda difficulter æstimata, ob nimiam Satellitis & Plahetae vicinitatem. Lux etiam crepusculi aliquantum obstabat.
30	10	12	18	Immersio primi, tubo Campaniano 15. ped.
	12	22	-	- tubo altero 13. ped.
	12	38	-	- tubo Catadioptrico.
				Cœlum erat apprimè serenum & quietum: ita tamen primus Satelles vicinus erat disco Iouis, ut

Anni	Sulo nouo	Tempore vero H.	vs dubitandis locus rema- neret de ultimo immer- sionis momento, intra pauca minuta secunda.
1737.			
	Aug. 30	10 44 18	Immersio secundi, tu- bo reflectente.
	Sept. 19	8 20 30	Emersio tertii; tubo Newtonianus adhibeba- tur, caelo satis sereno.
	26	12 22 4	Emersio tertii, tubo Catadioptrico.
		22 21	- - - tubo 22. pedum, caelo serenissimo.
	29	14 42 43	Emersio primi, tubo Newtoniano.
		42 41	- - - tubo 22. pedum.
	Oct. 8	11 8 7	Emersio primi, tubo reflectente.
	17	7 33 45	Emersio primi, tubo Catadioptrico.
		33 59	- - - tubo 22. pedum: caelo defaecato.
	19	8 14 12	Emersio secundi, tu- bo 22. ped. caelo sereno
	Nov. 6	8 50 12	Immersio quarti, tu- bo Newtoniano, caelo satis sereno: intra ta- men aliquot minuta se- cunda non poterat certo diffiniri, ob nimiam mo- tus

ECLIPSIVM IOVIS SATELLITVM. 457

Anni 1737.	Die nouo.	Tempore vero H. / //	tus huius Satellitis tar- ditatem, et diametrum eius multo minus quam in aliis satellitibus con- spicuum.
	Nou. 9	7 50 21	Emersio primi, iudi- cata; namque 20. tantum minutis sec. tardius hic satelles apparere incepit, tubo Catadioptrico, cum iam erat semiliberatus ab umbra, ita obstante nebula.
	13	5 27 37	Emersio secundi, tu- bo Newtoniano, defoe- cato coelo.
	16	9 44 14	Emersio primi, tubo reflectente; coelo appri- mè sereno.
		44 26	- - - tubo Campania- no 15 pedum.
		44 28	- - - tubo 23 pedum.
	25	6 7 35	Emersio primi, tubo Catadioptrico, quae ta- men citius accidere po- tuit per integrum qua- drantem vnius minuti primi; cum trans nebu- lam tota haec obseruatio institui potuerit.

N n n

OB-

**OBSERVATIO DEFECTVS
LVNAE HABITA PATAVII AB I. POLENO,
TVBO OPTICO LONGO PEDES. PARIISIENSES,
SEPTEM, Kal. APRIL. MDCCXXXVI.**

H.	/	//	
10	56	30	P Enumbra occupat marginem Lunae.
11	0	0	Initium umbrae ad Lunae limbum.
11	2	48	Umbra tegit Grimaldum.
11	7	12	Attingit Aristarchum.
11	8	22	- - Keplerum.
11	17	50	- - ad medium Copernicum.
11	27	54	- - Archimedes.
11	29	6	Occupat Tychonem.
11	42	30	Medium tenet mare Nectaris.
11	47	58	Attingit Mare Crisium.
11	53	12	Tegit totum Mare Crisium.
11	58	0	Totalis immersio.
13	32	40	Lux aliqua tenuis in Lunae margine.
13	34	6	Vera emerſio circa id tempus.
13	39	18	Grimaldus totus emergit.
13	40	17	Extra umbram Galilaeus.
13	44	16	Aristarchus.
13	48	15	Keplerus.
13	50	21	Medium Maris humorum. (forſan. tantilld. plus.)
13	55	26	Copernicus.
14	3	14	Tycho.
14	10	37	Menelaus.
14	13	8	Totum Mare ſerenitatis.
14	13	37	Medium Dionyſii.
14	26	20	Medium Mare Crisium.
14	29	19	Totum Mare Crisium.
14	33	34	Viſus eſſe umbrae finis. verus.
14	35	0	Iam finiit emerſio ab omni etiam penumbra.

F I N I S.

