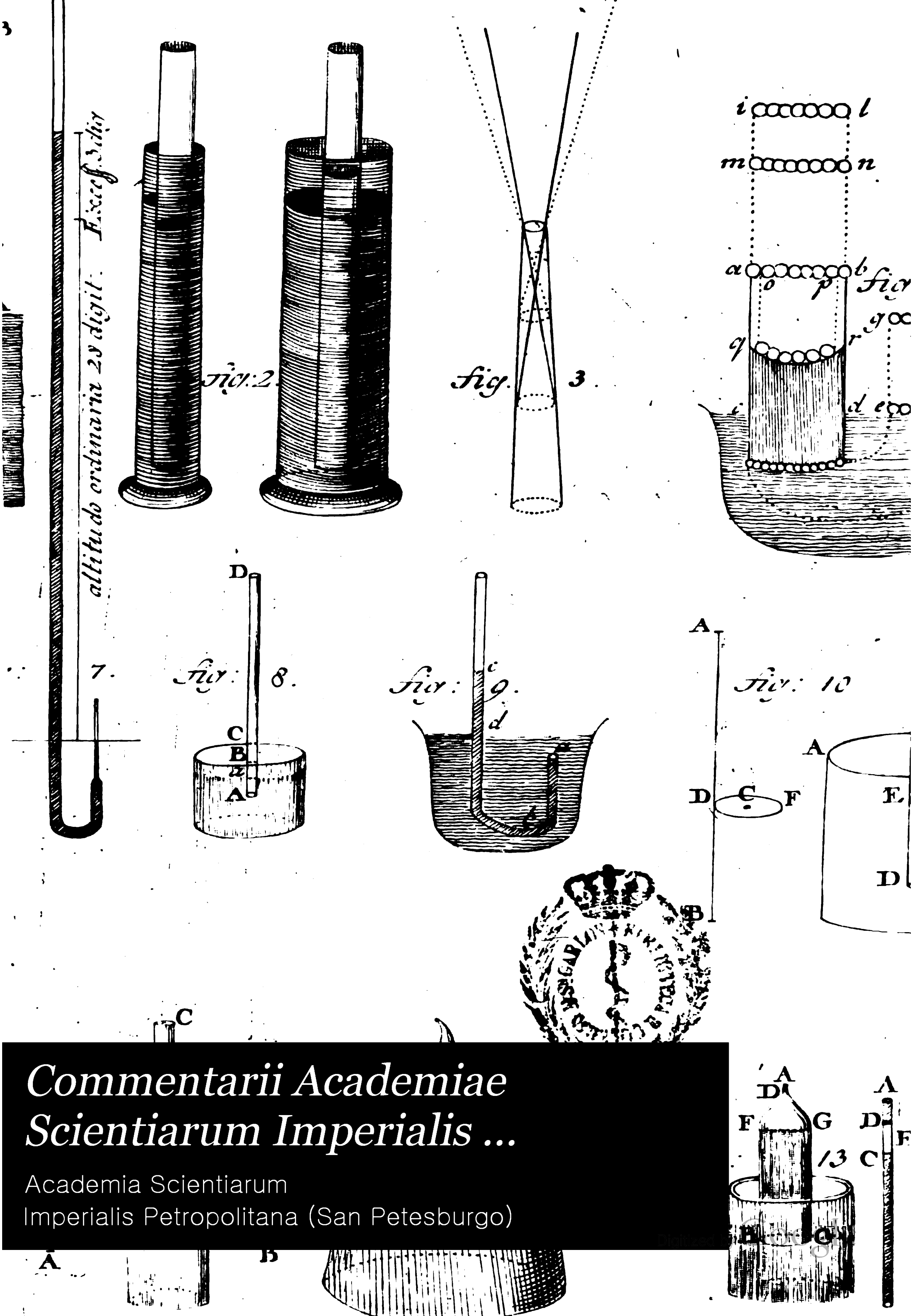


Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis ...

Academia Scientiarum
Imperialis Petropolitana (San Petesburgo)

COMMENTARII
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOMVS II.

AD ANNVM cIↄ Iↄcc xxvii.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE
cIↄ Iↄcc xxix.

INDEX COMMENTARIORVM.

IN CLASSE MATHEMATICA.

Io.

IN CLASSE PHYSICA.

IN CLASSE HISTORICA.

* * *

CLAS-

CLASSIS

PRIMA

continens

MATHEMATICA.

ANNAE

RVSSORVM

IMPERATRICI

DVm ad TE, DOMINA, ex omnibus provinciis huius imperii, quo nullum maius orbis terrarum habet

bet, laeti ac gratulabundi cives accurrunt, TEque a Deo datam, quae tot regnorum gubernacula capesseres, venerantur, tantum abest ut Academia Divorum *Petri Magni*, *Catharinae* et *Petri II.* auspiciis fundata atque conservata in silentio se contineat, ut potius acceptorum ab illis beneficiorum memor, Tuarumque virtutum non ignara, in communi hilaritate praecipue ad se pertinere existimet, quidquid ab incredibili Tua prudentia in rebus gerendis, pietate, clementia denique et amore in patriam universa Russia sibi pollicetur.

Hac fiducia volumen alterum commentariorum, quod sub initium imperii Tui edunt Academici, Numini Maiestatique Tuae me interprete

dedi-

dedicandum putarunt, quos quidem a proposito non absterruit opusculorum tenuitas atque exilitas, quando fructus non in alieno solo natos nec sine cura demessos, sed quales officii ac muneris ratio postulabat, TIBI offerre non indecorum visum est.

Interea spem omnem in Tua benevolentia ponimus. Reverte Deo propitio in urbem patriam et inter acclamationes tot nationum, quarum votis atque precibus expetita es, solium Avorum Tuorum PIA, FELIX, AVGVSTA conscende.

Moscuae Nonis Febr.
A. cIↄ Iↄcc xxx.

Academicorum nomine

Christianus Goldbach.

De Constructione

AEQVATIONIS DIFFERENTIALIS primi gradus *A*, in qua *a*, *b*, *c*, *e*, *f*, *g*, sunt coefficientes cum suis signis + vel —, vt libet dati.

$$A \;\text{----}\; adx + bdy + cxdx + fxdy + eydx + gydy = 0.$$

Autore I. Hermanno.

CVm olim in *Phoronomia* Lib. II. Cap. 19. de resistentia medii fusius agerem, subdidi in Scholio ad Propositionem 72, nondum constare qua ratione curva resistentiarum construi debeat, ne quidem concessis quadraturis, cum resistentiae sunt vt celeritates *1. Febr. 1727.*

mobilis; coniectabam tamen curuam ex hypothesi ista nascentem fore transcendentem. Dedit hoc occasionem Viris doctissimis, *Nicolao Bernoulli* et *Comiti Riccato* penitius in hanc rem inquirendi cum successu, nam vterque eorum reperit curuam quaesitam algebraicam esse posse. Ego quoque statim post editam *Phoronomiam*, aequationem supra positam A construendam mihi sumsi, quae curuam resistentiarum medii, de qua nunc sermo est, tanquam casum particularem intra ambitum suum complectitur, et cum ineunte anno 1716. Ill. *Monmortium* hac de re certiorem fecissem, litteris die 27. Ian. 1716. ad me datis, sequentia rescripsit: *Il est vrai Monsieur, que je suis tres surpris d'apprendre de vous, que cette Equation* $adx + bdy + cxdx + eydx + fxdy + gydy = o$, *est integrable, les lettres* a, b, c, *etc. exprimant des nombres quelconques, affectés de signes aussi quelconques.*

Cum vero edendae Phoronomiae incumberem et tantum non omnia per Geometriam linearem absque calculo in ea tradere conatus sim, constructio autem lineae resistentiarum in dicta hypothesi per hanc viam pure geometricam non occurreret, ideo tunc scripsi non constare constructionem illius lineae; quaestionem enim per calculum, tunc ne quidem tentaueram.

Nunc vero Analysin aequationis A, tanto libentius Academiae iudicio demum expono, quanto frequentior esse potest usus eius in resolutione multorum problematum Matheseos mixtae. Adducam primum eam analysin in quam olim incidi, cum primum aequationem illam construendam mihi proposui.

Mon-

Monſtrabo deinceps, quomodo per methodum praeterita aeſtate exhibitam eadem aequatio tractari debeat ; ac denique tertium addam modum quo aequatio reſolui poteſt, in difficilioribus quoque egregio vſui futurum.

1. Fiant $x=p+h$, et $y=q+i$, ubi p et q ſunt variabiles, h et i vero quantitates conſtantes, ſurrogandoque in aequatione A --- $adx+bdy+cxdx+fxdy+eydx+gydy$, in locum indeterminatarum x et y et elementorum earum dx, et dy, earum aeſtimationes modo aſſumtas earumque elementa, mutabitur aequatio A, in ſequentem B ---

$$\begin{array}{l} +ch \\ +ei \\ +a \end{array} dp \begin{array}{l} +fh \\ +gi \\ +b \end{array} dq + cpdp + eqdp + fpdq + gqdq = 0.$$

2. Vt vero in aequatione B, duo prima membra euaneſcant, oportet vt fiant $ch+ei+a=0$, et $fh+gi+b=0$, ex qui bus eliciuntur valores litterarum aſſumtitiarum h, et i, nempe $h=\frac{ag-be}{ef-cg}$, et $i=\frac{bc-af}{ef-cg}$; ipſa vero aequatio B abit in ſequentem C -- $cpdp+eqdp+fpdq+gqdq=0$

3. Ad ulteriorem reductionem aequationis C, aſſumo $q=kp+t$, ubi t eſt iterum variabilis k vero conſtans, adeo vt ſit $dq=kdp+dt$. Suffectis enim in aequatione C, $kp+t$, et $kdp+dt$, pro q et dq reſpectiue,

resultabit inde aequatio D --- $\begin{array}{lll} +gkk\,pdp & +gktdp & +gkpdt \\ +ek & +e & +f \\ +fk & & \\ +c & & \end{array}$

$+gtdt = o$.

4. In hac inuenta aequatione iam primus terminus euanescere debet posita aequatione $gkk+ek+fk+c=o$, ex qua elicietur $k=\frac{-e-f+l}{2g}$, facta nempe $l=\surd(ee+2ef+ff-4cg)$, nam aequatio D tunc mutabitur in $\begin{array}{ll} +gktdp & +gkpdt+gtdt=o \\ +e & +f \end{array}$, vel restituendo inuentum valorem litterae k, in sequentem E--- $(e-f+l)\,tdp+(-e+f+l)pdt+2gtdt=o$.

5. Ad summationem aequationis E, diuidatur ea per pt, et emerget $(e-f+l)\frac{dp}{p}+(f-e+l)\frac{dt}{t}+\frac{2gdt}{p}=o$, aequatio composita ex duobus elementis logarithmicis $\frac{dp}{p}$, et $\frac{dt}{t}$; vt vero haec aequatio integrabilis fiat, ponatur $\frac{2gdt}{p}=\frac{du}{u}$, et habebimus $e-f+l.\frac{dp}{p}+f-e+l\frac{dt}{t}+\frac{du}{u}=o$, quae est integrabilis, nam integralis eius est $(e-f+l)\mathrm{Log}.p+(f-e+l)\mathrm{Log}.t+\mathrm{Log}.u=\mathrm{Log}.\mathrm{D}$ quantitatis constantis; huic vero aequationi Log.micae competit absoluta $p^{e-f+l}t^{f-e+l}u=\mathrm{D}$, hinc $p^{-1}=\mathrm{D}^{\frac{-1}{e-f+l}}t^{\frac{f-e+l}{e-f+l}}u^{\frac{1}{e-f+l}}$, adeoque $\frac{2gdt}{p}\left(=\frac{du}{u}\right)=\mathrm{D}^{\frac{-1}{e-f+l}}t^{\frac{f-e+l}{ef+l}}u^{\frac{1}{e-f+l}}\times 2gdt$, ex hac vero resultabit facta $\mathrm{D}=1$, sequens $2gt^{\frac{f-e+l}{e-f+l}}dt=u^{\frac{-1}{e-f+l}-1}dt$. Huius vero integralis est

$(e-f+l)$

$\frac{(e-f+l)g}{l}\, t^{\frac{2l}{e-f+l}} = (e-f+l)\Delta + (f-e-l)u^{\frac{-1}{e-f+l}}$, vel $\frac{g}{l}\, t^{\frac{2l}{e-f+l}}, + u^{\frac{-1}{e-f+l}} = \Delta$. Sed aequatio ſupra inuenta $p^{e-f+l}\, t^{f-e+l} u = 1$, praebet $u^{\frac{-1}{e-f+l}} = pt^{\frac{f-e+l}{e-f+l}}$, propterea praecedens aequatio integralis, mutatur in ſequentem F --- $pt^{\frac{f-e+l}{e-f+l}} + \frac{g}{l}\, t^{\frac{2l}{e-f+l}} = \Delta$. In qua Δ ſignificat quantitatem conſtantem.

6. Surrogando praeterea in aequatione F aeſtimationes litterarum p et t nempe pro p, $x-b$ vel $x + \frac{be-ag}{ef-cg}$, et pro t, $bk-i+kx+y$, id eſt $\frac{f-e+l}{2ef-2cg} a + (\frac{ee+ef-el-2cg}{2efg-2cgg})b + \frac{e+f-l}{2g} x + y$. Integralis quaeſita exprimetur aequatione G --- $(x + \frac{be-ag}{ef-cg}) \times$

$$(\frac{f-e+l}{2ef-2cg} a + \frac{ee+ef-el-2cg}{2efg-2cgg} b + \frac{e+f-l}{2g} x + y)^{\frac{f-e+l}{e-f+l}} +$$
$$\frac{g}{l} (\frac{f-e+l}{2ef-2cg} a + \frac{ee+ef-el-2cg}{2efg-2cgg} b + \frac{e+f-l}{2g} x + y)^{\frac{2l}{e-f+l}} = \Delta.$$

vel etiam

$$(y + \frac{af-bc}{ef-cg}) \times (\frac{ef+ff-fl-2cg}{2cef-2ccg} a + \frac{e-f+l}{2ef-2cg} b + \frac{e+f-l}{2c} y + x)^{\frac{e-f+l}{f-e+l}}$$
$$+ \frac{c}{l} (\frac{ef+ff-fl-2cg}{2cef-2ccg} a + \frac{e-f+l}{2l} y + x)^{\frac{2l}{f-e+l}} = \Delta.$$

Sed haec poſterior H reſultat ex hypotheſi, quod $p = kq + t$, cum altera G deriuata ſit ex poſitione ipſius $q = kp + t$.

7. Si $2\sqrt{cg}$ excedit ſummam $e+f$, ambae aequationes G et H inutiles fient, quia conſtructio aequationis A tunc pendet a quadratura Circuli et Hyperbolae, quae

 modo

modo ſequenti inſtitui poteſt. In recta indefinita AO, capiatur CA $= \frac{l}{2c}$, et in AD ad AO normali AB $= \frac{e+f}{2c}$. Deſcribantur deinceps centro C, radio CA circulus AEF, et per B, hyperbola QBK inter aſymptotas CP, CO: quibus praeparatis, capiatur quadrilineum hyperbolicum ABKI $= \frac{f-e}{l^3}$ ſectoris FCE, factaque CG quarta proportionali ad CB, CD, et CA, ducatur per punctum G recta GH aequidiſtans ipſi AD; et facto quadrilineo ABML = quadrilineo GHKI, fiat tandem, ut CA ad BD ita CL ad CN. Erunt $x = CN + \frac{ag-be}{ef-cg}$, et $y = CL + \frac{bc-af}{ef-cg}$, coordinatae curuae conſtruendae, vbi tamen meminiſſe oportet, quod nunc ſit $l = \sqrt{(4cg-ee-2ef-ff)}$.

8. Itaque integralis aequationis $udu - 2budy + ydy = o$, quam D. *Comes Riccatus* dedit pro linea reſiſtentiarum medii cum mobile in caua parte cycloidis delabitur et reſiſtentiae celeritatibus actualibus mobilis proportionales ſunt, eſt tantum caſus particularis aequationum G vel H §. 6. exhibitarum; praebent enim hae aequationes $u \times (-b - u\sqrt{(bb-1.)} + y)^{\frac{b+\sqrt{bb-1}}{-b+\sqrt{bb-1}}} + \frac{1}{2\sqrt{bb-1}}$
$(-b - u\sqrt{(bb-1.)} + y)^{\frac{\sqrt{bb-1}}{-b+\sqrt{bb-1}}} = \Delta$ pro integrali aequationis D. *Riccati.* In qua tamen b vnitatem excedere debet, alioqui conſtructio aequationis penderet a quadratura circuli et hyperbolae vt §. 7. oſtenſum.

9. Integralis aequationis ſuperioris E (§. 4.) etiam hoc modo inueniri poterat, aſſumendo aequationem

Apt^a

$Apt^\alpha + Bt^\beta = \Delta$, nam differentialis eius, quae est $At^\alpha dp + \alpha Apt^{\alpha-1} dt + \beta Bt^{\beta-1} dt = o$, per diuisionem cum quantitate $t^{\alpha-1}$, reducitur ad $Atdp + \alpha Apdt + \beta Bt^{\beta-\alpha} dt = o$, quae eiusdem formae est, excepto membro $\beta Bt^{\beta-\alpha} dt$, cum aequatione E. Quod si vero $\beta - \alpha$ fuerit $= 1$, ambae aequationes eiusdem prorsus formae euadent, sint ergo $A = e-f+l$, $\alpha A = f-e+l$, adeoque $\alpha = \frac{f-e+l}{e-f+l}$, et $\beta = \alpha + 1 = \frac{2l}{e-f+l}$, ac denique $\beta B = 2g$, atque adeo $B = \frac{\overline{e-f+l} \times g}{l}$. Quare aequatio supra assumta mutatur in

$$\overline{e-f+l} \times pt^{\frac{f-e+l}{e-f+l}} + \overline{e-f+l} \times \frac{g}{l} t^{\frac{2l}{e-f+l}} = \overline{e-f+l} \times \Delta.$$ Nam pro constanti Δ quaelibet alia pro lubito assumi potest. Diuidendo porro aequationem vltimo inuentam per $e-f+l$, resultabit $pt^{\frac{f-e+l}{e-f+l}} + \frac{g}{l} t^{\frac{2l}{e-f+l}} = \Delta$, quae est aequatio integralis aequationis E, quam supra §. 5. iam inuenimus.

10. Integralis aequationis A, inueniri quoque potest per methodum integrandi quam in Tom I. *Comment. Acad. Scient. Imp.* p. 149. exhibui, idque sine praeuia aequationis integrandae reductione. Nam aequatio A cuius integralis quaeritur, per ea quae ibi in *Scholio generali* dicta sunt, est quantitas, quam per dK illic designo, cumque (*hyp.*) sit $dK = o$, erit etiam $R^\lambda dK = o$, vbi R significat quantitatem quamcunque, et λ quoque exponentem quemcumque, sit ergo $R = \alpha + \beta x + y$, habebimusque per dictam methodum aequationem *Canonicam* $dK = \lambda + 1$. MdR

$MdR+RdM$, vbi dK ſignificat quantitatem $adx+bdy+cxdx+fxdy+eydx+gydy$.

Iam quia in $dR=\beta dx+dy$, ineſt membrum βdx, diuido omnia membra quantitatis dK per dx, in quibus haec diuiſio ſuccedit, inuenientur quoti a, cx et ey, ſed loco coefficientium a, c et e ſcribam A, B et C, adeo vt aſſumenda ſit aequatio $M=A+Bx+Cy$. Sufficiendo iam in aequatione *Canonica* $A+Bx+Cy$, et $\alpha+\beta x+y$, pro M et R, nec non $Bdx+Cdy$ et $\beta dx+dy$, pro dM et dR, mutabitur aequatio Canonica in ſequentem $cxdx+fxdy+eydx+gydy+adx+bdy=$

$$\begin{array}{llllll}
\beta\lambda Bxdx & +\lambda Bxdy & +\beta\lambda Cydx & +\lambda Cydy & +\beta\lambda Adx & +\lambda Ady \\
+2\beta B & +B & +\beta C & +2C & +\beta A & +A \\
 & +\beta C & +B & & +\alpha B & +\alpha C
\end{array}$$

Collatio terminorum homologorum praebet

$\alpha=\frac{-2a}{f-e+l}+\frac{(e+f+l)b}{(f-e+l)g}$, exiſtente $l=V(ee+2ef+ff-4g)$

$\beta=\frac{e+f+l}{2g}$, et $\lambda=\frac{2e-2f}{f-e+l}$

$A=\frac{(f-e+l)ag}{(e-f+l)l}+\frac{(2ee+2ef-4cg-2el)b}{e-f+l}$

$B=\frac{2cg-ee-ef+el}{2l}$, et $=C=\frac{(f-e+l)g}{2l}$.

Integralis vero quaeſita, quae per *Theor.* I. loco ſupra citato eſt $MR^{\lambda+1}=\Delta$; ubi Δ eſt conſtans, iam inuenietur eſſe $(y+\beta x+\alpha)^{\frac{e-f+l}{f-e+l}}\times(Cy+Bx+A)=\Delta$. Aſſignando litteris aſſumtitiis α, β, λ, A, B, C eos valores quos modo indicauimus. Quamuis vero haec vltima aequatio a ſuperioribus G vel H §. 6. exhibitis, diſcrepare videtur; ad eas tamen facile reduci poterit.

11. Si in aequatione conſtruenda A, infima membra

bra $+adx+bdy$ desunt, euanescent quoque aestimationes litterarum A et α, et incidemus in casum quem Cel. *Iohann. Bernoulli*, in dictis *Commentariis pag.* 179. pluribus excussit, ostendendo quomodo per methodum suam integralis aequationis propositae, quam ipse Canonicam primi gradus vocat, inueniri possit, et indicando quando aequatio ab ipso inuenta, est ad curuam algebraicam, et quando ad lineam rectam.

Ex analysi vero quam praecedenti §. exhibui, iterum patet, aequationem inuentam cessare, quoties summa coefficientium $e+f$ deficit a quantitate $2\sqrt{cg}$, quia hoc casu l fit quantitas imaginaria.

12. In §. 16. poterat quoque assumi $M = A + Bx + Cy + N$, vbi N est noua indeterminata, sufficiendo enim huius M et dM valores modo indicatos in superiori nostra aequatione *Canonica*, perueniemus ad aequationem H..

$$\begin{array}{llllll} +a\,dx & +b\,dy & +cx\,dx & +fx\,dy & +ey\,dx & +gy\,dy = (\lambda+1)N\,dR + R\,dN. \\ -\beta\lambda A & -\lambda A & -\beta\lambda B & -\lambda B & -\beta\lambda C & -\lambda C. \\ -\beta A & -A & -2\beta B & -B & -\beta C & -2C. \\ -\alpha B & -\alpha C & & -\beta C & -B. & \end{array}$$

Si nunc in sinistra parte huius aequationis H omnia membra, exceptis duobus primis, euanescere faciamus, inuenientur pro litteris assumtitiis β et λ, et pro B ac C iidem valores quos iam supra §. 10. elicuimus, sed remanebit aequatio.

$$\text{I..}\quad \begin{array}{ll} +\;a\,dx & +b\,dy = (\lambda+1)N\,dR + R\,dN. \\ -\beta\lambda A & -\lambda A \\ -\beta A & -A \\ -\alpha B & -\alpha C \end{array}$$

 Sed

Sed si $a-(\lambda+1)\beta A-\alpha B$, fuerit ad $b-(\lambda+1)A-\alpha C$ ut β ad 1, aequatio I integrabilis erit, K... $\beta Qdx+Qdy=(\lambda+1)NdR+RdN$, existente $Q=-(\lambda+1)A-\alpha C+b$. Atqui $\beta dx+dy=dR$, ergo aequatio K abit in $QdR=(\lambda+1)NdR+RdN$, ducatur haec in R^{λ}; nascetur inde $QR^{\lambda}dR=\lambda+1\,NR^{\lambda}dR+R^{\lambda+1}dN$, quae integrabilis est, nam integralis eius inuenietur esse $=\frac{QR^{\lambda+1}}{\lambda+1}+\Delta=NR^{\lambda+1}$, adeoque $N=\Delta R^{-\lambda-1}+\frac{Q}{\lambda+1}$.

13. Superior analogia $-(\lambda+1.)\beta A-\alpha B+a.$ $-(\lambda+1)A-\alpha C+b::\beta.1$ praebet $\alpha\left(=\frac{b\beta-a}{\beta C-B}\right)=\frac{-2a}{f-e+l}+\frac{(e+f+l)b}{(f-e+l)g}$, ut supra, et $Q(=-(\lambda+1)A-\alpha C+b)$ nunc fiet $=-(\lambda+1.)A+\frac{(f-e+l)ag}{(e-f+l)l}+\frac{(2ee+2ef-4eg-2el)b}{e-f+l}$. In hac aestimatione vero quantitatis Q, A est arbitrariae magnitudinis: veruntamen si ipsi is valor detur, quem supra pro A inueneramus, euanescet Q; et ea ipsa aequatio integralis inde emerget, quam paullo ante inueneramus. Sin vero $A=o$, fiet quidem $M=Cy+Bx+N=Cy+Bx+\frac{Q}{\lambda+1}+\Delta R^{-\lambda-1}$; et integralis quaesita $(y+\beta x+\alpha)^{\frac{e-f+l}{f-e+l}}\times\left(Cy+Bx+\frac{Q}{\lambda+1}\right)+$ constanti $=$ alii constanti. Verum $\frac{Q}{\lambda+1}$ eadem est cum quantitate quam §. 10. pro aestimatione litterae assumtitiae A inueneramus, adeoque etiam in hoc casu Integralis haec eadem est cum iam exhibita.

14. Tandem constructio aequationis A.. $adx+bdy+cxdx+$ etc. $=o$ etiam sequenti modo obtineri potest

test, ponendo $dy = zdx$, hoc pacto enim aequatio A abibit in sequentem $adx + bzdx + cxdx + fxzdx + eydx + gyzdx = 0$; quae diuisibilis est per dx, et prodibit aequatio $a + bz + cx + fxz + ey + gyz = 0$, ex hac vero elicitur aequatio L... $+ y = -(\frac{fz+c}{gz+e})x - (\frac{bz+a}{gz+e})$; hinc aequatio differentiata praebet, $dy(zdx) = \frac{-(fz+c)dx}{gz+f} + \frac{(cg-ef)xdz}{(gz+e)^2} + \frac{(ag-be)dz}{(gz+c)^2}$ haec vero rite reducta, suppeditat sequentem aequationem M, quae integrabilis est, M... $\frac{dx}{x} = \frac{(cg-ef)\,dz}{(gzz + ez + c) \times (gz+e} \atop {+f}$

$+ \frac{(ag-be)dz}{(gzz+ez+c)\times(gz+e)x}$ $\atop{+f}$

15. Ad constructionem eius ponamus $\frac{dP}{P} = \frac{(cg-ef)dz}{(gzz+ez+c)\times(gz+e)}$, eritque $\frac{(ag-be\,dz)}{(gzz+ez+c)\times(gz+e)}$ $\atop{+f}$ $= \frac{ag-be}{cg-ef}\frac{dP}{P}$, hoc pacto enim aequatio M, abit in hanc alteram $\frac{dx}{x} = \frac{dP}{P} + \frac{(ag-be.dP)}{cg-ef\;Px}$. Dicatur $\frac{ag-be.dP}{cg-ef.Px} = \frac{dQ}{Q}$, eritque $\frac{dx}{x} = \frac{dP}{P} + \frac{dQ}{Q}$, et ex hac elicitur $x = PQ$, qui valor in $\frac{ag-be.dP}{cg-ef.Px} = \frac{dQ}{Q}$, substitutus dat $\frac{ag-be\,dP}{cg-ef\,PPQ} = \frac{dQ}{Q}$, adeoque $dQ = \frac{ag-be\,dP}{cg-ef.PP}$, et sumtis integralibus $Q = \Delta + \frac{be-ag}{cg-ef\;P}$, hinc $x (= PQ) = \Delta P + \frac{be-ag}{cg-ef}$, et $(x + \frac{ag-be}{cg-ef})P^{-1}$ $=$ constanti Δ. Sed quid est P?

Est autem $\frac{(cg-ef)\quad dz}{(gzz+ez+c)\times(gz+e)} (\frac{dP}{P}) = \frac{g\alpha dz}{gz+m} + \frac{\beta dz}{z+n}$ $\atop{+f}$ $+ \frac{gdz}{gz+e}$, ubi sunt $l = \sqrt{(ee + 2ef + ff - 4cg)}$, $m = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}l$; $n = \frac{e+f+l}{2g}$; $\alpha = \frac{e-f-l}{2l}$, et $\beta = \frac{f-e-l}{2l}$. Ipsa vero binomia $gz+m$ et $z+n$, sunt bini factores

trinomii $gzz {+e \atop +f} z+c$. Hinc eſt Log. $P = \alpha \text{Log.}(gz+m)$ $+\beta \text{Log.}(z+n) + \text{Log.}(gz+e)$, et aequatio ex hac ſerie quantitatum Logarithmicarum reſultans eſt
$P = (gz+m)^{\alpha} \times (z+n)^{\beta} \times (gz+e)$. Eſt ergo integralis quaeſita
$(gz+m)^{-\alpha} \times (z+n)^{-\beta} \times (gz+e)^{-1} \times \left(x + \frac{ag-be}{cg-ef}\right) = \Delta$.
In hac vero eſt $z = \frac{-a-cx-ey}{+b+fx+gy}$.

TRIGONOMETRICA

F. C. Maieri.

I.

M. Febr. 1727. Collegi in hoc ſcripto theoremata quae diuerſis temporibus in Conuentu noſtro propoſui, ad quae prouocaui aliquoties antea, et ſaepius prouocabo poſthac. Non omnia quidem noua ſunt, neceſſaria tamen ad demonſtranda ſecutura. Theorema generale trado, via analytica repertum, ex quo facili opera omnia, quae vulgo habentur, praecepta trigonometriae ſphaericae tanquam conſectaria deriuantur. Modum oſtendo quo omnes regulas Trigonometricas vtcunque compoſitas ſolo ſinuum canone logarithmico expedire licet, et, quod hactenus forſan

ſan

ſan parce factum eſt, calculum literalem ad trigonometrica problemata difficiliora ſic accommodo, vt eius laus et praeſtantia in hac quoque Geometriae parte clarius diſpaleſcat.

2. Praemittam theoremata quaedam, quae, licet ad prima Trigonometriae elementa ſpectent, obuia tamen non ſunt vbique, et legentem morari poſſent ſi alio ablegaretur. Primum itaque hoc eſt: *Si ſinus et coſinus, item tangens et cotangens acuti anguli, poſitiui eſſe cenſeantur, obtuſi anguli tangens et ſinus poſitiui quidem manent, ſed cotangens ipſius et coſinus priuatiui fiunt: cadunt enim in plagam reſpectu centri oppoſitam ei quam acutorum ſinus et tangentes occupant. Eodem modo intelligitur, quod tangens et ſinus aeque ac cotangens et coſinus anguli tres quadrantes non excedentis ſint priuatiui omnes. ſi vero excedat tres quadrantes tangentem habet et ſinum priuatiuos; ſed cotangentem et coſinum poſitiuos. Sic et ipſe ſinus totus, cui ſinus anguli acuti, vel gibbi excedentis, inſiſtit, poſitiuus eſt; in duobus reliquis caſibus eſt priuatiuus.*

3. Quoniam in triangulis non niſi acuti et obtuſi anguli conſiderandi obueniunt, negligam poſthac gibbos; Igitur ſinus et tangentes conſtanter poſitiui, cotangentes, et coſinus indeterminati, ambigui erunt.

4. *Si anguli acuti maioris ſinus ſit* $=S$ *et coſinus* $=C$. *anguli minoris ſinus* $=s$ *et coſinus* $=c$; *dico, fore ſinum anguli ex duobus hiſce acutis compoſiti* $=\frac{Sc+Cs}{r}$, *ſinum vero reſidui* $\frac{Sc-sC}{r}$, *poſito radio* $=r$.

 Sit

Fig. I. Sit angulus maior (v. fig. I.) $=GCF$, ſinus eius $=DF=S$, et coſinus $=CD=C$. Sit porro angulus minor $=ACG$, eiusque ſinus $=AE=s$, atque coſinus $=EC=c$, erit hoc modo angulus compoſitus $=ACF$ eiusque ſinus $=FH$. Producatur iam FD in B, vt obtineantur triangula ſimilia AEC, BDC, CHK et BFH. atque inferatur.

$$EC : AE = DC : BD$$

ſive $c : s = C : \frac{sC}{c}$

eſt ergo $BF = BD + DF = \frac{Sc + sC}{c}$

inferatur dehinc denuo

$$AC : EC = BF : FH$$

ſiue $r : c = \frac{Sc + sC}{c} : \frac{Sc + sC}{r}$

Eſt ergo ſinus compoſiti $FH = \frac{Sc + sC}{r}$. Q. E. Primum.

Si vero in eadem figura maior angulus ſit $=ACF$, eius ſinus $=FH=S$, et coſinus $=CH=C$, minor angulus $=ACG$, eius ſinus $=AE=s$, et coſinus $=EC=c$, erit ſinus anguli reſidui $=DF$. Eſt autem

$$EC : AE = CH : HK$$

ſiue $c : s = C : \frac{sC}{c}$

per conſequens habetur $FK = FH - HK = \frac{Sc - sC}{c}$

atque exinde

$$AC : EC = FK : EF$$

$r : c = \frac{Sc - Cs}{c} : \frac{Sc - sC}{r}$

Eſt ergo ſinus reſidui $= \frac{Sc - sC}{r}$. Q. E. alterum.

5. *Datis prioribus, erit coſinus anguli compoſiti* $= \frac{Cc - Ss}{r}$ *et coſinus reſidui* $= \frac{Cc + Ss}{r}$

De-

Demonſtratio poteſt ex ſchematiſmo prioris propoſitionis peti facillima; ſed iuuat eam alio modo adornare. In primo caſu datur ſinus (§. 4.) $= \frac{Sc+sC}{c}$ ergo per praecepta communia coſinus erit $\surd(rr - \frac{Sc+sC}{r}$ quadr.$)$ $= \surd(r^4 - S^2c^2 - 2SsCc - s^2C^2) : r$ eſt vero $r^4 = (s^2 + c^2) \times (S^2 + C^2) = S^2s^2 + S^2c^2 + C^2s^2 + C^2c^2$. Hoc ergo valore ſubſtituto habetur coſinus compoſiti $=$

$$\frac{\surd(C^2c^2 - 2SsCc + S^2s^2)}{r} = \frac{Cc - Ss.}{r}$$ Qui eſt coſinus compoſiti, ſicuti demonſtrandum erat: Alter vero caſus de coſinu reſidui eodem modo demonſtratur.

6. Notandum eſt de hoc et ſimilibus caſibus, eſſe $\surd(C^2c^2 - 2SsCc + S^2s^2) = Cc - Ss$ non vero $\pm (Cc - Ss)$ formula enim $Cc - Ss$ per ſe iam eſt ambigua, et duos caſus, quos debet, contrarios perfecte in ſe continet, quippe cum et $Cc > Ss$, et $Cc < Ss$ eſſe poſſit, eoque ipſo formula et poſitiua et priuatiua ſit, valensque ſimul pro coſinu acuti et obtuſi anguli, qui in caſibus ſpecialibus per formulam determinantur.

6. *Sit tangens anguli acuti maioris* $= T$, *tangens minoris* $= t$. *erit ita tangens compoſiti* $= rr \frac{T+t}{\pm Tt \mp rr}$ (*ſc. pro acuto* $rr \frac{T+t}{Tt-rr}$, *pro obtuſo* $rr \frac{T+t}{rr-Tt}$) *tangens vero reſidui* $= rr \frac{T-t}{Tt+rr}$.

Ponatur praeterea ſecans maioris $= M$, minoris $= m$, erit ex natura ſinuum et tangentium ſinus anguli maioris

ioris $=\frac{rT}{M}$ eiusque cosinus $\frac{rr}{M}$; porro sinus minoris $=\frac{rt}{m}$. eiusque cosinus $=\frac{rr}{m}$. ex hisce formatur (per §§4 et 5.) sinus arcus compositi $=rr\frac{T+t}{Mm}$ eiusq; cosinus $r\frac{rr-Tt}{Mm}$; item sinus residui $=rr\frac{T-t}{Mm}$ et cosinus $=r\frac{rr+Tt}{Mm}$. Cum igitur sit vt cosinus ad sinum, ita radius ad tangentem (posito radio positiuo si cosinus positiuus et pro acuto fuerit; priuatiuo autem si secus (§. 2):) habetur Tangens compositi $=rr\frac{T+t}{\pm Tt\mp rr}$ et residui $=rr\frac{T-t}{Tt+rr}$. Q. E. D.

7. *Quoniam tangens est ad radium vti radius ad cotangentem, erit cotangens compositi* $=\frac{rr-Tt}{T+t}$ *et residui* $=\frac{Tt+rr}{T-t}$ (vbi de cotangente compositi notandum, eam pro acuto valere si sit $rr>Tt$, vicissim vero pro obtuso:)

8. *Sit maioris anguli acuti sinus* $=S$, *cosinus* $=C$, *sinus anguli minoris* $=s$, *cosinus* $=c$, *sit praeterea semisummae* (ex maiore et minore arcu formatae) *sinus* $=A$, *cosinus* $=B$ *et tangens* $=Q$; *dico esse* $\frac{S-s}{c-C}=\frac{c+C}{S+s}=\frac{B}{A}=\frac{r}{Q}$ (vbi $r=$radio)

Fig. II. In figura secunda sit arcus maioris sinus $=DE=S$, et cosinus $=DH=C$, minoris arcus sinus sit $=BC=s$, cosinus $=CH=c$. Prolongetur maior sinus in O, et BM fiat normalis ad EO, vt habeatur $KO=S+s$, $KE=S-s$, $KM=c+C$ et $KB=c-C$. Erit quoque arcus OB aequalis summae arcuum propositorum, huius sumatur dimidium $AB=AO$ cuius formetur tangens $BI=Q$. Sinus $AL=A$ et cosinus $HL=B$. Hoc modo do obtinentur triangula rectangula MKO, EKB, HBI et HLA omnia similia, fiet proinde

$$\begin{Bmatrix} KE : KB = KM : KO = LH : LA = BH : BI \\ (S-s) : (c-C) = (c+C) : S+s) = B : A = r : Q \end{Bmatrix}$$

Q. E. D.

9. *Retentis prioribus, fiat insuper sinus semidifferentiae* $= a$, *eiusque cosinus* $= b$ erit $\frac{S-s}{2a} = \frac{c+C}{2b} = \frac{B}{r}$ et $\frac{S+s}{2b} = \frac{c-C}{2a} = \frac{A}{r}$.

In praecedente figura est chorda $EB = 2a$, hoc est, aequalis duplo sinui semidifferentiae; chorda vero MO est $= 2b$, siue aequalis duplo cosinui semidifferentiae, arcus enim MNO (cui subtenditur chorda MO) est = arcui NOP + arc. NM − arc. PO, vel, (quia PB = NM et PE = PO) = arc. NOP + arc. PB − arc. PE. et quia PB − PE = arc. BE fiet MNO = NOP − BE, est et praeterea NOP = 180° = semicirculo, et BE = differentiae arcuum, fiet itaque $\frac{1}{2}$ MNO − $\frac{1}{2}$ BE = 90° − semidifferentia arcuum, cuius consequenter sinus duplus est = chordae MO. Iam ob similitudinem triangulorum ante (§. 8.) allegatorum est *Fig. II.*

$$\begin{Bmatrix} KE : BE = KM : MO = HL : AH. \\ (S-s) : 2a = (c+C) : 2b = B : r \end{Bmatrix}$$

item

$$\begin{Bmatrix} BK : BE = KO : MO = AL : AH. \\ (c-C) : 2a = (S+s) : 2b = A : r \end{Bmatrix}$$

Q. E. D.

10. *Positis quae supra* §. 8. *ponebantur sitque prae-*

ſummae vel differentiae datorum numerorum, idque per ſolum canonem ſinuum logarithmicum. Huic uſui maxime inſeruit propoſitio ſub articulo 9. quae in has transformari poteſt ſequentes: $c + C = \frac{2Bb}{r}$ $S + s = \frac{2Ab}{r}$, $c - C = \frac{2Aa}{r}$ et $S - s = \frac{2Ba}{r}$. Ex ſolo enim intuitu harum formularum patet, in illis ſummas et differentias duarum quantitatum aequiparari aliis, quae per canonem ſinuum datae, et logarithmis ſimul adaptatae ſunt, quippe quae conſtant ex ſolis in ſeſe mutuo ductis factoribus datis; Habeantur itaque dati logarithmi pro logarithmis ſinuum aut coſinuum, quorum ex canone excerpantur arcus, arcuum formetur et ſemiſumma et ſemidifferentia, atque pro hiſce denuo excerpantur logarithmi competentes, quae ſecundum formularum antecedentium tenorem ſibi mutuo addantur et ſubtrahantur, vt obtineatur quaeſitum. Exempla non addo, quia in ſequentibus eorum occaſio erit. Iuuat potius explicare hic uſum propoſitionis ſub §. 13. quem habet in ſolutione *problematis de triangulo rectilineo cuius dantur duo latera cum angulo intercepto, et quaeruntur anguli reliqui*: Ponamus maius latus datum $= r$, minus vero $= c$, tangentem ſemiſummae angulorum quaeſitorum $= t$ tangentem vero ſemidifferentiae quaeſitae $= y$, erit per notam regulam $\frac{r+c}{r-c} = \frac{t}{y}$. Nunc habeatur maius latus pro radio, minus pro coſinu alicuius anguli qui excerpatur ex canone, eiusque dimidii tangens denuo excerpatur quae vocetur Q erit itaque (per §. 13) de-

$\frac{r+c}{r-c} = \frac{rr}{QQ}$, ergo etiam $\frac{rr}{QQ} = \frac{t}{y}$ et $y = \frac{tQQ}{rr}$ siue per logarithmos rem exprimendo $ly = lt + 2lQ - 2lr$. Dabo exemplum, vtar autem logarithmis neperianis vbi radii logarithmus est $= 0$. Sit igitur logarithmus lateris maioris $= - 50899$, logar. minoris $= + 460$, angulus interceptus $= 126°, 41'. 20''$ et proinde semisumma angulorum quaesitorum $= 26°, 39'. 20''$. Iam conuertatur minus latus in cosinum simplici analogia hac; vti maius latus ad minus, ita radius ad cosinum desideratum; quae per logarithmos sic efficitur.

log. lat. min. — — — 460
log. lat. maioris — — 50899

Cosinus — — — 51359 — — — 53°, 14', 55''
26 37 27½ tang. = 69056
duplum = 138112
tang. semisummae = 68920

Semidifferentia quaesita 7°. 11'. 22'' — — — 207032

Semisumma — — — 26. 39. 20.
angulus quaesitorum vnus: 19. 27. 58.
— — — alter — — — — 33. 51 42.

Desumptum est exemplum ex tabulis rudolphinis pag. 68. vt constaret artificii huius vsus in calculis astronomicis. Incidenter annoto, cosinum ex minore latere oriundum (51359) esse ipsam proportionem interuallorum, vti Keplerus vocat, duplam vero tangentem (138112) vocari a Keplero et aliis logarithmum indicis.

Fig. III. 17. *In triangulo rectilineo* ABC, *datis lateribus, scilicet* AB=A, AC=a et BC=b, *positoque radio* =r. *erit cosinus anguli ad* A=$r\frac{AA+aa-bb}{2Aa}$.

Demisso enim perpendiculo BD, habetur segmentum AD=$\frac{AA+aa-bb}{2a}$ (sicuti ex elementis geometriae constat). Atqui, vti AB ad AD, ita sinus totus est ad cosinum anguli ad A, ergo cosinus ille est =$r\frac{AA+aa-bb}{2Aa}$. Q. E. D.

Notandum vero est cosinum esse positiuum si fuerit $(AA+aa)>bb$, atque ita valere pro acuto; valere autem pro obtuso si fuerit $bb>(AA+aa)$ patet id ex §. 2.

18. Theorema hoc in gratiam sequentium adduxi, vbi eius praecipuus vsus erit; lubet tamen, hac occasione data, exemplo ostendere quomodo tales regulae logarithmis tractari debeant. Sit igitur log. A=51083. la=40547 et lb=28768. est ergo log. A^2=102166, la^2=81094 et lbb=57536, quaeratur ab initio log. (A^2+a^2), ope §. 9. ex quo adhibeatur aequatio $c+C=\frac{2Bb}{r}$, habeantur iam logarithmi quantitatum A^2 et a^2 pro cosinibus, quorum excerpantur arcus; vti sequitur.

arc.

	arc. $A^2 =$ 65°	54'.			
	arc. $a^2 =$ 63.	36.	45"		
Summa	132.	30.	45.		
Semisumma	66.	15.	$22\frac{1}{2}$	cosin.	$90970 = B$
Semidifferentia	2	38	$37\frac{1}{2}$	cosin.	$107 = b$
					91077
					$69315 = l.2.$
					$l(A^2 + a^2) = 21762$

Deinde denuo habeantur et $(A^2 + a^2)$ et b^2 pro cosinibus, et pro earum differentia inuenienda consideretur aequatio $c - C = \frac{2Aa}{r}$, (ex. §. 9.) est ergo

arc. $(A^2 + a^2) =$	36°.	26',	40".		
arc. b^2 =	55.	46,	15.		
Summa =	92	12	55		
Semisumma =	46	6	$27\frac{1}{2}$	sinus	$32762 = A$
Semidiff. =	9	39	$47\frac{1}{2}$	sinus	$178462 = a$
					211224
					$69315 = l2.$
				$l(A^2 + a^2 - b^2) =$	141909

log. $A = 51083$

log. $a = 40547$

91630

$l. 2 = 69315$

$l. 2Aa = 22315$

log. $2Aa = 22315$

ang. ad $A = 72°.23'.51". = 119594$

Tentanti hunc calculum patescet eum posse contrahi, sed hic volui ductum regularum sequi, vt exemplum eo perfectius sit.

18. *Datis in triangulo sphaerico* ABC *tribus lateri-* Fig. IV.

teribus quadrante minoribus, positisque sinu cruris AB $= S$, *cosinu eiusdem* $= C$, *sinu cruris* BC $= s$ *et cosinu* $= c$, *cosinu baseos* AC $= q$, *et radio* $= r$; *dico cosinum anguli ad* B *fore* $= \frac{rq - Cc}{Ss} r$.

Fig. V. Subtendantur lateribus suae chordae AB, AC et BC ab angulis ducantur radii ad centrum sphaerae D, eoque ipso pyramis formetur triangularis, cuius hedrae ADB, ADC et BDC sunt triangula aequicrura quolibet crure existente $= r$. anguli hedrarum ad D, (siue vertices triangulorum aequicrurorum) dati sunt, subtenduntur enim ab arcubus datis, nimirum ipsis trianguli dati lateribus. Iam ad lineam BD (ab angulo quaesito ad centrum sphaerae ductam) applicentur duae normales BE et BF, existentes in planis hedrarum ABD et BDC continuatis, et per consequens attingentes arcus trianguli dati AB et BC; productae hae lineae in E et F, (vbi cum lineis AD et DC protensis concurrunt) sunt datae ob arcus AB et BC datos, quorum tangentes sunt; angulus vero EBF ille ipse est quem intercipiunt crura trianguli sphaerici dati AB et BC, et quem inuenire oportet, et cuius cosinus nobis nunc sit $= y$. Praeterea ob datos sinus et cosinus arcuum AB et BF erit (per regulas tangentium et secantium communes) tangens BE $= \frac{rs}{c}$ et secans ED $= \frac{rr}{c}$. Item tangens BF $= \frac{rs}{c}$ et secans DE $= \frac{rr}{s}$ hisce datis, positaque EF $= z$, formari potest aequatio ex tribus trianguli DEF lateribus eiusque angulo ad D dato (est enim eius cosinus $= q$) idque per theorema ante (§. 17) demonstratum: Nimirum fiet

I —

$$1 \; - - \; q = r \frac{\frac{r^4}{CC} + \frac{r^4}{cc} - zz}{\frac{2r^4}{Cc}}$$

qua aequatione decenter reducta, habetur

$$2 \; - - \; zz = rr \frac{rrCC - 2rqCc + rrcc}{CCcc} = \text{EF quadr.}$$

atque ita deuentum est ad triangulum EFB in quo iam omnia dantur latera, quibus (vi §. 17.) determinatur cosinus anguli quaesiti ad B sequente aequatione

$$3 \; - - \; y = \frac{\frac{rrSS}{CC} + \frac{rrss}{cc} - rr\frac{rrCC - 2rqCc + rrcc}{CCcc}}{\frac{2rSs}{Cc}}$$

siue

$$4 \; - - \; y = \frac{rrSScc + rrssCC - r^4 CC + 2r^3 qCc - r^4 cc}{2rSCsc}$$

et quia $rrSScc - r^4 cc = rrcc(SS - rr) = -rrccCC$
item quia $rrssCC - r^4 CC = rrCC(ss - rr) = -rrccCC$
fiet

$$5 \; - - \; y = \frac{2r^3 qCc - 2rrccCC}{2rSCsc} = r\frac{rq - Cc}{Ss}. \quad \text{Q. E. D.}$$

19. De hac regula notandum est, eam facere cosinum positiuum si fuerit $rq > Cc$ et per consequens angulum quaesitum acutum: si vero fuerit $rq < Cc$, fore cosinum priuatiuum qui valet pro angulo obtuso (qui acuto suo deinceps est). Idem quoque obtinet, si crura quadrante maiora sint, licet enim tum eorum cosinus priuatiui sint ($-C$ et $-c$) factum tamen Cc positiuum est aeque ac factum cosinuum positiuorum. Si sola basis sit quadrante maior, adeoque eius cosinus $= -q$ erit $y = -r\frac{rq + Cc}{Ss}$ ex

quò patet, hoc caſu angulum quaeſitum ſemper eſſe obtuſum. Si alterutrum crus fuerit quadrante maius, erit $y = + r\frac{rq+Cc}{Ss}$ et proinde angulus quaeſitus ſemper acutus. Eodem modo in aliis caſibus praeſciri poteſt cuius ſpeciei futurus ſit angulus quaeſitus.

20. Caeterum praxis huius regulae logarithmica facilis eſt, obſeruatis artificiis antea (§. 16 et 18) oſtenſis; eam impraeſentiarum vno alteroue exemplo illuſtrabo. Sit igitur crus $AB = 69°$, crus $BC = 47°$ et baſis $AC = 34°$. erit proinde log. $S = 6873$, $ls = 31286$ $lC = 102620$, et $lc = 38273$. logarithmo coſinus baſeos non indigemus. Nunc formetur log. $(rq - Cc)$ ope aequationis $c - C = \frac{2Aa}{r}$ deſumtae ex §. 9. fiat nimirum

$lC = 102620$
$lc = \ \ 38273$

$l(Cc) = 140893$ - - eius arcus $= 75°, 51' 12''$.
arcus ipſius $l(rq)$ - - - $= 34 \quad 0 \quad 0$

Summa - -	109	51	12		
Semiſumma - -	54	55	36	- ſinus -	20038
Semidiffer. - - -	20	55	36	- - - -	102953

$lS = 6873$
$ls = 31286$
$l2 = 69315$
$l\left(\frac{Ss}{2}\right) = 107474$

$\log\left(\frac{rq - Cc}{2}\right) = 122991$
$l\frac{Ss}{2} = 107474$

log. Coſinus quaeſiti $= 15517$
angulus ad B $= 31°. 6'$.

hic

hic angulus eſt acutus, quia in praeſenti caſu habetur $rq > Cc$. Alterum exemplum hoc eſto: crus $AB = 46°$, crus $BC = 57°$. baſis $AC = 95°$. in hoc exemplo angulus quaeſitus erit obtuſus (per §. 19) eſt vero praeterea $lS = 32942$ $lC = 36434$ $ls = 17594$ $lc = 63503$. hinc fit

$lC = 36434$
$lc = 63503$
$l(Cc) = 99937$. cuius arcus $= 68° 24' 5''$
arcus ipſius $l(rq) = 95° 0 0$

Summa $=$	$163\ 24\ 5$		
Semiſum. $=$	$81\ 42\ 2\tfrac{1}{2}$	ſinus $=$	1053
Semidiff. $=$	$13\ 17\ 57\tfrac{1}{2}$	ſinus $=$	146953

$lS = 32942$
$lS = 17594$
$l2 = 69315$
$l\frac{Ss}{2} = 119851$

$l\frac{rq - Cc}{2} = 148006$
$l\frac{Ss}{2} = 119851$

coſinus quaeſitus $= 28155$
angulus reſpondens $= 41° 0' 30''$
cui deinceps $= 138\ 59\ 30$
qui eſt angulus quaeſitus.

Ita in reliquis caſibus procedendum eſt quoque; ſolum hoc, vt moneam, reſtat: quando alterutrum crus obtuſum eſt, mutatur quoque ſignum ipſius Cc, nam in formula pro $-Cc$ fit hoc caſu $+Cc$. Igitur logarithmus ipſius Cc fit logarithmus alicuius coſinus obtusanguli, qui in prioribus exemplis acutangulus fuit.

21. Poſſem regulam logarithmis adaptatam verbis

bis efferre quibus calculator dirigeretur; aſt quia prolixior eſt quam altera mox tradenda, effatu indignam cenſeo. Brevior eſt nullisque obnoxia cautelis noua mox explicanda et ex priore ita deriuanda: Quoniam coſinus anguli quaeſiti $= r\frac{rq-Cc}{ss}$ erit eius ſinus verſus $= r\frac{ss-rq+Cc}{ss}$, ex elementis porro conſtat ſinum verſum inter et diametrum ($2r$) eſſe mediam proportionalem aequalem chordae dicti anguli quaeſiti, huius ergo chordae quadratum habetur ducendo $2r$ in $r\frac{ss-rq+Cc}{ss}$ quod proinde eſt $= 2rr\frac{ss-rq+Cc}{ss}$, dimidia haec chorda eſt ſinus anguli quaeſiti dimidii, eius ergo quadratum eſt prioris quadrati ſubquadruplum et per conſequens $= rr\frac{ss+Cc-rq}{2ss}$. Hoc quadratum mutari poteſt in hanc formam $rrr\frac{\frac{ss+Cc}{r}-q}{2ss}$ eſt autem $\frac{ss+Cc}{r} =$ coſinui differentiae crurum (per §. 5.) quem breuitatis cauſa ponam $= Q$. igitur quadratum ſinus dimidii anguli quaeſiti fit $= r^3\frac{Q-q}{2ss}$, formetur porro ex differentia crurum et baſi ſemiſumma et ſemidifferentia, ponaturque illius ſinus $= A$, huius $= a$, ita fiet per §. 9. $Q-q = \frac{2Aa}{r}$. quo valore in praecedente formula ſubſtituto, habetur quadratum ſinus anguli quaeſiti dimidii $= rr\frac{Aa}{ss}$; quae quidem regula facillima eſt et breuiſſima, qua nimirum duplus logarithmus ſinus pro angulo quaeſito dimidio inuenitur, quo dato, integer angulus latere nequit. Ceterum hanc ipſam regulam Neperus in canone mirifico (pag. 48) tradidit dudum, cuius demonſtrationem ego meo more hic concinnare volui.

22. Ex theoremate ſuperiori (§. 18.) omnia reliqua trigonometriae ſphaericae praecepta deduci poſſunt, tam ea quae de obliquangulis praecipiunt, quam quae de rectangulis. Iucunda maxime eſt deriuatio regulae pro inueniendis lateribus ex datis angulis. Sed talia non ſunt huius loci, nolo enim actum agere; in eo ſum potius vt iactis his fundamentis noua inaedificem theoremata, quorum in doctrina aſtronomiae ſphaerica aliquis vſus eſſe poteſt. Ea vero praeſenti ſcripto excludo ne id excreſcat nimium, finem igitur imponat ſequens problema, quod in medium ideo produco, quia pluries mihi ad illud prouocandum erit.

23. *Datis in triangulo rectilineo duobus cruribus cum angulo intercepto, inuenire angulos reliquos.*

Fig. III.

Sit in triangulo ABC crus maius $AB = A$, crus minus $AC = a$, ſinus acuti anguli $BAC = p$ eiusque coſinus $= q$. ducto perpendiculo BD erit vt ſinus totus ad coſinum anguli ad A, ita latus AB ad ſegmentum AD, adeoque in praeſenti caſu, $= \frac{Aq}{r}$ ſic fit alterum ſegmentum $DC = \frac{ra - Aq}{r}$. Eſt etiam vt ſinus totus ad ſinum anguli ad A, ita latus AB ad perpendiculum BD, quod exinde fit $= \frac{Ap}{r}$. Tandem inferendo, vt DC ad DB ita ſinus totus eſt ad tangentem anguli ad C, inuenitur tangens dicti anguli $= \frac{rAp}{ra - Aq}$. vbi notandum, angulum hunc fore obtuſum ſi ſit $ra < Aq$. Eodem quoque modo tangens anguli minoris ad B (qui minori cruri opponitur) inuenitur $= \frac{rap}{rA - Aq}$. Inuenitur praeterea per vulgaria trigonometriae[4] praecepta anguli maioris ad C ſinus $= \frac{pA}{\sqrt{(AA-2Aaq:r+aa)}}$ eiusque coſinus $= \frac{Aq-ra}{\sqrt{(AA-2Aaq:r+aa)}}$; itemque ſinus anguli minoris $= \frac{pa}{\sqrt{(AA-2Aaq:r+aa)}}$ eiusque coſinus $= \frac{rA-aq}{\sqrt{(AA-2Aaq:r+aa)}}$; in hiſce formulis omnibus pro q ponendum eſt $-q$. Si angulus datus interceptus fuerit obtuſus.

DE TRANSFORMATIONE SERIERVM

Auctore

C. G.

M. Mart. 1727. TRansformari ſeriem dico, cum in aliam eiusdem ſummae conuertitur; ex quo patet ad transformationem datae ſeriei hoc requiri, vt, ſi ſinguli termini ſeriei transformandae A. auferantur ex ſingulis terminis ſeriei transformatae B. ſinguli termini reſidui transeant in nouam ſeriem C=B–A. cuius ſumma $=o$. E contrario, ſi ſeries quaecunque C. cuius ſumma ſit $=o$. addatur ad ſeriem transformandam A. prodibit ſeries transformata B.

Sed eiusmodi ſeries C. cuius ſumma ſit $=o$. infinitis modis obtineri poteſt ex ſubtractione vnius ſeriei ab alia

alia, si vtriusque summae sint aequales. Consideremus exempli causa duas series

D . . . $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+$ etc.

cuius formula generalis est $\frac{1}{x(x+2)}$

E . . . $\frac{3}{8}+\frac{3}{24}+\frac{3}{48}+\frac{3}{80}+$ etc.

cuius formula generalis est $\frac{3}{4x(x+1)}$

summam vero vtriusque constat esse eandem $\frac{3}{4}$. quod si iam singuli termini vnius seriei auferantur ex singulis terminis alterius, residua erit tertia series $C = \pm D \mp E$, cuius formula generalis est $\left(\frac{\pm 1}{x(x+2)} \mp \frac{3}{4x(x+1)}\right)$ $= \frac{\pm x \mp 2}{4x(x+1)(x+2)}$ summa vero totius seriei $= o$. quam ob rem formula $\frac{\pm ax \mp 2a}{4x(x+1)(x+2)}$ ubi a. sit numerus quicunque, dat seriem quae addita ad quamcunque transformandam A. infinitis modis exhibebit transformatam B. Similiter ex formulis $\frac{11}{18x(x+1)}$ et $\frac{1}{x(x+3)}$ quarum vtraque dat seriem $= \frac{11}{18}$. deducitur formula seriei C. $\frac{\pm 7ax \mp 15a}{x(x+1)(x+3)}$ cuius summa $= o$. atque iisdem vestigiis insistendo reperientur $\frac{\pm 23ax \mp 52a}{x(x+1)(x+4)}$ et $\frac{\pm 163ax \mp 385a}{x(x+1)(x+5)}$ etc. quarum summae itidem $= o$.

Sit verbi gratia series transformanda huius formae $\frac{1}{(4x-3)(4x-1)}$ (quam constat exprimere aream semicirculi cuius diameter $= 1$.) addatur huic series

C . . . $\frac{\pm ax \mp 2a}{x(x+1)(x+2)}$ cuius summa, vt supra demonstratum fuit, est $= o$. erit series transformata B.

± 16

$$\frac{(\pm 16a+1)x^3+(3\mp 48a)x^2\pm 35ax\mp 6a}{x(x+1)(x+2)(4x-3)(4x-1)}$$

quae eandem femicirculi aream exprimet fumto a. numero conftante quocunque, ex cuius exempli confpectu facile reliqua fimilia intelliguntur.

Interea non eft neceffe vt feries illa C. cuius fumma requiritur $=0$. fumatur ex illis in quarum formula exponentes poteftatum fint numeri conftantes, quales fuere de quibus hactenus dixi, fed fumi etiam poffunt *exponentiales* quaecunque, hoc eft, in quarum formula x. ingreditur exponentem poteftatis, ita fi ex ferie

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{12}+\tfrac{1}{20}+\text{etc.}$$

cuius formula eft $\frac{1}{x^2+x}$ auferatur feries

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}+\text{etc.}$$

cuius formula eft 2^{-x}. fumma vero vtriusque $=1$. refidua feries et omnes eius multiplae quas haec formula comprehendit

$$\frac{2^{-x}a-ax^2-ax}{2^{-x}(x^2+x)}$$

erunt $=0$.

Quem ad modum vero fumma feriei transformandae A. manet eadem, fiue ei addatur feries alia C. cuius fumma $=0$. fiue ipfa A. multiplicetur per feriem D. cuius fumma $=1$. ita ex hac confideratione ad alteram eamque generalem methodum transformationis peruenimus. Sit feries quaecunque transformanda

A . . . $a+b+c+d+$ etc.

fumatur alia quaeuis

D.

$$D \quad \ldots \quad \alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.}$$

ubi α. β. γ. etc. ſint quantitates conſtantes quaecunque, modo terminus eius vltimus vel infiniteſimus nullus ſit vel infinite paruus, dico ſeriem A. transformari in

$$\begin{array}{lcccc} & \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} \\ B \ldots & (a+b)+ & (c+d)+ & (e+f)+ & (g+h)+ \text{etc.} \\ & a+\alpha & (c-a)\alpha & (e-c)\alpha & (g-e)\alpha \\ & & a+\beta & (c-a)\beta & (e-c)\beta \\ & & & +a\gamma & (c-a)\gamma \\ & & & & +a\delta \end{array}$$

erit enim ſeries B. productum ex ſerie A. multiplicata per

$$D \ldots 1+\alpha-\alpha+\beta-\beta+\gamma-\gamma+\text{etc.}=1.$$

Sit exempli cauſa data ſeries

$$A \ldots 1-m+m^2-m^3+m^4-m^5+\text{etc.}$$

ſi ſumatur $\alpha=\frac{m^2+m-1}{m+2}$.

$$\beta=\frac{m^2+m-1}{(m+2)^2}=\frac{\alpha}{m+2}$$

$$\gamma=\frac{m^2+m-1}{(m+2)^3}=\frac{\beta}{m+2}\text{etc.}$$

Series A. transformabitur in

$$B \ldots \frac{1}{m+2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\frac{1}{(m+2)^3}+\frac{1}{(m+2)^4}+\text{etc.}=\frac{1}{m+1}$$

Si vero ponatur $\alpha=\frac{m^2-m+1}{m}$; $\beta=\frac{-\alpha}{m}$. $\gamma=\frac{-\beta}{m}$. etc.

Series A. tranſibit in

$$B \ldots 1-\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}-\frac{1}{m^3}+\text{etc.}=\frac{1}{m+1}$$

Scio quidem plerosque ſtatuere ſi in ſerie A quantitas m. ſit maior vnitate ſeriem totam ex praepoſtera diuiſione $\frac{1}{1+m}$ oriri neque adeo huic quantitati aequalem eſſe, ſed etiam ſi iſte modus exprimendi quantitatem finitam per ſeriem infinitam numerorum alternatis ſignis creſcentium neſcio quid inſoliti prae ſe ferat, non tamen video cur omnino reiiciendus ſit, cum ex hoc quod dedimus exemplo appareat eiusmodi ſeries tractabiliores fieri atque in alias aequales terminorum continuo decreſcentium commutari poſſe; adde, quod iſtae ſeries (in quibus termini creſcunt alternatis ſignis) non ſemper ex praepoſtera diuiſione, ſed aliis etiam modis proueniant de qua re alio loco dicemus. Ceterum hac noſtra methodo data quuecunque ſeries A. transformari poterit in aliam B. ea lege vt ab initio habeat terminos quoscunque datos, nam ex quantitatibus α. β. γ. etc. tot poterunt determinari per conditionem problematis quot termini dati fuerint in ſerie B adeo vt haec methodus non ſolum ad caſus transformationis infinitos, ſed ad omnes poſſibiles perducat.

DE

DE BILANCIBVS
ET NOVIS INVENTIS STATICIS

Auctore

Ioh. Georg. Leutmann.

I.

Bilancium γνωσις Mathematicum decet, γενεσις Mechanico debetur. Vtraque et in Theoria et in praxi fundatur, ita, vt hic theoria absque praxi inanis, praxis absque theoria insufficiens reputanda sit. *M. Inn. et seqq. 1727.*

2. Non loquor de bilancibus vulgaribus atque crassioribus, minori ακριβεια et attentione elaboratis, quarum vitia facile dignoscuntur et discernuntur ab accuratioribus, leui adhibito examine. Desudant in his elaborandis opifices, cognitione superficiali imbuti, fundamentalis rudes. Subtiliores et accuratiores mihi curae sunt. Illarum structura ad leges mechanicas examinanda, vitia detegenda, et corrigenda, et tandem leges dandae, ad quarum ductum construantur, vt perfectior prodeat Machina, vsibus aptior.

3. Maxime vero ea, quae ad structuram bilancium docimasticarum et trutinarum pertinent, explicabo, et quomodo examina earum rigidiora instituenda; deinde noua inuenta addam, et discrimen monstrabo

inter haec et bilances iam notas atque vſitatas, tandem ea, quae ad εγχειρησεις ſpectant, expoſiturus. Videamus itaque, quousque ad maximam ακριβειαν per leges Mechanicas, propriam experientiam ſeu praxin et operam manuariam curatiorem progredi licuit.

Cap. I.

De bilancium constructione et correctione.

Reg. I. *Bilancis ſcapi ſeu iugi brachia, vt exactiſſime eandem habeant longitudinem neceſſe eſt.*

4. Putant rerum non ſatis gnari ſcrupuloſam dimenſionem brachiorum bilancium non adeo eſſe neceſſariam, ſed qualemcunque ſufficere, modo aequilibrium vtrique ſit datum. Sed laborant hi praeiudicio, non conſiderantes leges de vecte. Non enim corrigitur per aequilibrium brachiis datum praepondium a longiore vectis brachio dependens; ſed vitium ſe prodit, quando duo pondera ad eiusmodi bilancem aequantur, et deinde commutantur, ita vt ſiniſtrae lanci imponatur pondus in dextra aequilibratum, tunc cognoſcitur brachium longius, per quod praeponderat pondus impoſitum ante commutationem aequilibre cum altero.

5. Criterium itaque atque proba, vti iam dictum in eo conſiſtit, vt duo pondera ſimul in binis lancibus librentur, et reddantur aequalia; deinde commutentur pondera, et obſeruetur exacte, vtrum aequalitatem ſint conſer-

conferuatura. Si enim praeponderat alterutrum, indicium eſt inaequalitatis brachiorum. Itaque ex commutatione lancium atque oneris ſaepius iterata innoteſcit iuſta proportio brachiorum.

6. Corrigitur vulgariter inaequalitas brachiorum, Tab. II. ſi extrema brachiorum auriculis *a* inſtruantur, quarum inflexione et reflexione tandem aequilibrium brachiis conciliatur.

7. Vitium itaque eſt in illarum bilancium ſcapis, quorum extrema tantum foraminulo et clauo traiecto gaudent ad appendendas lances *b*, numquam enim hoc modo ipſis exactitudo aequalitatis conciliari poteſt, id quod in maioribus non adeo percipitur; in minoribus docimaſticis vero magna incommoda atque errores parit. Dimidietur enim duarum drachmarum una, dimidium eius iterum in duas partes aequales diuidatur, idque ſaepius cum quouis dimidio continuetur, tandem omnia illorum ponderum dimidia coniunctim vni lanci imponatur, et vltimum dupletur, altera lanx recipiat vnam illam drachmam primo adhibitam, tunc vitium bilancis facile cognoſcetur, ſi drachmae pondus vel non attingunt, vel illud excedunt, cui tamen aequalia eſſe debent.

8. Quandoquidem vero in maioribus ferreis bilancibus haec incuruatio ſeu flexio non niſi ignita trabis extremitate fieri poteſt, ex quo de grauitate materiae aliquid ſemper decedit, ita vt iuſta proportio haberi nequeat grauitatis aequalis brachiorum; in minoribus vero bilancibus e. gr. docimaſticis facile frangantur auriculae flexio-

flexione saepius vexatae : De nouo inuento aliquo sollicitus fui, et illud feliciter me expediuisse autumo, duobus modis, quorum prior bilancibus maioribus et mediis, alter minoribus et docimasticis egregie conuenit, atque ad ακριβειαν conducit.

9. Prior modus talis est : Incuruentur scapi extrema sursum in A et deinde ad lineam scapo parallelam denuo flectantur. Prodeant extrema hac ratione flexa vtrinque ad, plus, minus, digitum. Applicetur elater recuruatus et semicircularis β, qualem in figura β delineatum dedi. Conficiuntur elateres hi optime ex elatere chalybeo in horologiis minoribus vsitato, qui aequalis crassitiei efformatus inuenitur, id quod maxime necessarium. Addatur deinde canaliculus quadratus D, libere ante et retro mobilis, inferius ad *d* auricula transuersim posita praeditus, et tandem praeponatur cochlea femina E, qua adducta cedit elater, auricula ad axin scapi promouetur, et brachium abbreuiatur ; reducta prolongatur brachium, quia elater canalem D cum auricula sua C repellit atque protrudit.

10. Omnes vero hae partes applicandae cum iis, quae alteri brachio conueniunt, seorsim et aequilibrentur, et eandem recipiant extensionem atque figuram.

11. Vt vero auriculae vtriusque interior acies cum acie axiculi iugi inferiore lineam fere rectam faciat, id, me etiam non monente, bene obseruandum, et obtinetur per incuruaturam extremorum scapi antea explicatam, et per lineam Iconismi GFH delineatam. Necessarium hoc requisitum recte notauit Leupoldus in Thea-

Theatro Machinarum Statico. Part. I. p. 72. Quandoquidem, cum de Instrumentis Meteorognosiae scriberem, atque hanc Methodum exponerem, non succurrit haec meditatio, quam deinde in conficienda tali bilance facile animaduertebam, et Machinam iuxta modum hic datum perficiebam; id quod hic loci indicandum duxi.

12. Alter modus seu inuentio in eo consistit, vt quatuor vel quinque helices cochleae incidantur vtrique extremitati scapi, lineam rectam tenentis, et in extremitatibus non flexi vt antecedens, fiantque binae cochleae femineae *y* extremitatibus scapi applicandae. Cochlearum harum feminearum externa figura torno elaboretur, eisque incidatur in extremo cuiusuis externo crena seu cauitas annularis, recipiendo annulo chalybeo; ampliori foramine et intus acie praedito apta, vt in crena haerere annuli latioris acies, eique filamenta lancium annecti possint. Extremum cochleae femineae desinat in formam rosae, seu rotulae, vt digitis apprehendi et circumduci queat, caeterum Elateres semicirculares β addantur, vt in prioribus indicatum.

13. Priusquam vero cochleae illae femineae et elateres adduntur, iugi brachia, quantum fieri potest, ad eandem longitudinem efformentur, et aequilibrentur exacte; deinde reliqua applicentur, et iterum aequilibrium ipsis ope cochleae concilietur; tandem lances eiusdem exactissime ponderis apponantur, et obseruetur, vtrum aequilibrium sit conseruatura bilanx, saepius lancibus commutatis.

14. Per haec itaque duo inuenta brachium bilancis alter-

alterutrum et elongari et abbreuiari poteſt, donec iuſta aequalitas longitudinis intra axiculum iugi et punctum ſuſpenſionis lancium obtinetur.

Reg. II. *Lingula, ſeu examen ſit ad ſcapum perpendiculare, et in medio eius erectum.*

Reg. III. *Lingula, quo leuior, eo aptior praeponderiusculis indicandis.*

Reg. IV. *Latior aliquantulum et macilentior lingula praeſtat rotundae, quia non tam facile vitiatur.*

Reg. V. *Quilibet ſcapus in medio inferius ſub lingula habeat praeponduſculum lingulam a pondere lanci iniecto inclinatam erigens.*

15. Maximi momenti eſt haec obſeruatio in bilancibus accuratioribus, inprimis in trutina docimaſtica, id quod bene expreſſit Leupoldus in Theatr. Mach. Aut enim (α) axiculus F iugi altius ſit poſitus, vt tota trabs longe infra lineam appenſionis lancium GH dependeat, et grauitate ſua lingulam inclinatam erigat, quod tamen pigram facit bilancem; aut (β) iugum inferius habeat contrapondium L, quod hoc officio fungatur.

16. Sed caute eius grauitas dimetienda. Maior enim huius contrapondii magnitudo bilanci facile quidem aequilibrium demto onere reſtituit, ſed difficilem inclinationem examini permittit. Onuſculum enim lanci impoſitum hoc maius contrapondium remouere nequit, hinc ſitum non mutat bilanx, et lingula differentiam minime indicat, maxime ſi contrapondium hoc longius dependeat. Contrapondium vero minus a minori quidem o-

nere

nere lanci alterutri iniecto dimouetur e situ suo perpendiculari, sed quia illud impar grauitati lingulae, erigere hanc nequit.

17. Necesse itaque est, vt contrapondium hoc aliquantulum praeponderet lingulae, et curta sit eius magnitudo perpendicularis, quae aestimanda et mensuranda ab acie inferiore axiculi iugi deorsum: quo enim longior illa dependet, eo difficilius mouetur.

18. Nam considerandum est vtrumque brachium bilancis, intuitu huius contrapondii longitudinis tamquam vectis recuruatus, cuius brachium minus dat contrapondii longitudo *a*, maius, brachium alterutrum iugi *b*; vis agens est onusculum lanci impositum; onus mouendum; ipsa et grauitas et longitudo contrapondii *a*. Quo breuior illa *a*, eo saepius in longiori brachio *b* continetur; quo maior *a*, eo potentius resistit virtuti impellenti, cuius nisus in maius contrapondium inanis est, quia imbecillior, quam vt illud a situ perpendiculari remoueat atque lingulam inclinet. E. g. Consideretur iconismus *α* huius §. ibi contrapondii longitudo est *a*, quae duodecies continetur in brachio *b*, ergo onusculum aliquod brachio *b* additum duodecies maiorem vim exserere potest in contrapondium ope brachii *b*, quam onusculum nudum absque brachio *b*. Iconismus β dat brachium minus *a* sexies in maiori brachio contentum, ergo vis *b* figurae β, dimidium tantum valet in *a*, in respectu ad figuram *α* Hinc dupla hic onusculi grauitas requiritur ad mouendam lingulam et remouendum contrapondium, id quod in *α* simplex tantum efficit.

19. Vt itaque proportio contrapondii ad lingulam exacte haberi, et curta longitudo brachii minoris esse possit, sequentem excogitaui methodum: In scapi medio sit contrapondium admodum curtum *a*, ex cuius extremo dependeat contrapondium lingulae adhuc aliud *k*, rotundum seu cylindriforme ad dextram et sinistram facile et libere mobile ope articuli, clauulo quadrangulari instructum, cuius infima acies in crenula foraminis spatiosi et rotundi haereat, in cylindro vero fixus sit clauulus, quod quidem contrapondium propter suam leuitatem lingulam *l* inclinatam erigere non valeat, incisa tamen illi sit cochlea mas, cui applicetur cochlea foemina *m*; formae orbicularis, tantae grauitatis, quanta erectioni lingulae sufficiens iudicatur. Haec tam diu grauitate superflua priuetur, donec lingula et a leuissimo pondiusculo lanci imposito differentiam indicet, et tamen demto pondiusculo lingulam iterum erigat.

20. Dico itaque hoc modo facile remoueri contrapondium, linguam inclinari, et onusculi grauitatem praeponderare posse, quia breue brachium *a* vigesies continetur in brachio *b* alterutro scapi, et cum eo constituit vectem recuruatum, cuius hypomochlium est axiculus, vis mouens est aggrauatio lancis, onus mouendum contrapondium *k* lingulae, et quia hoc onus tantum ad latus est mouendum, facilius hoc fieri potest, quam si situs eius perpendicularis in situm obliquum esset conuertendus, cui impar esse vel minimum onusculum facile percipitur.

Reg.

Reg. VI. *Axiculi inferior acies* F, *pauculum supra lineam* GH, *per puncta suspensionis lancium ductam sit posita.*

21. Satis necessarium hoc requisitum ab aliis iam demonstratum, probe obseruandum. α Altius enim positus axiculus iugi, pigritiem inducit bilanci. β in ipsa suspensionis lancium linea situs bilancem dat admodum celerem, et nunquam fere ad quietem redeuntem; γ infra lineam hanc collocatus bilancem plane perdit, vt ea nunquam horizontaliter stare possit, sed demisso alterutro brachio oblique dependeat.

Reg. VII. *Non admodum longe dependeat iugum ab axe, alias pigram et segnioris motus habebis bilancem.*

22. Egregie quidem nutat atque oscillat diutius antequam ad quietem redit illud iugum quod axiculum altius supra scapum habet positum, si lances nondum sint appositae, ignarisque bilancem promittit celerem atque iustam. Sed spe frustrantur, qui hanc in mobilitate talis scapi ponunt fiduciam. Appensis enim lancibus pigram atque inertem experiuntur bilancem. Quo altius enim axiculus supra scapum est positus, eo tardior deprehenditur bilanx, quam vt a minori pondere lingula possit moueri. Contrapondio quidem lingulae non opus habet talis bilanx, quandoquidem dependens trabs vices contrapondii gerit, sed eo ipso difficilius mouetur illa ab onere imposito, cuius ratio Mathematicis clarius patet quam vt prolixa indigeat explicatione. Fiat itaque hoc modo.

23. Ducatur linea quae aciem ſuperiorem clauiculorum appenſioni lancium dicatorum, et aciem inferiorem axiculi iugi fere tangat. Latitudini igitur iugi ſub linea dicta in extremitatibus inſerantur clauiculi ad lances appendendas, ita vt eorum acies ſuperior hanc liteam fere tangat. Deinde diiudicetur et rite ordinenur quantitas contrapondii lingulae, tunc trabs recte erit diſpoſita, e. g. bilanx Tab. II. §. 23. delineata difficulter mouetur, ſi lancibus et pondere aliquo oneratur quanquam lancibus nondum appenſis celerrimam edat vibrationem.

Reg. VIII. *Acies axiculi cis et vltra ſcapum in linea recta ſit poſita, alias pigram facit bilancem. Prodeat quoque ad angulos rectos ex ſcapo in vtroque latere ne ad aginam allidat lingula, maxime ſi agina ſit latior.*

24. Prius hoc obtinetur, ſi loco axiculi *a* in medio latioris et in extremis prominentibus vtrisque acie praediti, ſubſtituatur axiculus figuram parallelepipedi *b* habens. Ille ita per trabem traiiciendus, vt vna acies deorſum altera ſurſum ſpectet, reliquis duabus ad dextram et ſiniſtram reſpicientibus. Poſterius, vt ſcil. axiculus ex ſcapo ad angulos rectos vtrinque procedat, circino explorandum, nempe ex ore foraminis, per quod traiiciendus axiculus ad diſtantiam arbitrariam ſignentur puncta duo in linea recta vtrinque, deinde traiiciatur axiculus et ex punctis his indagetur diſtantia aciei cuſpidis, haec ſi

ae-

aequaliter diſtabit, indicio erit, axiculum ad angulos re-
ctos eſſe poſitum.

Reg. IX. *Axiculi extrema ſint cuſpidata, ita tamen, vt cuſpis ex inferiori acie prodeat, et cum ea in linea recta ſtet, ſurſum vero in decliue abeat.*

25. Frictio illa, quae accidere ſolet α, quando trabs non in medio aginae haeret, vnde ad aginam allidit α, valde detrimentoſa exiſtit. Corrigitur illa β, ſi extrema axiculi vtrinque ad lamellas quasdam *bb* aginae ab extra apponendas impingunt, et quidem in puncto tantum, vt hoc fiat, conducit, ideoque axiculi extremitates ſunt cuſpidandae, quia itaque cuſpis in acie eſt, quae centrum axis ſcapi in vibratione repraeſentat, ideoque nulla fere frictio vel tantum inſenſibilis contingit.

Reg. X. *Agina perpendiculariter dependeat, ita, vt, ſi in ſuperiori nodulo, quem Margaritam vocant, vel potius ante illum, filum cum ponduſculo ſuſpendatur, illud foramen, in quo axiculus mouetur, accurate biſidat.*

26. Obſeruatio haec admodum neceſſaria eſt, ſed difficillime et non ſine magna attentione obtinetur intentio. Si enim in alterutro latere aginae plus grauitatis eſt, decedit agina a ſitu perpendiculari, et lingula ad alterutrum latus margaritae, ſeu noduli ſuperioris declinat. Imo tota forma aginarum vulgarium hoc vitii habet, vt vacillet, et ſitum ſibi mutuo oppoſitorum foraminum axiculo deſtinatorum vitiet.

Tab.III. 27. Huic etiam malo duplici remedium accommodaui, et aginam a vulgari forma plane alienam adhibui, quam nunc describam: α, β, γ.

Ex lamina vnica latiore A aginam confeci, lamina superius et inferius *a* et *b* recuruata: ita, vt antica pars aperta remaneret, et lingula nuda γο. crure aginae nullo tecta, conspectui se sisteret. In laminae huius latioris inferiore parte, longum et latum foramen *cc* incidi, ita vt illud quadret ad recuruatum et sursum inflexum inferius extremum. Illud foramen inferius vbi desinit, et pars aginae ima sursum flexa, recipiunt, tanquam fulcra duo, axiculum scapi, vt in illis haerere et iugum librare se possit. In recuruato illo aginae extremo incidatur semicircellus *d*, pisi magnitudine, e regione foraminis longioris *c* laminae oppositae, et in eius medio fiat rimula tenuissima, in qua quiescere possit axiculus, id quod in longiori foramine ex opposito sito etiam fiat, ita, vt crenae hae duae sibi opponantur mutuo, aptaeque sint excipiendo axiculo scapi, immissaque deorsum trabe in aginam, axiculus haereat in duabus istis crenulis. In superiori aginae spatio inter latum eius dorsum et extremum incuruatum existente, aptetur lamella, et in illa rimula tenuis, duarum circiter linearum longa incidatur, vt per illam lux conspici, ad instar lineae lucidae perperpendicularis possit. Ex ea indicatur lingulae perpendicularis, situs, si scil. medium aginae occupat, cum rima ista lucida lineam rectam constituit, et nec ad dextram, neque ad sinistram deflectit. Lamella ista per cochleam perpetuam *gg* transuersim positam mobilis sit, vt vt in vtrumque latus promoueri, et si rectum situm, medium scil. in agina adquisiuerit, immobilis manere possit. Prodeat illa lamella rima instructa *f* supra aginam eamque cum articulo mobili *x* excedat *b* et suspendatur ex vno quadrangulari *k* in alia lamina firmiore *l*, ita firmato, vt durius, sed tamen in gyrum moueri atque circumduci possit, id quod obtineri potest, si in tergo laminae firmioris *l* ope cochleae *m* bene adducatur, vt duriorem circumgyrationem nanciscatur. Ope huius vnci circa suam axin mobilis, agina et ad dextram et ad sinistram agi, et ita perpendicularis situs rimulae ad situm axiculi scapi obtineri potest. Cognoscitur vero aginae perpendicularis situs, et recte positam esse lamellam, quae rimam incisam habet, si ex acicula aliqua *n*, ante rimulam *f* in incuruato extremo aginae superiore *a* firmata, demittatur filum *p* perpendiculare, crenam aginae *d*, axiculum recipientem, et rimulam lamellae superioris *f* qui in arcu aliquo magnitudinem aginae situs mutati notet. Tandem ad inferiorem aginae partem anteriorem tegens et occultans. Addatur ad vncum *k* indiculus *q*, et posteriorem lamellulae duae *s*, *t* ordinentur (v. Tab. II. β it. Tab. I §. 23. β) ope aliquot exiguarum cochlearum, vt ad illas allidant axiculi cuspides, et scapus in medio cauitatis aginae permaneat. Fundus aginae *u* in medio pateat, vt per foramen patens contrapondium lingulae *yz* transmitti, libereque moueri queat. Ex hac structura agina nouam formam adquisiuit, qua mediante et scapus sine frictione maiori facile moueri, allisio ad aginam inhiberi, margarita, vel eius loco rima superioris lamellae *f* ad crenam

d, axi-

d, axiculum excipientem perpendiculariter agi, totaque bilanx in ſitum accurariſſimum poni poteſt.

Vitium vero illud leuioribus ſcapis et aginis docimaſticarum bilancium frequens, quod ſcil. axiculus non ſemper ad punctum imum et perpendiculare foraminum rotundorum aginae deſcendit, ſed ad alterutrum latus perſiſtit, vnde lingulae deuiatio accidit, penitus tollitur, alio modo vix corrigibile. Hac enim in agina axiculus ſemper in crenula ſua haeret atque permanet, etiamſi leuior ſit trabs, perpendicularem alias deſcenſum ad imum foraminum aginae propter leuitatem nonnunquam eludens.

28. Denique ad recte inſtruendam bilancem hoc modo agatur:

1. Dependeat filum *p* cum ponduſculo ex acicula *n* ſuper rimam ſuperioris lamellulae in medio aginae conſtitutam. Quod ſi filum tegit hanc rimam, et conſpectum lucis inhibet, inferne vero crenam axiculo dicatam etiam occultat, bene ſita eſt agina, et correctione non indiget. Sin minus, circumducatur aliquantulum uncus ſuperior quadrangularis *k*, eousque, donec ad datam normam dependeat filum *p*.

2. Imponatur trabs cum contrapondio lingulae in aginam absque cochleis foemineis et elateribus extremis ſcapi dicatis, et fiat, vt lingula in linea recta cum rima ſuperiori lucida *f* conueniat, id quod obtinebitur demendo aliquid lima de brachio praeponderante.

3. Conuertatur iugum ita, vt ſiniſtrum quod fuit brachium, fiat dextrum et obſeruetur, vtrum rima lucida

et

et lingula adhuc rectam teneant lineam. Item ne lingula allidat, ad latam aginae lamellam, seu dorsum aginae.

4. Eximatur iterum iugum, et applicatis extremitatibus, cochleis foemineis et elateribus, exploretur circino, vtrum crenae excipiendis annulis filamentorum lancium destinatae in aequali distantia ab acie axiculi scapi distent, et accommodentur postulato. Hoc modo parata trabs aginae immittatur, et obseruetur, vtrum adhuc lingula cum rima transparente *f* conueniat. Si illa deuiat, abradatur aliquid de elatere praeponderantis brachii, eousque, donec aequilibrium erit conciliatum.

5. Tandem appendantur lances aequalis plane ponderis, et si alterutra praeponderaret, ope cochlearum (§. 12.) extremitatum, pauculum id, quod restat, corrigatur.

6. Commutentur lances, et si omnia recte fuerint obseruata, differentia nulla dabitur; sin minus, quaeratur vitium, et corrigatur ad datas obseruationes antecedentes.

Dico, hac ratione bilancem bene instructam prodituram, et palam fieri vitia, in antecedentibus notata et bilancibus plerumque adhaerentia esse correcta.

Cap. II.

Noua bilanx absque lingula admodum celer atque accurata.

Tab. IV. 1. Quandoquidem obſeruaueram, quod lingula eiusque contrapondium multum impediat bilances, quo minus leuiſſimum onuſculum indicent, eiusque grauitatem prodant, de alia bilancis forma ſolicitus fui, et meditationes meae ſequentem optimae ſpei foetum, vt mihi videtur, conceperunt, ipſa deinde praxi obſtetricante Mechanica, in lucem editum, exſpectationique omnino reſpondentem. vid. Tab. IV.

2. Fiat ſcapus ſeu iugum AA, chalybeum, ſed lingula deſtitutum, inferius latus *aa* lineam rectam referat, reliqua vero latera in medio ſcapi *b* turgeſcant, et ad triplam partem craſſitiei ſcapi in latum et altum exſurgant, craſſioresque ibi relinquantur.

3. Medio in latere inferiore excauetur ſcapus ad *c*, et ſemicirculare ei incidatur foramen inferne apertum. Huic foramini *c* in ſuperiori medio incidatur crena transuerſa, vix oculis conſpicienda, ſed tamen, ſi cultelli aciei imponatur iugum, vt ſenſibiliter in ea haereat. Sit illa crena exacte elaborata, lima ſubtili, angulum in acie 90° habente, leuiter inciſa, et tali etiam chalybe politorio optime laeuigata. Crenula haec punctum erit ſuſpenſionis, grauitatis, et quietis, quod in aliis bilancibus axiculus ſuppeditat.

4. Ex

4. Ex hac crenula *c* vtrique brachio concilietur exacte aequalis - longitudo. Incidantur extremitatibus cochleae mares *d*, et aptentur cochleae foeminae γ, quales etiam §. 12.Cap.praec.Tab.I.sub litera γ delineauimus, vna cum elateribus β et annulis latis *x*. In quauis extremitate scapi prodeat lata lamellula *f*, sed non crassa. Demitur scil. ad duas vel tres lineas digiti cochleae pars crassitiei superior et inferior, relicta in medio latitudine extremitatis, ita vt lamellula ista *f*, in eius cuspide ad 3. vel 4. lineas promineat, et scapus bilancis erit paratus.

5. Deinde fiat lineale orichalceum BBB, in extremitatibus ad digitum dimidium incuruetur *gg* ad angulos rectos ita, vt in antica parte duae pinnulae *gg* prodeant, cum lineali angulum rectum constituentes.

6. Cuiuis harum pinnularum adaptetur ab extra, cochlea perpetua *h* in suis sustentaculis *mn* mobilis, in situ perpendiculari, quo mediante lamellula quaedam *p*, 1 lineam crassa, et 3 lata sursum atque deorsum agi possit. Excedat lamella in longitudine pinnulas, et prodeat *k* ante eas versus centrum linealis. Rimula etiam admodum angusta *q* prominentiis istis incidatur, ita, vt lineale cum istis rimulis lineam rectam et parallelam faciat. In linealis latitudine, post illas rimulas e regione fiat foramen *r* amplum 3 vel 4 linearum in diametro, luci admittendae dicatum, ita, vt per rimulam linea *q* lucida transpareat.

7. Lineale in medio *l* ex vtroque latere crassius reddatur, adfirmatis duobus frustulis orichalceis, *ss*, et per ea perfringatur foramen *t* tres lineas longum et

duas latum, inferne duos angulos rectos habens, ſuperne ſemicirculare. In medio ſemicirculari incidatur leuiſſima crenula, quae aciei cultelli impoſita in ea haereat, ex qua deinde lineale ſuſpendi atque librari poteſt.

8. Dependeat etiam ex medio linealis lamina W ſat grauis, vices perpendiculi gerens, quod lineale e crenula *t* ſuſpenſum ad ſitum horizontalem ſemper dirigat, atque in eo conſeruet. In perpendiculari iſta lamina W dimidium digitum infra foramen *t* ſuſpenſionis fiat, foraminulum *u*, ex quo dependeat filum cum ponduſculo *y*. Et ſic lineale hoc etiam erit confectum.

9. Iam de ſuſtentaculo vtriusque et ſcapi A, et linealis B perpendiculo praediti ſolliciti ſimus. Fiat lamella 5 circiter digitos longa C, dimidium lata, et ſeſquilineam craſſa. In ſuperiore extremo pertundatur foramen *x*, ex quo ſuſpendi lamina poteſt, Vnum digitum et ſemiſſem infra hoc foramen *x* prodeat cultellus *z* aciem ſurſum vertens. Huic aciei imponendum primo lineale B, deinde iugum bilancis A.

10. Quandoquidem vero onerato hoc modo cultello *z*, lamina C, ex ſitu perpendiculari recedit, et efficit, vt etiam cultellus ſitum nanciſcatur decliuem, ideo in infima parte laminae e tergo prodeat cochlea mas *e*, duos digitos longa, cui applicetur rota O grauior, cochlea foeminea in medio inciſa. Reducta ad extremum cochleae hac rota, contrapondii vices recipit, laminam C ad ſitum perpendicularem adigens, et cultello *z* horizontalem reſtituens; adducta, nimiam laminae propenſionem retrahens.

11. Con-

11. Conſtructionem quod attinet atque iuſtificationem bilancis, haec ſequentem in modum inſtituatur.

1. Suſpenſo lineali B ſuper cultellum *z* ſuſtentaculi C exploretur ope fili perpendicularis *y* infra crenam ſuſpenſionis *t* linealis B aptati, vtrum lineale, vel rimae *q* in pinnulis *gg* verſatiles rectam teneant lineam horizontalem; ſi non, ea inducenda ope cochleae perpetuae *b*, cuilibet pinnulae *g* applicatae.

2. Imponatur cultello *z* etiam ſcapus A, absque elateribus et cochleis, et aequilibretur, donec lamellae extremitatum ſcapi *f* cum rimulis lucidis *q* lamellarum verſatilium in recta ſtent linea horizontali, et conuerſo ſcapo, vt brachium dextrum fiat ſiniſtrum, idem contingat.

3. Scapo hoc modo praeparato apponantur cochleae foeminae γ, absque elateribus, et ex crena ſuſpenſionis *t* ope circini concilietur aequidiſtantia crenulis δ cochlearum foeminearum γ ſuſpenſioni lancium dicatarum.

4. Suſpendatur iterum ſcapus A et aequilibretur; demendo de ſuperflua grauitate cochleae foeminae praeponderantis.

5. Addantur elateres β, et ſi aequilibrium ab iis fuerit vitiatum, tantum lima ab elateribus dematur, quantum opus fuerit ad aequilibrium ſcapo reſtituendum.

6. Tandem addantur lances exacte aequiponderantes.

7. Quod vero in aliis bilancibus lingulae officium eſt, id praeſtabit in hac lamellula *f* alterutra in extremi-

tatibus ſcapi prominens. Si itaque per rimulam *q* laminae verſatilis *p* linea lucida conſpicitur, iudicetur, vtrum lamellula alterutra *f* cum ea rectam conſtituat lineam, quodſi contingit, onus omnino cum pondere concordat, ſin minus, differentia inter vtrumque manifeſtatur, adiectis ponderibus determinanda. Quod vero celeritate eximia haec bilanx gaudeat, et minimum onusculum prodat, hoc ex eo eſt, quod onuſculo nullum linguae contrapondium obſtat, et praepondium eius impedit. Caeterum regulae ad bilances in praecedentibus datae, non ſunt negligendae, in quantum applicari hic poſſunt: e. gr. Vt punctum ſuſpenſionis lancium pauxillum infra aciem cultelli adornetur, qui hic vices axis ſcapi gerit, et quae ſunt huius generis alia.

12. Praerogatiuam et vſum quod concernit huius bilancis, ille in re Metallurgica maximi eſt momenti, praecipue in probatione☉, vbi minima corpuſcula, et fere atomi ſub cenſuram atque examen trahuntur.

13. In ponderibus probatoriis, maxime ad Denarium probatorium conficiendum apprime officio ſuo ſatisfacit, adeo, vt, cum vulgarium bilancium probatoriarum celeritas vix vulgaris pondo particulam elementarem ſc. $\frac{1}{151072}$ indjcet, haec bilanx omnino $\frac{1}{4194304}$ particulam vnius Pondo oculis ſiſtat, et $\frac{1}{32768}$ partem vnius Drachmae trahat.

14. In experimentis Phyſicis accuratiorem indagationem poſtulantibus, vt et aliis inſenſibilibus grauitatibus corporum naturalium expiſcandis egregie conducit. Et quae ſunt reliqua.

15. De

15. De hac bilance vereor, vt quis artificum inueniatur, qui iustificare eam possit, quandoquidem structura facilis est, iustificationem vero mille difficultatibus implicatam et tantum non impossibilem inueni, re ipsa tamen a me praestitam et Societati nostrae inclutae in concione demonstratam dedi.

Exactissima manuductio ad iustificationem huius bilancis consequendam.

1. Quandoquidem haec bilanx facilioris quidem elaborationis est quam aliae docimasticae, iustificatio tamen propter summam accurationem atque celeritatem, minimum etiam praepondium indicantem, admodum difficilis, imo, regularum artis ignaro, plane impossibilis erit, hinc modum laboriosum quidem sed certum atque sincerum docebo, quo neglecto nulla alia dabitur via ex his tricis sese explicandi et iustificationem bilancis obtinendi:

1. Scapus A absque cochleis et elateribus extremorum aequilibretur exacte: Id vt fieri possit, quandoquidem lingula destituitur scapus, hoc modo agatur.

2. Suspendatur lineale B ex laminae C cultello *z* vt perpendiculum linealis *w* respondeat perpendiculo ipsi addito *y* et filum hoc cum linea illius perpendiculari concordet, id quod obtinetur grauitatem praeponderantis brachii linealis B minuendo, et tunc recte se habebit situs linealis horizontalis.*

3. Addatur scapus A et ante lineale eidem cultello *z*

lo z imponatur, absque cochleis γ et elateribus β, et obſeruetur quantum illius lamellula *f* a linea lucida *q* ſiniſtrae auriculae diſtet.

4. Linea illa lucida *q* ope cochleae *b* lamellam *p* et rimulam *q* dirigentis, adducatur ad lamellulam *f* ex brachiis ſcapi prodeuntem, et cum ea faciat rectam lineam.

5. Conuertatur ſcapus et obſeruetur quantum ſcapi lamella altera *f* diſtet a rimula *q* auriculae lucida.

6. Dematur a praeponderantis brachii ſcapi A grauitate, vt lamella *f* dimidiam partem propius accedat ad lineam lucidam *q*.

7. Linea lucida *q* alteram dimidiam partem acceſſionis abſoluat, et ad lamellam *f* promoueatur, adducendo et reducendo cochleam eius perpetuam *b*.

8. Conuertatur ſcapus et videatur vtrum concordet eadem linea lucida *q* cum lamellula *f* alterius brachii, ſi non, corrigatur vitium ex ante dictorum monitis.

9. Tandem omnia ita diſponantur, vt lamellae *ff* vtraeque cum vtrisque lineis lucidis *qq* accurate conueniant et conuerſo etiam ſcapo idem ſemper eueniat, et quando omnia recte ſe habebunt, ſcapi correctio et aequilibratio erit abſoluta, lineaeque lucidae horizontaliter erunt poſitae.

10. Cochleae iam foemineae absque elateribus apponantur ad ſcapum, et ex centro grauitatis ſcapi ſeu crenula ſuſpenſionis *t* ope circini menſuretur ſitus ſeu diſtantia crenarum cochleis foemineis *ii* inciſarum vt ambae

ambae *ii* eandem nanciſcantur diſtantiam ab iſta crena *t* ſcapi.

11. Suſpendatur ſcapus A et de praeponderantis brachii cochlea foeminea γ in extremo tantum abradatur quantum ad aequilibrium brachiis reſtituendum ſufficit, conuerſo ſaepius ſcapo.

12. Addantur ad cochleas foemineas elateres β et reconciliata crenis *ii* aequidiſtantia a crena media *t*, ſuſpendatur iterum ſcapus et redigatur ad aequilibrium, grauitatem elateris (non cochleae foeminae) brachii praeponderantis minuendo, et conuerſio ſcapi non negligatur.

13. Appendantur lances diligentiſſime ad eandem grauitatem redactae et obſeruetur vtrum aequilibrium ſeruet bilanx; ſi ab eo deflectit dematur aliquid de praeponderantis brachii cochlea foeminea (non de elatere) donec aequilibrium fere, ſed non totum, fuerit inductum, et denuo remoueantur lances, et ſcapus absque lancibus reducatur iterum ad aequilibrium imminuendo grauitatem elateris (non cochleae) praeponderantis brachii.

14. Suſpendantur iterum lances et agatur ad praeſcriptum §. 13. Cap. praecedent. idque quod in §§. 11. 12. 13. dictum repetatur ſaepius, donec bilanx prodeat omnibus modis abſoluta et correcta.

15. Tandem examen rigoroſum ſubeat bilanx. Oneretur vtraque lanx tanto pondere quanto ſcapus ſufficit ferre e. g. cuiuis imponatur vna vncia, et aequilibrentur ambae exactiſſime, deinde commutentur lances, quod ſi aequilibrium iis manet, recte ſe habet bilanx, ſin minus,

quaeratar error iuxta praecedentium §§. monita et corrigatur donec desideriis erit satisfactum.

2. NB. Obseruatio lamellularum *f* et linearum lucidarum *q* ita instituatur: Bilanx ad fenestram conclauis locetur, vt per foramen *r* et rimulam *q* lux transpareat. Deinde oculus obseruatoris ita situetur, vt lineae lucidae *qq* in medio foraminis *r* conspiciantur et neque altiores neque demissiores appareant sed diametrum horizontalem referant foraminis rotundi *r* ad hoc si attenditur, tunc semper ex eodem puncto visionis obseruationes rite et aequaliter erunt adornatae.

Methodus lances ad aequale pondus redigendi.

3. Cum vero vulgaris trutina seu docimastica minimum illud praepondium alterutrius lancis non prodat, in hac ipsa vero bilance summa aequalitas lancium requiratur tali modo agendum vt lances eandem recipiant grauitatem.

1. Quando scapus, cochleis foemineis *ii* et elateribus suis instructus, aequilibratus est, et, conuersus saepius, cum rimula lucida ad sinistrum latus semper concordat sicuti §. 1. momento 12. traditum tandem appendantur lances cum suis filamentis et annulis latis.

2. Notetur in auriculae *g* margine prominente altitudo lamellae scapi *f*.

3. Deinde commutentur lances vt dextra fiat sinistra

niſtra et lamellae *f* altitudo iterum ſignetur in margine prioris auriculae *g*.

4. Diſtantia duorum iſtorum ſignorum dimidietur et ſigno notetur.

5. De lance praeponderante et infra hoc ſignum deſcendente tantum abradatur lima, vt tandem cum ſigno praedicto conueniat lamella *f*.

6. Commutentur iterum lances, et ſi lamella *f* ad datum ſignum repetit ſuam ſtationem, res erit peracta, et lances habebis exactiſſime aequiponderantes.

7. Tandem agatur ad praeſcripta monitorum §. 1. membri 13. ſſ.

Cap. III.

De bilance cum centro ſeu axiculo ſcapi mobili.

1. Quandoquidem vero in accurata bilancium conſtructione operationem fere impoſſibilem reddunt, planeque defatigant artificem tria haec neceſſaria requiſita (1) inueſtigatio centri bilancis ſcapi ad aequalem brachiis longitudinem dandam. (2) Inductio aequalis grauitatis brachiorum, quae modo ordinario peragitur lima, aliquid vel a dextro vel ſiniſtro brachio demendo, cum leuiori nihil addi poteſt. (3) Conciliatio concordiae, inter aequalitatem et longitudinis brachiorum et grauitatis quia inquiſitionem in aequalem longitudinem et grauitatem ſimul, opus longe difficillimum inueni. Elongato enim breuiori brachio, alterius grauitas vitiatur; corre-

cta grauitate, elongatio iterum eſt caſtiganda, donec proportio inter vtriusque correctionem obtinetur, quae ſi non caſu tandem inuenitur, exercitatiſſimum etiam mechanicum proſternit atque a labore vlterius proſequendo deterret, quia trabem ſaepius limatam graciliorem, et oneri ferendo imparem vtplurimum reddit, ideoque plane inutilem atque deperditum.

2. Anniſus itaque ſum vtrisque prioribus deſideratis ſubuenire, vt tertium eo facilius obtineri poſſit, et deperditio totius operis praecaueatur. Id ſequenti inuentione feliciter conſecutus ſum, et feliciſſime expediui, ita vt haec et trutinis ſeu docimaſticis ſubtilioribus, et bilancibus maioribus, ponderationi centenarii et vltra dicatis, ſiue illa lingula inſtructae, ſiue absque lingula adornatae fuerint, applicari póſſit, et ſic accurationem bilancium ad ſummum fere perfectionis faſtigium adductam arbitror. Inuentionem indicabo:

Tab. V. et VI. 3. Fiat ſcapus A pedem longus cuius extremis cochleae mares *bb* inciſae ſint, ad longitudinem fere digiti. Creſcaut eius brachia pedetentim centrum verſus, vsque dum tantum incrementi acquiſiuerint, vt ſpiſſiores cochleae mares *aa* vtrique brachio prope centrum ſcapi, incidi poſſint, ad longitudinem dimidii digiti, vt hoc modo earum foeminae *ee* ſine impedimento et libere admittantur ab illius maribus *bb* tenuioribus. Medium *d* ſcapi fiat quadrangulare, latitudine craſſitiem dorſi ſuperans, longitudo fere ſemidigitalis ſit. In maioribus bilancibus omnia adornentur ad proportionem.

4. Fiat ephippium D dorſo ſcapi proportionale cuius

cuius latera plana anterius *a* et posterius *b* formam habeant in fig. D. expressam. Inferior pars laterum in extremitatibus duabus cochleis *cc* transuersis connectantur, cochleae autem cylindrulis cauis *yy*, et mobilibus intra ephippium induantur, vt in cauo ephippii scapus super eos commode porro et retro versari possit. Dependeat vero anterius latus in forma trianguli $\frac{1}{3}$ digiti infra scapum deorsum *k*. Per vtrumque latus ephippii fiat foramen *f* in posteriori latere apertum inferius, in anteriori in angulum perquam acutum desinens, superna in parte sit vtrumque semicirculare, in quorum apicibus incidatur crenula, hypomochlio dicata, perpendiculariter supra angulum inferiorem acutum, ex quo angulo suspendendum erit filum illud orichalceum ponduscul *g* oneratum, quod scapo post librationem situm horizontalem restituit.

5. Ad extrema scapi applicentur rotulae cochleis foemineis patulae *zz* ex vna tantum parte, ex altera clausae, vt extremis scapi firmiter applicari possint, ex clausa parte rotularum prodeant lamellae *oo* perpendiculariter positae et tenues, horizontalibus crenulis donatae, longae sint 2. lin. latae 1$\frac{1}{2}$ lin. crassae $\frac{1}{2}$ lin. Rotulis illis crena circularis torno incisa sit ex qua lancium funes annulo latiori *xx* annexi dependeant, eodem modo vt in praecedenti bilancis descriptione Cap. II. §. 4. et Cap. I. §. 12. indicatum.

6. Ad reliquam partem cochlearum marium *bb* vtriusque extremitatis scapi applicentur binae cochleae foeminae, vna in forma rotulae *y* altera *u* in eadem for-

ma, ita tamen vt duo cornua promineant ex latitudine, ad circumducendam cochleam. Hae cochleae foemineae *yy* et *uu* in longioribus cochleis maribus *bb* cis et vltra gyrari possunt ad aequilibrium brachiis inducendum. Duplicatae sint, vt vna ad alteram durius adducta, vtraeque sibi firmius incumbant, ne a leui attactu loco depelli possint, sed immotae locum assignatum seruent.

7. His itaque peractis componatur tota bilanx hunc in modum: Scapus A immittatur in ephippium E. Duae cochleae maiores *cc* cis et vltra ephippium addantur. Deinde vtriusque cruris cochleis masculis minoribus *bb* applicentur binae matres *yy* et *uu*, quae se inuicem tangant. Porro apponantur ad extrema brachiorum cochleae *zz* crena annulari donatae, quibus deinceps imponantur annuli *xx* cum dependentibus lancibus. Tandem suspendenda erit tota bilanx per foramen medium *f* ephippii D.

Tab. VI. 8. Antequam vero suspendatur haec bilanx conficiendum erit lineale BBB cum sua lamina perpendiculari *w* quemadmodum hoc descriptum extat Cap. II. §. 5. ff. Non tamen necesse est, vt hoc lineale in vtrisque extremis eandem habeat formam quam ibi delineauimus sed brachium sinistrum formam illam habeat necesse est, dextrum vero desinat in cochleam crassiusculam marem 2. digit. longam *a*, cui adiiciantur binae cochleae foeminae, quarum vna *b* instar rotae seu orbiculi, altera *d* cum manubriis binis efformata sit. Hae cochleae ad centrum scapi ductae brachium hoc linealis leuius, reductae grauius faciunt.

9. Sus-

9. Suſpendatur hoc lineale ex cultello F tanquam clauo ſuſpenſionis et linealis et bilancis; ita vt perpendiculi *y* filum, lineae per medium laminae deſcendenti reſpondeat, quod cochlearum foeminearum *b* et *d* promotione obtinebitur. His recte ſeſe habentibus ſuſpendatur ex eodem cultello F tota bilanx per foraminis medii *f* ephippii D crenulam ſuperiorem cuius inferiori angulo addatur ponduſculum *g* tunc tota machina erit adornata.

10. Iuſtificatio bilancis hoc modo inſtituatur: Redigatur ad aequilibrium ſcapus ; id quod ex crena brachii, crenae linealis BBB in linea recta reſpondente cognoſcitur. Hoc vt eueniat ducatur ephippium ope adiacentium cochlearum *cc* quantum fieri poteſt ad medium ſcapi punctum et cochleae combinatae *yu* brachii praeponderantis vlterius verſus ephippium promoueantur, ſic grauius brachium leuius redditur, et alterum leuius grauitate augetur. Non itaque neceſſe habebis limando grauitatem praeponderantis brachii minuere.

11. Recte conſtituta hoc modo bilance, binis lancibus imponantur binae vnciae accuratiſſime iam aequilibratae, et obſeruetur vtrum bilanx recte adhuc ſe babeat, an vero vnum brachium praeponderet, quod ſi poſterius, indicio eſt, brachia aequalis longitudinis non eſſe, hinc praeponderans brachium abbreuietur promotione ephippii per cochleas appoſitas, et aequalitas grauitatis brachiorum, hac ratione per protruſionem ephippii vitiata corrigatur per cochleas compoſitas *yu*. Idque continuetur tam diu, donec bilanx et cum impoſitis iſtis vnciarum ponderibus, et ſine iſtis, ſitum eundem

dem retineat, crenulaeque extremitatum lineam rectam conferuent et fic iuftificatio bilancis erit perfecta.

12. Haec de bilancibus absque lingula. Si vero bilanx lingula expetatur inftruenda, firmetur in ephippio lingula exacte fuper crenula hypomochlio dicata, reliqua omnia fiant vt in antecedenti defcriptione tradita, modo per ephippium traiiciatur et prodeat axiculus, ille inftruatur vt Cap. I. §. 21. 23. 24. 25. dictum et tunc fcapus in ephippio erit mobilis. Trabs vero imponatur in aginam iuxta Cap. I. Reg. X. §. 27. adornatam. Lineali vero BBB cum lamina perpendiculari *w* hic opus non erit. Ad hunc modum maiores etiam bilances adornari poffunt, ita vt ad praepondium oneris minimum indicandum aptae inueniantur.

Cap. IV.

De bilance docimastica singulari ponduscula probatoria mole octies auctiora admittente.

Tab. VI. 1. Animum denique induxi eiusmodi bilancem probatoriam conficere quae ponderibus ordinariis octies maioribus onus octies minus indicare valeat, eum in finem vt pondera probatoria eo exactius in minima diuidi poffint. *E.* g. Onus drachma graue aequiponderabit ponderi octo drachmarum feu vnciae. Si itaque drachma in 100 partes diuidenda, tunc loco drachmae vncia

vncia in 100 particulas dispescatur quarum quaeuis centesimae drachmae parti aequiualebit. Non difficilis factu mihi res videbatur quam aggressus hunc in modum perfeci.

2. Primo elaboraui lineale BBB cum lamina perpendiculari *w* et perpendiculo ex filo super linea verticali dependente, quale Cap. II. §. 5. et Cap. III. §. 8. descriptum.

3. Scapum confeci cuius brachia inaequalis erant longitudinis, superabat enim sinistrum A octies dextrum Z scil. si spatia intra puncta suspensionis lancium, et hypomochlium seu punctum suspensionis scapi consideres, vlterius vero extendebatur illud brachium Z ad vnum digitum a puncto illo suspensionis lancis. A sinistro A dependebat lanx ab extremitatis puncto fixo, dextrum vero brachium Z prope hypomochlium bilancis erat quadratum *a* et desinebat in cochleam marem *r*.

5. Prope hypomochlium affixum erat elastrum *s* quod nitebatur in cylindrum *t* in medio foramine quadrangulari praeditum, brachio *z* proportionale, vt cylindrus ibi sit mobilis. Ad cylindri extremum transuerse traiectus erat axiculus *m* lancis appensioni dicatus, a cuius prominentibus extremis dependebat longior auricula *p*. cum vnco *b*. Vltimo loco cochlea foeminea *q* et *l* addebatur, qua mediante cylindrus *t* cum axiculo *m* suspensioni lancium inseruiente ad crenulam *f* seu punctum suspensionis scapi, propius adduci vel remoueri potest ad elongationem et abbreuiationem brachii Z.

6. Scapus lingula erat destitutus et suspendeba-

tur in crenula *f* ſuper cultello F vt antecedentes bilances. Brachium longius A in vltima extremitate deſinebat in tenuem lamellam *z* crena *o* inciſam, quae etiam ex antecedentibus iam nota ſunt.

7. Tandem ad brachii breuioris *z* auriculam dependentem *p* apponebatur cylindrus cauus X in ſuperiori parte cochlea *b* clauſus cum foramine *k* quod ad ſuſpenſionem cylindri X facit, inferius orificium cylindri erat imperuium, vnco tamen *g* etiam praeditum ad recipiendam lancem cum ſuis funiculis. Haec totius machinae ſtructuram abſoluebant.

8. Iuſtifiationem huius bilancis quod attinet, ea tali modo adornetur: Suſpendatur bilanx ex ſcapi crenula *f*, ſpatium intra punctum ſuſpenſionis lancis et punctum ſuſpenſionis ſcapi *f* brachii maioris A diuidatur in octo partes aequales, et fiat alterum illud ſpatium minoris brachii Z octies minus, ita vt $\frac{1}{8}$ tantum longum ſit. Deinde tantum iniiciatur plumbi diminuti in lancem minoris brachii Z quantum ſufficit ad ſcapum in ſitum horizontalem ducendum, vt crenulae *o* extremi ſcapi et *k* lineolis BBB horizontalem lineam conſtituant. Poſtea in lancem minoris brachii Z ponatur 1 uncia ſeu 8 drachmae, et in lancem maioris brachii A 1 drachma, vtrisque ponderibus exacte ad trutinam paratis, et obſeruetur vtrum ſcapus ſeruaturs ſit ſitum priorem ſcil. horizontalem. Si brachium minus Z praeponderabit, eximatur aliquid plumbi ex eius lance, et adducatur cylindrus *t* cum axiculo *m* aliquantulum ad crenulam *f* ope cochleae *q*. Si vero brachium A grauitate praeualeat, adda-

addatur pauxillum diminuti plumbi ad alteram lancem brachii Z et ſimul cochlea q reducatur. Idque tam diu iteretur atque tentando inueſtigetur, donec bilanx et cum ponderibus et absque ponderibus recte ſuo fungatur officio et tunc omne plumbum ex lance eximatur, cylindrus X aperiatur eique iniiciatur, vt qui ad eum finem factus eſt, claudatur iterum, et bilanx deſideratum dabit effectum.

9. Huius bilancis ope pondera probatoria maiora fiunt mole, et tamen ordinariis ponderibus aequipollent, e. g. 1. vncia vicarius eſt 1. drach. 1. loth vices gerit $\frac{1}{2}$ drachmae, et ſic porro, ita vt pondera ſemper octies maiora onere ponderando emergant.

10. Vſum hunc habet bilanx, vt ſi e. g. una drachma in centrum partes diuidenda ſit, ex qua diuiſione exiles valde emergunt partes, tunc loco 1. drachmae diuiditur 1 vncia in 100 partes et $\frac{1}{100}$ vnciae idem praeſtat ac $\frac{1}{100}$ drachmae, niſi quod haec particula vnciae mole octies auctior oculis ſe ſiſtat. Et ſic vtilitatem atque commoditatem praebebit haec bilanx non ſpernendam.

Cap. V.

De fulcimento quodam bilancium probatoriarum commodo.

1. Non poſſum quin artificibus metallurgis commodum fulcimentum proponam cuius ope bilances ad

quietem rediguntur, ita vt non opus ſit eas ſusque deque librare, quod vulgo fit, et nunquam ſine vacillatione machinulae peragi poteſt; ſed ſuſtentaculum, ſuper quo quieſcunt lances, deprimitur incommota manente bilance.

2. Aſſeruatorii ſeu ciſtulae bilancis fundus X diuidatur in tres partes aequales lineis duabus *a* et *b* ſecundum longitudinem ductis, quas biſecet transuerſim ducta alia, *c*.

3. Ex puncto interſectionis, quod tergo ciſtulae proximum eſt *d*, parallelepipedium A $1\frac{1}{2}$ dig. Ruten. decimal. latum, $\frac{1}{2}$ dig. craſſum vltra mediam ciſtulae altitudinem normaliter aſſurgat.

4. Vertici parallelepipedi A crena incidatur 1. dig. long. $\frac{1}{2}$ lata *e*, cui immittatur prominentia alius cuiusdam parallelepipedi B priori ſimilis, haec prominentia exacte quadret in prioris crenam, ita vt duo parallelepipeda, ſi ſibi mutuo immiſſa fuerint, vnicum parallelepipedum conſtituere videantur. Inſerta crenae prominentia cum ea articulum efficiat ope axis ferrei *g* per copulatorum parallelepipedorum mediam craſſitiem traiecti, vt parallelepipedum B vltro citroque moueri poſſit, immobile manente inferiore A.

5. Superius parallalepipedium B in cochleam ligneam *b* deſinat, quae per foramen *b* tecti ciſtulae Y longius transmittatur, vt inclinari et reclinari in foramine longo *b*, et ſupra tectum ciſtulae cochlea foemina *c* firmari poſſit.

6. In-

6. Inferius parallelepipedum A $\frac{2}{3}$ dig. a fundo pertundatur in medio quoad longitudinem fiſſura *d* 5 dig. longa $\frac{1}{2}$ dig. lata.

7. Pone parallelepipedum compoſitum AB fere ad tergum ciſtulae erigatur aliud parallelepipedum ligneum C $5\frac{1}{2}$ dig. altum et priori aequale in latitudine et craſſitie, diſtet a parallelepipedo A 1. dig, fiſſuram in ſuperiori parte habeat 5. dig. longam $\frac{1}{2}$ dig, latam *e*, ita vt reſpondeat fiſſurae *d* prioris parallelepipedi A.

8. Vlterius ordinetur ad fiſſuram *e* aſſerculus D in eam inſerendus, vt ibi ex axe *g* traiecto mobilis ſit, et per fiſſuram *d* parallelepipedi A transeat, longus ſit aſſerculus quantum ciſtula intus permittit, latus $1\frac{2}{3}$ digit. craſſus $\frac{2}{3}$ dig. Axis ferreus *g* latius caput habeat, poſtea quadrangularis, in medio cylindriformis et deſinat in cochleam marem, vt per cochleam foeminam adductam fiſſura *e* cogi poſſit ad aſſerculum D arctius amplectendum, motumque eius difficiliorem aliquantulum reddendum.

9. In ea parte qua fiſuram *d* parallepipedi A tranſit aſſerculus D exſcindatur fruſtum ſuperius et inferius per totam aſſerculi anteriorem partem, vt reſidua eius portio referat priſma *f* quadrangulare $\frac{1}{2}$ dig. craſſum, $\frac{2}{3}$ altum.

10. Huic priſmati *f* accommodetur alius aſſerculus E, longus prout ciſtulae longitudo admittit, latus 2. dig. craſſus $1\frac{1}{4}$ dig. In eius medio latitudinis fiat foramen quadrangulare *g* vt per illud priſma *f* aſſerculi D tranſmitti poſſit.

11. Exſcindatur et hic aſſerculus E vtrinque vt tantum in medio clypeus cum foramine *g* remaneat brachiis *bb* vtrinque prodeuntibus.

12. Brachia *bb* per mediam craſſitiem verticalem a clypeo vsque ad extreme fere brachiorum crenis transfoſſis *kk* pateant cochleis GG ligneis gracilioribus imponendis.

13. Cochleae GG infra medium latiori gaudeant interſtitio *ii*, crenulis brachiorum *bb* committendo, craſſitie cochlearum inferioris partis aequali; ſuperior pars *ll* cochlearum GG craſſior ſit, vt in crenularum lateribus inſiſtere, cochleis foemineis *yy* inferioribus adductis, poſſint.

14. Tandem cuiuis ſupereminenti cochleae *ll* accommodentur duae cochleae foeminae *mm* et *nn*, quarum ſuperiores *mm* referant orbiculum inferiores *nn*, octangulares ſint vt vtraeque *n* in *m* adductae ſibi incumbant, nec locum ſitus mutent.

15. Vltimo loco perforetur priſma *ſ* aſſerculi D in anteriori parte *o* foramine oblongo, transmittatur clauus ferreus *p* capite perforato vt gyrari poſſit, et dimidiae parti inferiori cochlea ſit inciſa, indatur illa poſt transmiſſionem per priſmatis foramen *o* in cochleam foemineam *q* quae ſurſum et deorſum moueri poſſit. Clauus capite ſuo latiori incumbat in priſma *ſ*, et recte conſtitutis omnibus adducatur cochlea foemina mobilis *q* ad fundum ciſtulae X vt firmiter erectus maneat clauus absque vacillatione. Sic priſma *ſ* altius attolli nequibit, quam

quam claui caput permittit, quanquam depreſſioni omnino obediat.

16. Fulcimentum hoc tali modo vſui accommodatur: In parallelepipedum ſuperius B pangatur cultellus *z* ſcapum bilancis recipiens, impoſitoque lineali BBB cum ſuo perpendiculo *w* in antecedentibus bilancibus deſcripto attendatur, vtrum cultellus *z* ſitum horizontalem habeat, ſi ſcil. perpendiculum *y* linealis BBB aequaliter ſuperius et inferius diſtet a lamina *w* linealis BBB dependente, hoc ſi non eſt, inclinetur vel reclinetur parallelepipedum B vsque dum deſideratus obtinetur perpendiculi ſitus, tunc adducitur cochlea foeminea *c* quae ſupra tectum eſt, et firmatur parallelepipedum ſuperius B.

Dependentibus bilancis lancibus ſubiiciantur cochleae foeminae *mm* orbiculares protrudendo vel retrahendo aſſerculum E in priſmate *ſ* aliquantulum durius mobilem, vt orbiculis *mm* iſtis lances immineant.

Porro attollantur gyrando orbiculi *mm*, vt in iſtos leuiter incumbant lances, et cochleae *nn* adducantur ne orbiculi vacillent ſed ſtabiles reddantur. Tandem clauus ferreus *p* tamdiu circumducatur in ſua foemina *r*, donec caput eius in ea altitudine exiſtat, in qua omnem aſcenſum priſmatis *ſ* impedit, quo lances turbari poſſent, atque hic ſitus claui ſeruetur per cochleam *q* fundo adductam.

17. Iniectis itaque in lances onere atque pondere deprimatur priſma *ſ*, tunc libere pendet bilanx et oneris pondus determinabit. Ad reſtituendam bilanci quietem, reducatur priſma *ſ*, vt in caput claui impingat, tunc lan-

lances quiefcent, nec tamen bilanx alteratur aut commouetur.

Cap. VI.

De Ponderibus.

maxime quae ad bilancem probatoriam fpectant.

1. Non tantum de vtilitate, fed et de neceffitate mathematico eft, fcire determinationem nonnullorum ponderum, maxime, quae ad bilancem probatoriam pertinent, eaque ratione et indolis et formationis intelligere. Hinc fequentem breuem quidem, fed fufficientem manuductionem ad vtrumque fuppeditabo.

2. Centenarius eft illud maximum genus ponderum, quo in communi vita, vt in et re metallurgica vtuntur artifices in Germania: Eft vero pondus commune vbique locorum vtplurimum eiusdem grauitatis, fed diuerfis in locis diuerfimode diftributus in Pondo. Sic Centenarius Norimbergae et Lipfiae diuiditur in 100. lbr. Coloniae ad Rhenum in 102. lbr. et tamen vterque Centenarius eandem habet grauitatem: pondo vero Colonienfe pendet minus Norimbergenfi.

3. Hic vero in Ruffia vulgaririer maximum pondus eft quod vocatur *Pud.* Datur quidem apud Ruthenos adhuc aliud ingens pondus *Perkoiwitz* dictum, fed non adeo in vfu eft, et fere obliuioni datum, nifi quod

quod Nautae eo adhuc vtantur quibus vocatur ein Schiff-Pfund. Haec itaque introducta est subordinatio Ponderum Rutenicorum:

1	Percoiwitz	continet	10	Pude
1	Pud	- - - - -	40	Pondo
1	Pondo	- - -	32	Loth
1	Loth	- - -	3	Solotnik
1	Solotnik	- - -	6	Gran.

4. Diuiditur vt dixi Centenarius Norimbergicus in 100 Pondo seu libras, et exprimitur signo 1 C.

1	Pondo in	2	Marcas	-	1 lb.
1	Marca in	8	Vncias	- -	1 Mrc.
1	Vncia in	2	Lothones	-	1 ℥
1	Lotho in	4	Drachmas	-	1 L. vel $\frac{1}{2}$ ℥
1	Drachma in	$\frac{32}{32}$	partes	- -	1 ʒ

Drachma dispescitur dimidiando semper partes ita, vt

1 Drachma seu Quintillum (ein Quentchen) fit		$\frac{32}{32}$ part
$\frac{1}{2}$ Drachma	— — — —	$\frac{16}{32}$
$\frac{1}{4}$ Drachma quae vocatur	denarius (ein Pfenning pf.)	$\frac{8}{32}$
$\frac{1}{8}$ Drachma	Obulus (ein Heller hl.)	$\frac{4}{32}$
$\frac{1}{16}$ Drachma	$\frac{1}{2}$ Obulus ($\frac{1}{2}$ Heller)	$\frac{2}{32}$
$\frac{1}{32}$ Drachma	$\frac{1}{4}$ Obulus ($\frac{1}{4}$ Heller)	$\frac{1}{32}$

5. Ad normam vero Norimbergicorum si examinantur pondera Rutenorum, inueni, talem dari proportionem:

1 lb. Ruten. aequatur 28 Loth $\frac{1}{4}$ quentl. Norimberg.

Ergo

512 lb. Rutenica dant	449 lb. Norimbergica				
40 lb. — — —	35 lb.	2 L.	2	℈ N.	
10 lb. — — —	8 lb.	24 L.	$2\frac{1}{2}$	℈ N.	
1 lb. — — —		28 L.	$\frac{1}{4}$	℈ N.	
1 Loth. — — — —			$3\frac{17}{32}$	℈ N.	

6. Medica pondera ita se habent:

1 lb. Medicum est 12 Vnciarum Norimb.

		seu	98304 Elem.
1 ℥ — — —	2 L. Nor.	seu	8192
1 L. seu $\frac{1}{2}$℥ seu ℥ß	4 Dr. N.	seu	4096
1 ʒ — — —	3 Scrup.	seu	1024
1 ℈ — — —	20 Grana	seu	$341\frac{1}{3}$
1 gr. — — —		seu	$17\frac{1}{15}$

7. In re Metallurgica et Monetaria artifices vtplurimum vtuntur Marca vel Norimbergensi vel Coloniensi. Cum Norica conuenit Lipsiensis.

8. Est vero inter vtraque pondera ratio talis:

102 lb. Coloniensia dant 100 lb. Norimbergensia.

131072 Elementa vnius lb. Col. dant 128512 elementa lb. Noric.

1 Marca Coloniensis dat 15 Loth. 11 pf. (seu $\frac{11}{32}$ part. drachmae) Noricas.

67 Ducati Coloniensem faciunt Marcam.

$68\frac{1}{2}$ Duc. faciunt Marcam Nor.

9. Ad ακϱιβειαν ponderum quod attinet, assumserunt artifices particulas minimas, quarum 1. lb. continet 131072. Haec elementa ponderum dicuntur, et in eas resoluitur pondo vniuscuiusque ciuitatis, Mihi vero ope bilancis nouiter inuentae et Cap. II. descriptae vlterius progredi licuit, ita, vt 1 lb. diuiserm in 4194304 particulas, quarum differentiam haec nostra bilanx prodit.

10. Solent Metallurgi Argenti pondus efferre, vel per denarii vel per granorum pondus (Pfenning und Gran=Gewicht.)

Est vero 1 Den. Pf. valor	$\frac{1}{4}3$	vel	256 Element.
1 Lothonis valor	6 gran.	vel	4096
1 gran.	3 graen.	vel	$682\frac{2}{3}$
1 graen	– – –		$227\frac{5}{9}$ Elem.

11. Auri pondera vocantur Carrath, Grana, et Graena (quasi Granilla.)

1 lb. dat	48 Carrath
1 Marc	24 Carrath
1 Vncia	3 Carrath

1 Carrath dat 4 gran. vel 12 graen.

1 Granum 3 graen.

12. Proportio inter iam recensita pondera ea est, quam sequens tabula parallela exhibet:

Pondera communia	Denaria Pfenning-Gewicht.	ad ☽	ad ☉	Medica	Elem. comm.	Elementa minima
1 lb.	1 lb.	2 Marc.	48 Carr.	16 ℥	131072	4194304
1 Mrc.	1 Mrc.	16 Loth.	24	8 ℥	65536	2097152
1 ℥	1 ℥	1 ℥	3	1 ℥	8192	262144
1 L.	1 L.	1 L.	1½	½ ℥	4096	131072
1 𝔔	1 𝔔 seu 4 Pf.	18 gr.	18 gr.	1 ʒ	2048	65536
½ 𝔔	½ 𝔔 2 Pf.	9	9	1½ ℈	1024	32768
¼ 𝔔	¼ 𝔔 1 Pf.	4½	4½	15 gr.	512	16384
⅛ 𝔔	⅛ 𝔔 1 Hl.	2¼	2¼	7½	256	8192
1/16	½ Hl.	1⅛	1⅛	3¾	128	4096
1/32	¼ Hl.	9/16	9/16	1⅞	64	2048

13. Obiter hic notanda aureae monetae determinata grauitas.

1 Marc seu 16 L. Noricae faciunt

65536	Element.	Colonienses item 65536
24	Carath.	24 Carr.
68½	Ducatos	67 Duc.
71¼	Coronas	70 Cor.
73¾	Florenos Rhen.	72 Flor. Rhen.

Ducati hoc singulare habent, quod per vnitates, sic vocatas (Ducaten Eßgen) ponderentur, vocantur vulgariter Eschen.

67 E-

67 Eſchen dant 1-3 Colonienſem
$68\frac{1}{2}$ Eſchen faciunt 1-3 Norimbergenſem.
4288 Eſchen dant 1 Marc. Colon. ſeu 67 Ducatos
64 Eſchen $978\frac{10}{67}$ El. Colon. 1 Ducat.
1 Eſchen $15\frac{12}{67}$ El. Colon.

1 Imperialis argenteus (ein Banco Thaler) aequiponderat 2 Loth Colonienſibus vel 8192 Elem. Colon.
ut et 1 Loth $15\frac{1}{2}$ Bf. Norimberg. vel 8064 El. Noric.

1 Duc. pendet	$956\frac{48}{67}$ El. Nor.	ſed Colon.	$978\frac{10}{67}$ El.
1 Corona	$920\frac{3}{10}$		$936\frac{8}{85}$
1 Flor. Rhen.	$888\frac{11}{18}$		$910\frac{2}{9}$

NB 1 Ducatus Hungaricus ſeu Cremnicenſis conſtat $963\frac{61088863}{145992824}$ (ſeu $\frac{62}{145}$) El. Nor. ſed Col. $985\frac{67}{133}$

14. Metallurgia docimaſtica ſingularia pondera minuta habet, vices maiorum gerentia, et eorum proportionatam grauitatem ſignificantia. Aſſumitur enim ab exercitatis Metallurgis vtplurimum 1 Drachmae ordinariae pondus, et nominatur 1 Centenarius probatorius, ex ea deinde reliqua pondera maioribus proportionalia deducuntur. Item 1 Drachmae pondus aequiparatur 1 Marca ſeu 16 Loth, ex qua proportiones caeterorum ponderum probatoriorum deriuantur aequiſignificantes verorum ponderum proportionibus.

15. Qui fodinarum metalliferarum inteſtina ſcrutantur (Berg-Probierer) vtplurimum vtuntur ponderibus probatoriis ſequentibus, eaque in cellulis aſſeruatoriis hoc modo collocant atque diſponunt: Diuiſam ſc. in ſuas partes drachmam, cui centenarii, partibus vero librarum Lothonum atque Drachmarum nomen imponunt.

1. Drachma valet	100 lb.	et continet elem.		1024
Eius dimidium	50 lb.	—	—	512
ſemper dimi-	25 lb.	—	—	256
diando nume-	16 lb.	—	—	$163\frac{21}{25}$
rum antece-	8 lb.	—	—	$81\frac{23}{25}$
dentem vsque	4 lb.	—	—	$40\frac{24}{25}$
ad 16 lb. quod	2 lb.	—	—	$20\frac{12}{25}$
alia methodo	1 lb. vel	32 Loth	—	$10\frac{6}{25}$
inuenitur de		16 L.		
qua §. 16.		8 L.		&c.
Poſtea ad reli-		4 L.		
qua pondera		2 L.		
iterum dimi-		1 L.		&c.
diando fit		$\frac{1}{2}$ L.		
progreſſus		1 ℔		&c.
		$\frac{1}{2}$ ℔		
		$\frac{1}{4}$ ℔		
		$\frac{1}{8}$ ℔		
		$\frac{1}{16}$ ℔		
		$\frac{1}{32}$ ℔		

16. Admodum vero difficile eſt grauitatem 16 pondo inuenire in ponderibus his probatoriis, hinc meam praxin exponam:

1. Fiat ex filo orichalceo ducto et tenui (aus einer dünnen meſſingenen Clauicordii Sayten) pondus 25. lb. probatoria pendens.

2. Circino diuidatur illud filum in 5 partes, et forficula diſcindatur per puncta diuiſionis, partes bilance exami-

aminentur, vtrum aequale inter ſe pondus habeant, et coniunctim conueniant cum pondere 25 lb. probatorio. Erit hoc modo vnum fruſtulum aequale 5. lb.

3. Fruſtulum vnum iterum eodem modo diſſecetur in 5 partes aequales, priori modo examinandas. Et dabit 1 fruſtulum 1 lb.

4. Tandem in lancem eandem imponantur, 3. fruſta de maioribus et 1. de minoribus et habebis pondus 16 lb. probatoriorum.

5. His aequilibretur vnicum fruſtum metallicum, figuram reliquorum ponderum ſimilem referens, et deſiderio erit ſatisfactum.

17. Vltra $\frac{1}{32}$ drachmae probatoriae progredi neceſſe non eſt, quandoquidem et haec diſpartitio altioris indaginis aſt, quam, vt a vulgari bilance docimaſtica exſpectari poſſit.

18. Monetarii alio modo vtuntur Drachma. Eius enim valorem 1 Marcae; ſeu 16 Lothonibus aequalem ponunt, et deinde dimidiatas partes, tamquam pondera probatoria, veris ponderibus ſubſtituunt, et tunc tale emergit ſyſtema ponderum probatoriorum.

1 Drach-

			Elem. vulg.	Element. minima.
1 Drachma				
aequiualet	16 L. et pendet	-	1024	vel 32768 El.
	8 L.	— — —	512	16384
	4 L.	— — —	256	8192
	2 L.	— — —	128	4096
Vulgariter	1 L.	— — —	64	2048
minimum	$\frac{1}{2}$ L.	— — —	32	1024
pondus est	1 ꝗ	—	16	512
$\frac{1}{16}$ ꝗ. Sed	$\frac{1}{2}$ ꝗ	—	8	256
hic etiam	$\frac{1}{4}$ ꝗ seu	1 Pf.	4	128
$\frac{1}{512}$ ꝗ ope	$\frac{1}{8}$ ꝗ	1 Hl.	2	64
nouae bilan-	$\frac{1}{16}$ ꝗ	$\frac{1}{2}$ Hl.	1	32
cis detegitur	$\frac{1}{32}$ ꝗ	$\frac{1}{4}$ Hl.		16
atque pro-	$\frac{1}{64}$ ꝗ	$\frac{1}{8}$ Hl.		8
dit.	$\frac{1}{128}$ ꝗ	$\frac{1}{16}$ Hl.		4
	$\frac{1}{256}$ ꝗ	$\frac{1}{32}$ Hl.		2
	$\frac{1}{512}$ ꝗ	$\frac{1}{64}$ Hl.		1

19. Rei Monetariae Magistri (Müntz-Waradein) vtuntur in diiudicando seu determinando iusto cuiuslibet monetae pretio Denario directorio (des Richt-Pfennings) qui ex elementis pondo vnius construitur, cui egregie inseruit diuisio vnius pondo in 4194304 Elementa, quandoquidem diuisio 1 lb. in 131072 Elementares partes vulgares ad hunc denarium determinandum insufficiens omnino deprehenditur, quemadmodum sequens tabula indicat.

1 lb.

	Elem. vulg.	Elem. minima.	Elem. vulgaria.	Elem. minim.
1 lb. continet	131072	4194304		
1 Marc. - - .	65536	2097152	$\frac{1}{64}$ ℔ 16	512
8 L. - -	32768	1048576	$\frac{1}{128}$ ℔ 8	256
4 L. - -	16384	524288	$\frac{1}{256}$ ℔ 4	128
2 L. - -	8192	262144	$\frac{1}{512}$ ℔ 2	64
1 L. - -	4096	131072	$\frac{1}{1024}$ ℔ 1	32
$\frac{1}{2}$ L. - -	2048	65536	$\frac{1}{2048}$ ℔	16
1 ℔ - - -	1024	32768	$\frac{1}{4096}$ ℔	8
$\frac{1}{2}$ ℔ - - -	512	16384	$\frac{1}{8192}$ ℔	4
$\frac{1}{4}$ ℔ - - -	256	8192	$\frac{1}{16384}$ ℔	2
$\frac{1}{8}$ ℔ - - -	128	4096	$\frac{1}{32768}$ ℔	1
$\frac{1}{16}$ ℔ - - -	64	2048		
$\frac{1}{32}$ ℔ - - -	32	1024		

20. Haec ſunt potiſſima, quae de ponderibus accuratioribus notatu digna atque ſcitu neceſſaria iudicaui, quandoquidem et Mathematico et Phyſico multum intereſt ſtructuram bilancis, et ponderum proportiones intelligere, eamque diiudicare poſſe, ſi feliciori paſſu ad intimiora vtriusque ſcientiae progredi, et theoriam ad praxin accommodare, vel praxin ex theoria deducere geſtiuerit.

DE PLANETARVM STATIONIBVS.

Auctore

F. C. Maiero.

I.

M. Iun. 1727.

KEplerus in Rudolphinis pag. 72. hoc ſibi problema ſoluendum propoſuit: *Cuilibet anomaliae planetae ſuos commutationis angulos aſſignare in quibus is fiat ſtationarius.* Eidem quoque ſuam nauauit operam Hallaeus, cuius ſolutionem Keilius in lectionibus aſtronomicis p. m. 239. protulit. Duo problematis huius ſunt caſus: Primus tam terrae quam planetae in ſuis orbitis data aſſumit loca, ſed orbitarum ſiue apſidum poſitionem non determinat, quippe quae demum ex inuenta commutatione ſtationaria determinanda venit; Alter caſus datam ſtatuit hanc poſitionem, vna cum anomalia planetae ſolius, anomalia autem terrae ſtationaria inuenienda eſt. Hunc poſteriorem quidem caſum in animo habuerunt laudati Aſtronomi, ſed ſi ſolutiones eorum ſpecto, non niſi primo, nec ei plene, ſatisfecerunt: Keplerus ſolutione utitur indirecta, regula, quam vocant, falſi nixa; item, quae tanquam data aſſumenda ſunt, vti celeritatum ratio, et tangentium anguli, ipſi non niſi vt prope vera cognita fuerunt, ignorabat enim theoremata quibus data haec determinantur: Hallaeus telluris orbitam ſupponit circularem, quod quidem prope verum

eſt,

est, at non verissimum. Ex solutione primi casus adornauerunt solutionem secundi,sed plane indirectam, assumunt enim ambo locum terrae vt cognitum ex coniectura, qui tamen quaeritur, eumque postmodum, si necesse sit, limant. Hisce naeuis, si qui sunt, in praesenti scripto mederi conabor, ostensurus viam directam qua vtriusque casus quaesita aequationibus algebraicis definiuntur , licet id non nemini impossibile visum fuerit. Nullis ad id indigeo principiis nouis, omnia fere iam suppeditat Keilius in lectionibus astronomicis,sicuti ex allegationibus posthac intelligetur. Sunt,praeter hoc problema, alia de stationibus apud Mathematicos celebria, a quibus tamen nunc abstineo, donec, quae meditatus sum de illis, melius digessero.

2. Iuuat ab initio monere,me substruere dicendis systema copernicanum,et leges motuum keplerianas;Supponere etiam orbitas planetarum ad planum eclipticae reductas. Caeterum definitiones stationum aliarumque rerum astronomicarum vulgarium hic non inculco, lectorem postulans astronomiae non ignarum. Id vnicum noto, me per *triangulum parallacticum* intelligere triangulum rectilineum formatum ab interuallis planetarum a sole,et linea planetas iungente: *Terra* vero in sequentibus etiam sub *planetae nomine* veniet, quod breuitatis causa facio, et dum de duobus loquor planetis superiore vno, inferiore altero, alteruter semper pro terra haberi potest.

3. Propter motum planetarum continuum, anguli, in triangulo parallactico, continuo mutantur; muta-

tionem igitur alicuius anguli tempusculo infinite paruo factam vocabo *mutationem momentaneam.* Item arcum, quem planeta ex sole visus tempusculo infinite paruo percurrere supponitur, vel eiusdem correspondentem angulum ad solem, vocabo planetae *incrementum angulare.*

4. *Mutationes momentaneae angulorum, in triangulo parallactico, ad planetas stationarios, sunt aequales incrementis ad solem angularibus eodem tempusculo factis.*

Fig. I. Triangulo parallactico OSI stationario iungatur aliud O*si*, in quod nimirum prius triangulum OSI post tempusculum infinite paruum abiisse censendum est: Ob stationis naturam erit linea visoria IS parallela ipsi *is*. Fiat porro SP parallela lineae O*s*, et RI parallela ipsi O*i*, vt habeatur angulus PSI = ang. OS*i*, item angulus O*is* = ang. RIS, et praeterea angulus PSO = ang. SO*s* angulusque RIO = ang. IO*i*. Sunt autem anguli PSO et RIO mutationes momentaneae angulorum ad planetas statonarios, et anguli SO*s* atque IO*i* sunt incrementa ad solem angularia, ergo haec illis aequalia sunt stationum tempore. Q. E. D.

5. Ex sola inspectione figurae, qua ad demonstrationem vsus sum, intelligitur, vnam mutationem momentaneam esse priuatiuam, si altera sit positiua. Vt haec diuersitas tollatur, pro angulo ad planetam inferiorem (OIS) vsurpabo eiusdem deinceps positum, cuius consequenter mutatio momentanea eodem signo gaudet, quo et altera ad superiorem planetam. Id praeterea quoque patet, esse hunc deinceps positum stationis tempore

re

re ſemper acutum, aeque ac angulus ad ſuperiorem planetam ISO. Cetera notandum eſt hoc ipſum theorema, quod demonſtraui, eſſe fundamentum cui innititur ſolutio problematis ſequentis. Reliqua enim quae ſequuntur theoremata motum coeleſtem in genere ſpectant, nec ad ſolas ſtationes pertinent, faciunt tamen ad ſolutionis dandae perfectionem.

6. *Incrementa angularia ad ſolem ſunt in ratione compoſita, ex directa ſubduplicata parametri orbitae, et inuerſa duplicata diſtantiae a ſole.*

Diſtantia ſuperioris a ſole OS ponatur $=D$, diſtantia inferioris $=d$. Parameter orbitae ſuperioris ſit $=P$ et parameter inferioris $=p$. Sit praeterea incrementum angulare ſuperioris $=SOs$, et incrementum angulare inferioris $=IOi$, demonſtrandum eſt eſſe $SOs:IOi = \frac{\sqrt{P}}{DD}:\frac{\sqrt{p}}{dd}$. Quia ſectores SOs et OII (qui propter infinitam paruitatem pro triangulis rectilineis haberi queunt) eodem tempore deſcripti ſunt, erit per naturam motus coeleſtis ſector SOs ad ſectorem IOi vti $\sqrt{P}$ ad $\sqrt{p}$ (vid. Keilii lect. Aſtron. p. m. 364) Centro O radiisque OS et OI deſcribantur arculi infinite parui SQ et IR, qui pro rectis habeantur lineolis ad radios OS et Oi normalibus, erit proinde area ſectoris ſuperioris ad aream inferioris vti $OS.SQ$ ad $OI.RI$. ſiue, vt $D.SQ$ ad $d.RI$; eſt vero $D.sQ:d.RI = \sqrt{P}:\sqrt{p}$. ergo quoque $SQ:RI = \frac{\sqrt{P}}{D}:\frac{\sqrt{p}}{d}$. Deſcribatur porro arculus VT radio OI, ita fiet $VT:SQ = d:D$, hanc ergo *Fig. II.*

conferendo proportionem cum proxima antecedente habetur ex aequo VT : RI $= \frac{\sqrt{P}}{DD} : \frac{\sqrt{p}}{dd}$. Et quia VT:RI $=$ SO*s* : IO*i* erit etiam SO*s*: IO*i* $= \frac{\sqrt{P}}{DD} : \frac{\sqrt{p}}{dd}$. Q. E. D.

7. Quoniam ſtationis tempore mutatio momentanea anguli ad ſuperiorem planetam eſt ad mutationem momentaneam anguli ad inferiorem deinceps, vti incrementum angulare ſuperioris ad incrementum angulare inferioris planetae, (§§. 4. et 5.) erit tempore ſtationis mutatio momentanea ſuperioris ad mutationem inferioris, vti $\frac{\sqrt{P}}{DD}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{dd}$. vi antecedentis theorematis.

8. *Mutatio momentanea ſinus anguli ad ſuperiorem, eſt ad mutationem ſinus ad inferiorem, vti diſtantia inferioris, ad diſtantiam ſuperioris a ſole.* Propter mutationem quae momentanea eſt, diſtantiae planetarum nil mutantur, ergo ratio ſinuum manet quoque eadem, ſunt enim illi vti oppoſitae diſtantiae a ſole; manente autem ratione eadem, neceſſe eſt augmenta vel decrementa ſinuum eandem quoque retinere rationem. Q. E. D.

9. *Si arcus vel angulus aliquis quantitate infinite* Fig. III. *parua creſcat vel decreſcat, erit tale incrementum arcus, ad incrementum quo ſinus eiusdem augetur eodem tempore, vti radius ad coſinum dicti arcus.* Sit arcus propoſitus $=$BE, ſinus eius $=$AB, et coſinus $=$AC; incrementum arcus minimum $=$B*b*, adeoque incrementum ſinus $=$D*b* habeatur arculus B*b* pro recta, erunt hoc modo triangula ABC et B*b*D ſimilia, conſequenter B*b* : D*b* $=$ BC : AC. Q. E. D.

10. Ponatur coſinus anguli ad ſuperiorem planetam

tam $=C$ et cosinus ad inferiorem $=c$. Praeterea sit mutatio momentanea ad superiorem $=m$ et mutatio ad inferiorem $=n$, erit, per antecedens theorema, mutatio sinus superioris, ad mutationem sinus inferioris momentaneam vti mC ad nc.

11. Et quoniam stationum tempore est $m:n = \frac{\sqrt{P}}{DD} : \frac{\sqrt{p}}{dd}$ (§. 7.) erit hoc in casu mutatio sinus superioris momentanea, ad mutationem inferioris vti $\frac{\sqrt{P}}{DD}C$ ad $\frac{\sqrt{p}}{dd}c$.

PROBLEMA.

12. *Datis anomaliis tam terrae quam planetae inuenire commutationem qua statio accidit.*

Propter datas anomalias dantur quoque planetarum a sole distantiae, nimirum $OS = D$ et $OI = d$. Ponatur anguli intercepti SOI (qui commutationi deinceps est) cosinus $= y$ erit (per trigonometrica mea hisce commentariis exhibita pag. 29. §. 23.) cosinus anguli ad $S = \frac{rD - dy}{\sqrt{(DD - 2Ddy:r + dd)}}$, et cosinus anguli ad I deinceps $= \frac{Dy - rd}{\sqrt{(DD - 2Ddy:r + dd)}}$, ergo mutatio sinus superioris momentanea est ad mutationem sinus inferioris momentaneam (per §. 11.) vt $\frac{\sqrt{P}(rD - dy)}{DD}$ ad $\frac{\sqrt{p}(Dy - rd)}{dd}$, est vero etiam (per §. 8.) vti d ad D, ergo facta aequationis legitima reductione inuenietur $y = rDd \frac{\sqrt{P} + \sqrt{p}}{DD\sqrt{p} + dd\sqrt{P}}$. Q. E. I.

Fig. I.

13.

13. Lubet inuentam regulam exemplo illustrare desumto ex tabulis rudolphinis pag. 72. vbi datur log. $D = -32532$ (quae est distantia Martis a Sole) et $ld = -1092$ distantia terrae a sole) item $lP = -110550$ et $lp = -69283$. Instruam vero calculum methodo a me in hisce commentariis pagg. 20. 22. exhibita. Est itaque $l\sqrt{P} = -55275$ et log. $\sqrt{p} = -34641$. Ast quia logarithmi tales priuatiui sunt, mutentur prius in positiuos vicarios, addendo communem maiorem (e. g. 60000) sic fiet

Vic: $l\sqrt{P} = 4725$ cuius arcus $= 72°, 31', 30''$,
Vic: $l\sqrt{p} = 25359$ cuius arcus $= 50, 53, 47$,

Semisumma	$= 61, 42, 38$, log.	12719
Semidiffer.	$= 10, 48, 51$, antil.	1792
		14511
	dematur -	60000
	log. $(\sqrt{P} + \sqrt{p}) =$	-45489
	log. $D =$	-32532
	log. $d =$	-1092
	log. $rDd(\sqrt{P} + \sqrt{p}) =$	-79113

log.

$$\begin{array}{lrl}
\log. DD & = - & 65064 \\
l\sqrt{p} & = - & 34641 \\
\hline
l DD\sqrt{p} & = - & 99705 \\
\text{addatur} & & 100000 \\
\hline
 & & 295 \text{ arcus eius} = 85^\circ, 36', 0'' \\
\log. dd & = - & 2184 \\
l\sqrt{P} & = - & 55275 \\
\hline
 & & -57459 \\
\text{addatur} & & 100000 \\
\hline
 & & 42541 \text{ arcus eius} = 40^\circ, 48', 22''.
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcr}
\text{Semisumma} = 63, 12, 11. \text{ logar.} & = & 11360 \\
\text{Semidiffer.} = 22, 23, 49. \text{ antilog.} & = & 7843 \\
\hline
 & & 19203 \\
 & \text{dematur} & 100000 \\
\log.(DD\sqrt{p} + dd\sqrt{P}) & = - & 80797 \\
\log. rDd(\sqrt{P} + \sqrt{p}) & = - & 79113 \\
\hline
\log. y & = & 1684
\end{array}$$

ergo angulus ad solem	=	10°, 29', 10".
et commutatio	=	169, 30, 50.
Keplerus habet	=	169 53, 30.
excessumque committit	= - -	22, 40.

Aliud exemplum idem Keplerus l. c. adducit, vbi mercurium et terram in apheliis ponit et commutationem stationariam indirecta sua methodo eruit $= 25^\circ, 20'$, quae debebat esse $= 25^\circ, 33', 6''$.

14. Atque ita primo caſui problematis kepleriani de ſtationibus abunde ſatisfactum eſt. Quod alterum caſum attinet, (in quo dantur apſidum ad inuicem poſitio, vniusque planetae anomalia, quaeritur autem altera ſtationaria;) attendenti facile patebit, poſſe, ope antecedentium, ſolutionem eius exhiberi quoque aequatione algebraica. Verum quia illa ad ſextam dimenſionem aſcendit, nec vlla eam deprimendi ſpes eſt, inutilem prorſus ad praxin aſtronomicam cenſeo. Quamobrem eius loco commendare malo indirectam ſolutionem, ſumendo anomaliam quaeſitam ex coniectura prope veram, atque ita inquirendo commutationem ſtationariam per problema antecedens, qua inuenta poſitio prima corrigatur, et calculus repetatur donec ſibi conſentiat et veritatem exacte prodat.

PROBLEMATIS Traiectoriarum Reciprocarum Solutio.

Auctore

Leonhardo Eulero, Baſil.

I.

M. Iul. 1727. PRoblema, de quo in hoc ſchediaſmate agere conſtitui, eſt celebre illud et in Actis Lipſ. multum agitatum, de inueniendis curuis, quae intra datas parallelas eaedem recto et inuerſo ſitu poſitae et ſecundum parallelarum directionem hinc inde mo-

motae, mutua interſectione vbiq; angulum eundem conſtituunt, Problema in Act. Lipſ. Suppl. T. VII. a beate hic defuncto Nicolao Bernoulli propoſitum Ita autem cum hoc problemate res ſe habet, vt infinitae, tam algebraicae, quam tranſcendentes curuae ſatisfaciant. Quapropter ad plenam eius et perfectam ſolutionem requiritur, vt exhibeatur methodus, qua curuae ſatisfacientes omnes inueniri queant, ſimpliciſſimae autem tam algebraicae quam tranſcendentes re ipſa eruantur.

II. Dedi nuper, occaſione quaeſtionis, quae Cel. Bernoullio cum Anglo quodam eſt nomen celante, de inueniendis traiectoriis reciprocis algebraicis ſimpliciſſimis, in Act. Lipſ. A. 1727 methodum, qua ex quolibet curuarum ordine, excepto ſecundo et tertio, (ex quorum poſteriore quidem alia via curua ſatisfaciens inueniri poteſt), vna ad minimum traiectoria reciproca exhiberi poteſt, vna cum generali modo, omnes traiectorias reciprocas algebraicas ex curuis cuſpide et circa cuſpidem ramis ſimilibus et aequalibus praeditis et algebraicis, deriuandi. Animus hic eſt generalem huius problematis ſolutionem largiri, ex eaque infinitas formulas generales algebraicas easque maxime foecundas deducere. Quibus adiungam problematis cuiusdam agnati, de inueniendis traiectoriis reciprocis vno plures axes habentibus, ſolutionem.

III. Problema ad analyſin magis accommodatum ſic ſonat: *Inuenire curuam* CBD *circa axem* AB, *talem, vt ductis duabus rectis* MP, NQ, *ab axe vtrinque aequidiſtantibus eique parallelis, ſumma angulorum* PMB + Fig. I.

QND, *ſit vbique conſtans, aequalis nimirum duplo anguli* DBA, *quem axis cum curua conſtituit.* Inuerſa enim CBD circa axem AB, cadet applicata QN ſuper PM, tum moueatur, donec applicatae QN punctum N incidat in punctum M, et curua ſic ſitu inuerſa ſit *cbd* oportet angulum interſectionis BM*d* eſſe conſtantem: Sunt autem anguli PM*d*, et QND aequales, conſequenter ſumma angulorum, PMB+QND, debet eſſe conſtans. Creſcentibus ergo ex vna parte axis AB, angulis applicatarum cum curua, ex altera parte tantundem decreſcere debent.

IV. Ducta ad axem AB, normali PQ, erit AP=AQ, ducantur duae proximae reſpondentes applicatae, *pm*, *qn*. Erit P*p*=Q*q*. Ducantur ex M et N, tangentes MR, NS, vt habeantur anguli RM*m*, SN*n*, quorum ille eſt decrementum anguli PMB, hic incrementum anguli QND. Quocirca erit ex conditione problematis RM*m*=SN*n*. Vnde natura curuae inueſtigari debet.

V. Sumatur vbique in applicata MP producta, PF, proportionalis angulo RM*m*, aſſumto elemento P*p*, abſciſſae AP pro conſtante, erit punctum F in curua quadam, cuius diameter erit axis traiectoriae BA, erit enim vbique PF=QG. Quare tota difficultas eo eſt reducta, vt ex curua FEG data altera CBD, in qua elementa angulorum BMP ſint reſpondentibus applicatis PF proportionales conſtruatur; Et vt curua CBD euadat traiectoria reciproca, curua FEG debet habere diametrum, et circa eam ramos ſimiles et aequales, cuiusmodi eſt FEG.

Cur-

Curua MBN ex ea constructa erit traiectoria reciproca, cuius axis est EB, diameter prioris curuae.

VI. Sit AP$=x$. PM$=y$ PF$=u$. Erit augulus RMm, vt $ddy:(dz^2+dy^2)$. Ergo $u=ddy:(dx^2+dy^2)$ posito dx constante, ex qua aequatione datis u et x inueniri debet, y. Ponatur $dy=pdx$. erit $ddy=dpdx$. ergo $u=\frac{dp}{dx+ppdx}$ et $udx=\frac{dp}{1+pp}$. Ex qua aequatione, ob u et x datas, p inuenitur, indeque y; est autem $\frac{dp}{1+pp}$ duplum elementum sectoris circularis, cuius radius est, 1. et tangens p; erit ergo $\frac{1}{2}\int udx=$ sectori isti circulari. Est vero $\int udx=$areae APEF, demta vel addita constante inuenitur ergo per quadraturas, p, indeque rursus per quadraturas y sequenti modo.

VII. Sit data quaecunque curua IEK diametro EA praedita; super recta AO diametrum EA normaliter secante, accipiatur punctum quoduis O, quo centro et radio arbitrario OD describatur circulus DGH, et ex D ducatur tangens DQ. Ducta quacunque applicata PF, spatio PFID aequalis sumatur sector DOG, et producatur DG in Q. ex Q ducatur ipsi DA parallela QN, occurrens applicatae FP productae in N; Erit punctum N in curua DN tali, vt sit PN$=p$, si sit AP$=x$. Hic dimidium, quod superiore §. inuentum est, negligitur, cum enim $ddy:(dx^2+dy^2)$ saltem proportionetur ipsi u, etiam $\int udx$, tantum proportionalis assumi potest, sectori DOG. vnde nihil interest siue dimidius sector siue totus sumatur, et dein siue $\int udx$ ab applicata DI, siue ab AF computetur. *Fig. II.*

VIII. Inuenta curua DN facili negotio habetur curua DM traiectoria reciproca, cum enim sit $dy=pdx$ accipiatur vbique PM proportionalis areae DPN, erit punctum M, in traiectoria reciproca, cuius axis est AB, diameter curuae IEK assumtae. Apparet hic simul, infinitas, ex vnica assumta IEK, traiectorias reciprocas inueniri posse, prout enim transuersalis DA aliter ducitur, punctaque O et D aliter assumuntur, ita aliae resultant traiectoriae reciprocae. Dein etiam pro varia ratione, quae ponitur inter PM spatium DPN, traiectoriae variae formantur. Vnde patet data vna traiectoria reciproca, applicatas in eadem ratione augendo vel diminuendo, infinitas inueniri alias traiectorias reciprocas.

IX. Si spatium DPFI aequale accipiatur quadranti ODH, tangens DQ ipsique aequalis applicata PN euadit infinita, eritque tum PN asymtotos curuae DN; Sin spatium illud maius fuerit quadrante, applicata PN erit negatiua. Traiectoriae autem DM applicata PM euadet; vbi PN est infinita, tangens curuae. Et deinde abeunte PN in negatiuam applicata PM decrescet, quare curua DM habebit in M punctum reuersionis. Si spatium DPN, existente PN asymtoto, est infinitum, applicata PM quoque erit infinita, adeoque asymtotos etiam curuae DM.

X. Sit exempli gr. $u=\frac{aab}{xx+aa}$ et hinc eruatur aequatio inter x et y cum sit u, vt $ddy:(dx^2+dy^2)$ erit $bdx^2+bdy^2=aaddy+xxddy$ ponatur $dy=pdx$ erit $ddy=$ $dpdx$

$dpdx$, quibus valoribus ſubſtitutis habetur $bdx + bppdx = aadp + xxdp$. Ergo $\frac{bdx}{aa+xx} = \frac{dp}{1+pp}$ cuius aequationis vtriusque membri integratio a circuli quadratura dependet. Huc autem aequatio ea reducetur
$\frac{b}{a}\left(\frac{dx}{a+x\sqrt{-1}} + \frac{dx}{a-x\sqrt{-1}}\right) = \frac{dp}{1+p\sqrt{-1}} + \frac{dp}{1-p\sqrt{-1}}$. Quae integrata abit in hanc $bl(a+x\sqrt{-1}) - bl(a-x\sqrt{-1}) = al(1+p\sqrt{-1}) - al(1-p\sqrt{-1}) + alb$ erit ergo $\left(\frac{a+x\sqrt{-1}}{a-x\sqrt{-1}}\right)^{\frac{b}{a}} = \frac{b+bp\sqrt{-1}}{1-p\sqrt{-1}} = \frac{bdx+bdy\sqrt{-1}}{dx-dy\sqrt{-1}}$. Sit $b=a$, et $b=\sqrt{-1}$ erit $\frac{a+x\sqrt{-1}}{a-x\sqrt{-1}} = \frac{dx\sqrt{-1}-dy}{dx-dy\sqrt{-1}}$ quae reducta dat $dy = \frac{x-a}{x+a}dx$. Si ſit $b=2a$ manente $b=\sqrt{-1}$ erit $dy = \frac{2ax+xx-aa}{2ax-xx+aa}dx$. Et ita porro; ſed huiusmodi exemplis non immoror, fuſius de iis infra agetur.

XI. Quum curuae genitricis IEK diameter EA ſit axis traiectoriae inde genitae, manifeſtum eſt, ſi illa curva plures vna diametros habuerit, traiectoriam inde ortam plures axes etiam habituram, ſi ergo loco curuae IEK curua infinitarum diametrorum adhibetur, traiectoria infinitos etiam axes habebit. Quando autem traiectoria deſideratur, quae axium datum habeat numerum, id aliter interpretandum eſt. Vt enim omnis curua vna plures diametros habens neceſſario infinitas habet, ita etiam traiectoria reciproca, quae vno plures, infinitos neceſſario axes habebit. Sed quia traiectoria infinitorum axium infinita habere debet puncta reverſionis, datus axium numerus ad vnam tantum curuae portionem intra duo puncta flexus proxima comprehenſam referendus

dus eſt. Deſideratur enim curua omni irregularitate, cuiusmodi eſt flexura et reflexio, deſtituta.

Fig. III. XII. Sit curua IEK*ek* infinitis praedita diametris, EA, KL, *ea*, *kl*. et abſcindatur area DBTI = quadranti ODH, linea TB producta aſymtotos erit curuae DNV, et tanget traiectoriam in C, vbi eſt punctum reflexionis. Portio ergo traiectoriae DMC, talis erit, de qua eſt quaeſtio numeri axium dati. Haec vero portio tot habebit axes, quot diametri fuerint in ſpatio DBTI. Quo circa in arbitrio noſtro poſitum erit numerum axium definire hoc modo: Propoſito numero axium abſcindatur ſpatium DBTI eundem diametrorum numerum comprehendens, tum deſcribatur circulus ODG tantus vt eius quadrans ODH adaequet abſciſſum ſpatium DBTI manifeſtum eſt, hoc modo generari curuam deſideratam.

XIII. Si loco curuae IEK*ek* adhibeatur linea recta ipſi DB parallela, quaelibet applicata FP erit diameter, ergo et traiectoriae DMC quaeuis applicata erit axis. Atque haec eſt illa curua de qua Cel. Bernoullius ſub pantogoniae nomine, fuſius in Actis Erud. 1726 egit. Aequatio eius naturam exprimens, erit $1 = addy:(dx^2 + dy^2)$ ſeu $dx^2 + dy^2 = addy$ cuius haec eſt proprietas, vt, radiis ſecundum axium directionem incidentibus, radii reflexi omnes ſint inter ſe aequales. Facilius autem curua haec ſic conſtruetur, vt accipiatur $x = \int \frac{aadp}{aa+pp}$ et $y = \int \frac{apdp}{aa+pp}$.

XIV. Methodum hanc inueniendi traiectorias reciprocas per duplicem quadraturam, non eo fine attuli

vt

vt inde traiectoriae reciprocae eruantur; id quod vix praestari posset, si simplices vel algebraicae desiderentur, sed vt inde adipiscar solutionem problematis de inueniendis traiectoriis reciprocis pluribus vno axibus gaudentibus, quod Anonymus Anglus Cel. Ioh. Bernoullio proposuit. At nunc ad alium pergo modum perquam foecundum in exhibendis traiectoriis simplicioribus, et praecipue algebraicis. Persequar autem hic illum tantum problematis casum, quo angulus intersectionis ponitur rectus; cum facillime reliqui casus omnes ad hunc reducantur.

XV. Sit CBD traiectoria orthogonalis, cuius axis sit AB quem ad angulos rectos secet recta PQ; Ducantur duae applicatae PM, QN, axi AB parallelae, vtrinque aeque distantes ab eodem, illisque proximae, pm qn, nec non basi PQ parallelae MR, NS. Erunt triangula MRm, nSN, similia, ob SnN+RmM=recto. Sint AP$=x$ PM$=y$, erunt Pp=MR$=dx$, R$m=dy$ nec non AQ$=-x$, Qq=NS$=-dx$; sit QN$=z$, seu S$n=dz$. Ex similitudine triangulorum MRm,nSN deducetur MR (dx) : R$m(dy)$=S$n(dz)$: SN$(-dx)$ vnde erit $dydz=-dx^2$. Ex qua aequatione inueniri debet y. Etenim z ab y dependet, quia in expressione ipsius y, posito loco x,$-x$, habetur z. *Fig. IV.*

XVI. Ponatur $dy=pdx$, est autem p functio ipsius x. Abeat ea, posito $-x$, loco x in q, erit $dz=-qdx$ et consequenter erit $pq=1$. Vnde patet, loco p talem sumi debere ipsius x functionem, ex qua factum in eandem, sed loco x posito $-x$ adaequet vnitatem. Totum ergo huius ſolutionis artificium huc redit, vt idoneae eligantur functiones ipſius, x loco p ſubſtituendae. Ad hoc autem, niſi fortunae earum inuentionem committere velimus, accuratior functionum requiritur cognitio. Cuius, vt quaſi prima elementa iaciam, ſequenti modo eas diſcernere commodum viſum eſt.

XVII. Primo loco notandae ſunt functiones, quas pares appello, quarum haec eſt proprietas, vt immutatae maneant, etſi loco x, ponatur $-x$. Huiusmodi ſunt omnes potentiae ipſius x, quarum exponentes ſunt numeri pares, aut fractiones, quarum numeratores ſunt numeri pares, denominatores vero impares: Dein quaecunque functiones ex huiusmodi potentiis vel additione vel ſubtractione, vel multiplicatione vel diuiſione, vel denique ad potentiam quamcunque elevatione componuntur, ſunt itidem pares ut $x^{\frac{4}{5}}$, $(ax^2+bx^{\frac{2}{3}})^n$

XVIII. Secundo functiones impares obſeruo, quae prorſus ſui negatiuas producunt, ſi x, abit in $-x$. Cuiusmodi ſunt x ipſum, x^3, x^5 etc. omnes potentiae, quarum exponentes ſunt numeri impares, vel fractiones, quarum numeratores et denominatores ſunt numeri impares, nec non functiones, quae harum potentiarum additione vel ſubtractione, etiam eleuatione ad exponentis imparis dignitatem componuntur, vt, $x^{\frac{3}{5}}$, $(ax^3+bx^{\frac{5}{7}})^3$

XIX. Si functio impar per imparem multiplicatur, factum ſemper erit functio par, ut x^3 in $x^{\frac{1}{3}}$, dat $x^{\frac{10}{3}}$ At functio par in imparem ducta ſemper quidem imparem

rem producit, interdum tamen ea ſimul pro pari haberi poteſt, vt $x\sqrt{(aa+xx)}$ eſt functio ſimul par et impar, quippe eadem cum $\sqrt{(aaxx+x^4)}$, quae eſt par. Quod autem de elevatione functionis paris ad dignitatem quamuis ſupra dictum eſt, quod potentia ſit quoque par, ſi exponens ſit fractio, cuius denominator numerus par, v. g. $\frac{1}{2}$, reſtrictio adhibenda eſt, niſi radix re ipſa extrahi queat, vt $(\frac{aa}{xx}+2a+xx)^{\frac{1}{2}}$ non eſt functio par, conuenit enim cum $\frac{a}{x}+x$. De huiusmodi autem functionibus iudicium facile patet.

XX. Praeterea obſeruatu dignae ſunt functiones reciprocae, quae mihi ſunt functiones poſito in iis $-x$, loco x, abeuntes in tales, quae in illas ductae producunt vnitatem, vt $(\frac{a+x}{a-x})^n$, quae, poſito x negatiuo, abit in hanc $(\frac{a-x}{a+x})^n$, cuius in illam factum eſt $=1$. Huc referendae quoque ſunt exponentiales a^x, $(aa+xx)^{x^3}$ etc. omnes nempe functiones pares eleuatae ad functiones impares.

XXI. Hiſce de functionibus praemiſſis manifeſtum eſt, p eſſe functionem ipſius x reciprocam, cum ſit $pq=1$. Quemadmodum autem huiusmodi functiones reciprocae inueniendae ſint, breui oſtendere conabor; Sed primo de functionibus exponentialibus nihil intermiſcere conſtitui, cum ante omnia traiectorias reciprocas algebraicas eruere animus ſit. Poſtmodum autem de exponentialibus quaedam ſubiungam.

XXII. Vt autem rem generalius abſoluam, aſſumo mo tertiam variabilem t, et inuestigabo, quomodo x et y in t, determinari debeant, vt traiectoria reciproca resultet, pono itaque $dx = rdt$, et $dy = pdt$. Efficiendum ergo est, vt posito t negatiuo, et dx in negatiuum abeat. Quare loco r ponatur oportet functio ipsius t par, quae sit N; erit $dx = Ndt$, et abeunte t in negatiuum, erit $dx = -Ndt$. Consequenter ob $d\,dz = -dx^2$, posito in casu $-t$, loco p, q, vt ante, habebitur $pq = NN$.

XXIII. Ponatur $p = (P + Q)^n$ denotante P functione pare et Q impare ipsius t, erit $q = (P - Q)^n$ adeoque $(PP - QQ)^n = N^2$; ergo $PP = N^{\frac{2}{n}} + QQ$, et $P = \sqrt{(N^{\frac{2}{n}} + QQ)}$ erit ergo $p = (Q + \sqrt{(N^{\frac{2}{n}} + QQ)})^n$. Nihil contradictorii hic latet in aequatione $P = \sqrt{(N^{\frac{2}{n}} + QQ)}$ etenim P, quae functio par esse debet, talis etiam in aequatione exhibetur. At si Q erueretur, inueniretur $Q = \sqrt{(N^{\frac{2}{n}} - PP)}$ id quod contradictionem inuoluit; nam Q, quae functionem imparem denotat, aequatur hic functioni pari. Vt fractiones in exponentibus euitem, scribo loco N, N^n et erit $dx = N^n dt$, et $dy = dt\,(Q + \sqrt{(N^2 + Q^2)})^n$ potest hic loco Q, scribi NQ, (§. 19) et dein loco N^n, vt ante, N; habebitur $dx = Ndt$, et $dy = Ndt(Q + \sqrt{(1 + QQ)})^n$.

XXIV. Vt nouae formulae resultent, tollo irrationalitatem, ponendo $\sqrt{(N^2 + Q^2)} = N + RQ$, erit $Q = \frac{2NR}{1 - RR}$ vnde R functio impar sit ipsius t necesse est, ob Q imparem, erit ergo $Q + \sqrt{(N^2 + Q^2)} = \frac{N.(1 + R)}{1 - R} =$ (scripto lo-

co R,

$\mathrm{coR},\frac{Q}{P})\frac{N.(P+Q)}{P-Q}$. Denotabunt ſemper P pares et Q impares functiones ipſius t. Erit ergo $dx=N^n dt$, et $dy=dt$ $(\frac{NP+NQ}{P-Q})^n$; altera formula eodem modo tractata dat, $dx=Ndt$, et $dy=Ndt\,(\frac{P+Q}{P-Q})^n$. Huiusmodi formulae generales infinitae poſſunt inueniri, alias aequationes loco $p=(P+Q)^n$ aſſumendo: cuiusmodi eſt haec formula $dx=Ndt$, et $dy=Ndt\ (P+Q)^{mn}$. $(S+\sqrt{SS+(PP-QQ)^{\frac{-m}{k}}})^{nk}$ denotante S functione impare, ſed duabus formulis inuentis tanquam ſimpliciſſimis et foecundiſſimis in productione traiectoriarum algebraicarum contentus ero, quarum altera irrationalitate eſt affecta, altera vero rationalis.

XXV. Accipio formulam priorem, caſus quibus dy integrabile redditur, euoluturus. Sit primo $N=1$ erit $dx=dt$ unde $dy=dx\,(Q+\sqrt{1+QQ})^n$. Pono porro $Q=x$ erit $dy=dx\,(x+\sqrt{1+xx})^n$ cuius integrale obſeruo generaliter haberi poſſe; ponatur $x+\sqrt{(1+xx)}=u$, erit $x=\frac{uu-1}{2u}$, conſequenter $dy=\frac{u^n du}{2}+\frac{u^{n-2}du}{2}$ et hinc $2y=\frac{u^{n+1}}{n+1}+\frac{u^{n-1}}{n-1}=\frac{(x+\sqrt{1+xx})^{n+1}}{n+1}+\frac{(x+\sqrt{1+xx})^{n-1}}{n-1}$ habetur ergo hic aequatio algebraica generalis infinitas curuas ſuppeditans, numeros rationales loco n ſubſtituendo.

XXVI. Antequam autem ad deriuationem aequationum determinatarum ex generali pergam; quaedam ex aequatione differentiali deducenda ſunt, quae ex integrata

grata difficilius eruerentur. Primo palam eſt, ſi ſit $n=0$ traiectoriam tum eſſe lineam rectam, cum axe angulum ſemirectum conſtituentem, propter $dy=dx$. Dein, ſi fuerit $n=1$ erit $dy=xdx+dx\sqrt{(1+xx)}$; vnde patet, hanc aequationem eſſe ad traiectoriam reciprocam, quae methodo Bernoulliana ope rectificationis parabolae conſtruitur, quo vnico caſu non abſolute eſt integrabilis.

XXVII. Tertio, etſi loco n ponatur $-n$, aequationem nihilominus ad eandem fore curuam, abſciſſis ſaltem ex axis altera parte ſumtis, ſeu exiſtentibus negatiuis. Conueniunt enim duae hae expreſſiones $(-x+\sqrt{1+xx})^n$ et $(x+\sqrt{1+xx})^{-n}$, vt cuivis examinanti facile patebit. Nihil ergo in poſterum lucraturus eſſem, loco n valores negatiuos ſubſtituendo. Quare ſubſtitutione numerorum affirmatiuorum tantum vtar, cum ii ſoli ſufficiant ad vniuerſalem aequationem exhauriendam.

XXVIII. Excuſſi iam ſunt caſus, vbi $n=0$, et $n=1$ progredior vlterius, ſed integralem aequationem in vſum vocando, et pono $n=2$. Erit $3y=2x^3+3x+\overline{2+2xx}\sqrt{1+xx}$, quae ad rationalitatem reducta huc redit $12yx^3+18xy-9yy+3xx+4=0$. Et haec aequatio quatuor dimenſionum, ſine dubio ſimpliciſſima eſt, poſt illam paraboloidem tertii ordinis: ſatisfacit adeo quaeſtioni, quam Cel. Bernoullius Anonymo Anglo propoſuit, et ego repetii in Act. Erud. 1726. de inuenienda traiectoria algebraica, eam tertii ordinis, in ſimplicitatis ordine proxime excipiente.

XXIX. Si ponatur $n=3$ prodibit aequatio pro linea

linea 5 ordinis haec $128yx^4 + 192yx^2 + 48y - 64yy - 8xx - 9 = 0$. Sit $n = 4$ resultabit aequatio 6 ordinis, et hinc legitima inductione inferri potest, aequationem generalem ad rationalitatem reductam esse semper ordinis $n + 2$. Id quod etiam in valoribus fractis loco n subrogatis obtinet. Si sit $n = \frac{1}{2}$ aequatio erit ordinis $\frac{5}{2}$. Quae autem, cum adhuc sit irrationalis, reducta erit ordinis quinti; et generaliter si fuerit $n = \frac{p}{q}$ aequatio reducta ascendet ad $p + 2q$ ordinem.

XXX. Patet ergo aequationem generalem loco n alios atque alios valores substituendo, ex quolibet curuarum ordine, si excipias secundum et tertium, vnam ad minimum traiectoriam reciprocam exhibere. Et dato ordine curuarum, quot ex eo ope huius aequationis inueniri possint traiectoriae, facile determinare erit, nempe dispiciendum est, quoties $p + 2q$ numerum dati ordinis producere queat, sed loco p et q numeri saltem affirmatiui et integri substitui possunt, et eiusmodi insuper vt $p:q$ ad minores terminos reduci nequeat. Sed de hac formula generali fusius in Act. Lips. 1727. actum est a me, ideoque hic ad alia me conuerto.

XXXI. Adhaereo adhuc aequationi §. XXV. ad hanc reductae $dy = dx\,(Q + \sqrt{}(QQ + 1))^n$. Circa quam obseruaui, nullis eam substitutionibus potentiarum rationalium, quales sunt x^3, x^5 etc. nec non x^{-1}, x^{-3} etc. loco Q factis, generaliter integrabilem reddi, quanquam vtique passim reperiantur casus particulares integrabiles, quos autem persequi institutum minime permittit. At substituendo loco Q potentias ipsius x irrationales, sed legitigitimas nempe functiones impares, quales ſunt $x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{1}{5}}, x^{\frac{1}{7}}$ et vbi numerator exponentis eſt vnitas, ſemper formulam integrabilem reddi obſeruaui.

XXXII. Sit itaque $Q = x^{\frac{1}{3}}$, erit $dy = dx \left(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x^{2:3} + 1}\right)^n$. Quae vt integretur, pono $x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + 1} = t$, erit $x^{\frac{1}{3}} = \frac{tt-1}{-t}$ unde $x = \frac{t^3}{8} - \frac{3t}{8} + \frac{3}{8t} - \frac{1}{8ttt}$ adeoque $dx = \frac{3ttdt}{8} - \frac{3dt}{8} - \frac{3dt}{8tt} + \frac{3dt}{8t^4}$: ergo $dy = \frac{3t^{n+2}dt}{8} - \frac{3t^n dt}{8} - \frac{3t^{n-2}}{8} + \frac{3t^{n-4}dt}{8}$. Conſequenter $\frac{8y}{3} = \frac{t^{n+3}}{n+3} - \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n-1}}{n-1} + \frac{t^{n-3}}{n-3} = \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + 1}\right)^{n+3}}{n+3} - \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + 1}\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + 1}\right)^{n-1}}{n-1} + \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x^{\frac{2}{3}} + 1}\right)^{n-3}}{n-3}$.

XXXIII. Sunt autem quidam caſus, quibus integratio a logarithmis dependet, nempe ſi fuerit $n = 1$ vel 3. Ceterae ſubſtitutiones omnes loco n factae ſuppeditant curuas algebraicas, idque vt ſuperior ſecundum certam legem. Quod de ſuperiori formula enunciatum eſt, valores ipſius n, negatiuos ſuperfluos eſſe; idem etiam de hac, nec non de generaliſſima tenendum eſt. Quemadmodum et ſemper obtinet, ſi fiat, $n = 0$, tum traiectoriam degenerare in lineam rectam.

XXXIV. Caſus huius aequationis ſimpliciſſimus ſine dubio erit, quo $n = 2$. In eoque poſito breuitatis ergo

ergo loco $x^{\frac{1}{3}}t$, reperietur $5y = 6t^5 + 5t^3 + (6t^4 + 2tt - 4)\sqrt{(1+tt)}$. Consequenter ad rationalitatem reducendo peruenietur ad hanc aequationem, $60t^5y + 50t^3y - 25y^2 - 60t^4 - 45t^6 + 16 = 0$. Atque haec tandem, substituto $x^{\frac{1}{3}}$ loco t, abibit in aequationem 8. ordinis. Si ponatur $n=4$ aequationem ad 10 dimensiones assurrecturam, facile praeuidere potui. Et aequationem generalem ad ordinem linearum $n+6$ esse referendam. Vt adeo et haec formula, ex quolibet curuarum ordine ad minimum vnam, si excipiantur 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 9, traiectoriam exhibeat.

XXXV. Haec eadem formula, vt et reliquae, quae ex substitutionibus §. XXXI determinatis deducuntur, alia via ex altera aequationis generalis forma deriuantur. Et quam ideo paucis hic complectar, quod insuper ex ea plures formulae algebraicae generales, aliunde altioris indaginis, fluant. Aequatio generalis haec est, $dx = \mathrm{N}dt$, $dy = \mathrm{N}dt\,(\mathrm{Q} + \sqrt{(\mathrm{QQ}+1)})^n$. In qua si fiat $\mathrm{Q} = x$, et successiue $\mathrm{N} =$ vel 1 vel xx, vel x^4 etc. nec non vel $a + bxx$, $axx + bx^4$ et eiusmodi compositae functiones pares ipsius x subrogentur, aequatio generalis semper erit integrabilis et algebraicarum aequationum summopere foecunda.

XXXVI. Exposito modo, quo ad aequationes algebraicas generales peruenitur, examinandi sunt alii casus, quibus quidem aequatio generalis non integrabilis redditur, nihilo tamen minus infinitis modis facilibus determinatu, algebraicas exhibere poteſt aequationes. Aſſumo hanc formulam $dx = N^n dt$ et $dy = dt (Q + \sqrt{(QQ + NN)})^n$, fiat $N = tt$ et $Q = t$ erit $dx = t^{2n} dt$ et $x = \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ et $dy = dt(t + t\sqrt{(1 + tt)})^n$. Vnde patet hanc aequationem ſemper eſſe integrabilem ſi fuerit n numerus integer impar; id quod facile videre eſt, ſi reipſa ad dignitatem eleuetur.

XXXVII. Sunt autem inſuper alii caſus, quibus formula noſtra integrabilis redditur, quos ſic inuenio ponatur $t + t\sqrt{(tt + 1)} = utt$, erit $t = \frac{2u}{uu-1}$, ideoque, $dt = -\frac{2uudu - 2du}{(uu-1)^2}$; conſequenter $dy = -\frac{2^{2n+1} u^{3n} du(uu+1)}{(uu-1)^{2n+2}}$ vnde patet ſi fuerit n numerus negatiuus par, fore aequationem integrabilem, id quod patebit, ſi $(uu-1)^{-2n-2}$ ipſo facto eleuetur. Plures caſus elicientur, ſi fiat $t + \sqrt{(tt + 1)} = ut$; et obtinebitur $dy = du(u^{\frac{3n+1}{2}} - u^{\frac{3n-1}{2}})(u-2)^{\frac{n-1}{2}}$; quae erit integrabilis, primo ſi ſit n quilibet numerus impar: dein ſi $\frac{3n+1}{2}$ fuerit numerus integer. Fiat ergo $\frac{3n+1}{2} = m$; erit $n = \frac{2m-1}{3}$ adeoque loco n poni poteſt fractio cuius denominator $= 3$ et numerator numerus impar.

XXXVIII. Vnicum exemplum attuliſſe ſufficiat, ſit $n = 1$. erit $dx = ttdt$, et $t = \sqrt[3]{3x}$; deinde $dy = tdt + tdt\sqrt{(1 + tt)}$: ergo $y = \frac{tt}{2} + \frac{(1 + tt)\sqrt{(1 + tt)}}{3}$ vnde elicitur haec

haec aequatio ordinis ſexti $(12yy-12xx)^3)=3456y^5 +12528x^2y^3-432yx^4-2304y^4-288x^2y^2+81x^4 +512y^3$. Poſſunt itaque infinitae aequationes algebraicae etiam ex hac aequatione $dy=dt(t+t\sqrt{(1+tt)})^n$ erui, et ſimili modo ex aliis formis, loco N vel Q; alios valores ſubſtituendo, caſus, quibus hoc contingit, non ſuperiori abſimili modo detegentur.

XXXIX. Quae de priori duarum generalium formularum, irrationali hucusque tradita ſunt, vſum eius et foecunditatem ſatis ſuperque commonſtrant. Progredior nunc ad alteram formulam rationalem quae eſt, $dx=N^n dt$ et $dy=dt\,(\frac{N.(P+Q)}{P-Q})^n$ ſeu quod eodem redit, $dy=dt(\frac{N.(1+Q)}{1-Q})^n$. Non immoror hic deriuandis hinc curuis tranſcendentalibus nempe logarithmicae ſemirectangulae, ſi $Q=t$, $N=1$. et $n=1$. aut cycloidi, ſi $n=\frac{1}{2}$. quippe quae ab aliis iam fuſius pertractatae ſunt, propoſitum mihi eſt, vt in priori, quas ea ſub ſe comprehendit curuas algebraicas, perſequi, et regulas, quibus algebraicae inueniri queant, eruere.

XL. Ne autem fractio in cauſa ſit, cur difficilius caſus algebraici dignoſcantur, eam tollo loco N. ponendo $N(1-QQ.)$ Debet enim N eſſe functio par, ipſius t Habebitur $dx=dt(N\text{-}NQQ)^n$ et $dy=dt(N(1+Q)^2)^n$ ſeu $dx=N^n dt(1-QQ)^n$ et $dy=N^n dt(1+Q)^{2n}$. Vt hinc aequatio algebraica deriuari queat, oportet vt et dx et dy integrabile fiat. Ponatur $N=1$; erit $dx=dt(1-QQ)^n$ et $dy=dt\,(1+Q)^{2n}$; ſit $Q=t$ erit $dx=dt(1-tt)^n$ et $dy=dt(1+t)^{2n}$ vnde $y=\frac{(1+t)^{2n+1}}{2n+1}$; ergo $\sqrt[2n+1]{(2n+1)y}$

 -1

$-1=t$. Vt igitur dx integrari queat, patet loco n substitui debere numerum integrum affirmatium.

XLI. Cum n sit numerus integer affirmatiuus, constituet $(1-tt)^n$, si in seriem conuertatur, progressionem numeri terminorum finiti, hanc $1-\frac{n}{1}tt+\frac{n.n-1}{1.2}t^4-\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}t^6$ etc. Vnde obtinebitur $x=t-\frac{n.t^3}{1.3}+\frac{n.n-1\,t^5}{1.2.5}-\frac{n.n-1\,n-2.t^7}{1.2.3\quad 7}$ etc. in qua si loco t substituatur valor inuentus $\sqrt[2n+1]{(2n+1)y-1}$ habebitur aequatio inter y et x adeoque pro curua quaesita.

XLII. Sit $n=1$ erit $x=t-\frac{1}{3}t^3=\sqrt[3]{3y-1}-\frac{1}{3}(\sqrt[3]{y-1})^3=\sqrt[3]{9yy-y-\frac{2}{3}}$; ergo $(x+y+\frac{2}{3})^3=9yy$. Quae aequatio euadit tertii ordinis, et exprimit parabolam cubicalem semirectangulam, quae pro simplicissima omnium traiectoriarum reciprocarum algebraicarum habetur. De qua Cel. Ioh Bernoullius in Act. Erud. 1725. peculiari schediasmate egit. Sunt autem reliquae substitutiones loco n factae minus felices in exhibendis curuis simplicibus, posito enim $n=2$, aequatio iam vltra trigesimum gradum assurgit.

XLIII. Possunt loco Q aliae functiones ipsius t substitui, vt t^3, t^5 aut $t^{\frac{1}{3}}$ etc. quae omnes formulam infinitis modis integrabilem reddent, semper nimirum quando n fuerit numerus affirmatiuus integer. Simili modo res se habet si alii loco N valores subrogentur. Sit nimirum $N=tt$ erit $dx=t^{2n}dt(1-QQ)^n$ et $dy=t^{2n}dt(1+Q)^{2n}$. Ponatur $Q=t$. erit $t^{2n}dt(1-tt)^n$ et $dy=t^{2n}dt$

(1+

$(1+t)^{2n}$. Vnde patet et x et y haberi posse modo sit $2n$ numerus integer. Si enim fuerit numerus par, facile patet omnia esse in simplices terminos resolubilia, si $2n$ fuerit numerus impar erit $(1-tt)^n$ irrationale, sed licet $2n$ sit numerus impar, nihilominus $t^{2n}dt\ (1-tt)^n$ erit integrabile.

XLIV. Sit $2n=1$ erit $dx=tdt\sqrt{(1-tt)}$ et $dy=tdt+ttdt$. Quare $x=-\frac{1}{3}(1-tt)^{\frac{3}{2}}$ et $y=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3$. Erit igitur $t=\sqrt{(1-\sqrt[3]{9xx})}$ ponatur $y+\frac{1}{8}=x$ habebitur reductione per acta, haec aequatio sexti gradus $(12uu+24xx)^3=6912u^5-7344u^3xx-11232ux^4-9216u^4+7488uuxx+10125x^4+4096u^3$. Alii loco n, numeri substituti alias exhibebunt curuas algebraicas, deinde innumerabiles aliae loco Q et loco N substitutiones fieri possunt, quae semper, si n est numerus affirmatiuus integer, algebraicas efficient aequationes. Et haec praecipua sunt, quae de Algebraicis curuis afferri possunt.

XLV. Hisce coronidis loco subiungo alias formulas generales, quae resultant, si loco (vid. §. XXII.) p et q functiones exponentiales subrogantur. Habentur autem in exponentialibus et functiones pares et reciprocae, vt P^R est functio par, si sint et P et R functiones pares, at si fuerit R functio impar; erit ea functio reciproca, priori in casu abeunte x in $-x$ manet P^R, in posteriori mutatur in P^{-R}.

XLVI. Quibus ergo in locis, antea functiones pares substituere opus fuerat, poterunt huiusmodi exponenponentiales adhiberi, et loco functionum imparium similes exponentiales ductae in functionem imparem quandam vt $P^R Q$, existentibus P et R paribus functionibus et Q impari.

XLVII. Cum functiones reciprocae ita sint comparatae, vt factum earum in se ipsas, sed loco x posito $-x$, aequetur vnitati, patet, quicquid sit p, semper ei insuper eiusmodi functionem reciprocam multiplicatione adiungi posse, nempe vbi fuerat $dy = pdt$ potest etiam sumi $dy = T^V pdt$. denotante T functione pari et V impari. Nihilominus enim factum ex dy in se, sed abeunte t in $-t$, idem erit ac ante.

XLVIII. Formulis ergo generalibus §§. XXIII. XXIV. inuentis adiungi poterit functio reciproca, immutato earum vsu. Et habebitur $dx = Ndt$ et $dy = T^V Ndt(Q + \sqrt{(1+QQ)})^n$ deinde loco formulae rationalis habebitur $dx = Ndt$ et $dy = T^V Ndt(\frac{P+Q}{P+Q})^n$. Atque his formulis in amplissimos curuarum exponentialium, quae problemati traiectoriarum reciprocarum satisfaciunt, campos deducimur.

XLIX. Exemplum nobis sit, hypothesis, qua, $n = o$, $N = 1$, $T = a$, et $V = t = x$; erit $dy = a^t dt = a^x dx$ quae est aequatio ad logarithmicam ordinariam, quae satisfaciet applicatam subtangenti aequalem pro axe conuersionis assumendo. Pluribus exemplis, quippe curuas ignotas exhibentibus, haec persequi minime consultum duco.

L. Hisce tandem, quae hactenus attuli, quaestioni exasse me satisfecisse non dubito, quaecunque enim ad-

ad enodationem huiusmodi quaestionum iure requiri possunt, abunde hic exhibuisse mihi videor. Dedi enim primo generalissimas aequationes applicatu faciles: secundo methodum dedi infinitas aequationes vniuersales algebraicas inueniendi, ex quibus simplicissimas reipsa deduxi.

Tandem, quae ex transcendentalibus curuis cognitae sunt, etiam ex aequationibus generalibus facile deriuantur. Hisce omnibus praemisi solutionem duorum problematum agnatorum, de Pantogonia infinitorum axium traiectoria et de traiectoriis datum axium numerum habentibus, quippe quae ex consideratione naturae traiectoriarum reciprocarum sponte fluunt.

Theoria - Noua DE MOTV AQVARVM PER CANALES QVOSCVNQVE FLVENTIVM

Auctore

Daniele Bernoulli, Ioh. Fil.

MOtum aquarum per tubos determinare aggressi sunt multi Geometrae iique celeberrimi; sed pauci aliquid dederunt, quod experientiae esset conforme, nemo autem integram theoriam stabiliuit. Aquam in tubo stagnantem per *M. Iun. 1727.*

per foramen valde paruum ea exilire velocitate, qua possit ascendere ad altitudinem superficiei aqueae supra foramen, a Mathematicis quibusdam recte fuit definitum; qui vlterius progredi voluerunt, nihil praeter coniecturas omni experientiae repugnantes protulerunt. Ego vero postquam saepius intellexissem ex Patre summum vsum, quem habeat principium conseruationis virium viuarum pro infinitis problematis Physico-Mathematicis soluendis, quae alias pro valde difficilibus, ne dicam desperatis, habenda essent, mentem subiit, num non idem principium pro eruenda theoria aquarum fluentium per tubos tantopere desiderata inseruire possit, neque euentus spem meam fefellit. Verum vt iam paulo propius ad rem ipsam accedam, dicam ante omnia, quid per vires viuas earumque perpetuam conseruationem intelligendum sit; Dicitur itaque vis viua, quae inest corpori moto atque mensuratur ex producto velocitatis quadrati in corporis massam: si plura corpora moueantur, vis totalis seu quantitas virium erit aestimanda ex aggregato omnium productorum modo definitorum. Demonstrauit autem Hugenius post eumque multi alii esse hoc aggregatum constans quomodocunque se inuicem percutiant ipsa corpora, modo sint perfecte elastica atque in vacuo mota concipiantur. Conseruantur ergo etiam vires viuae in corporibus elasticis. Pono autem corpuscula minima fluidum aliquod componentia esse perfecte elastica; nisi enim essent durissima summaque elasticitate proinde praedita, possent vlterius subdiuidi. Hisce praemonitis manifestum factum est, quid fieri debeat,

quan-

quando aqua fluit horizontaliter per tubum non cylindricum, ſed v. gr. conicum; nempe cum omnis aqua motum ſuum in linea recta continuare nequeat, particulae ipſius impingunt in latera tubi, et inde reflectunt, rurſusque alias fluidi partes percutiunt; interim durante hac agitatione eadem quantitas virium perpetuo conſeruabitur hacque lege motum ſuum in tubo continuabit aqua. Notandum tamen probe eſt, praedictos motus omnes eſſe minimos, ita vt nulla particula locum ſuum mutet, niſi quatenus cum tota fluidi maſſa motum habet progreſſiuum; haud ſecus, ac videmus multis globis elaſticis in linea recta iuxta ſe diſpoſitis et aequalibus, quorum extremus ſi percutiatur, non totam globorum ſeriem, ſed ſolum extremum oppoſitum moueri. Et hac ratione haud difficulter quisque videt, poſſe quoque in motu fluidorum eandem quantitatem virium perpetuo conſeruari, omnino ſicut in motu corporum elaſticorum ſe inuicem percutientium; imo neceſſario id fieri ob ſummam elaſticitatem fluidorum corpuſculis minimis inſitam. Iam vero rem ipſam aggrederer, niſi quibusdam vel ſolum conſeruationis virium viuarum nomen ſtomachum mouere perſpectum haberem. Horum in gratiam monendum duco principium hoc conſeruationis virium viuarum minime differre a principio quod primum ab Hugenio vſurpatum dein ab omnibus Geometris ſine vlla controuerſia receptum fuit; nimirum corpora vi grauitatis ad deſcenſum vtcunque ſollicitata eam acquirere velocitatem vt ſi ſingula rurſus velocitate ſua finali directe aſcendant, vsque ad ſtatum quietis commune centrum grauitatis ad

 pri-

priſtinam altitudinem redeat; cui hoc Hugenii principium magis arridet, is eadem facilitate rem expediet, addendum autem eſt hoc alterum, velocitates fluidorum per vas inaequaliter amplum fluentium vbique eſſe amplititudinibus reciproce proportionales: Hiſce itaque duobus principiis totum argumentum abſoluemus.

Prop. I. *Problema*. Data celeritate, qua ſuperficies aquae in tubo quocunque mouetur, inuenire vim viuam totius maſſae aqueae.

Solutio. Sit (Fig. I.) vas ABGH, per quod fluat liquor CDFE, cuius ſitus proximus ſit *cdfe*; habeat ſuperficies CD velocitatem, quam acquireret graue cadendo ex altitudine NO. Patet autem, fore velocitatem in LM ad velocitatem ſuperficiei CD in ratione reciproca amplitudinum CD et LM vnde ſi totum fluidum concipiatur diuiſum in ſtrata infinita eiusdem altitudinis, quale eſt LM*ml*, erit vis viva cuiuslibet ſtrati, ſicuti ipſius maſſa ducta in quadratum velocitatis, id eſt, ſicuti $\frac{LM}{CD} \times \frac{CD^2}{LM^2}$, ſeu vt $\frac{CD}{LM}$. Sunt ergo vbique vires viuae in reciproca ratione amplitudinum: Hinc intelligitur, quod facta ſuper eodem axe AH alia curua QST tali, vt ſit MS vbique aequalis tertiae continue proportionali ad LM et CD fore vim viuam totius maſſae aqueae CDFE $=$ ſpatio DQTF$\times$NO. Si ſymbolis vti velimus, habebimus vim viuam quaeſitam $= aav\int\frac{dt}{s}$, vbi a denotat ſuperficiem CD, v altitudinem, qua graue cadendo acquirit

rit velocitatem iſtius ſuperficiei; dt ſignificat elementum Mm, et s amplitudinem vaſis in ML. Q. E. I.

Prop. 2. *Theor.* Si tubus (fig. 1.) ABGH verticaliter poſitus ſit, atque maſſa aquea ſuo pondere deſcendat in ſitum CDFE, quem mox commutet cum ſitu *cdfe*; erit differentiale vis viuae ſeu incrementum vis viuae illo tempuſculo acquiſitum aequale ei, quam acquirit lapſu per D*d* cylindrus aqueus cuius baſis eſt CD et altitudo DF.

Dem. Vis viua acquiſita aeſtimanda eſt ex maſſa et altitudine deſcenſus: dum vero CDFE peruenit in ſitum *cdfe*, idem eſt ac ſi aqua *cd*FE in ſuo loco permanſiſſet et aqua CD*dc* in ſitum EF*fe* perueniſſet; eſt itaque vis viua de nouo acquiſita $=$ CD$\times d$D$\times$DF ſeu, quod perinde eſt, CD$\times$DF$\times$D*d*. Q. E. D.

Prop. 3. *Probl.* Determinare velocitatem aquae qua fluidum ſingulis momentis effluit per tubum vtcunque formatum et quocunque foramine perforatum.

Solutio. Sit curua quaecunqua BDFG (fig. 2.) cuius applicatae horizontales DC repreſentent reſpectiue amplitudines tubi; Deſcenderit aqua ex A in C ſitque AC $= t$, CD $= s$ amplitudo foramins deſignata per LM ſit $= b$, altitudo tota AM $= c$; vis viua totalis inſita fluido dum eſt in ſitu DCMG $=$ M: velocitas, quam habet ſuperficies DC, aequalis illi quam corpus acquirit cadendo ex alt. v; concipiatur nunc aquam ex ſitu DCMLGD perueniſſe in ſitum FEONLGF; Erit ergo per Prop. Sec. differentiale vis viuae $=$ DC$\times$CM$\times$CE $= s\times(c-t)\times dt$ ſed poteſt idem incrementum aliter ſic definiri. Dum aquae superficies esset in DC, erat velocitas in FE $= \frac{s}{s+ds}\sqrt{u}$ (sunt enim velocitates in reciproca ratione amplitudinum) et vis viua aquae FEMLGF erat $= M - svdt$; Iam postquam superficies aquae ex DC peruenit in FE, habet velocitatem $\sqrt{u} + \frac{du}{2\sqrt{u}}$; vnde cum vires viuae sint in duplicata ratione velocitatum, erit aquae FEMLGF vis insita $= (Ms\text{-}vdt) \times (\sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}})^2 : (\frac{s\sqrt{v}}{s+ds})^2 =$ (neglectis negligendis) $\frac{Msv - ssvvdt + Msdv + 2Mvds}{sv}$, cui quantitati si addatur vis guttulae LMON modo e tubo egressae, habebitur vis, quam habet aqua post situs mutationem; est autem particula aquae LMON $=$ DCEF $= sdt$ et habet velocitatem quacum ascendere posset ad altitudinem $\frac{ss}{bb}v$; vnde ipsius vis $= \frac{s^3}{bb}vdt$; ergo vis viua totalis aquae FEONLGF $= \frac{Msv - ssvvdt + Msdv + 2Mvds}{sv} + \frac{s^3}{bb}udt$, a qua proin si auferatur M, habebitur differentiale vis viuae quod adeoque erit $\frac{Msdu + 2Muds - ssuudt}{su} + \frac{s^3 udt}{bb}$. Hinc habetur talis aequatio $s\ (c-t)\ dt = \frac{Msdu + 2Muds - ssuudt}{su} + \frac{s^3 udt}{bb}$. Potest autem per prop. 2. haberi M et datur s per t; habetur itaque aequatio inter t et u, qua mediante potest determinari velocitas aquae in quocunque situ. Q. E. I.

Prop. 4. *Problema.* Determinare velocitates, quibus aqua singulis momentis effluit e tubo cylindrico verticali, li, ſiue ipſius foramen ſit finitum ſiue infinite paruum.

Sol. Sit amplitudo ſeu ſectio cylindri ad axem perpendicularis $= n$, amplitudo foraminis $= 1$, altitudo totius cylindri aquei ante effluxum $= c$, altitudo per quam ſuprema ſuperficies iam deſcendit $= t$: Erit ergo vis viua aquae in tubo reſiduae (quam ſupra vocauimus M) $= n(c-t)v$ et quod antea vocauimus generaliter s iam conſtanter eſt n; ſubſtitutis adeoque hiſce valoribus in aequatione canonica prodibit
$n(c-t)dt = n(c-t)\,du - nudt + n^3 udt$; ponatur $(c-t) = z$ et $nn-1 = m$ et orietur $-zdz = zdu - mudz$, quae formula ad differentialia logarithmica iuxta methodum paternam reducta atque rite pertractata dat $v = \frac{c^{nn-2}z - z^{nn-1}}{(nn-2)c^{nn-2}}$

Q. E. I.

Coroll. 1. Si $n = 1$, id eſt, ſi nullus ſit fundus in tubo erit $v = c - z$, ita vt velocitas aquae eadem ſit, ac ſi graue motu naturaliter accelerato deſcendiſſet per altitudinem $c - z$; id quod quilibet ſine inſtituto calculo aſſequi potuiſſet; fuerunt tamen, qui et in hoc caſu crediderunt, aquam effluere eadem velocitate ſtatim ab initio, quam corpus acquirit cadendo ex tota altitudine aquae.

Coroll. 2. Datur ſemper locus in tubo, vbi ſi peruenerit ſuperficies aquea, ſit velocitas aquae effluentis maxima; is locus obtinetur, cum ſumitur $z = c : (nn-1)^{1:(nn-2)}$ ſitque tunc $v = c : \overline{nn-2} \times \overline{nn-1}^{(1:nn-2)}$

$-c:\overline{nn-1\times nn-2}^{(nn-1):(nn-2)}$ siue $=c:\overline{nn-1}^{(nn-1):(nn-2)}$ et haec quantitas dat maximam velocitatem, qua superficies aquae in tubo descendere potest; si vero eandem quantitatem multiplicemus per nn, habebitur altitudo pro generanda maxima velocitate aquae effluentis quae semper minor est quam c; quod si vero n sit infinitum, degenerabit eadem in c; vnde per nostram methodum etiam manifestum fit, in casu foraminis infinite parvi aquam ea exilire velocitate, qua corpus ascendere possit ad altitudinem aquae. Hicque solus est casus, quem scriptores hydraulicae recte assecuti sunt. Quod si n sit numerus non infinitus, sed tamen sat magnus, erit maxima velocitas aquae effluentis haud multum minor, quam si foramen esset infinite paruum; nam si n fiat $=10$ poterit aqua, maxima sua velocitate effluens, ascendere ad $\frac{97}{100}$ ipsius c, hancque velocitatem maximam statim fere a fluxus principio acquiret, nimirum postquam aqua descendit in tubo per spatium $\frac{47}{1047}c$. Haec omnia conueniunt egregie cum experimentis.

Coroll. 3. Si n sit numerus magnus, et aqua in tubo iam aliquousque descendere coepit, erunt velocitates quam proxime vti radices altitudinum aquae; quam regulam illi assumserunt, qui de diuisione clepsydrarum egerunt, veluti Cel. Varignon, Mariotte; mihi quoque de clepsydra Sphaerica mari adhibenda aliquando agenti res ita considerata fuit; sed falleret tamen paulisper regula a principio effluxus, nisi n esset numerus admodum magnus. Pro vera diuisione requiritur, vt integretur

$\frac{dz}{\sqrt{u}}$

$\frac{dz}{\sqrt{u}}$ id quod [illegible]
negocio [illegible]
ab [illegible]
lis [illegible]
[illegible]
[illegible]
que [illegible]
ubi [illegible]
perime [illegible]
exame [illegible]

Coroll. [illegible]
clepsydra [illegible] u-
fluidi [illegible] itas
fallit illa [illegible] mu-
satisfac [illegible] iterum
Vera [illegible] q^{1-nn}
prop. 3. [illegible]) vel
num [illegible] $c)^{nn-1}$. Et
braica, [illegible]
quanti [illegible] $nc)^{1-nn}$
quinale [illegible] $c-nc)^{1-nn}$
quabile [illegible] $nn-2)$
mirum [illegible]
rotatione [illegible] $-e-nc)^{nn-1}$.
fluidum [illegible] oritur theorema
tempori [illegible]
est, ut [illegible]
MN [illegible]
do acquirit [illegible] Cor.
aequabilis [illegible]

$=o$. habet haec curua multas proprietates, quarum enumeratione, ne nimis ſim longus, ſuperſedeo; ſed quód minime tacendum puto, eſt,quod figura haec pro vaſe aequabilis effluxus eadem eſt, quae Anglorum cataracta, qua phaenomena aquarum effluentium explicare contenderunt. Caeterum pro maiori confirmatione theoriae noſtrae, dicam etiam breuibus de vaſis cylindricis, quibus tubi alii cylindrici anguſtiores annexi ſunt, ſiue verticaliter poſiti (quorum phaenomena nuper publice expoſuit Cel. Bulffingerus) ſiue horizontaliter: ſiue abrupti, ſiue indefinite longi, quorum poſteriorum conſiderationem in rem phyſiologicam haud parum facere, alia occaſione oſtendam.

Prop. 4. *Probl.* Aqua currente per cylindrum ACDB (fig. 4.) cui tubus cylindricus EF infixus, determinare vbique velocitatem, qua ſuperficies aquae GH deſcendit.

Sol. Poteſt hic caſus tanquam corollarium conſiderari propoſitionis tertiae, atque ita determinari vbique velocitas ſuperficiei aqueae, donec tota effluxerit aqua ex vaſe ACDB; motus autem reliquus per tubum EF per ſe facile determinatur, quia fit iuxta leges motuum corporum vniformiter acceleratorum. Quod ſi itaque vas ab initio repletum fuerit vsque in AB dicaturque $AG=t$, $AC=e$, $EF=c$ ſuperficies $GH=n$, amplitudo tubi $EF=1$, altitudo pro generanda velocitate ſuperficiei $GH=v$, mutabitur aequatio canonica factis vbique rite ſubſtitutionibus in talem ad caſum propoſitum

fa-

facientem $(c+e-t)\times dt=(e-t+nc)\times du+(nnu-u)\times dt$. Eandem aequationem modo particulari ita erui. Vis viua totius aquae fluentis GCEFEDH est $=n\times(e-t)\times v+nncv$, cuius differentiale est $(ne-nt+nnc)du-nudt$, cui si additur vis viua particulae FP effluxae, quae est $n^3 udt$ habetur totum incrementum vis viuae illo momento generatum, quod per Prop. 2. aequale est $(e-t+c)\,ndt$, et diuiso vtrobique per n, oritur iterum $(c+e-t)\times dt=(e-t+nc)\times du+(nnv-v)\times dt$. Inter has methodos ea differentia est, quod priori res multo generalius expediri potuisset, quam posteriori, ponendo neque vas neque tubum cylindricum sed alia figura praeditum. Pro reducenda posteriori hac aequatione ad quantitates finitas ponatur $t=q+e+nc$ et $v=r-\frac{c}{n+1}$, atque sic illa mutabitur in hanc $-qdq=-qdr+(nn-1)\,rdq$, quae iterum obseruata debitae constantis additione abit in hanc $q^{1-nn}\times(2r-nnr-q)=(-e-nc)^{1-nn}\times\left(\frac{ne+e+nc+2c}{n+1}\right)$ vel $\frac{\frac{nnr-2r+q}{nn-1}}{q}=(nc+2c+ne+e):(-n-1)\times(-e-nc)^{nn-1}$. Et reassumtis quantitatibus t et v oritur $(t-e-nc)^{1-nn}\times\left(-nnv+2v+c-t+e+\frac{c}{n+1}\right)=(-e-nc)^{1-nn}\times\left(\frac{ne+e+nc+2c}{n+1}\right)$ seu $v=\left(e+c+\frac{c}{n+1}-t\right):(nn-2)-\left(e+c+\frac{c}{n+1}\right)\times(t-e-nc)^{nn-1}:(nn-2)\times(-e-nc)^{nn-1}$.

Coroll. I. Si ponatur $c=o$, oritur theorema prop. 4.

Coroll. II. Si comparetur velocitas maxima cum velocitate maxima aquae effluentis in casu $c=o$, inuenietur illa multo maior hac; et quidem differentia eo maior est, quo longior est tubus EF. Vnde non mirum, si tempora exinanitionum eo sint minora, quo tubi annexi sunt longiores. Possunt autem haec omnia calculo exactius subiici tum ratione velocitatum, tum ratione temporum.

Coroll. III. Si tubus EF sit indefinite longus, inuenietur alio ratiocinio sed non multum absimili talis aequatio $edu - tdu + nnudt + nntdu - udt = edt - tdt + ntdt$, cuius integralis est $ev - tv + nntv = et - \frac{1}{2}tt + \frac{1}{2}ntt$.

Coroll. IV. Si tubus EF in F paulo amplior sit, quam in E tempus depletionis adhuc minus erit; potest vero amplitudo in F eo vsque augeri, donec aqua inter effluendum lateribus tubi adhaerescere desinat.

Coroll. V. Si tubi EF sint inclinati paucis mutatis idem est calculus; quapropter hosce casus non attingam excepto illo, quo tubus est indefinite longus et horizontalis, quia is in aliis occasionibus vsui venire potest. Quod si itaque cylindrus ACDB (fig. 5.) aqua plenus vsque in AB tubum habeat annexum horizontalem DE, indefinite longum, atque aqua in cylindro descenderit vsque ad MN, in tubo autem progressa fuerit vsque in R, dicatur $AC=a$, amplitudo $AB=n$, foramen $D=1$, $CM=z$ et celeritas aquae MN talis quae acquireretur lapsu ex altitudine v, dico aequationem inter z et v fore talem

zu

$-zv+nnzv-nnav-\frac{1}{2}zz+\frac{1}{2}aa=0$ vel $v=\frac{aa-zz}{2(v-nnz+nna)}$.

Scholium. Experimenta quoque institui cum vasis, cui tubi strictiores annexi sunt, sed contigit, quod praeuidi, tempora exinanitionum semper maiora esse, quam pro calculo esse deberent; id autem frictionibus tribuendum est, vbi enim aqua per foramen exilit nulla fere est frictio; sed cum per canales strictiores fluit, obstacula sunt latera tuborum. Est mihi methodus etiam ad calculum reuocandi huiusmodi resistentias facto vnico experimento; sed omni accuratione instituendo; neque enim difficulter apparet esse resistentias in reciproca ratione diametrorum, et directa velocitatum atque tuborum longitudinum hasque resistentias subtrahi debere a pressione aquam ad motum sollicitante, atque vt specimen methodi exhibeam ponam vas aqua repletum *amplissimum*, cui tubus strictus cylindricus horizontaliter infixus, esseque altitudinem aquae supra tubum $=a$, diametrum tubi $=b$, longitudinemque $=c$, velocitatem aquae exilientis talem quae debeatur altitudini x et erit resistentia tubi $=\frac{nc\sqrt{x}}{b}$ (per n intelligitur numerus experimento erutus), qua subtracta a pressione aquae (qnae in hypothesi foraminis respectu vasis minimi proportionalis est altitudini aquae supra tubum) oritur $\frac{nc\sqrt{x}}{b}-a$, quae quantitas simul exprimit altitudinem ad quam aqua velocitate sua ascendere posset; vnde $\frac{nc\sqrt{x}}{b}-a=x$; et $x=\frac{nncc-2abb+nc\sqrt{(nncc-4abb)}}{2bb}$.

Prop. 5. Poteſt alio modo concinnius problema generale propoſitionis tertiae ſolui. Sit nimirum (fig. 6.) BDG curua, cuius axis verticalis eſt AM; abſciſſae MC denotent altitudines aquae reſiduae et applicatae CD exprimant amplitudines vaſis in eodem loco ſeu ſuperficiem aquae: GM repraeſentet fundum vaſis et LM foramen: fiat nunc alia curua SRP ſuper eodem axe talis, vt vbique ſit CR = tertiae continue proportionali ad DC et LM: ſitque $MC = t$; $CD = s$, $GM = c$, $LM = b$, velocitas aquae effluentis LNOM talis, quae generatur lapſu libero corporis ex altitudine v, et erit $CR = \frac{bb}{s}$, et (per prop. 1.) vis viua inſita fluido DCMG = ſpatio $CRPM \times v$; ponamus autem ſpat. CRPM = N, conſideremusque decreſcente MC decreſcere N, t et v: ita habetur incrementum vis viuae aquae in vaſe reſiduae $= -Ndv - vdN$ ſeu (ponendo loco $-dN$ valorem $-\frac{bbdt}{s}$) $= -Ndv - \frac{bbvdt}{s}$, cui ſi addatur vis viua particulae LNOM, quae eſt $= -svdt$, orietur incrementum totale vis viuae aequandum cum $-stdt$; ergo $-Ndv - \frac{bbvdt}{s} - svdt = -stdt$, vel $dv + \frac{bb + ss}{N} vdt = \frac{stdt}{N}$; ponatur $\frac{bb + ss}{N} dt = dP$ et $\frac{stdt}{N} = dQ$, ergo $dv + vdP = dQ$, fiat $v = b^{-P} R$ (intelligendo per b numerum cuius logarithmus eſt vnitas) et erit $b^{-P} dR = dQ$ et $R = \int b^P dQ$, et denique $v = b^{-P} \int b^P dQ$. Q. E. I.

Supereſſent plura alia dicenda; veluti de fluidis elaſticis, de fluidis ex vaſe per duo foramina vtcunq; poſita effluentibus (quod vltimum problema difficillimum eſt) aliisque; haec autem nunc ſufficiant. Caeterum ſequitur quoque ex ex theoria praesente, vt corollarium, doctrina fluidorum in tubis oscillantium, quod argumentum Newtonus attigit in theor. 35. lib. 2. princ. Math. Phil. nat. p. 363. edit. 3. vbi motus iste oscillatorius recte definitur, atque conformiter cum nostris, quae ita egregie confirmantur: neque certe quicquam minimam patitur exceptionem, modo duo principia *conseruationis virium viuarum* et *velocitatum reciproce amplitudinibus proportionalium* concedantur; prius in dubium vocari nequit, si ad frictiones aliasue resistentias extrinsecas non attendatur; qui aliter sentit, totam mechanicam reiicit, quippe conseruatio virium aliis verbis ab omnibus fuit accepta; quod ad alterum principium, quamuis id non ad rigorem verum sit, potest tamen in plerisque vasis sine vllo scrupulo accipi, nempe omnibus illis, in quibus nullus fit transitus subitaneus: at si v. g. vas acciperetur (Fig. 7.) ABCD perforatum in E, cui quasi saccus quidam adhaereret in O, nemo non videt motum aquae sacco O inclusae longe alium fore quam principium istud postularet; neque adeo theoria extendi potest ad huiusmodi vasa valde irregularia; puto autem in hisce casibus nihil certi statui posse.

Dissertatio
de nouo quodam
CVRVARVM TAVTOCHRONARVM GENERE
Auctore
Leonh. Eulero.

I.

M. Iul. 1727. EDidit ante annum et quod excurrit D. Sully Parisiis descriptionem noui cuiusdam horologii; quod peculiari modo fabricatum ad dimetienda mari tempora, et inde determinandam locorum longitudinem, perquam idoneum iudicat. Praecipuum eius inuentum, consistit in nouo quodam oscillationum genere a vacillatione trochleae circa axem petito. Idque efficit ope ponderis, trochleam semper versus certum situm sollicitantis. At quomodo istae oscillationes isochronae efficiendae sint, de eo nondum plane certus est, cum id pendeat ab accurata descriptione curuae cuiusdam lineae ad id requisitae; quam autem aliter non nisi crebra tentatione cognouit, eiusque figuram crassa Minerua determinauit. De hac curua ad tautochronismum desiderata in praesenti dissertatione agere animus est, aliosque exhibere modos, quibus aequalitas oscillationum conseruari poterit.

II.

II. Huc fere autem reducitur modus,quo Sully in trochlea oſcillationes obtinere conatur.In centro trochleae C applicat duas laminas incuruatas CE,CF inter quas dependet filum CP, pondere P oneratum, et hic ſitus, quo filum neutram laminam tangit, eſt naturalis. Ex quo ſi pellatur, vt filum in M alterutram laminam tangat, ex natura vectis pondus P vim habebit trochleam in ſitum naturalem ſollicitandi. Et ea propter oſcillationes orientur, dum trochlea nunc cis nunc vltra ſitum hunc naturalem extrauagabitur. *Fig. I.* *Fig. II.*

III. Hae oſcillationes, ſiue minus ſiue magis ſint amplae, vt iſochronae reddantur, id pendet a curuatura laminarum affixarum, vt haec rite determinetur: et id ipſum eſt, quod D. Sully deſiderat.Eſt autem hoc problema valde intricatum,plurimaque diuerſa complectens, quae diligenter ſunt euoluenda et diſtinguenda: Quod rotam attinet, ea cum laminis ita debet eſſe comparata, vt indifferens ſit ad quemuis ſitum recipiendum, vnde centrum commune grauitatis in axe trochleae poſitum ſit oportet. Atque id in poſterum aſſumam, vt nimiam calculi prolixitatem euitem.

IV. Circa filum conſideranda ſunt, an ſit ſemper verticale? an ſemper verſus eandem plagam dirigatur?an vero ſecus? Circa potentiam autem filo applicatam ſequentia. 1. An ipſa habeat vim inertiae? vt ſi pondus appendatur; an vero non,vt elaſtra fere. Haec probe ſunt diſtinguenda, potentia enim vi inertiae praedita non omnem vim ad trochleam mouendam impendit, ſed quidquam ad ſui ipſius motum requiritur. Cum econtra

po-

potentia inertia destituta omnem vim ad motum trochleae impendere queat.

V. 2. An uniformiter, i.e. semper aequali vi trahat, vt pondus, vel elastrum maxime tensum, cuius vis in remissionibus non nimis magnis quasi eadem persistit; an autem modo magis modo minus agat, vt elater, chorda tensa, aer condensatus, vel rarefactus. Quae considerationes omnes diligenter in computum duci debent, vt laminarum curuatura inueniatur. Machina Sulliana maxime ex hisce est composita. Filum CD vecti AD circa A mobili, in B est alligatum, et vecti in D pondus P incumbit, vnde fit, vt nec filum semper verticale maneat, neque pondus vniformiter trahat, et insuper vis inertiae non exigua adsit.

Fig. III.

VI. Casum autem simplicissimum hic primo examini subiicere animus est, et pro eo curuam quaesitam determinare, nec non modum monstrare, quo in praxi commode applicari possit: dein quantitatem cuiusvis partis definiam, vt oscillationes absoluantur dato tempore. Et tandem alium euoluam casum, qui non contemnendum in re nautica vsum mihi praestare videtur. Simplicissimus vero mihi est casus, quo filum perpetuo verticale persistit, potentia vnformiter agens et omni inertia destituta applicatur.

Fig. IV.

VII. Problema hoc sensu acceptum sic soluo. Designet linea CM laminam alterutram in quouis situ non naturali, sitque CB linea verticalis, cui parallela erit fili directio MR curuam in M tangens; ex puncto contactus M ducatur in CB perpendicularis MT; erit haec etiam normalis in curuam. Ducatur recta CO, designans angulum

gulum BCO, quo machina ex ſitu naturali eſt deturbata. Centro C radio arbitrario CB deſcribatur circulus BO, cuius arcus BO metietur angulum BCO, quibus factis hoc modo curuam detego; patet potentiam ſecundum MR trahentem trochleam in ſitum naturalem perducere conari. Sit ea potentia P, erit illa vis vt P. TM. Eſt PM perpendiculum ex M in verticalem CB.

VIII. Cum autem haec vis continuo aliter reſpectu hypomochlii C applicetur, ei quaero aequipollentem radio CO in O normaliter applicandam. Producatur RM in N vsque, vbi occurrat horizontali ex C ductae, potentia P eundem edit effectum ac ſi radio CN in N applicata verſus NR traheret. At ex natura vectis eſt potentia in O applicanda et ſecundum normalem ad CO agens, aequipollensque potentiae P, ad potentiam P vt CN ſiue TM ad CO. Erit ergo ea $= \frac{P.TM}{CO}$ ſeu proportionalis, ob P et CO conſtantes, ipſi TM.

IX. Nunc ad curuam determinandam iſochroniſmum conſiderare oportet, qui obtinetur, ſi acceleratio ſpatio percurrendo ſemper proportionetur, poſſunt autem oſcillationes trochleae tanquam oſcillationes penduli CO ſpectari, quae ſi ſint iſochronae, et trochleae oſcillationes tales erunt. Percurrendus vero eſt puncto O arcus BO, et huius puncti O acceleratio eſt vt vis applicata $\frac{P.TM}{CO}$ i. e. vt TM; ad obtinendum ergo iſochroniſmum oportet, vt arcus BO vel angulus BCO proportionetur ipſi TM.

X. Quum linea TM fit in curuam normalis, in eamque CT, ex puncto fixo C, perpendicularis, atque linea CO ad curuam habeat vbique eundem situm; Problema huc reductum est, vt, data recta CO positione, in eaque puncto C, inueniatur curua CM huius proprietatis, vt, ducta normali MT, in eamque ex centro C perpendiculo CT, fit linea TM proportionalis angulo TCO, seu differentiale ipsius TM elemento anguli TCO.

Fig. IV. et V.

Fig. V.

XI. Vt obtineam haec elementa, puncto M accipio proximum m, et ex eo duco normalem mt, priori occurrens in R centro circuli osculatoris; in eamque demitto perpendiculum Ct priorem normalem in p secans; erit pT elementum lineae TM; at elementum anguli TCO est angulus TCp: vt ergo pT elemento ang. TCp proportionale fit, oportet, vt fit CT constans, quae est proprietas specifica curuae inueniendae. Patet hinc puncta T et t in R cadere debere, vt pt elementum ipsius CT fit $=o$.

XII. Vt ad huius curuae cognitionem propius accedam, centro C interuallo CB$=1$ describo circulum BS, qui secatur a radiis CM Cm in S et s. Vocetur BS, x et CM, y; erit S$s=dx$ et $mr=dy$, ducto arculo Mr centro C; vnde ob triangula CSs, CMr similia, obtinetur M$r=ydx$. Cum CT constans esse debeat, ponatur CT$=1$. Erit TM$=\sqrt{(yy-1)}$. Dein ob similia $\triangle\triangle$Mrm, MTC habetur CT(1):TM $[\sqrt{(yy-1)}]=mr(dy)$: M$r(ydx)$; vnde elicitur haec aequatio $dy\sqrt{(yy-1)}=ydx$: seu $dx=\frac{dy}{y}\sqrt{(yy-1)}$

XIII

XIII. Ad construendam succinctius hanc aequationem, pono $V(yy-1)=z$; erit $y=V(zz+1)$ et $dy=\frac{zdz}{V(zz+1)}$. His valoribus substitutis obtineo hanc aequationem $dx=\frac{zzdz}{zz+1}=dz-\frac{dz}{zz+1}$, quae aequatio ergo ope rectificationis circuli construi potest. Centro C radio CB$=1$ describatur circulus NBST, quem in B tangat recta BP, in qua accipiatur vtcunque BP$=z$, ducaturque CP secans circulum in N; erit arcus BN $\int\frac{dz}{zz+1}$, et CP$=V(zz+1)=y$. Est autem $x=z-\int\frac{dz}{zz+1}$: sumatur ergo a puncto B arcus BS$=$BP$-$BN; erit BS$=x$. Radius CS in M producatur, vt sit CM$=$CP$=y$ erit punctum M in curua quaesita. *Fig. VI.*

XIV. Curuam hoc modo constructam ex ipsius circuli NBST euolutione generari obseruo. Ducatur enim ad curuam in M normalis MT, tanget ea circulum in T, cum ex §. 11. perpendiculum CT ex C in eam normalem demissum sit$=1$. Et insuper ex eodem §. normalis TM est ipse curuae in M radius osculi, qui cum circulum continuo tangat, liquet, circulum esse euolutam huius curuae inuentae: adeoque ea facilius et commodius euolutione fili circulo circumducti describetur.

XV. Quod iam attinet ad tempus absolutum, id quoque supputandum est, vt liqueat, quo modo trochlea et potentiae sint instituendae, vt oscillationes dato tempore absoluantur. Quare ad tempus totius oscillationis inueniendum considerabo accelerationem quamuis momentaneam. Sit trochlea CBS homogenea et aequabilis *Fig. VII.*

bilis vbiuis: fit eius pondus $=Q$; et radius eius $CB=1$. Praeftet potentia eundem vbique effectum ac pondus P hoc modo innotefcet tempus vnius ofcillationis.

XVI. Ducta verticali CB confiftat curuae initium in loco quovis S; fitque curua SM, in cuius puncto M tangens MQ fit verticalis: adeoque radius ofculi BM erit horizontalis in B terminatus. Erit itaque MQ directio potentiae. Defcendat curua in fitum proximum, nempe punctum S in s, abibit M in m et MQ in mq; erit denuo Bm radius ofculi horizontalis. Ducantur radii CS, Cs, et rectae Cm, CM; centro C, interuallo Cm, defcribatur arculus $m\mu$ curuae in altero priori fitu in μ occurrens, erunt puncta m, μ duo puncta homologa et refpondentia; ergo ang. $mC\mu = SCs$.

XVII. Peruenit porro potentia ex Q in q defcripfit adeo fpatiolum $Qq = m\mu$, quare ducta qn parallela BM; erit $Qn = M\mu$ propter eandem fili longitudinem et ob $CSM - Csm = M\mu$. Defcendit igitur potentia hoc momento per Qn; vnde generari debet vis viua $P.Qn$, quae tota in trochleam transferetur: quia potentia inertiae expers fupponitur. Vis ergo viua in trochlea, dum motu angulari SCs gyratur, augeri debet vi $P.Qn$.

XVIII. Sit velocitas puncti S, aequalis acquifitae ex altitudine v. Erit vis viua totius trochleae $=\frac{Qv}{2}$; vnde eius differentiale $\frac{Qdv}{2} = P.Qn$; ergo $dv = \frac{2P.Qn}{Q} = \frac{2P.M\mu}{Q}$. Eft autem ob $\Delta\Delta$ fimilia $M\mu m$, et BmC; $M\mu : Mm = Bm :$ BC

BC; ergo $M\mu = \frac{Bm, Mm}{BC}$: at $Mm = Ss$; vnde $M\mu = \frac{Bm, Ss}{BC}$. Ergo $dv = \frac{2P, Bm, Ss}{Q, BC}$, confequenter momentum $\frac{dv}{Ss} = \frac{2P, Bm}{Q, BC} = \frac{2P, BS}{Q, BC}$, ob BS euolutam curuae SM, adeoque aequalem radio ofculi BM feu Bm.

XIX. Inuento momento $\frac{dv}{Ss}$ facili negotio repetietur longitudo penduli ifochroni hoc modo: fit pendulum ifochronum OA ofcillans in cycloide NA. Sitque arcus AN = arcui BS et contemporaneus. Sumatur $Nn = Ss$, ducaturque verticalis nt, erit momentum per $Nn = \frac{nt}{Nn}$: id quod aequari debet momento $\frac{2P, BS}{Q, BC}$: Sed ex natura cycloidis eft $\frac{nt}{Nn} = \frac{AN}{AO} = \frac{BS}{AO}$; ergo $AO = \frac{Q, BC}{2P}$. Fiat ergo vt pondus potentiae aequiualens, ad pondus trochleae, ita dimidius radius BC ad quartam, quae erit longitudo penduli ifochroni.

XX. Potentiam ideo adhibui inertia deftitutam, ne ad velocitatem in ea generandam vis requiratur. Hinc igitur facile patet, fi potentia ita fit exigua, vt pondus ei fuffectum nullam ad trochleae pondus habeat rationem fenfibilem, vim in eo generandam reiici poffe; adeoque loco P poterit, vt Sully vult, pondus fubftitui, modo valde exiguum refpectu Q. Vt autem nihilominus ofcillationes trochleae dato tempore abfoluantur BC, inde determinari debet, fiat enim, vt Q ad 2P ita AO ad BC: fit Q centies maius quam P, fitque AO longitudo penduli ofcillantis fingulis minutis fecundis, nempe = 3166 fcrup. ped. Rhen. erit BC = 63. fcrup. quae eft quantitas fatis magna pro radio BC. Atque hoc fenfu pondus satisfaciet appensum, vt Sully desiderat. Id vt ad sensum verticale perseueret, neque oscilletur, cautelae ab Autore adhibitae locum obtinebunt; praecipue vero filum satis longum esse debet, vnde ob radium BC exiguum, directio fili semper fere verticalis obtinebitur.

Fig. VIII. XXI. Quin et hoc modo commode isti difficultati medebimur. Construatur trochlea ED multo maior, quam circulus generator BF curuae laminis tributae, hoc modo trochleae ingens erit imprimendus motus, cum tamen pondus appensum ob circuli BF paruitatem vix moueatur, vt motus in eo generandus merito respectu motus trochleae reiici queat, praecipue si insuper pondus P ad trochleae pondus exiguam habuerit rationem. Illo autem casu dicto radio trochleae CD $= a$ erit longitudo penduli isochroni $= \frac{Q \cdot a^4 \cdot BC}{2P}$. Hac ergo ratione horologium Sully emendatum, multo maiorem praestare poterit vtilitatem.

XXII. Ex dictis patet praecipuam difficultatem circa directionem fili, quod non semper verticale persistat, versari. Hoc vero incommodum sequentis curuae constructione tolletur. Ducatur filum ante, quam ipsi potentia applicetur, per foramen quoddam fixum, hoc modo fiet, vt filum perpetuo versus datum punctum directum sit. Quaesiui igitur pro hoc casu curuam tautochronismum producentem, et incidi in sequentem proprietatem.

Fig. IX. Sit C centrum trochleae, BM curua quaesita A punctum illud fixum seu foramen, per quod filum semper transit

transit. Dictis uncn $AC = a$, et quouis radio $CM = y$. Sit porro PM normalis in curuam, et CP normalis in MP positis $CP = p$ et $PM = t$, designanteque b constantem pro lubitu accipiendam; hanc obtinui aequationem naturam curuae experimentem $b\sqrt{(aa-tt)} - bp = p\sqrt{(aa-tt)}$. Ex hac aequatione, cum sit algebraica, per notas regulas curua desiderata ope circuli rectificatione construetur, simili modo, quo in §. 13. curua ibi inuenta erat constructa.

XXIII. Obtinetur autem data aequatio $b\sqrt{(aa-tt)} - bp = p\sqrt{(aa-tt)}$ hoc modo: Sit C centrum trochleae, O punctum fixum ad quod filum semper tendit, seu in O sit foramen per quod filum est ductum, cui infra foramen potentia inertia carens sit applicata, vt filum perpetuo per hoc foramen O transeat: Sit CM situs quiuis curuae inueniendae, quam tangat recta OM, directio fili, in hoc curuae situ ex centro trochleae C demittatur in OM productam, perpendiculum; CN exprimet haec CN quantitatem vis, quam potentia filo infra foramen applicata, ad trochleam mouendam impendit, cum potentia ea ponatur constans. *Fig. X.*

XXIV. Ex isochronismi principio autem vis ad trochleam mouendam applicata debet esse, vt via describenda, donec in situm naturalem reuertatur, haec via describenda mensuranda est ex angulo, quo situs hic CM a naturali distat, ducatur linea CB quae ex naturali situ peruenit in CO; erit angulus BCO ille, qui exprimit viam describendam, oportet ergo vt sit linea CN, quae exprimit vim ad mouendam trochleam in situ CM, pro-

por-

portionalis angulo BCO, seu ex puncto M ducatur MP normalis in curuam in puncto M, et ex C in eam demittatur perpendicularis CP, erit MP=CN adeoque debet esse MP, vt angulus BCO.

Fig. XI. XXV. Sit iam CB in situ naturali, fiatque ea aequalis distantiae foraminis a centro trochleae C, sitque CM curua inuenienda, accipiatur punctum quoduis M in curua, in eoque tangatur curua a linea MO, centro C, radio CB describatur arcus circuli secans tangentem in M in O, erit hoc punctum O foraminis situs respondens puncto curuae M. Ducatur linea CO; erit angulus BCO idem cum angulo BCO in fig. X. ex M erigatur perpendicularis in curuam MP, cui in P occurrat perpendiculum CP ex C in eam demissum, oportet hanc MP proportionalem esse angulo BCO, seu elementum ipsius MP proportionale elemento anguli BCO.

XXVI. Vt obtineam haec elementa assumo puncto M proximum *m*, et ducantur lineae respondentes *mo*, *mp*, illa tangens in *m*, et haec *mp* perpendicularis in *m*, quae in *p* secetur a perpendiculari C*p* in ipsam; secabit haec C*p* priorem perpendicularem in *t*, eritque P*t* incrementum normalis PM. Iungantur puncta C et *o*, recta C*o*, erit angulus OC*o*, incrementum anguli BCO: ad determinationem curuae CM quaesitae igitur requiritur, vt sit P*t* proportionale elemento angulari OC*o*. Est autem P*t* vt angulus PC*t* ductus in radium PC, erit ergo ang. OC*o* ad PC*t*. CP in data ratione, quae sit 1 ad *b* vt per consequens sit OC*o* : PC*t*=CP*t* : *b*.

XXVII. Concurrant perpendiculares MP, *mp* in R, in R, centro circuli osculatoris in M erit ang. $PCt =$ MRm ob $\triangle\triangle$ PCt et pRt similia, sed angulus $MRm =$ ang. OMo, qui formatur a tangentibus proximis OM, om; ergo $PCt = OMo$, oportet ergo sit $OCo : OMo =$ $CP : b$: producatur tangens OM in S, donec occurrat perpendiculo CS in se demisso, erunt demisso ex O in mo perpendiculo On, triangula Ono, OSC similia; ergo Oo : $On = CO : OS$. Sunt autem anguli $OCo : OMo =$ $\frac{Oo}{OC} : \frac{On}{OM} = \frac{CO}{OC} : \frac{OS}{OM}$ (substitutis loco Oo et On proportionalibus OC et OS) $= OM : OS$. Est ergo OCo : $OMo = OM : OS$.

XXVIII. Cum autem requiratur, vt sit OCo : $OMo = CP : b$, obtinebitur haec analogia $CP : b = OM$: OS, quae tota ab angulis libera est, et inde habetur haec aequatio $CP.OS = b.OM$. Est autem ob $\triangle COS$ ad S rectang. $OS = \sqrt{(CO^2 - CS^2)} =$ (ob $OC = CB$ et $CS = PM$) $= \sqrt{(CB^2 - PM^2)}$. Dein est $OM = OS - SM$ $= OS - CP = \sqrt{(CB^2 - PM^2)} - CP$; vnde haec aequatio obtinetur $CP\sqrt{(CB^2 - PM^2)} = b\sqrt{(CB^2 - PM^2)} - b.CP$. Vnde curua desiderata determinari debet.

XXIX. Applicentur symbola, et vocetur CB distantia centri trochleae a foramine a, CP, p, et MP, t; habebitur pro curua quaesita haec aequatio $p\sqrt{(aa-tt)} =$ $b\sqrt{(aa-tt)} - bp$, quae eadem est cum ea quam §. XXII. exhibui. Erit ergo $p = \frac{b\sqrt{(aa-tt)}}{b+\sqrt{(aa-tt)}}$. Ex qua aequatione curua construi poterit atque ad vsum applicari. Si foramen ponatur infinite distans a centro trochleae, erit fili directio sibi semper parallela, adeoque habetur casus prior, quo inuenta erat CP semper constans. Posito enim a infinito, abibit $\sqrt{(aa-tt)}$ in a et obtinebitur $p = \frac{ab}{a+b} =$ ob b respectu ipsius a in denominatore euanescens.

XXX. Si etiam in hac machina loco elateris pondus applicare commodius visum fuerit, id vt in priori casu quoque praestari poterit, iisdem obseruandis monitis, vt pondus satis exiguum appendatur, radius trochleae diminuatur, aucto eius pondere, idque tantum, quoad error a vi inertia ponderis oriundus insensibilis euadat, machinaeque irregularitatem, quae animaduerti nequeat, inducat. Cum autem curuae ad istam machinam requisitae constructio valde sit operosa, contra vero curua priori casui, quo directio fili ad eandem perpetuo plagam tendit, constructu sit facillima, priorem modum huic posteriori fere praeferendum existimo.

THEO-

THEORIA GENERALIS MOTVVM

Qui naſcuntur a Potentiis quibusuis in Corpora indesinenter agentibus, ſiue haec Corpora in vacuo ferantur siue in medio resistenti.

Auctore

Iac. Hermanno.

ETſi multa eorum quae in hoc ſchediaſmate traduntur, a celeberrimis quippe Geometris iamdudum praeoccupata, nunc peruulgata, vſu trita et vix digna iudicabuntur, quae denuo hoc loco exhibeantur, non tamen abs re fore arbitratus ſum, ſi principiorum inſtar praeſternerem ſolutionibus meis Problematum quorundam nouorum, quae in hoc argumento de motibus variatis proponi posſunt et in hac Diſſertatione expedientur, Geometrarum curioſitate forte non minus digna, quam ea quae iam pasſim cognita habentur. *M. Iun. 1727.*

Lemma Generale

1. *Potentia indeſinenter agens* (P) *ducta in elementum temporis* (*dt*) *aequipollet facto ex maſſa corporis* (M)

cui potentia applicata est, et elemento celeritatis (dc) *quod tempusculo illo producitur.*

Dem. Potentia quaecunque motrix eatenus tantum potentia est quatenus corpori applicata motum aliquem producit, et per potentiam indefinenter agentem intelligitur illa quae ad producendum suum motum tempore opus habet. Factum ex hac potentia et tempore actionis, denotat *quantitatem actionis*, et factum ex massa corporis et celeritate, seu quantitas motus producti, significat id, quod actione illa effectum est, et quantitati actionis aequipollet; necessarius enim est nexus et indiuulsus inter quantitatem actionis et quantitatem effectus, et hunc nexum per aequipollentiam vnius cum altero interpretor; hancque aequipollentiam per notum signum aequalitatis deinceps indicabo, quod semel monuisse sufficiat.

Hoc posito si tempusculo ddt, potentia P producit motus quantitatem $MddC$, vbi ddt, et ddC, sint elementa temporis et celeritatis secundi gradus, possent eorum loco adhiberi elementa vlteriorum graduum; habebimus vi eorum quae iam probata sunt, formulam $Pddt = Mddc$. Eadem haec potentia P producet secundo tempusculo ddt aequali primo, eandem ac prius, motus quantitatem $MddC$, quia inter aequales quantitates actionis vnius eiusdemque potentiae idem indiuulsus est nexus, qui inter earum effectus, adeoque fiet iterum $Pddt = MddC$, et addendo hanc formulam ad priorem, resultabit $2Pddt = 2MddC$, pro tertio tempusculo ddt, reliquis aequali, reperitur pariter $Pddt = MddC$, quae priori ri formulae addita praebet, $3Pddt = 3MddC$; pari argumento elicientur $4Pddt = 4MddC$, $5Pddt = 5MddC$, etc. imo $nPddt = nMddC$, vbi n designet numerum quemcunque; si n est infinitus, fient $nddt = dt$, et $nddC = dC$, adeo vt vltima formula $nPddt = nMddC$, iam abeat in $Pdt = MdC$. Quod erat etc.

Haec conclusio ex praemissis aeque necessario fluit, ac necessaria veritas est, quod aequalitas sit inter totum et omnes eius partes simul sumtas. Sed obiicietur forte, quid, si Deus talia corpora creasset in quibus non potentia ipsa, sed eius quadratum, cubus vel alia quaecunque functio in temporis elementum ducta celeritatis elemento proportionalis esset, vt sane talia creare potuit, nonne propositio ista, potentia mobili applicata in tempusculum ducta, proportionatur elemento celeritatis; est tantum contingenter vera? ego iudico quod non, et huius rei ratio est, quod non id, quod potentia vel si mauis pressio dicitur, reapse sit potentia agens; sed (vi suppositionis) eius functio sit vera potentia accelerans.

2. *Coroll.* I. Si singulae moleculae corporis cuiusque vrgentur potentia aequali, quam nominabimus p, in directionibus parallelis versus eandem plagam, potentia P vniuersum corpus vrgens fiet $= pM$, designante littera M, vt supra, corporis massam; hoc per se liquet, potentia enim totalis P aequat omnes potentias partiales p in corpus agentes, sed hae omnes aequantur facto ex potentia p in massam totius corporis M. Quod si

eſt, formula $Pdt = MdC$, quam elicuimus, iam mutabitur in $pMdt = MdC$ vel diuidendo per M, in $pdt = dC$.

Ex hac formula vero cognoſcitur, quod omnibus corporibus, ſiue magna ſint, ſiue parua, ab aequalibus potentiis p tempore aequali, aequales acquirantur celeritates; ſepoſita reſiſtentia aeris etc.

3. *Coroll.* 2. Iisdem poſitis, ſequitur vim viuam et abſolutam (V) corporis cuiusque cuius maſſa eſt M, et celeritas C, eſſe $= \frac{1}{2} MCC$. Nam 1. nemo non fatebitur, corpus iſtud nullis externis rebus impeditum, nullaque alia vi; quam quae ipſi propter celeritatem C inſita eſt, citum, motum ſuum cum celeritate C, aequabiliter continuare, in quacunque demum linea recta moueatur, vimque eius durante hoc motu neque intendi neque remitti, ſed eandem manere. Adeoque 2. ſi vis eius vel minimum incrementum dV capere debeat, id a potentia aliqua nouiter in corpus agente tantum prouenire poſſe. Itaque 3. ſi potentia ſingulas minimas corporis moleculas inceſſanter vrgens dicatur p, et duratio actionis dt, erit iam $dV =$ quantitati motus iam corpori inſiti MC in pdt, id eſt $= MCpdt$, atqui per *Coroll.* praec. eſt $pdt = dC$ quod in aequalitate ſuffectum praebet $dV = MCdC$, quare ſumtis integralibus, fiet $V = \frac{1}{2} MCC$.

Problema generale.

4. *Si mobile quodcunque vrgetur potentiis inceſſanter agentibus ſed pro lubitu variantibus* (P), *quarum directiones conuergunt in punctum poſitione datum, definire mo-*

motus variatos inde prouenientes , in quacunque demum linea recta vel curua feratur, in vacuo aut in pleno.

Hoc Problema duas habet partes quarum vna respicit motus in vacuo altera vero motus in medio vtlibet resistente.

5. Consideremus ergo primum motus rectilineos in vacuo , quo nomine intelligendum est medium quod motui corporum nullum impedimentum aut adiumentum afferat.

Moueatur ergo mobile quodcunque in linea quacunque AO transeunte pro centrum G in quod directiones potentiarum P conuergunt, motumque suum a quiete incipiat in puncto A, dicantur spatium AB tempore quocunque t, transmissum $=S$, celeritas corporis in B acquisita$=C$, eius elementum $=dC$. His positis erit (§. 1.) $Pdt=MdC$, vel (§. 2.) $pdt=dC$, et $pCdt=CdC$, sed $Cdt=dS$, ergo $pdS=CdC$, et sumtis integralibus $CC=2\int pdS$, adeoque $C=\sqrt{(2\int pdS)}$.

Hoc significat, quod, si ordinatae Aa , BD figurae curuilineae $AaDF$ exponantur per p , celeritas mobili in B acquisita exponatur per latus quadratum duplae areae $AaDB$. *Fig. I.*

6. Igitur in hypothesi grauitatis vniformis in qua p est quantitas constans linea curua aDF abit in lineam rectam axi AG aequidistantem, et celeritas in B acquisita est vt $\sqrt{AB}$, atque hinc omnia ea facile deriuantur, quae *Galileus* de descensu grauium in lineis rectis more suo demonstrauit, quae tamen vtpote iam satis cognita inta-

intacta praeteribo. Hoc vnum vero ex ista hypothesi, quippe in sequentibus vsui futurum adhuc deducam, nempe:

7. Quia aequatio $pdt = dC$, praebet $pt = C$, et C est $\sqrt{2pS}$, erit $t = \frac{\sqrt{2pS}}{p} = \sqrt{(\frac{2S}{p})}$.

8. Si p est vt BQ distantia loci B a centro G, et $Aa = b$, item $AG = a$, $AB = S$, erit $BD (= p) = \frac{ab - bS}{a}$, et $2 \times AaDB = \frac{2abS - bSS}{a}$; adeoque celeritas in B, hoc est, $C = \sqrt{(\frac{2abS - bSS}{a})}$ per §. 5. et t seu tempus per $AB = \int \frac{dS}{C} = \frac{dS\sqrt{a}}{\sqrt{(2abS - bSS)}} = \frac{dQ\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, posito $dQ = \frac{dS}{\sqrt{(2aS - SS)}}$, atque adeo $t = \frac{Q\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, atqui $dQ = \frac{dS}{\sqrt{(2aS - SS)}}$ significat angulum cuius sinus est $= \sqrt{(2aS - SS)}$ existente radio $= a$. Adeoque radio AG ducto circulo AH, tempus per AB erit
Fig. II.
$= \frac{ang. AGH \times \sqrt{AG}}{\sqrt{Aa}}$, et temp. per $AG = \frac{ang. rect. \times \sqrt{AG}}{\sqrt{Aa}}$.

Similiter si mobile descensum a quiete in B inchoaret, inuenietur temp. per $BG = \frac{ang. rect. \times \sqrt{BG}}{\sqrt{BD}} = \frac{ang. rect. \times \sqrt{AG}}{\sqrt{Aa}}$.

Hanc ob causam singulae AG, BG, bG, etc. aequali tempore percurrerentur, si mobile in his punctis A, B, b, etc. descensum a quiete inchoauerit.

Fig. III.
9. Si mobile incedat in linea recta ABO quae est tota extra centrum G directionum secundum quas potentiae p in corpus agunt, motusque a quiete incipiat in A. Ducantur ex centro directionum recta GA per initium motus A, et altera GO normalis ad AB, et dicantur

AO

AO$=a$, GO$=b$, GB$=x$, eritque BO$=\sqrt{(xx-bb)}$. His positis.

Resoluenda est potentia (p) secundum BG in suas laterales OG et BO quarum haec, quae secundum BO motum accelerat, illa vero secundum OG retunditur a plano vel linea AB, nihilque ad motum generandum confert, est vero potentia per BG ad potentiam per BO vt BG(x) ad BO[$\sqrt{(xx-bb)}$], quare potentia accelerans in directione BO fit $= \frac{p\sqrt{(xx-bb)}}{x}$. Et AB($=$S)$=a-\sqrt{(xx-bb)}$; adeoque $dS=\frac{-xdx}{\sqrt{(xx-bb)}}$. Surrogatis ergo in formula (§. 5.) C$=\sqrt{(2\int pdS)}$, inuentis aestimationibus $\frac{p\sqrt{(xx-bb)}}{x}$ et $\frac{-xdx}{\sqrt{(xx-bb)}}$ pro p et dS, inuenietur C $=\sqrt{(2\int -pdx)}$. Hoc est, facta vbique Gβ=GB, descriptaue circa AG tanquam axem curua aDF cuius applicatae βD potentias centrales p exponunt; Celeritas (C) in B acquisita descensu per AB, exponetur per latus quadratum duplae areae AaDβ, ex quo et §. 5. cognoscitur, quod celeritas in B acquisita, descensu obliquo per AB, et velocitas in β acquisita descensu recto per Aβ aequales sint, existentibus punctis B et β centro G aequidistantibus, in vno eodemque potentiarum accelerantium Systemate.

Ex demonstratis etiam sequitur motum in hac linea obliqua AB fore acceleratum a puncto A vsque in O, atque deinceps a puncto O versus b retardatum vsque dum in H penitus euanuerit in distantia OH a puncto O aequali, distantiae AO. A puncto vero H regredietur mobile versus A accelerato motu vsque in O et abhinc retardato motu vsque in A; haecque motus reciprocatio qua corpus inter puncta A et H a medio O aequaliter distantia vltro citroque mouetur, continuaretur in infinitum, nisi medii resistentia vel alia impedimenta externa huic motui obstarent. Hactenus de motu rectilineo in vacuo; dispiciendum quales sint leges motus curuilinei.

10. Descendat nunc mobile citum potentiis vtlibet variantibus (P) directis ad punctum positione datum G; in curua quacunque ABO, et definire oportet motum corporis in hac linea.

Delapsum sit corpus in arcu curuae AB motum suum a quiete incipiendo, et dicatur celeritas in B acquisita $=u$; centroque G descripti intelligantur arcus circulares AE, BF, *bf*, etc. porro descripta sit circa axem EG, scala potentiarum accelerantium, EOKIH cuius applicatae FI exponunt potentias centrales p, quibus mobile ad centrum G vrgetur. Repraesentet BN potentiam P in mobile agentem secundum directionem BG, cum est in G, ductisque per N recta NL parallela tangenti curuae in B, et BL huic tangenti perpendiculari et exponet recta NL potentiam tangentialem iuxta quam motus corporis in B acceleratur; Sit B*b* elementum curuae per cuius terminum *b* ductus sit centro G arculus $b\beta$, et fient triangula NBL et $Bb\beta$ similia, propterea fiet $LN=\frac{P\times B\beta}{Bb}$; adeoque si in formula (§. 1.) $Pdt=MdC$, pro P et dC, iam ponantur $\frac{P\times B\beta}{Bb}$, et du, inuenietur $\frac{P\times B\beta}{Bb}\times dt=Mdu$, vel quia $P=pM$, $\frac{p\times B\beta}{Bb}\times dt=du$, ducatur hoc

hoc in u, fietque $\frac{p \times B\beta}{Bb} \times udt = udu$, atqui $udt = Bb$ in figura, quare $p \times B\beta$ (Conftr.) $= FI \times Ii = udu$, et $uu = 2 \times EHIF$, ac per confequens, u feu celeritas in B acquifita fit $= \surd(2EHIF)$.

Tempus vero defcenfus per AB exponetur per $\int \frac{ds}{\surd(2EHIF)}$ vbi ds fignificat elementum arcus AB.

11. Si in eadem fig. 4. potentia tangentalis LN $= bs$, exiftente $s = OB$, et $BN = FI = p$, erit area EHIF $= \frac{1}{2} aab - \frac{1}{2} bss$. Nam fupra §. 10. inuenimus $LN = \frac{p \times B\beta}{Bb} = \frac{FI \times Ff}{Bb} = \frac{FI \times Ff}{ds} = bs$, ergo $FI \times Ff = bsds$, quare area EHIF $= \int bsds$ refpectu arcus AB, hoc eft $= \frac{1}{2} aab - \frac{1}{2} bss$, fi arcus totus ABO dicatur $= a$. Cum autem generaliter inuenerimus $u = \surd(2EHIF)$ erit in praefenti cafu $u = \surd(aab - bss)$ celeritas in B acquifita defcenfu per AB; adeoque celeritas in O acquifita defcenfu per totam ABO inuenietur $a\surd b$. Tempus per AB $(= \int \frac{ds}{\surd(2EHIF)})$ iam eft $= \int \frac{-ds}{\surd(aab - bss)} = \frac{Q}{\surd b}$, vbi Q denotat angulum cuius finus rectus eft $= \surd(aa - ss)$ et radius $= a$, quare fi $s = o$ fiet angulus Q rectus, et tempus defcenfus per totam ABO exponetur per $\frac{ang.\ rect.}{\surd b}$. Per eandem hanc fractionem exponeretur tempus defcenfus per alium quemcunque arcum curuae BO, terminatum in imo ad punctum O, fi mobile defcenfum fuum in fuperiori arcus termino B a quiete inchoauerit. In hac ergo curua omnes eiusmodi arcus AO, BO etc. aequali tempo-

re describentur, ipsaque adeo curua est Tautochrona in omni possibili potentiarum accelerantium systemate.

12. Sit in ead. fig. 4. arculus curuae infimus RO indifinite paruus, adeo vt instar arcus circularis centro X descripti, spectari possit, centro G ducatur per punctum curuae R arculus RS qui aequabitur alteri RO, vt demonstratu facile est. Sint $OX = e$, $GO = f$, $OK = g$, arculus RO vel $RS = dm$, erit OS summa sinuum versorum arculorum OR, $RS = \frac{\overline{e+f} \times dm^2}{2ef}$. Iam sicut (§. 11.) area $EHKO = \frac{1}{2}aab$, ita etiam $FIKD = \frac{1}{2}bss$, atque adeo $SkKO = \frac{1}{2}bdm^2$. Atqui area $SkKO = OK \times OS$ $= \frac{\overline{e+f} \times gdm^2}{2ef}$. ergo $\frac{e+f}{2ef} \times gdm^2 = \frac{1}{2}bdm^2$, atque adeo $b = \frac{e+f}{ef}$ $\times g = \frac{gh}{ef}$, posita $h = e+f$.

13. Si π designet peripheriam circuli cuius radius est $= 1$, erit $\frac{1}{4}\pi$ mensura anguli recti, cum vero temp. desc. per AO, vel BO, aut RO sit $= \frac{ang.\ rect.}{\sqrt{b}}$ fiet hoc $= \frac{\pi\sqrt{ef}}{4\sqrt{gh}}$, cuius duplum $\frac{\pi\sqrt{ef}}{2\sqrt{gh}}$ exponit durationem vnius oscillationis minimae penduli $XO = e$, in omni grauitatis hypothesi, et si centrum grauium sit infinite distans, aequabuntur f et h, et duratio vnius oscillationis penduli exponetur per $\frac{\pi\sqrt{e}}{2\sqrt{g}}$, quod semper rationem circumferentiae ad radium inuoluit, quantaecunque exilitatis sint oscillationes penduli.

14. Hoc ideo tantum monere volui, quod Cl. *Parent* in suis Disquisitionibus Mathematicis *Hugenium* de errore accusare sustinuit, eandem durationem vnius pen-

duli oſcillationis menſuram aſſignantem in Horologio Oſcillatorio, quam modo in praecedentibus eruimus; arbitrabatur enim *Parentius* tempus dimidiae oſcillationis minimae non differre poſſe a tempore deſcenſus accelerati ex dupla penduli longitudine. Sed falſus eſt Vir doctus fundamento in ſe vero ſed male applicato, *quod arculus circuli indefinite paruus ſubtenſae ſuae aequalis cenſeri poſſit*, nam ab aequalitate huiusmodi arcus cum ſubtenſa argumentari non licet, vt Vir Cl. fecit, ad aequalitatem inter tempora deſcenſus per arcum et per eius chordam, nam tempus per arculum eſt ad tempus deſcenſus per chordam eius, vt circumferentia circuli ad quadruplam diametrum. Oſtendi hoc poteſt ex ipſiſſimo principio Dn. *Parent*, aequalitatis inter arculum indefinite paruum et eius ſubtenſam.

15. Sit ergo Pendulum GO, faciens circa punctum G dimidiam oſcillationem in arcu ABO, quaeritur duratio huius dimidiae oſcillationis, ſi arcus AO et omnes eius partes ſubtenſis ſuis aequales ſtatuuntur. Sint GO $= e$, ſinus verſus OD arcus AO $= f$, grauitas g, et ponamus deſcendiſſe mobile in arcu AB, ductaque BE parallela GO, dicatur $= x$, adeoque FO $= f - x$, et ſubtenſa arcus OB vel (*hyp.*) arcus ipſe $= \sqrt{(2ef - 2ex)}$, eiusque elementum negatiuum, id eſt elementum arcus AB, quod eſt B$b = \frac{+edx}{\sqrt{(2ef-2ex)}} = \frac{+dx\sqrt{e}}{\sqrt{(2f-2x)}}$. Celeritas deſcenſu per AB acquiſita, ſeu $u = \sqrt{2gx}$, ergo tempus per elementum Bb $\left(= \frac{Bb}{u} = \frac{+dx\sqrt{e}}{2\sqrt{(fgx-gxx)}}\right) = \frac{\frac{1}{2}dQ\sqrt{e}}{\sqrt{g}}$, exiſtente $dQ = \frac{dx}{\sqrt{(fx-xx)}}$, adeoque temp. deſc. *Fig. V.*

per

per $AB = \frac{\frac{1}{2}Q\sqrt{e}}{\sqrt{g}}$, vbi Q eſt angulus cuius ſinus $= \sqrt{(fx-xx)}$ ad radium $\frac{1}{2}f$. Cum vero x fit $= f$, angulus Q aequat duos rectos ſeu $= \frac{1}{2}\pi$, et $\frac{1}{2}Q = \frac{1}{4}\pi$. Quare temp. deſc. per $AO = \frac{\pi\sqrt{e}}{4\sqrt{g}}$, eiusque duplum, ſeu $\frac{\pi\sqrt{e}}{2\sqrt{g}}$ exponit durationem oſcillationis minimae penduli, vt ſupra iam (§. 13.) inuenimus.

Tempus vero deſcenſus per duplam penduli longitudinem, vel per chordam arcus minimi (§. 7.) exponitur per $\sqrt{\frac{e}{g}}$; quare tempus dimidiae oſcillationis minimae, hoc eſt, tempus per arculum indefinite paruum, eſt ad tempus deſcenſus per chordam eius, vt $\frac{\pi\sqrt{e}}{4\sqrt{g}}$ ad $\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{g}}$, hoc eſt, vt π ad 4, ſeu vt peripheria circuli ad quadruplam diametrum, vt dicebatur. Haec vero obiter dicta ſint, reuertor ad *Isochronas*.

16. Quoniam (§. 11.) eſt area $2FIKO = bss$, ſi arcus OB dicatur $= s$, et ſi haec dupla area dicatur $= R$, fiet $ss = \frac{R}{b}$, et $s = \sqrt{\frac{R}{b}}$, et differentiando $ds = \frac{pdz}{\sqrt{bR}}$, vocando ordinatam $FI = p$, $GB = z$, adeoque $\beta B = fF = dz$, ſit praeterea arculus $b\beta = dy$, inuenieturque $dz^2 + dy^2$ $(= ds^2) = \frac{ppdz^2}{bR}$, atque inde $dy = \frac{dz\sqrt{(pp-bR)}}{\sqrt{bR}}$. Et haec eſt generalis aequatio differentialis pro omnibus *Isochronis* in vacuo. Nam p algebraice data eſt in z et conſtantibus, R item, ſed ſaepiſſime tranſcendenter tantum, et $b = \frac{gh}{ef}$, quare curua optata per quadraturas conſtrui poteſt.

17. Si p constans est et $=g$, ac manente, vt supra, $GO=f$, fiet $R={}^2gz-{}^2fg$, et aequatio generalis $dy=\frac{dz\sqrt{(pp-bR)}}{\sqrt{bR}}$, mutatur in $dy=\frac{dz\sqrt{(g-2bz+2bf)}}{\sqrt{(2bz-2bf)}}$, vt haec aequatio construi possit fiat fractio $\frac{g-2bz+2bf}{2bz-2bf}=xx$, inuenieturque $2bz=\frac{2bfxx+2bf+g}{xx+1}=\frac{2bfxx+2bfk}{xx+1}$, posita $k=\frac{2bf+g}{2bf}$; adeoque $z=\frac{(xx+k)f}{xx+1}$; et $\frac{dz}{z}=\frac{2xdx}{xx+k}-\frac{2xdx}{xx+1}$. Ipsa vero aequat. different. Isochronae abit in $dy=xdz$, vel $\frac{dy}{z}=\frac{xdz}{z}=\frac{2xxdx}{xx+k}-\frac{2xxdx}{xx+1}=\frac{2dx}{xx+1}-\frac{2kdx}{xx+k}$ atqui $\frac{dy}{z}$ designat in figura 4. angulum elementarem BGb, ergo ang. $BGb=\frac{2dx}{xx+1}-\frac{2kdx}{xx+k}$. Sint $dA=\frac{1dx}{xx+1}$, et $dB=\frac{dx\sqrt{k}}{xx+1k}$, et fiet ang. $BGb=2dA-2dB\sqrt{k}$, adeoque angulus $BGO=2A-2B\sqrt{k}+\Delta$. Sunt vero A et B anguli quorum communis tangens est $=x$, sed diuersos radios habent, cum anguli A radius sit 1, alterius vero B, $=\sqrt{k}$. Assumta vero Δ denotat constantem aliquem angulum addendum vel subducendum atque sequenti argumento eliciendum, si $BG(=z)$ euadit $=OG(f)$, euanescit angulus BGO, sed hoc casu x fit infinita, et anguli A et B quorum communis tangens facta est infinita sunt ambo recti, quare si r sit nota anguli recti, praecedens aequatio ang. $BGO=2A-2B\sqrt{k}+\Delta$, iam abit in $(2-2\sqrt{k})r$, $+\Delta=0$, et $\Delta=(2\sqrt{k}-2)r$ adeoque aequatio ang. $BGO=2A-2B\sqrt{k}+\Delta$, mutatur in ang. $BGO=2(r-B)\sqrt{k}-2(r-A)$. Quae concinnam praebet constructionem, capiendo nempe in linea indefinita CE partes $CA=1$, $CD=\sqrt{k}$, et in excitata perpendiculari ex puncto *Fig. VI.*

cto

cto C, abſcindendo CB $=x$, ductisque BA et BD, conſtruendo deinceps angulum CBE, qui ſit ad angulum CBD vt $\sqrt{k}$ ad 1, nam alio non opus eſt, quam vt in fig. 6. et in linea GN capiatur GB $=z$, erit enim punctum B in *Iſochrona* quaeſita.

Eſt vero $k = \frac{2bf+g}{2bf} = 1 + \frac{g}{2bf} = \frac{3e+2f}{2e+2f}$ reſtituendo pro $2bf$ ſuum valorem $\frac{2gb}{e}$ et pro b, $e+f$.

18. Sin vero ſit $p = \frac{gz}{f}$, fiet $R = \frac{gzz-ffg}{f}$, adeoque formula generalis $dy = \frac{dz\sqrt{(pp-bR)}}{\sqrt{bp}}$ nunc mutatur in $dy = \frac{dz}{z}\sqrt{\left(\frac{(g-bf).zz+bf^3}{\sqrt{(bfzz-bf^3}}\right)}$; ponatur iterum $\frac{(g-bf.zz+bf^3}{bffzz-bf^3} = xx$, et inuenietur $zz = \frac{(xx+1)ff}{xx+l}$, poſita $l = \frac{bf-g}{bf}$; adeoque $\frac{dz}{z} = \frac{xdx}{xx+1} - \frac{xdx}{xx+l}$; atqui ang. $BGb\left(=\frac{dy}{z}\right) = \frac{xdz}{z} = \frac{xxdx}{xx+1} - \frac{xxdx}{xx+l} = \frac{ldx}{xx+l} - \frac{dx}{xx+1} = dB\sqrt{l} - dA$, factis $dA = \frac{dx}{xx+1}$ et $dB = \frac{dx\sqrt{l}}{xx+l}$; quare fit iterum ang. $BGO = B\sqrt{l} - A + \Delta$, exiſtentibus etiamnunc A et B angulis quorum radii ſunt 1 et $\sqrt{l}$, quique communem tangentem x habent. Et hi quoque anguli recti fiunt, ſi z fit $=f$, quo caſu reperitur per ſimile ratiocinium, vt ſupra $\Delta = (1-\sqrt{l})r$, atque adeo ang. $BGO = (r-A) - (r-B)\sqrt{l}$, quod hanc ſuppeditat conſtructionem: Capiantur iterum in linea aliqua indefinita partes CA $=1$, et CD $=\sqrt{l}$, et perpendicularis CB $=x$, ductisque BA et BD, fiat angulus CBE ad CBD, vt $\sqrt{l}$ ad 1, et in fig. 4. angulus OGN aequalis angulo ABE in fig. 7, factaque in fig. 4, GB $=z$, erit

rit punctum B in *Isochrona* optata. Inuenietur haec curua ABO, ex *Epicycloidum* genere, nam existentibus $XO=e$ (fig. 4.) $OG=f$, $XG=b$, $GE=\sqrt{fb}$ et hoc radio circulus AE describatur, curua ABO orietur rotatione circuli cuius diameter $OE=-f+\sqrt{fb}$, in caua parte circuli AE. Hoc idem iam alia via geometrica ostendi in *Phoronomia* Prop. 19 Lib. I.

19. Pergo ad alteram partem Problematis concernentem motus variatos in medio quocunque resistenti. Initium faciam a motu rectilineo. Moueatur ergo corpus in linea recta AH citum potentiis p, quarum directiones in punctum aliquod G, extra lineam AH situm, conuergant. Sit quaelibet $BG=x$, et perpendicularis $GO=b$, eritque $BO=\sqrt{(xx-bb)}$, et potentia accelerans in B, vt supra (§. 9.) $\frac{p\sqrt{(xx-bb)}}{x}$, resistentia in loco $B=R$, celeritas ibi acquisita $=u$, et du eius incrementum; tempusculum vero quo id generatur $=dt$. Potentia ergo in medio resistenti motum accelerans erit nunc $\frac{p\sqrt{(xx-bb)}}{x}-R$ quare (§. 2.) habebimus $\frac{pdt\sqrt{(xx-bb)}}{x}-Rdt=du$, et ducendo hanc in u, fiet $\frac{pudt\sqrt{(xx-bb)}}{x}-Rudt=udu$, at vero $udt=dS$ elemento spatii percursi, quod elementum aequatur elemento negatiuo lineae $BO=\sqrt{(xx-bb)}$, id est, $\frac{-xdx}{\sqrt{(xx-bb)}}$; surrogato ergo hoc valore pro udt, in praecedenti aequatione differentiali, inuenietur $-pdx+\frac{Rxdx}{\sqrt{(xx-bb)}}=udu$, hinc varia deriuantur. *Fig. III.*

1. Si $p=o$; fiet $\frac{Rxdx}{\sqrt{(xx-bb)}}=udu$, pro motibus in

medio refiftenti a primitiue vniformi atque infito deriuatis, nam pofita $z = \sqrt{(xx-bb)}$ formula mutatur in $Rdz = udu$, fit vero fpatium abfoluendum $AB = y$ eritque $dz = -dy$ et $-Rdy = udu$. Ex hac formula omnia deduci poffunt, quae paffim ab Autoribus tradita et demonftrata funt; imo plura; nam ad quamcunque refiftentiarum hypothefin extendi poteft, fed fpecialioribus non immorabimur.

2. Si p et R in x et conftantibus datae fint, celeritas vbique acquifita u per quadraturas exhiberi poteft. Sed quaeftio paulo altioris indaginis eft cum refiftentiae medii per celeritates iam acquifitas fed nondum determinatas dantur. Nam

3. Si $R = eu^{2n}$, vbi n quemcunque numerum fignificat, formula in hoc §. inuenta mutabitur in $-pdx + \frac{eu^{2n} xdx}{\sqrt{(xx-bb)}} = udu$, vel pofita $uu = s$, erit $-2pdx + \frac{2es^{2} xdx}{\sqrt{(xx-bb)}} = ds$.

Si $n = 1$, $2e\sqrt{(xx-bb)} = Log. Q$, erit $s = Q\int\frac{2pdx}{Q}$; adeoque $u = \sqrt{(Q\int\frac{2pdx}{Q})}$. Et hoc ita obtinet in hypothefi, quae plerisque aliis magis verifimilis eft, quod refiftentiae medii fint vt euu, id eft in compofita ratione denfitatum et duplicatae celeritatum actualium mobilis.

4. Si $b = o$, mutatur aequatio N. 3. inuenta in $-2pdx - 2es^{n}dx = ds$, vel mutando fignum elementi dx, in $2pdx - 2es^{n}dx = ds$, ex qua obtinetur $dx = \frac{ds}{2p - 2es^{n}}$, quae conceffis quadraturis conftrui poteft, fi p conftans eft,

eſt, hic caſus obtinet, cum mobile in linea per centrum potentiarum tranſeunte incedit.

Generaliſſima tantum hic refero, nam ſi ad ſpecialiora et ſpecialiſſima deſcendendum eſſet, vix integrum volumen huic rei ſufficeret. Pergo ad motus curuilineos.

20. Cadat ergo mobile in caua parte curuae ABO, citum a potentiis p iuxta lineas BG in punctum G vergentes ipſum vrgentibus, et inquirendum ſit quanta futura ſit velocitas (u) in quocunque curuae puncto B acquiſita ſi eo in puncto reſiſtentia medii dicatur R. Dicatur $BG = z$ et curuae AC elementum $Bb = ds$, item $BN = p$, et reſoluenda hanc BN in ſuas laterales potentias BL et LN, quarum haec elemento Bb parallela altera vero BL eidem normalis. Eſt vero propter triangula ſimilia BLN et $Bb\beta$, linea $LN = \frac{-pdz}{ds}$, et haec exponit potentiam acceleratricem, abſtrahendo a reſiſtentia medii, quia nunc vero ratio eius quoque habenda eſt, potentia acceleratrix nunc erit $-\frac{pdz}{ds} - R$, detracta nempe reſiſtentia medii R a priori potentia tangentali, erit ergo (§. 2.) $-\frac{pdz}{ds}dt - Rdt = du$, vel ducendo hanc in u, iſta $-\frac{pdz}{ds}udt - Rudt = udu$, vel quia $udt = ds$, habetur $-pdz - Rds = udu$, quae aequatio conſtrui poteſt, conceſſis quadraturis ſi p, R et ds datae ſunt in z, conſtantibus et dz. *Fig. IV.*

Sed ſi, vt ſupra (§. 19. n. 3), R eſt vt eu^{2n}, aequatio $-pdz - Rds = udu$, abit in hanc $-pdz - eu^{2n}ds = udu$, vel in iſtam $-2pdz-2er^n ds = dr$ facta nempe $uu = r$. Ex hac vero elicitur, ſi $n = 1$, vel R vt euu, et Log. $Q = es$, aequatio $r = \frac{\int 2pQdz}{Q}$, er $u(=\sqrt{r}) = \sqrt{(\frac{\int pQdz}{Q})}$. Verum in aliis reſiſtentiae hypotheſibus vbi R modificatur celeritatibus actualibus mobilis, hae celeritates per quantitates finitas hoc modo non aeque facile exhiberi poſſunt.

Fig. VIII. 21. Si mobile deſcendens in quacunque curua ABO vrgetur in quolibet eius puncto B, potentia tangentali, quam generaliter T nominabo, quae ſit vt bs, vbi b eſt quantitas aliqua conſtans, s vero deſignat arcum curuae BO, inter punctum aſſumtum B et infimum O. Celeritas mobilis in O acquiſita deſcenſu ex AO incipiente motu a quiete in A, exponetur per $AO \times \sqrt{b}$ et ſi mobile deſcenſum a quiete in B inchoet, celeritas eius deſcenſu per arcum BO in O acquiſita exponetur per $BO \times \sqrt{b}$; et ambo arcus AO et BO omnesque reliqui ad punctum O terminati, aequali tempore percurrentur, hoc eſt curua ABO *Iſochrona* erit, et hoc ita eſſe videtur ſiue mobile in *vacuo* moueatur, ſiue in *Pleno*, etſi potentiae tangentiales T aliae ſint in vacuo, quam in medio reſiſtenti. Nam in vacuo ipſae T non modificantur per celeritates actuales mobilis u, quemadmodum in medio reſiſtenti fiet, hoc tamen non obſtante $Tdt = du$, et $Tudt = udu$, vel $Tds = udu$, ſi T deſignet potentiam tangentialem in B, u celeritatem acquiſitam in B deſcenſu mobilis ex arcu AB, et ds elementum curuae Bb, quomodocunque T exprimatur per functiones celeritatis aliasque quantitates indeterminatas, nam quia etiam eſt

T (hyp.)

T (hyp.) $= bs$, erit $bsds\ (= Tds) = udu$, adeoque $uu = (aa-ss)b$, et $u = \sqrt{(aa-ss.b)}$, nominando arcum AO$=a$; inuenietur ergo celeritas in O descensu ex AO acquisita $= a\sqrt{b}$, existente hoc casu $s=o$. Simillimo argumento inuenietur celeritas ex BO acquisita $= \alpha\sqrt{b}$, si α arcum BO significet. Et supra iam demonstratum est, quod stantibus hisce, arcus AO, BO, etc. aequali tempore describantur, si mobile in vacuo descendit.

Videamus iam an haec cum praecedenti §. 20. consistere possint. Centro G ducti sint per puncta B et O, arcus BM et OP, si linea AG iungat initium curuae A centro G. Et lineas AM, AP, etc. per z indicabimus, cum antea lineas GA, GB, etc. hoc nomine insigniuerimus vocandoque iam arcus actu descriptos AB$=r$, eorum elementa B$b=dr$, et residuos BO$=s$, vt ante. Cum vero supra §. 20. T fuerit $= -\frac{pdz}{ds} - R$ iam fiet T $= +\frac{pdz}{dr} - R = bs$; adeoque $pdz = Rdr + bsdr = Rdr - bsds = eu^{2n}dr - bsds = -b^n e(aa-ss)^n ds - bsds$, propter $uu = (aa-ss)b$, vel conuertendo binomium $(aa-ss)^n$ in seriem inuenietur $pdz = -a^{2n}b^n eds + na^{2n-2}b^2 essds - \frac{n.n-1}{2.4} a^{2n-4}b^n es^4 ds + \text{etc.} - bsds$, et integrando $\int pdz = -a^{2n}b^n es + \frac{1}{3}na^{2n-2}b^n es^3 - \frac{n.n-1}{2.4.5}a^{2n-4}b^n es^5 + \text{etc.} - \frac{1}{2}bss + \Delta$, vbi Δ est quant. constans $\int pdz$ significat omnia pdz quae in AM continentur, sed definienda est quantitas Δ, in in A vbi $\int pdz = o$, fit $s = a$, adeoque $\Delta = (a^{2n+1} - \frac{1}{3}(an^{2n+1} + \frac{n.n-1}{2.4.5}a^{2n+1} - \text{etc.})b^n e + \frac{1}{2}baa$, aut si ponatur ad abbreuiandum $C = 1 - \frac{1}{3}n + \frac{n.n-1}{2.3.5} - \text{etc.}$ erit $\Delta = Ca^{2n+1}b^n e + \frac{1}{2}aab$. Quare $\int pdz$ contentarum in $AM = Ca^{2n+1}b^n e + \frac{1}{2}aab, - a^{2n}b^n es + \frac{1}{3}na^{2n-2}b^n es^3 - \frac{n.n-1}{2.4.5}a^{2n-4}b^n es^5 + \text{etc.} - \frac{1}{2}bss$, et $\int pdz$ contentarum in tota $AP = Ca^{2n+1}b^n e + \frac{1}{2}aab$; vbi $a =$ arcui AO; euanescente s. Similiter $\int pdz$ contentarum in $MP = Cb^n es^{2n+1} + \frac{1}{2}bss$. Atqui $\int pdz$ cont. in $AM + \int pdz$ cont. in $MP = Ca^{2n+1}b^n e + \frac{1}{2}aab, - a^{2n}b^n es + \frac{1}{3}na^{2n-2}b^n es^3 - \frac{n.n-1}{2.4.5}a^{2n-4}b^n es^5 + \text{etc.} - \frac{1}{2}bss = \int pdz$ cont. in tota $AP = Ca^{2n+1}b^n e + \frac{1}{2}aab$ et deletis delendis, inuenietur $Cb^n es^{2n+1} - a^{2n}b^n es + \frac{1}{3}na^{2n-2}b^n es^3 - \frac{n.n-1}{2.4.5}a^{2n-4}b^n es^5 + \text{etc.} = o$, vel diuisa hac serie per $b^n es$, $Cs^{2n} - a^{2n} + \frac{1}{3}na^{2n-2}ss - \frac{n.n-1}{2.4.5}a^{2n-4}s^4 + \text{etc.} = o$, quare indeterminata s, esset simul determinata, quod est absurdum. Itaque eo quem exposui modo *Tautochrona* in medio resistenti non obtinetur. Hanc deductionem vel discussionem ideo supprimere nolui, quia expositus *Tautochronam* inuestigandi modus mihi ipsi specie sua imposuit et alios adhuc decipere posset, meliorem tamen methodum non exhibeo quia nunc primum defectus illius animaduersus mihi est dum schedam in Academiae Conuentu praelectam reuideo et transcribo, et tempore nunc excludor quo minus in aliam inquirere possim.

22.

22. Communicabo tamen eius loco modum inueniendi *Brachistochronam*, ſeu line m celerrimi deſcenſus in omni poſſibili grauitatis variabilis hypotheſi cum mobile in *vacuo* mouetur, et pro caſu particulari grauitatis vniformis et directiones parallelas habentis, cum in medio reſiſtenti incedit. Ad id autem neceſſe eſt inquirere quanam lege duo curuae elementa ad lineam aliquam poſitione datam inflectenda ſint, vt, dum vnumquodque eorum particulari ſua celeritate motu vniformi abſoluitur, breuiori tempore percurrantur ambo, quam ſi iisdem celeritatibus duo elementa aliter inflexa transmiſſa fuiſſent. Ad hoc propoſitum ſequens faciet lemma.

23. *Datis poſitione circulo* DBE *centro* O *deſcripto, et du.bus punctis* A *et* C, *hoc in caua circuli parte, altero in conuexa, ex quibus ductae ſint ad punctum aliquod* B *circuli modo nominati, duae rectae* AB, CB *hac lege, vt ſinus anguli* ABG *ſit ad ſinum anguli* OBC *in data ratione* M*ad*N. *Dico quod mobile deſcribens lineolam* AC *celeritate vt* M, *et deinceps lineolam* BC *celeritate vt* N, *breuiori tempore peruenturum ſit ex* A *in* C, *quam ſi iisdem celeritatibus per quaslibet alias* Ab *et* bC *inceſſiſſet.*

Etſi hoc lemma in caſu ſimpliciori nempe quando linea poſitione data DBE quae hic circularis eſt, eſt recta, *Hugenius* iam pridem demonſtratum dedit in Tractatu de Lumine p. 40, 41. Eius tamen demonſtrationem hic apponere e re viſum eſt. Sit punctum *b* alteri B indefinite vicinum, ductisque A*b*, C*b*, et centris A et *Fig. IX.*

C de-

C descripti sint per B et b, arculi $B\beta$ et $b\gamma$. His iam positis ex natura *Minimi*, oportet vt temp. per AB + temp. per BC sit = temp. per Ab + temp. per bC, et t. per Ab − t. per AB = t. per BC − t. per bC, vel quia ambae AB, Ab eadem celeritate vniformi, M, et BC, bC eadem celeritate N pertransiri supponuntur, erit t. per βb = t. per $B\gamma$, atque adeo $\frac{\beta b}{M} = \frac{B\gamma}{N}$, seu $N \times \beta b = M \times B\gamma$, considerando vero arculum Bb instar sinus totius, erit βb sinus anguli βBb vel ipsi aequalis ABG, et $B\gamma$ sinus anguli $Bb\gamma$, vel OBC, quare sufficiendo in aequalitate $N \times \beta b = M \times B\gamma$, pro βb et $B\gamma$, $\int ABG$, $\int CBO$, nascetur $N \times \int ABG = M \times \int CBO$, atque adeo $\int ABG$. $\int CBO$ :: M. N. Q. E. D.

Fig. IV. 24. Hoc lemmate iam posito, *inuenire oportet curuam* ABO *in qua descendens graue minori tempore a termino* A *ad terminum* O *perueniat*, *quam si in omni alia curua intra hos terminos ducta descendisset.*

Per ea quae supra (§. 10.) ostensa sunt, celeritas mobilis descensu per AB in B acquisita exponetur per latus quadratum ex duplo areae EHIF, dicatur hoc latus quadratum Q, et exponet Q celeritatem mobilis in B, sed per lemma praecedens propter breuissimum descensum, exponitur quoque eadem celeritas per sinum anguli βBb, quem vocabimus m, et cosinum $n = \sqrt{(1-mm)}$ radio existente 1, est ergo $m = \frac{Q}{a}$, et $n \left[= \sqrt{(1-mm)}\right] = \frac{\sqrt{(aa-QQ)}}{a}$, dicantur $B\beta = -dz$, et arculus $b\beta = dy$; eritque $m.n :: b\beta(dy). B\beta(-dz)$, vnde elicitur $dy = \frac{-Q dz}{\sqrt{(aa-QQ)}}$.

In

In grauitate vniformi fit area EHIF rectangulum $fg-gz$, si OE dicatur f, OB vel OF$=z$, et FI$=$EH$=g$, adeoque $Q=\sqrt{(2fg-2gz)}$, et $dy\ (=\frac{-Qdz}{\sqrt{(aa-QQ)}})=\frac{-dz\sqrt{(2fg-2gz)}}{\sqrt{(aa-2fg+2gz)}}$, vel $\frac{dy}{z}=\frac{-dz\sqrt{(2fg-2gz)}}{z\sqrt{(aa-2fg+2gz)}}$, sit $\frac{2fg-2gz}{aa-2fg+2gz}=ss$, eritque $2gz=\frac{(ss+b)\times(2fg-aa)}{ss+1}$ existente $b=\frac{2fg}{2fg-aa}$, adeoque $\frac{-dz}{z}=\frac{-2sds}{ss-k}+\frac{2sds}{ss+1}$, et $\frac{dy}{z}\ (=\frac{-sdz}{z})=\frac{-2ssds}{ss+b}+\frac{2ssds}{ss+1}=\frac{2bds}{ss+b}-\frac{2ds}{ss+1}=2dA\sqrt{b}-2dB$, positis $dA=\frac{ds\sqrt{b}}{ss+b}$, et $dB,=\frac{ds}{ss+1}$, eruntque A et B anguli communem tangentem s habentes, quorum radii sunt $\sqrt{b}$, et 1. Fractio vero $\frac{dy}{z}$ designat angulum BGb, adeoque BG$b=2dA\sqrt{b}-2dB$, et integrando ang. BGO$=2A\sqrt{b}-2B+\Delta$, vbi Δ est quantitas constans quae determinatur ex suppositione anguli BGO$=o$, quod contingit in puncto O. Sit GO$=e$, fietque hoc casu $z=e$ adeoque $s=\frac{\sqrt{2eg}}{\sqrt{(aa-2eg)}}$, dicantur anguli quorum communis tangens est$=\frac{\sqrt{2eg}}{\sqrt{(aa-2eg)}}$ et radii sunt $\sqrt{b}$ et 1, G et H, inuenietur $2G\sqrt{b}-2H+\Delta=o$, adeoque $\Delta=2H-2G\sqrt{b}$, item ang. BGO$(=2A\sqrt{b}-2B+\Delta)=+2A\sqrt{b}-2G\sqrt{b}+2H-2B$, quae hanc constructionem suppeditat. Abscindantur in linea indefinita partes AC$=\sqrt{b}$, et DC$=1$, et in perpendiculari ad has capiantur BC$=\frac{\sqrt{2eg}}{\sqrt{(aa-2eg)}}$ et CF$=\frac{\sqrt{(2fg-2gz)}}{\sqrt{(aa-2fg+2gz)}}$, ductisque ex A et D ad puncta B et F lineis AB, AF et DB, DF, fiat angulus NAF qui sit ad angulum BAF, vt $\sqrt{b}$ ad 1, et in fig. 11. constituatur *Fig. X.*

angulus BGO$=$2BDB$-$2NAF, erit facta GB$=z$, punctum B, in *Brachistochrona* quaesita.

Si h est numerus quadratus vnitate maior Brachistochrona fiet *Algebraica.*

25. Generalius si sit

$$z=[(ss+aa)^{\frac{\alpha}{2a}}\times(ss+bb)^{\frac{\beta}{2b}}]^{h} : s^{\frac{b\alpha+\alpha\beta}{ab}}, \text{ vel}$$

$$z=[(css+aa)^{\frac{\alpha}{2a}}\times(ss+bb)^{\frac{\beta}{2b}}\times(ss+cc)^{\frac{\gamma}{2c}}\times \text{etc.}]^{h} :$$

$s^{\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}}$ etc., et potentia accelerans $p=-aast$: $(ss+1)^2$, existente $t=\frac{ds}{dz}$, *Brachistochrona* semper algebraica erit, quoties α, β, γ, etc. fuerint numeri rationales quaecunque fuerint quantitas constantes a, b, c, &c. et h.

Haec vero de lineis celerrimi descensus in vacuo sufficiant, pergo ad eas quae in medio resistenti describuntur.

26. Sit ABO Brachistochrona quaesita in qua ductis ad centrum potentiarum accelerantium G, radiis AG, BG, etc. OG, centroque G descriptis arcubus BM, OP, vocentur nunc AM $=z$, arcus AB$=s$, et sic formula §. 20. reperta $-pdz-Rds=udu$, iam mutatur in $pdz-hu^{2n}ds=udu$, existente nunc R$=hu^{2n}$. Dicatur sinus anguli GBO$=l$, sinus complementi $=m=\sqrt{(1-ll)}$ si radius sit$=1$. Iam cum l sit (§. 23.) vt celeritas in B acquisita descensu accelerato in arcu AB, fiat ergo $u=al$, est etiam $ds=\frac{dz}{m}$,

qui-

quibus in aequatione $pdz - bu^{2n}dl = udu$ suffectis, orietur $pdz - \frac{a^{2n} bl^{2n} dz}{m} = aaldl$, in qua p datur per z et constantes, et m per l, nam a et b sunt constantes perinde ac exponens $2n$, sed aequatio ita generaliter spectata irreducibilis est. Sed si p sit constans, fiet $dz = \frac{aalmdl}{mp - a^{2n} bl^{2n}}$, adeoque $z = \int \frac{aalmdl}{mp - a^{2n} bl^{2n}}$ et $dy \left(= \frac{ldz}{m}\right) = \frac{aalldl}{mp - a^{2n} bl^{2n}}$, et angulus AGB, $= \int \frac{aalldl}{mpz - a^{2n} bl^{2n} z}$. Verum si directiones grauium parallelae sint, et in figura 12 fiant abscissa AE $= \int \frac{aalldl}{mp - a^{2n} bl^{2n}}$, et applicata EB $= \int \frac{aalmdl}{mp - a^{2n} bl^{2n}}$, punctum B erit in Brachistochrona quaesita. *Fig. XII.*

Atque hoc est problema quod Doctiss. noster *Eulerus* Geometris proposuit in Actis Erudit.

Sed si sint $p = \frac{kl^{2n+\alpha}}{\sqrt{(1 - ll)}} + 1$, et $z = \frac{aal^{\alpha+2} + (\alpha+2)aac}{\alpha+2}$, curua construi potest: Fiat enim angulus AGB $= \int \frac{\alpha+2 \cdot l^{\alpha+2} dl}{(l^{\alpha+2} + (\alpha+2)c) \times \sqrt{(1 - ll)}}$, et capiatur AM $(= z) = \frac{aal^{\alpha+2} + (\alpha+2)aac}{\alpha+2}$, erit punctum B in Brachistochrona, modo α non sit $= -2$. Possunt inueniri adhuc aliae leges potentiarum p ad id vt Brachistochrona in medio resistenti describenda, concessis quadraturis, construi possit. Sed his iam non vacat diutius immorari. *Fig. VIII.*

27. Si directiones potentiarum (p) non sint conuergentes ad punctum aliquod positione datum, vt hucvsque assumsimus, sed curuam quamcunque FGg contingant, inquiremus iam in legem variationis potentiarum (p), quae efficiant, vt mobile secundum lineam quamcunque proiectum in medio resistenti curuam ABO describat.

Fig. XIII. Tendat missile ex A in B, et huc delatum vrgeatur secundum directionem BG curuam EG in G contingentem, potentia aliqua quam nunc g nominabimus, adhibituri deinceps alio sensu litteram p qua eiusmodi potentis hucusque designauimus, ad exprimendas perpendiculares GD in tangentes curuae BD demissas. Dicantur praeterea tangentes BD a puncto contactus vsque ad perpendicula in ipsas demissa $=q$, radii vectores GB$=z$, radius osculi in B, hoc est, BC$=r$; celeritas in eodem puncto B acquisita $=u$; elementum curuae B$b=ds$, tempusculum quo percurritur hoc elementum $=dt$ Per alterum terminum elementi curuae ducta sit tangens bd, et huic perpendicularis gd, item gE aequidistans GD, ac denique Gb parallela BE. Nominentur praeterea E$\varepsilon=di$, $gb=dl$, et Gg elementum curuae FG$=dm$. His positis,

1. Potentia tangentalis cuius directio BE ex centrali g deriuata est $\frac{gq}{z}$, a qua detracta resistentia medii R, restat potentia accelerans mobile in puncto B$=\frac{gq}{z}$ $-$R, itaque (§. 2.) $\frac{gq}{z}dt-\mathrm{R}dt=\pm du=\alpha du$, vbi α significat

ficat vnitatem affirmatiuam vel negatiuam pro vtroque casu descensus et ascensus mobilis in curua, atque inde elicitur $\frac{gqds}{z}$-$Rds=\alpha du$, existente $udt=ds$.

2. Ducatur per b rectula $b\beta$ parallela BG tangenti BD occurrens in β, motusque in elemento curuae Bb spectari potest tanquam compositus motibus isochronis per tangentem Bβ et per lineolam βb, quorum hic acceleratus est potentia g, ille vero vniformis, quare (§. 7.) $dt=V(\frac{2\beta b}{g})$ vel analytice$=V(\frac{zds^2}{gpr})=dsV(\frac{z}{gpr})=\frac{ds}{u}$, vel $uu=\frac{gpr}{z}$. Nam βb inuenietur $=\frac{zds^2}{2pr}$.

3. Diuidatur aequatio (N. 1.) inuenta $\frac{gqds}{z}-Rds=\alpha du$ per modo inuentam $uu=\frac{gpr}{z}$, reperietur $\frac{\alpha du}{u}=\frac{qds}{pr}-\frac{Rzds}{gpr}$ (aut quia proportionalitas linearum BC(r), Bb(ds), BD(q), et Eε(di) praebet $qds=rdi$)$=\frac{di}{p}-\frac{Rzds}{gpr}$ (vel quia $\pm dp=\alpha dp=gd$-GD$=g\varepsilon-g$E$+g$E$-$GD$=-di+dl$, atque adeo $di=-\alpha dp+dl$)$=\frac{-\alpha dp}{p}+\frac{dl}{p}-\frac{Rzds}{gpr}$ (aut si $\frac{dl}{p}=\frac{dm}{z}$ fiat $=\frac{\alpha dk}{k}$)$=\frac{\alpha dp}{p}+\frac{\alpha dk}{k}-\frac{Rzds}{gpr}$, adeoque $\frac{\alpha du}{u}=\frac{-\alpha dp}{p}+\frac{\alpha dk}{k}-\frac{Rzds}{gpr}$, quae per transpositionem terminorum et per multiplicationem cum fractione $\frac{kpu}{\alpha}$, mutetur in $kpdu+kudp-pudk=\frac{-kzRuds}{agr}$ (vel propter $R=eu^{2n}$ et $g=\frac{uuz}{pr}$) $=\frac{-ekpu^{2n-1}ds}{\alpha}$ (dicatur hoc) $=kkd$P, et habebimus $d(\frac{pu}{k})=\frac{kpdu+kudp-pudk}{kk}=d$P, et sumtis integralibus $\frac{pu}{k}=$P,

 vel

vel $u = \frac{kP}{p}$, hinc $\frac{-ek^{2n} P^{2n-1} ds}{\alpha p^{2n-2}} \left(= \frac{-ekpu^{2n-1} ds}{\alpha} \right) = kkdP$, ista vero vlterius reducta, praebet $P^{1-2n} dP = \frac{-ek^{2n-2} ds}{\alpha p^{2-n2}}$, sumtisque integralibus, debitisque reductionibus institutis inuenietur $P = \left(\frac{2en}{\alpha} - \frac{2e}{\alpha} \int \frac{k^{2n-2} ds}{p^{2n-2}} \right)^{1:2-2n}$. Sed si $n = 1$, fiet Log. $P = \int \frac{-eds}{\alpha}$.

4. Inuenimus ergo aestimationem litterae assumtitiae P per indeterminatas ad curuam AB pertinentes, et reperta est (N. 3.) $u = \frac{kP}{p}$, et (N. 2.) $= g \left(= \frac{uuz}{pr} \right) = \frac{kkzPP}{p^3 r}$. Quae omnia erant inuenienda.

28. Si curua FG contrahitur in punctum G, vt in Fig. 14. Mutabitur k in 1, fientque adeo $u = \frac{P}{p}$, et $g = \frac{zPP}{p^3 r}$, vel $gp^3 r = zPP$, et hoc nobis viam sternit inueniendi lineam proiectorum in medio resistenti. Sit enim l sinus anguli GBb, et $m = \surd(1 - ll)$ eius cosinus, eritque $p = lz$, et formula $gp^3 r = zPP$ abit in $gl^3 rzz = PP$, vel posita $M = l^3 r$, in $gMzz = PP$, et differentiando logarithmice $\frac{dg}{g} + \frac{2dz}{z} + \frac{dM}{M} \left(= \frac{2dP}{P} \right) = \frac{2P^{1-2n}}{P^{2-2n}}$ (vel quia $P^{1-2n} dP = \frac{-ek^{2n-2}}{\alpha p^{2n-2}}$, et $P^{2-2n} = g^{1-n} M^{1-n} z^{2-2n}$) $= -\frac{2ek^{2n-2}}{\alpha} l^{2-2n} g^{n-1} M^{n-1} ds$, id est $\frac{dg}{g} + \frac{2dz}{z} + \frac{dM}{M}$

=

$= \frac{-2eg^{n-1} k^{2n-2} M^{n-1} ds}{al^{2n-2}}$, haec aequatio sic generaliter sumta irreducibilis est.

29. Sed si g sit constans, et directiones potentiarum g ad infinitam tantum distantiam sint conuergentes, id est, parallelae, euanescent ambo membra logarithmica ex aequatione, quae ideo in $\frac{dM}{M} = \frac{2eg^{n-1} k^{2n-2} M^{n-1} ds}{al^{2n+1}}$ mutabitur, ex ista vero propter $k=1$, et $ds = \frac{Md^{l}}{l^3 m}$, positaque $g=1$, fit $\frac{dM}{M} = \frac{-2eM^{n} dl}{al^{2n+1} m}$ et haec praebet $M^{-n-1} dM \frac{-2edl}{al^{2n+1} m}$, et sumtis integralibus $M^{-n} = \int \frac{2endl}{al^{2n+1} m}$, quare $M = \left(\int \frac{2endl}{al^{2n+1} m}\right)^{-1:n}$. Inuenta sic aestimatione literae assumptae M, coordinatae lineae proiectorum non difficulter inuenietur, concessis quadraturis.

Fiant enim (Fig. 15.) $AC = \int \frac{Mdl}{llm}$, et $CB = \int \frac{Mdl}{l^3 mm}$, vbi $m = V(1-ll)$, eritque punctum B in linea proiectorum quaesita. Huius lineae constructionem iam dedi in *Phoronomia* Anno 1715 edita pro casu resistentiae secundum duplicatam rationem celeritatum mobilis procedentis, eiusdemque constructionem dederunt Cel. *Iohannes* et *Nicolaus Bernoulli*, in Actis Erudit. 1719. Mens. Maio pro casu quando $R = eu^{2n}$, sed nihilo difficilior est analysis pro hoc casu generaliori quam pro altero.

In praecedentibus vbi quantitates integrandae occurcurrerant, integralibus earum quantitates constantes breuitatis caussa non addidi, quae alias addi solent, adeoque per summam vbique intelligendum est integrale completum quale quaestioni cuique competit. Quod hoc loco monendum esse duxi; ne quis existimet additionem illam quantitatum constantium per incuriam omissam fuisse.

30. Sed si directiones potentiarum g conuergunt in punctum G, vt in *fig.* 14 et dicantur $O = \int \frac{Ldl}{l}$, existente L quantitate vt libet data per l et constantes, $M = \frac{lL(3-2n.O)^{1:3-2n}}{L+(3-2n)O}$, $N = \left(\frac{2en-2e}{\alpha}\int l^{2-2n} dO\right)^{1:1-n}$, et $z = (3-2n.O)^{1:3-2n}$ sitque $g = M^{-1}Nz^{-2}$, curua proiectorum etiam construi potest. Fiat enim angulus $AGB = \int \frac{ldO}{3-2n.mO}$, et capiatur in linea GM pars $GB = (3-2nO)^{1:3-2n}$, erit punctum B in curua quaesita.

In hac curua erit $r = \frac{L(3-2n.O)^{1:3-2n}}{l(L+3-2n.O)}$. Quod si vero L fuerit $= l^{\beta}$, et $\frac{\beta}{3-2n}$ quilibet numerus rationalis, curua erit algebraica. Sed de his satis.

Fig. XVI. 31. Ex similibus principiis varia alia Problemata facilem solutionem admittunt. Vt *si corpus* B *in curua quacunque* CB *grauitate sua descendat post se tamen trahens alterum minus corpus* A *filo* ACB *super trochleam* C *mobile annexum, quodque ascendere cogatur in altera curua* AC, *et quaerantur celeritates horum corporum vbiuis acquisitae.* Analysis institui potest, vt sequequetur, postquam lineis et lineolis ad rem facientibus nomina dederimus: Sint ergo $CB = x$, $EB = y$, elem. curuae $bB = ds$, $Bn = dx$ et $BO = dy$, celeritas in curuae puncto $B = u$, celeritas corporis A in directione $AC = v$ item $am = dp = dx$; $al = dq$, et $Aa = dr$. Sunt vero Am et bn arculi centro C descripti, et Al ac bo lineolae horizontali DE parallelae. His positis ita argumentor.

1. Inquiro in potentiam qua corpus B propter grauitatem vrgetur secundum directionem bB, ad id dico vt Bb (ds) ad Bo (dy) ita pondus B ad $\frac{Bdy}{ds}$, et haec est potentia qua grauitas corpus B vrget secundum bB. Sed nondum est tota vis accelerans, nam corpus A grauitate sua ipsi resistit.

2. Propter similem rationem $\frac{Adq}{qr}$ est potentia quae corpus A propter grauitatem suam vrget iuxta Aa et si fiat $Aa(dr)$: $ma(dp) :: \frac{Adq}{dr} : \frac{Adpdq}{dr^2}$, et hoc exponet potentiam qua filum Ca vel BC trahitur ex B in C. Dicatur praeterea $Bb(ds) : Bn(dx) :: \frac{Adpdq}{dr^2} : \frac{Adpdqdx}{dr^2 ds}$ et haec vltima fractio exponit resistentiam, quam descendens corpus B ab altero A in directione bB subit. Hanc ob caussam potentia mobile B accelerans reperitur $= \frac{Bdy}{ds} - \frac{Adpdqdx}{dr^2 ds}$.

3. Incrementum celeritatis in AC vel CD est $= dv$, adeoque incrementum celeritatis corpori A com-

 peten-

petentis in directione $bB = \frac{dxdv}{ds} = \frac{vdv}{u}$, quia $u : v :: ds : dx$, ergo quantitas motus in vtroque corpore geniti $= Bdu + \frac{Avdv}{u}$.

4. Cum potentia accelerans ducta in tempusculum $\frac{ds}{u}$, producat motus quantitatem $Bdu + \frac{Avdv}{u}$, habebimus $\frac{Bdy}{u} - \frac{Adpdqdx}{udr^2} = Bdu + \frac{Avdv}{u}$, atque adeo $Bdy - \frac{Adpdqdx}{dr^2} = Budu + Avdv$, et sumtis integralibus $By - \int \frac{Adpdqdx}{dr^2} = \frac{1}{2}Buu + \frac{1}{2}Avv$ (vel propter $v = \frac{udx}{ds}$) $= \frac{1}{2}Buu + \frac{Auudx^2}{2ds^2}$; Atque hinc elicitur $uu =$

$$\frac{\left(2By - 2\int \frac{Adp^2 dq}{dr^2}\right) \times ds^2}{Bds^2 \quad Adx^2}.$$

Quare si fiat $TV =$

$$\frac{\left(By - \int \frac{Adp^2 dq}{dr^2}\right) \times ds^2}{Bds^2 + Adx^2},$$

et graue libere cadat ex hac altitudine TV, in V acquiret tantam celeritatem, quantam corpus B acquisiuit in curua CB.

Si curua CA fiat linea recta verticalis parallela ipsi EB, singulae dp, dq et dr fient $= dx$, et habebimus hoc casu $TV = \frac{(By - Ax) \times ds^2}{Bds^2 + Adx^2}$.

Hoc vnum est ex Theorematis illis quae V. Cel. Ioh.

Ioh. Bernoulli litteris XI. Oct. 1727. datis sine demonstratione misit, et ex conseruatione virium viuarum ipse deduxit.

32. *Sit graue aliquod figurae cuiuscunque* BFG, *cuius centrum grauitatis sit in* C, *ex quo et radio* CA, *descriptus circulus* AHL *repraesentet axem cui circumvolutum intelligatur filum secundum ordinem litterarum* EALHALHAL etc. *Ipsum vero corpus grauitate sua descendat, quod aliter fieri nequit quam rotando circa centrum* C, *filo sese euoluente secundum ordinem litterarum* AHLH etc. *Quaeritur quanta sit celeritas centri* C *postquam graue ex altitudine* EC *vel* EA *cecidit.*

Sint EC vel EA altitudo ex qua mobile rotando cecidit $=R$, eius elementum $Cc=dR$, velocitas centri $C=u$, eius incrementum tempusculo dt ortum $=du$. Radius axis $CA=a$. Massa totius corporis compositi ex BFG et axe $ALH=M$. Distantia eius centri oscillationis a puncto $A=D$; quodlibet elementum P totius massae $M=dp$, eius distantia PA ab axe rotationis in A parallelo axi cylindri $ALH=q$. Eritque centrum grauitatis totius massae M etiam in C quia corpus BG eiusque axis ALH commune habent grauitatis centrum C. His positis F. XVII.

Quia vniuersum corpus BG+ALH, rotatur circa axem A, incrementum celeritatis cuiusque particulae eius P inuenietur $=\frac{qdu}{a}$, et eius momentum respectu axis $A=\frac{qqdpdu}{a}$, quare summa momentorum, id est vniuerſus motus genitus fit $= du\int\frac{qqdp}{a}$ (id eſt , propter $\int qqdp$ ex natura centri oſcillationis $= a$DM) $=$ DMdu.

Sed potentia accelerans eſt $=$ M $\times$ AC $= a$M ſi grauitas ſit $= 1$, erit ergo $aMdt = DMdu$, vel $adt = Ddu$, ſeu $audt = Dudu$, id eſt, propter $udt = dR$, habetur $adR = Dudu$, vel ſumtis integralibus $2aR = Duu$; atque adeo $uu = \frac{2aR}{D}$. Iccirco corpus in vacuo libere cadens grauitate naturali ex altitudine $z = \frac{aR}{D}$, in imo huius altitudinis celeritatem acquiret aequalem illi, quam centrum grauitatis C maſſae M acquiſiuit cadendo ex altitudine EC.

Et hoc quoque vnum eſt ex theorematibus illis quae laudatus Bernoullius per Cl. Filium Academiae communicauit, ſed ſine demonſtratione.

F. XVIII. 33. *Sed quanta celeritas acquiretur globo* DBE, *ſi in caua parte curuae cuiuscunque* ABO *rotando deſcendat?* Sint iterum celeritas globi in B $= u$, radius globi BC $= a$, radius circuli oſculatoris curuae in B , ſeu BF $= r$; Bb $=$ Be $= ds$; B$\beta = dx$; inuenietur arculus $be = \frac{(r-a)ds^2}{ar}$, et ſi ſectores bBe et CBc ſimiles ſint , erit Cc elementum ſpatii tempuſculo deſcribendi , $= \frac{(r-a)ds}{r}$ Eſt vero potentia accelerans vis tangent. grauitat. $\times$ BC $\times$ M, ſed ſi gravit. $= 1$, erit $\frac{dx}{ds}$ vis tang. grau. quare potentia accelerans eſt $= \frac{aMdx}{ds}$; motus vero genitus inuenitur iterum vt in praeced.

$=$

$=DMdu$, si D centri oscillationis distantiam a puncto B vel alio quocunque superficiei puncto, et M massam globi designent, erit ergo $\frac{aMdxdt}{ds}=DMdu$, seu $\frac{audxdt}{ds}=$ $Dudu$, atqui est $udt=Cc=\frac{(r-a)ds}{r}$, ergo $(\frac{ar-aa}{r})dx=$ $Dudu$, sumtisque integralibus et postea institutis reductionibus inuenietur $uu=\frac{2ax}{D}-2\int\frac{aadx}{rD}$ (propter $D=\frac{7a}{5}$) $=$ $\frac{10}{7}x-\int\frac{10adx}{7r}$. Verum vocando sinum anguli ABH quem applicata HB cum curua facit $=l$, fiet $dz=rdl$, existente sinu toto $=1$, adeoque $\frac{adx}{r}=adl$, hinc uu $=\frac{10x+10ab-10al}{7}$, si b significet sinum complementi anguli quem curua AB cum axe AH facit. Vocandoque $BH=x$, $AH=y$, erit $l=\frac{dy}{ds}$, hanc ob causam habebimus $uu=\frac{10xds+10abds-20ady}{7ds}$.

Itaque graue quodcunque libere cadens in vacuo ex altitudine $z=\frac{5xds+5abds-5ady}{7ds}$ celeritatem acquiret aequalem illi quam globus DE rotando acquisiuit in curuae puncto B.

Sed si idem globus DE rotando descendisset in plano inclinato, tunc fuisset $z=\frac{5x}{7}$; nam hoc casu fit bds quoque $=dy$.

DE DIVISIONE CVRVARVM

In partes quotcunque quarum ſubtenſae ſint in data progreſſione.

Auct.

C. G.

M. Iul. 1726.

ETſi non ignorabam iam diu a Celeb. Iohanne Bernoullio inuentas eſſe formulas ad diuiſionem anguli in datas quaſcunque partes, tamen quia easdem memoria non tenebam, feci ipſe inueniendi periculum.

Fig. I.

Sit diuidendus arcus BD in partes quotcunque aequales DE, EF, FG etc. dataque ſit perpendicularis $CD = m$ et radius circuli $AB = a$, ponatur ſubtenſa partis quaeſitae $DE = x$.

Primum quaero perpendicularem EK determinandam per x et quantitates datas hoc modo: ponatur $EK = y$, erit (pro angulo acuto) EL vel (pro angulo obtuſo) $DL = KC = \sqrt{x^2 - (m-y)^2}$, ſed $AC = \sqrt{a^2 - m^2}$ ergo $AK = \{\pm AC \mp KC\} =$
$\{\pm \sqrt{a^2 - m^2} \mp \sqrt{x^2 - m^2 + 2my - y^2}\} = \sqrt{a^2 - y^2}$ ex qua aequatione fit $y = \frac{(2a^2 - x^2)m \pm x\sqrt{(a^2 - m^2)(4a^2 - x^2)}}{2a^2}$, haec y ſi ponatur $= o$ obtinebitur valor x determinatus per

per quantitates datas a et m pro angulo in nullas partes diuidendo seu subtensa ipsius arcus dati BD$=$
$\sqrt{2a^2 \pm 2a\sqrt{a^2-m^2}}$.

Ex perpendiculari EK iam determinata per x et quantitates datas, simili modo eruuntur deinceps reliquae FM, GN, HO donec perueniatur ad perpendicularem ex B ducendam quae fit $=o$ atque ex hac aequatione tandem determinatur subtensa quaesita x.

Ponamus igitur compendii caussa $\frac{2a^2-x^2}{2a^2}=f$ et
$\frac{\pm x\sqrt{4a^2-x^2}}{2a^2}=p$.

$$fm+p\sqrt{a^2-m^2}=\alpha.$$
$$f\alpha+p\sqrt{a^2-\alpha^2}=\beta.$$
$$f\beta+p\sqrt{a^2-\beta^2}=\gamma.$$
$$f\gamma+p\sqrt{a^2-\gamma^2}=\delta. \text{ etc.}$$

pro arcu in duas partes diuidendo determinabitur x per aequationem $\beta=o$; pro arcu in tres partes diuidendo determinabitur x per aequationem $\gamma=o$; in quatuor, per aequationem $\delta=o$. etc.

Si vero numerus partium, in quas diuidendus est arcus non sit rationalis, sed surdus quicunque n statuatur series terminorum quos modo produximus

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+ \text{ etc.}$$

et per methodum interpolandi quaeratur terminus medius

dius exponenti illi ſurdo n reſpondens, qui terminus abibit in ſeriem infinitam

$$x = \alpha$$
$$+(\beta-\alpha)(n-1)$$
$$+(\gamma-2\beta+\alpha)(n-1)\left(\tfrac{n-2}{2}\right)$$
$$+(\delta-3\gamma+3\beta-\alpha)(n-1)\left(\tfrac{n-2}{2}\right)\left(\tfrac{n-3}{3}\right)$$
$$+ \text{etc.}$$

Fig. II. Ex diuiſione arcus facile deducitur modus eundem multiplicandi. Sit datus arcus multiplicandus BH. Rad. $AB = a$, perpendicularis $HO = m$, $BO = a - \sqrt{a^2 - m^2} = b$. Sumta $HG = BH = \sqrt{b^2 + m^2}$ ponatur perpendicularis quaeſita $GN = y$, fiet $GL = y - m$, $HL = \sqrt{b^2 - y^2 + 2my}$. $= ON$.

$$\text{Ergo } AN = AB - BO - ON = a - b - \sqrt{b^2 - y^2 + 2my}$$
$$= \sqrt{AG^2 - GN^2} = \sqrt{a^2 - y^2}.$$

vnde fit $y = \frac{2am(a-b)}{(a-b)^2 + m^2} = GN$ perpendiculari arcus duplicati BG, ex qua per ſimilem aequationem $AM = AN - MN = \sqrt{AF^2 - MF^2}$ eruitur FM perpendicularis arcus triplicati BF etc.

Haec diuiſio et multiplicatio arcus quamuis generalis ſit, tamen cognito fonte inuentionis conſiderari poteſt vt caſus ſingularis huius problematis multo generalioris: data ratione inter abſciſſas et applicatas alicuius curuae, diuidere eandem curuam in partes quotcunque datas, ita vt ſubtenſae partium ſint in ratione data quacunque.

Sit

Sit curua data AB, diuidenda in partes quotcunque quarum ſubtenſae ſint in ratione data numerorum 1, e, f, etc. Abſciſſa data AC $=a$, applicata BC $=b$, ponatur ſubtenſa incognita BD $=x$ et determinabitur ex natura curuae perpendicularis ſeu applicata DF per x et quantitates datas a et b, atque ſi in hanc ipſam formulam omnibus locis vbi reperitur a ſubſtituatur valor inuentus pro AF; vbi reperitur b ſubſtituatur valor inuentus pro DF et omnibus locis vbi reperitur x, ſubſtituatur ex, habebitur applicata EG determinata per x et quantitates datas a, b, e et ſimili modo reliquae inueſtigabuntur, donec perueniatur ad vltimam euaneſcentem, qua poſita $=0$ determinabitur ſubtenſa x per datas quantitates a, b, e, f, etc. *Fig. III.*

Exempl. I.

Diuidatur arcus circuli datus BD in partes quotcunque DE, EF, FG, etc. quarum ſubtenſae ſint in ratione data numerorum 1, e, f, etc. Sit datus vt ſupra radius AB $=a$, perpendicularis DC $=m$, ponatur ſubtenſa incognita DE $=x$, erit perpendicularis. *Fig. VI.*

Prima EK $\dfrac{(2a^2 - x^2)m \pm x\sqrt{(a^2 - m^2)(4a^2 - x^2)}}{2a^2} = \alpha.$

Secunda FM $\dfrac{(2a^2 - e^2x^2)m \pm ex\sqrt{(a^2 - \alpha^2)(4a^2 - e^2x^2)}}{2a^2} = \beta.$

Tertia GN $\dfrac{(2a^2 - f^2x^2)m \pm fx\sqrt{(a^2 - \beta^2)(4a^2 - f^2x^2)}}{2a^2} = \gamma.$ etc.

donec perueniatur ad perpendicularem euanefcentem. Quodfi igitur datus arcus diuidendus fit in duas partes quarum fubtenfae fint vt 1 ad e determinabitur fubtenfa quaefita x (euanefcente fcilicet perpendiculari fecunda) per aequationem $\beta = o$, vel, fi totam aequationem explicare placeat;

$$\begin{array}{lllll}
c^8x^8 & -8e^6x^6 & +8m^2e^4x^4 & -32m^2e^2x^2 & +16m^4 = o. \\
+4m^2e^4 & -16m^2e^4 & +16e^4 & -32m^2 & \\
-2e^4 & +8e^4 & +64m^2e^2 & & \\
+1 & -16m^2e^2 & -32e^2 & & \\
 & +8e^2 & +8m^2 & & \\
 & -8 & +16 & &
\end{array}$$

fi datus arcus diuidendus fit in tres partes quarum fubtenfae fint in ratione numerorum datorum 1, e, f, determinabitur x per aequationem $\gamma = o$. etc.

Exempl. 2.

Fig. V. Sit diuidenda curua AB cuius abfciffae ad applicatas fint vt cu ad u^n (abfciffa data $AC = ca$, applicata $BC = a^n$) in partes quotcunque, quarum fubtenfae fint in progreffione data numerorum 1, e, f, etc. Ponatur fubtenfa quaefita $BD = x$, $DE = ex$, $EH = fx$. etc. fi fiat $DF = y$, erit $AF = cy^{\frac{1}{n}}$, ergo $FC = DL = ca - cy^{\frac{1}{n}} = \sqrt{x^2 - (a^n - y)^2}$ et quadrando vtrumque

$$c^2a^2 - 2c^2 a y^{\frac{1}{n}} + c^2 y^{\frac{2}{n}} = x^2 - a^{2n} + 2a^n y - y^2.$$

iam valor ipfius $y = DF$ per hanc aequationem expreffus ponatur $= \alpha$, et fiat $EG = z$, erit $DK = \alpha - z$, $DE = ex$,

EK

EK$=\sqrt{e^2x^2-\alpha^2+2\alpha z-z^2}=$FG, ergo AG$=AF-FG=c\alpha^{\frac{1}{n}}-\sqrt{e^2x^2-\alpha^2+2\alpha z-z^2}$ quae ſi diuidatur per c et quotiens eleuetur ad poteſtatem n dabit $\left(\alpha^{\frac{1}{n}}-\frac{\sqrt{e^2x^2-\alpha^2+2\alpha z-z^2}}{c}\right)^n=z$, $=$ perpendiculari ſecundae EG et ſimiliter applicatae reliquae inueſtigabuntur donec perueniatur ad vltimam euaneſcentem, qua poſita $=o$ determinabitur x per datas quantitates.

Vt caſum aliquem determinatum huius exempli euoluamus, propoſitum ſit datam parabolam AB vbi abſciſſae ad applicatas ſint vt cu ad u^2 et data abſciſſa AC $=ca$, BC$=a^2$, ita diuidere in D vt ſubtenſa BD ſit$=$ applicatae DF. Fiet $n=2$, $y=x$, ergo ſubtenſa quaeſita BD$=x=\frac{2a^6+a^2c^4+a^4c^2\pm 2a^3c^2\sqrt{2a^2+c^2}}{(2a^2-c^2)^2}$. *Fig. VI.*

Atque ex his iam ſatis conſtare arbitror quomodo data aequatione inter abſciſſas et applicatas alicuius curuae diuidi poſſit ipſa curua in partes quotcunque datam progreſſionem ſubtenſarum ſeruantes, nam quae ſupra de numero ſurdo partium in quas diuidendus ſit arcus et de multiplicatione ipſius arcus diximus, ea in quauis curua cuius datur aequatio, ſuccedunt. Negari interea non poteſt, ſi in multas partes diuidenda ſit curua propoſita, aequationes pro determinandis ſubtenſis mirum in modum creſcere et differri, ſed haec qualiſcunque difficultas ex ipſa curuarum natura, non vitio methodi quam ſecuti ſumus, oritur.

DE VSV INTERPOLATIONIS IN SOLSTITIORVM MOMENTIS INDAGANDIS

Auctore

F. C. Maiero.

M. Sept. 1727.

DIfficilis et anceps ab Aſtronomis iudicari ſolet ſolſtitiorum inuentio; nam ob inſenſibilem fere declinationum ſolſtitialium mutationem, incertum eſt, quo die et momento ſol in maxima declinatione extiterit. Hallcius tamen modum excogitauit, quo ſolſtitiorum momenta certius deteguntur quam ab aliis vnquàm factum fuit: (vid. D. Greg. Elem. Aſtr. p. 221. etc.) Contigit et mihi vnum alterumue modum comminiſci queis forſan paria praeſtare licet. Primus nititur interpolationis methodo a Neutono tradita (vid. Pr. Ph N. p. m. 446.) quem et hoc ſcripto exponere conſtitui. Cum vero theorema Neutoni ad aliam formam redegerim, opportunum mihi viſum eſt totam interpolandi doctrinam meo more breuiter recenſere prius, eique ſuperſtruere ſolſtitiorum inuentionem. Alterum modum quem reperi alio tempore communicabo quoque.

Ca-

Caput. I.

De Interpolationibus.

1. Exponantur duae quantitatum datarum ſeries quaecunque

1	- - -	*m*	*n*	*p*	*q*	*r*	*s*	- - -
2	- - -	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	- - -

ita vt cuiuis quantitati prioris ſeriei reſpondeat ſua competens in ſecunda ſerie, quae ſit ex priori ſecundam certam legem genita, dicantur autem prioris ſeriei quantitates *radices*, poſterioris ſeriei *functiones* ſuarum radidicum. Hic igitur duae poterunt oriri quaeſtiones; ſi enim intermedia alia quaeuis radix aſſumatur, quaeri poteſt quae ſit eius functio competens? et viciſſim, ſi intermedia quaeuis alia functio aſſumatur, quaeri poteſt, quae ſit eius radix competens? Solutio harum quaeſtionum vocatur alioquin *Interpolatio.*

2. Si lex cognita ſit qua functiones ex ſuis radicibus generantur, in promtu eſt quaeſtionum ſolutio. Eo igitur res redit, vt lex quaedam pro ſeriebus expoſitis inueniatur. Eiusmodi legi inueniendae Neutonus theorema generale praeſcripſit. Quomodo vero tale theorema inueniri poſſit, in eo ſum vt oſtendam.

 3. Po-

3. Ponam primo ſeries datas duabus ſolum conſtare quantitatibus, ſint eae tales:

1 - - - - - m n
2 - - - - - a b

Supponatur lex quâ functiones ex radicibus generantur hac exprimi formula, $\alpha+\beta x$, vbi x quamcunque radicem ſignificat, α autem et β ſint conſtantes ex datis m, n, a et b determinandae hunc in modum.

poſito $x=m$ erit

1 - - - $\alpha+\beta m=a$ adeoque
2 - - - $\alpha=a-\beta m$

deinde poſito $x=n$ erit

3 - - - $\alpha+\beta n=b$ adeoque
4 - - - $\alpha=b-\beta n$

ex ſecunda et quarta aequatione fit porro

5 - - - $b-\beta n=a-\beta m$
6 - - - $b-a=\beta n-\beta m$
7 - - - $\beta=\frac{b-a}{n-m}$.

ex hac et ſecunda ſiue quarta habetur

8 - - - $\alpha=\frac{an-bm}{n-m}$.

ergo lex quaeſita erit

9 - - $\frac{an-bm}{n-m}+\frac{b-a}{n-m}x$ ſiue $a-(a-b)\cdot\frac{x-m}{n-m}$

4. Secundo ponam duas ſeries trimembres tales

1 - - - m n p
2 - - - a b c

earumque legem generalem $\alpha+\beta x+\gamma x^2$. Valores itaque conſtantum α, β, et γ eodem modo reperiuntur quo

quo ante, (§. 3.) vt necesse non sit calculum integrum huc apponere; istis legitime substitutis habebitur lex quaesita $= a-(a-b)\frac{x-m}{n-m}+[a(p-n)-b(p-m)+c(n-m)]\frac{(x-m)(x-n)}{(n-m)(p-m)(p-n)}$

5. Tertio, positis duabus seriebus quadrimembribus

$$\begin{array}{llllll} 1 & - - - & m & n & p & q \\ 2 & - - - & a & b & c & d \end{array}$$

earumque lege $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3$ eruetur, sicut ante, quaesita lex

$$= a-\left\{\begin{matrix}+a\\-b\end{matrix}\right\}\frac{x-m}{n-m}+\left\{\begin{matrix}+(p-n)a\\-(p-m)b\\+(n-m)c\end{matrix}\right\}\frac{(x-m)(x-n)}{(n-m)(p-m)(p-n)}-$$

$$\left\{\begin{matrix}+(p-n)(q-v)(q-p)a\\-(p-m)(q-n)(q-)p)b\\+(n-m)(q-m)q-n)c\\-(n-m)(p-m))p-n)d\end{matrix}\right\}\frac{(x-m)(x-n)(x-p)}{(n-m)(p-m)(q-m)(p-n)(q-n)(q-p)}.$$

Sic pergere licet ad reliquas serierum species, sed eo opus non est, quia ex inuentis formulis earum cognatio mutua iam affulget. Quaelibet enim sequens maioris seriei formula constat ex antecedenti formula nouo aucta membro. Huius autem noui membri genitura ex formatione reliquorum cognosci potest leui adhibita attentione.

7. Supersedeo ergo descriptione generationis membrorum, addoque hic duntaxat membrum quod acce-

accedit priori (§. 5.) formulae, vt ex ea formetur lex ferierum quinquimembrium.

Ecce illud!

$$+\left\{\begin{array}{l} +(p-n)(q-n)(r-n)(q-p)(r-p)(r-q)a \\ -(p-m)(q-m)(r-m)(q-p)(r-p)(r-q)b \\ +(n-m)(q-m)(r-m)(q-n)(r-n)(r-q)c \\ -(n-m)(p-m)(r-m)(p-m)(r-n)(r-p)d \\ +(n-m)(p-m)(q-m)(p-n)(q-n)(q-p)e \end{array}\right\}\times \frac{(x-m)(x-n)(x-p)(x-q)}{(n-m)(p-m)(q-m)(r-m)(p-n)(q-n)(r-n)(q-p)(r-p)(r-q)}$$

8. Hoc illud theorema eft, quod (§. 2.) inuenien-dum mihi propofui, quodque, vt apparet, alius eft formae quam theorema Neutoni. Speciale fit hoc theorema fi loco radicum generalium m, n, p etc. Sumantur numeri naturaliter progredientes 1. 2. 3. 4 etc. Erit enim hoc cafu $a+(b-a)\frac{x-1}{1}+(c-2b+a)\frac{(x-1)}{1}\cdot\frac{(x-2)}{2}$ $+(d-3c+3b-a)\frac{x-1}{1}\cdot\frac{x-2}{2}\cdot\frac{x-3}{3}$. etc.

9. Poffunt radices pro abfciffis et functiones pro applicatis alicuius curuae haberi, (quod fecit Neutonus) atque ita problema foluere licet de inuenienda curua parabolici generis quae per data puncta tranfeat. Sed propofitum meum non fert vt plura de hac

re

re dicam. Supereſt, vt vſum interpolationis in ſolſtitiis indagandis commonſtrem.

Caput II.

De inueniendis ſolſtitiorum momentis.

10. Obſeruentur ante et poſt ſolſtitium altitudines ſolis meridianae, ex quibus eligantur quatuor qualescunque. Ex. gr. hoc quem agimus anno 1727 Petroburgi obſeruatae ſunt ſequentes altitudines ſuperioris limbi ſolaris

Iunii die, ſt. v.

4to erat alt. ☉	=	53°.	39′.	40″.
7 - -	=	53.	46.	10.
11 - -	=	53.	49.	10.
14 - -	=	53.	46.	45.

eligo autem quatuor, quia hic numerus omnium commodiſſimus eſt. Poſſem plures, ſi prolixum calculum non faſtidirem; poſſem pauciores ſi laxus eſſe vellem.

11. Porro, vt calculus omnium fiat compendioſiſſimus, pro numero qui diem primae obſeruationis ſignat (hic pro 4.) ponatur 0, itemque pro altitudine meridiana prima. Reliqua ſequantur ſuo ordine. Hoc nimirum:

Dies		Altitudines		
0	- - -	0″	=	0.15
3	- - -	390″	=	26.15
7	- - -	540″	=	38.15
10	- - -	425″	=	29.15.

 Imo

Imo vt omnis vitetur prolixitas, negligendo communem factorem functionum, fiant

dies	- - -	0.	3.	7.	10.
altitud.	- - -	0.	26.	38.	29.

12. Habeantur dies pro radicibus et altitudines pro functionibus, vt formula condi possit generalis quae omnes altitudines ad datos quoscunque dies dierumque momenta contineat, idque per formulam §. 5. exhibitam, in qua $m=0$, $n=3$, $p=7$, $q=10$, $a=0$, $b=26$, $c=38$ et $d=29$. Quia vero in hoc negotio breuitatis gratia semper ponitur $m=a=0$ ideo formula dicta commodiori hac forma poterit exhiberi

$$+\left(+\frac{bqp}{n(p-n)(q-n)}-\frac{cnq}{p(p-n)(q-p)}+\frac{dnp}{q(q-n)(q-p)}\right)x$$
$$-\left(+\frac{b(p+q)}{n(p-n)(q-n)}-\frac{c(n+q)}{p(p-n)(q-p)}+\frac{d(n+p)}{q(q-n)(q-p)}\right)x^2$$
$$+\left(+\frac{b}{n(p-n)(q-n)}-\frac{c}{n(p-n)(q-p)}+\frac{d}{q(q-n)(q-p)}\right)x^3.$$

13. Surrogatis surrogandis habebitur communis formula omnium altitudinum $=\frac{2309x-160xx-xxx}{210}$, quae sua vniuersalitate etiam complectitur maximam altitudinem, hoc est, solstitialem.

14. Vt igitur momentum maximae altitudinis (h. e. valor ipsius x.) impetretur, formulae elementum nihilo aequandum est, sicuti praecipitur in methodo de maximis et minimis, quo facto sequens emergit aequatio.

$$3x^2+320x-2309=0.$$

15. Reducta hac aequatione, fiet,

$$x=6.784.$$

maxima ergo altitudo incidit in diem 6. 784 sed huic

diei

diei quaternarius est addendus (ob §. 11.) vt emergat solstitii momentum factum Iunii die 10.784 = 10. 48. 19. (D. H. ′)

16. Substituto hoc valore ipsius x. (§. 15.) in formula altitudinum, (§. 13.) adhibitaque dexteritate, cuius te admonet articulus 11, erit superioris solaris marginis altitudo maxima

	=	53°.	49′.	11″.
auferatur semidiam. ☉	=		15.	51.
alt. max. centri ☉	=	53.	35.	20.
auferatur refractio	=			56.
alt. max. ☉. vera	=	53.	32.	24.
auferatur declinatio ☉ max.	=	23.	29.	
alt. aequat.	=	30.	3.	24.
alt. Poli Petroburg.	=	59°.	56′.	36.

17. Manfredi Ephemerides hoc momentum statuunt ad Iunii diem

		H.	′
statuunt ad Iunii diem	10.	16.	32.
meae vero tabulae solares ad Iunii D.	10.	15.	26.

18. Ex aliis altitudinibus inueni idem momentum

	D.	H.	′	
solstitii incidisse in Iun.	10.	15.	21.	quibus ta-
item ex aliis, in Iun.	10.	15.	7.	bulae

meae pulcre congruunt.

De Conſtructione Aequationum Differentialium primi gradus per viam ſeparationis indeterminatarum.

Auct.

I. Hermanno.

M. Aug. 1726.

POſteaquam in Commentariis ſuperioris Anni *pag.* 149. *ſeqq.* theoremata quaedam pro inueniendis integralibus quantitatum differentialium exhibui; quae pluralitas indeterminatarum et ſecunda differentialia non morantur, atque adeo late patentia ſunt, vt pluribus exemplis ibi adductis id monſtraui. Communicabo nunc aliud Theorema non minus vtile, cuius ope innumerarum aequationum differentialium primi gradus, quae forte aliis methodis inacceſſae haberi poſſint, per viam ſeparationis indeterminatarum cum ſuis differentialibus a ſe inuicem, conſtructio, conceſſis quadraturis, exhiberi poteſt. Omnes aequationes illae ad hanc $y = Px + Q$ reuocantur, in qua x et y ſunt coordinatae curuae conſtruendae, P vero et Q vtlibet compoſitae ſint ex tertia indeterminata z et conſtantibus. Ex hac aequatione inueniri poſſunt aeſtimationes indeterminatarum x et y per z et conſtantes (ſaltem tranſcendenter) in hypotheſi, quod $dy = zdx$. Huc facit ſequens

Theo-

Theorema.

Si sint Log. $R = \int(dP : zR - PR)$ *et* $dy = zdx$, *erunt* $x = RS$, *et* $y = PRS + Q$ *indeterminatae aequationis* $y = Px + Q$. Poſſet hoc ſtatim ſynthetice demonſtrari, ſed malo analyſin eius hoc loco adducere. Aequatio $y = Px + Q$ differentiata praebet $dy = Pdx + xdP + dQ$, et diuidendo hanc per $(z - P)x$ proueniet $\frac{dx}{x} = \frac{dP}{z-P} + \frac{dQ}{(z-P)x}$ (aut faciendo $\frac{dR}{R} = \frac{dP}{z-P}$, et $\frac{dQ}{(z-P)x} = dZ) = \frac{dR}{R} + dZ$, et multiplicando aequationem per Rx, inuenietur $Rdx = xdR + RxdZ$, vel etiam $\frac{Rdx - xdR}{RR} = \frac{xdZ}{R}$ (vel reſtituto valore $dZ) = \frac{dQ}{zR - RP} = dS$, et ſumtis integralibus $R^{-1}x = S$, et $x = RS$, abit ergo $y = Px + Q$, in $y = PRS + Q$, quare ſi *Log.* $R = \int(dP : z - P)$, et $S = \int(dQ : zR - PR)$ erunt $x = RS$, et $y = PRS + Q$. Primo intuitu hoc theorema nullius aut exigui ſaltem vſus eſſe, videbitur, ſed exempla quae ſequuntur, et plura alia, quae propter temporis anguſtiam intacta praeterire cogor, oſtendent quam late patens ſit.

Exemplum 1.

Sit $adx + bdy + cxdx + exdy + fydx$ aequatio conſtruenda; haec vero per hypotheſin $dy = zdx$, mutatur in $a + bz + cx + ezx + fy = 0$. Iſta vero ad formam theorematis redigetur, ponendo $P = (-ez - c) : f$, et $Q = (-bz - a) : f$, inueniuntur autem $dP : z - P = -edz : (e + f . z + c) = R^{-1}dR$, hinc $R =)[(e+f)z + c]^{-e:e+f}$, et $dS (= dQ : zR - PR) = [(e+f)z + c]^{-f:e+f} \times bdz$, cuius

 inte-

integralis eſt $S = \Delta - \frac{b}{e}[(e+f)z+c]^{e:e+f}$, exiſtente Δ conſtanti quantitate, hinc elicitur $x\ (=RS) = \Delta[(e+f)z+c]^{-e:e+f} - \frac{b}{e}$, ex iſta vero deriuatur ſequens $[(e+f)z+c]^{e:e+f} \times (ex+b) = e\Delta =$ ex acquatione vero $a+bz+cx+ezx+fy=0$, obtinetur $(e+f)z+c = \frac{-efx-(cef+ff)y-ae-af}{ex+b}$ quare inuenta aequatio abit in $(cfx+efy+ffy+ae+af+bc)^e \times (ex+b)^f = C$, vbi C eſt alia quantitas conſtans.

Exemplum 2.

Si quaeratur curua huius proprietatis, vt quaelibet eius tangens, ſit ad partem axis inter tangentem et initium curuae, in data ratione n ad 1, inuenietur aequatio differentialis eius eſſe $nxdy-nydx=yds$, quae iterum conſtrui poteſt ponendo $dy=zdx$, et ſi praeterea fiat $r=\surd(zz+1)$, mutabitur aequatio in $nzx-ny=ry$, eritque adeo $P=\frac{nz}{n+r}$, et $Q=0$. Atqui $\frac{rdP}{z-P} = \frac{ndz}{rz} - \frac{ndr}{nr+rr} = -\frac{dR}{R}$ (propter $zz=rr-1$) $\frac{ndr}{rr-1} - \frac{ndr}{rr+nr} = \frac{\frac{1}{2}ndr}{r-1} - \frac{\frac{1}{2}ndr}{r+1} = \frac{-dr}{r} + \frac{dr}{r+n}$, hinc elicitur $R=(r-1)^{n:2} \times (r+n):(r+1)^{n:2} \times r = x$. Vel $(r-1)^{n:2}(r+n) = rx(r+1)^{n:2}$, vel $(r-1)^n \times (r+n)^2 = rrxx\,(r+1)^n$, ſed aequatio $nxz-ny=ry$, praebet $z= z = nnxy + Qy : nnxx - yy$, exiſtente $Q = \surd(nnxx+nnyy-yy)$ adeoque $r\ (=nxz-ny : y) = nyy + nQx : nnxx - yy$. Quod ſi in praecedenti aequatione ſubſtituatur, proueniet $(nyy+yy-nnxx+nQx)^n$

$\times (n$

$\times (n^3 xx + nQx)^2 \times C = (nnxx + nyy - yy + nQx)^n$ $\times (nyy + nQx)^2 xx$. Aequatio curuae quaesitae, ex qua cognoscitur eam fore algebraicam quoties n est numerus rationalis.

Si $n = 1$, fiet $Q = x$, et praecedens aequatio mutabitur in $xx = 2cy - yy$, facta nempe $C = cc$.

Si $n = 2$, fiet $Q = \sqrt{(4xx + 3yy)}$ et aequatio generalis mutabitur in sequentem $(3yy - 4xx + 2Qx)$ $\times (4xx + Qx) \times a = (4xx + 2Qx + yy) \times (Qx + yy) x.$];

Plures solutiones Problematis huius exempli, quod Cel. *Ioh. Bernoulli* Geometris olim proposuit, a praestantissimis eorum iam pridem exhibitae fuere, sed nulla adhuc, quod sciam, analysis eius publice extitit.

Exemplum 3.

Sit construenda aequatio $xdx + ydy = dx\sqrt{(xx - 4yy)}$, quae facta $dx = zdy$ mutatur in $xz + y = z\sqrt{xx - 4yy}$, ex qua elicitur $x = -(4zz + 1)y : 2z$, quare $P = -(4zz + 1) : 2z = -2z - \frac{1}{2z}$, et $z - P = 3z + \frac{1}{2z}$, propterea inuenitur $R^{-1} dR (= dP : z - P) = \frac{dz}{z} - \frac{10 z dz}{6zz + 1}$, adeoque $(6zz + 1)^{\frac{5}{6}}$ $\times R = az$, sed propter $xz + y = z\sqrt{(xx - 4yy)} = Qz$, posita nunc $Q = \sqrt{(xx - 4yy)}$, et $z = y : Q - x$, et $(6xz + 1) = 2xx + 2yy - 2Qx : 2xx - 4yy - 2Qx$; fiet

$(2xx - 2Qx + 2yy)^{\frac{5}{6}} \times (Qx - xx) = (2xx - 4yy - 2Qx)^{\frac{6}{7}} ay$, haec

haec vero aequatio, inſtitutis debitis reductionibus, reducitur ad ſimpliciorem $(\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}Q)\times(x-Q)^{\frac{1}{5}}=a^{\frac{6}{5}}$.

Hoc exemplum ex Cel. *Gabrielis Manfredi* Tract. de Conſtructione aequationum differentialium primi gradus pag. 137. ſumtum eſt, vbi etiam curuae aequationem algebraicam ab hac in ſpecie differentem, ſed reapſe conſentientem non modo inuenit, ſed analyſin ſuam quoque expoſuit. Haec aequatio naturam illius lineae explicat quae omnes parabolas circa communem axem deſcriptas quarum Parametri diſtantiis verticum a dato in axe puncto aequales ſunt, ad angulos rectos traiicit. Huius Traiectoriae Cl *Ioh. Bernoulli* etiam aequationem algebraicam exhibuit in Comm. Acad. Scient. Pariſienſis.

Exemplum 4.

Diuidere Parabolam Conicam cujus Parameter eſt $=a$, in data ratione n ad 1. Dicantur abſciſſae, maior y et minor x, et inuenietur aequatio differentialis $dy\sqrt{(4y+a)}=ndx\sqrt{(4x+a)}$, fiat nunc iterum $dy=zdx$, et inuenietur $y=\frac{nnx}{zz}+\frac{ann-4azz}{4zz}$, quare ſunt in hoc exemplo $P=nn:zz$, et $Q=(ann-azz):4zz$, adeoque $dP=-2nndz:z^3$, et $z-P=(z^3-nn):zz$, hinc $R^{-1}dR$ $(=dP:z-P)=-2nndz:z^4-nnz$, et $dQ=-anndz:2z^3$. Fiat $z^3=nnu$, ſeu $z=n^{\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}}$, et fiet $\frac{dR}{R}(=\frac{dP}{z-P})=\frac{-2du}{3uu-3u}$ $=\frac{2du}{u}-\frac{2du}{3u-3}$; atque adeo $R=u^{\frac{2}{3}}\times(u-1)^{-\frac{2}{3}}$, et dS $(=\frac{dQ}{zR-PR})=-\frac{1}{6}adu:u^{\frac{5}{3}}\times(u-1)^{\frac{1}{2}}$, et ſumtis integralibus $S=\Delta-\frac{1}{4}au^{-\frac{2}{3}}\times(u-1)^{\frac{2}{3}}$; vbi Δ eſt conſtans. Verum x

(=

$(=RS)=\Delta\times u^{\frac{2}{3}}\times(u-1)^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}a$, adeoque $(4x+a)=4\Delta\times u^{\frac{2}{3}}\times(u-1)^{-\frac{2}{3}}$. Aequatio vero $y=\frac{nnz}{zz}+\frac{ann-azz}{4zz}$, praebet $z=u\times(4x+a)^{\frac{1}{2}}\times(4y+a)^{-\frac{1}{2}}$, adeoque $u(=z^3:nn)=n\times(4x+a)^{\frac{3}{2}}\times(4y+a)^{-\frac{3}{2}}$, qui valor in aequatione paulo ante inuenta $4x+a=4\Delta\times u^{\frac{2}{3}}\times(u-1)^{-\frac{2}{3}}$ suffectus, et reliquis necessariis reductionibus peractis, suppeditabit aequationem $y=-\frac{1}{4}a+\frac{1}{4}[n(4x+a)^{\frac{3}{2}}-(n-1)a^{\frac{3}{2}}]^{\frac{2}{3}}$, qua magnitudo abscissae y definitur, arcus parabolae, qui debet esse ad alterum arcum cuius abscissa x, in data ratione n ad 1.

Hoc theorema est prorsus nouum, etsi enim Cel. *Ioh. Bernoulli* in *Actis Erudit.* 1698. elegantem modum exposuit, quo per comparationem trapeziorum Hyperbolicorum cum arcubus Parabolicis, duo arcus assignari possunt, datam ad se inuicem rationem habentes, et post ipsum *Illustr. Hospitalius* ex eodem fundamento, sed aliam viam secutus in *Tractatu Analytico de Sectionibus Conicis*, tales arcus pariter elicuit, non sunt tamen hi arcus datam rationem habentes terminati ad verticem, immo neuter eorum, sed maior minorem semper includit. In hac vero formula ambo arcus parabolae datam rationem seruantes incipiunt in vertice parabolae.

Scholium I.

Methodus nostra in altioribus aequationibus non ceſſat, modo hae aequationes altiores in duos factores diſcerpi poſſint, quorum vnus indeterminatas y et x tantum in primo gradu conſiſtentes contineat, quod, ſi non ſemper, ſaepe tamen effici poteſt. Sit v. gr. aequatio $Ayy+Bxy+Cxx+Dy+Ex+F=o$, in qua litterae capitales A, B, C, D etc. quantitates ex tertia indeterminata z et conſtantibus vtlibet compoſitas denotant. Aequatio duos factores $\alpha y+\beta x+\gamma$, et $y-\delta x+\varepsilon$ admittet, exiſtentibus

$\alpha=A$

$\beta=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}K$, poſita $K=\sqrt{(BB-4AC)}$

$\gamma=(-2AE+BD):K$

$\delta=(-B+K):2A$

$\varepsilon=(2AE-BD+DK):2AK$, modo F ſit

$=(2AE-BD+DK)\times(-2AE+BD):2AKK$.

Vterque factor ad rem faciet, nam ponendo $\alpha y+\beta x+\gamma=o$, inuenientur $P=-\beta:\alpha$, et $Q=-\gamma:\alpha$, vbi ſingulae α, β, γ per A, B, C, D, E (quae ipſae continent indeterminatam z et conſtantes) datae ſunt, adeoque aequationes $Log.\,R=\int dP:z-P$, et $dS=dQ:zR-PR$, conceſſis quadraturis conſtrui poſſunt.

Sin vero miſſo factore $\alpha y+\beta x+\gamma$, alterum $y-\delta x+\varepsilon$ adhibere velimus fient $P=\delta$, et $Q=-\varepsilon$, et hae quantitates etiam datae erunt per z et conſtantes atque adeo per quadraturas aequatio ipſa conſtrui poteſt.

Scholium 2.

Quia vero modus ſcholii praecedentis conditione aliqua limitatur, quae impedit quo minus aequatio generalis

ralis $Ayy+Bxy+Cxx+Dy+Ex+F=o$ construi possit, alia via est indicanda.

Si assumantur $M=y+ax-b$, et $N=cy+x+f$, vbi a, b, c et f sunt coefficientes assumtitiae, inuenientur $y=-M+aN-af-b):ac-1$, et $x=cM-N+bc+f:ac-1$. Hinc $AMy+CNx=Ayy+Aaxy+Cxx-Aby+Cfx$
$$+Cc$$
$=-AMM+AaMN-CNN-(Aaf+Ab)M+(Cbc+Cf)$
$$+Cc$$
$N:ac-1$ (aut positis $Aa+Cc=B$, $\alpha=-Aaf-Ab$, et $\beta=Cbc+Cf)=-AMM+BMN-CNN+\alpha M+\beta N:ac-1$. Quodsi praeterea sint $-Ab=D$, vel $b=-D:A$, et $Cf=E$ seu $f=E:C$, fiet $Ayy+Bxy+Cxx+Dy+Ex=-AMM+BMN-CNN+\alpha M+\beta N:ac-1=o$, sed aequatio $-AMM+BMN-CNN+\alpha M+\beta N=o$, praebet $2AM=+BN+\alpha+\surd[KKNN+(2B\alpha+4A\beta)\times N+\alpha\alpha]$, existente, vt antea, $K=\surd(BB-4AC)$, sed vt haec vltima rationalis fiat, faciamus $K\alpha=B\alpha+2A\beta$, aut scribendo ad abbreuiandum G pro $B-K$, erit $-G\alpha=2A\beta$, vel restituendo aestimationes litterarum α et β, fiet $AGaf+AGb=2ACbc+2ACf$, (vel propter $Ab=-D$, et $f=E:C$) $\frac{AGE}{C}a-DG=-2CDc+2AE$, hinc enim elicientur,

$a=(2ACE+CDG-2CCDc):AGE$, et propter $Aa+Cc=B$, reperietur

$c=(2ACE-BEG+CDG):2CCD-CGE$. et

$\alpha=(8ACCDE-2BCDEG-2ACEEG+4CCDDG-CDEGG):(2CD-EG)\times AFE$. Item

$c=(8ACDE-2BDEG-2AEEG+2CDDG-DEGG):(2CD-EG)\times G$

$\beta=(-AEEG+BDEG-CDDG)\times(2CD-EG)\times A$

Ex aequatione vero $2AM=BN+\alpha+\sqrt{[KKN+(2B\alpha+4A\beta)N+\alpha\alpha]}$ fit $2AM=(B+K)N+2\alpha=HN+2\alpha$ posita $H=B+K$. Atqui $2AM=2Ay+2Aax+2Ab=2Ay+2Aax-2D$, et $HN+2\alpha=Hcy+Hx+Hf+2\alpha$, Ergo $2AM=HN+2\alpha$ producit $y=(\frac{2Aa-H}{cH-2A})x-(\frac{D+fH+2\alpha}{cH-2A})$; quare si fiant $P=(2Aa-H):cH-2A$, et $Q=-(D+fH+2\alpha):cH-2A$ habebimus $y=Px+Q$, et sic reducta est aequatio $Ayy+Bxy+Cxx+Dy+Ey+o$, ad formulam requisitam, si litterae capitales A, B, C, D et E datae sint per indeterminatam z et constantes, nam singulae a, b, c, f, α et β per hasce A, B, C, etc. datae sunt, atque adeo aequatio $Ayy+Bxy+$ etc. $=o$ construi potest per quadraturas. Sed constructio secundum hunc modum perficienda aliquas restrictiones patitur, nempe excipiendi sunt casus vbi $a=\frac{1}{c}$, aut $c=2A:H$, vel $2CD=EG$.

Ex-

Exempl. 4.

Si conſtruenda ſit aequatio $ayydy + byydx + cxydy + exydx + fxxdy + gxxdx + hydy + kydx + lxdy + mxdx = o$. Fient facta $dy = zdx$, $A = az + b$, $B = cz + e$ $C = fz + g$, $D = hz + k$, et $E = lz + m$, hae quantitates in formulis praecedentibus, valores litterarum aſſumtitiarum definientibus ſurrogatae, praebebunt P et Q per z et conſtantes expreſſas, adeo vt aequatio per quadraturas conſtrui poſſit. Sed ad vitandam prolixitatem in aequatione differentiali conſtruenda, ſint a, g, h et m ſingulae $= o$, et $bf = ce$, et $bf = ce$ reperientur ſaluo errore calculi litterae aſſumtitiae, nempe

$b = k : b$; $c = + b : cz$; $f = l : f$

$\alpha = (bfkl - bell)z + cekk - 2ell) : efk - eel$; $G = 2e$ et $H = 2cz$,

$a = (2cceek - cefk - ceel)z + 2effkk) : befkl - beell$

Sed hoc caſu ſit $cH = 2A$, quare praecedentes determinationes in caſu quod $ce = bf$, non inſeruiunt, ſed ſi b, c, e, f ſint quaecunque aliae quantitates aequatio per praecedentia conſtrui poterit.

Aliter adhuc aequatio $Ayy + Bxy + Cxx + Dy + Ex + F = o$, deprimi poteſt, quomodocunque cöefficientes A, B, C, D, E, et F compoſitae ſint ex tertia indeterminata z, et quantitatibus conſtantibus, aſſumendo has duas aequationes $y = t + au - b$ et $x = t - u + c$, in quibus, vt apparet, t et u ſunt nouae indeterminatae, et a, b, c ſunt coefficientes aſſumtae. Nam ſi hae nouae indeterminate t et u, in aequationem datam Ayy $Bxy + Cxx + Dy + Dx + F = o$, introducantur, naſcetur alia aequatio, quae, factis

$e=(ABE-2ACD+BBE-2BCD+BCE-2CCD):$
$(4AAC-ABB+4ABC+4ACC-B^3-BBC).$
$f=(BDE+BEE+CDD-CEE-(B+2C)^2F):$
$4AAC-ABB+4ABC+4ACC-B^3-BBC)$
$h=-e+\sqrt{(ee+f)}$
$c=[(2A+B)h-E]:(B+2C)$
$a=(Bh-2Cc-E):(2Ah-Bc-D)$
mutabitur in $(A+B+C)\,tt+(2Aa+Ba-B-2C)\,tu+(Aaa-Ba+C)\,uu=o$, haec vero, factis
$2f=(2Aa+Ba-B-2C):(A+B+C)$,
$g=(Aaa-Ba+C):(A+B+C)$, et $k=-f+\sqrt{(ff-h)}$ abit in $t=ku$. Sed aequationes assumtae $y=t+au-b$, et $x=t-u+c$, praebent quoque $t=(y+ax+b-ac):a+1$, et $u=(y-x+b+c):a+1$. Adeoque ex aequatione inuenta $t=ku$, elicietur $(1-k)\,y=-(a+k)x+ac+bk+(ck-b)$, erunt ergo $P=(a+k):(k-1)$ et $Q=(ac+bk+ck-b):(1-k)$ et aequatio finalis $y=Px+Q$ quae inuenienda erat. Nam ex catalogo praecedenti liquet singulas litteras assumtas a, b, c, e, f, h, et k atque adeo P et Q datas esse in A, B, C, D, E, et F: itaque per theorema nostrum aequatio proposita $Ayy+Bxy+Cxx+Dy+Ex+F=o$, concessis quadraturis, construi potest.

Sub hac eadem aequatione continetur quoque ista $dy=ax^m dx+bx^p y^q dx$ circa quam tum *Nob. Com. Riccatus*, tum

tum *Cl. Cl. Bernoulli* Fratres *Nicolaus* et *Daniel*, multa curiosa et elegantia iam inuenerunt, nemo autem quod sciam, generaliter eius constructionem obtinuit, aut saltem dedit. Alia vero occasione eam exhibebo.

Hac occasione monendum esse duxi, in vtroque meo schediasmate de Theoria generali Motuum variatorum, et in praesenti de Constructione Aequationum, praecipua quidem in Conuentibus Societatis ordinariis praelecta fuisse, nonnulla vero quoque occasione sic ferente recens accessisse. Huc pertinent Theoremata nonnulla Bernoulliana *quae in Schediasmate illo demonstrata exhibentur, quae Celeberr. eorum Autor diu postquam scriptum illud in Conuentu legi, huc misit, sed ob materiae affinitatem tamen ea in dicto Schediasmate attingere volui. Sic reuidendo alteram schedam de Constructione Aequationum differentialium, non abs re iudicaui si nonnulla exempla iis quae praelegeram nunc recens adiicerem.*

THEO-

THEOREMATA SELECTA PRO CONSERVATIONE VIRIVM VIVARVM DEMONSTRANDA ET EXPERIMENTIS CONFIRMANDA.

Auct.

Io. Bernoulli,

Excerpta ex Epiſtolis datis ad filium Danielem, 11. *Oct.* *et* 20. *Dec.* (*ſtil. nou.*) 1727.

Theorema I.

VElocitas aquae, per foramen valde paruum in fundo vaſis exilientis tanta eſt, quantam graue acquirit libere cadendo ex altitudine aquae ſupra foramen.

Theorema II. Sit curua data C*b*B, (*fig.* 1.) per quam deſcendat graue B poſt ſe in altum trahens aliud graue minus A ope funiculi ACB trochleam C ambientis. Quaeruntur velocitates ponderum A et B. Sit CB $= x$, EB $= y$, earum differ. B*n* $= dx$, B*o* $= dy$, B*b* $= ds$, altitudo verticalis TV, per quam graue liberum cadens celeritatem acquirit, quam mobile B habet $= t$, erit $t = \frac{ds^2 . \overline{By - Ax}}{Bds^2 + Adx^2}$. Haud difficilius eſt problema, ſi etiam graue A ſuper curua aliqua data moueatur.

Theor. III. Sit tubus cylindricus ACBH (fig. 2.) vtrobique apertus atque inflexus in duo crura BA et CH

ad

ad partem horizontalem BC; ſit ſinus anguli ABC$=p$ et ſinus anguli HCB$=q$ exiſtente nimirum ſinu toto $=1$. Sit porro ille tubus aqua plenus vsque ad horizontalem MN, voceturque L longitudo partis tubi MBCN aqua plenae. Erunt agitati liquoris in hoc tubo oſcillationes tam maiores quam minores omnes tautochronae atque eiusdem durationis cum oſcillationibus minimis penduli alicuius ſimplicis, cuius longitudo $=\frac{L}{p+q}$.

Coroll. Si anguli ABC et HCB ſunt recti, qui vnicus caſus eſt a Newtono ſolutus, erit longitudo penduli ſimplicis, quod oſcillanti aquae iſochronum eſt, $=\frac{1}{2}L$ vt inuenit Newtonus.

Theorema 4. Chorda muſica datae longitudinis et ponderis tenſa a dato pondere inuenitur facere vibrationes, quemadmodum definit Taylorus in transactionibus Londin.

Theorema 5. Sit iam chorda ALB (fig. 3) craſſitiei et ponderis expers, onerata in medio ponduſculo dato perexiguo L tenſa autem dato pondere P magno; dico numerum vibrationum huius chordae durante vna oſcillatione penduli datae longitudinis D fore $=2\sqrt{(\frac{D\times P}{AB\times L})}$.

Theorema 6. Iisdem poſitis ſit chorda AB(fig.4.) onerata duobus ponduſculis aequalibus et aequidiſtantibus, cum a ſe inuicem tum ab extremitatibus A et B. Vocetur vnumquodque ponduſculorum $\frac{1}{2}$L, dico fore numerum vibrationum (oſcillante ſemel pendulo dato D) $=\sqrt{(\frac{6D\times P}{AB\times L})}$.

Theorema 7. Si manentibus reliquis, ſint tria pondufcula ſingula $=\frac{1}{3}L$, erit numerus vibrationum chordae $=2\sqrt{\left(\frac{\overline{6-3\sqrt{2}}\,D\times P}{AB\times L}\right)}$. Si pondufcula ſint quatuor ſingula $=\frac{1}{4}L$ erit numerus vibrationum, quem vocabo, $N=2\sqrt{\left(\frac{\overline{5-\sqrt{5}}\times D\times P}{\overline{5+\sqrt{5}}\times\frac{1}{5}AB\times L}\right)}=2\sqrt{\left(\frac{\overline{25-5\sqrt{5}}\times D\times P}{\overline{5+\sqrt{5}}\times AB\times L}\right)}$. Si fuerint quinque pondufcula, quorum vnumquodque $=\frac{1}{5}L$, habebitur $N=\sqrt{\left(\frac{\overline{60-30\sqrt{3}}\times D\times P}{AB\times L}\right)}$. Sint tandem pondufcula ſex, ſingula $=\frac{1}{6}L$, erit $N=\sqrt{\left(\frac{\overline{42xx-126ax+168aa}\times D\times P}{\overline{2xx+ax+aa}\times AB\times L}\right)}$, vbi notandum, per a me intelligere numerum quemlibet pro lubitu aſſumtum, atque tum x eſſe radicem huius aequationis $x^3-axx-2aax+a^3=0$. Eadem methodo, quam habeo, progredi poſſum ad determinandos numeros vibrationum pro pluribus pondufculis quibus chorda oneratа ſupponi poteſt, ſedpergo ad alia.

De grauibus rotando deſcendentibus in plano inclinato vel in curua aliqua vel etiam verticaliter ſuſpenſis ex filis circa axes circumuolutis ſeſe euoluendo, ſequentia habe.

Theor. 8. Sit graue aliquod cuiuscunque figurae BFG, (fig. 5.) cuius centrum grauitatis ſit C, ex quo et radio CA deſcriptus AHL circulus repraeſentet axem, cui circumuolutum intelligatur filum aliquod ſecundum ordinem litterarum EALHALHAL etc. Ipſum vero graue ſua grauitate deſcendere concipiatur, id quod fieri non poteſt niſi rotando, dum nimirum axis ex filo ſeſe euol-

euoluit hoc litterarum ordine AHLAHL. Quaeritur, poſtquam ex altitudine EA quacunque deſcenderit graue, quanta ſit velocitas centri C.

Solutio. Vocetur D diſtantia centri oſcillationis figurae rotantis a puncto ſuſpenſionis, quod vbicunque in circumferentia AHL ſumi poteſt. Sit radius $CA = a$, EA altitudo verticalis, per quam graue rotando deſcendit $= R$, altitudo quaeſita per quam graue aliquod liberum deſcendere debet, vt acquirat velocitatem aequalem illi quam habet grauis rotantis centrum grauitatis $C = z$; dico fore $z = \frac{aR}{D}$.

Coroll. 1. Si graue BFG eſt circumferentia circuli vel ſuperficies cylindrica, cuius radius $CB = b$, erit $z = aaR : (aa + bb.)$

Coroll. 2. Si vero ſit ipſe circulus vel cylindrus, erit $z = 2aaR : (2aa + bb)$.

Coroll. 3. Si ſit ſuperficies ſphaerica, habebitur $z = 3aaR : (3aa + 2bb)$.

Coroll. 4. Et tandem ſi ſit globus grauis, fiet $z = 5aaR : (5aa + 2bb)$. Notandum, in his omnibus, poni axem AHL grauitatis expertem.

Scholion. Poſſent experimenta inſtitui, vt pateret an centrum C haberet velocitatem, quam hic aſſignauimus, quo ipſo cuilibet manifeſta fieret conſeruatio virium viuarum, cum praeſertim pro lubitu temperare liceat deſcenſum, vt centrum tam lente, quam volumus, deſcendat, adeoque tempus deſcenſus per quamlibet altititudinem EA commode comparari possit cum descensu naturali grauium cadentium, quae nimirum vno secundo 15. ped. Reg. Paris. circiter a quiete delabuntur. Vt enim lentissime descendat, minuenda est tantum quantum satis ratio CA ad CB. Possunt quoque ex principio conseruationis virium viuarum determinari leges communicationis motus pro corporibus perfecte elasticis, quae rotando se mutuo impellunt, sed breuitatis gratia eas hic non exprimo, sufficit monere eas ex parte dependere a figura corporum rotantium. Multa alia nunc taceo, quae commode per theoriam virium viuarum explicari aut solui possunt, quae vero ex aliis principiis difficulter nec sine ambagibus determinantur, quibus annumero, quae superius dixi circa vibrationes chordarum et oscillationes fluidorum in tubis reflexis, nec non ea, quae de grauibus rotando descendentibus vel de corporibus rotando in se inuicem impingentibus exposui. Caetera argumentum plane est nouum et nulli hactenus quantum scio consideratum. Demonstrationes alia vice mittam.

Monitum.

„ Experimenta desiderata in scholio Theorematis 8.
„ fuerunt instituta accuratissime in diuersis corporibus,
„ eaque plane cum Theoria conuenire obseruatum fuit.
„ In sequenti epistola ad filium data talia ad hoc argu-
„ mentum pertinentia atque in latinum sermonem versa
„ rescripsit horum theorematum Auctor.

Non dubitaui, quin facile inuenires demonstratio-

nes

nes theorematum meorum ope principii conſeruationis virium viuarum et gaudeo, te alia eruiſſe ſimilia: gratum quoque fuit ex te intelligere, tam egregie theoriam iſtam experimentis confirmari. Sententiam meam de tenſione fili corpus rotans ſuſtinentis in theoremate octauo, quam ſcire cupis, iam tecum communicabo, ex qua patebit, eſſe tenſionem fili conſtantem durante toto deſcenſu mobilis rotantis, cuiuscunque ſit figurae. Sit IKL (fig. 6.) ſcala velocitatum naturalium, cuius nempe applicatae MK, NL deſignent velocitates acquiſitas mobilis libere cadentis ex altitudinibus IM, IN. Sit alia curua IRS, cuius applicatae PR, QS exprimant velocitates centri grauitatis mobilis alicuius ex filo ſuſpenſi rotando ab initio I deſcendentis per euolutionem fili. Agantur ex punctis infinite propinquis K, L rectae KT, LS axi IQ parallelae ſecantes curuam IRS in R et S; erunt ductis applicatis RP, SQ ex natura velocitatum mobilis rotando deſcendentis (nominatis IP vel IQ$=$R, et IM vel IN$=$Z, PQ$=d$R, MN$=d$Z) Z$=\frac{aR}{D}$ (vid. epiſtolam meam anteriorem), hoc eſt, D.a::R.Z::IQ.IN:: IP. IM::PQ.MN; vnde ob conſtantem rationem inter IQ et IN vel inter IP et IM, patet curuam IRS eſſe etiam parabolam; hinc ob velocitates PR, MK aequales erit tempuſculum per PQ ad tempuſculum per MN vt PQ ad MN, ſeu vt IP ad IM::R.Z::D. a. Sumta iam PO $=$MN, ductaque applicatis parallela OV ſecans KR productam in Y et elementum parabolae RS in X; fingamus filum, qnando mobile peruenit in P ſubito rumpi, ita

 vt

vt acquisita sua velocitate $PR=MK$ pergat libere descendere, quare in O habebit velocitatem $OV=NL$, et incrementum velocitatis momentaneum erit $YV=ZL$. Quia autem non rupto filo, incrementum velocitatis, eodem momento acquisitum est tantum YX, liquet reliquum XV impediri a filo, idemque adeo impendi in tensionem fili. Vnde ita argumentor: Incrementa et decrementa velocitatis in eodem corpore et eodem tempusculo producta sunt vt vires, quae ea producunt; est ergo tensio fili, quae dicatur T, ad vim grauitatis mobilis rotantis, hoc est, ad eius pondus, quod vocetur P, vt VX ad $VY=ST$, adeoque vt SV ad RT vel vt OQ ad PQ h. e. vt $PQ-MN$ ad PQ. Vnde T ad $P :: dR-dZ.dR :: R-Z.R :: D-a.D$, proinde $T=\frac{D-a}{D}\times P$; Q. E. I.

Coroll. 1. Si mobile graue BFG (vid. fig. 5.) est circumferentia circuli vel superficies cylindrica, cuius radius $CB=b$ erit $D=\frac{aa+bb}{a}$, adeoque $T=\frac{bb}{aa+bb}\times P$.

Coroll. 2. Si BFG sit ipse circulus vel cylindrus, cuius radius $=b$, erit $D=\frac{2aa+bb}{2a}$, vnde $T=\frac{bb}{2aa+bb}\times P$.

Coroll. 3. Si sit superficies sphaerica, cuius radius $=b$, erit $D=\frac{3aa+2bb}{3a}$; Hinc $T=\frac{2bb}{3aa+2bb}\times P$.

Coroll. 4. Si sit globus solidus, cuius radius $=b$, erit $D=\frac{5aa+2bb}{5a}$, proinde $T=\frac{2bb}{5aa+2bb}\times P$.

Corollar. 5. Sit iam mobile graue BFG (fig. 7.) non rotundum, sed ex. gr. triangulum isosceles rectangulum in G, recta perpendicularis ex G in hypotenusam demismissa $= c$. CA radius circuli AHL (qui repraesentat axem, cui filum circumuolutum est, et qui pro centro habet centrum grauitatis trianguli BFG) $= a$: Erit D $= \frac{2cc + 9aa}{9a}$, ideoque T $= \frac{2cc}{2cc + 9aa} \times P$, sumendo hic etiam P pro pondere trianguli. Atque ita in aliis.

Scholion. Haec Corollaria tanquam totidem theoremata non parum curiositatis habent, siquidem facillimum est ea per experientiam confirmare; appendatur ex. gr. praedictum triangulum quod rotando descendere debet ad extremitatem vnius brachii librae et ad alteram eius extremitatem alligetur pondus $= \frac{2cc}{2cc + 9aa} \times P$. Dico enim pondus hoc minus in aequilibrio seruaturum pondus maius trianguli P, quamdiu hoc rotando descendit. Vel etiam hunc in modum institui posset experimentum: sint duae trochleae in centris suis parieti infixae, quas ambiat filum QMNA axi ALH inuolutum, sitque huius axis centrum C in centro grauitatis trianguli isoscelis BFG rectanguli in G, cuius pondus $=$ P; ad alteram fili extremitatem Q appendatur pondus S $= \frac{2cc}{2cc + 9aa} \times P$. Dico pondus S in quiete mansurum, dum triangulum BFG per euolutionem fili rotando descendit.

Dan.

Dan. Bernoulli I. F.

DE MVTVA RELATIONE CENTRI VIRIVM, CENTRI OSCILLATIONIS ET CENTRI GRAVITATIS

Demonſtrationes Geometricae.

I.

M. Nov. 1726.

CVm perlegerem theoremata Paterna ex principio conſeruationis virium viuarum deducta, haud difficulter vidi, omnia illa, quae circa motum corporum rotantium verſantur, pendere a debita centri virium determinatione. Intelligo autem per centrum virium punctum tale, in quo ſi tota maſſa concipiatur vnita, eadem ex motu ipſius oriatur virium viuarum quantitas, quae corpori moto ineſt.

II. *Theorema generale.* Diſtantia centri virium a puncto ſiue axe ſuſpenſionis aequalis eſt mediae proportionali inter diſtantias centri grauitatis et centri oſcillationis ab eodem puncto ſeu axe.

Demonſtratio. Sint duo corpora M et N (Fig. 8.) quorum centrum grauitatis ſit in B: Rotentur corpora circa punctum fixum A; dicatur maſſa corporis M$=$M maſſa alterius corporis $=$N, diſtantia prioris a puncto A$=a$, diſtantia alterius corporis ab eodem puncto $=b$; AB$=$C et erit AD ſeu diſtantia centri oſcillationis a puncto ſuſpenſionis $=\frac{aaM+bbN}{Mc+Nc}$. Sit iam centrum virium in in C, dicatur $AC = x$, concipiaturque corpora ita rotari, vt velocitas centri grauitatis fit $= v$; et erit velocitas corporis $M = \frac{av}{c}$, velocitas corporis $N = \frac{bv}{c}$ et velocitas centri virium $= \frac{xv}{c}$; vis viua autem corporis M erit $\frac{aavvM}{cc}$, vis viua alterius corporis $= \frac{bbvvN}{cc}$, et fi vtrumque corpus haberet maffam fuam concentratam in puncto C effet ipfius vis viua $= \frac{xxvv \times (M+N)}{cc}$; vnde habetur talis aequatio $\frac{aavvM}{cc} + \frac{bbvvN}{cc} = \frac{xxvv \times (M+N)}{cc}$; feu $x = \sqrt{\left(\frac{aaM+bbN}{M+N}\right)} = \sqrt{\left(\frac{aaM+bbN}{Mc+Nc} \times c\right)}$ id eft = radici ex producto diftantiae centri ofcillationis in diftantiam centri grauitatis. Patet porro poffe corpora quotcunque confiderari fiue in eodem plano fiue in planis diuerfis, adeo vt theorema generale fit.

II. *Corollarium.* Si circulus cuius radius $= 1$ ex puncto in peripheria fumto fufpendatur, erit diftantia centri virium a puncto fufpenfionis $= \sqrt{\frac{3}{2}}$. Si iisdem conditionibus peripheria circuli fufpendatur, fiet diftantia illa $= \sqrt{2}$; fi fphaera, fiet $= \sqrt{\frac{7}{5}}$, fi ex alio puncto figurae fiue corpora fufpendantur, aliud habebitur centrum virium; quaeritur autem vbinam fit hoc centrum futurum, fi axis fufpenfionis tranfeat per centrum grauitatis; regula generalis oftendit effe diftantiam centri virium aequalem mediae proportionali inter nihilum et infinitum; ex quo cum nihil cognofci poffit, hic cafus fpecialiter tentandus eft; folutionem illius dabo in fequentibus.

III. *Scholion.* Triangulum AMN confideratur vt rigidum, grauitatis expers et duobus ponderibus M et

N oneratum: his autem positis manifestum est, pondera non aliter moueri, ac si sola virga MN rigida esset, oscillareturq; punctum B circa punctum A, dum interea rotatur motu angulari simili et contrario virga MN circa punctum B: et cum motus angularis similis sit, erit MB ad BA, sicuti velocitas, qua corpus M rotatur circa punctum B ad velocitatem, qua punctum B fertur circa A: data itaque relatione quae est inter velocitates, determinare licebit rationem distantiae corporis a centro grauitatis ad distantiam centri grauitatis a puncto suspensionis.

Lemma. Si corpora M et N circa centrum grauitatis B rotentur velocitate vniformi quacunque, simulque ipsum centrum B feratur alio motu cuiuscunque velocitatis vniformis, dico vim viuam ex toto motu resultantem in omni situ esse eandem et aequalem illi, quae prodit, si vterque motus singulatim consideretur.

Demonstratio. Sint (fig. 9.) duo corpora in M et N, quorum centrum grauitatis est in B, circa quod rotentur, ita vt corpus M describat circulum MGO et corpus N alium concentricum NHS moueaturque simul punctum B secundum directionem lineae BK, quam suppono eandem habere rationem ad BM, quae est inter velocitatem puncti B et velocitatem qua corpus M rotatur circa punctum B, vnde BM et BN repraesentabunt velocitates corporum M et N ratione motus rotatorii et BK exprimet velocitatem puncti B ratione alterius motus; et ipsa corpora M et N exprimentur per lineas BN et BM, quia massae reci-

pro-

proce proportionales ſunt velocitatibus. His ita diſpoſitis, ſint corpora in ſitu M et N quocunque: ſitque GH perpendicularis ad MN; factis parallelogrammis BGLK et BHIK, ductisque diagonalibus BL et BI, patet has ipſas diagonales exprimere poſſe velocitates corporum M et N ex vtroque motu reſultantes; hincque vim viuam corporis M exprimendam eſſe per $BL^2 \times BN$ ſeu $BL^2 \times BH$ et vim viuam alterius corporis per $BI^2 \times BM$ ſeu $BI^2 \times BG$: vnde demonſtrandum reſtat eſſe $BL^2 \times BH + BI^2 \times BG$ conſtantis magnitudinis. Per centrum B ducatur QR perpendicularis ad HI et ad productam GL, ſic erit $BL^2 = BG^2 + BK^2 + 2GR \times BK$, atque $BI^2 = BH^2 + BK^2 - 2HQ \times BK$, vnde $BL^2 \times BH + BI^2 \times BG = (BG^2 \times BH + BK^2 \times BH + 2GR \times BK \times BH) + (BH^2 \times BG + BK^2 \times BG - 2HQ \times BK \times BG)$. Sunt autem in quantitatibus parentheſibus incluſis duo vltimi termini aequales, quia $GR \times BH = HQ \times BG$; eſt itaque ſumma virium viuarum ex motu compoſito oriunda $= (BG^2 + BK^2) \times BH + (BH^2 + BK^2) \times BG$; et conſequenter in omni ſitu eadem; quod erat primo loco demonſtrandum. Nunc ſi vterque motus ſingulatim conſideretur, habetur vis viua motus rotatorii pro corpore $M = BG^2 \times BH$ et pro corpore $N = BH^2 \times BG$ et denique vis viua alterius motus $= BK^2 \times (BH + BG)$, ergo ſumma virium viuarum ex vtroque motu ſed non compoſito oriunda $= BG^2 \times BH + BH^2 \times BG + BK^2 \times (BH + BG) = (BG^2 + BK^2) \times BH + (BH^2 + BK^2) \times BG$, ergo eadem quae ante: quod erat ſecundo loco demonſtrandum.

 V. Co-

V. *Corollarium.* Sequitur ex hoc lemmate et ex ſcholio §. 3. poſſe corpora M et N conſiderari tanquam oſcillantia circa punctum K ita vt angulus KBN conſtans ſit: vnde ſi ponatur corporum ita oſcillantium centrum oſcillationis eſſe in U, erit T (facta KT media proportionali inter KB et KU) centrum virium, et proinde tanta erit ſumma virium viuarum, quanta foret, ſi ambo corpora eſſent in puncto T concentrata oſcillarenturque circa punctum K velocitate tali, vt punctum B priſtinam ſuam velocitatem conſeruet.

VI. *Problema.* Determinare centrum virium in corporibus circa centrum grauitatis rotatis.

Solutio. Sint corpora in M et N rotata circa centrum grauitatis B: Concipiatur centro grauitatis alium motum imprimi, cuius velocitas ſit ad velocitatem, qua corpus M rotatur ſicuti BK ad BM: ergo (per praeced. lemma et coroll.) erit vis viua totius motus eadem ac ſi corpora concentrata in T mouerentur circa punctum K velocitate quae eſt vt KT; ergo vis viua totius motus erit vt KT^2 ſeu vt $KB \times KU$, a qua ſi auferatur vis viua (quae orta fuit ex motu concepto, quaſi impreſſus fuiſſet puncto B, quaeque eſt vt KB^2) remanet vis viua corporum rotatorum, quae proin erit vt $KB \times KU - KB^2 = KB \times BU$: ergo velocitas centri virium debet eſſe vt $\sqrt{KB \times BU}$; adeoque diſtantia centri virium a centro ſuſpenſionis ſeu centro grauitatis erit $= \sqrt{KB \times BU}$. Vnde talis oritur regula; aſſumatur arbitraria quaecunque KB, conſidereturque punctum K vt punctum ſuſpenſionis

ſionis, erit media proportionalis inter aſſumtam et diſtantiam centri oſcillationis a centro grauitatis aequalis diſtantiae centri virium a centro grauitatis. Q. E. F.

VII. *Scholion.* Patet iterum demonſtrationem procedere, quotcunque fuerint maſſae M, N, ſiue ſint in eodem plano et ſuperficiem efforment, ſiue in diuerſis planis et corpus conſtituant; ſi itaque circulus e centro ſuo ſuſpendatur, erit diſtantia centri virium a centro, poſita vnitate pro radio $= \sqrt{\frac{1}{2}}$; ſi peripheria circuli, ſit $= 1$, et ſi ſphaera ſumatur, ſit $= \sqrt{\frac{2}{5}}$.

VIII. *Coroll.* 1. Cum KB ſit arbitraria, et tamen quantitas haec $\sqrt{KB \times BU}$ vel etiam eiusdem quadratum $KB \times BU$ ſit conſtans, ſtatim apparet propoſitio quam Cel. Hugenius horologio ſuo oſcill. inſeruit p. 125. prop. 19. his verbis: „ Si magnitudo eadem nunc breuius nunc lon-„ gius ſuſpenſa agitetur; erunt, ſicut diſtantiae axium oſ-„ cillationis a centro grauitatis inter ſe, ita contraria ra-„ tione diſtantiae centrorum oſcillationis ab eodem gra-„ uitatis centro. Eadem facilitate ex theoria noſtra deducitur eiusdem propoſitio 16. p. 119. quae talis eſt „figura quaeuis ſiue linea fuerit, ſiue ſuperficies, ſiue ſo-„ lidum; ſi aliter atque aliter ſuſpendatur agiteturque„ ſuper axibus inter ſe parallelis, quique a centro graui-„ tatis figurae aequaliter diſtent, ſibi ipſi iſochronae eſt „ Cum enim in hac propoſitione poſtuletur, vt KB ſit conſtantis magnitudinis, erit quoque BU conſtans et conſeqnenter etiam KB+BU. Sequitur quoque hinc theorema non inelegans, quod in ſequenti propoſitione complectar.

IX. *Theorema.* Corpus quodcunque ſi e centro virium §. 6. determinato ſuſpenſum agitetur brachiſtochronum eſt, id eſt, oſcillationes facit minoris durationis, quam ſi ex quocunque alio puncto ſuſpendatur; et erit tunc ſemper diſtantia centri oſcillationis a centro grauitatis aequalis diſtantiae centri grauitatis ab axe ſuſpenſionis.

Demonſtratio. Sit punctum A (fig. 8.) punctum ſuſpenſionis; B centrum grauitatis; D centrum oſcillationis; ſit $AB = x$, $BD = y$; et erit longitudo penduli iſochroni $x + y$, quae cum ſit minima, erit $dx = -dy$; ſed xy eſt $=$ conſtanti (per §. 8.) ergo $xdy = ydx$, quae duae aequationes combinatae dant $x = y$; vnde iam patet ſecunda pars propoſitionis. Porro centri virium §. 6. definiti diſtantia a centro ſuſpenſionis eſt $= \sqrt{xy} = x$; ergo AB debet eidem diſtantiae eſſe aequalis; vnde iam quoque prior pars propoſitionis manifeſta eſt. Q. E. D.

X. Quae hactenus dicta ſunt, inſeruient ad recte intelligendum motum corporum, quorum partes ſitum parallelum non ſeruant; ſic motus pendulorum, corporum gyratorum, rotando progredientium etc. inde deduci poteſt et ſaepe aliter fere non poteſt.

XI. Placet hic adiicere theorema ſimile illi, quod inter theoremata Patris octauum eſt, et in cuius gratiam problema §. 6. praemiſi, ope cuius facile demonſtratur; ſit graue aliquod cuiuscunque figurae (fig 10.) CBA, cuius centrum grauitatis ſit in D, ex quo et radio DM deſcriptus intelligatur circulus MNP, cui filum circumuolutum eſt PMNPMN etc. cuius fili extremitati appenſum ſit pondus

Q

Q, quod descensu suo graue CBA in gyrum agit circa centrum grauitatis D, dico velocitatem corporis Q sequentem in modum determinare posse. Sit $MD = a$; consideretur corpus suspensum ex puncto M oscillari, esseque centrum oscillationis in O, sitque $DO = b$; pondus grauis totius $CBA = P$; pondus corporis appensi $= p$, altitudo ex qua corpus Q delapsum est $= R$; altitudo quaesita per quam graue aliquod libere cadendo acquirere possit velocitatem corporis $Q = z$; dico fore $z = \frac{apR}{ap + bP}$ et si tempus quo corpus naturaliter cadit per altitudinem R dicatur t, erit tempus insumtum a corpore $Q = t \frac{\sqrt{ap + bP}}{\sqrt{ap}}$, id quod experientiae conforme esse plurimis institutis experimentis semper inueni.

XII. *Scholium.* Liquet ex determinatione praecedente velocitatis corporis Q, haud secus illud descendere dum corpus ABC circumagit, ac si libere caderet in fluido cuius grauitas specifica esset ad grauitatem specificam ponderis Q ut bP ad $ap + bP$. Sed manifestum est, tantum tendi filum NQ inter descensum corporis Q, quantum hoc corpus sustinetur a fluido si in fluido moueri ponatur: est autem vis, qua sustinetur a fluido, $= \frac{bPp}{ap + bP}$, ergo et tensio fili $= \frac{bPp}{ap + bP}$: si $a = 0$, fit illa tensio $= p$. Eodem modo inuenitur tensio fili EA (fig 5.) in theoremate 8. Patris pag. 203. (vocando P pondus corporis rotati BTG et retinendo

cae-

caeteras denominationes a Patre adhibitas) $= \frac{D-a}{D} \times P$. Idem quoque et quidem directe, inuenit Pater, vti postmodum ex ipsius litteris ad me datis intellexi. vid. pag. 206.

DE LINEIS CVRVIS, QVAE EVOLVTAE IPSAE SE GENERANT

Auctore G. W. Krafft.

M. Dec. 1727.

CVruae, quae euolutae ipsae se generant, non vno die in lucem protractae sunt; sed originem suam diuerso tempori et diuersorum sagacitati debent quaelibet tamen earum Nobilem Inuentorem nacta est. Prima quidem Cyclois vulgaris a Chr. Hugenio talis deprehensa fuit, a qua deinde mox non exigua vtilitas ad temporis momenta accuratius distinguenda permanauit. Cum vero dubitaretur pluresne vna possibiles sint huius indolis, nec ne: non longe post Tschirnhusius Causticis fortasse suis probe intentus secundam inuenit, Causticam nempe semicirculi quae Epicyclois est, quam protulit deinde in Actis Lips. 1682. M. Nouembri. Tertia denique Logarithmica Spiralis, Iacobo Bernoullio ob mirabilis huius proprietatis inuentionem insignis laetitiae argumentum praebuit, vti apparet ex iisdem Actis 1692 M. Maio. Cum vero non meminerim, vllibi publice exstare talem methodum

dum, quae Problema hoc, difficile tamen Leibnitio dictum in Commercio Epist. p. 92, ita excutiat, vt per eam singulae supra dictarum eruantur, probeturque plures in postetum inueniri non posse; quanquam priuatim praeclaros huius rei modos cognitos esse non dubitem; quorum vnum, a sequenti quidem diuersum, apud Celeberr. Iac. Hermannum videre licuit, Quem non sine grata recordatione auctae scientiae qualiscunque meae nomino; existimaui non abs re futurum esse, si, quid in hoc Problemate non plane iniucundo proficere mihi contigerit, hic commemorem.

Problema I. Inuenire curuam AFB Fig. I. eius naturae, vt I. Flexum contrarium non habeat; 2. Si ducatur radius osculi quilibet DE, capiaturque a termino quodam fixo B arcus BF in ratione quacunque data ad hunc radium DE, demittantur deinde ex punctis F et D perpendiculares DC, FI, ad rectam GH quamcunque, positione datam: Anguli CDM, ILF, aut anguli CDM, IFL, comprehensi radiis osculi DE, FK, atque rectis DC, IL, FI, semper habeant differentiam datam.

Resolutio. Quoniam duplex casus Problemate continetur, sit I. angulorum CDM et ILF differentia constans, quaeritur natura curuae AFB. Ponantur in hunc finem radii dE, fK, prioribus infinite propinqui, cum suis perpendicularibus dc, fi, voceturque radius DE, r, alter vero FK, R; et ratio data sit $a:b$. Erit itaque, DE (r): BF $= a:b$, hoc est, BF $= \frac{br}{a}$, et F$f = \frac{bdr}{a}$. Cum vero radius FK eandem naturam habere debeat, quam habet alter DE; erit quoque FK (R) : BD $= a : b$, vnde BD $= \frac{bR}{a}$ et D$d = -\frac{bdR}{a}$, vbi ſignum priuatiuum ponitur, quia creſcente arcu BF, alter BD decreſcit. Quoniam porro differentia angulorum u et x conſtans eſſe debet, erit $u-x =$ angulo conſtanti, adeoque $du-dx=o$ et $du=dx$, hoc eſt, incrementa aut decrementa angulorum in ſitu infinite propinquo, ſunt aequalia; quapropter ob angulum externum $x=y+E$, erit $x-y=E$; et pariter, ob $u=t+K$, $u-t=K$, hoc eſt, incrementa angulorum CDM et ILF ſunt anguli ad E et K, qui ob aequalitatem ſuam efficiunt ſectores EDd, KFf ſimiles, quapropter erit DE (r): D$d(-\frac{bdR}{a})$ = FK(R) : F$f(\frac{bdr}{a})$ hoc eſt $-RdR = rdr$, et Integrando habebitur $C^2-R^2=r^2$, adiecta conſtanti C ne Problema ob $\sqrt{-R^2}=r$ imaginarium fiat, vnde emergit $\sqrt{CC-RR}=r$, et $\frac{br}{a}=$ BF $=\frac{b\sqrt{CC-RR}}{a}$. Ob vtrumque autem radium oſculi ſemper eodem ſigno affirmatiuo acceptum, verſus eandem partem illi ſemper reſpicient, adeoque curua flexum contrarium non admittet.

2. Sit iam angulorum CDM et IFL differentia conſtans, quaeritur natura curuae AFB. Manifeſtum eſt, quod rurſus vt ante, ob $n=m+K$, ſit $n-m=K$, adeoque ob decrementa angulorum CDM et IFL in ſitu infinite propinquo, aequalia, iterum ſectores EDd, KFf ſimiles habentur. Oritur itaq; denuo, DE(r): D$d(-\frac{bdR}{a})$, = FK(R): F$f(\frac{bdr}{a})$, atque $-RdR=rdr$, vel integrando $\sqrt{CC-RR}=r$ et

et $\frac{br}{a}$ = BF = $\frac{b\sqrt{CC-RR}}{a}$. Cum igitur in vtroque casu idem valor arcus BF emergat, patet vnam eandemque curuam vtrique casui satisfacere.

Corollarium 1. Vt vero construatur arcus inuentus BF, ponatur constans $C = \frac{\overline{2a+k} \times k}{b}$, in quo valore noua constans indeterminata k assumitur; et radius osculi $R = \frac{\overline{2a+k} \times u}{b}$, cui valori iam noua variabilis u inest, habebitur $BF = \frac{\overline{2a+k} . \sqrt{(k^2 - u^2)}}{a}$, quem dico esse arcum Epicycloidis Fig. 2. in qua radius circuli immobilis $OB = a$, diameter circuli mobilis $AB = k$. Sit enim chorda quaeuis $BE = u$, radio OE, centro O, descriptus arcus circuli EM, et MC conueniens radius osculi: Erit ex natura Epicycloidis (§. 101. Analys. Infinitor.) arcus AM ad chordam AE ($\sqrt{kk-uu}$), vti est summa diametrorum $2a+k$ ad radium baseos OB (a), itaque $AM = \frac{\overline{2a+k} \times \sqrt{(k^2 - u^2)}}{a} = BF$. Fig. 1. Ob assumtum vero $R = \frac{\overline{2a+k} \times u}{b}$, elicitur $b = \frac{\overline{2a+k} \times u}{R}$; in Epicycloide autem est, OA : OB = MG : GC, ergo inuertendo et componendo OB + OA : OA = GC + MG : MG hoc est: $2a+k$: OA = R : MG (u), ob MG = EB, per §. 100. l. c. n. 3. ergo $OA = \frac{\overline{2a+k} \times u}{R} = b$. Vnde patet, rationem datam problematis $a : b$, esse ipsius OB ad OA.

Corollarium 2. Quodsi ratio data $a : b$ sit aequalitatis, habebitur $BF = \sqrt{CC-RR}$, et si statuatur $C = 2e$, $R = 2u$, erit $BF = 2\sqrt{ee-uu}$, qui est arcus Cycloidis or-

 dina-

dinariae, in qua diameter circuli mobilis $= e$. Sit enim Fig. 3. Cyclois BDE, atque in ea $AB = e$, chorda quaelibet $AC = u$, erit arcus $BD =$ duplo chordae $BC = 2\sqrt{(e^2 - u^2)} = BF$. Fig. 1. Sunt igitur curuarum quaesitarum duae, nempe Epicyclois, ſub quauis proportione circuli mobilis ad immobilem, et Cyclois ordinaria; quarum vtrique vterque Problematis caſus reſpondet. Q. E. I. Cum vero hae proprietates vtriusque Cycloidis animaduerſae hactenus fortaſſe non ſint: ex ipſa harum curuarum natura eas adhuc deducere conabor.

Theorema 1. Sit Fig. 4. Cyclois ordinaria BFMA, ducatur in ea radius oſculi quicunque MC, capiaturque huic aequalis arcus BF, et ducantur applicatae MP, FI, ad axem AD perpendiculares, cum normali ad curuam FG: Erunt triangula PMH, IFG, ſimilia, ita vt angulus IFG aequalis angulo PHM.

Demonſtratio. Ad diametrum circuli generatoris BD ducantur perpendiculares FR et MS, quae ſecabunt circulum in T et V. Sint igitur chordae per puncta interſectionum ductae BT, BV, TD, VD; atque erit per naturam Cycloidis radius oſculi $MC = 2$ chordae VD, et arcus $BF = 2$ chordae BT, hinc ob $BF = MC$ per hyp. erit $2VD = 2BT$, hoc eſt, chordae VD, BT erunt aequales, vnde triangula DTB et DVB ſimilia et aequalia ſunt. Ob parallelas autem FG et TD, MH et VD, per naturam Cycloidis, triangula IFG et DTB, PMH et DVB ſunt ſimilia; igitur etiam ipſa PMH et IFG triangula ita ſunt ſimilia, vt angulus $PHM = GDV = VBD = TDB = IFG$. Q. E. D.

Co-

Corollarium. Sit iam recta YD positione data, sub angulo quocunque ADY cum axe AD; prolongentur normales ad curuam in E et N, et demittantur perpendiculares MK, FL. Erit $d-a=e$, et per Theor. 1. $f+g=e$, hinc $d-a=f+g$, et $d-a-f=g$. porro $b+g=c+d$, et $b-c=d-g=d-d+a+f=a+f$. Ob triangula autem FIO, OLD similia, est $f=$ angulo constanti a, hinc $b-c=2a$, hoc est, differentia angulorum b et c subcontrarie positorum est constans. Est autem porro $b=90-g$, ergo ob $b-c=2a$, erit $90-g-c=2a$, et $-g-c=2a-90$ vbi angulus g signum priuatiuum accipit, quia in alteram partem radii FG cadit; igitur differentia quoque angulorum g et c directe positorum est constans. Quamobrem manifestum est, quod in Cycloide ordinaria semper duci possit recta aliqua YD, in quam demissae perpendiculares MK, FL, efficiant modo aequalitatem, modo differentiam constantem, angulorum subcontrarie aeque ac directe positorum, sicut calculi effatum id iubet.

Theorema 2. Sit iam Epicyclois AmMD genita ex reuolutione circuli mobilis AeEB supra immobilem BGDd, cum radio osculi MC producto in L, atque arcu Am ad radium osculi MC in ratione constanti ipsius OB ad OA. Sit deinde puncti m normalis mN, et applicata mp, nec non puncti M applicata MP: Dico, differentiam angulorum pmN et PML esse in quolibet Epicycloidis puncto constantem, nempe aequalem angulo dOD; si scilicet BDd sit circuli quadrans.

Demonstratio. 1. Centro O, radiis OM, Om de-

 scri-

scribantur arcus circulares ME, me, et ducantur chordae BE, Ae, cum radiis KE, Ke, vocenturque OB, b KA, a: Atque erit per naturam Epicycloidis MG : GC $= 2a + b : b$, et GC $= \frac{b}{2a+b}$ MG, $= \frac{b}{2a+b}$ BE, ob BE $=$ MG, igitur MC $=$ MG $+$ GC $=$ BE $+$ GC $= \frac{2a+2b}{2a+b}$ BE. Per hypothesin est MC : Am $=$ OB : OA $= b : 2a+b$, ergo erit Am $= \frac{2a+b}{b}$ MC $= \frac{2a+2b}{b}$ BE. porro per naturam curuae habetur Am : Ae $= 2a + 2b : b$, vnde Am $= \frac{2a+2b}{b}$ Ae. Erit itaque $\frac{2a+2b}{b}$ BE $= \frac{2a+2b}{b}$ Ae, hoc est, chordae BE et Ae erunt aequales.

2. E centro circuli mobilis R ducatur in contactum G recta RG, atque e centro F in contactum H recta FH, quae productae concurrent in centro O. Et quoniam arcus circulares sunt in ratione composita angulorum et radiorum; erit Hn : HB $=$ HF$n \times a$: HOB $\times b$, inde ob Hn $=$ HB deducitur HOB $= \frac{a}{b}$ HFn.

3. Est itaque angulus mNP $=$ HOB $+$ OHN $=$ HOB $+$ mHF $=$ HOB $+ \frac{1}{2}$HFn $= \frac{a}{b}$HF$n + \frac{1}{2}$HFn $= \frac{2a+b}{2b}$HFn. Quoniam autem chordae mH, eB aequales sunt, ex natura Epicycloidis, erit quoque Hn $=$ Ae $=$ EB. dem. n. 1. et HFn $=$ EKB; igitur mNp $= \frac{2a+b}{2b}$ HFn $= \frac{2a+b}{2b}$EKB, atque ob rectum in p, angulus pmN $= 90 - m$Np $= 90 - \frac{2a+b}{2b}$ EKB.

4 Pari modo angulus PML $=$ MGR $-$ MQG $=$ EBK $-$ MQG $=$ EBK $- d$OG $=$ EBK $-$ DOG $- d$OD; sed ob

ob arcum $MG = DG$, angulus $DOG = \frac{a}{b} MRG = \frac{a}{b} EKB$; Ergo $PML = EBK - \frac{a}{b} EKB - dOD = EBK + \frac{b}{2b} EKB - \frac{b}{2b} EKB - \frac{a}{b} EKB - dOD = EBK + \frac{1}{2} EKB - \frac{2a+b}{2b} EKB - dOD = 90^\circ - \frac{2a+b}{2b} EKB - dOD$.

5. Ergo tandem elicitur $pmN - PML = 90 - \frac{2a+b}{2b} EKB - 90 + \frac{2a+b}{2b} EKB + dOD$; hoc eſt, $pmN - PML =$ angulo conſtanti dOD. Q. E. D.

Corollarium 1. Quoniam $DB : BEA = DOB \times b : 180 \times a$; erit ob $DB = BEA$, $DOB = \frac{a}{b} 180$; et angulus $DOd = 90 - DOB = 90 - \frac{a}{b} 180$. Sit iam differentia data angulorum nulla, vt triangula pmN, PML fiant ſimilia, erit $90 = \frac{a}{b} 180$, aut $b = 2a$ hoc eſt, $OB = BA$, qui eſt caſus ſimpliciſſimus, vbi nempe Epicycloïs terminatur in fine quadrantis d.

Corollarium 2. Poterit vero in qualibet Epicycloide obtineri, vt ſub iisdem conditionibus Theorematis, anguli intra radios oſculi et perpendiculares ad rectam aliquam poſitione datam demiſſas, ſint aequales, conſequenter triangula illorum angulorum ſimilia. Ducatur enim Fig. 6. recta AN, ſub quouis angulo NAO, atque ad eam perpendiculares demittantur MS, mQ, erit per Theorema 2, $e + f - c = k$, et ob triangula MSR, RAP ſimilia, $b = f = d$. igitur $e - c = k - b$, et $e - c - d =$ angulo conſtanti $k - 2b$. Itaque ſi ponatur $b = \frac{1}{2} k$, erit $e - c - d = 0$, et $e = c + d$.

Por-

Porro habetur $e = 90 - x$, itaque ob $e - c - d = k - 2b$, erit $90 - x - c - d = k - 2b$, et $-x - c - d = k - 2b - 90$. Vbi x iterum ſignó priuatiuo afficitur, quia in alterum latus radii oſculi cadit. Adeoque apparet, quod etiam inEpicycloide quauis ſemper duci poſſit recta aliqua AN, in quam demiſſae perpendiculares MS, mQ efficiant modo aequalitatem, modo differentiam conſtantem, angulorum ſubcontrarie aeque ac directe poſitorum.

Theorema 3. Sit Fig. 7. curua AFB talis, vt 1. flexum contrarium non habeat; 2. ducto pro lubitu radio oſculi DE, ſumptoque arcu BF a puncto quodam fixo B in ratione quacunque conſtanti ad radium DE triangula DGP, FHI, comprehenſa normalibus ad curuam FI, DP, atque perpendicularibus FH, DG, ad rectam SC poſitione datam, ſint ſimilia: dico, curuam hanc generari euolutione alterius ſimilis ipſi curuae AFB, ſed ſitu inuerſo poſitae. Et ſi curua AFB euolutam ſibi ſimilem habeat ſitu inuerſo poſitam: habere ipſam quoque praedictam proprietatem.

Demonſtratio. Quoniam enim curua AFB flexum contrarium non habet, adeoque verſus eandem partem concaua eſt: admittet euolutam, quae conuexitatem continuo obuertat puncto C, et quae, vti prior, concauitatem habeat continuam. Cum autem nulla pars curuae libera ſit a proprietate aſſignata: opus eſt, vt radius oſculi ab initio in A nullus ſit, conſequenter euoluta ipſius AFB principium ſuum capiat ab A. Sit igitur haec euoluta AEK, tacta a radio oſculi in E. Ducatur KL ipſi SC parallela, ſitque normalis EN, atque ad rectam

KL

KL demissa perpendicularis EM, producta in *h*. Et erit ob rectum DEN, angulus $u=y=z$, adeoque triangula DGP et ENM similia. Sed per hyp. triangulum DGP simile est ipsi HFI, igitur HFI et ENM triangula sunt similia; vtrique autem horum simile est triangulum curuae infinite paruum *f*FQ et E*e*R, ergo et haec similia sunt. Denique ob DE=AE, arcus AE, BF, sunt in ratione constanti, per hyp. ergo etiam hypothenusae triangulorum F*f* et E*e* in eadem ratione sunt. Idem demonstrari potest de triangulo infinite paruo proxime sequenti vtriusque curuae, nec non de reliquis omnibus, continua serie procedentibus. Constabit ergo vtraque harum curuarum ex hypothenusis constanti ratione sese respicientibus, triangulorum respectiue similium, et continua serie progredientium; igitur curuae erunt similes, ita, vt pars euolutae A, respondeat parti genitae B, hoc est, habebunt situm inuersum. Quod erat primum.

Sit iam euoluta AEK similis genitae AFB, sed situ inuerso posita: Erit itaque arcuum aliquis a B computatorum similis arcui AE. Sit ille arcus BF; erit itaque triangulum HFI simile ipsi ENM. Sed huic simile est triangulum GDP, per independenter ab his demonstr. et arcus AE=radio DE; igitur triangula HFI, et GDP sunt similia, sub hac conditione, vt radius DE (=arcui AE) sit in ratione eadem ad arcum BF, in qua est arcus AE ad similem arcum eundem BF, hoc est, in ratione constanti. Q.E.D.

Corollarium. Cum igitur per Problema 1. proprietas haec, ad curuas, quae euolutae ipſae ſe inuerſo ſitu generant, requiſita, nullis competat, niſi Cycloidi ordinariae, et Epicycloidi: patet, has ſolas eſſe, quae euolutas ſuas habeant ſibi ſimiles, aut aequales, ſitu inuerſo poſitas, nec praeter has dari poſſe alias.

Problema 2. Inuenire curuam, quae euoluta ipſa ſe generet, ita quidem, vt immediate arcus geniti et euoluti ſemper ſint aequales, aut ſimiles.

Reſolutio. Sit Fig. 8. curua AGB talis, vt genitam ſuam AC habeat aequalem et ſimilem. Quoniam curuae AC axis AD perpendicularis eſſe debet ad elementum primum curuae ex euolutione genitae AC, elementum autem hocce primum coincidit cum elemento rectae AM, euidens eſt, axem AD etiam ad rectam MAP hoc eſt ad axem euolutae perpendicularem eſſe debere. Conſtituant igitur axes AD, AE, angulum DAE rectum; et ducatur radius oſculi FG; congruet igitur arcus genitus AF aut ipſi AG, aut cadet ſupra G in H, aut infra G in I. Cadat primo in H, ita vt arcus aequales et ſimiles ſint AF et AH, ſitque in H radius oſculi HK, contingens euolutam curuae AB, quae eadem erit cum vtraque priorum, in K; producantur KH in L, GF in M, et ſint applicatae GN, KO. Quoniam igitur AF = AH, in curuis iisdem; erit puncti F radius oſculi aequalis radio oſculi in H, adeoque FG = HK; eſt autem FG = arcui AG, AG, et HK = arcui AK, ergo arcus AG et AK ſunt aequales et ſimiles, vnde angulus OLK = NMG. Triangula ALP et MPQ habent angulum MPQ communem, et angulus M = L per demonſtr. ergo tertius tertio aequalis, hoc eſt, ob rectum in A, per hyp. erit etiam ad Q vtrinque rectus. Ducatur puncti H tangens HR, ſecabit ea radium FG alicubi, ex. gr. in S; quia, niſi curua AIB habeat alicubi flexum contrarium, quem vero caſum excludo, elementum curuae in H cum nullo alio parallelum eſſe poteſt. Verum ita angulus KHR, et conſequenter LHR erit rectus; ergo in triangulo HSQ ſunt duo recti ad baſin HQ, quod eſt abſurdum. Idem facile euincitur, in caſu ſecundo, ſi arcus AF congruat arcui AI: Ergo neuter horum caſuum eſt poſſibilis.

Congruat ergo arcus genitus AF ipſi euoluto AG, Fig. 9. et ducantur rectae AF, AG, quae aequales erunt. Ducantur quoque applicatae GC, FB, ad axes homologos AR, AD; erunt etiam hae aequales, nec non abſciſſae AC, AB; itaque habentur triangula AFB, AGC aequalia et ſimilia, vnde angulus $a = b$, et $a + c = b + c$. Eſt autem $b + c$ rectus per demonſtr., ergo etiam $a + c$ rectus eſt, atque ob AF = AG, angulus AFG ſemirectus. Sit iam puncti F tangens FE erit etiam EFA ſemirectus in omnibus curuae punctis. Curua igitur AF talis eſt, vt ex eius puncto quouis F, ducta tangens FE, cum recta alia FA ducta in punctum fixum A, faciat angulum conſtanter ſemirectum, quae nulla alia eſt, quam Logarithmica ſpiralis; igitur ea ipſa eſt curua quaeſita. Q. E. I.

Corollarium 1. Quodſi deſiderentur arcus ſimiles ſolum, eadem curua proueniet. Sit enim arcus AF ſimilis arcui AG; erit triangulum AFB adhuc ſimile ipſi ACG, et angulus FAG iterum rectus; producatur GA, vsque dum occurrat tangenti in E: erit ob EFG et EAF rectos, EA : AF = AF : AG = AB : AC. Sed AB : AC ratio conſtans eſt, quia ſunt abſciſſae arcuum ſimilium; igitur etiam EA ad AF in ratione eadem conſtanti, et angulus EFA iterum conſtans eſt, quae generalis eſt proprietas Logarithmicae ſpiralis.

Corollarium 2. Sit autem Fig. 10. arcus AF ſimilis et aequalis ipſi AG, directe ſumpto, axes homologi vero AD, BE ſint paralleli, et aſſumantur alii duo arcus aequales et ſimiles AK, AL, euidens eſt, ita, creſcentibus applicatis HF, KM, homologas alteras GI, LN decreſcere, quod ſimilitudini curuarum omnino repugnat, adeoque caſum praeſentem excludit.

Theo-

Theorema 4. Curuae, quae euolutae ipſae ſe generant, ſunt 1. Epicycloides omnes, ſub quauis proportione circuli mobilis ad immobilem. 2. Cycloides ordinariae. 3. Logarithmicae ſpirales omnes, ſub quocunque angulo tangentis et rectae ad punctum fixum ductae; neque praeter has dantur aliae.

Demonſtratio. Linea curua, quae euoluta ſimilem aliam generat, poſita erit ad integram hanc genitam in ſitu vel inuerſo vel directo. Ad ſitum inuerſum requiritur per Theor. 3. vt ducto radio osculi quocunque, et capto a conſtanti quodam puncto eiusdem curuae arcu in data ratione ad hunc radium, triangula comprehenſa radio oſculi primum, deinde ab altero extremo arcus inuenti, ducto, atque perpendicularibus ex vtroque horum punctorum curuae, ad rectam poſitione datam, demiſſis, ſint ſimilia: Sed per Probl. 1. nullae aliae huius naturae inueniuntur curuae, quam Epicycloides, ſub quauis proportione circuli mobilis ad immobilem, Cor. 1. et 2. Probl. 1. et Cycloides ordinariae Cor. 2. Probl. 1. Igitur hae duae ſolae ſunt, quae ſitu inuerſo ſuas genitas referunt. Ad ſitum vero directum requiritur, vt axes homologi ſint inter ſe normales; nam axes paralleli deducunt ad abſurda per Probl. 2. Coroll. 2. Si vero axes homologi normales ſint, requiritur neceſſario cur-

 ua,

ua, cuius tangens cum recta in punctum fixum ducta faciat angulum constantem, per Probl. 2. quae sunt Logarithmicae spirales. Itaque hae enumeratae solae, euolutae generant sibi similes, nec praeter has dantur aliae. Q. E. D.

Corollarium. Ex praecedentibus manifestum quoque est, quod Cyclois ordinaria; et Logarithmica spiralis, cuius angulus constans est semirectus, generent euolutae alias non modo similes, sed etiam aequales; Epicycloides vero omnes, et Logarithmicae spirales, quarum angulus constans est maior aut minor semirecto, referant tantum genitas sibi similes.

CLAS-

CLASSIS SECVNDA

Continens

PHYSICA.

DE TVBVLIS CAPILLARIBVS
Dissertatio Experimentalis
Prima
Georgii Bernhardi Bülffingeri.

I.

ACcidit aliquando, vt visa naturae obscuriora, cum earundem genesis requiritur, *ad phaenomena tubulorum capillarium* reducantur. Sic vsu venit, cum indicari caussa debet, quae in spongia aquam attollit, quae in pannorum laciniis, in terra sicca et porosa, in pane varii generis, in vasis arena plenis; in plantis quoque, et in ipsis montium interioribus. Ipsa *MM. Febr. et Aug. 1726.*

autem aquae in fiſtulis gracilioribus vltra libellam eleuatio variis vtique modis explicari vulgo ſolet.

II. Non admodum diu eſt, quod eruditis innotuit, *exceptionem* dari pro tubulis gracilibus a recepta alioquin hydroſtaticae regula, quae poſtulat, vt fluida in tubis communicantibus eleuentur ad altitudinem grauitati ſpecificae reciprocam. Cum *Paſcalius* ſuperiori ſeculo de liquorum aequilibrio commentaretur, nondum id experimenti cognitum erat publice. Teſtatur id opuſculorum Paſcalii poſtumorum Editor, Monito I. poſt praefationem; idemque primae obſeruationis gloriam Galliae ſuae, inuentorum phyſicorum feraci, vindicat; adſtipulante, qui primam phaenomeni notitiam Angliae intuliſſe creditur *Rob. Boylio*; repugnante autem, qui Florentiam experimenti patriam nominat, *Honorato Fabri* apud *Sturmium* in Coll. Curioſ. P. I. Auctar. ad Tent. VIII p. 77-78.

III. Vix innotuit elegans phaenomenon, cum *varie* illud a variis exponeretur. Non poſſumus ire per omnia: placet tamen ita rem perſequi, vt intelligatur, quomodo *a rudioribus initiis* ſubinde *magis* magisque *excultae* ſint facti huius explicationes. Nam primi fere in generalibus ſubſtiterunt: et ſucceſſores eorum, quae primos incommoda preſſerunt, nouis ſemper aut reſtrictionibus aut ſupplementis conati ſunt euitare. Praecipue illud attendi meretur, menſurarum apud anteriores mentionem eſſe rariſſimam; apud recentiores ſcriptores perpetuam. Quodnam vtriusque methodi momentum ſit, id vero ex ſequentibus patebit.

IV.

IV. *Phaenomena* tubulorum capillarium *generalia* haec fere recenset *Sturmius* in Colleg. Curios. P. I. Tent. VIII. p. 44. 45.

1. Obseruatum est, in canaliculis vitreis angustioribus, e. gr. cauitate sua pisi aut lenticulae magnitudinem, plus minus, adaequantibus, cum aperti vtrinque in aquam aliquousque demitterentur; hanc, siue calida esset, siue frigida, *supra reliquae aquae*, canaliculum extra ambientis, *superficiem* notabiliter eleuari; et quidem, *Phaen.* 1.

2. Quo *arctior* esset canaliculus, eo altius. Confer AB, CD, EF. fig. 1. 2.

Quo *altius emineret* tubulus super aquae superficiem, eo altius in ipso ascendere aquam, ceteris paribus contendit vir doctissimus, vid. Tubulos GH et IK. fig. 1. Sed *fallitur*; forte, quod id ita futurum ratus ex hypothesi sua, non satis solicite attenderit facto naturae; forte etiam, quod inaequalis tubi amplitudo, vel superficiei internae humectatio ex accidenti diuersitatem fecerint in eleuatione aquae. Certum enim est, repetitis solicite experimentis:

3. Si tubulus fuerit longior GH, fig. 1. idemque mersus vsque in G. Si altitudo eleuationis fuerit GO, *eandem* illam fore, ceteris manentibus paribus, postquam pars HX a tubulo illo separata fuerit, et tubulus in G vsque sub aquam immersus. Cessant vero hic suspiciones de circumstantiis negotio alienis: estque haec naturae conuenientior correctio, quam illa ipsius Sturmii in Auctario p. 79. qua differentiam eleuationis in natura minus, quam in schematismo suo; imo vix ac ne vix qui- 3.

dem ſenſibilem eſſe confitetur. Pergit autem Vir Clariſſ. memorans, l. c.

Phaen. 4. 4. Aſſumto licet breuiore tubo ML, et eousque immerſo, vt pars eminens LM minor eſſet ſegmentis aliorum longiorum et aeque amplorum, ab aqua supereminente IN vel GO occupatis: non tamen aſcendere aquam vltra canaliculi labia, *nec effluere.*

5. 5. Canaliculum *humectatum* prius, *altius* admittere aquam in cauitate ſua aſcendentem, quam id fiat ab exſiccato.

6. 6 Si canaliculus *digito* ſuperne *tegatur* ante immerſionem, non aſcendere aquam: remoto autem digito ſtatim aſcendere, etiam poſt immerſionem.

7. 7. Dum *intra* tubulum *laxiorem* aqua plenum mergatur *anguſtior*, accidere, vt nunc intra laxiorem, nunc intra anguſtiorem altius eleuetur aqua, prout ſcil. maior minorue ſit cauitas laxioris reſidua, quam cauitas minoris. v. fig. 2.

V. Iſta igitur generaliora ſunt tubulorum capillarium phaenomena, quae ex *Honorato Fabri* Sturmius excerpſit. Addam ſubinde plura, partim accepta ab aliis, partim nouiter excogitata. Sed intertexam illa explicationum vulgarium examini, vt varietate dicendorum falli potius lectorum patientiam, quam fatigari contingat. Sunt vero *tres* explicationum claſſes *praecipuae. Prima* fluido prementi externo imputat hoſce effectus. *Secunda* adhaeſionem aquae ad vitri latera cauſſatur. *Tertia* accuſat vitri et aquae mutuas ad ſe inuicem attractiones. Singulae in ramos abeunt, ſed nolo omnia minutim ſecare;

care: Faciat id, et ex dicendis difcerpat, cui volupe eft.

VI. Explicationem ab *Honorato Fabri* propofitam talem in compendio *Sturmius* exhibet, et approbat, faltim ab initio; namque in Auctario mutat fententiam. "Conftat, *inquiunt Viri Docti*, aerem no-„ ftrum effe non grauem folum, fed et compreffum. Gra-„ uitatem agere non fecundum molem, fed altitudi-„ nem, pofita bafi eadem. Sed compreffum corpus„ quaquaverfum agere, et tanto magis, quo eft copio-„ fius. Id fontes artificiales per compreffum aerem o-„ perantes, et bombardas teftari pneumaticas, quo e-„ nim plus aeris iftorfum compellas cogasque, tanto for „ tiorem effe effectum. Aquam igitur in tubulis capil-„ laribus attolli ab aere externo, non quatenus grauitet„ perpendiculariter deorfum; fed quatenus compreffus„ valde quaquaverfum vrgeat. Exteriori acceffum effe„ liberum, et in maxima copia ad vrgendam aquam fibi„ fubiectam; fed interiorem aquam nonnifi ab ea parte„ aeris attingi, quam conus *ibk* complectatur: ita-„ que eleuari aquam interiorem ab exteriore, quam ma-„ gis vrgeat incumbens maior aeris moles.„ *Fig. I.*

VII. Sapit *aetatem fuam* haec explicatio: abutitur enim ambigua locutione; negligit menfuras; impingit in theorema hydroftaticum, nunc vulgo notum; et ad commune fuperioris aeui afylum, aeris operam, confugit. Verum eft, corpus compreffum agere tanto fortius, quo eft (in eodem fpatio) copiofius, id eft, compreffius. Falfum, agere fortius, fi (in maiori fpatio)

tio) copiosius est, sed aeque densum. Indubium est scriptoribus hydrostaticis, posita basi eadem, et aere aeque compresso, tantundem agere vim aeris restitutiuam siue parua, siue magna aeris copia adfuerit. Id aliis in locis ipse *Sturmius* annotauit, cum *Henrico Moro* aeris grauitatem et elaterium neganti occurreret in Coll. Curios. P. II. Epist. ad Morum §. 63. p. 82. Non igitur ob *maiorem* aeris externi *copiam* fortius vrgebitur aqua exterior, quam interior. An liberior accessus aliquid efficere valeat, mox dicam.

VIII. Illud primo statim loco annotari debet: *Aerem* accusari praeter meritum. Monet *Boylius*, et ex illo vniuersi scriptores Physici.

Phaen. 8. 8. Si tubulus sub campana aere vacua collocetur, aquam in eo suspensam haerere. Vidi etiam ipse non semel,

9. 9. Si tubulus antea humectatus in vacuo demum aquae immergatur; (quomodo id fieri possit, nemo hodie ignorat) aquam perinde in tubulo ascendere sub campana, ac in libero aere; saltu vtique celerrimo: nec profundam hic immersionem requiri, sed sufficere contactum tubuli et aquae subiectae. Conficitur autem ex dictis, nisi aetherem aeri substituas, actum esse de fluidi prementis ad hoc phaenomenon explicandum auxilio.

IX. Non id vero sine exemplo est, vt in eiusmodi casibus aerem suum vsque adeo subtilem faciant auctores, vt aetheri similis cum illo trans campanam ire, si non liberrime possit, possit tamen. Excluditur igitur

tur per dicta prius phaenomena crassioris opera, nondum subtilioris et aetherei aeris. Excluditur discrimen pressionis internae atque externae, a maiori minoriue aeris aeque densi copia oriundum. v. §. 7. Quod ipsum etiam, si vel maxime inuitis hydrostaticae legibus admiseris, non tamen phaenomenis consentiet. Neque enim conuenit tertio, superius §. 2. enarrato, cuius contrarium ipse ex hac sua hypothesi intulerat inuentor hypotheseos. v. Sturm. Coll. Cur. P. I. p. 46. Conclus. 3. Accedunt autem et alia, quae *istam per conulos* siue aeris siue aetheris incumbentes, et eorundem premendi differentias *explicationem* respuunt. Talia sunt:

10. Assumto tubulo longiori, cuius cauitas ab vna extremitate ad alteram nonnihil minuebatur successiue, aequalis erat aquae supra libellam eleuatio, siue pars angustior mersa fuerit, siue amplior; modo suprema aquae eleuatae superficies vtroque in casu eundem tubuli locum attingeret. *Phaen.* 10.

Iam si hoc ad hypothesin contuleris, primo in casu ob partem tubi ampliorem aquae supereminentem amplior conus est, quam in secundo: itaque minor debebat esse eleuatio aquae, ob minorem aeris eo conulo contenti differentiam ab externo in aquam vasis premente. Tum vero etiam illud notari debet, quod mediante hoc tubulo fieri possit, vt conulo existente minore eleuatio aquae supra libellam sit minor; cum deberet per hypothesin maior esse. Nimirum fig. 3.

11. Si pars tubi strictior erat extra aquam, mi- 11.
nor

nor ſubinde fiebat eleuatio aquae ſupra libellam, quo magis extrahebatur tubulus. Eo autem in caſu minorem ſemper conulum fuiſſe incumbentem, id vero erat extra dubium.

X. Non itaque naturae congruit aut ſatisfacit hypotheſis *Fabriana* rudior: Fortaſſe *cultior* facta conueniet? Bina mihi emendatio innotuit, vtraque digna ingenio Auctorum. *Iac. Bernoulli*, ex diuerſa fluidi preſſione fontem repetiit horum phaenomenorum in diſſ. *de Grauitate aetheris* iam A. 1683. edita, p. 239. ſ. Verba haec ſunt: „ Sit *abcd* fiſtula cylindrica immerſa ſu-
Fig. IV.
„perficiei aquae ſtagnantis *ed*, cui inſiſtat alius praeterea „cylindrus ſimilis atmoſphaericus *efgh*. Fingamus autem vtriusque diametrum in ſe recipere certum numerum particularum aeriarum, v. g. ſeptem, ita vt ſeptem „tales particulae (quas ſphaericas nunc eſſe ſuppono) in „directum poſitae exhauriant cylindrorum latitudinem, „notabimusque rariſſimum eſſe contingens, ſi globuli „iſti ita ſint diſpoſiti, vt extremi praeciſe radant tubi latera, atque omnes ſeptem ſine obſtaculo in eius cauitatem admittantur (vti fit in ſerie globulorum *il*) plerumque enim, imo ſemper continget, vt ſummi cylindrorum margines vtrinque primum et octauum excipientes „nonniſi ſex intermediis tranſitum praebeant. Quod et „intelligendum de quauis alia aſſignabili ſerie globulorum, quorum perpetuo bini extremi in cylindrorum „margines incidere ſubſumi debent. Hinc etenim fiet, „vt totus ille globulorum orbis, qui *circumferentiam ſupremi orificii fiſtulae* occupat, cum tota globulorum

„ca-

catena perpendiculariter ſibi imminente *am*, *bn*, omnem„ ſuam preſſionem terminet in ſummitate laterum fiſtu-„ lae, *neque poſſit pertingere* ad liquorem ſubiectum *qr*,„ qui proinde ea tantum preſſione afficitur, quae profi-„ ciſci poteſt a cylindro aerio, diametrum *op* ſex dun-„ taxat globulorum obtinente. Aliter vero ſe res habet„ in cylindro aerio *efgb*, extra fiſtulam aſſumto in alia„ quadam parte ſuperficiei ſtagnantis aquae, vbi extremi„ globuli ab eius lateribus *ge*, et *bf*, quae pure ſunt ima-„ ginaria, non impediuntur, quin libere defluant, et to-„ ta ſua latitudine ſuper liquore ſubiecto grauitent. Cui„ conſequens eſt, vt liquor extra fiſtulam tanto maiore„ preſſione afficiatur, quam qui intra fiſtulae latera con„ cluſus eſt, quanto numerus globulorum illi incumben-„ tium excedit numerum globulorum ſuper hoc premen-„ tium: Vnde liquor ab externa preſſione praeualente ſem„ per nonnihil altius impellendus in tubum. „

XI. In ſequentibus monet Vir Cl. 1. differentiam hanc preſſionum in tubis *amplioribus* eſſe *inſenſibilem*; in ſtrictioribus vero portionem aeris impeditam a tubi marginibus maiorem ſemper rationem habere ad portionem aeris non impeditam: 2. ſequi etiam ex hac hypotheſi, quod *liquores* ſpecifice *leuiores* ceteris paribus *altius* attolli debeant grauioribus, ea proportione, quae eſt inter ſpecificas eorum leuitates: 3. *aquam* ſuperne *non* poſſe *effluere*, etſi minuatur tubi ſupra aquae ſuperficiem eleuatio; orificio enim tubi vtrique aequalem imminere aeris portionem: 4. porro ſuperficiem *mercurii* in talibus fiſtulis debere conſiſtere *infra libellam*, ſi particulas

eius

eius concipias *grossiores* aereis, vt extremis earum s et t tubi margini implicatis plus decrementi patiatur pressio mercurii ex imo sursum, quam pressio aeris desuper: 5. Denique ex his dictis *superficiem aquae* in fistula *concauam* fore, et mercurii conuexam. vid. fig. 5.

XII. Addam curiositatis caussa vsum hypotheseos rariorem. *Mensurauit* Vir ingeniosus ex hisce assumtis *diametrum* vnius *globuli aerei*, ex cognita latitudine fistulae, et altitudine eleuationis aquae supra libellam. Sit enim diameter cauitatis fistulae $=a$, altitudo aquae internae supra libellam $=b$; altitudo cylindri aquei aequiponderantis cylindro aeris atmosphaerici eiusdem baseos $=c$, diameter globuli aerei quaesita $=x$: Erit diameter cylindri aerei superius in aquam prementis $=a-x$, et area eius $=\frac{11aa-22ax+11xx}{14}$, area autem totius cauitatis $=\frac{11aa}{14}$, et consequenter area annularis vitro contigua, cui nullus aer incumbit, $\frac{22ax-11xx}{14}$. Iam vero per experimenta aer areae huic annulari insistens ad altitudinem atmosphaerae aequatur columellae aqueae eiusdem baseos ad altitudinem datam c porrectae: et per hypothesin haec columna aequatur aquae in tubulo supra libellam eleuatae. Igitur $\frac{22ax-11xx}{14}\times c=\frac{11aa}{14}\times b$; adeoque $2acx-cxx=aab$, et aequatione reducta $x=a-a\sqrt{\frac{c-b}{c}}$. Quodsi igitur $a=\frac{1}{8}$ poll. $b=\frac{1}{2}$ poll. $c=400$ poll. erit $x=\frac{1}{12500}$ poll. exprimens diametrum vnius globuli aerei, vel potius distantiam a centro vnius globuli ad centrum alterius; quoniam globuli ob interfluentem materiam

riam aethercam non ſunt contigui. Quin imo, cum ex alio argumento idem Vir doctiſſimus, libro cit. p. 102. intulerit, inter duo quaeuis corpuſcula aerea quatuor aequales materiae ſubtilis portiones interiectas eſſe, ideo diameter vnius globuli aerei emerget $=\frac{1}{62500}$ poll.

XIII. Non poenitet me prolixae recenſionis: meretur illam ſententiae amoenitas; cui praeter hactenus dicta etiam illud commode accidit, quod calculus experimento reſpondeat, vi cuius cognitum eſt, quod

12. Altitudo aquae ſupra libellam in pluribus fiſtulis ſit inuerſe vti diameter cauitatis, hoc eſt, ſi duorum tubulorum T et *t* diametri ſint a et α, atque altitudines aquae b et β, quod ſit $a : \alpha = \beta : b$. *Phaen.* 12.

Dicam inferius, quomodo hoc experimentum fieri debeat: hic illud moneo, per computum §. prioris eſſe $a - a\sqrt{\frac{c-b}{c}} = x = \alpha - \alpha\sqrt{\frac{c-\beta}{c}}$: ex quo ſequitur $\alpha : a = 1 - \sqrt{\frac{c-b}{c}} : 1 - \sqrt{\frac{c-\beta}{c}}$, quae analogia vix differt a priori $\alpha : a = b : \beta$, ob quantitatem c admodum magnam reſpectu b et β. Sit enim per experimenta mea $a = 1'''$, $b = 3'''$, $\alpha = \frac{1}{10}'''$ $\beta = 30'''$ et $c = 4800'''$ erit $\alpha : a = 1 : 10$. et $\sqrt{\frac{c-b}{c}} = \frac{69.2603}{69.2820}$, $\sqrt{\frac{c-\beta}{c}} = \frac{69.0651}{69.2820}$, adeoque $1 - \sqrt{\frac{c-b}{c}} : 1 - \sqrt{\frac{c-\beta}{c}} = 217 : 2169$, quod cum analogia priori conuenit.

XIV. Fateor tamen, eſſe *aliqua* etiam, quae *aſſenſum morantur* noſtrum, alia aliis fortiora. Quod particulae *aereae* ſint aqueis *maiores*, dubium videri debet, donec id liquidis euictum fuerit experimentis. Hactenus in ambiguo res eſt. vid. *Memorias Acad. Scient. Paris.*

Paris. ad A. 1714. p. 71. ſeqq. Fluida *leuiora* ceteris paribus *altius* eleuari ſequitur ex hypotheſi, et ab inuentore ipſo infertur: ſed in experimentis cognoſcitur,

Phaen. 13. 13. Fluida ſpecifice leuiora, vinum et ſp. vini minus alte eleuari, quam aquam. Sic exempli gratia vidi, eleuationes in ſpiritu vini, vino rubro, et aqua ſe habuiſſe vt 4, 7, et 12.

Igitur aut ſententia detrimentum patietur, aut dicendum erit, cetera non eſſe paria; quod de oleis non difficulter conceſſero, quorum fingi minor diuiſibilitas poteſt: an de vino, et ſpiritu vini idem valeat, non dixero cum fiducia. Illud, fateor, me anxium habere, quomodo dici poſſit, quod „ totus ille globulorum orbis, qui „circumferentiam ſupremi orificii fiſtulae occupat, cum „tota globulorum catena ſibi perpendiculariter imminen„te *am*, *bn*, omnem ſuam preſſionem terminet in ſum„mitate laterum fiſtulae, neque poſſit pertingere ad li„quorem ſubiectum *qr*, qui proinde ea tantum preſſione „afficiatur, quae proficiſci poſſit a cylindro aereo, dia„metrum *op*, ſex duntaxat globulorum obtinente.„ Aut totus ille annulus cylindricus, ſpatio *oq* vel *pr* circa axem rotato genitus aere vacuus concipitur, aut non: Si vacuus, cur non ad altitudinem 30 pedum aſcendit aqua vitro contigua, adeoque ad ſupremam vsque tubuli extremitatem? Si vacuus: quis ita ordinate globulos collocauit aerios, vt in nulla cylindruli ſectione totam tubi latitudinem occupent, in tanta praecipue aeris agitatione interna et elateris vi? Si vacuus: cur in ſpatium illud annu-

annulare non succedit aqua, cum tubulus mergitur digito obturatus? Sin vacuus non est ab aere: premet vtique aer non solum pro basi suprema *op*, sed pro ea, quam obtinet aer aquae proximus; vel quae ratio est, cur in vicinia aquae non totam occupent tubi latitudinem globuli aerei, cum certum sit, fluidum elasticum et compressum accommodare se spatio, cui includitur, ea methodo, vt maximum, quod potest, spatium occupet.

XV. Quid si tubus assumatur, cuius interna cauitas sensim sensimque minuitur; et pars amplior extra aquam collocetur, mersa strictiore: annon aer superne intrans ope sectionum successiue minorum ita sese spatio interno accommodabit, vt totam tubuli amplitudinem replcat, non relicto eiusmodi vacuo, cui integrae possent particulae inseri aereae? saltem certum est, quod hoc in casu dici non possit, impediri aerem ab *orificii supremi* circumferentia: et eleuatur tamen aqua supra libellam. Vidi,

14. Siue amplior pars mergatur, siue strictior, semper eleuari aquam, quantum conuenit illi sectioni fistulae, quam suprema attingit aqua; vnde pro immersionis profunditate plus, minus, vel aequaliter eleuatur eminente extra aquam parte tubi ampliore, aut strictiore. *Phaen.* 14.

Conuenit id hydrostaticae, vi cuius neque amplior in tubulum ingressus nocet, neque strictior iuuat eleuationem, sed tota res redit ad basin aeris prementis: Non id vero conuenit explicationi a supremo fistulae orificio desumtae, si ad litteram intelligatur; mox enim videbimus,

 quid

quid pro adiumento explicationis dici aduerſus hunc inferendi modum poſſit.

XVI. Nimirum vbi experimenta mea de capillaribus coram ſocietate inſtitui, et de cauſſa eorum ſententias amicorum rogaui, vt ad illas meam, ſi opus esſet, exigerem: Clariſſ. Collega, *Daniel Bernoullius*, neſcius adhuc, quid de hoc argumento Patruus ſcripſerit, *explicationem* priori ſimilem, ſed *caſtigatiorem hanc* ſuppeditauit. Repetit aquae internae ſupra libellam cum externa eleuationem ab impedita ſuperne in fiſtula fluidi incumbentis, non aerei ſolum, ſed praecipue aetherei, preſſione libera. Vult baſin fluidi huius aereo-aetherei aquae contiguam, non tam plenam eſſe ad margines vsque internos fiſtulae, quam plena eſt eodem fluido ſuperficies priori aequalis, ſed in libero aere ſita, vel quam plena eſt fluido aqueo ſuprema aquae ſuperficies. Id vndecunque eueniat, perinde eſt. Interim ſeu exempli ſeu coniecturae loco ponit, particulas eius fluidi eſſe aqueis maiores. Quodſi enim ſuper plano aliquo poſitos concipias globulos maiores, ſuper altero minores, vtrosque ſine ordine, ſed ſibi contiguos; ſi apertura circini quacunque, in plano prioribus parallelo, et per medium horum globulorum tranſeunte, deſcribas circulum: tranſibit vtique peripheria haec per globulos complures. Erigatur ſuper hac peripheria ſuperficies cylindrica; et ſint globuli illi indiuiſibiles: excludentur e cauitate cylindri omnes illi globuli, per quos peripheria tranſiit modo memorata; et maius relinquetur vacuum in illo circulo, qui per globulos ductus eſt maiores. Minor

nor itaque, aut minus repleta basis est, quam globuli formant maiores, ac altera minoribus formata. Quodsi igitur maiores sunt aqueis globuli aereo aetheri, sectio tubuli globulis istis deorsum prementibus minus adaequate plena erit, quam aqueis sursum vrgentibus. Hinc eleuatio, donec aliunde redeat aequilibrium. Quae autem ratio aquam eleuat in fistula fluido immersa, eandem vult esse suspensionis caussam, in eadem extracta. Cumque mercurius aeque ac caetera fluida suspendatur, vult eandem mercurii et ceterorum fluidorum sortem esse. Phaenomenon vero mercurii, intra fistulam mercurio mersam, depressi potius infra libellam, quam eleuati supra eandem, aliunde deriuat; ratus, mercurium in vase contentum tanta vi ad se trahere mercurium, vt et resistat priori caussae, et eandem excedat.

XVII. Idem Vir Cl. eodem tempore *sequentibus* hypothesin suam *phaenomenis* applicuit. Obseruauit:

15. Altitudinem liquoris supra libellam esse constantem, siue fistulam profunde mergas, siue secus; quin imo etiam, cum extrahatur tubulus; quo in casu saepe accidat, vt in extremitate tubuli gutta pendeat aquea. *Phaen.* 15

16. Hanc guttulam diminui, si inclinetur tubulus; quòd aqua tamdiu fistulam ingrediatur, donec altitudo perpendicularis in fistula inclinata aequetur altitudini priori. 16.

17. Euanescente guttula liquorem non amplius ascendere, etsi augeatur inclinatio, nisi tubus versus superiora strictior fuerit; quo in casu liquor non cesset progredi, quamdiu tubulus inclinetur. 17.

Phaen 18 18. Mox memorata duo experimenta succedere quoque in mercurio, postquam is suctione in tubulum attractus, et tubulus linguae attactu clausus extra mercurium in vasculo stagnantem extractus fuerit; esse vero altitudinem mercurii ita suspensi inter subsextuplam et subseptulam altitudinis aquae.

19. 19. Eundem ita suspensum, si vasculo fistulam denuo velis immergere, effluere omnem e tubulo, quamprimum mercurii stagnantis superficiem contingit; quod argumento esse possit, esse in mercurio vim attrahendi seipsum, quae etiam renitatur eleuationi eius in fistula ad libellam cum externo.

Denique monuit, non absolutam particularum aerearum vel aetherearum magnitudinem ex huiusmodi phaenomenis inferendam esse, v. §. 12. sed proportionem solum magnitudinis particularum in fluidis diuersi generis. Ita per phaen. 18. collata altitudine mercurii subseptupla cum pondere bisseptuplo respectu aquae, inferri posse, ob duplex mercurii suspensi pondus, duplo subtiliores esse illius, quam aquae particulas.

XVIII. *Multa* huic hypothesi *commode* eueniunt. Cessant difficultates a vacuo venientes §. 8.; nequit enim huic fluido trans campanam iter denegari. Euitantur pleraque omnia, quae §. 14 et 15 opposui sententiae priori: non enim vacuus ab aere fingi annulus vitro proximus debet; non eadem globulorum in omni sectione positio; non impedimentum repeti a supremo tubuli orificio. Non est impossibile, vt aqueis maiores sint globuli aereo aetherei, tanto etiam rariores: neque fortassis necessum

ceſſum eſt ad magnitudinem referre cauſſam baſeos minus plenae. Conuenit etiam huic ſententiae cum menſura altitudinis phaen. 14. §. 15. ſequitur enim aquae in diuerſis fiſtulis eleuatae quantitas proportionem peripheriae ſuperioris; cui aequum eſt proportionalem credi excluſionem globulorum aereo-aethereorum a peripheria oriundam. Conuenit cum phaenomenis §. ſuperiore enarratis: Conuenit etiam cum aliis.

XIX. Fateor tamen, indulgente veniam iſtam Cl. Autore, quod *in nonnullis* haeream. Fortaſſe minus difficile eſt occurrere illis, quae ad hanc expoſitionem attinent *ſpecialiter*. Itaque *quaeſtionibus* illa comprehendo, non obiectionibus. Si particulis aereo-aethereis trans vitrum aditus patet, cur ſpatium ſeſe vacuum relinquunt in vitri vicinia, et maius quidem, quam aqua aut mercurius? An aeris craſſioris nulla plane opera accedit in hac hypotheſi? Saltem in experimentis nulla deprehenditur, ob eandem fluidi in vacuo et in aere eleuationem. Cum in tubo humectato aer aut aether vitro proximus mediante illa cruſta aquea lateribus vitri adhaerente aut fortius, aut ſaltem aequaliter premere deorſum poſſit, ac in ſicco, cur altius euehitur aqua in humido, quam in ſicco? Cur circa extimam tubi ſuperficiem aqua ambiens non aſſurgit, cum ſiccus eſt; eleuanda, ſi madidus fuerit? Si eadem eſt ſors mercurii et ceterorum quoque fluidorum, cur aquae in tubulo ſuſpenſae altitudo ſequitur proportionem peripheriae ſuperioris, et altitudo mercurii proportionem inferioris? Nimirum:

20 Si tubus inaequaliter amplus mergatur in aquam *Phaen.* 20

aquam totus, et extrahatur digito obturatus: remoto digito aqua ad eam altitudinem suspensa haerebit, quae conuenit tubulo cylindrico eius diametri, quam habet suprema aquae in tubulo adhuc pendulae superficies.

Phaen. 21. 21. Si mercurio idem tubulus impleatur, et extracto tubulo sibi relinquatur mercurius, altitudo suspensionis erit ea, quae conuenit tubulo cylindrico eius diametri, quam habet infima mercurii in tubulo superficies, hoc est, orificium tubuli inferius.

Haec duo experimenta et mihi casu obtigerunt, cum phaenomeno 13, et similibus attenderem, et fistula vterer inaequaliter ampla: sed et eadem ab aliis, praecipue *Iac. Iurinio* iamiam annotata fuisse, postea cognoui. vid. *Transact. Abrigd. by Henr. Iones* T. IV. P. I. pag. 426. et 434.

XX. Sunt alia vero, quae *generaliter* videntur obstare, quo minus a differentia pressionum superae et inferae deriuetur eleuatio aquae aut suspensio supra libellam. Viderint, qui huic sententiae accedunt, an ea sufficiat eleganti phaenomeno, quod *Iac. Iurinius* annotauit

Fig. VI. l. c. Sit tubus amplior AB desinens superne in capillarem BC; sit altitudo aquae supra libellam, quae amplitudini partis AB conuenit $=a$, et altera, quae angustiae partis BC competit, $=b$.

Phaen. 22. 22. Immergatur aquae pars tubi amplior: erit altitudo eleuationis supra libellam ea, quam per a denotauimus; extractoque paululum tubo descendet in illo aqua, quantum tubulus extrahitur, sic vt eadem semper altitudo eleuationis supra libellam maneat. Madefiat superioperior tubuli capillaris extremitas, dum vel e digito pendens guttula illi admouetur, vt fupremum obtegatur aqua orificium fiftulae capillaris C. Poterit tubus extra aquam extrahi, fic vt aqua in DE contenta non defcendat, donec columna aquae fupra libellam eleuatae fuperet altitudinem *h* antea defignatam.

Velim autem, meminerint, qui hoc phaenomenon examinabunt: idem in vacuo non minus, quam in aere libero, fuccedere. Namque fcio, difficiliorem eius in vacuo explicationem fore: Impoffibilem tamen non dico. Faciant rei periculum, quibus volupe eft: aduertant vero fimul ad ea, quae inferius dicemus, in *tertiae* claffis examine, §. 52. et feqq.

XXI. Grauioris, fic arbitror, momenti eft phaenomenon, quod, nefcio, annon *experimentum crucis* vocare liceat in hac explicationum claffe. Inquifiturus, an omnino liber aeri aditus pateat in tubos capillares, cogitaui, id ope Barometri poffe decidi, fi in vafculi locum tubus fubftitueretur capillaris, per quem atmofphaera premere fubiectum fibi mercurium deberet. Si enim aer trans fiftulam capillarem fufpendere mercurium poteft ad altitudinem ordinariam, non vtique ab eius impedita preffione oritur eleuatio aquae fupra libellam in tubulis ordinariis multum capillari meo amplioribus. In eum finem *Fig. VII.*

23. Adhibui tubum longiorem ordinariis, et gracilem, Barometri fimplicis recurui in modum, nifi quod vice vafculi tubus defineret in fiftulam vere capillarem et *Phaen. 23*

tam. * In crure longiore mercurius est, et supra eum vacua ab aere tubi portio adhuc satis longa. Instrumento ad modum Barometri erecto, guttatim effluxit e capillari fistula mercurius, qui in tubo nimius erat. Cessante

---

* *Fortasse maius huic experimento pretium statueretur ab aliquibus Lectorum*, *si* methodum construendi tubos eiusmodi *reticerem. Malà autem, vt et ab aliis facile fiat, quod a me factum est sine industria singulari. Sume tubulum Barometricum longiorem, et nonnihil graciliorem, vt facilior eius inflexio fieri possit. Sit ille in altera extremitate clausus hermetice, in altera apertus. Impleatur mercurio, more quidem recepto, sed diligenter et exacte, ad altitudinem vsque quatuor pedum, aut amplius. Pars mercúrio vacua inflectatur ad perpendiculum tubi reliqui, applicando lampadis flammam in aliquali a mercurio distantia, v. gr.* 1. *pollicis, si tubus fuerit gracilis; in maiori, si crassior. Pars reflexa denuo in distantia circiter* $1\frac{1}{2}$ *pollicis ab angulo, liquefiat ad lampadis vim, et in tubulum capillarem ducendo extendatur. Tubus ita paratus, si pro vno solum aut altero experimento seruire deberet; relinqui in hoc statu posset, et inuerti in situm erectum. Mihi placuit, crus horizontale vna cum annexa sibi fistula capillari denuo reflectere, vt alteri cruri parallelum excurreret: atque tum demum erigere tubum more Barometri, et spectare eius phaenomena.*

ſante fluxu menſuraui altitudinem eius in tubo longiore ſupra libellam eiusdem in crure capillari: et deprehendi eam duobus et amplius digitis excedere altitudinem mercurii in Barometro ſimplici. Variata poſtmodum atmoſphaerae grauitate, mutata etiam eſt altitudo mercurii in hoc tubo. Obſeruaui id in capillari fiſtula, namque in altero crure id non ſuccederet: neque proportionales ſunt hae mutationes illis, quae in Barometro fiunt ſimplici; quoniam capillaris tubuli amplitudo vix ſupponi poteſt eadem per ſpatium nonnihil longius.

Fallor? an inferre licet? Si aer in vere capillaribus poteſt ſuſpendere mercurium *ad totam*, quae grauitati eius reſpondet, altitudinem: cur in ordinariis multo amplioribus non ſufficit eiusdem preſſio ad componendam fiſtulae interiorem aquam cum externa ad libellam? Dixi, *ad totam*: quod enim maior fuit altitudo mercurii; id alteri tribuendum eſt cauſſae, quam preſſioni aeris.

XXII. Succurrit et aliud, quod attendi meretur, experimentum.

24. Aſſumſi fiſtulam valde gracilem, fregi eam in medio, et obſeruaui altitudines, ad quas eleuaretur oleum oliuarum in vno, et vinum rubrum in altero fruſtulo, immerſis ſcil. extremitatibus, quae prius cohaeſerant, vt ſenſibiliter eadem eſſet fiſtularum capacitas. Erat olei altitudo 1. poll. $3\frac{1}{2}$ lin. vini rubri 1. poll. 8. lin. pedis Regii Pariſ. Admiſi in alterum vini columellam ad altitudinem circiter 8. lin. et merſi orificium inferius ſub oleo ad profunditatem trium linearum. Intrauit oleum ad libellam cum exteriori; ibique ſubſtitit. Ex- *Phaen.* 24.

tractam igitur fiſtulam vino iterum immerſi ad profunditatem fere eandem: vidique vinum ingredi non ſolum pro ſubmerſionis profunditate; ſed altius longe, donec vini ſuperi atque inferi, et intercepti inter vtrumque olei columna aequaret altitudinem memoratam 1. poll. 8. lin. Annotaui ſimul columellam olei fuiſſe ſuperne et inferne ſenſibiliter conuexam.

Phaen. 25. 25. Idem obſeruare phaenomenon licuit, quoties fiſtula oleo non fuerat madefacta ab initio: Si oleum trans fiſtulam ſuxi ante, quam vino immerſi, aſcendit oleum quoque ſupra libellam, et vinum ante ſe protruſit. Tota tamen eleuationis altitudo minor fuit, quam eſt altitudo ſolius vini, aut olei. Repetii haec tentamina in diuerſae cauitatis fiſtulis: et deprehendi ſatis conſtantia.

26. 26. Vbi alteram adhibui fiſtulae partem, quae ab initio ſtatim oleo, non vino tincta erat, admiſique in eam olei columellam ad $5\frac{1}{2}$ lin. et extractam vino immerſi ad profunditatem linearum circiter 4. nonnihil inclinatam: aſcendit vinum ad lineas omnino decem, ſic vt tota altitudo extra liquorem fieret 12. lin. Haeſitque extracta fiſtula omnis hic liquor ſuſpenſus ad altitudinem lin. 16. Repetitis tentaminibus altitudo vini ſupra libellam varia fuit, ſed ſemper tamen notabilis.

Fateor hic, ſi a differentia preſſionum fluidi ſuperne et inferne urgentis pendet eleuatio liquorum, neſcire me, cur oleum vel plane non aſcendat ſupra libellam phaen. 24. vel ſaltim minus aſcendat, quam ſine vini ni praesentia fecisset? phaen. 25. Mihi quid in hoc negotio videatur, suo tempore indicabo.

XXIII. Accedo ad *classem* explicationum *secundam*: et simili ordine a rudioribus initiis ad maiorem hypotheseos culturam successiue pergo. Sumit haec classis, quantum memini, principium ab *Isaaco Vossio*, et per *Borellum* transit ad *Carréum*, nouissimum eius et ingeniosissimum cultorem. Notam huius classis characteristicam facio adhaesionem aquae ad vitri latera, cuius ope minus grauitare censetur aqua fistulis inclusa gracilioribus, quam externa amplioris vasculi libere circumfusa tubulo. *Isaacus* igitur *Vossius* L. de Nili aliorumque fluminum origine cap. 2. ita philosophari dicitur apud *I. C. Sturmium in Colleg. Cur.* P. I. Auctar. p. 81. "Aquam,, natura sua viscosam esse; adhaerere illam vitro, et ab,, eodem sustineri; partem aquae sic suspensam non pre-,, mere in aquam subiectam, sed grauare vitrum; patere,, id cum fistula aquae mersa iterum extrahatur, neque,, enim omnem decidere humorem; suspendi a vitro, quan-,, tum latera valeant sustinere: Aquam igitur in angustio-,, ribus fistulis ideo assurgere, quoniam prima aquae por-,, tiuncula fistulam ingressa, cum iam sustineatur a fistu-,, la, adeoque respectu portiunculae succedentis ponde-,, re careat, ab illa attollatur supra libramentum aquae,, ambientis. Quanto minutiores fuerint fistulae, tanto,, altius aquam ascendere, quia minores plus habeant su-,, perficiei, et plura puncta contactus pro sua capacitate,, quam maiores, et sic aquam e pluribus sui punctis su-,, spensam tanto facilius sustineant. Hydrargyrum care-,, re,,

„ſe ea viſcoſitate reſpectu vitri, eiusque inſuper aequili-„brium retundi ab anguſtia fiſtulae minoris; ideoque mi-„nus alte ipſum in fiſtulis, quam in ſpatiis latis eleuari. Iſta loc. cit.

XXIV. Eamus per ſingula. Vult aquam eſſe viſcoſam *Voſſius*, et adhaerere vitro: ſic vulgo videmus. Vult ſuſtineri ab eodem, et grauare vitrum. Hoc vero eſt, quod multi negant. Quos hactenus audiuimus, non a vitro aquam ſuſpendunt, ſed mediante fluido externo ſuſtentant in vitro. Quid ergo? *Examinetur* quaeſtio *ad bilancem.* Sic facile cuiuis videbitur, ſaltem primo intuitu. Accipe igitur, quid geſtum ſit? Eſt *Vir eximius*, qui adhaeſionis iſtius veritatem cognoſcere ex tubuli aqua ſua inſtructi pondere inſtituit hac methodo. Tubulum ſuperne cera obturatum, ne ſcil. ingredi per inferius orificium aqua poſſit, nonnihil aquae immerſum reduxit cum contrapondio ad aequilibrium: Remota autem cera, et in lancem congruam repoſita, eleuata eſt in tubulum antea humidum aqua, et pondus fiſtulae auctum. Id ſolers indagator expectauerat, eo quidem conſilio, vt ex aucto pondere adhaeſionem aquae et ſuſpenſionem a vitro cognoſceret. Animaduertit autem, re denuo expenſa, nihil hic concludi posſe. Tubulus enim clauſus ante ingreſſum aquae tantum a pondere ſuo perdiderat, quantum aqua, ſpatium a tubulo et cauitate eius ſubmerſa occupatum aequans, ponderauerat: ſed aperto ſuperiori orificio et ingreſſa in fiſtulam aqua, perdidit ſolum pro maſſa ipſius tubuli. Itaque auctum videri debuit pondus fiſtulae, etiam independen-

den-

denter ab adhaesione aquae ad latera. Conf. *Memorias Academ. Scientiarum Paris.* A. 1705. p. 318. edit. Batav.

XXV. Possset in mentem venire, quoniam hic impedimento est diuersitas tubuli superne clausi vel aperti; itemque profunditas immersionis: Tentandum id experimenti sub aliqua variatione in tubulis semper apertis, et minus profunde immersis. Videri enim posset, si suspensio aquae a diuersitate pressionis fluidi ambientis pendeat, fore idem tubuli vacui, et aqua instructi pondus: Videri etiam, ex mensura praepondii, si quod fuerit, facile iudicium fore, an illud toti, quae tubulum intrauit, aquae respondeat, an secus? Si enim vitri lateribus aqua adhaereat, pondus aquae totum accessurum esse ponderi ipsius tubuli. *Feci periculum rei*, assumtis tribus tubulis ad sensum aeque amplis, et superne in modum siphonum inflexi illos, vt ope fili serici suspendi ad bilancem possent. Reduxi illos cum contrapondio ad aequilibrium vacuos quidem, sed interne humidos: Tum vero obseruaui,

27. Quamprimum inferiora tuborum orificia, quae sensibiliter in eodem horizontali plano erant, aquam attingerent, eleuari illam, et rumpi aequilibrium bilancis grauioribus factis hisce tubulis. Vidi etiam, mansisse diutius praepondium, etsi paulatim immersi in aquam tubuli de pondere suo aliquid amitterent. *Phaen.* 27

28. Mansit praepondium, cum extraherentur fistulae extra aquam, et singulae aliquid secum aufferrent; Licuit autem annotare, re ad mensuram exacta, 28

29. Augmentum ponderis tubulorum adhuc non- 29.

nihil merſorum maius fuiſſe, quam eorundem extractorum: Illud grani vnius, et amplius; hoc ab vno grano nonnihil deficiens. Quod augmentum, vt id obiter dicam, arginibus imputo, qui externae tubulorum ſuperficiei adhaerebant.

XXVI. Certum igitur eſt ponderis augmentum: ſed *nihil* tamen *egimus* omni *hoc conatu*. Vtraque nimirum ſententia idem ponderis augmentum requirit. Quicquid vitro *adhaeret*, grauat in vitrum, ſi ab eo ſuſpenditur. Inde ponderis augmentum. Sed idem vitro accedit, ſi aqua ſuſpenditur a differentia *preſſionum fluidi* ſupra et infra vrgentis. De *hoc* ſi dubites, rem ſic habe: Cum in libero aere vacuus et cylindricus pendet tubulus, eadem eſt prementis atmoſphaerae actio in vtramque baſin, ſuperiorem et inferiorem. Vocetur illa $A = a + b + c$; exprimatque a partem preſſionis, quae lateribus tubi ſemper incumbit, ſiue merſa ſint orificia ſub aquam, ſiue ſecus; exponat b eam portionem, quae per hypotheſin innititur interiori laterum ſuperficiei, cum in aere eſt orificium, et quae aquam dicitur eleuare, cum inferius orificium aquae immergitur: denique c ſignificet partem preſſionis, quae fit in cauitatem tubi. Mergatur tubulus vna ſui extremitate ſub aquam, manet ſuperior preſſio inuariata, $= a + b + c$. Sed in preſſione inferiori accedit variatio. Vrget adhuc tubi latera niſus a, vrget cauitatem preſſio c: Verum preſſio b non amplius tubum vrget, ſed aquam ſuſtentat. Igitur preſſio tubi deorſum excedit preſſionem, qua ſurſum vrgetur, parte ea, quam b diximus, et quae per hypothethesin aequalis est ponderi aquae in tubulum eleuatae. Idem obtinet, quando tubus vnâ cum eleuata intus aqua extrahitur, eandemque suspensam conseruat. Non igitur hoc experimentum quicquam concludit aduersus illos, qui eleuationem aquae a differentia pressionis perpendicularis sursum et deorsum factae deriuant. Forsan illis obest, quos §. 6. diximus caussam eleuationis non in hac pressione, sed in libera vel impedita aeris motitatione et ad expansionem conatu quaerere.

XXVII. *Demus* Vossio tamen, aquam *adhaerere*, et suspendi a lateribus vitri; demusque id tanto lubentius, quod experimentis solicite factis mihi constat, tantundem praecise aquae eleuari in tubulo, quantum comprehendit gutta maxima, quae ex tubo illo pendens adhuc sustentatur, casura quam primum augeatur. Dedit huic tentamini occasionem vox vnica, apud *Mariottum* obuia *du Mouvem. des Eaux* P. II. p. 105. lin. 6. edit. Paris. 1700. Examen hoc fuit. Sumsi tubulum capillarem satis aequabilem, et annotaui altitudinem, ad quam aqua haereret suspensa in tubulo: tùm vero mersi eousque tubulum sub aqua, vt denuo supra libellam aqua ascenderet, quantum prius fecerat. Sic duplum aquae in tubulo continebatur; quem digito superne obturatum extraxi; vidique remoto digito

30. Descendentem successiue aquam colligi ad inferius tubuli orificium in guttulam et suspensam haerere, si cauerem a succussione aut tremulatione tubuli. Si plus aquae in tubulum admissum fuerat, cadere guttulam: *Phaen.* 30.

Sin minus, ſuſpendi eam facile, nec diuelli a motitatione tubuli non nimis violenta.

Ita igitur intellexi, tantum aquae ingredi in tubulum, quantum ab eius orificio ſuſpendi poſſit, non amplius. Velim autem, vt, quibus iſta placebit repetere, caueant circumſtantias alienas, et fallaciam accidentis facillime generaturas. Ceterum non diffiteor, me vel ob hanc cauſſam facile admittere, quod pendeat a lateribus vitri et ſuſtentetur aqua.

XXVIII. *Nondum* tamen conſequitur, quod *ſolum* grauet *vitrum*, neque ſubiectam ſibi aquam premat. Si prima aquae portiuncula fiſtulam ingreſſa pondere caret reſpectu ſuccedentis ſecundae: carebit et ſecunda fiſtulam ingreſſa reſpectu tertiae: namque et ſecunda lateribus adhaerebit ſibi contiguis. Sic item tertia reſpectu quartae: et quis erit finis ſucceſſionis? Quae ratio eſt, cur non in omni fiſtula ad ſummitatem aqua aſcendit, cum nulla fiſtulam ingreſſa deorſum premit in ſibi ſubiectam? Fig. VIII. Suſpenditur, *inquis*, quantum latera valent ſuſtinere. Bene eſt. Si latera inde ab A ad B poſſunt ſuſtinere quantitatem AB: poterunt et latera ab A ad C ſuſtinere quantitatem AC, et ſic porro, donec ad finem laterum in D peruenias. Quodſi columella A*a* eleuata eſt in *a*B, quoniam vitrum ſolum grauauit, non ſubiectam ſibi aquam preſſit: cur non eleuatur *a*B in BC; namque et *a*B vitrum ſolum grauat, non ſubiectam ſibi aquam premit. *Praeterea*, ſi aqua vitrum ingreſſa illi adeo tenaciter adhaeret, vt nihil deorſum premat, cur aqua in tubulo

bulo extracto ſuſpenſa, deorſum fertur, ſi tubulum inuertas:

31. Quodſi enim fiſtula fuerit nonnihil longior altitudine ea, ad quam eleuatur aqua ſupra libellam, eademque extracta inuertatur, defluet aquam ex vna fiſtulae extremitate ad alteram. Idemque accidet, ſi extracto tubulo aqua ſuctione nonnihil eleuetur, et ea ceſſante ſibi denuo relinquatur: deſcendit enim ſine mora. Igitur non ita adhaeret, vt deorſum premere non poſſit, ſi ceterae faueant circumſtantiae. *Phaen.* 31.

XXIX. Eſto autem, *adhaereat prima* aquae portio vitri lateribus adeo, vt ſuſtentetur ab ea adhaeſione *tota* deorſum grauitans preſſio: *Non* ideo *eleuabitur* a ſuccedente. Ceſſauerit grauitas: ſucceſſit illi vis aequipollens, et eleuationi renitens; ipſa ſcil. ad vitrum adhaeſio, quae non minus diuulſioni ſuae renititur, quando ſurſum vrgetur a ſuccedente aqua, quam vbi deorſum nititur ſuo pondere. Quae eſt vis illa, qua vincitur haec reſiſtentia, dum aqua ſurſum vrgeri debet, et omnino eleuari grauis ſimul, et adhaerens vitri lateribus.

XXX. Praeterea, etſi recte dicitur §. 23. in fiſtulis anguſtioribus plura eſſe contactus puncta pro capacitate fiſtulae: non tamen inde ſequitur, aquam e pluribus ſuſpendi punctis, et ideo facilius ſuſtineri. Patebit in ſequentibus, aquam non ſuſpendi a tota ſuperficie interna tubuli, verum a ſola ſupremae ſectionis peripheria. Cumque per phaen. 12. §. 13. altitutitudines eleuationis sint reciproce proportionales diametris cauitatum *, patet in fistulis amplioribus aut angustioribus

---

* *Saepe vtar hoc phaenomeno, itaque operae pretium fuerit, vel in notis monere*, qua methodo *id cognouerim. Altitudinum mensura difficultatis nihil habet, sed mensura diametrorum; praecipue minorum. Equidem mensuratione per circinum actuali non potest exacte definiri diameter adeo pusilla. Vulgare artificium per insertionem setarum vel pilorum equi omni caret accuratione. Mensura capacitatis per pondus liquoris datam in fistula altitudinem occupantis, pluribus obnoxia est difficultatibus, ob defectus bilancium in minutiis, et inaequalitates tuborum in maiori longitudine, qualis necessaria esset, vix euitabiles. Substitui igitur aliud facilius et simul exactius mensurandi genus. Adhibui tubulum longiorem circiter* 30. *poll. angustum satis, sed cuius amplitudo ab vna extremitate ab alteram sensim sensimque nonnihil minueretur; humectaui illum sugendo aquam trans totum tubulum: tum vero mersa nonnihil extremitate ampliore admodum leniter extraxi tubulum, vt aqua vltra debitam altitudinem ingressa efflueret, neque in extractione saltus fieret, vbi aquam tubulus deserebat. Mensuraui altitudinem aquae in tubo suspensae* = a: *et conuerti tubulum in situm horizonti inclinatum sic, ut superiorem partem aqua occuparet, clauso hactenus orificio tubi opposito. Remoto postea digito, vidi descendere aquam pro inclinationis mensura satis tarde: clau-*

ribus nec plura nec pauciora esse suspensionis puncta pro

clausoque et aperto alternis orificio alterutro potui illam sistere in loco tubi quocunque, et ex mensurata columellae aqueae longitudine definire rationes diametrorum cauitatis. Cum ad extremitatem tubi angustiorem aqua peruenisset, mensus sum longitudinem, quam in tubo occupabat, = b: *et erecto verticaliter tubo vidi effluere nonnihil aquae, et reliquum suspendi. Annotaui et hanc altitudinem* = c, *et conuerti denuo tubum, vt eadem aquae copia in parte ampliori consisteret, mensuranda denuo illius longitudine* = d. *His factis potui conferre* a *et* b, *itemque* c *et* d, *competentes eidem aquae moli, maiori primo, dein minori. Fuit autem* $a:b = d:c$, *vt de bonitate operationis nihil dubitarem. Potui vero etiam contendere* $a:c$, *vidique esse sine sensibili discrimine* $a:c = \sqrt{a}:\sqrt{b} = \sqrt{d}:\sqrt{c}$. *Iam ex elementis notum est, posita diametro maiore* p, *minore* q, *esse* $p:q = \sqrt{b}:\sqrt{a}$. *Vnde sequitur* $a:c = q:p$. *hoc est: altitudines eleuationis esse reciprocas diametrorum amplitudinis. Obiter noto, cauendum esse, ne et externa tubuli latera aliquid aquae suppeditent: post suctionem aquae trans tubum praestare, vt et aer saltem semel transfugatur per fistulam, et quae sunt similia, attento scrutatori facile obuia. Praeterea etiam* diuersis *haec methodus adhiberi potest* fistulis, *si earundem orificia dextre noris sibi inuicem applicare. Denique, cum vniuersa hoc mensurandi ratio sit, qualem hic quaerimus, relatiua, potest* absoluta *fieri, si vnius solum tubuli diametrum noris definire in lineis, aut lineae partibus.*

pro quantitate aquae suspensae. Sunt enim hae quantitates peripheriis, quas diximus, omnino proportionales. Suspendatur autem, si ita velis, aqua ex tota tubuli interna superficie: erunt per idem phaen. 12. §. 13. superficies absolute loquendo aequales, et respectu capacitatum in angustioribus maiores. Cur igitur in angustioribus minor aquae moles suspenditur, et maior in amplioribus; si praecipue facilius sustinetur in gracilioribus? vti *Vossius* auctor est. §. 23.

XXXI. Melior est *Ioh. Alph. Borelli* caussa; non enim generalissime solum aduocauit aquae ad vitri latera adhaesionem, sed mechanicam magis magisque determinatam molitus est explicationem. Pertinent huc verba eius in Tract. *de Motionibus a Grauitate naturali pendentibus*: Propos. 185. p. 239. edit. Lugd. Batav. „In „cauitatibus, *inquit*, subtilium fistularum internus aquae „contactus grandis est et amplus, respectu illius aquae mo„leculae ibidem existentis: ergo subito ac infimum fistu„lae orificium attingit aquam, efficitur in eius interna „et caua perimetro efficacissimus contactus, a cuius ad„haesione fulciri sustinerique potest maius pondus, quam „habet pusilla aquae particula insinuata, et ideo gradus „praedictae virtutis suspensiuae et adhaesionis exercetur „in aqua subiecta, et proinde ea reddetur aliquo pacto le„uis, seu minus ponderosa, quam sit aqua collateralis li„bere premens. Et, quia minimae aquae particulae, „porositatibus et asperitatibus internis fistulae innixae, „efficiuntur operanturque, vt totidem *vectes*, quae fle„cti possunt et interne rotari, necesse est, vt partes a-

quae„

quae collaterales magis compressae a totali energia sui„ ponderis vim faciant, impellendo sursum particulas a-„ quae, quae minus comprimuntur a vectibus supra dictis;„ et ideo rotando excurrere possunt inferius efformando„ tumorem, vel monticulum aqueum, qui excurrendo la-„ teraliter altioribus fistulae porositatibus insinuabitur, ad-„ haerebitque, et ideo denuo imminuetur eius vis com-„ pressiua, renouabiturque caussa ulterioris suspensionis;„ et proinde altius aqua intra fistulam impelletur, et sic de„ nouo eminentioribus lateribus adhaerendo successiue al-„ tius impelletur, quousque ad supremam et maximam„ illam altitudinem aqua perducta, in qua aequilibrium„ cum aqua collaterali libere premente efficiatur: tunc„ quidem quies eius subsequetur, nec altius eleuari pot-„ erit.„

XXXII. In hac eleuationis oeconomia *multa bene* habent: sunt *aliqua* tamen, quae *auxilium* aliunde requirunt. Adhaeret, *ais*, vitro aqua fistulam subingressa, et ex hac alia quoque quasi pendula sustinetur: Eoque columna aquea fistulae subiecta non adeo fortiter deorsum premit, ac circumfusa collateralis. Esto id, si ita velis. An inde sequitur, eleuari altius columnam aquae priorem? Videtur id expectare Borellus: sed credo, grauitatem columnae huius aqueae intercedere huic fiduciae. Sit pondus columellae ita pendulae absolutum $=a+b$, et pars eius, quae per adhaesionem non fulcitur $=b$. Sequitur subiectam huic columellae aquam premi sola portio b: sed non ideo eleuabitur haec columna per alteram sibi vicinam, cuius pondus est $a+b$. Ad eleuationem

 enim

enim non hoc ſolum requiritur, vt preſſio *b* ſuperetur, ſed vt totum pondus columellae ($=a+b$) eleuetur ab actione alterius contiguae, cuius pondus itidem eſt $=a+b$. Finge pro particulis aquae globulos maiores ſolidos, et pro vi adhaeſionis ac viſcoſitate aquae funiculos, quibus globuli vitro proximi ex parte ſui ſuſpendantur a vitro: Minor erit illarum preſſio in ſibi ſubiectos, ſed non ideo tamen eleuari poterunt a collateralibus. Dum enim eleuari debent, totum illorum pondus ſurſum vrgeri debet, nec adhaeſio eleuationem *per ſeſe* adiuuat.

XXXIII. Fortaſſis inde peti ſubſidium poteſt: quod particulae poroſitatibus innixae efficiuntur operanturque *vt totidem vectes*, qui flecti poſſunt etc. Vellem Vir egregius hanc rem diſtinctius et ſpecialius enuntiaſſet, vt conferri cum effectu ſuo cauſſae menſura poſſet. Eſt, quid id fecerit: cuius dicta mox expendam curatius. Hic illud nota, monticulos et tumores, quos appellat Vir Clar. in eleuatione aquae, ſi recte mentem aſſequor, non ita obſeruari. In tubulis madefactis celerior eſt eleuatio, quam vt definiri figura ſupremae ſuperficiei certius poſſit. De ſiccis autem hoc notaui:

Phaen. 32 32. Dum aqua in fiſtulis ſiccioribus ſucceſſiue eleuatur, in parietibus primo aſcendit, et valde inaequaliter; non in medio tubuli.

33 33. Eademque in omnibus tubulis poſt eleuationem habet ſuperne concauam potius, non vero conuexam ſuperficiem.

Vtrumque hoc ideae repugnat Borellianae, ſi monticulos ſuos intelligit de eleuatione aquae in medio tubi.

Sin

Sin fortaſſis ſola particulae vnius aqueae craſſitie diſtare tumores illos a vitri parietibus voluerit, fatendum vtique eſt, contrarium per obſeruationes immediatas deprehendi non poſſe. Videtur autem huic theoriae minus congruere phaenomenon aliud a me obſeruatum.

34. Sit ſipho capillaris, et ſtatuatur ita, vt cruris breuioris orificium *a* pauxillum tantum ſub aqua mergatur; ſitque fiſtula interne madida: aſcendit aqua ad altitudinem eandem *dc* in crure longiore, ſiue integrum conſerues ſiphunculum, ſiue abrumpas in *b* a longiore crus breuius. *Phaen.* 34. *Fig. IX.*

Hic duo ſunt, quae Borellianae explicationi officiunt: non eſt hic pendens ex orificio immerſo guttula, e cuius ſuſpenſione rumpatur aequilibrium; neque eſt altior aquae columna orificio incumbens aperto. Tum vero ipſa aquae columna *ab* in ſiphone iſto non agit liberrime, ſed pars eius nonnihil ſuſtentatur a lateribus vitri in crure breuiore. Quid igitur eſt, quod aquam eleuat ex *d* in *c*?

XXXIV. Deficit etiam Borelliana expoſitio in hoc, quod neſcias, *an* ex mente Viri eximii adhaeſio aquae *ad totam* tubuli *ſuperficiem* attendi debeat, vel ſecus? Primum videtur ex diſcurſu eo, quo maiorem aquae in fiſtulis gracilioribus altitudinem explicat. Namque Propoſ. 188. p. 243. id phaenomeni hinc infert, quia adhaerentia et connexio aquae *parietibus internis*,, *canalium* maiorem proportionem ad molem aquae in-,, ſinuatae extenſiue et intenſiue in canaliculis ſubtiliſſimis,, habet, quam in amplis et capacioribus.,, *Extenſiue*

 quia,,

„quia vis adhaesionis mensuratur a contactibus, et ideo „ *a superficie interna* canaliculorum; e contra resistentia „mensuratur a pondere cylindri aquei contenti in iisdem „canaliculis; estque proportio cylindrorum aqueorum „eiusdem altitudinis duplicata eius rationis, quam habent „eorum perimetri internae etc.„ *Intensiue* „quoniam „facultas et energia adhaesionis minus efficax est, quan„to magis a parietibus remouetur.„ Equidem hic, nisi me omnia fallunt, adhaesio consideratur respectu totius superficiei internae, quam aqua contingit.

XXXV. *Secus* rem definire *videtur*, cum alteri phaenomeno explicando incumbit. Memorat Propos. 187. p. 241.

Phaen. 35. 35. Aquam in fistula magis demersa non altius eleuari, quam in ea, quae aquam aut aerem tangit; quin imo pag. seq. tradit, aquam in aere altius suspendi, quam cum inferius orificium aquae immergitur.

Vt haec cum adhaesione aquae ad vitri latera reducat in concordiam, contendit, aquam fistula comprehensam „ *non* reddi *leuiorem ob internum contactum fistu*„*lae*; nam *internam* fistulae *superficiem*, cum sit madida „*nihil aut parum impedire vim grauitatis* aquae contentae „intra fistulam; patere id experimento, cum in aere „transferatur fistula, tunc enim aquam intra cauitatem e„ius madidam libere moueri et descendere: praecipuum „impedimentum in *extremo fistulae orificio* reperiri; non „intra aquam, sed postquam aerem contigerit.„ Vult enim infimas aquae particulas quasi aliquod rete tensum et resistens constituere in libero aere, cui adeo inniti portiuntiuncula quaedam aquae ſuperioris poſſit: ſed dum illae aquam contingant, ſolui rete, et deſcendere hanc portiunculam etc. Hic, fateor, videri mihi, quod non amplius tota tubuli interna ſuperficies veniat in computum Viri. Quid ergo? Dicendum eſt, aut me non aſſequi mentem eius: aut illam ſibi non penitus conſtare; ſaltem non omnia hic eſſe ad liquidum deducta.

XXXVI. Excoluit hypotheſin Vir ingenioſus, *Ludouicus Carré*, cuius meditata legi poſſunt in *Memoriis Acad. Scient. Pariſ.* ad A. 1705. p. 317. ſeqq. edit. Batau. Summa huc redeunt capita. *Primo* adhaeſionem aquae ad tubi latera, eiusdemque ad eleuationem aquae concurſum ex eo probat, quoniam.

36. Si ſebo liquefacto internos tubuli parietes in- *Phaen.* 36
unxeris, non aſcendit aqua interior vltra libellam cum exteriore.

37. Atque ſi partem ſolum ſuperficiei internae ſic illeueris: aqua ex eo latere non eleuabitur; eleuabitur autem ex altero, quo nihil ſebi tubulus accepit. 37.

38. Praeterea, ſi profundius aquae immergatur fiſtula, quam ſebo vncta eſt, aſcendet aqua ſupra libellam in tubulo. 38

39. Denique, ſi guttula aquae per exteriorem fiſtulae ſuperficiem deſcendat, illa tubum intrabit dilapſa ad vsque infimum eius orificium, ſi ſebo non inunctus fuerit; ſin fuerit, non vtique haec guttula fiſtulam ingredietur. 39

Secundo ipſam eleuationis oeconomiam ſic concipit: Dum vitri parietibus adhaeret contigua aquae portio: ſuſtentatur illa, et minus grauitat in fundum vaſis, quam

 col-

collaterales aquae columellae. Itaque ab hisce praeualentibus eleuatur. Sit AB superficies verticalis; et
Fig. X. corpus quodcunque FD vna sui extremitate innitatur puncto D; Sit C eius centrum grauitatis: certum est, si hoc corpus debeat sustentari in puncto F per potentiam quamcunque *x*, fore DF ad DC, vti est grauitas corporis DCF deorsum nitens, ad potentiam praedictam. Ita igitur particulae aqueae vitro proximae sustentantur ex parte a fistulae lateribus; neque tota sua vi grauant fundum vasis: igitur eleuantur a lateralibus columnis tamdiu, donec altitudo reddat, quod per adhaesionem decessit, atque adeo iterum emergat aequilibrium.

Tertio ex hisce principiis resoluit quaestiones huic argumento connexas. *Cur non eadem fit eleuatio in superficie tubuli externa*, cui non minus adhaerent particulae vitro contiguae? Quoniam intra tubum sese mutuo sustentant particulae, atque sic eleuationi suae auxiliantur: non item extra tubulum; vbi accidit, quod intra ampliores etiam tubos fieri videmus. *Cur in gracilioribus altior est aquae supra libellam eleuatio?* quoniam vis adhaesionis mensuratur a superficie interna fistularum, et resistentia ex pondere columnarum aquae contentae; sunt autem hae in ratione duplicata diametrorum cauitatis, illae in simplici; itaque superficies amplioris tubi minor est respectu aquae suae, et minor vis adhaesionis. *Cur spiritus vini*, leuior aqua, *non eleuatur altius, quam aqua?* Credibile est, aquae maiorem esse contactum ad vitri latera, quam spiritus vini, etsi leuioris, et fortasse diuisibilioris. Si a columnis aquae collateralibus eleuatur

tur aqua, *cur extracto ex aqua tubulo eadem non effluit,* sed suspenditur in fistula? quoniam paruulum eius pondus non sufficit ad superandam resistentiam, quam aer diuulsioni suae opponit, aut pressionem, qua corpora se leuiora sursum pellit. *Cur in tubis aequalibus* aequaliter aut inaequaliter *inclinatis aqua semper ascendit ad eandem altitudinem perpendicularem*? Quia momentum aquae non ex pondere eius absoluto mensuratur, sed per altitudinem verticalem, vti constat ex hydrostaticis. Denique

40. Si in tubo sicco ascendat aqua vsque in C, eadem in madefacto ascendet altius, v. g. in D. Si mergas tubum, vt aqua amplius ascendat, et denuo illum extrahas, descendet aqua et formabit pendulam in B guttam; ipsa tamen haerebit vltra D v. g. in E. Si aquam denuo attingat gutta B, descendet aqua ex E in D; et ex aduerso, si in tubulo extracto haeserit ad C, ascendet illa vsque in D, cum aquam attigerit. *Phaen.* 40 *Fig.* XI.

Quae istius rei ratio est? Nimirum sequuntur haec ex perpetuo rerum ad aequilibrium nisu, quo fit, vt aqua nimium alte sublata in E vsque descendat, cum potest; et minus alta ex C in D ascendat. Haec est Viri Praestantissimi *Theoria*, in compendium redacta: applicationem eius ad secretionis animalis negotium non est huius loci attingere.

XXXVII. Equidem haec ita animo blandiuntur, vt neminem nisi inuitum huic expositioni contradicere posse arbitrer; adeo vt mirum non sit, et ipsum Auctorem, et ex eo tempore plures alios eidem acquieuisse. Sunt

Sunt *aliqua* tamen, quae *diſſimulari non debent*. *Praecipuum* hoc eſt. Ex ſententia Carréana ſequitur: Cum tubulus aequaliter amplus immergitur aquae profundius, aquam eleuari debere ad altitudinem maiorem. Intuli id ex eo, quod maior hoc in caſu ſuperficies eſt interna tubuli, cui aqua innititur; adeoque plus decedit ponderi columnulae in fiſtula contentae; namque totam ſuperficiem internam vocari in ſubſidium vidimus. Suſpicarer, me in hac illatione falſum, aut minus perfecte mentem Viri aſſecutum eſſe, niſi bonam eſſe hanc conſecutionem *Illuſtris Academiae Hiſtoricus* teſtaretur. „Sequitur, *inquit*, ex hiſce principiis, altius eleuari a„quam, quando cauitas tubuli eſt anguſtior, aut immer„ſio tubuli profundior.... Secundo caſu maior colu„mnae aqueae, tubum ingreſſae, pars fulcitur a lateri„bus. Atque hic caſus explicari per inaequalem aeris „preſſionem non poteſt.„ Optime iſta, ſed appellemus experientiam. Vidi repetitis ſaepe tentaminibus:

Phaen. 41 41. In tubulo aeque amplo et humectato aquam eleuari ad eandem altitudinem, ſiue merſus ſit profunde tubulus, ſiue attingat ſolum ſupremam aquae ſuperficiem, idque in vacuo non minus, quam in libero aere; et in omnibus hiſce caſibus aſcenſum eſſe promtiſſimum. Vidi eadem omnia fieri, cum tubuli loco ſiphonem adhibui, qualem phaen. 34. deſcripſimus.

Ego vero, ne fallerer apparentibus, adhibui tubulum omnino longiorem, eundemque alternis ita immerſi, vt aqua eleuata eundem ſemper locum in tubulo attingeret, mergendo nunc ex vna parte 27. poll. nunc duos

ex

ex altera. Cum enim cylindrici perfecte tubuli vix occurrant, fieri vtique poteſt, vt pro maiori immerſione maior ſit aquae ſupra libellam eleuatio, ſi ſcil. tubulus extra aquam eminens ſenſim anguſtior fiat: poteſt etiam fieri, vt pro maiori immerſione minor eleuatio ſit, ſi augeatur ſenſim cauitas tubuli extra aquam reſidui. Vidi exempla facti vtriusque, vt adeo neceſſum non ſit, ſi-qui congrua hypotheſi phaenomena vidiſſe ſe teſtentur, ſolicitare fidem eorum: ſed coniicere cauſſam liceat in differentias nonniſi poſt multam cautionem ſenſibiles.

XXXVIII. Vt haec preſſius examinentur, reduci ad calculum poſſunt ſequentem. Hypotheſis Carréana annulo aqueo cylindrico, ſuperficiei internae vitri contiguo, minorem aſſerit grauitationem deorſum, quam pro pondere ſuo naturali. Eſt enim potentia ſuſtentans particulam quamcunque in DF, quae aequatur preſſioni eius in F, ex §. 36. ad pondus abſolutum particulae ($=p$) vti DC ad DF. Sit igitur diameter luminis tubi $=2b$. Altitudo aquae capillaris, hoc eſt, eleuatio eius ſupra libellam cum exteriore $=d$. Profunditas immerſionis orificii inferioris in aquam $=a$. Latitudo annuli cylindrici memorati $=c$. et ratio radii ad peripheriam circuli $=\varrho:\pi$. Erit tota preſſio columnae aqueae externae, cuius baſis aequatur orificio tubuli, et altitudo profunditati merſionis tubuli, $=\frac{\pi abb}{2\varrho}p$: Et huic per hypotheſin aequari debet preſſio columnae, aqueae in tubulo contentae. Haec autem preſſio fit partim ab annulo praedicto, lateribus vitri contiguo, cuius baſis

$=\frac{\pi}{2\varrho}(2bc-cc)$ et altitudo $=a+d$, et preſſio ad pondus abſolutum, vti DC:DF. Ponendo igitur DC:DF$=m$ erit preſſio huius annuli in ſubiectam ſibi aquam $=\frac{\pi}{2\varrho}(2bc-cc)(a+d)mp$. atque haec vna pars eſt preſſionis aquae internae: altera fit a nucleo aquae cylindrico, intra hunc annulum comprehenſo, cuius baſis $\frac{\pi}{2\varrho}(b-c)^2$ et altitudo $=a+d$; adeoque pondus abſolutum et preſſio in aquam ſibi ſubiectam $=\frac{\pi}{2\varrho}(b-c)^2(a+d)p$. Habetur igitur per hanc hypotheſin aequatio fundamentalis

$$\frac{\pi}{2\varrho}abbp=\frac{\pi}{2\varrho}(b-c)^2(a+d)p+\frac{\pi}{2\varrho}(2bc-cc)(a+d)mp.$$

Siue $\quad abb=(b-c)^2(a+d)+(2bc-cc)(a+d)m.$

XXXIX. Hic iam ſponte fluunt pleraque. Si aequationem reducas ad literam d pro inuenienda altitudine capillari ſub datis circumſtantiis, fiet

$$d=\frac{2abc-acc-am(2bc-cc)}{bb-2bc+cc+m(2bc-cc)}$$

vbi patet, valorem ipſius d fieri variabilem, variata a profunditate immerſionis: manente enim tubuli amplitudine eadem, b eadem eſt per hypotheſin, et c eadem ſine ſine dubio: adeoque valor ipſius d propter litteram a numeratori formulae inuolutam maior erit pro maiori fiſtulae immerſione, vti §. praecedente 37. iam admonui. Viceverſa, ſi aſſumta d conſtante ex phaenom. 40. reducas aequationem ad c latitudinem annuli vitro adhaerentis, erit

$$c=b-b\sqrt{\frac{a-ma-md}{a+d-ma-md}}=b-b\sqrt{\frac{md+ma-a}{md+ma-a-d}}$$

fietque annuli latitudo, in tubo etiam cylindrico, inaequalis pro immerſionis profunditate; quod etſi in calculo ſo nihil adhuc abſurdi inuoluat, phyſice tamen minus congruum eſt. Cur enim plus aut minus adhaereat lateri per aſperitatem lateris et glutinoſitatem aquae, ſi plus aut minus profunde merſa fuerit eadem fiſtula? vt nihil dicam de proportione admodum complicata, quae obtineret inter a et c, ſi curari deberet, vt poſita a arbitraria ſemper idem valor ipſius d prodiret?

XL. Melius iſta patent, quando ſubſtitutis literarum loco numeris abſolutis et per experientiam definitis intelligimus prodire valores minus vtique commodos. Dabit experimenta Vir ſolertiſſimus.

42. Monet enim, ſe adhibitis tribus tubulis, quorum diametri cauitatis fuerint $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ vnius lineae, obſeruaſſe altitudines capillares 10, 18, 30 linearum. vid. Memorias Acad. Scient. Pariſ. ad A. 1705. p. 318. Liceat quartum addere prioribus, quo cognoui, in fiſtula diametri 1. lineae altitudinem capillarem fuiſſe 3. lin. *Phaen.* 42.

Quae vtique omnia ſatis conueniunt cum propoſitione §§. 13. et 30, qua iniungitur, vt altitudines capillares ſint reciprocae diametrorum cauitatis. Poteſt vero examen propoſitum inſtitui dupliciter. Certum eſt, c ſiue latitudinem annuli minimam fore, ſi fingas totam illius annuli preſſionem ſufflaminari, et vitro adhaerere; adeoque $m=0$. Videtur vero etiam, naturae id eſſe prae ceteris conueniens, vt centrum grauitatis C fingatur in medio particulae DCF, adeoque vt fiat DC : DF $=1:2$, et conſequenter $m=\frac{1}{2}$.

XLI. Sit primo loco $m=0$. adeoque $c=b-b\sqrt{\frac{a}{a+d}}$.

Sitque $a=1$. lin. namque ita licet, per phaen. 41. §. 37. erit c in primo experimento $=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{1+10}}=\frac{1}{6}-\sqrt{\frac{1}{396}}$ id quod excedit $\frac{1}{9}$ lin. In ſecundo erit $c=\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\sqrt{\frac{1}{19}}=\frac{1}{12}-\sqrt{\frac{1}{2736}}$, quod ſuperat $\frac{1}{16}$ lin. In tertio eſt $c=\frac{1}{20}-\frac{1}{20}\sqrt{\frac{1}{31}}=\frac{1}{20}-\sqrt{\frac{1}{12400}}$, quod paulo plus eſt, quam $\frac{1}{25}$ lin. Denique in quarto erit $c=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ lin. Sit iam ſecundo loco, $m=\frac{1}{2}$ prodibit valor ipſius $c=b-b\sqrt{\frac{a-d}{a+d}}$, hoc eſt in primo caſu $=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1-10}{1+10}}$, in ſecundo $=\frac{1}{12}-\frac{1}{12}\sqrt{\frac{1-18}{1+18}}$, in tertio $=\frac{1}{20}-\frac{1}{20}\sqrt{\frac{1-30}{1+30}}$, in quarto $=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1-3}{1+3}}$, neque poſito $m=\frac{1}{2}$, euitari poterunt imaginarii valores, niſi a ſit maius, quam d; vel poſito $a=1$, et d numero quocunque maiore, niſi m ſit minor, quam $\frac{a}{a+d}$, quorum vtrumque neceſſitates obtrudit ab experientia alienas. Notandum vero eſt circa hos valores imaginarios, intelligi hac ratione, quod latitudo illa annuli non facile concipi poſſit vt compoſita ex pluribus aquae particulis ſibi inuicem innexis. Etſi enim hac excuſatione euitari poſſet incommodum de nimia vnius particulae aqueae mole: non facile alterum poterit caueri de valoribus imaginariis; hic enim credibile eſt, fore valorem ipſius $m=\frac{1}{2}$, vel etiam omnino maiorem.

XLII. Eſt et aliud, quod dubium habere lectorem poteſt. *Latitudo annuli* a lateribus fiſtulae ſuſtentati penitus aut ex parte, per ipſum huncce computum *maior* prodit *in* tubis *amplioribus*, quam in ſtrictioribus. Patet id ex modo dictis. Sed vero ſcriptoribus de hoc argumento omnibus, ipſique etiam Auctori ſententiae conſtanſtanter viſum eſt, anguſtiam tubuli magis fauere ſuſpenſioni liquorum, quam amplitudinem. Audiuimus Borellum §. 34. et Carreum §. 36. cui adde dicta Illuſtris Hiſtorici, ad A. 1705. p. 30. med. Incubuerunt ſcilicet Viri induſtrii huic curae vt maiorem in fiſtulis anguſtioribus altitudinem explicarent: Cur non etiam illi, vt maiorem aquae quantitatem in amplioribus tubulis eleuatam reducerent in concordiam ſententiae ſuae? Eadem eſt in vtroque tuborum genere ſuperficies interna: Si facilior eſt in anguſtioribus adhaeſio, cur plus aquae adhaeret amplioribus?

XLIII. Poſſent plura addi ſpecialia, cuiusmodi forent de tubulis ſibi mutuo inſertis, vbi calculo non videtur cum experientia conuenire; vel vbi tubulus adhibetur inaequalis ſub aqua amplitudinis, et ſimilia, quibus nolo immorari. Si quis enim, quae hactenus dixi, ſciat cum hypotheſi Carréana, rectius fortaſſis intellecta, combinare, de ceteris non deſpero phaenomenis. Viderint itaque, quibus id volupe eſt, *an recte intellexerim* meditata Viri, et conſequenter, an, quae hic attuli, ad rem pertineant, vel ſecus? Facile cedam rectiora monentibus.

XLIV. Supereſt *tertia* explicationum *claſſis*. Suppeditant illam Philoſophi quidam *Angli*, gens menſurarum et curioſiſſima et ſcientiſſima. Illi cauſſam huius phaenomeni quaerunt in attractione corporum mutua. Creditur enim, a vitro aquam ſibi proximam attrahi, et attrahi fortius, quam aqua trahitur ab aqua: Ex aduerſo mercurium trahi quidem a vitro, ſed trahi debilius, quam a mercurio. Itaque ſupra libellam eleuari ab hac vitri virtute aquam; et mercurium renitentia ſua obſtante conſiſtere infra libellam, quando fiſtulae ſunt graciliores.

XLV. Primus, qui attractionem iſtam in ſubſidium hoc loco vocauit, quod ego ſciam, *Hauksbeius* eſt. Opinatur vero, totam tubuli internam ſuperficiem aquae contiguam trahere aquam. Id experimentis minus conuenire, ciuis eius, Iac. Iurinius admonuit. Nimirum propter phaen. 12. §. 13. et 30. ſuperficies interna tuborum, aquae vltra libellam eleuatae contigua, eadem eſt in omni tubo, eademque fauorabilius conſtituta in anguſtioribus, quoniam minor eſt particularum aquae mediarum diſtantia a parietibus: Cur igitur plus aquae attollitur in amplioribus? an eadem cauſſa fauorabilius applicata effectum producit minorem, quam applicata debilius? Potuiſſet hoc incommodum Hauksbeius praeuidere, namque et ipſe rationem diametrorum inuerſam obſeruari in altitudine aquae capillari annotauerat. v. Curſ. Experim. Tab. 10. Pneumat. fig. 4. et 5.

XLVI. Fortius adhuc argumentum eſt ſub iis circircumſtantiis, quibus id Iurinius produxit l. c.

Phaen. 43. *Fig. XII.* 43. Si tubus CDE conſtat duabus partibus ampliore et anguſtiore, ſitque altitudo, ad quam aqua in anguſtiore cylindrico aſcenderet, aequalis altitudini totius tubi; altitudo vero, ad quam in ampliore cylindrico eleuaretur, nonnihil maior altitudine partis anguſtioris in tubo DE: Repleatur tubus aqua, et mergatur pars anguſtior ſub aquam, cadet aqua tubo incluſa vsque ad

eam

eam altitudinem, ad quam eleuaretur in tubo ampliori cylindrico; ſin pars amplior merſa fuerit, omnis in tubo DC ſuſpenſa haerebit aqua.

Hic eadem eſt ſuperficies attrahens, non ſolum aequalis, et diuerſimode conſtituta: Cur igitur in vno caſu omnis ſuſpenditur aqua, in altero non item?

XLVII. *Praeſtat* igitur hypotheſi priori *Iuriniana*, quae et ſuſpenſionem aquae repetit ab attractione ea, quae fit a ſola ſuperficiei ſupremae peripheria, et eleuationem a proxime contigua. *Primo* id rationi magis conuenit, haec enim ſola tubi pars eſt, a qua ſubſidens liquor teneretur recedere? ſola, ad quam aſcendens liquor accedit proxime: ſola igitur, quae vim ſuam attractiuam exercere ad ſuſtentationem aquae vel eleuationem nouam poteſt. *Secundo* menſuris reſpondet. Infinita ſunt phaenomena, quae docent altitudinem eleuationis reſpondere diametro, adeoque et peripheriae ſuperficiei ſupremae, cum de aqua quaeritur, et infimae, cum de mercurio; vtrumque ita, vt altitudines ſint inuerſe, et quantitates aquae vel mercurii ſuſpenſi in tubulis cylindricis directe vti diametri. Accipe experimentum Viri eximii.

44. Sit EDC tubus parte ampliori et ſtrictiori inſtructus; denotet AF altitudinem eleuationis, quae reſpondet parti ſtrictiori, et GB altitudinem capillarem tubi amplioris: Sit autem DC minus, quam AF. Mergatur tubi orificium amplius, et impleatur tubus ad altitudinem maiorem quam GB, deſcendet aqua quamprimum libera erit, vsque ad altitudinem GB ſupra libellam. Mergatur denuo tubus, vt aqua attingat partem *Phaen.* 44. *Fig. XII.*

ſiſtufiſtulae graciliorem et extrahatur iterum ſucceſſiue, ſuſpendetur tota aquae columna DC.

Equidem hic nihil eſt, quod aquam altius ſuſpendere poſſit, quam contactus eius ad peripheriam tubi ſtrictioris. Vnde etiam fit, vt inuerſo tubo, merſoque orificio ſtrictiore, altitudo aquae eleuatae maior obtineri non poſſit, quam GB, ſi ſuprema aquae ſuperficies conſtituitur in tubo ampliore.

XLVIII. Eſt haec adeo amica naturae proportio, vt, ſi tubi amplioris loco *magnum* fiſtulae graciliori *vas* adiunxeris, poſſis tamen ſuſpendere aquam ad altitudinem peripheriae ſtrictioris tubuli conuenientem. Debeo hoc moniti eidem *Iurinio*, qui obſeruat,

Phaen. 45 45. Si vaſi ampliſſimo, ſed altitudinis paulo minoris, quam quae conueniat eleuationi aquae in tubulo mox memorando, affigatur ſuperne tubulus capillaris minutae admodum diametri; ſi vas illud aquae immergatur, donec aqua tubulum ingrediatur: poſſe omnem illam in vaſe contentam aquae molem ope huius vaſis eleuari ſupra libellam cum exteriori.

Vnde Corollarium ſatis *paradoxum* ſequitur, poſſe ſcil. molem aquae quantamcunque ope tubuli capillaris eleuari ſupra libellam ambientis.

XLIX. *Non* debet *obiici* his dictis: Si peripheria tubi ſtrictioris nonniſi columnam aqueam altitudinis AF ſuſtentare poteſt in tubulo gracili cylindrico: quomodo illa ſufficit columnae aeque altae, cum tubus inferne amplior, et moles aquae maior eſt? Vel vice verſa: Si peripheria tubi amplioris CD poteſt eleuare columnam aeque

aeque amplam ad altitudinem GB; cur non altius eleuare poteſt aquam, ſi pars huius altitudinis occupatur a tubo ſtri-ctiore, atque adeo minor eſt aquae moles? *Reſpondet* Vir iudicioſus ex vulgari hydroſtatica. Molem quidem aquae in his caſibus inaequalem eſſe: Sed praeter molem conſiderari et velocitatem debere, qua deſcendere debe-ret ſuprema aquae ſuperficies, ſi inferior aqua efflueret. Momenta, *inquit*, vtriusque columnae aqueae fig. 12. §. „ 47. eadem ſunt, ac ſi tubuli ED et CD vsque ad aquam „ in AB ſtagnantem conſeruarent amplitudinem eandem; „ ſiquidem velocitates aquae, vbi ampliantur vel contra- „ huntur tubuli, ſunt ad velocitates prope peripheriam „ attrahentem reciproce vti ſectiones harum columna- „ rum. „ v. l. c. p. 427.

L. Non poſſum diſſimulare, *hypotheſin* hanc adeo commode phaenomenis *reſpondere*, et eorum *menſuris*, vt omnino doleam, miſceri et officere illi vulgarem de attractionibus litem. Placet induſtria Viri praeſtantiſ-ſimi, qua hypotheſin ſuam ſic inſtruxit, vt ea data ſequan-tur, quae debent. Diſplicet imbecillitas mea, qua attra-ctionem proprie dictam in corporibus concipere non da-tur. Sed fortaſſis ſolui hoc vinculo poſſumus indulgen-te Auctore egregio. Quidſi hoc ſolum velit: Attra-ctionem aquae ad vitrum eſſe phaenomenon generale, quo poſito ſpecialia ordine ſuo omnia ſequantur; ipſius vero attractionis cauſſam dari corpoream, ſed nobis inco-gnitam. Nihil in ea excuſatione indignum eſt hypothe-ſi, nihil a regulis philoſophandi alienum. Nimirum, vbi plenam dare cauſſarum analyſin non licet, ſubſiſtendum eſt in cauſſa proxima ſpeciali, aliquando etiam in phaenomeno generali.

LI. Cum haec prima vice expenderem, viſum eſt dari phaenomenon aliud, quod *impediat fortiorem* aquae ad vitrum, quam ad ſeipſam concedi attractionem, et fortiorem mercurii ad ſe, quam ad vitrum.

Phaen. 46 46. Cum aqua trans tubum ſugitur gracilem, idemque madidus horizontaliter reponitur; obſeruare licet, *particulas aquae* lateribus fiſtulae internis adhaerentes, ſenſim ſenſimque *coire* in *cylindrulos* aqueos, totam internam cauitatem replentes; terminari illos vero ſuperficiebus concauis.

Ex aduerſo mercurius, a quo coitum in bullulas expectaueram, non coire, ſed longa ſerie continuatus inordinate in tubo ampliore viſus eſt quieſcere. Id maiorem vitri attractionem oſtendiſſet ratione mercurii, niſi poſtmodum animaduertiſſem, impurum eum eſſe, qualem diducere etiam ſuper charta vel ligno licet; ſed

47. 47. *Mercurium* puriorem in fiſtula etiam anguſtiori coire primo in *ſphaerulas*, et, ſi illae augeantur, in columnulas cylindricas, ſuperficie autem conuexa terminatas manifeſte patuit repetitis tentaminibus.

Poſtremum hoc plane conuenit *Iurinianae* hypotheſi, neque phaenomenon aquae penitus aduerſatur, ſi huc transferas, quod alia occaſione *Vir ingenioſus* monuit, cum de gutta mercurii inter duas aquae ſuperficies conſtituta differeret. Ait enim

48 48. Si guttulam mercurialem ex oppoſitis lateribus contingas binis tubulis vitreis, attractionem oriri inter vitra

vitra et mercurium; ſic, vt diductis paulisper tubulis figura guttulae ſphaerica in oblongam tranſeat, ſequente vitri latera mercurio;

Non, quia fortius attrahitur *ceteris paribus* a vitro mercurius, quam a ſeipſo; ſed quia maior eſt numerus particularum mercurii, quae vitrum contingunt, quam earum, quae a ſe inuicem recedunt. Hic enim maior non eſt, quam pro differentia ſuperficiei genitae ex mutatione figurae prioris; ille autem reſpondet integrae ſuperficiei planae, quae vitrum contingit. v. l. c. p. 435. Si hoc, aut ſimile aliquid applicari ad aquam in phaenomeno noſtro 46. poteſt, ſalua eſt etiam hac parte ſententia.

LII. *Difficillimum* fortaſſis in omni ſententia phaenomenon eſt, ipſi, quem commendauimus, Auctori ſollicite expenſum, illud, quod §. 20. ph. 22. recenſuimus: namque non ſolum in aere, ſed

49. Etiam *in vacuo* ſuccedit experimentum l. c. memoratum. Sit tubus inaequaliter amplus, et immergatur in aquam aere ſuo purgatam nonnihil profundius, madefiat ſuperne tubulus in vacuo, et extrahatur aliquantum: apparebit altitudinem vtriusque aquae ſimul ſumtam reſpondere altitudini, quae conuenit tubulo anguſtiori, et multo maiorem eſſe, quam quae ampliori debetur. *Phaen.* 49

Hic vero artis eſt, oſtendere cauſſam facti. Si tubulus eſſet *cylindricus* totus, facile negotium foret; dici enim poſſet, actionem peripheriae D deſtrui per actionem peripheriae C, adeoque rem perinde eſſe, ac ſi co- *Fig. XIII.*

 lumel-

lumella AD et BC essent contiguae: Fateor tamen etiam hic quaeri posse, annon similiter dicere deceat, actionem peripheriae A destrui per actionem peripheriae D, adeoque columellam AD, *saltem in vacuo*, debere descendere; quodsi enim aer occupat locum DE, potest peripheria C sustentare columellam AD, mediante aeris interpositu.

LIII. Pro tubis *inaequabilibus* difficilior res est etiam *in ipso aere*. Nihil potest esse amoenius explicatione *Iuriniana*, quam p. 429. libri citati legimus. Reducit non sine artificio hunc casum ad alium faciliorem, quo non interrupta est aere intermedio columna aquae angustior et amplior. Pressioni scil. atmosphaerae in basin BC opponitur cum pondere aquae in FGCB etiam elater aeris inter DFG conclusi. Minor itaque est hic elater quam grauitas atmosphaerae pro ratione altitudinis FB. Idem vero opponitur etiam, et cum attractione peripheriae in A aequiualet grauitati aeris externi super A prementis: itaque haec attractio aequatur pressioni aquae ad altitudinem FB, et super basi A, eleuatae. Egregie vero ista omnia, superest *scrupulus* tantum. Cur nulla fit mentio *peripheriae inferioris* D guttulae AD? annon dici potest, quantum guttula A sursum trahitur a contactu peripheriae superioris, tantundem trahi illam quoque deorsum a contactu inferioris: destruere igitur se inuicem contrarias tractiones, et rem omnem resolui in peripheriam FG, quae non sufficiat altitudini FB? An omnino negligi debet haec superficies D deorsum trahens? et, cur eo casu altitudo aquae, non fit maior,

Fig. XIII

ob

ob duas ſuperficies attrahentes in A et in FG? An peripheria FG ſurſum trahens, et peripheria D deorſum vrgens ſemper ſibi aequiualent? et quae cauſſa eſt, vt amplior FG non pro ſua diametro trahat, ſed pro altera in D, aut vice verſa? An etiam hic recte dicitur, quod §. 49. dictum eſt? momenta harum peripheriarum trahentium eſſe aequalia, et contraria; itaque deſtrui tractionem alteram ab altera: fieri hic tractionem pro ſuprema peripheria, non obſtante, quod fluidum aqueum aereo interruptum ſit; vti in vulgari hydroſtatica preſſio fit pro infima ſuperficie, etſi diuerſa ſibi incumbant fluida.

LIV. Notari tamen, ſi recte diuinaui, etiam hoc debet, aeris operam huic expoſitioni neceſſariam eſſe. *Quid* igitur factu opus, cum *in vacuo* experimenta ſuccedunt eadem? *Hic aqua baeret*: et haeret pertinacius, quam velles. Nondum licuit repetere experimentum Viri Clariſſimi, ſed memorabilius eſt, quam vt hic omitti poſſit.

50. Aſſumto tubo, cuius longitudo erat 35. poll. diameter cauitatis $\frac{1}{4}$ poll. et ſummitas in tubulum vere capillarem diducta; impleuit tubulum aqua ab aere ſuo perpurgata, et vidit omnem hanc aquam ſuſpendi in vacuo, vt ante diximus phaen 49. Hic vero iuſtum eſt requirere, quae ſuſpenſionis iſtius oeconomia ſit? *Phaen.* 50.

Non deeſt ſibi aut ſententiae ſuae ingenioſus Auctor. Accipe verba: „optima, quae mihi ſuccurrit, ad hanc diffi-„ cultatem *reſponſio* haec eſt: cohaeſionem inter aquam,„ fiſtulae ſupremae capillaris, et tubi inferioris, ſufficere „

„ad sustentandum pondus columnae suspensae. Sed quo-
„usque haec cohaesio dependeat a pressione alicuius me-
„dii subtilis adeo, vt penetrare campanam possit, id ve-
„ro meretur considerationem. Etsi enim eiusmodi me-
„dium non minus aquae quam vitri poros peruadat, a-
„git tamen integra sua pressione in particulas, vt sic di-
„cam, solidas superficiei aquae in cisterna contentae:
„cum ex aduerso omnes illae aquae in tubo particulae,
„quae directe subiacent particulis aquae superioribus (*in*
„*capillari fistula contentis*) per easdem tutae redduntur
„ab isthac pressione. Consequenter pressio huius medii
„in superficiem quamcunque tubuli amplioris sub capilla-
„ri fistula positi minor erit pressione eiusdem medii in
„superficiem priori aequalem, sed in vase ampliore as-
„sumtam; adeo vt differentia harum pressionum susten-
„tet columnam aquae in tubulo contentam.„

LV. Equidem dari fluidum premens aere subtilius, cui trans vitrum via pateat, multa nobis phaenomena persuadent, quorum partem loco citato videas ab ipso Viro Egregio allegatam. Vnum me habet anxium. *Fig.* X II Non potest hoc medio vacuum concipi spatium DFG; quia vitrum peruadit. Quodsi vero plenum est eo medio spatium DFG, non video, quomodo pressio eius in superficiem FG impediatur ab aqua fistulae capillari AD inclusa? Cur fluidum hoc subtile non agit in totam superficiem FG, et tota sua pressionis vi, si contiguum est huic superficiei non minus, quam alteri in cisterna sumtae? Facilius feram, ab eiusmodi fluido deriuari effectum suspensionis mercurii aere suo purgati in tubo Baromemetrico vltra conſuetam altitudinem, ad vsque 70, vel 75 pollices, quod phaenomenon Clar. Autori placuit huc referre: Dicerem eo caſu, particulas mercurii vitro ſuperne contiguas defendi a vitreis illis contra preſſionem huius fluidi; vnde etiam accidat, vt mercurius leui ſuccuſſione a ſupremo tubuli contactu ſemel auulſus nonniſi ad ordinariam ſuſtentetur altitudinem; nimirum pro mea coniectatione, hoc fluidum, vbi ſemel tubum intrauit aliqua ſui copia, aequaliter ſupremam mercurii ſuperficiem in tubulo vrget, ac infimam in vaſe ampliore aeri expoſitam. Quid ergo, *inquis*, de phaenomeno hactenus memorato fiet? commendo illud repetito Autorum examini.

LVI. Iſta vero de praecipuis phaenomenorum explicationibus. Vidi *plures*, quas nolim examinare; alias, quoniam nimis commentitiae ſunt; alias, quoniam minus ſpecialiter expoſitae ab Auctoribus ſuis. Quid *mihi* videatur, exponam diſſertatione *ſecunda*, quae plura etiam de his tubulis experimenta continebit, et concluſiones aliquot eisdem ſuperſtruet. Dum id in *ſequenti Commentariorum Volumine* fiat, cogitabunt Lectores, *fungi* me *vice cotis*, *acutum reddere quae ferrum ſolet*, *exſors ipſa ſecandi.*

DE

DE GLANDVLIS CORDIS

Auctore

Io. Georg. Du Vernoi.

M. Nov. 1727.

POſt Elephanti vias chyliferas, quarum in Commentariis Academiae ad An. 1726. deſcriptio data fuit, alterum nobile phaenomenum, quod in huius aeque ac aliorum Animantium diſſectionibus a nemine viſum eſt nomenque forte rarae acquiſitionis aliquando obtinebit, hac vice exponendum eſt. Si in genere Elephantorum diſſectiones rariſſimae ſunt, id multo magis de illis dicendum eſt, ad quas diligentia, tempus ſumtusque neceſſarii tanquam ad diuitem fodinam inſumti ſunt. Propterea, qui aliquando tale munus ſuſcepturi ſunt, ſciant, non facilem, ſicuti initio apparet, in haecce antra ſeu ſepulchra deſcenſum eſſe, vbi forte parum fauſta ad longum tempus pernicialem auram inſpirare ac id ſollicite curare oportet, vt poſtquam magno molimine ſolutae et extractae ordinataeque fuere partes ſingulae, (id autem molis ratione, quae terribilis eſt, factu quam dictu difficilius eſt, ſiquidem ex ſolis viſceribus oſſibusque vidimus haud mediocrem cymbam totam repletam fuiſſe,) hae inquam partes plurium menſium ſpatio incorruptae floridae et ſucculentae conſeruentur, retineantque toto illo tempore eam, quam ab initio obtinebant, perfectionem integritatemque. Hiſce ſubfubfidiis omnes difficultates vincere metamque optatam attingere fas eft.

Incredibile ftatim videtur, quod quis circa pericardii mediaftinique exiftentiam, in re tam euidenti et facili, ad quam oculis tantum apertis opus eft, lapfum committere poffit: Nam procliue eft, quando pectus apertum eft, videre aut palpare nudum fit nec ne cordis parenchyma. Quanquam nulla difficultas in eo appareat, fors Anatomicis faepe contraria tulit, vt inter eos pericardii Elephantini notio adhuc incerta effet, ficuti Acta Edimburgenfia *Cl. Moulins*, noftraque declarant. Aliam itaque Elephanti diffectionem ad hancce litem componendam exfpectare fatius eft, quam leuiter fupponere, a vitio primae conformationis huncce mihi oblatum defectum pericardii originem forte trahere, ficuti exempla quorundam animalium ac hominum aliquando vifa fidem faciunt. *Elephanti pericardium non obferuatum.*

Ad cordis Elephantini maffam fimul ac vaforum amplitudinem iure meritoque obftupefcendum eft, ficuti tabulae fequentis infpectio comprobat. *Dimensiones cordis et vaforum.*

Pondus cordis a fanguine polypisque mundati 25. lb. Ruffic. aequabat. *T. XVIII*

Eiusdem circumf.	poll.	26.	
A bafi ad conum longit.		15.	
Ventriculi dextri longit. int.		10.	4. lin.
Eiusdem femicircumf. fuper.		12.	2. lin.
- - femicircumf. inf.		7.	
- - craffities			5. lin.
Ventriculi finiftri longitudo int.		13.	
Eiusdem femicircumf. fuper.		9.	1. lin.

 femi-

- - ſemicircumf. inf.	poll. 6.	2. lin.
- - craſſities		11. lin.
Septi craſſities		16. l.
Auriculae dextrae longit.	3.	6. l.
Eiusd. ſemicirc.		13. lin.
Auriculae ſiniſtrae longitudo	3.	9. l.
Eiusdem ſemicirc.		11. lin.
Arteriae magnae diameter inter.	2.	2. l.
Eiusdem craſſities		$3\frac{1}{2}$. lin.
Arteriae pulmon. diameter int.	2.	8. l.
Eiusdem craſſities		$2\frac{1}{2}$ l.
Venae pulmon. diameter interior	2.	3. l.
Eiusdem craſſities		2. l.
Venae cauae aſcend. diameter int.	4.	2. l.
Eiusdem craſſities		2. l.
Venae cauae deſcend. diameter int.	3.	
Eiusd. craſſities		2. l.

Caetera, vti ſunt,propria Vaſa Cordis, Valvulae, Pinguedo,Nerui, ea magnitudine et copia erant,qua ad veram nobiliſſimi huius viſceris naturam rimandam aptior toto mundo inueniri vix poteſt.

Sententia Eruditorum de natura et proprietatibus cordis quaenam sit?

Eruditorum, fateor, de Corde ſpeculationes in ſe ſpectatae a vero tanto magis recedunt, quo notio omnium eius receſſuum magis ignota ac imperfecta ſemper fuit. Imperfectam notionem eam voco, quae vna tactum ſeu particulari proprietate nititur, cuiusmodi de ventriculo, de inteſtinis, liene, glandulis, vtero etc. a doctiſſimis viris reiectae et deriſae ſunt notiones, poſtquam dictarum partium maturatae magis ac completae deſcriptiones

nes editae ſunt. Tota itaque cognitio cordis ad tria capita fere reducitur. 1. Quod vna homogenea maſſa conſtet, ſicuti muſculus. 2. Quod in motu ſolo operationes eius conſiſtant, et 3. quod ventriculi nec non ſociae auriculae nihil aliud ſint, quam ſimplices cauitates nullum in fluida praeterlabentia ius peculiare ſeu proprium obtinentes, adeoque pura receptacula.

Dubia aduerſus doctrinam receptam proponuntur.

Graues autem cauſae ſunt, quae ad hancce doctrinam in dubium reuocandam me impellunt, quae vt ad ſenſum qua licet perſpicuitate exponantur, diuerſorum animalium Corda a prima ſua conſtitutione vsque ad perfectionis, quam in adultis conſequuntur, gradum perſcrutari operae pretium eſt. Ac primum, in foetus exordio, quum partium prima ſtamina formari incipiunt, pulchra obſeruatio ſententiam noſtram egregie confirmans huc trahenda eſt: Totum Cor nihil aliud, quam veſiculam puram cryſtallinam nudam exhibet, cuius tamen alterna turgentia ac concidentia ſenſibilis eſt; Huic poſtmodum veſiculae, parenchyma ſeu cortex ſuperoritur, ſicuti Natura in nonnullis partibus, organum purificationi aut transcolationi alicuius fluidi inſeruiens, firmiore et craſſiore tegumento inueſtire ſolet. Ex eo quid inferendum ſit luculenter apparet: Duplex nimirum ſeu mixtum organum, vnum interius, cuius exiſtentia actioque anterior eſt, et cum vita incipit, laeſionesque mortiferae ſunt; Alterum, exterius, ſolidum ac denſum, volumen ſeu maſſam cordis efficiens, cuius vulnera teſte experientia minus periculoſa ſunt. Sed ne quis imaginationi, quae rebus quidem anatomicis non infrequenter ſe immiſcet, hancce forte

Cor ex duabus partibus valde diuerſis conſtat.

te opinionem tribuat, non aliter cuiuslibet cordis ſtatus ſeu fabrica, quoties ſatis diligentiae adhibetur, quam praedicta forma oculis apparitura eſt, mixta nimirum ex duplici organo, in quod ſponte ſua reſolui ſe patitur. Et hoc quidem, cum ex ſimplici intuitu exterioris interiorisque ſtructuræ cordis ſatis clare intelligitur, tum ex contemplatione oſſium illuſtratur, ſiquidem vna ex parte, quae corticalis eſt, ſimulque duriſſima, motus et firmitatis inſtrumenta ſunt: Altera autem, medullae laboratoria magno artificio conſtructa, iucundaque viſui exiſtunt. Cur rogo in oſſe ſolummodo, non aeque in corde, idem diſcrimen a natura conſtitutum, quodque non minus in eo palpabile ac perſpicuum eſt agnoſcimus? Aut ſi agnoſcimus, cur non inculcamus ſerio? etiamſi vſus forte adhuc fuerit occultus: Sufficit enim, ſi ſolummodo praedicta fabricæ differentia vera ſit et ſatis conſpicua. Hanc vti dictum eſt, primo intuitu obſeruare ac digito monſtrare fas eſt: Nam quemadmodum pro fibroſo corpore ſeu lacertorum faſciculo conuexa ſeu exterior cordis ſubſtantia optimo iure habetur, iusque illud eousque extendi, quousque directio faciesque lacertorum continuata oſtendi poteſt et viceuerſa, ſic architecturam iſtam vltra, in caua cordis vsque protendere nimium eſt: Non quidem ac ſi ad motum cordis, chylique ac ſanguinis circuitum, parietes vtrinque conſtipati ac ſolidi minus apti et conuenientes forent: Contrarium enim perſpicue, cum ex contemplatione Aortae, tum quoque exemplis mechanicis patet, ſiquidem ad fortiorem arctationem, latera quo ſtrictiora et compactiora ſunt, eo aptiora eſſe credun-

Illuſtratur exemplo oſſium.

Exterioris ſeu corticalis ſubſtantiae cordis ſtructura.

duntur. Ecce autem, loco parietum compactorum, ſpongioſos, cauernoſos, vbique terebratos parietes? Argumento, ad contractionem eos minus inſeruire, quam vulgo aſſeueratur: Ecce fiſtularum, meatuum, fovearum prodigioſam multitudinem, breuiter, compagem ſingularem, diuerſamque ab exteriori, quam ſatis dilucide verbis exprimere haud poſſibile eſt, cuius tamen, opinor, et reliquarum proprietatum, quas in excellenti hac cordis regione et ſpeciatim in membrana interiori, ſedulitas anatomica detexit, a nemine praetexi poteſt ignorantiae cauſa.

Interiorum receſſuum cordis ſtructura. Vulgaris ſententia de huius ſtructurae vſu refutatur.

Vt hancce modo citatam cordis fabricam, prout naturae conuenit, perſpectam habeamus, illud diligenter obſeruandum eſt, quod in ſolius membranae internae gratiam, tota illa admirabilis compages comparata ſit; Equidem huius membranae ea conditio eſt, vt minima ſui portione ventriculorum cauitatem inueſtiat, maxima vero rimas, anfractus, ſinusque omnes antea memoratos, vna cum minoribus intra hoſce latentibus, quaquauerſum peruadat, ſuperficiemque ampliſſimam, hac ratione obtineat: In hunc finem, in fiſtulas innumerabiles ſeu proceſſus veluti digitos chirothecae excauata et diuiſa eſt: Hi poſtmodum loculos, ceu vaginas aptatas, quibus firmiter agglutinati ſunt, ſubingredientes, mox novas fiſtulas haeque alias progerminant inuicem concatenatas et continuas, ac per vniuerſam loculorum, cum quibus eandem directionem terminationemque nanciſcuntur, ſyluam diſperſas: Hi loculi mirum in modum multiplicati, non ſolum in ventriculorum ſuperficie Verum etiam in plures ordines ſeu ſtrata ſibi in-

Noua interioris ſtructurae cordis, in ſpecie membranae deſcriptio.

uicem ſuccedentia ſic diſtributi ſunt, vt ſub vna loculorum ſerie, mox altera, poſthanc tertia in conſpectum veniat, fereque tertia craſſitiei cordis pars huicce meatuum diſpoſitioni inſeruiat, vnde admodum fungoſa ac ſpongioſa euadit: Nam id a ſingulari diſpoſitione ac tendentia horum meatuum potiſſimum prouenit, quae talis eſt, vt eorum terminus aeque ac initium ſimul reſpiciant cavum ventriculorum, vnusque in alium, ab imo vsque ad ſummum, vtraque ſua extremitate, per continuatam inoſculationem ſeſe inſinuet, vnde prodigioſa foſſularum multitudo, ex eaque rara ac laxa ſubſtantia emergit. Vltimo, annotatione dignum eſt, quod in tanto numero meatuum, omnes vnam tendentiam obſeruent, quantum quidem in variis animantibus obſeruare potui: Nullos a cauitate ad medium vel extimam ſuperficiem penetrantes, verum ſic diſpoſitos vidi, vt in longum latumque protenſi, ad ſuperficiem internam paralleli eſſent.

An membrana cordis interior peruia sit? inquiritur.

Hiſce praemiſſis, ad alias proprietates in membrana cordis interiore contemplandas progredior, inter quas ſummorum Virorum autoritate haec collocata eſt, quod per eam veluti per cribrum naturaliter ſanguinis depluuium in cauitates cordis fiat, hiantibus eum in finem vaſculorum extremitatibus, quas tamen oculis percipere graue eſt. vid. *Nouvelles decouvertes ſur le coeur. Traité nouveau de la ſtructure et des cauſes du mouvement naturel du coeur par Mr. Raymond Vieuſſens.* in quo certe tractatu Vir ſummus ita ſe geſſit, vt nemo non admiretur: Quae enim de cordis partiumque eius conſtituentium textura

tura, proprietatibus, muniisque, in ſpecie, de ſingulari inceſſu arteriarum venarumque coronariarum in eo enarrantur, ea absque ingenti animi voluptate ac vtilitate legi non poſſunt, vt adeo Triumphum cordis iure meritoque appellares. Quod itaque vaſa huius membranae ſanguinea attinet, membranae ſuperficiem internam terminantis indiſpenſabilis functio eſſe videtur, omnem in cordis ſubſtantia diffuſum ſanguinem, cuius per vaſa coronaria exteriorem membranam perreptantia ingens copia ſine intermiſſione affluit, in ſinu ſuo colligere, quia vaſorum progreſſus hic ſiſtitur ac interrumpitur, vti conſideranti patet: In huncce finem, perampla ſuperficie ſummaque tenuitate haec membrana inſtructa eſt, vti ſupra diximus, ad praedictam ſanguinis eo tendentis copiam continendam: Quare huius intuitu (vt calorem cordis ſeu flammulam vitalem hic non reſuſcitem) ad minimum concedendum eſt, membranam cordis interiorem inſolita humorum quantitate praegrauatam et ſaturatam eſſe, attento incredibili numero vaſorum, quae ex omnibus cordis locis adueniunt: Ex foueis enim, tanquam ex teſtis floralibus, quaedam propagines arbuſcula mentientes prodire obſeruantur, haeque in egreſſu ſuo mirum in modum luxuriantes, modo ad latera fouearum, modo circa columnas chordasque, capreolorum inſtar, variis modis implicantur, quemadmodum multiplex experientia teſtatur.

Functio praedictae membranae eſt, omnem in ſubſtantia cordis diffuſum ſanguinem in ſinu ſuo colligere.

Eiusdem membranae vaſa ſanguinea. Lit. A. A. A. A.

Vnum ſolummodo reſtat, an vere et naturaliter ductus ſeu pori in praedicta membrana adſint, per quos ſanguis aut ſuccus qualiscunque in ventriculos cordis exprimiprimitur, prout fama huius noui inuenti initio secu-li increbuit: Inuentum sane, multis egregiis meditationibus ansam praebens, quo pulchrius, nobiliusque vix ac ne vix excogitari potest. Quam ob rem sententiam meam vt exponam, prius experimenta affero, ex quibus illa originem simul ac fundamentum mutuat. Experimenta, vti spero, beneuoli lectores cogitabunt, minus errori et fraudi obnoxia, perspicua, veritatisque notam secum aduehentia: Nam certum est, quod experimentum in minutis animalculis saepe incertum ac fallax, in maioribus e contra, in quibus sensuum suffragia minus impedita sunt, sine dubio et ambiguitate institui possint. Perlustratis itaque cordis Elephantini, de quo supra mentio iniecta fuit, partibus maxime obuiis, exempli gratia foueae, quarum nonnullae pollicis diametrum aequabant, columnae pollicem latae, valuulae peramplae et crassae sine globulis tamen seu corpusculis, in sigmoidearum limbo deficientibus, etc. Primum experimentum hoc fuit,

Experimentum I.

videre, an post expurgationem ac elotionem cordis, quod antea exsangue pallidumque apparebat, detersa prius omni humiditate aduentitia, sanguis per compressionem cordis arteriarumque et venarum coronariarum, quarum amplitudo maxima erat, e membranae poris exprimi posset; sed conatus irritus fuit. Post haec, vnum ventriculum cordis aliquamdiu aqua affusa maceraui, ad tollendum, si possibile esset, omne genus impedimentorum; Alter, vti erat, intactus permansit; cauitas vtriusque aperta et diducta fuit, vt quicquid fieret intus, statim in conspectum veniat. Hinc aquam flauo colore tinctam

et

et tepidam per venosa aeque ac arteriosa vasa ad vtrumque ventriculum tendentia diuersis temporibus, omissa ligatura; hocque secundum fuit experimentum, in quo etsi iniectiones diligenter continuatae ac reiteratae essent, successus tamen defuit. In vna enim aeque ac in altera cauitate, effluxus per poros membranae, in quam defixos oculos tenebam, erat imperceptibilis; e conuerso aqua per venam citato cursu redibat. Tertium experimentum praememorato simile fuit, excepta sola ligatura, quam hic necessariam esse duxi, sicuti mox euentus docuit: Nam quum in praecedente experimento, praeter refluxum aquae per venam, mutatio nulla in superficie interiori consecuta sit, nunc in quibusdam locis membranae praedictam superficiem inuestientis, exilia vascula comparere incipiebant, quae adeo continuata aquarum iniectione increscendo, intra breue tempus per vniuersum ambitum conspicua facta sunt, absque tamen aquae sensibili effluxu aut humiditatis apparentia. Pro quarto experimento, in spem melioris fortunae, aquam non adhibui; sed spiritum coloratum; Deinde mercurium prius per alutam traiectum; Postremo flatum. Successus tamen nihilo melior fuit, resque in eodem statu permanebant. Attonitus quare hic omnes mei conatus irriti, in minoribus contra animantibus transitus liquorum facilis esset, sortem meam infelicem deplorare coepi, experimentis istis valedicturus, ne alia aeque necessaria per obstinationem meam neglecta pessumdarentur. Quum postero die, sub aliis negotiis, cor mihi obuium factum esset, semel adhuc curauil, vt iniecta ☿ quantitate

Experimentum 2.

Experimentum 3.

Experimentum 4.

Experimentum 5. ſufficiente, id quod factum eſt in ventriculo macerato, vaſcula, vti decet, ſatis turgida redderentur, hisque praeter flatum, compreſſionem manu factam ſuperaddidi, eamque ſolummodo blandam, citra violentiam. Accidit non diu poſt dictam encheiriſin, quum ſpes nulla ferme reſidua eſſet, vt ex quibusdam foſſis, globuli mercuriales, ex aliis humores, in cauitatem vtramque ſubito exilirent, de quo vehementer laetatus ſum.

Praedicta experimenta improbantur. Sed quia amor ardorque experiundi, veritatemque quocunque pretio extorquendi, nos eo ſaepe abripit, vt triumphum ante victoriam canamus, quando ex ſolo euentu, ſine examine experimentorum, de naturae operibus iudicium ferimus, incertus animi adhuc haereo, quid concludendum ſit, poſtquam adeo aegre et tarde, et poſt tantas vexationes eruptio liquoris facta ſit. Non inficior, liquores in cordis caua vias tandem inueniſſe; ſed neſcio, quid effluxum in principio et vsque ad vaſculorum ſummam diſtenſionem retardare potuit. Magna forte viarum anguſtia? concedo, ſed caeteris paribus, minor eſſe debebat in Elephanto, quam in Oue difficultas; Deinde ſaepe accidit, vt tunica membranam aut tubulum efformans, a variis cauſis praeternaturalibus, ſoluta eius compage, eum in ſtatum perueniat, vt cedat contranitenti fluido, quod poſtea per rimas aut hiatus, modo ſenſibiles modo inſenſibiles, praeter naturae inſtitutum elabitur. Pari ratione, de noſtra membrana cordis, vaſculisque intertextis cogitandum eſt: Nam, quum huius membranae minima ſit reſiſtentia propter ſummam eius mollitiem, idque in minoribus adhuc magis quam in

gran-

grandioribus animantibus , periculoſum erit, rem cum ipſa habere , quoniam aucta mollitie et plenitudine vaſculorum, niſum perferre amplius nequit, eamque ob cauſam ſuccumbens, in ſpeciem filtri commutatur. Adde, quod ruptura vel excoriatio in nonnullis locis ſenſibilis fuerit. Tantum de membranae interioris cordis vaſis ſanguiferis.

Glandulae cordis primum inuentae.

Nunc inſignis proprietatis, quae inopinato in eadem Elephanti diſſectione oblata eſt, mentio poſtremo facienda eſt, videlicet, exiguarum glandularum ad praefatam membranam pertinentium. Dixi inauditam proprietatem, quia cum morbo et ſine morbo defunctorum Elephantorum, aliorumque animantium hominumque diſſectiones, eam ſilentio praetermittunt: Etenim, quum haud maiorem cordi immunitatem a morbis conceſſam eſſe quam caeteris partibus, omniaque haſce afficientia mala, cordi communia eſſe conſtet, vt primum in haecce corpuſcula incidi, ſtatim ambigebam, vtrum impreſſioni ſeu charaćteri vitioſo imputandum ſit phaenomenum nec ne: Quare ad veram huius inuenti cauſam inueniendam, cor eiusque ſingulas partes internas et externas diligenter examinabam, ſpe fore, vt vitium clarius et certius innoteſceret; Aſt incaſſum: Pallore enim excepto, concretionibusque lardo ſimilibus, maximis, e cordis ventriculis vsque ad vaſorum cauitates protenſis, reliqua ſatis bene valere viſa ſunt, nullo ſenſibili vitio, nulla inflammatione aut cauſtica malignitate extus vel intus apparente; E contrario, notae glandularum ſeu character hiſce proprius adeo manifeſtus erat, vt de earum exiſtentia amplius non dubi-

Cor an obnoxium ſit morbis?

tans, potiſſima nunc cura eo conuerſa ſit, vt noui huius inuenti notitiam accuratam, vna cum delineatione bona in vſum anatomiae acquirerem.

Deſcriptio glandularum cordis. Lit. BBB BBB.

Harum glandularum obſeruatio ſine microſcopii ope facta eſt: Eae enim in ſuperficie vtriusque cauitatis cordis, intuentium oculis ſtatim apparuere, veluti Tabula XVIII. exhibet ſuntque tubercula, caput aciculae aequantia, albicantia, quae propter membranam inſtar vitri transparentem inconſpicua eſſe nequeunt, etſi tumorem perexiguum efficiant. Pone hancce membranam, cui agglutinata ſunt, veluti incarcerata et compreſſa iacent, ſpeciemque glandularum ſolitariarum conſtituunt, quia non coniugatim, ſed in diuerſa a ſe inuicem diſtantia hinc inde diſpoſita ſunt. Quamobrem, quid initio de hacce raritate ſeu ſterilitate, pro tam vaſta ſuperficie, in qua nimis viſae ſunt disgregatae, coniicerem, incertus fui. Numerus enim amplitudini cauitatis minus reſpondebat. Tandem cogitatio incidit foſſularum, in quibus non improbabile viſum fuit, naturam forte aequalem numerum talium glandularum collocaſſe, ſicuti alias in occultandis ſuis operibus non infrequenter hocce artificio vti ſolet, quemadmodum in glandulis intra cauernulas ſinuum durae matris contentis, quas vix ac ne vix eruere fas eſt, conſpicimus. De facto, plures eiusdem generis glandulae praecedentibus perfecte ſimiles, in praefatis foſſulis inuentae ſunt, prout diſſectio comprobauit, neque alia lege eas diſpoſitas vidi, quam vt ſunt illae, nimirum diſcretae et ſolitariae: Duas enim ſimul iunctas obſeruare non potui. Porro memini, in dextro ventriculo maiorem quam laeuo earum fre-

Lit. CCCC

Plures glandulae in dextra cauitate inuentae.

frequentiam ſeſe manifeſtaſſe, cuius diſcriminis cauſa, etſi forte ſolus Deus nouerit, ex iis, quae de vſu harum glandularum, in fine expoſiturus ſum, diuinanda eſt.

Earum notae externae. De caetero in colore, magnitudine, diſtributione, nullum ratione ventriculorum diſcrimen internoſcere potui, quamquam haud diſſimulandum ſit, nonnullas prae aliis minus compreſſas ac magis faſtigiatas apparuiſſe, vnde hanc ſpem concipiebam, fore, vt ſuccum per leuem expreſſionem obtinerem, ex quo ipſius naturam cognoſcere poſſem; At ſucceſſus defuit, idque varias ob cauſas contingere potuit, vti experientia teſtatur: Vidi eodem tempore (non tamen in omnibus,) in medio apicis, punctum exiguum nigricans, quod, vti puto, folliculi glanduloſi, vel accuratius loquendo, ductus excretorii in membrana deſinentis verum orificium ſeu emiſſarium eſt, quod *et orificium* in omnibus in quibus conſpicuum erat, vniformem faciem obtinebat: Subſtantia autem ſeu corpus ipſum glandulae, albicans erat, firmitatem ſeu conſiſtentiam, quam conſimiles glandulae habere ſolent, adeoque inſtar earum, quae in durae matris receptaculis, aut in inteſtino continentur, obtinens. Quali conformatione ſeu compage inſtructae ſint praedictae glandulae, propter earum paruam molem ſenſu aſſequi non licuit. Inutiles ad hunc ſcopum fuere adhibitae iniectiones, ſectiones, vitra melio- *Interna compages inconſpicua* ris notae, quibus poſtquam ſatis diu me exercuiſſem, nihilque praeter lucidam, et nebulae ſimilem ſubſtantiam, in qua indiſtinctum et confuſum quoddam chaos apparuit, detexiſſem, nouo hoc exemplo edoctus ſum, in maximis aeque ac minimis animantibus, *aequa lance Naturam ſuae* *micrologiae munera contulisse*, quae forte mortalium oculis nunquam patebunt.

Cur in aliis animantibus glandulae cordis inconspicuae

Haec sunt, quae experientia duce, ad cordis cognitionem promouendam, in Elephanti dissectione, nobis non infausta sorte oblata sunt. Sed, ais, ex vno particulari exemplo nihil concludi potest, concedo: Neque is sum qui talem auctoritatem mihi tribuo. Interim, quum in omnibus animantibus reliqua bene concordent, solaque forsitan magnitudinis ratio hoc in casu consideranda sit, iusta est causa accusandi obscuritatem in aliis animantibus, potius quam absentiam realem: Addo non extraordinarium esse, glandulas conspicere in organis analogis v. gr. in sinubus durae matris. Propterea missis ambagibus, concludere fas est, praeter impulsum cordis, et transfusionem sanguinis per pulmones, et reliquas partes corporis, aliam cordi insitam esse facultatem, prout summi Philosophi et Medici olim solo rationis lumine coniectati sunt. Hancce facultatem considero, tanquam summum naturae arcanum, quo nullum implicatius et obscurius esse potest: Hunc de eo conceptum mihi formo. A quacunque causa motus cordis in vitae primordiis suscitetur, necessarium est, vt vi huius impulsus, ad teneram membranam in cor abituram ante omnes alias partes pertingente, glandulae cordis eodem temporis momento exsuscitatae et viuificatae, paululumque compressae, virtutem suam prima vice, et ante omnes totius corporis glandulas exerceant, quod ex earum situ patet. Ante momentum, quo illa prima functio glandularia perficitur, in corde et ductibus sanguineis, succi purpurei nullum vestigium percipere licet; E conuerso, limpida, et crystallina lympha solummodo apparet,

Functio harum glandularum proponitur. Scilicet sanguinem purum secernere.

paret, quae foſſularum loculorumque cauitates replet. Pulmonis aliarumque partium functiones, veluti emortuae, ius in hancce lympham haud exercent. Ex ipſa denique lympha, ceu materia, purpurae originem deriuare minus etiam probabile eſt, quoniam naturam alienam, lympha propria virtute ſibi dare non poteſt. Conſideretur enim in homine, vel animali adulto, lympha in duplici ſtatu in quo inueniri ſolet, nimirum vaſis lymphaticis incluſa ac motu perpetuo circumacta, aut vaſis arterioſis venoſisque contènta et maſſae ſanguineae confuſa. In vtroque ſtatu, lympha natiuum colorem, nunquam niſi caſu fortuito permutat, quin e contra, magis clara et pellucida euadit. Hunc colorem non ſolum retinet in vaſis propriis, in quibus impermixta et pura eſt; ſed etiam in vaſis ſanguineis vbique, nec obſtante diuturna fame. Quare erroneum eſt credere, chylum et lympham, per certam metamorphoſin quam *ſanguificationem* vocant, in purpureum humorem commutari ſubſtantialiter, ſeu in purum ſanguinem conuerti. Sub titulo ſanguinis, non intelligo vniuerſam maſſam ſanguineam, ſed ſuccum quendam ſpecificum, certo et determinato organo praeparatum, more aliorum ſuccorum, ex. gr. bilis, ſeminis, lactis etc. a quibus colore intenſe coccineo, indelebili, ſibi ſoli proprio diſcrepat, quales fere ſucci ſanguinei, in nonnullis animantibus intra peculiares folliculos ab Anatomicis dudum inuenti ſunt, ex quibus pretioſa pigmenta ac tincturae poſtmodum praeparantur. Huius itaque ſucci originaliter coccinei, cuius depoſitariae et diſpenſatrices ſunt praefatae glandulae cordis, miſcella, lym-

Lympha in ſanguinem transmutari non poteſt.

Sanguificatio in vulgari ſenſu nulla datur.

Quid proprie ſanguis ſit, exponitur.

lympha quidem vel chylus, in ſanguinem nunquam neque in primordiis, neque in progreſſu vitae mutatur ; Aſt, quemadmodum alii ſucci ex gr. Bilis, Semen, Lac. etc. ſic ſuccus iſte rubicundus lymphae aut chylo ſolummodo aſſociatur, etſi inſpicienti, tota maſſa purus putus ſanguis appareat, quem effectum tribuere oportet, excellentiae ac virtuti praefati ſucci, a cuius colore, reliquorum ſuccorum colores abſorbentur etc.

Diſſertatio
DE ACTIONE FLVIDORVM
IN CORPORA SOLIDA
ET MOTV SOLIDORVM IN FLVIDIS

Auct.
Daniele Bernoulli I. F.

Pars Prima
De Preſſione Aquarum fluentium.

I.

M. M. Iun. et Octobr. 1727.

FLuida, quae occurrunt ſolidis quieſcentibus, eadem remouere conantur : Iſtum conatum voco preſſiouem ſeu actionem. Cum ſolida mouentur in fluidis ſtagnautibus, reſiſtentiam patiuntur, quam caeteris paribus eandem eſſe debere cum praedicta preſſione, nemo non videt. Quantimomenti ſit preſſionem illam ſeu reſiſtentiam exacte defini-

re,

re, ex ſequentibus patebit; haec autem determinatio pendet omnino a modo, quo fluida agunt in ſolida; ſed poteſt diuerſimode haec actio concipi, non ſine vario ſucceſſu. Vnde nihil ſtatuendum mihi propoſui, quod non experientia eſſet confirmatum.

II. Si concipiatur fluidum conſtare ex particulis elaſticis, quae ſtatim poſt impulſum ad latus deſiliant locumque faciant particulis ſubſequentibus, tunc preſſionem fluidorum ſequentem in modum determinare licebit.

Impingat fluidum ABDC (fig. 1.) perpendiculariter in planum BD ponderis expers, cui annexum eſt ope trochleae R pondus MN quod fluidi impetum ſuſtinere poſſit. Sumatur in fluido longitudo quaeuis $BA = a$, cuius pondus ponatur $= p$, tempus autem, quo fluidum longitudinem aſſumtam deſcribit $= t$ minutis ſec. expreſſum, ſpatium quod graue libere cadendo a quiete deſcribit tempore vnius minuti ſec. $= s$. Nunc vt determinetur pondus MN, conſiderabo planum BD tanquam alternis vicibus cedens in ſitum *bd* iterumque in locum priſtinum rediens, huncque itum et reditum toties fieri, quoties particulae fluidi impingunt in planum. Fingam porro fluidum diuiſum eſſe in multa ſtrata *pp*, *oo* etc. tenuiſſima et ſolida, quorum latitudo ſit $= l$. His ita poſitis patet fluidum abſoluere latitudinem vnius ſtrati *pp*, interea dum pondus MN ſemel aſcendit motu vniformiter retardato per altitudinem M*m*, iterumque per eandem altitudinem motu ſimili et reciproco deſcendit. Poteſt autem corpus MN eodem tempore quo aſcendit et deſcendit per Mm abſoluere ſpatium $4Mm$, ſi vniformiter progrediatur velocitate ſua initiali ſeu finali, quam nimirum habet in ſitu MN. Eſt itaque velocitas fluidi ad velocitatem initialem ponderis vt l ad $4Mm$. Manifeſtum quoque eſt, quod modo notaui, velocitatem finalem corporis MN poſt deſcenſum eandem eſſe cum velocitate initiali pro aſcenſu; vnde cum velocitas ſit eadem ante et poſt ictum, ſequitur pondus ſtrati pp ſeu $\frac{lp}{a}$ eſſe ad pondus MN reciproce vt eorundem velocitates, ſeu directe vt $4Mm$ ad l. Vnde pondus $MN = \frac{llp}{4a \times Mm}$; ſupereſt itaque pro abſoluta ponderis determinatione, vt exprimatur valor ipſius Mm. Is vero ita obtinebitur: tempus quo fluidum abſoluit ſpatium l eſt $= \frac{lt}{a}$; ergo tempus, quod pondus inſumit cadendo per Mm eſt $= \frac{lt}{2a}$. Sed ſpatium tali tempore a corpore vniformiter accelerato deſcriptum eſt $= \frac{lltts}{4aa}$, ergo $Mm = \frac{lltts}{4aa}$, quem valorem ſubſtituendo in aequatione pro pondere MN, habebitur tandem pondus quaeſitum $MN = \frac{ap}{tts}$.

III. Cum a ſit quantitas arbitraria, poteſt illa accipi $= s$, id eſt, $= 16\frac{1}{9}$ ped. Lond. et ſic erit pondus $MN = \frac{p}{tt}$, eſt itaque pondus fluidi longitudinis $16\frac{1}{9}$ ped. Lond. ad pondus MN, quod ſuſtinere valet, vt quadratum numeri exprimentis minuta ſecunda, quibus fluidum abſoluit praedictam longitudinem $16\frac{1}{9}$ ped. ad vnitatem. Et haec propoſitio conuenit cum propoſitione quam habet Cel. Newtonus in Princ. Math. Phil. Nat p. 325.

p. 325. edit. 3. his verbis; *et propterea globus resistentiam patitur, quae sit ad vim, qua totus eius motus vel auferri possit vel generari, quo tempore duas tertias partes diametri suae uniformiter progrediendo describit, vt densitas medii ad densitatem globi.* Ista conuenientia manifesta erit iis, qui significationem verborum Newtoni assecuti fuerint. Caeterum, si basis ponderis MN eadem fuerit cum sectione perpendiculari fluidi, atque insuper cum fluido eandem habeat grauitatem specificam, erit ipsius longitudo $=\frac{a}{tt}$, ponendo semper $a=s$.

IV. Vt experimento cognoscerem num haec vera sit determinatio pressionum fluidorum, consideraui fluida ex cylindro perforato erumpentia. Demonstratum autem est, quod si cylindri sint satis ampli vel si semper pleni conseruentur, velocitatem fluidi erumpentis fere tantam fore, quantam graue libere cadendo per altitudinem fluidi supra foramen acquirit. Sit ista altitudo $=L$, et erit $t=\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{L}}$, vnde $\frac{a}{tt}=4L$. Oporteret itaque pro hypothesi hactenus assumta, vt pondus quod vena fluidi per foramen erumpentis sustinere potest, esset aequale quadruplo ponderi cylindri fluidi foramini superincumbentis. Impleui proin aqua cylindrum AD (fig. 2.) cuius pondus prius exploraueram vna cum ratione quam habebat amplitudo AB ad foramen circulare *o*, impletumque rursus ponderaui, adeo vt iam scirem pondus totius cylindri aquei ABDC, ex quo facile erat colligere pondus cylindri *or* foramini superincumbentis. Dein regulam MG ad aequilibrium positam super fulcro in F, oneraui pondere E, quod cum in aequilibrio esset cum impetu venae aqueae ad distantiam aequalem ab hypomochlio F incidentis in regulam (id quod cognosci potest, quando regula tantum non eleuatur) comparaui illud cum pondere cylindri *or*, et vidi ista pondera esse exacte inter se aequalia cum tamen prius quadruplum esse debuisset alterius, adeo vt hypothesis assumta locum habere non possit. Experimentum ab aliis iam fuit institutum.

V. Si strata *pp*, *oo* etc. (fig. 1.) habeant naturam corporum mollium, tunc insistendo iisdem vestigiis reperietur pondus MN duplo minus. Haec vero hypothesis praeterquam quod cum experientia nondum conueniat, vel ex eo quoque refutatur quod vltimae particulae fluidorum tanquam maxime durae, necessario summa elasticitate sint praeditae. Si denique concipiatur stratum *pp* post impulsum suum in planum BD iterum recta resilire (neque enim statim ad latus desilire potest) atque ita impingere in stratum proximum *oo* et tunc demum particulas vtriusque strati ad latera dispergi, fiet ut strata alterna inutilia perdantur, et pressio fluidi iterum duplo minor erit, quam quae determinata fuit §. 2. essetque haec hypothesis satis verae similis, si modo experientiae magis conueniret.

VI. Existimo itaque non posse pressiones seu resistentias fluidorum continuorum fingi ut ortas ab impetibus minimis et saepe repetitis particularum vltimarum fluida componentium; Neque aliter actionem suam exerunt fluida pro mea opinione, quam grauitando in obstacula. Id autem, ni fallor, ex sequenti explicatione vnicuique mani-

manifestum fiet. Sit cylindrus ABDC (fig 3.) aqua repletus, et in fundo habeat foramen *on*; cui respondet obstaculum *am*, quod venam aqueam excipit. Sed iam particulae aqueae non percutient obstaculum, quin potius praeterfluent, sicut *oba* et *nbm*. Possumus itaque concipere, circellum *am* pertinere ad cylindrum ipsique esse firmiter annexum, rimam vero seu hiatum inter fundum CD et circellum *am* iam esse foramen per quod aqua effluit; et ita cuilibet obuium est, non posse *am* aliter premi, quam a superincumbente cylindro aqueo *orsn* (negligendo particulam *omma*) pariter ac omnes cylindri partes premuntur a cylindro aqueo sibi incumbente.

Caeterum possunt omnia fluida, quae sunt in motu, considerari tanquam si continuo ex cylindro constanter pleno per foramen in ima parte cylindri constitutum effluerent; altitudo autem istius cylindri fictitii ea sit, vt graue per illam libere cadendo acquirat velocitatem fluidi.

VII. Ex praecedente paragrapho sequitur pressionem fluidorum esse quadruplo minorem, quam determinata fuit in paragrapho secundo, vnde retentis symbolis ibidem assumtis erit verum pondus $MN = \frac{ap}{4tts}$, siue facto iterum $a = s$, $MN = \frac{p}{4tt}$, vbi per t intelligitur numerus minutorum sec., quibus fluidum absoluit motu vniformi spatium s seu $16\frac{1}{9}$ ped. Londinensium. Si velocitas fluidi alio modo determinetur, alia obtinebitur formula. Ponatur v. gr. velocitas talis vt tempore vnius min. sec. fluidum abſoluat na, erit pond. $MN = \frac{1}{4}nnp$, vel ſi a non ſit $= s$, erit $MN = \frac{nnap}{4s}$; ſed calculus ſit maxime commodus, ſi a exprimitur per s, adeo vt ponatur vel $a = s$ vel $a = 4s$ vel $a = ls$, oportet autem menſuram ſemel aſſumtam retinere, et omnes magnitudines ad illam reducere. Interim patet ex praedictis formulis eſſe preſſiones fluidorum in ratione ſuperficierum quas premunt, denſitatum fluidorum et celeritatum quadratorum.

VIII. Et haec hactenus de fluidis perpendiculariter in plana incidentibus: pauca iam addam circa caſus reliquos, cum nimirum fluida vel oblique incidunt in plana vel ſub quacunque directione in ſuperficies quascunque. Hic ante omnia monendum puto, quousque extendendum ſit id quod dixi §. 6. ſcilicet poſſe conſiderari obſtaculum am tanquam pertinens ad ipſum cylindrum ABDC. Scilicet fluidum premit vbique perpendiculariter latera cylindri, excepta illa fluidi parte, quae iam egreſſa ex cylindro niſum facit tantum ſecundum directionem curſus ſui, qui ſi non ſit perpendicularis ad obſtaculum erit preſſio fluidi reſoluenda in duas alias, quarum altera ſit perpendicularis ad obſtaculum, altera eidem parallela, ſolaque prior adhibenda. Vnde ſequitur eſſe caeteris paribus preſſiones in ratione anguli incidentiae ſinus. Ponamus nunc eſſe filum ADB (fig. 4.) cuiuscunque curuaturae, ſed cuius rami AD et DB ſint ſimiles et aequales illudque excipere fluidum ſub directione DC et quaeritur ratio preſſionis fluidi ad illam preſſionem quam exerceret perpendiculariter fluendo in

AB.

AB. Sit elementum curuae $or = ds$, elementum abſciſſae $gb = op = dx$, $AC = b$, preſſio fluidi in $AC = p$, ergo preſſio in gb vel $op = \frac{pdx}{b}$, et preſſio in $or = \frac{pdx^2}{bds}$, quae reſoluenda eſt in duas alias ſecundum directiones og et op; poſterior deſtruitur a ſimili preſſione a parte oppoſita agente; vnde prior ſola conſideranda eſt, quae fit $= \frac{pdx^3}{bds^2}$, cuius integrale $\int \frac{pdx^3}{bds^2}$ dabit integram preſſionem in arcum Ao, ponendoque dein $x = b$, orietur tota preſſio in AD, quae comparata cum p dabit rationem quaeſitam.

IX. Eadem ratio ſubſiſtet ſi integra ſuperficies generata concipiatur ex motu curuae ADB circa axem DC. Sed ſi haec eadem curua ADB rotando circa axem DC ſuperficiem generet in quam fluidum impingit, erit preſſio in annulum $or = \frac{npxdx^3}{bds^2}$ et preſſio in annulum $gb = \frac{npxdx}{b}$ (n denotante ſemicircumferentiam circuli, cuius radius = vnitati); eſt itaque preſſio in totam ſuperficiem Ao ad preſſionem in ſuperficiem planam Ag vt $\int \frac{npxdx^3}{bds^2}$ ad $\frac{npxx}{2b}$. Sequitur exinde eſſe preſſionem in ſuperficiem ſphaericam dimidiam totius preſſionis perpendicularis in circulum maximum. Haec vtut notiſſima, indicare tamen volui, quia explanare et intellectu faciliora reddere poſſunt ea, quae in ſequentibus dicentur.

Pars

Pars Secunda

De vltimis velocitatibus corporum in mediis resistentibus.

I.

Vidimus ex praecedentibus quomodo aestimanda sit ex grauitate et velocitate fluidorum, eorundem pressio: In sequentibus dabo mensuras effectuum, quos huiusmodi pressiones producere valent in diuersis corporibus variis legibus motis. Haec autem secunda pars considerabit potissimum corpora in statum permanentem et inuariabilem posita: tametsi enim corpora vi aequabili sollicitata in mediis resistentibus nunquam perueniant ex quiete ad statum permanentem, attamen plerumque citissime ad illum conuergunt, ita vt deinceps nulla sensibilis differentia in motu corporum obseruari possit. Caeterum iam monui resistentiam, quam corpora in motu suo a fluidis stagnantibus patiuntur, non differre a pressione fluidorum eadem velocitate contra corpus quiescens motorum.

II. Si in fluido infinito corpora grauitate sua deorsum mouentur, conuergunt ad illum statum, quo resistentia aequalis est eiusdem ponderi in fluido. Pondus equidem constans est, quaecunque sit figura corporis, modo habeat eandem molem. Sed resistentia in corporibus diuersae figurae varia est. Nos vero considerabimus tantum

tum

tum globos. Methodi applicatio ad alias figuras facilis erit ex §§.8. et 9. part. I. In his itaque si quaeratur velocitas vltima, sequentem in modum erit procedendum. Retineantur symbola §. 7. part. I. et ponatur velocitas quaesita talis, vt absoluat intra min. sec. spatium na: Erit resistentia globi $\frac{nnap}{8s}$ (nam resistentia globi dimidia est quam resistentia circuli maximi per §. 9. p. I. et resistentia circuli maximi est $\frac{nnap}{4s}$ per §. 7. p. I.); sit praeterea diameter globi $=m$, et ratio grauitatum specificarum inter solidum et fluidum vt b ad c, atque pondus absolutum globi $=1$, erit pondus globi similis fluidi $=\frac{c}{b}$ et pondus cylindri fluidi globo circumscripti $=\frac{3c}{2b}$; vnde $p=\frac{3ac}{2mb}$, et consequenter resistentia globi $=\frac{3nnaac}{16msb}$, quae debet esse $=$ ponderi globi in fluido, quod est $=\frac{b-c}{b}$; ergo $\frac{3nnaaa}{16ms}=b-c$, vel $na=4\sqrt{\frac{ms\times\overline{b-c}}{3c}}$, et posterior haec formula denotat spatium, quod globus vltima sua velocitate intra min. sec. perficere potest.

III. Si m sit $=\frac{3}{16}s$, id est, si diameter globi sit 3. ped. cum quarta parte vnius pollicis, erit praedictum spatium $=s\sqrt{\frac{b-c}{c}}$, et si globus sit duplo grauior mole aequali fluidi, erit $na=s$, id est, globus perficiet velocitate sua vltima $16\frac{1}{9}$ pedes Anglicos, hancque celeritatem corpus libere cadens acquirere potest lapsu ex altitudine $\frac{1}{4}s$. Et generaliter vltima celeritas corporis acquiri potest lapsu suo libero ex altitudine $\frac{4m\times(b-c)}{3c}$; vnde si

$b = 2c$, globus delapſus in fluido ex altitudine infinita non maiorem acquireret velocitatem, quam in vacuo haberet poſt lapſum ex altitudine quatuor tertiarum partium quae diametri.

IV. Eadem methodo etiam ſolui poſſunt quaeqiones de vltima velocitate nauis in mari. Tot autem reuiruntur data, vt haec fere omni vſu careant in praxi, niſi adhibeantur quaedam artificia, quibus breuius deſiderata determinantur. Si nauis a vento propellitur, oportet noſſe velocitatem venti, numerum et magnitudines velorum vna cum eorundem poſitione; ab his pendet vis nauem propellentis determinatio; poſſunt autem, ni fallor, ſatis accurate haec haberi. Id vnicum obtentu difficillimum eſt, vt habeatur figura exacta illius partis in naue, quae aquae ſubmerſa eſt; ab hac vero pendet reſiſtentia aquae, quae vi nauem propellenti debet eſſe aequalis. Ponamus tamen haec omnia data in exemplo quodam particulari, vt ſaltem pateat modus, quo in his caſibus procedendum. Sint v. gr. vela omnia perpendiculariter ad ſpinam et directionem nauis poſita, habeantque in vniuerſum mille pedes quadratos in ſuperficie, ſit velocitas venti talis vt poſſit quinquaginta pedes intra min. ſec. abſoluere. Habeat pars nauis ſubmerſa talem figuram, vt reſiſtentia eadem ſit, quam haberet planum quadraginta pedum quadratorum, cuius directio eſt perpendicularis ad planum. Sit denique grauitas ſpecifica aquae ad grauitatem ſpecificam aeris vt 800 ad 1, atque numerus pedum (quos nauis velocitate ſua maxima percurrit tempore vnius min. ſec.) $= x$. Oportet

tet autem, vt vis venti eadem ſit, quae reſiſtentia aquae: Suntque preſſiones fluidorum in ratione quadrata velocitatum, et ſimplici ſuperficierum nec non denſitatum. Ergo preſſio venti erit exprimenda per $(50-x)^2 \times 1000 \times 1$ et reſiſtentia ſeu preſſio aquae per $xx \times 40 \times 800$. ergo $2500000 - 100000x + 1000xx = 32000xx$; vel $50-x = x\sqrt{32}$, vnde $x = 7\frac{1}{2}$. ped. proxime. Igitur talis nauis poterit ſingulis minutis ſecundis conficere circiter $7\frac{1}{2}$. pedes.

V. Ad normam praecedentis exempli omnes caſus poſſibiles calculo ſubiici poſſunt; cum autem poſitio velorum eſt ad nauem obliqua, res eſt altioris indaginis; poterit tamen quodam modo ſolui, ſi praedicta conferantur cum Patris mei *manuaria naut.* Caeterum velocitas venti cognoſcitur ex vi venti, haec autem ex anemometro haberi poteſt, et determinatio illius ſuperficiei planae, quae eandem habet cum parte nauis immerſa reſiſtentiam ex eo poteſt deduci, ſi experimento innoteſcat, quantum in aqua ſtagnante nauis dato tempore et data vi tracta promoueatur. Iſta deductio patebit ex ſequenti paragrapho.

VI. Pes cubicus Londinenſis continet circiter 76 libras romanas aquae dulcis. Poſito iam planum continere tot pedes quadratos, quod continentur vnitates in f, illudque moueri directione perpendiculari in huiusmodi aqua dulci et quidem tali velocitate, vt ſingulis min. ſec. conficiat certum numerum pedum deſignatum per n. Erit preſſio aquae contra planum $=\frac{nnap}{4s}$ (per §. 7. p. 1.)

 et

et ſi per a intelligere velimus menſuram vnius pedis, erit $p =$ tot libris quot continentur vnitates in $76f$, vnde preſſio aquae contra planum iam eſt $= \frac{76nnf}{4s}$ ſeu $\frac{19nnf}{s}$, quae eſt aequalis ipſi preſſioni mediante qua planum in motu ſuo conſeruatur, quaeque proin ſi aequetur cum vi nauem propellente, habebitur numerus deſideratus f. Ponamus v. gr. eſſe nauem ita formatam et oneratam, vt illam decem homines (quorum actionem aequipollere ponemus 1000 libris) tempore duorum minutorum primorum in aqua ſtagnante trahere poſſint per ſpatium mille pedum; erit in hoc caſu $n = \frac{50}{6}$, et habetur $\frac{19nnf}{s} = 1000$, vnde habebitur ponendo pro s valorem $16\frac{1}{9}$; $f = 12\frac{4}{19}$. Ergo haec nauis eandem habebit reſiſtentiam ac haberet planum $12\frac{4}{19}$ ped. quadratorum perpendiculariter contra aquam motum. Liceat hic in tranſitu monere, inepte machinas adhiberi ad protrahendam nauem in aqua ſtagnante neque vtilius vim impendi poſſe quam manibus trahendo funem vel naui alligatum, ſi homines conſiſtant in ripa, vel alicubi fixum, ſi in naui trahant. Quoties autem machinae adhibentur perditur inutiliter vis in frictiones impenſa: Si tamen aquae notabilem tenacitatem ineſſe ponere vellemus, non reiiciendus eſſet illarum vſus.

VII. Videmus quoque corpora fluminibus innatantia non omnino eandem habere velocitatem, quam habet aqua. Id ex nulla alia cauſa deducendum quam ex reſiſtentia aeris. Hinc ſi quaeratur velocitas quam corpus innatans flumini habeat reſpectu fluminis, illa obtinetinebitur si detur in corpore tam figura partis aquae submersae quam figura partis extra aquam positae. Si resistentia prioris sit ad resistentiam posterioris vt 1 ad m, et si velocitas aquae dicatur n, velocitas corporis x, corpus mouetur contra aquam velocitate $n-x$ et contra aerem velocitate x; et cum resistentiae vtriusque fluidi in corpus debeant esse aequales, habebitur $800 \times (n-x)^2 = mxx$, vel $n-x = \frac{x\sqrt{m}}{\sqrt{800}}$, et $\frac{n\sqrt{800}}{\sqrt{m}+\sqrt{800}} = x$, et retardatio ab aeris resistentia, quae exprimitur per $n-x$, erit $= \frac{n\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{800}}$, ex qua pressione patet, non posse hanc retardationem omnino negligi, cum m est numerus admodum magnus, velnti in nauibus, vbi non facile minor erit m quam 50 seu 49. Vnde in his resistentia aeris haud minorem quam quintam partem velocitati (quam alias habitura esset nauis) demet. Quod si vero corpus totum fluido est submersum, non potest non eandem cum fluido velocitatem habere.

VIII. Non abs re fore puto hic quaedam obiter monere circa vortices coelestes. Statuitur vulgo planetas a materia subtili circa solem acta abripi. Si ita sit, oportet vt planetae habeant eandem celeritatem cum materia subtili. Alii insuper fingunt, materiam istam inaequali velocitate ferri, exinde deducturi motum planetarum circa axes suos. Videamus autem quanta ista inaequalitas velocitatum esse deberet. Sit distantia terrae a sole $= 12000$ diametrorum terrae; et sic centrum terrae mouebitur $\frac{24000}{365}$ vicibus celerius motu annuo quam punctum aequatoris motu diurno; vnde maxima

 diffe-

differentia velocitatum materiae ſubtilis in regione terrae eſſe deberet $=\frac{365}{12000}$ velocitatis mediae, cum differentia diſtantiarum exaequat tantum partem duodecies milleſimam diſtantiae mediae; quae rationum inaequalitas vix concipi poteſt. Si fingatur planetas moueri in fluido quieſcente, oporteat vt fluidum illud ſit minimum 3000000 vicibus rarius quam materia planetae, quia alias non poſſet non ſenſibiliter planetae motum perturbare. Quis autem tantam ſubtilitatem concipiat? Motum planetarum in vacuo, multo minus probo.

IX. Notari quoque meretur, quam inſufficiens ſit hypotheſis Carteſiana pro explicando deſcenſu corporum a grauitate. Praeterquam enim quod corpora non verſus centrum ſed verſus axem tendere deberent, non poſſent non abripi a materia ſubtili unaque cum illa in vorticem agi. Commode admodum fingeretur motum iſtum horizontalem eſſe infinities minorem motu verticali, ſi modo id ſtare poſſet cum ſolutione ſequentis problematis. *Probl.* Si in vortice BCD (fig. 5.) cuius centrum A, quieſcat globus E grauitatis expers, quaeritur ratio impulſus fluidi in ſuperficiem globi ſecundum directionem tangentialem ad preſſionem, quam fluidum ob vim ſuam centrifugam exercet. *Sol.* Sit diſtantia globi a centro vorticis $=r$, numerus pedum quos fluidum vorticis in illa diſtantia abſoluit tempore vnius minuti ſec. $=n$; denique pondus globi fluidi $=p$. Monſtrauit autem Hugenius, quod ſi globus feratur ea velocitate, quam acquirit lapſu ſuo libero per altitudinem $\frac{1}{2}r$, eius vis centrifuga aequalis ſit ſuo ponderi. Ergo cum idem

dem corpus mouetur ea velocitate quam acquirere cadendo ex altitudine $\frac{nn}{4s}$, tunc vis centrifuga erit ad pondus vt $\frac{nn}{4s}$ ad $\frac{1}{2}r$ (per s autem ſemper intelligo numerum pedum, quos graue cadendo deſcribit intra minutum ſecundum). Sed habet fluidum hanc velocitatem modo definitam, eſt itaque vis centrifuga globi fluidi, ſeu preſſio fluidi in globum ſolidum, $= \frac{nnp}{2rs}$. Vt iam determinare poſſimus preſſionem tangentialem fluidi in globum; ponemus diametrum ipſius $= a$, et cum ſit pondus cylindri globo circumſcripti $= \frac{2}{3}p$, atque preſſio fluidi in ſuperficiem ſphaericam dimidia ſit preſſionis perpendicularis in circulum maximum, erit (per §. 7. p. 1.) preſſio tangentalis fluidi $= \frac{3nnap}{16s}$. Eſt itaque ratio quaeſita vt $\frac{3nnap}{16as}$ ad $\frac{nnp}{2rs}$, vel vt $8a$ ad $3r$. Sed a ſeu diameter vltimarum particularum grauitantium eſt incomparabiliter minor quam r ſeu diſtantia corporum grauium a centro terrae: ergo tantum abeſt, vt motus horizontalis euaneſcere poſſit prae verticali, quin contrarium potius obtinere debeat. Caeterum ſi corpus in vortice conſtitutum et quieſcens haberet figuram cubicam, eſſet praedicta ratio vt r ad $2a$ ſiue vt duplum latus cubi ad diſtantiam corporis a centro vorticis.

Pars

Pars Tertia.

De motu corporum grauitate vel leuitate sua deorsum vel sursum motorum.

I.

QVamuis hoc argumentum ita iam sit pertractatum a plurimis Geometris, vt vix aliquid noui superaddi posse videatur, minime tamen haesitaui mea quoque meditata circa hanc rem cum Societate communicare, ideo quod non solum varias motuum relationes, sed ipsas eorundem quantitates atque mensuras, ad Newtoni exemplum definio. Et cum calculus experimentorum formulis seu aequationibus innitatur prolixissimis, conatus sum illas multo compendiosiores reddere; Occurrent quoque theoremata plane noua, quibus occasionem dederunt experimenta ab Excellentissimo Domino Gynthero cum tormentis bellicis instituta, quae videre est in parte 4. vbi ea ad calculum reuoco. Non itaque deerit campus in tritissima re, noua nec antea obseruata adiiciendi.

II. Constat, incrementa velocitatum in motu corporum semper proportionalia esse vi animanti ductae in elementum temporis. Si itaque velocitas corporis cadentis in fluido resistenti dicatur v (exprimam autem deinceps v per numerum pedum, quos motu aequabili conficere posset corpus tempore vnius minuti secundi) et tempus lapsus designetur per t, spatium a corpore prae-

dicto

dicto tempore descriptum $=s$, et vis corpus animans in illo momento sit $=p$, erit $dv=pdt$: et habebitur p subtrahendo de actione grauitatis resistentiam fluidi; sit grauitas corporis in fluido, seu differentia grauitatum specificarum corporis et fluidi, quae constanter eadem est, $=a$, et resistentia fluidi, quae proportionalis semper est quadratis velocitatum, $=nvv$ (potest autem n determinari ex grauitate specifica fluidi et figura corporis cadentis per §. 7. part. I. et seqq.) et degenerabit aequatio $dv=pdt$ in hanc aliam $dv=(a-nvv)dt$, vel $dt=\frac{dv}{a-nvv}$; et $ds=vdt=\frac{vdv}{a-nvv}$. Oporteat nunc aequationem eruere inter s et t purgatam a quantitate v, vt nimirum ex altitudine lapsus, tempus determinari possit vel reciproce. Atque hoc praestabimus in sequenti paragrapho.

III. Ponatur breuitatis ergo $\frac{a}{n}=mm$, et cum sit $dt=\frac{dv}{a-nvv}$ erit iam $ndt=\frac{dv}{mm-vv}$, ergo $nt=\int\frac{dv}{mm-vv}=\frac{1}{m}\log.(m+v)-\frac{1}{2m}\log.(mm-vv)+$ Const. C. Sed si corpora a puncto quietis delabuntur, euanescunt simul t et v, ergo $C=o$, vnde aequatio ita se habebit $2mnt=2\log.(m+v)-\log.(mm-vv)$ vel (posito $c=$ illi numero cuius logarithmus est vnitas) $c^{2mnt}=\frac{m+v}{m-v}$; vnde $v=(c^{2mnt}m-m):(c^{2mnt}+1)$. Consideremus iam alteram aequationem $ds=\frac{vdv}{a-nvv}$, vel $nds=\frac{vdv}{mm-vv}$; sumendo autem integralia habetur $ns=-\frac{1}{2}\log(mm-vv)+$ const. C: et cum s et v simul euanescere debeant, erit $C=+\log.m$; est ergo $2ns=\log.mm-\log(mm-vv)$; et $c^{2ns}=\frac{mm}{mm-vv}$, vel denique $v=m\sqrt{(c^{2ns}-1)}:c^{ns}$. Ex combinatione vtriusque valoris ipſius v orietur haec aequatio $(c^{2mnt}m-m):(c^{2mnt}+1)=m\sqrt{(c^{2ns}-1)}:c^{ns}$: quae recte pertractata dat $2c^{mnt+ns}=c^{2mnt}+1$; vel $2c^{ns}=c^{mnt}+c^{-mnt}$; vel $c^{mnt}=c^{ns}+\sqrt{(c^{2ns}-1)}$, aut denique $t=(\log.\overline{c^{ns}+\sqrt{(c^{2ns}-1)}}):mn$, et ſi pro m ſubſtituatur ipſius valor $\sqrt{\frac{a}{n}}$, erit $t=(\log\overline{c^{ns}+\sqrt{(c^{2ns}-1)}}):\sqrt{an}$. Poterit itaque ope vltimae huius formulae cognoſci t ex s. Si vero reciproce ſpatia quaerenda ſint ex datis temporibus inſeruiet haec aequatio $s=(\log.(c^{mnt}+c^{-mnt})-\log.2):n=(\log(c^{t\sqrt{an}}+c^{-t\sqrt{an}})-\log.2):n$.

IV. Aequationes, quas dedi in praecedente paragrapho, ſi calculo numerico ſubiici debeant, vti fecit Newtonus, calculus fit plerumque admodum prolixus. Notandum autem eſt in omnibus fere experimentis hactenus inſtitutis, eſſe n et s tales numeros vt vnitas poſſit negligi prae c^{2ns}, idque omnino absque vllo ſenſibili errore; tunc autem fit ſimpliciter $t=(ns+\log.2.):\sqrt{an}$ et $s=(t\sqrt{an}-\log.2):n$. Sunt vtique hae aequationes ſimpliciſſimae, poſſuntque facile ad omnes caſus particulares applicari, alias laborioſiſſimo calculo vix ſuperabiles, quod apparet ex methodo accuratiori qua Newtonus experimenta a ſe inſtituta ad calculum reuocat in *lib. 2. princ. phil. edit.* 3. Non poteſt vero ſemper tuto negligi illa vnitas reſpectu c^{2ns}; praeſertim cum experimenta inſtituta fuerint in medio valde leui, veluti in aere et ſi altitudo, qua corpus deſcendit, ſit valde mediocris, ac denique cum corpus ſit ſat magnum. In his tamen caſibus (in quibus nempe ns eſt numerus binarium ſeu ternarium haud ſuperans) calculus

culus absque praedicto compendio non admodum laboriosus fit.

V. In omnibus praecedentibus aequationibus intelligitur per n talis quantitas, quae multiplicata per quadratum velocitatis dat resistentiam absolutam; pendet itaque determinatio ipsius n a magnitudine et figura corporis, tum etiam a grauitate specifica fluidi; his autem pro lubitu assumtis desiderata quantitas n petenda est ex iis, quae monui §§. 7. 8. et 9. part. I. Hac vice considerabo saltem corpora sphaerica, quandoquidem cum huiuscemodi corporibus maxima experimentorum pars cum a Newtono tum etiam ab aliis instituta fuit.

VI. Vidimus in §. 7. p. I. quod posita velocitate tali, vt corpus absoluat motu vniformi intra minutum secundum spatium expressum per na, resistentia sit $=\frac{nnap}{4s}$ (vbi per p intelligitur pondus cylindri fluidi datae cuiuscunque longitudinis a, atque cuius basis est superficies cui fluidum impingit et s designat spatium, quod corpus libere cadendo in vacuo a quiete perficit intra min. sec.). Assumamus a designare mensuram vnius ped. Angl. et erit resistentia $\frac{nnp}{4s}$, et quia n exprimit velocitatem, est numerus multiplicatus cum quadrato velocitatis $\frac{p}{4s}$; quod si autem resistentia in globum sumatur, erit idem numerus duplo minor, seu $\frac{p}{8s}$, (vel ponendo pro s $16\frac{1}{9}$ ped. Angl.) $\frac{9}{1160}p$. Si loco ipsius p denotantis pondus cylindri fluidi longitudinis vnius pedis, cuius basis est aequalis circulo maximo globi, velimus introducere pondus fluidi,

 cuius

cuius moles eſt aequalis globo cadenti, ponemus menſuram vnius pedis ſe habere ad diametrum globi vt 1 ad m, et ſic erit pondus cylindri fluidi $=\frac{2}{3}mp$; vnde ſi tale pondus dicatur b erit $p=\frac{3b}{2m}$ et $\frac{9}{1100}p=\frac{27b}{2320m}$. Quod itaque vocauimus §§. 2. 3. et 4. part. 3. n, id poſito figuram corporum cadentium eſſe ſphaericam degenerabit in hanc quantitatem modo dictam $\frac{27b}{2320m}$. Ergo reaſſumendo litteras ibi aſſumtas, erit

$$t=[\log(c^{\frac{27bs}{2320m}}+\surd(c^{\frac{27bs}{1100m}}-1))]:\surd\frac{27ab}{2320m}$$

$$\text{et } s=[\log.(c^{t\surd\frac{27ab}{2320m}}+c^{-t\surd\frac{27ab}{2320m}})-\log.2.]:\frac{27b}{2320m},$$

his autem aequationibus, vti notaui §. 4. ſine ſenſibili errore ſequentes ſubſtitui poſſunt multum ſimpliciores, $t=(\frac{27bs}{2320m}+\log.2.):\surd\frac{27ab}{2320m}$ et $s=(t\surd\frac{27ab}{2320m}-\log.2.):\frac{27b}{2320m}$.

VII. Et ita quidem determinauimus motum corporum in fluidis reſiſtentibus reſpectu corporum libere cadentium. Supereſt praecipuum, ſcilicet, vt motus ille definiatur abſolute ita vt ex dato tempore, v.gr. numero quodam minutorum ſecundorum inferri poſſit ſpatium exprimendum per certum et definitum numerum pedum Anglicorum. Idque obtineri poterit ex comparatione temporum requiſitorum pro lapſu per certam quandam altitudinem tam in medio reſiſtenti quam non reſiſtenti: poſſet adeoque deduci ex vnico experimento; ſed poſſumus quoque eo carere, conſiderando quod primo momento, dum velocitas corporis cadentis adhuc dum infinite parua eſt, medium plane non reſiſtat, vnde aequa-

aequalia sunt prima lapsus tempuscula, tam in hypothesi resistentiae quam non resistentiae, si nimirum spatiola sunt aequalia; potestque exinde inueniri valor ipsius a in numeris absolutis, vti id in sequenti §. patebit.

VIII. Denotet AQ (fig. 6.) spatium in vtraque hypothesi emensum; QO autem repraesentet tempus pro medio resistenti et QP tempus pro medio non resistenti; et erit (ponendo $AQ = s$) $QP = \sqrt{\frac{a+b}{16\frac{1}{9}a}}s$ et $QO =$

$[\log.(c^{\frac{27bs}{2320m}} + \sqrt{(c^{\frac{27bs}{1160m}} - 1)})] : \sqrt{\frac{27ab}{2320m}}$. Oportet autem harum quantitatum (QP et QO) sumere differentialia, eademque posito $s = o$, inter se aequare: est diff. $QP = ds\sqrt{a+b} : 2\sqrt{16\frac{1}{9}as}$ et diff. QO est (ponendo vbique breuitatis ergo e pro $\frac{27b}{2320m}$) $= [c^{es}eds\sqrt{(c^{2es}-1)} + c^{2es}eds] : [c^{es}\sqrt{(c^{2es}ae-ae)} + c^{2es}\sqrt{ae}-\sqrt{ae}]$. In his quantitatibus differentialibus si ponitur $s = o$, fit vtraque infinita atque adeo nihil ex earundem comparatione cognosci potest. Vt huic incommodo obuiam eatur, multiplico aequationem per $\sqrt{16\frac{1}{9}as}$, vt habeatur $\frac{1}{2}ds\sqrt{a+b}. = (c^{es}eds\sqrt{(c^{2es}-1)} + c^{2es}eds) \times \sqrt{16\frac{1}{9}as} :$ $(c^{es}\sqrt{(c^{2es}ae-ae)} + c^{2es}\sqrt{ae}-\sqrt{ae})$; vel diuidendo per ds atq; negligendo primum terminum in numeratore posterioris quantitatis, erit $\frac{1}{2}\sqrt{a+b} = c^{2es}e\sqrt{16\frac{1}{9}as} : [c^{es}\sqrt{(c^{2es}ae-ae)} + c^{2es}\sqrt{ae}-\sqrt{ae}]$. In hac aequatione si ponitur $s = o$ atque simul obseruentur ea quae iuxta Patrem meum monuit Ill. Hospitalius in Analysi sua infinite paruorum p. 145. edit. primae, reperietur $a = 2 \times 16\frac{1}{9} - b = 32\frac{2}{9} - b$.

Denotat vero a pondus corporis in fluido et b pondus similis molis fluidi. Vnde si grauitas specifica corporis in vacuo sit ad grauitatem specificam fluidi vt q ad 1, erit $a = 32\frac{2}{9} - \frac{32\frac{2}{9}}{q}$, et $b = \frac{32\frac{2}{9}}{q}$: Atque si hi valores substituantur in aequationibus pro s et t circa finem §. 6. part. 3. datis, habebuntur aequationes finales, quarum ope ex data diametro globi vna cum ipsius grauitate specifica respectu grauitatis specificae fluidi, potest relatio absoluta haberi inter tempus minutis secundis expressum et spatium iam absolutum numero quodam pedum Anglicorum definitum. Hic tantum apponam, quas dixi proxime veras esse. Erit ergo $t = \frac{s\sqrt{27}}{\sqrt{2320m \times (q-1)}} + \frac{q \log. 2\sqrt{2320m}}{32\frac{2}{9}\sqrt{27q-27}} =$ (quam proxime) $(108 s\sqrt{\frac{1}{m}} + 199 q\sqrt{m}) : 1000\sqrt{q-1}$: et $s = \frac{1000 t\sqrt{mq-m} - 199mq}{108}$.

IX. Si quis iam velit hasce formulas simplicissimas experimentis confirmare, is deprehendet consensum inter calculum et experimenta, quem vix ipse sperassem: indicio certissimo et rectam a nobis assumtam esse resistentiae mensuram et nos omni cum successu eadem vsos fuisse pro eruenda theoria motus corporum in mediis fluidissimis, id est, omni tenacitate expertibus. Extant autem experimenta quamplurima exactissime instituta a Cl. Newtono in eiusdem *Princ. Math. Phil. Nat. p.* 346. *et seqq. edit.* 3. Apponam hic vnicum experimentum vt pateat formularum nostrarum applicatio.

Experimentum. Globus cuius pondus in vacuo erat

$156\frac{1}{3}$

$156\frac{1}{3}$ gran. et 77. gr. in aqua cadebat per altitudinem 112. digitorum tempore quatuor minut. sec. et diameter globi erat $\frac{7}{100}$ pedis Angl.

In hoc casu est $q = \frac{469}{238}$; $s = \frac{112}{12} = \frac{28}{3}$ et $m = \frac{7}{100}$. Substitutis autem hisce valoribus in aequatione priori reperitur $t = 3\frac{9}{10}$ cum experientia fuerit $t = 4$.

Caeterum feci ipse plura experimenta, et mire conuenerunt cum theoria. Aliquando tamen de corpore cylindrico ita studiose fabricato, vt dum descenderet ipsius basis non posset extra situm horizontalem se ponere, obseruaui, multo tardius descendisse, quam pro theoria debuisset (deberet autem ipsius resistentia duplo esse maior, quam superficiei sphaericae eiusdem diametri). Vnde tunc iudicaui theoriam non posse applicari, nisi ad illa corpora quae findendae aquae aptiora sint; potest enim in his tenacitas fluidi negligi, cum in superficiebus planis fluidorum tenacitas vtcunque exigua sensibilem tamen retardationem producere possit. Postea vero consideraui, fuisse corpus ita temperatum, vt grauitas ipsius specifica vix aliquantulum maior esset grauitate specifica aquae in qua descendit, vnde fieri potuit vt tenacitas aquae iam non amplius negligenda esset respectu resistentiae quae ob lentissimum corporis descensum minima erat. In eo deinceps plurimis aliis experimentis confirmatus fui.

X. Quod si corpora in fluidis sursum tendant, id est, si fluida sint specifice grauiora quam solida corpora, non aliter mutandae erunt aequationes nostrae, quam quod loco $\sqrt{q-1}$ ponatur $\sqrt{1-q}$, ita vt habeatur $t =$

(108

$(108 s\sqrt{\tfrac{1}{m}} + 199 q\sqrt{m}) : 1000\sqrt{1-q}$. et $s = \frac{1000 t\sqrt{m - mq} - 199 mq}{108}$. Ratio eſt, quod in hoc caſu loco aequationis $a = 2 \times 16\tfrac{1}{9} - b$ in paragrapho octauo huius partis erutae, habetur $-a = 2 \times 16\tfrac{1}{9} - b$, quem valorem ſubſtituendo in aequationibus circa finem paragraphi 6. appoſitis, oriuntur modo dictae aequationes pro s et t.

Circa aſcenſum corporum ob grauitatem ſuam negatiuam ſurſum tendentium experimenta nulla extant apud Newtonum; feci itaque quamplurima, quae cum praedictis aequationibus omnino conueniunt, ſi differentia inter grauitates corporis et fluidi ſit grandiuſcula; ſed ſi differentia ſit valde parua, deprehenditur aſcenſus corporum multo tardior, quam pro theoria noſtra eſſe deberet; quod phaenomenon me diu ancipitem tenuit, donec tandem obſeruauerim, id tenacitati fluidorum tribuendum eſſe, hancque nullo modo negligendam eſſe neque in aſcenſu neque in deſcenſu corporum, cum iam differentia grauitatum infra trigeſimam vel quadrageſimam partem grauitatis fluidi eſſe incipit, probe intellexerim, vti in praecedente paragrapho monui. Caeterum hic loquor de aſcenſu corporum fluidis ſpecifice leuiorum; nam corpora grauiora ſurſum proiecta aliam theoriam, quam quae ex hactenus dictis pateat, poſtulant. Atque de his agam in ſequenti capite.

Pars

Pars Quarta

De motu corporum ſurſum proiectorum, vbi ad calculum reuocantur experimenta ab Excellentiſſ. Dno Günthero cum tormentis inſtituta.

I.

Retinebo hic ſignificationes, quas dedi litteris a, n, v, s et t. Sic ſe ſponte offerunt ſequentes aequationes initiales pro aſcenſu corporum $-dv=(a+nvv)dt$ vel $dt=\frac{-dv}{a+nvv}$ atque $ds=vdt=\frac{-vdv}{a+nvv}$. Oportet nunc iterum ope harum duarum aequationum tertiam eruere inter s et t, quam non ingrediatur littera v. Hunc in finem analyſin praemittemus poſterioris aequationis $ds=\frac{-vdv}{a+nvv}$: multiplicetur haec aequatio per $-2n$ et habebitur $-2nds=\frac{2nvdv}{a+nvv}$, et ſumendo integrales quantitates $-2ns=$ log. $(a+nvv)+$ quantitate conſtanti, quae pendet a velocitate initiali; ponemus ergo velocitatem initialem $=q$ et erit $-2ns=$log. $(a+nvv)-$ log. $(a+nqq)$; vel $c^{-2ns}=(a+nvv):(a+nqq)$; vel $v=\sqrt{\frac{c^{-2ns}\times\overline{a+nqq}-a}{n}}$

II. Poſtquam ita inuenimus valorem ipſius v; poſſumus huius loco ponere inuentum valorem in aequatione $dt = \frac{-dv}{a+nvv}$, atque sic statim obtinebimus aequationem desideratam, nempe $dt = ds\sqrt{\frac{n}{e^{-2ns} \times \overline{a+nqq} - a}}$ vel $dt = \frac{e^{ns}\, ds\sqrt{n}}{\sqrt{(a+nqq-e^{2ns}a)}}$. Exinde fluit constructio sequens. Fiat quadrans circuli AGE (fig. 7.) cuius radius $AC = \sqrt{\frac{a+nqq}{a}}$; sumatur $CF = c^{ns}$, et $CB = 1$: ex punctis F et B erigantur perpendiculares FG et BD, et erit arcus DG diuisus per $\sqrt{\overline{a+nqq} \times n}$ aequalis tempori insumto in ascensum per spatium s.

III. Ex praecedente constructione sequitur esse tempus constanter proportionale angulo GCD: et cum tempus est maximum tunc correspondet angulo ACD. Caeterum ratio inter AB et BC eo maior est, quo velocitas initialis expressa per q maior est. Vnde si haec velocitas sit infinita euanescit BC atque angulus maximus fit rectus habetque proin rationem finitam ad quemcunque alium maximum angulum ACD. Exinde colligo tale theorema nouum atque elegans

Theorema. *Corpus vi infinita verticaliter sursum proiectum in medio etiam tenuissimo tempore finito totum ascensum vtut infinitum absoluit secus ac in vacuo.*

IV. Ex praedictis patet, quaenam futura sit maxima altitudo ad quam corpus in medio resistenti data vi proiectum verticaliter ascendere potest: habebitur nimirum maxima illa altitudo cum sit $v = o$; est autem per §. 1. p. 4. $v = \sqrt{\frac{e^{-2ns} \times \overline{a+nqq} - a}{n}}$; est ergo s in hoc casu $= \frac{\log.\overline{a+nqq} - \log.a}{2n}$. Si hanc quantitatem vnica littera B indicadicare velimus, habebitur $\frac{\log.\overline{a+nqq}-\log.a}{2n}=B$ vel $q=\sqrt{\frac{c^{2nB}a-a}{n}}$: quem valorem ſubſtituendo vbique pro q erit radius $AC=c^{nB}$, in quo ſumendo iterum $CF=c^{ns}$ et $CB=1$ erit arcus DG diuiſus per $c^{nB}\sqrt{an}=$ tempori inſumto in aſcenſum per ſpatium s. Ex his liquet nihil poſſe affirmari de temporibus absque praecognito valore ipſius B; hoc autem cognito omnia reliqua facile determinantur. Sed valde difficile eſt in experimentis obſeruare altitudines maximas ad quas corpora aſcenderunt, imo id plane fieri nequit, cum altitudines illae ſunt admodum magnae, quales ſunt in globis ferreis ex tormentis bellicis exploſis. Id ſolummodo obſeruari poteſt exacte, quantum temporis corpora inſumunt in itu ſuo atque reditu, id eſt, quot minuta ſecunda in aere commorentur. Cogitaui igitur de ſequenti problemate nodoſo equidem ſed vtiliſſimo.

Problema I. *Dato tempore, quo datum corpus in medio dato verticaliter ſurſum proiectum, aſcenſum et deſcenſum abſoluit, inuenire altitudinem totam ad quam corpus aſcendit.*

Ex ſolutione primi huius problematis facile deducitur

Problema II. *Datis iisdem inuenire ſeorſim tempus aſcenſus et tempus deſcenſus.*

Neque maiori induſtria opus erit pro ſolutione alterius problematis ſequentis

Problema III. *Datis iisdem inuenire tempus* *quod corpus in vacuo eadem vi proiectum in ascensum impenderet atque altitudinem ad quam ascenderet.*

V. Quod ad primum problema, solutionem illius dabo per seriem quandam. Sit itaque tempus ascensus et descensus simul sumtum $=T$ manente significatione reliquarum litterarum. Ergo (per §. 4. part. 4.) erit tempus totius ascensus = arcui AD (sumendo radium $=c^{nB}$) diuisio per $c^{nB}\sqrt{an}$. Sinus huius arcus est linea BD seu $\sqrt{(c^{2nB}-1)}$: exprimam itaque arcum AD per A S. $\sqrt{(c^{2nB}-1)}$ quod significat, arcum correspondentem sinui $\sqrt{(c^{2nB}-1)}$. Assumtis his symbolis tempus ascensus totius tale erit $(A.S.\sqrt{(c^{2nB}-1)}) : c^{nB}\sqrt{an}$. Porro tempus descensus est (per §. 3. p. 3.) $=(\log. c^{nB}+\sqrt{(c^{2nB}-1)}):\sqrt{an}$. Quod si aggregatum vtriusque temporis aequetur cum dato tempore T habebitur aequatio mediante qua valorem ipsius B colligere dabitur. Est autem illa aequatio talis

$$(A.S.\sqrt{(c^{2nB}-1)}):c^{nB}\sqrt{an}+(\log.c^{nB}+\sqrt{(c^{2nB}-1)}):\sqrt{an}=T,$$

cui tentando satisfieri potest; sed dabo insuper methodum, qua ad huius modi aequationum radicem appropinquari potest, quousque libuerit, quaeque in omnibus fere casibus vtiliter adhiberi potest.

VI. Immutetur aequatio ita, vt ab vna parte habeatur B purum et ab altera parte sint quantitates vtcunque compositae atque signis siue a logarithmis siue a circulo pendentibus inuolutae, quarum complexum considerabo vt functionem quandam ipsius B: In hac functione substituatur vbique loco B eiusdem functio inuenta per primam aequationem; In noua aequatione idem repetatur; atque sic habebitur seriei species, donec tandem sine sensibili

ſibili errore loco quantitatis B poſſit quaelibet ad lubitum ſubſtitui. Haec magis fient manifeſta, indicando functionem ipſius B per F(B). Dico itaque conciliandam eſſe aequationi propoſitae huiusmodi formam $B = F(B)$, inque hac poſſe loco poſterioris B poni valorem ipſius, ita vt habeatur $B = F(F(B))$ et ſic porro, atque haec veſtigia premendo fore vt habeatur ſpecies ſeriei $B = F(F(F(F \ldots\ldots B \ldots\ldots)))$, vel $B = F(F(F(F \ldots C \ldots)))$ poteſt enim loco vltimi B poni quaelibet quantitas, ſi ſaepius ipſius functio repetatur. Notandum tamen eſt, poſſe functionem talem accipi, vt eiusdem repetitio diuergere faciat a vero valore quantitatis quaeſitae quod vbi animaduertitur, alia functio ex aequatione propoſita deducenda eſt, et ſic poterit appropinquari ad valorem ipſius B, quousque libuerit, non obſtante quod aequatio in praecedenti paragrapho data ita ſit compoſita, vt vnicuique ſtatim appareat, fieri fere non poſſe, vt aliquid ex illa cognoſcatur. Nunc ipſam aequationem aggrediar.

VII. Ponatur in aequatione noſtra breuitatis cauſa $c^{uB} = x$, et habebitur

$(A.S.\sqrt{xx-1}) : x\sqrt{an} + (\log. x + \sqrt{xx-1}) : \sqrt{an} = T$; ex hac aequatione deducenda eſt functio quae ſit aequalis x. Id vero obtineri poteſt diuerſis modis, ſed cauendum ne talis ſeligatur, quae ſaepius repetita magis magisque recedat ab aſſumto valore ipſius x: poterit ergo aequatio vltimo loco poſita transmutari in hanc

$$A.S.\sqrt{xx-1} = Tx\sqrt{an} - x\log(x + \sqrt{xx-1}).$$

vel transferendo ſignum A.S. ad alteram partem id quod fit inuerſione litterarum, ponendo ſcilicet S. A. (quod ſignificat ſinum arcus dati, cuius radius $= x$) habebitur

$\sqrt{xx-1} = S.A.(Tx\sqrt{an} - x \log (x+\sqrt{xx-1}))$, vel ſumendo quadrata, transferendoque vnitatem ad alteram partem atque extrahendo denique radicem, erit $x = \sqrt{1+\square S.A.(Tx\sqrt{an} - x \log. (x+\sqrt{xx-1}))}$, quae aequatio vt recte intelligatur, dicam eſſe x talem numerum, vt ſi ſumatur radix ex $xx-1$, eidemque addatur, ſummaeque ſumatur logarithmus, qui multiplicatus per x ſubtrahatur de $Tx\sqrt{an}$, deindeque differentia conſideretur tanquam arcus circuli, cuius radius $= x$, huiusque arcus accipiatur ſinus, vt, inquam, ſit radix ex quadrato praedicti ſinus vnitate aucto aequalis ipſi x. Caeterum cum de logarithmis ſermo eſt, intelliguntur logarithmi hyperbolici, qui habentur diuidendo logarithmos tabulae Vlaccianae per 0,434294481 9.

VIII. Ad illuſtrandam methodum quam dedi paragr. 6. pro approximatione ad radices aequationis vtcunque compoſitae, monſtrabo exemplum pro vltima noſtra aequatione ita perplexa vt prima fronte facile videatur nihil fere ex illa intelligi poſſe. Exemplum autem, quod apponam non eſt ad lubitum ſelectum ſed ad experimentum, cuius deinceps mentionem faciam, accommodatum; quaeritur itaque valor ipſius x in caſu quo $T\sqrt{an}$ eſt $= 2,771884$. Pono ſtatim $x = 2$, vnde $\sqrt{xx-1} = 1,73$, et $x+\sqrt{xx-1} = 3,73$, cuius logarithmus $= 1,3395$: quem ſubtrahendo de $T\sqrt{an}$, remanet, 1,432384, quod reſiduum iam deberet multiplicari per x, quia autem hic compendium aliquod obſeruandum eſt, indicabo tantum multiplicationem hanc ponendo interim reſi-

residuum illud $=$R; atque ita habebitur Rx; haec vero quantitas consideranda est vt arcus circuli cuius radius $=x$; quaeritur ergo quot graduum futurus sit arcus ille; is reperietur sumendo quartam proportionalem ad $\frac{710}{113}x$, 360 et Rx, quae quarta proportionalis fit 57, 296R. Potest adeoque semper negligi multiplicatio quantitatis R per x, statimque multiplicari eadem quantitas R per 57, 296 vt habeatur numerus graduum arcus definiti. Dein sumatur in tabula sinuum ille sinus qui respondet isti arcui, multipliceturque sinus per $\frac{x}{100000}$: et sic habebitur S. A. (Rx) in nostro casu $=1, 98$, cuius quadratum vnitate auctum dat 4, 9204, huiusque radix 2, 20; Oportet ergo per regulam §. 6. datam ponere secunda vice $x=2, 20$, atque singula repetere, quae modo facta sunt, et sic fiet $x=2, 37$, dein $x=2, 48$, dein $x=2, 53$, postea fit $x=2, 55$ et denique $x=2, 56$, deinde posui $x=2, 570$, exindeque resultauit $x=2, 573$. Potest itaque tuto assumi $x=2, 575$, atque sic certi erimus hunc numerum vix aberrare in millesimis a vero numero. In his calculis obseruandum est, esse eo exactiores vbique numeros accipiendos, quo maius iam appropinquatum fuerit ad valorem ipsius x. Cognita autem x, faciendum est $B=\frac{\log. x}{n}$, quia positum fuit in praecedente paragrapho $c^{nB}=x$. Vnde si n fuerit 0, 0002063 erit $B=4550$.

Et haec sufficiant pro primo problemate; id tantum addidero, quod si x incipiat esse tanti valoris, vt vnitas possit negligi prae ipsius quadrato, tunc aequatio nostra

ſtra §. 7. data ſtatim ab initio degenerat in hanc (A.S.x): $x\sqrt{an} + (\log. x + \log. 2) : \sqrt{an} = T$; Sed (A.S.$x$) : x, nihil aliud eſt ob radium $= x$, quam ratio quadrantis circuli ad radium ſeu $355:226$; habetur itaque $355:226 + \log. x + \log. 2. = T\sqrt{an}$, vel $\log. x = T\sqrt{an} - \log. 2. - \frac{355}{226}$, et conſequenter $B = \frac{\log. x}{n} = T\sqrt{\frac{a}{n}} - \frac{\log. 2}{n} - \frac{355}{226n}$, quae aequatio admodum ſimplex eſt, ſed tamen non accipienda, niſi praeuideatur fore x iam numerum grandiusculum, qualis fit, cum corpus vi vehementiſſima ſurſum iactum fuerit.

IX. Problema ſecundum paragrapho 4to propoſitum poſtulat tempus aſcenſus et tempus deſcenſus ſeorſim. Tempus autem totius aſcenſus eſt (A.S.$\sqrt{(c^{2nB} - 1)}) : c^{nB}\sqrt{an}$ quod iam ob cognitum valorem ipſius B facile ſumi poteſt; et ſi tempus aſcenſus ſubtrahatur de T habebitur tempus deſcenſus. Vel poterit etiam primo loco inquiri in tempus deſcenſus, quod eſt $(\log. c^{nB} + \sqrt{c^{2nB} - 1}) : \sqrt{an}$, hocque auferri a T vt habeatur dein tempus aſcenſus, et hic alter modus praeferendus eſt priori; quia tabulae logarithmorum frequentiores ſunt tabulis arcuum, et praeſertim quia in vltima operatione, qua valor x proxime fuit determinatus, iam ſumtus fuit logarithmus ex $x + \sqrt{xx - 1}$, quem logarithmum diuidendo per $\sqrt{an}$, habetur tempus deſcenſus; nam valores duo proximi ipſius x vix differre debent.

X. Solutio problematis tertii petenda eſt ex paragrapho 4. part. 4. vbi vidimus, eſſe q velocitatem initiatialem designantem $=\sqrt{\frac{c^{\frac{2nB}{a}}-a}{n}}$, vnde tempus, quod globus eadem vi proiectus in vacuo in ascensum atque descensum impendisset, numero minutorum secundorum expressum est $=\frac{1}{g}\sqrt{\frac{c^{\frac{2nB}{a}}-a}{n}}$, significante littera g numerum pedum, quos graue libere a quiete cadendo tempore vnius minuti secundi conficit. Ipsa vero altitudo, ad quam globus definita vi sursum proiectus ascendere potuisset, est $=\frac{c^{\frac{2nB}{a}}-a}{4ng}$.

XI. Hisce tribus problematis omnia continentur, quae circa ascensum corporum notatu digna censui. Caeterum me non monente id cuique manifestum est, positis corporibus sphaericis, esse iterum $n=\frac{21b}{2320m}$, vbi m denotat quoties diameter globi continet vnum pedem Angl. et b significat pondus globi fluidi eiusdem diametri cum globo solido, vti illud exposui paragrapho 6. part. 3. et a erit $=2g-b$ seu $a=32\frac{2}{9}-b$ per paragr. 8. part. 3. Hisce meditationibus haud parum vtilitatis accedere posse existimaui, si ad calculum reuocarem aliquot experimentorum quae Excellentis. Dominus Güntherus coram Academicis quibusdam institui curauit, ex quibus apparebunt stupendi effectus, quos aer in corpora grauitatis specificae octies millesies fere maioris exercere valet; poterunt quoque exinde vires pulueris pyrii exacte inter se comparari multaque alia vtiliter colligi. Experimenta autem instituta fuerunt quamplurima variique generis; de quibus ea seligam, quae in hanc rem facere possunt, qualia sunt cum tormentorum situs omni cura ad perpendiculum accommodatus fuit, ſimul obſeruando quantitatem pulueris pyrii et tempus, quod globus in aſcenſum et deſcenſum impendebat. Continebat autem diameter globi $23\frac{3}{4}$ centeſimas particulas pedis Anglici ipſeque globus vtpote ferreus grauitatis ſpecificae ponetur in calculo reſpectu aeris, vt 7650 ad 1. aerem quoque vbique eiusdem eſſe denſitatis fingemus. Notetur inſuper longitudinem cauitatis internae tormenti fuiſſe $7\frac{7}{10}$ ped. Angl. Patet ergo, eſſe a ad b vt 7649 ad 1; et cum a ſit $= 32\frac{2}{9} - b$ erit $b = \frac{29}{6885}$, et $a = \frac{221821}{6885} = 32,218$. Porro diameter globi dat $m = 0,2375$; ergo $n = \frac{379}{3793635}$ $= 0,0002063$ et $\sqrt{an} = 0,081526$. Hae poſitiones in ſequentibus experimentis erunt eaedem; et ſi ponitur $T = 34$ vti in exemplo 2. habentur poſitiones §. 8.

Quantitas pulveris pyrii in vnciis Holl. expreſſa.	Tempus totum aſcenſus et deſcenſus.	Altitudo ad quam globus peruenit in aere reſiſtente	Tempus aſcenſus in aere reſiſtente	Tempus deſcenſus in aere reſiſtente.	Altit. ad quam globus eadem vi proiectus in vacuo aſcendere poteſt	Tempus, quod eadem vi proiectus in vacuo in aſcenſum et deſcenſum impendit
$\frac{1}{2}$	11	486	5, 42	5, 58	541	11, 6
2	34	4550	14, 37	19, 63	13694	58
4	45	7819	16, 84	28, 16	58750	121

Prae-

Praedictae obseruationes factae fuerunt in tormento longitudinis 7, 7 ped. Angl. Dein cum eodem tormento eodemque globo, sed priori diminuto 1, 7 ped. ita vt longitudo animae residua esset praecise 6. ped. sequentia experimenta instituta fuerunt

Quantitas pulueris pyrii numero vnciarum expressa.	Num. min. sec. per quae globus in aere permansit per obseruationes.	Alt. ad quam glob. in aere peruenit per calculum ped. Angl. expr.	Temp. ascensus num. min. sec. express. per calc.	Temp. desc. num. min. sec. express. per calc.	Alt. globi eadem vi proiecti in vacuo ped. Angl. express. per calc.	Num. min. sec. quae globus eadem vi proiectus in vacuo in asc. et desc. impend.
$\frac{1}{2}$	8	257	3, 95	4, 05	274	8, 2
2	20, 5	1665	9, 74	10, 76	2404	24, 5
4	28	3187	12, 5,	15, 5	6604	40, 5
6	32, 5	4304	13, 9	18, 6	11810	54, 3
8	38	5643	15, 54	22, 46	22394	74

XII. Vtraque tabula exacto calculo constructa fuit: Superest vt iam quaedam consectaria ex ipsis deducamus prae aliis notabiliora: Maximum tempus ascensus fuit 16, 84 min. sec. et post hoc tempus ascensus maximum est 15, 54: differentia est tantum 1, 30 m. s. cum tamen differentia altitudinum, ad quas in vacuo peruenit globus, ſit minime contemnenda, quippe quae exaequat 2176 ped. Angl. Ex hoc ſolo vnicuique manifeſtum ſit, dari tempus, quod globus in aſcenſu vtcunque magno nunquam excedit; quod demonſtraui §. 3. part. 4. tempus maximum autem eſt pro aſcenſu $= \frac{255}{226\sqrt{an}}$, quod in globo noſtro ſit $= 19, 27$ min. ſ. Exinde quoque confirmatur ſequens

XIII. Theorema. *Tempus aſcenſus et deſcenſus ſimul ſumtum maius eſt in vacuo quam in pleno; poſitis iisdem ab vtraque parte velocitatibus initialibus: poteſt autem in vtroque caſu eſſe infinitum; quamuis in vacuo infinities maius tunc ſit quam in pleno.*

Quod autem tempus aſcenſus et deſcenſus globi vi infinita in medio aequabili et reſiſtenti ſurſum proiecti infinities minus ſit, quam cum vi eadem in vacuo ſurſum proiectum fuerit, etſi vires grauitatis eaedem fuerint ex illo eluceſcit, quod praedictum tempus in priori caſu ſit $= B\sqrt{\frac{a}{n}}$, dum in poſteriori ſit $= c^{nB} \sqrt{\frac{a}{ngg}}$. Sed ſi vis explodens ſit infinita, erit etiam velocitas initialis ſeu q infinita; porro $B = \frac{\log. \overline{a+nqq} - \log. a}{2n}$ per §. 4. part. 4. Ergo etiam B erit infinita exiſtente q infinita. Conſtat vero eſſe c^B infinities maiorem quam B, ſi B ſit infinita, ergo etiam tunc $c^{nB}\sqrt{\frac{a}{ngg}}$ erit infinite maior quam $B\sqrt{\frac{a}{n}}$. Q.E.D.

XIV. Theor. *Poſitis iterum viribus explodentibus ſeu velocitatibus initialibus aequalibus et infinitis, erit etiam altitudo ad quam globus peruenit in vacuo infinities maior*

ior altitudine , ad quam peruenire potest in medio resistenti. Vtraque vero iterum est infinita.

Hae propositiones partim iam in praecedenti paragrapho demonstratae fuerunt , partim eadem methodo adhibitis formulis ascensuum quantitates denotantibus demonstrari possunt. Caeterum notari meretur , aerem quem posuimus ferro 7650 vicibus leuiorem, tantam tamen resistentiam exeruisse in globum ferreum , cum 45. min. sec. in aere commoraretur , vt eidem $\frac{7}{8}$ partes abstulerit in ascensu.

XV. Licet quoque ex tabulis praemissis quaedam colligere circa vim pulueris pyrii: Sunt vtique vires impressae globis vt altitudines ad quas in vacuo globus ascendere potest: In prima autem tabula vidimus altitudines illas esse vt 13694 ad 541 seu fere vt 26 ad 1, cum quantitates pulueris erant vt 4 ad 1. Vnde apparet vires pulueris in globum propellendum multo maiori ratione crescere quam eiusdem pulueris pondera. Rationem huius phaenomeni aliam assequi nequeo , quam quod maxima pars pulueris accensi transeat per lumen accensorium et per hiatum illum inter globum et animam tormenti interceptum, quodque haec pulueris pars inutilis in longe minori adsit ratione,cum ingens pulueris quantitas adhibetur,quam cum parua.Caeterum id quoque ex experimentis colligere licet , considerando puluerem vt aerem condensatissimum , scilicet vires aeris densissimi in multo maiori ratione, quam densitates , crescere ; subducto enim calculo , inueni aerem naturali quingenties denſiorem elaſticitate praeditum eſſe naturali aeris elaſticitate minimum ſexies millies maiorem.

Adnectam hic alia quaedam experimenta cum mortario inſtituta: Si quis ad calculum ea reuocare voluerit, id eo plane modo, quem indicaui §. 8. fieri poterit: erat autem diameter animae mortarii 1, 05 ped. Angl. diameter globi 1, 01 ped. pondus globi 200 libris Holland.

Quantit. pulv. pyr. in lib. Holl.	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6
Tempus, per quod globus in aere manſit in min. ſec.	3	7, 5	12	16, 5	20	23	25

Reliqua, quae Auctor circa motum corporum in mediis reſiſtentibus coram Societate praelegit, in ſequentem Tomum differentur.

NO-

NOVA PLANTARVM GENERA

Auct.

I. C. Buxbaum.

PRoſtant in officinis pharmaceuticis Moſquae fruſtula ſpongioſi cuiusdam vegetabilis, quod Rutheni vocant *Badiaga*, et multi ipſis vſus eſt in liuoribus oculorum aliarumque partium a verberibus, quos huius puluis impoſitus vna nocte tollere dicitur.

Eſt autem haec *Badiaga* planta ſui generis aquis perpetuo ſubmerſa, ſpongioſa, ex multis fibrillis herbaceis quaſi contexta, fragilis et digitis, ſicca inprimis, facile friabilis, qua in re differt a ſpongia, cuius textura tenax et veluti ex lana compacta. Praecipuam autem differentiam conſtituunt grana rotunda, quibus noſtra Badiaga referta eſt, quaeque pro ſeminibus haberi poſſunt. Et haec etiam ipſam ab Alcyonio ſeparant.

Tres hactenus obſeruauimus *Badiagae* ſpecies, quarum prima nobis audit *Badiaga maior*. Figura huius occurrit in Löſelii Flora Pruſſica, vbi appellatur *Muſcus aquaticus*, *Ceratoides*, de quo Breynius in Praefatione Florae Quaſimodogenitae notat, quod ſit *Spongiae ſpecies elegans noua*. Addidit quoque breuem deſcriptionem Löſelius, nullam tamen mentionem facit ſeminum, quod fecit Ruppius in Flora Ienenſi, qui pariter figu-

figuram exhibet. Exhibere quoque talem videtur Plukenetius Tab. CXII. fig. 3. ſub nomine *Spongiae fluuiatilis, anfractuoſae, perfragilis, ramoſiſſimae*. Sed nulla adeſt deſcriptio, quae etiam deſideratur in Raio et Hiſtoria Oxonienſi, vnde nihil certi determinare poſſumus. Granula iſta ſeu ſemina in hac maiori ſpecie rotunda ſunt coloris albidi, in altera parte inſtar lapidum cancri excauata. Odor plantae recentis eſt teter et piſculentus.

Secunda ſpecies conuenit cum praecedente colore ex atro viridi et odore graui, differt vero, quod minor minusque ramoſa et quod granulis croceis et ſplendentibus rotundis, quales in *Hippuride* ſeu *Equiſeto foetido ſub aquis repente* C. B. obſeruatur. Adhaeret limo aut Lenticulae triſculae, praecedens vero lignis adnaſcitur putreſcentibus ſub aquis latentibus. Pigrarum aquarum alumna eſt et a nobis dicitur *Badiaga minor*.

Badiaga cinerea appellari poteſt tertia ſpecies, quae *Spongia ramoſa fluuiatilis Newtoni Rai. Hiſt.* 81. Haec reliquis longe elegantior cinereo aut albicante colore ad ſpongiam accedit, ſed friabilitate et fragilitate Badiagae ſimilis. Rami interdum inter ſe coaleſcunt et vacua quaedam ſpatia relinquunt. Semina in hac non vidi, quae an ſimilia cum praecedentibus ferat, neſcio, ob conuenientiam tamen in reliquis huc referre placuit.

Secundum genus plantarum nouum a nobis appellatur *Lupinaſter*, cuius notae ſunt: Folia inſtar Lupini digitata. Flores papilionacei, in capitulum, longo petiolo ex foliorum alis egreſſo, ſuſtentatum, congeſti ſiliquae longae depreſſae, ſeminibus reniformibus foe-

tae,

tae, quae notae ipſum a congeneribus ſatis euidenter ſeparant.

Caules profert hic *Lupinaſter* ſemipede altiores, non raro pedales, rotundos et ſtriatos, virides, paruis ramis ex alis foliorum egredientibus praeditos. Folia longa, acute ſerrata, glauca, non tamen hirſuta, eleganter ſtriata et rigida. Quinque, ſex, ſeptem, imo plura digitatim, inſtar foliorum Lupini, communi inſident pediculo breui, ex vagina ſublutea caulem amplectente prodeunte. In ſummo caule et ramulis naſcuntur flores purpureo coerulei in capitulum collecti, exacte flores Trifolii bituminoſi referentes, pediculis vncialibus aut longioribus ſuſtentati et calyce in multa ſegmenta acuta ſciſſo excepti. Sequuntur ſiliquae longae depreſſae, ſeminibus reniformibus nigris repletae. Creſcit haec elegans planta ad ripas Wolgae intra Aſtrakanum et Czarizinam, ob ſimilitudinem cum Lupino hoc nomen imponere placuit. vid. Tab. XX.

Poliifolia tertium conſtituit genus notasque gerit Flores monopetalos campaniformes globoſos et capſulam in quinque loculamenta diuiſam, ſeminibus foetam ſubrotundis. Et vt breuiter dicamus, Poliifolia eſt plantae genus flore Arbuti, fructu Ciſti.

Mutuati ſumus Poliifoliae nomen ex I. Bauhino, a quo haec planta vocatur *Viti Ideae affinis Poliifolia montana*. A Raio in Synopſ. dicitur *Ledum paluſtre noſtras flore Arbuti*; vbi haec planta optime deſcribitur, cui deſcriptioni nos addimus petiolos flores ſuſtinentes et calycem breuem floribus eſſe concolores, hoc eſt eleganter purpureos. Figura I. Bauhini non adeo bona, nec meliorem multo dat Plukenetius. Occurrit foliis anguſtioribus et latioribus, poſterior vacatur a Scherardo *Ledum paluſtre foliis latioribus ſucculentis* in Raii Synopſ.

Pertinet ad frutices fructu ſicco vbi poſt Chamaerhododendron poteſt collocari. Differt a Chamaedaphne diſpoſitione foliorum et florum imo toto habitu Ledi nomen a Raio impoſitum ideo cum Poliifolia commutaui, quia illud longo vſu iam occupauit *Ciſtus Ledon foliis Roſmarini ferrugineis* C. B. qui iure nouum conſtituit genus. His cognata videtur planta Erica Cantabrica flore maximo, foliis Myrti, ſubtus incanis Tournef. Inſt. et Erica Hibernica foliis Myrti piloſis ſubtus incanis Petiv. Gazoph.

Additur hic figura plantae Africanae, quam pro Poliifoliae ſpecie, ex floribus coniecturam faciens, habeo. Dicatur itaque *Poliifolia Africana fruticoſa*. Flores huic purpurei campaniformes, magis patuli quam noſtratis flores, in quatuor lacinias ſecti; ſolia anguſta acuta, caules ſine ordine cingentia. Frutex eſt humilis cortice veſtitus dilute rubente vid. Tab. XXI.

Deſcribit et delineat C. Bauhinus in Prodr. Campanulae ſpeciem quam nominat *Campanulam ſerpillifoliam*, quae etiam ſub Campanulae ſpeciebus recenſetur a Tourneſortio in Inſt. Occurrit haec copioſe in ſyluis uliginoſis circa Petropolim, et ego fructum eius examinans ipſum longe a Campulanae fructu diuerſum reperi. Capſula nempe eſt oblonga, ouata, foeta ſemi-

ne

ne vnico albo similis figurae, in medio secundum longitudinem sulcato. Haec capsula praeter ea instructa est duobus foliolis hispidis ceu scutis, quae omnia melius describuntur quam delineantur ob exiguitatem, hinc nullam figuram adiecimus. Flos etiam tubulosus magis infundibuliformibus quam campaniformibus accenseri meretur. Abiecto igitur Capanulae nomine *Serpillifoliam* vocare visum est.

TENTAMEN EXPLICATIONIS PHAENOMENORVM AERIS.

Auctore

Leonh. Eulero.

I.

QVanquam ad intima rerum penetralia et cognitionem vltimae partium structurae aditus non ita patet, vt phaenomenorum, quae inde oriuntur ratio reddi queat: Tamen, vt plerumque a Physicis factum est, a corporum naturalium proprietatibus, quas obseruauimus, quodammodo ad ipsam eorum structuram concludere licet. Ex qua percepta corporum structura, quo plura phaenomena explicari possunt, eo perfectior ea est; Et, si ex qua Theoria omnes prorsus proprietates, quas quidem co- *M. Sept.* 1727.

gnoſcere impoſſibile eſt, deriuari poſſent, dubium non eſt, quin ea vera ſit, et re ipſa exiſtat.

II. Aeris quam plurima nota ſunt phaenomena, eaque parum a ſe inuicem dependentia; vt is profecto multum praeſtitiſſe cenſendus ſit; qui eadem theoria omnibus ſatisfacere poſſet. Sed theoriam ita maxime conficere conuenit, vt primum excogitetur partium ſtructura, ex qua vna tantum proprietas fluat; id quod plerumque pluribus modis fieri poteſt: et deinceps inquiratur, num ea caeteris quoque proprietatibus explicandis ſufficiat? et, ſi plures primum theoriae conceptae ſunt, tum quaeratur, quae maximae parti vel quae omnibus ſatisfaciat.

III. Inter alias aeris, quas cognoſcimus, proprietates ea inprimis idonea viſa eſt, ſecundum quam ſtructura aeris adornetur, qua aer ſeſe continuo expandere conatur, et reipſa ſe expandit, ſi quae impedimento fuerant, remoueantur. Haec enim aeris elaſticitas prae caeteris proprietatibus maxime explicatu difficilis videtur, vt eius ratione cognita reliqua facile fluere videantur.

IV. Niſi velimus hoc aeris phaenomenon occultae cuidam particularum proprietati et vi inſitae adſcribere, alia via non ſupereſt, niſi vt conatus iſte a motu materiae cuiusdam ſubtilis deriuetur. Conatus autem ſeu vis mortua, vti a Leibnitio vocatur, a materia mota ortum trahere poteſt, ſi ea in gyrum moueatur; quo fit vt quaeuis particula a centro aufugere conetur, atque ita huiuſmodi vortex vim ſeſe expandendi acquirat. Hoc vſus principio Cel. Ioh. Bernoulli omnem vim elaſticam ex-

explicare instituit in schediasmate *de communicatione motus* Lutetiae nuper impresso. Quo vim elasticam a vi centrifuga materiae subtilis oriri asserit.

V. Sequor itaque hac in re, istam, vti mihi videtur, maxime probabilem elasticitatis aeris causam, atque in hac dissertatione examini subiiciam, quantum aeris structura ex hoc fundamento formata reliquis aeris proprietatibus explicandis sufficiat, quantumue minus, vt appareat, vtrum aer hanc partium structuram habere possit, an vero non? Quo in casu meliorem oporteret excogitare aeris constitutionem.

VI. Suppono igitur aerem constare aceruo infinitarum minimarum bullularum, in quibus materia subtilis motu circulari gyratur et vi centrifuga bullulas continuo expandere conatur, easque reipsa semotis obstaculis, expandit Suppono porro bullulas esse pellicula obductas; quod quidem opus non esset, cum huiusmodi vorticuli sine pelliculis constare possent et tamen mutuo non permiscerentur. Vnus enim alterum impedit, quominus extrauagetur: Attamen propterea bullulas pelliculis obductas suppono, quod aer nunquam tam purus sit, vt prorsus a vaporibus liber sit. Vapores autem particulas aeris ad instar pelliculararum obducere valde probabile est.

VII. Constet itaque aer infinito bullularum minimarum numero, quarum crusta exterior sit aquea pro diuerso aeris statu maior minorue; intra hanc crustam gyretur materia subtilis certa cum velocitate, quae subinde ab alia subtiliori adhuc materia omnes poros penetrante accelerationes nanciſcitur, ne motus tandem conſumatur et euaneſcat. Conſtat enim aerem calorem ſemel acceptum ſenſim amittere, cum autem aer calore rarefiat, ſequitur materiam ſubtilem motu vehementiore agitari; ceſſante ergo calore, indicio id eſt, motum materiae eſſe retardatum.

VIII. Ex hiſce de ſtructura aeris praemiſſis conſequitur, eum in infinitum ſe expandere debere atque extremum raritatis gradum accipere, quando nihil eſt quod eius conatum compeſcat. Sed accedente grauitate, aliter ſe res habebit, eritque, quod vi aeris elaſticae ſe opponet. Quum enim aer ſuperior inferiorem premat pondere ſuo, inferior vlterius ſe expandere nequit, quam quoad eius vis elaſtica, quae expanſione continuo diminuitur, aequalis ſit vi incumbentis aeris comprimenti.

IX. Patet porro ex concepta aeris conſtitutione, eum in infinitum comprimi non poſſe, propter grauitatem ſpecificam, quae in infinitum augeretur. Nam cum in qualibet bullula certa et determinata materiae ſubtilis quantitas comprehendatur, eaque ſemper ſuperficiei adhaereat ob vim centrifugam, neceſſe eſt vt circa centrum ſpatium vacuum relinquatur; id quod eo maius eſſe debet, quo magis aer rarus fuerit: Contra autem continuata aeris compreſſione, id ſpatium vacuum continuo diminuetur, donec tandem prorſus euaneſcat, vltra quem denſitatis gradum aerem comprimere impoſſibile erit.

X. Quod ad velocitatem materiae ſubtilis attinet, opor-

oportet ſingulis eius particulis eandem attribuere velocitatem, neque quae a centro remotiores ſunt, iis maiorem et proprioribus minorem adſcribere velocitatem. Praeterea enim, quod hinc theoria naſcatur experientiae penitus contraria, ob vim centrifugam in maioribus bullulis maiorem, ex hoc elucere poteſt, quod bullulam condenſando vel expanſioni relinquendo velocitas materiae ſubtilis eadem manere debeat, cum nihil ſit, quod eam immutet; Huc enim non pertinet retardatio, de qua §. 6. quae non propter immutationem bullulae, ſed propter reſiſtentiam quandam contingit. Quare cum velocitas materiae ſubtilis non a diſtantia a centro pendere queat neceſſe eſt eam vbique conſtantem ſtatuere.

XI. Sit CAB bullula aerea, quoad fieri poteſt compreſſa, quae proin eſt materia ſubtili vorticoſa penitus repleta. Circumdata vero ſit cruſta aquea ADEB, vt ergo reliquum ſpatium CDE materia ſubtili impleatur. Sit $AC = g$, $CD = b$. Sumatur pro ratione radii ad peripheriem, $1 : \pi$, pro grauitate ſpecifica materiae ſubtilis, n et pro grauitate ſpecifica aquae ſeu cruſtae m. Erit capacitas globuli CAB $= \frac{2\pi g^3}{3}$, et capacitas globuli CDE $= \frac{2\pi b^3}{3}$. Ergo ſoliditas cruſtae ADEB $= \frac{2\pi}{3}(g^3 - b^3)$. Quamobrem erit maſſa materiae ſubtilis ſpatium CDE implentis $= \frac{2\pi n b^3}{3}$, et maſſae cruſtae $= \frac{2\pi m}{3}(\frac{g^3 - b^3}{2})$. Et hae maſſarum quantita-

Fig. I.

titates in quantum vis expanſis bullulis eaedem manere debent.

XII. Exprimat k altitudinem, ex qua graue cadendo velocitatem acquirit, materiae ſubtilis velocitati aequalem; Vnde ſequenti modo vis centrifuga, ſeu vis, qua ſuperficies globuli CDE premitur, inuenietur. Sumatur a centro indeterminata $CP = x$ cuius differentiale $Pp = dx$. Erit cruſta ſphaerica craſſitiei Pp et radii CP $= 2\pi xxdx$, quae ſi ducatur in denſitatem materiae ſubtilis, dat maſſam $2\pi nxxdx$, ſeu pondus. Quum haec materia gyretur velocitate ex altitudine k acquiſita, fiat ſecundum Hugenium, vt radius x ad duplam altitudinem, $2k$ ita pondus materiae gyrantis, $2\pi nxxdx$ ad pondus vi centrifugae huius cruſtae aequale, quod ergo erit $= 4\pi nkxdx$. Huius ergo integrale $2\pi nkx^2$ exprimit vim centrifugam ſphaerae radii CP. Conſequenter vis centrifuga bullulae DE erit $= 2\pi nkbb$.

Fig. II. XIII. Conſideremus nunc bullulam aeream quomodocunque expanſam CAB: Cuius extrema cruſta ADEB deſignet materiam aqueam, media DFGE materiam ſubtilem circa centrum gyrantem, et tertia ſeu intima CFG, ſpatium vacuum, vel quod ad minimum materia grauitatis experti ſit repletum. Dicantur $AC = a$, $CD = b$, et $CF = c$. Erit, computo vt ſupra inſtituto, ſoliditas cruſtae extremae ſeu aqueae $ADEB = \frac{2\pi}{3}(a^3 - b^3)$. Dein ſoliditas cruſtae mediae ſeu quantitas materiae ſubtilis DFGE $= \frac{2\pi}{3}(b^3 - c^3)$. Tertio autem capacitas totius bullulae erit $= \frac{2\pi}{3}a^3$. Sit grauitas ſpecifica aeris ſeu totius bullulae, i erit pondus eius $\frac{2\pi i}{3}a^3$, id quod aequale eſt ſummae pon-

ponderum partium, nempe $\frac{2\pi m}{3}(a^3-b^3)+\frac{2\pi n}{3}(b^3-b^3)$. Est igitur $ia^3=ma^3-mb^3+nb^3-nc^3$.

XIV. Cum et quantitates materiae aquae, et quantitas materiae subtilis aequales esse debeant iis, quae supra erant inuentae in casu bullulae maxime compressae, sequentes obtinebuntur aequationes $\frac{2\pi}{3}(g^3-b^3)=\frac{2\pi}{3}(a^3-b^3)$ et $\frac{2\pi}{3}b^3=\frac{2\pi}{3}(b^3-c^3)$. Quamobrem $g^3-b^3=a^3-b^3$ et $b^3=b^3-c^3$. Vnde $b=\sqrt[3]{(a^3-g^3+b^3)}$ et $c=\sqrt[3]{(b^3-b^3)}=\sqrt[3]{(a^3-g^3)}$. Si haec substituantur in superioris §. vltima aequatione, reperietur $ia^3=mg^3-mb^3+nb^3$. Vnde $b^3-(ia^3-ng^3):(n-m)$. Et porro $b=\sqrt[3]{((i-m+n)a^3-ng^3):(n-m)}$ ac $c=\sqrt[3]{(a^3-g^3)}$. Hoc ergo modo ex calculo excluduntur litterae b, c, et b denotantes interiorum bullulae partium a centro distantias.

XIV. Vis centrifuga materiae subtilis in spatio DFGE gyrantis velocitate ex altitudine k producta ex §. 11. inueniri potest hoc modo: Vis centrifuga materiae globum radii x implentis inuenta est $=2\pi nkxx$. Quare se materia subtilis totum spatium CDE impleret, foret eius vis centrifuga $=2\pi nkbb$, a qua si auferatur, vis centrifuga materiae spatii CFG $=2\pi nkcc$, restabit vis centrifuga materiae subtilis in spatio FDEG gyrantis, cuius quantitas proin erit $=2\pi nk(bb-cc)$ et subrogatis loco b et c valoribus §. 13. inuentis, erit ea $=2\pi nk$ $[(\frac{(i-m+n)a^3-ng^3}{n-m})^{\frac{2}{3}}-(a^3-g^3)^{\frac{2}{3}}]$. Ponatur $b^3=pg^3$ erit, ob $ia^3=mg^3-mb^3+nb^3$, $ia^3=(m-mp+np)g^3$

vnde $g^3 = ia^3 : (m - mp + np)$. Erit ergo pondus vi centrifugae aequiualens $= 2\pi nkaa \left[\left(\frac{m-i+pi-mp+pn}{m-pm+pn}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{m-pm+pn-i}{m-pm+pn}\right)^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{2\pi nkaa}{\sqrt[3]{(m-pm+pn)^2}} \left(\sqrt[3]{(mi+pi-pm+pn)^2} - \sqrt[3]{(m-pm+pn-i)^2}\right)$.

XVI. Cum vi centrifuga efficiatur, vt bullulae aereae sese continuo extendere conentur, erit ea aequalis vi elasticae aeris; ex inuenta igitur aequatione, quanta sit aeris elasticitas, inueniri poterit. Verum cum hoc loco primum legem duntaxat, qua aeris vis elastica pro diuersis densitatis, humoris et celeritatis gradibus immutetur, persequi conueniat, factor $2\pi n$ vtpote constans negligi poterit, eritque vis aeris elastica vt $\frac{kaa}{\sqrt[3]{(m-pm+pn)^2}} \left(\sqrt[3]{(m-i+pi-pm+pn)^2} - \sqrt[3]{(m-pm+pn-i)^2}\right)$ Cum autem sit $ia^3 = (m-pm+pn)g^3$, loco a in computum duco g, vt ea tanquam constans abiici possit; Erit ergo $aa = gg\sqrt[3]{\left(\frac{m-pm+pn}{i}\right)^2}$, quo substituto erit vis elastica aeris vt $k\left(\sqrt[3]{\left(\frac{m-i+pi-pm+pn}{i}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{m-i-pm+pn}{i}\right)^2}\right)$. Coeteris igitur paribus est aeris vis elastica vt altitudo k, velocitatem materiae subtilis in bullulis gyrantis graui descendenti imprimens.

XVII. Verum cum vires aeris elasticae inter se comparantur, id fit aeris vim expansiuam in eandem basin agentem explorando. Quamobrem, vt mensuram aeris vis elasticae, vt consuetum est, exhibeam, necesse est, vt vt pressionem aeris in datam basin inuestigem. Nam, quae hucusque de ista mensura tradidi, huc non quadrant, quia vis tota globuli aeris elastica est supputata, quae propterea in tanto maiorem basin agit, quanto magis bullula est extensa. Sunt autem hae bases vt quadrata radiorum bullularum; Et iis etiam vires elasticae proportionantur. Quocirca assumatur constans quidam sphaerae radius e, fiatque vt a^2 ad e^2 ita vis aeris elastica inuenta paragr. praeced. ad vim in datam basin agentem. Multiplicetur ergo oportet formula praecedens per $e^2 : a^2$ at vero est $a^2 = gg\sqrt[3]{\left(\frac{m-pm+pn}{i}\right)^2}$. Quamobrem absoluta diuisione, abiectisque e^2 et g^2 tanquam constantibus obtinebitur vis aeris elastica absoluta, quae erit vt $k\left(\sqrt[3]{\left(\frac{m-i+pi-pm+pn}{m-pm+pn}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\frac{m-i-pm+pn}{m-pm+pn}\right)^2}\right)$.

XVIII. Euanescat pars bullulae aquea; erit $g=b$ et ideo $p=1$. Quamobrem vis aeris elastica hoc casu erit, $k\left(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{\left(\frac{n-i}{n}\right)^2}\right)$ seu multiplicato per constantem $\sqrt[3]{n^2}$, erit ea vt $k\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$. Ponatur k seu velocitas constans, vt obtineatur lex elasticitatum pro solis aeris diuersis condensationibus, erit tum vis elastica, vt $\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-i)^2}$. Et hinc sequentes duco consequentias. Si status aeris quam proxime ad maximam condensationem accedat, erit $n-i$ tantum non $=0$, ergo vis elastica hoc in casu erit vt $\sqrt[3]{n^2}$ i. e. ea erit constans. Aere ergo iam vehementer compresso, vis elastica amplius sensibiliter non immutatur.

XIX. Deinde si i respectu ipsius n valde paruum sit, seu si densitas aeris ad densitatem materiae subtilis admodum exiguam habuerit rationem erit $(n-1)^{\frac{2}{3}} = n^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} n^{-\frac{1}{3}} i$, consequenter vis aeris elastica erit vt $\frac{2}{3} n^{-\frac{1}{3}} i$ siue neglecto $\frac{2}{3} n^{-\frac{1}{3}}$ vt i. Aere ergo valde rarefacto elasticitates erunt vt densitates aeris. Quare cum circa aerem naturalem obseruemus quantumuis is comprimatur elasticitatem propemodem in eadem ratione crescere, dubium non est, quin aer noster admodum sit dilatatus respectu materiae subtilis, atque rationem specificam aeris ad grauitatem specificam materiae subtilis perquam esse exiguam.

XX. Attamen cum ea prorsus negligi nequeat, Oportet seriei, inquam $(n-i)^{\frac{2}{3}}$ conuertitur, non tantum duos primos, sed tres accipere terminos, qui variationes obseruatas satis exacte monstrabunt. Hoc ergo pacto erit $(n-1)^{\frac{2}{3}} = n^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} n^{-\frac{1}{3}} i - \frac{1}{9} n^{-\frac{4}{3}} i^2$. Atque hinc vis elastica erit vt $\frac{2}{3} n^{-\frac{1}{3}} i + \frac{1}{9} n^{-\frac{4}{3}} i^2$ seu multiplicando per $9n^{\frac{4}{3}}$, vt $6ni + i^2$. Dicatur vis elastica v fiatque $fv = 6ni + ii$. Ex hac igitur aequatione ope experimentorum, qua circa aeris incrementum vis elasticae eo continuo magis condensato, instituta sunt a Boyleo, inuenietur ratio $n : i$. Ex quo intelligetur extremus et maximus densitatis gradus, ad quem aerem comprimere possibile est.

XXI. Consultum ergo esse duxi experimenta Boyleana huc transcribere, vt ex iis de densitate seu grauitanitate ſpecifica materiae ſubtilis concludere liceat, et quamnam ad aerem rationem habeat. Aer primo in tubo ſpatium 12. digit. Angl. replebat poſtea vero cum columna mercuriali comprimebatur altitudines aeris et mercurii ſuperaffuſi in ſequenti tabula exhibentur, cuius prior columna A indicat ſpatium aeris in tubo, et altera B altitudinem mercurii comprimentis aerem: hae vero in digitis Anglic. exprimuntur.

A	B	A	B	A	B
12	0	8	$15\frac{1}{16}$	5	$41\frac{9}{16}$
$11\frac{1}{2}$	$1\frac{7}{16}$	$7\frac{1}{2}$	$17\frac{15}{16}$	$4\frac{3}{4}$	45
11	$2\frac{15}{16}$	7	$21\frac{3}{16}$	$4\frac{1}{2}$	$48\frac{12}{16}$
$10\frac{1}{2}$	$4\frac{6}{16}$	$6\frac{1}{2}$	$25\frac{3}{16}$	$4\frac{1}{4}$	$53\frac{11}{16}$
10	$6\frac{3}{16}$	6	$29\frac{11}{16}$	4	$58\frac{12}{16}$
$9\frac{1}{2}$	$7\frac{14}{16}$	$5\frac{3}{4}$	$32\frac{3}{16}$	$3\frac{3}{4}$	$63\frac{15}{16}$
9	$10\frac{2}{16}$	$5\frac{1}{2}$	$34\frac{15}{16}$	$3\frac{1}{2}$	$71\frac{5}{11}$
$8\frac{1}{2}$	$12\frac{8}{16}$	$5\frac{1}{4}$	$37\frac{15}{16}$	$3\frac{1}{4}$	$78\frac{11}{16}$
				3	$88\frac{7}{16}$

XXII. Exhibet igitur haec tubula columnam mercurialem, quae pondere ſuo aerem in datum ſpatium redigit. Hoc vero pondus non ſolum aerem comprimit, ſed ei inſuper adiici debet pondus atmoſphaerae, quod ſimul cum mercurio in aerem agit. Cum ergo ſumma ponderis mercurii et atmoſphaerae ea ſit, vis qua aer comprimitur, erit ea aequalis vi aeris elaſticae Vnde, ſi numeris tabulae B addatur altitudo mercurii ponderi atmoſphaerae aequalis, quam Boyleus ſe $29\frac{1}{8}$ dig.

 obſer-

obseruasse scribit; habebitur relatio inter densitates aeris et elasticitates. Sed cum ad istud accurate praestandum, exactissime altitudinem mercurii athmosphaeram aequilibrantia obseruasse necesse sit; idque multis difficultatibus perturbetur: Mallem relicta hac altitudine $29\frac{1}{8}$ dig. ex experimentis ipsis, quum numerus eorum abunde sufficiat, deducere pondus atmosphaerae: Sed quia ad hoc accuratissima requiruntur experimenta, (in quibus praesentia haberi nequeunt) altitudinem $29\frac{1}{8}$ dig. retinere cogor.

XXIII. Sed densitates aeris sunt reciproce vt volumina eiusdem massae aereae; volumina vero columna A exhibeantur: Ergo densitates erunt reciproce vt numeri columnae A. Si igitur densitas aeris in statu naturali ponatur, 1; reliquae densitates habebuntur si numerus 12 per reliquos respondentes numeros columnae A diuidatur. Deinde elasticitates, vt vidimus, sunt vt numeri secundae columnae B aucti numero $29\frac{1}{8}$. Cum vero sit $fv = 6ni + ii$, atque ex obseruationibus allatis habeantur in quolibet casu et v et i, duae hae literae f et n determinari debent; Id quod duobus quibusuis experimentis praestabitur. Sumatur ad literam f determinandam experimentum primum; Et erit $i = 1$, et $v = 29\frac{1}{8}$, vnde $29\frac{1}{8}f = 6n + 1$. Ergo $f = \frac{48n+8}{233}$. Quo valore in aequatione substituto habebitur $48nv + 8v = 1398ni + 233ii$, consequenter $n = \frac{8v - 233ii}{1398i - 48v} = \frac{233ii - 8v}{48v - 1398i}$.

XXIV. Vt hinc inueniatur n, oportet experimentorum allatorum aliquod adiungere. Sumatur igitur

tur vltimum, erit $i = 12 : 3 = 4$, et $v = 88\frac{7}{16} + 29\frac{1}{8} = 117\frac{9}{16}$. Vnde $n = \frac{240\frac{1}{2}}{5592} = \frac{37728}{5643} = \frac{2787{,}5}{51}$ hinc erit $n = 54,64$. Vt pateat, quantum experimenta inter ſe conueniant vel diſconueniant, accipiatur id quod aer in triplo minus ſpatium eſt redactum; Erit ergo $i = 3$, et $v = 58\frac{12}{16} + 29\frac{2}{16} = 87\frac{7}{8}$. Vnde habetur $n = \frac{2097}{4216} = \frac{703}{4194} = \frac{1394}{24} = 58\frac{1}{12}$. At experimentum quo aer duplo tantum denſior exhibetur paulo plus quam 17 pro valore ipſius n exhibet. Ex qua ingenti diſcrepantia intelligi poteſt, quam parum accurata haec ſint experimenta: Id quod praeterea ex ſaltibus, qui in iis deprehenduntur, ſatis colligi poteſt.

XXV. Id autem ex reliquis experimentis calculum inſtituens obſeruaui, inde quo minus aer erat compreſſus, eo minorem ipſius n valorem inuentum. Ex quo intelligi poteſt, reliquis in numeris ſaltibus neglectis, vel altitudinem mercurii atmoſphaerae aequiponderantis non ſatis accurate eſſe aſſumtam, vel tubum nimis fuiſſe anguſtum, vt ne facillime quidem mercurius in eo deſcendere potuerit. Prius quidem vix credi poteſt: Sed poſterius eo magis veriſimile eſt, quod tanta inſit difformitas experimentis: Vnde concludi debet, mercurium non ſucceſſiue, ſed quaſi per ſaltus deſcendiſſe. Eandem difformitatem in Boylei experimentis circa rarefactionem aeris aduertens, inde quicquam concludere nolui: ſed plenius de denſitate materiae ſubtilis iudicium tamdiu differam, donec vel accuratiora experimenta in manus veniant, vel ipſi inſtituere vacauerit.

XXVI.

Fig. III. XXVI. Vt autem clarius ob oculos ponatur, qua lege elasticitates aeris pro diuersis densitatibus crescant, tota res figura geometrica repraesentari potest. Neglectis pelliculis aqucis inuenta est aeris vis elastica proportionalis $\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-i)^2}$: Vnde patet, id per parabolam cubicalem secundam praestari posse. Sit AMC parabola cubicalis secunda super axe AB, in qua applicatae PM serit in ratione subsesquiplicata abscissarum AP. Capiatur $AB = n$ et erecta applicata BC, ducatur axi parallela CD. Dico si in ea capiatur $CQ = i$, applicatam correspondentem QM repraesentare vim aeris elasticam. Nam est $QM = BC - PM$. Sed BC est vt $\sqrt[3]{AB^2}$ seu $\sqrt[3]{n^2}$, et PM vt $\sqrt[3]{AP^2}$, seu, ob $AP = AB - BP$, $(CQ) = n-i$, erit PM vt $\sqrt[3]{(n-i)^2}$. Vt ergo sit QM vt $\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-i)^2}$ cui quantitati etiam, vt patet, proportionalis est vis aeris elastica.

XXVII. Si ea accipiatur regula, qua vires aeris elasticae in ratione densitatum ponuntur; Ex hac figura patebit quantum ea a vero, si modo hanc theoriam veram appellare licet, aberret. Ducatur per puncta C et M recta CMR perpendicularem AD ex A in AB ductam secans in R; exprimet haec recta distantiis suis a CD vires elasticas secundum istam regulam aeri iuxta abscissas in linea CD condensato respondentes. Si igitur QM naturalem aeris vim elasticam denotet, regula ista in condensationibus iusto minorem exhibebit vim elasticam, at in rarefactionibus iusto maiorem, donec vtraque regula aeri infinite rarefacto elasticitatem nullam attribuat.

XXVIII.

XXVIII. Si certo constaret ratio quam n ad i habet, quantum haec regula in quouis casu a vero aberret, assignari posset: Nec non aeris vis elastica maxima AD, seu ratio AD : QM. Ob hunc defectum pono saltem $n : i = q : 1$. eritque $n = qi$, adeoque vis elastica QM erit vt $\sqrt[3]{q^2 i^2} - \sqrt[3]{(qi-i)^2}$, diuidatur per $\sqrt[3]{i^2}$ vtpote constantem, erit vis elastica aeris naturalis vt $\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-1)^2}$. Assumatur quiuis alius condensationis gradus, quo densitas sit ad naturalem vt s ad 1. Erit ea densitas si, adeoque vis elastica respondens erit $\sqrt[3]{qi^2} - \sqrt[3]{(qi-si)^2}$, erit ea igitur vt $\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-s)^2}$. Vnde sequitur, elasticitatem aeris naturalis esse ad elasticitatem aeris s vicibus densioris vt 1 ad $\frac{\sqrt[3]{q}^2 - \sqrt[3]{(q-s)}^2}{\sqrt[3]{q}^2 - \sqrt[3]{(q-1)}^2}$ sed secundum regulam vulgarem oporteret esse vt 1 ad s, si $s = q$ tum erit DR $= q$ QM, et AD $= \frac{\sqrt[3]{q}^2}{\sqrt[3]{q}^2 - \sqrt[3]{(q-1)}^2}$ .QM. Quia vero q valde est magnum respectu 1, erit $\sqrt[3]{q^2} - \sqrt[3]{(q-1)^2} = \frac{2}{3\sqrt[3]{q}}$; erit itaque AD $= \frac{3}{2} q$. QM. Regula ergo ea plus dimidio nunquam a vero aberrare potest.

XXIX. Cognita pro quouis condensationis gradu aeris elasticitate, poterit inde inueniri quanta esse debeat aeris densitas in data quacunque altitudine. Cum enim aer naturalis comprimatur a pondere aeris superincumbentis, necesse est, vt, quo altius ascendatur, aer ob imminutum ibi atmosphaerae pondus rarior fiat. Nam vbique eousque aer dilatatur, quoad pressio aequalis sit eius elasticitati. Sit igitur curua BMV scala densitatum aeris, cuius nimirum applicatae PM exprimant aeris densitates in altitudinibus P. Sit A is locus, quo densitas aeris est maxima, adeoque vbi $AB = n$. Accipiatur locus quicunque P, cuius altitudo AP super A dicatur x; densitas vero ibi seu $PM = y$, erit ibi aeris vis elastica vt $\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-y)^2}$, cui proportionalis esse debet pressio ab aere superiore PT orta. Pressiones autem sunt vt densitates et altitudines coniunctim: Quamobrem erit pressio aeris superioris vt area MPTV i. e. vt $-\int ydx$. Est itaque $a\int ydx = \sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-y)^2}$, adeoque $aydx = \frac{2dy}{3\sqrt[3]{(n-y)}}$; vnde $adx = \frac{2dy}{3y\sqrt[3]{(n-y)}}$ seu positio $a = \frac{2}{3}$, erit $dx = \frac{dy}{y\sqrt[3]{(n-y)}}$ quae hoc modo integrari debet, vt posito $x = o$, y fiat $= n$.

Fig. IV.

XXX. Si fiat $n = y$ erit tum dx infinities maius quam dy, ergo tangens in B parallela erit axi verticali AT. Propterea haec curua alicubi punctum flexus contrarii habere videtur; id quod hoc modo inuenietur. Quia est $dx = \frac{dy}{y\sqrt[3]{(n-y)}}$; erit $dy = ydx\sqrt[3]{(n-y)}$. Assumto dx pro constante, erit $ddy = dydx\sqrt[3]{(n-y)} - \frac{1}{3}ydxdy(n-y)^{-\frac{2}{3}} = o$. Vnde $3n - 3y = y$. Consequenter $y = \frac{3}{4}n$. Quam ob rem punctum flexus contrarii eo erit loco, quo densitas aeris est ad maximam vt 3 ad 4. Applicetur

cetur igitur $CD = \frac{3}{4}$ AB, erit in puncto D punctum flexus contrarii. Est deinde subtangens huius curuae $\frac{ydx}{dy}$ $= \frac{1}{\sqrt[3]{(n-y)}}$. Vnde colligitur si y fuerit respectu ipsius n valde paruum, tum esse subtangentem constantem; Vt adeo hoc in casu haec curua cum logarithmica confundatur.

XXXI. Potest quidem aequatio pro ista curua $dx = \frac{dy}{y\sqrt[3]{(n-y)}}$ ad quadraturam circuli et logarithmos reduci: sed inde multo difficilior enascitur eius curuae constructio, quam si per quadraturas construatur. Designet igitur AMC parabolam cubicalem secundam, vt in fig. 3. sitque $CD = n$. Assumatur aeris densitas quaeuis in CD, puta CQ, ponaturque $CQ = y$. Cuius applicata respondens QM erit $\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-y)^2}$, cui proportionalis accipi $-\int ydx$ debet. Dicatur QM, z, breuitatis ergo: eritque $-ydx = dz$ et $dx = \frac{-dz}{y}$, atque $x = \int \frac{-dz}{y}$. Ducatur PM, quae erit y, et in ea producta, si opus est, capiatur $PN = \frac{1}{y}$, erit area $PBEN = \int \frac{-dz}{y}$. Quapropter in MQ prolongata accipiatur QL, quae sit vt area PBEN. Erit punctum L in curua quaesita. Est enim in ea, ducta LH, $CH = LQ = \int \frac{-dz}{y} = x$, et $HL = CQ = y$. Hoc igitur modo curua DLV determinabitur. *Fig. V.*

XXXII. Quae hucusque aeris proprietates ex theoria exposita deriuatae sunt, eae nihil absoluti in se continent, sed tantum rationem dant, secundum quam elasticitas aeris pro diuersis densitatibus, humiditatibus et materiae subtilis celeritatibus existimari debeat. Verum

rum nunc abſoluti quid tradam altitudinem columnae mercurialis determinaturus, quam datus aereus globulus ſuſtinere valet. Sit itaque AB diameter horizontalis bullulae aereae, de qua intelligi debent, quae §. 14. inuenta ſunt. Incumbat ei columna mercurialis ABED altitudinis AD$=f$, quae tanta ſit, vt in aequilibrio conſiſtat cum vi, quam bullula habet, ſeſe expandendi. Haec autem columna in ſingulis bullulae punctis perpendiculariter agit in eius ſuperficiem, idque vi, quae eſt vt altitudo columnae f, et baſis ſeu ſuperficies bullulae, quam premit, atque grauitas ſpecifica coniunctim. Cum autem ſemidiameter AC ſit $=a$; erit circulus maximus bullulae $\frac{\pi aa}{2}$, adeoque ſemiſuperficies eius $=\pi aa$, quae eſt baſis, quae a columna mercuriali premitur. Exprimatur porro grauitas ſpecifica mercurii, reſpectu habito ad reliquas grauitates ſpecificas, litera r, erit preſſio, quam columna mercurialis in bullulam exercet $=\pi aarf$.

Fig. VI.

XXXIII. Haec autem preſſio deſtrui debet preſſione a vi centrifuga materiae ſubtilis orta, quae etiam in ſingula ſuperficiei puncta aequaliter agit. Quamobrem vis, qua vis centrifuga in haemiſphaerium agit, idque extendere annititur, aequalis eſſe debet vi comprimenti columnae mercurialis. Vis autem ea eſt dimidium vis elaſticae totius bullulae, cuius aequale pondus §. 14. inuentum eſt, $\frac{2\pi nkaa}{\sqrt[3]{(m-pm+pn)}^2}\left[\sqrt[3]{(m-i+pi-pm+pn)}^2-\sqrt[3]{(m-i-pm+pn)^2}\right]$; huius ergo dimidio aequari debet pondus columnae mercurialis $\pi aarf$. Vnde ſequens enaſcinafcitur aequatio : $rf\sqrt[3]{(m-pm+pn)^2} = nk$ $[\sqrt[3]{(m-i+pi-pm+pn)^2} - \sqrt[3]{(m-i-pm+pn)^2}]$ feu $f = \frac{nk}{r}$ $\left(\sqrt[3]{\left(\frac{m-i+pi-pm+pn}{m-pm+pn}\right)^2} - \sqrt[3]{\left(\frac{m-i-pm+pn}{m-pm+pn}\right)^2}\right)$.

XXXIV. Vt haec aequatio tractatu facilior euadat faltem pro naturali aeris ftatu, pono i admodum paruum refpectu n; et propterea erit $\sqrt[3]{(m-i+pi-pm+pn)^2}$ $= \sqrt[3]{(m-pm+pn)^2} + \frac{2(pi-i)}{3\sqrt[3]{(m-pm+pn)}}$. Atque eodem modo $\sqrt[3]{(m-i-pm+pn)^2} = \sqrt[3]{(m-pm+pn)^2} - \frac{2i}{3\sqrt[3]{(m-pm+pn)}}$. Quibus valoribus fubftitutis, orietur haec aequatio $rf(m-pm+pn) = \frac{2pnik}{3r}$, vnde $f = \frac{2pnik}{3r(m-pm+pn)}$. Sed fi ponatur humiditas in aere euanefcens, erit $p = 1$. Tum igitur erit $f = \frac{2ik}{3}$. Si autem aer vaporibus fuerit infectus p eo minor erit vnitate, quo plus vaporum in aere hofpitatur; ponatur itaque hoc in cafu $p = 1 - q$, erit $f =$ $\frac{2nik(1-q)}{3r(qm+n(1-q))} = \frac{2ik}{3r} - \frac{2qmik}{3r(qm+n(1-q))} = \frac{2ik}{3r}\left(1 - \frac{qm}{qm+n(1-q)}\right)$.

XXXV. Cum autem f indicet altitudinem columnae mercurialis in aequilibrio confiftens, exprimet eadem litera f altitudinem mercurii in barometro. Ex inuenta igitur aequatione, datis velocitate materiae fubtilis in bullulis gyrantis, aeris et materiae fubtilis grauitatibus fpecificis, atque quantitate aquae in aere verfantis, inueniri poterit altitudo mercurii in barometro. Nam r grauitas fpecifica mercurii, vt et m grauitas fpecifica aquae aliunde iam conftant. Percurram itaque cafus, quibus mercurius aſcendere, et quibus deſcendere debet; vt inde pateat, quid in aere acciderit et aſcendente et deſcendente mercurio in barometro. Ad hoc cum tantum ratione opus ſit, negligo factorem $\frac{2}{3}r$ tanquam conſtantem, eritque f vt $ik(1-\frac{qm}{qm+n(1-q)})$.

XXXVI. Hinc igitur conſequitur manente facto, ik mercurium in barometro aſcendere decreſcente fractione $\frac{qm}{qm+n(1-q)}$. Haec vero fractio creſcente q etiam creſcit, decreſcente vero q decreſcit: Nam creſcente q elemento dq, fractio creſcet elemento $\frac{mndq}{(qm+n(1-q))^2}$. Quamobrem manente facto ik mercurius in barometro aſcendere decreſcente aeris humiditate; ea vero aucta mercurius deſcendere debebit. Atque hanc puto eſſe rationem, cur aſcenſus mercurii in barometro plerumque coelum ſerenum, deſcenſus vero pluuiam aduerſamque tempeſtatem praenunciet: Illo enim caſu aer maximam partem a vaporibus vacuus eſt, hoc vero iis magis infectus.

XXXVII. Poſſunt quidem aliae concurrere rationes, ob quas mercurius aſcendere vel deſcendere queat immutata vaporum quantitate: Quando ſcilicet factum ik creſcit vel decreſcit. Sed fortaſſe hoc factum ſenſibiliter neque creſcere neque decreſcere poteſt, propter alterutram literam eadem fere ratione auctam, qua altera diminuitur. Nam velocitas materiae ſubtilis, cuius quadratum eſt vt k, augmenta accipit aucto calore, ſed idem calor aerem rarefacit, et quantitatem i minorem efficit, vt ergo factum ik quaſi ſemper conſtans permaneat. Ex

quo

quo intelligitur tute ſemper aſcenſum vel deſcenſum mercurii diminutae vel auctae vaporum in aere verſantium quantitati attribui poſſe, quanquam negari non poſſit et factum *ik* quodammodo effectum humiditatis et augere et diminuere poſſe.

XXXVIII. Neque vero hinc inferre licet, barometrum idem ac hygrometrum praeſtare oportere; cum et hoc humiditatem aeris monſtret. Sed id conſiderandum eſt, barometri effectus a tota aeris maſſa ſeu totius atmoſphaerae ſtatu pendere; hygrometri autem a ſolo aere id ambiente. Quamobrem altitudo mercurii in barometro incrementa accipit, ſi vniuerſus aer a vaporibus liberatur, decrementa vero ſi is vaporibus impraegnatur. Vnde colligitur hygrometrum fere ſummam ſiccitatem oſtendere poſſe, cum altitudo mercurii minima ſit; et ſimiliter hygrometrum humiditatem indicare poſſe, cum mercuriis ſummam altitudinem attigerit. Plus enim immenſa aeris altitudo in barometrum valet, quam infima haec regio, quae ſola in hygrometrum agit.

XXXIX. Si humiditas aeris euaneſcat, habetur iuxta §. 33. haec aequatio $f=\frac{2ik}{3r}$, quam n non ingreditur. Ex ea igitur cum experimentis ratio $r:i$, vt et altitudo f conſtet, inueni poteſt altitudo k, ex qua graue cadendo velocitatem acquirit ei, qua materia ſubtilis in bullulis aeris gyratur, aequalem; Eſt enim $k=\frac{3rf}{2i}$. Circa quam expreſſionem obſeruo eam excepto coefficiente numero $\frac{3}{2}$ eandem eſſe cum altitudine generante velocitatem, qua ſonus per aerem promouetur, vt ergo velocitas materiae ſubtilis conſtantem habeat rationem ad

velo-

velocitatem ſoni. Hic autem animum abducaere oportet humiditate aeris, qua accedente k alio modo exprimetur.

XL. Obſeruatur altitudo mercurii in barometro a 22. vsque ad 24. et vltra dig. Pedis Rhenani. Cum autem aerem a vaporibus vacuum ſupponam, attribuo literae f maximam, quam habere poteſt altitudinem, nempe 2460 ſcrup. Ped. Rhenani. Dein rationem r ad i pono vt 10000 ad 1. Quemadmodum ex experimentis de grauitate aeris concluditur. Quibus poſitis erit $k = \frac{30000 \cdot 2460}{2} = 36900$ pedibus. Adeoque materia ſubtilis velocitate mouetur tanta, quanta a graui ex altitudine 36900 ped. in vacuo deſcendente acquiritur. Si ergo haec materia ſua velocitate in directum pergeret, conficeret vno minuto ſecundo $1518\frac{1}{2}$ ped. Rhenanos.

XLI. Iſto hanc diſſertationem finio, cum deſint accurata experimenta, ex quibus reliqua adhuc deſiderata determinentur, et quibus Theoria haec plenius confirmetur. Incerta eſt adhuc ratio n ad i, ſeu quam habet grauitas ſpecifica materiae ſubtilis ad grauitatem ſpecificam aeris. Ad hanc vero inueſtigandam accuratis experimentis ad id facientibus inſtituendis operam ſtudiumque adhibebo. Quantitas autem n ſi haberetur, facile formulae inuentae ad praxin applicarentur; atque aliis idoneis inſtrumentis adhibendis quouis tempore, quantum aquae in aere contineatur, aſſignari poſſet. Et forſitan multa inſuper alia, ad quae, iis quae ſufficiunt cognitis, quaſi manu duceremur.

PLAN-

PLANTAE DVBIAE
AD SVA GENERA RELATAE
Auct.
I. C. Buxbaum.

PRimo loco ſeſe hic offert *Iuncifolia ſub aquis naſcens, Cochleariae capſulis Raj. Syn.* qui ſatis bene deſcribit. Graminibus adnumeratur in Hiſtoria Oxonienſi, vbi eſt *Gramen Hybernicum, Thlaſpios capſulis Scherardi*, et figura ſine floribus proponitur, nec melior eſt figura quam dat Plukenetius. Ex noſtra obſeruatione eſt genuina Alyſſi ſpecies, quae poteſt nuncupari *Alyſſum paluſtre folio Iunci.* Capſulae ſeminales accurate reſpondent capſulis *Alyſſi foliis Polygoni, caule nudo Tournef. Inſt.* Reperitur ſub aquis et extra aquas inter Scirpos minores et Stellarias vbi aquae ſtagnarunt. Quia in Moriſonii et Plukenetii figuris flores omiſſi ſunt, nos perfectiorem dare allaborauimus vid. Tab. XXIII. fig. 1.

Androſaces ſpeciebus addenda plantula, quam C. Bauhinus *Alſines* ſpeciem fecit et in Prodromo nomine *Alſines vernae Androſaces capitulis* deſcribit. Parkhinſonius equidem *Androſacen minimam* vocat, ſed poſtea obliuioni haec planta tradita, omiſſa etiam eſt in Tourneſortii Inſtitutionibus. Iuuat itaque hanc ſuo loco reſtituere et *Androſacen montanam flore minore* appellare. Creſcit in montoſis Naruae ripis et primo floret vere, vid. fig. 2. Tab. XXIII.

Alia adhuc ſpecie noua genus *Androſaces* augere, ab hoc loco non erit alienum. Eſt illa *Audroſace Africana* , *flore magno.* Deſcriptio quantum ex planta ſicca colligere licet ſequens eſt. Radix craſſa, albicans, recta in terram deſcendens. Folia ſubrotunda crenata, leuiter incana , determinate naſcentia , intra quae prodeunt caules aliquot (duo in noſtra) rotundi, virides , foliis deſtituti , niſi ſuperius vbi corolla foliorum exiguorum non crenatorum cingit flores monopetalos quinquefidos albos, vid. Tab. XXIII. fig. 3.

Plukenetius in Phytographia delineat folia plantae quae vocatur *Ceratiae quodammodo affinis Benghalenſis, foliis bigemellis, ſubrotundis ſiliquis admodum intortis et in orbes circumflexis ex minis nigricantibus fructu rubro macula nigra inſignito.* Flores huius ſunt pentapetali ex viridi albeſcentes, tribus petalis latioribus et duobus anguſtioribus in orbem poſitis conflati , calyce pariter quinquefido ſuſtentati , in ſpicam diſpoſiti. Hinc non inepte refertur ad Criſtam Pauonis Breynii ſeu Poincianam Tournef. Inſt. Licet vim aliquam patiatur Tournefortii definitio quatenus ſtamina et calycem adiungit, numeroſa equidem in noſtra adeſt ſtaminum congeries ſed non ſunt incurua et multo breuiora quam in Criſta Pauonis Breynii , inferius quoque calycis folium aduncum deeſt. His adde, noſtrae petala eſſe acuta manifeſte irregularia et colore diuerſa, ſuperius enim viride omnium maximum, cuius lateralia duo paulo anguſtiora, inferiora

vero

vero anguſtiſſima. His non obſtantibus huc referre malui quam nouum fabricare genus, inprimis quia Criſta Pauonis nondum ſpecierum multitudine laborat. Noſtra Tab. XXIV. exhibet ramulum cum foliis minoribus (maiora enim anguſtia tabulae non capit) et ſiliquis iunioribus.

Equiſetis accenſuit Breynius plantam Africanam, quae ipſi *Equiſetum iunceum nigrinodum Capitis bonae ſpei, an Arundinis gramineae aculeatae Alpini genus?* Pertinet potius ad Gramineum genus quam ad Equiſeta quod iam ſuſpicatus eſt Raius. Noſtra figura profert ramum capitulis multis ſquamoſis ſpadiceis onuſtum. Poteſt referri ad Scirpum cuius peculiare genus ſubalternum conſtituit. Dicatur itaque *Scirpus Africanus Equiſeti foliis.* vid. Tab. XXV. Cum hoc idem videtur *Iuncus Africanus lignoſo calamo ad nodos inuolucris nigris circumuoluto, panicula arundinacea ex Prom. bonae ſpei Pluk. Mant.* In hoc ſcirpo habes nodos.

DE PINGVEDINE, PROSTATA, MVSCVLIS, NERVIS, VASIS SANGVINEIS, CORPORIBVS NERVEO-SPONGIOSIS EORVMQVE SEPTO, BALANO PENIS, VRETHRAE BVLBO, EIVSQVE CORPORE SPONGIOSO

Auct.

Io. Georg. Du Vernoi.

M. Nov. 1727.

ANimaduersione non indignum est, quod in dissectionibus ordinariis, omnium membrorum vnum sit Genitale, cum quo minus familiares sunt suosque inde oculos et manus magis retrahunt Anatomici. Hocce fastidium fere vniuersale est, illud que cum ex descriptionibus datis, tum praesertim ex rerum optimarum obliuione obseruatu haud difficile est: Verum enim vero optandum esset, vt homines illud serio considerent, quia alias necesse est, vt quando praefatae partes vitiatae sunt, inter imperitorum manus poenas luant. Caeterum, prout viscerum in genere, sic Genitalium inuestigationes, euidentiae et certitudinis causa, non in homine solummodo, sed si fieri potest, in Elephanto et consimilibus animantibus institui merentur: Namque Penis Elephantinus fere longitudinem hominis, et cruris crassitiem aequare visus est, quamuis animal pudibundum sit, vti *Plinius* refert, aetasque Elephanti a me dissecti 11. annorum tantum fuerit: Ex

T. XXVI Penis Elephantinus.

quo

quo, praeternaturali forte causae tribuendum esse videtur, id quod a *Raio* in synopsi animalium p. 136 narratur. Penis, inquit, in vagina reconditus minusculus, nec tan-,, to animali proportionatus videbatur: verum vagina,, discissa expositus et liber *Equino* maior erat, non tamen,, longior. „ Quem ab osse pubis resectum ponderauimus et mensurauimus, 80. lb. Russicas pendebat, nec non 6. ped. x. poll longus erat. Ex qua longitudine nec non facili recuruatione versus caudam, quae breuissima est, item ex statu eiusdem pendulo, ex defectu testiculorum et scroti, et denique ex rostro seu processu fere recuruo in extremitate parteque superiore balani existente colligi potest, Elephantum animal retromingens ac retrocoiens esse. Figura eius conica est, cuius maior ambitus $2\frac{1}{2}$ ped. in medio $1\frac{1}{2}$ ped. in extremitate $10\frac{1}{2}$ poll. Propterea si non longissimus, saltem crassissimus omnium Animalium Penis iure salutari potest. Ista crassities a quibusnam partibus procedat, haud difficulter detracta pelle inuestigari potest: Nam ipsius pellis litt. AA. crassities quum exigua sit, hanc singularem praerogatiuam in caeteris animantibus Pene gaudentibus rarius obseruatam in eo vidimus, nempe adipem seu membranam adiposam, quae post separationem telae crassioris nerueae ei superimpositae conspicua facta est, lit. BB. Hoc nouo exemplo manifestum est, non impossibile esse, prout Eruditissimi Anatomici contendunt, vt in pene aeque ac aliis partibus pinguedo naturaliter colligatur, quod adhuc magis ex eo elucet, quoniam in cute et scroto, cum quo continua sunt penis inuolucra, praefata membra-

Eius pondus et longitudo.

Crassities.

Pinguedinis copia.

na adipoſa minime deſideratur. Eum vero in finem forte data eſt, vt non ſolum craſſitiem membri augeat, verum etiam, vt contra vim frigoris, quam perferre minus valet, illud tutum ſartumque conſeruet, ſimulque ſiccitatem corporum nerueo ſpongioſorum arceat.

Vtilitas pinguedinis.

Tumorem et craſſitiem Penis maximam efficere videntur maſſae carneae praegrandes, quae quum in parte tam ſuperiore quam auerſa, propter molem earum inſignem valde conſpicuae ſunt, ſilentio minus praetermittendae ſunt. In hac autem figura, quae dorſum penis repraeſentat, ſoli muſculi attollentes ſeu erectores lit. CC. et transuerſales lit. DD. cum portione muſculi bulbum vrethrae comprimentis litt. E. delineati ſunt. Transuerſalium non is erat ſitus et inceſſus, qualis vulgo traditur: Nam ad penis latus cum dextrum, tum ſiniſtrum adeoque inter muſculum bulbi comprimentem et attollentem ſeu Erectorem, inſtar duarum manuum apertarum aut alarum oblique collocati, et prout diſtincte vidi, ſine tendine, fere a ſuo principio, corporibus nerueis toto ſuo progreſſu implantati erant, reliquo ſuo corpore, quod planum ac liberum erat, inſtar alae expanſo. In medio eorum ſedet.

Fig. I.

Muſculi transuerſales.

Proſtata.

Corpus globoſum, durum, pomum maius aequans, vnciasque nouem ponderans, quod ſiue ſitus, ſiue numeri, ſiue inuolucrorum, ſiue tandem ſubſtantiae ratione, pro vera Proſtata haberi poteſt litt. F. Bulbo enim vrethrae contiguum, pauloque altius ſupra eum et muſculum vrethrae comprimentem ſitum eſt, vbi proſtatae ſedes ordinaria inuenitur. Deinde illud Proſtatae etiam ſatis

satis conuenit, vt tunicis admodum crassis et validis inuestiatur: Extima, connexioni cum vrethra et corporibus neruoso spongiosis inseruiens tendinea aut neruea visa est litt. *a* eique ex quadam arteria huc tendente plurima vasa sanguinea, speciesque corporis spongiosi intertexta sunt. Post hanc capsulam, musculus concauus admodumque crassus, qui in tres facile partes secatur, totum praefatum corpus inuestit litt. *bb*. Vtraque enim facie antica et postica, scutum crassum carneum instar Zonae conspicuum est, cuius fibrae tam exteriores quam interiores in obliquum ductae et decussatae, verticem mediumque prostatae circumambiunt, et tantum non ad eius partem inferiorem perueniunt. Ad vtrumque latus apposita et annexa est massa carnea, triangularis figurae, eiusdem crassitiei, quae a summo vertice ad imum vsque, assumta tereti figura descendit, ac infra prostatam, pone vrethram in praememoratam capsulam tendineam vtraque simul inseri videtur. Postquam tres hae fasciae remotae sunt, mollis et pulposa substantia, quae tenui membranula tota obducta est, in conspectum venit, haecque rursus non male ad naturam prostatae referri posse videtur. Verum quoad intimam eius structuram, etsi propter amplitudinem res facilis appareat, longo tamen tempore opus fuit, antequam aliquid effatu dignum acquirerem asseuerarémque vt verum. In parte igitur postica, duo spatia parenchymate intermedio seiuncta, profunda, ad imum vsque descendentia, ac in parte sua ampliore digiti minoris apicem admittentia, clare et distincte conspectui oblata sunt, etsi talia in figuris

Inuolucra et corpus spongiosum externum prostatae.

Eiusdem interior substantia et structura.

Duo sinus profundi.

ris, et scriptis anatomicis inconspicua sint. Istos sinus ex membrana firma, lucida, albuginea efformatos, cum ductu Higmoriano in testiculis non inepte comparare licet. Horum autem sinuum ope id assecutus sum, vt nunc parenchima praefatis sinubus circumfusum paulo clarius cernerem, quam alias ante illorum notitiam solebam: Post quam enim iniecta sufficienti aquae copia, materia intus contenta rite expurgata fuisset, quoties aerem impellebam, perspicue obseruabam, illud nihil aliud esse, quam cellularum seu cauernularum lit. cc. multiplicem congeriem, ex variis pelliculis tenuissimis, vario foraminum genere perforatis, efformatam eaque lege dispositam, vt per foramina singularia in sinubus excauata, humor per totam cellularum congeriem effusus, in praememoratos sinus delabi, vel e conuerso, per eosdem iniectus in omnes cellulas diffundi possit, prout aliquoties obseruaui.

Pelliculae cellulas efformantes.

Cellularum sinuumque vsus.

Porro citatarum pellicularum vnam vel alteram propius examinanti, quaedam substantia veluti sub rubra nubecula pelliculis superextensa apparuit, a qua color instar carnis in tota compage excitatur. Sed impossibile mihi fuit, inuitis omnibus meis artificiis, perfectiorem eius rei cognitionem assequi; Suspicari saltem cum ex colore, tum ex succo in cellulis contento, tum ex ductibus excretoriis fas est, opificium esse secretioni aptum, hoc est, ex vasis sanguinem vehentibus constans, de caetero valde occultum et impenetrabile, prout omnia huius generis organa esse, si mentiri non volumus, ingenue fatendum est. Quod ductus excretorios attinet, grauis nunc difficultas sese offert, quae dubitare fecit, an

Quid sit substantia pelliculis superextensa?

vera

vera prostata, aut aliud glandosum corpus, an vero aggregatum ex *Cowperi* glandulis dicendum sit, quoniam notum est, in iis animantibus, quae prostatam obtinent, in ea vrethrae parte cui agglutinata est, plures breuissimas fistulas aream efformantes sociatim aperiri. E conuerso, duo solummodo emissaria ad vtrumque latus vrethrae inter hanc et bulbum descendentia, (quorum sinistrum dextro paulo longius est) stylum aeneum maiorem admittentia conspicua sunt: Ad haec, verumontani in hoc loco absentia: diligens sed frustranea cum aliarum, tum *Cowperi* glandularum inuestigatio: item duo vesiculis seminalibus subiecta et contigua globosa corpora, quae forte prostatae vices replent, difficultatem supradictam adaugere videntur. Propterea, an glandularum *Cowperi* melius quam prostatae idaea hac in parte congruat nec ne, in dubio relinquitur. *Dubitatio circa hanc glandulam.* *Eius duo emissaria.*

Vltimo circa huius glandulae in medio musculorum transuersalium positum arbitrari fas est, in illa actione qua hi musculi inflati penem retrahunt, pressionem quoque laterum praefatae glandulae effici, sine praeiudicio tamen illius potentiae, quam inuolucra muscularia ei superextensa immediate exercent. *Hanc musculi transuersales comprimunt.*

Musculorum alterum, omnium maximum par, in dorso penis conspicuum est litt. CC. Singuli enim brachii humani crassitiem facile aequantes, postquam mediante ligamento crasso nerueo litt. G. anterius ligati sunt, praegrandem massam efformant, qua dimidia membri longitudo contecta est. Toto praefato spatio non *Musculi Penem attollentes.*

aliter ac duo cylindri parte anteriore connexi, posterio- re autem liberi, absque connexione cum corporibus nerueis Peni tam laxe incumbunt, vt soluto eorum ligamento, pondere et grauitate sua deorsum rapiantur ac diuellantur, prout in figura cernitur. Abhinc praedicti ventres subito aliam figuram assumunt: Nam ex crasso et peramplo corpore subito intermittente, gracilis tendo instar pollicis crassus exit, ac postquam aliquot pollicum spatio vterque progressus est, vnus tendo ex duobus conflatur, isque per medium dorsi, (sicuti vrethra per oppositae partis medium), rectilineo cursu ad extremum vsque progrediens tumorem excitat non absimilem tumori vrethrae, qui in auersa parte esse solet. litt. H. Ne ex sede sua dimoueatur, semicanalis nerueus crassissimus e corporum nerueo-spongiosorum fibris transuersis in arcum ab vno latere in aliud reflexis contextus factus est, ad tendinem praememoratum in alio semicanali minus profundo superdorsum penis excauato firmius continendum, quia talis rectitudo ad motum genitalis omnino necessaria videtur. Prioris semicanalis principium denotatur litt. I.

Horum musculorum tendines in vnum uncti et Canali nerueo inclusi.

Eorum actio quaenam sit?

Ex hacce descriptione euidens est, quod si in homine aliisque animantibus musculorum erectorum litt. CC. constitutio huicce conformis est, actio comprimendi vasa a Viris solertissimis excogitata satis infirmo talo nitatur, non solum quia ad illam compressionem duorum musculorum combinatae vires excessiuae ac periculosae videntur, quum vnius vis sola sufficiat; verum etiam, quia tempore quo accidit, tensio a sanguine distendente

dente facta, iam adest, quae proprie ceu vera causa compressionis praedictae vasorum, propter auctam membri conuexitatem et duritiem, potius quam musculorum actionem, considerari debet: Comprimatur enim quantacunque vi manus penis flaccidus ad ossa pubis, flacciditatem conseruabit, prout experientia testatur. Quare concludendum est, quoties sanguinis intra penis corpora nerueo-spongiosa influxus oritur, tunc temporis solos neruos in vasa imperium exercere, prout ex structurae intuitu manifestum est, a quorum proinde robore virilitas, quae vulgo signum sanitatis vocatur, vnice dependet. Musculi ergo eum in finem solummodo conditi videntur, vt impediant ne membrum sanguine aestuante inebriatum vacillet, magisque versus vnam partem quam versus alteram inclinet. *Vera causa tensionis penis.*

Tertium vulgo dictum par musculorum, in penis auersa seu posteriore parte qua musculorum vrethram comprimentium sedes constitui solet, specie praegrandis massae in conspectum venit Litt. E. Eaque quantum discernere potui, ex gemino musculo haud conflata est, sicuti de aliis animantibus hactenus traditum est; Verum singularem videtur constituere musculum azygon, qui ephippio aut fornici peramplo similis dimidiam penis longitudinem contegens, in scissuram terminatur, qua canalis vrethrae sub eo latitans, deposito bulbo, egreditur, iterque suum versus extremitatem penis absoluit. Bulbus itaque vrethrae in praefati musculi sinu, inter hunc et corpora nerueo-spongiosa veluti detentus ac incarceratus iacet, eoque prout consideranti patet, speciali instituto *Vnus solummodo musculus vrethrae bulbum comprimens.*

Eiusd. musculi actio vt quando canalis vrethrae vna cum bulbo per contractionem praedicti musculi propius ad memorata corpora nerueo - spongiosa vrgetur, eiaculationes praeterlabentium liquorum fortius velociusque peragantur, ad quas seu amplitudinis longitudinisque viae, seu liquorum seminalium causa, valida vis necessaria erat: quae vt cognoscatur, modum implantationis ductumque fibrarum respectu bulbi considerare oportet: Arcus enim pene efformant, qui bulbum *et* amplexi, mox filamentorum coerulescentium specie, cum cortice nerueo - spongiosorum corporum similibus fibris in longum ductis contexto sic committuntur, vt fibra- *Insertio* rum inuicem permixtarum discrimen agnoscere amplius haud liceat.

Accuratam neruorum penem Elephanti stipantium inue- *Nerui.* stigationem abs me institutam fuisse, absque iactantia effari licet, ad quam rara ac infrequens eorundem magnitudo, quae instar minoris digiti erat, simulque huius Nevrologiae in homine aliisq; animantibus desideratae vsus generalis me sollicitauit. Propter easdem causas, in ea statim re solutione fui, in maximis Elephanti neruis omnem lapidem mouendi, ad cognoscendum artificium, quo admiranda haec motuum sensuumque instrumenta, in quorum inuestigatione Anatome parum honoris aut lucri adhuc reportauit, a natura compaginata sint. Videre itaque et distincte percipere licuit, neruum filorum in circulum dispositorum fasciculum esse, quorum copia post eorum euolutionem equidem parua, singulorum e contra crassities nec non intermixta pinguedo ad molem nerui conflandam iusta ac com-

commensurata visa est. Pinguedinem neruo inclusam esse dixi, quod sane a nemine antea dictum fuisse recordor: E contrario, ei insensam ac noxiam esse, sensumque infringere Anatomici timere videntur. Interim veram pinguedinem eamque copiosam obseruaui, postquam exterius inuolucrum Nerui, quo laxe inuestitur detractum esset: Singula enim filamenta, pinguedinis manifesto folio seu lamina obducta in conspectum veniunt, in qua exilium simul vasculorum sanguineorum capillamenta distincte oculis apparent. Atque ex eo euidens est, quam late sese extendat pinguedinis vsus, quae eum forte in finem praefatis filis seu chordis nerueis circumfusa est, vt eorum flexilitatem incorruptam seruet, vimque adeo impulsuum vehementiorum non nihil retundat, praecaueatque, ne vnum filamentum ab altero comprimatur. Caeterum inter praedicta filamenta singularia, quorum numerus in eiusdem magnitudinis neruis semper aequalis obseruatus est, scil. (9. aut 10.) commercium instar ductuum communicantium per transuersos funiculos intercedit, qui ex vno filamento enati, alteri implantantur, hacque ratione prope canalicularis structurae, (adeoque influxus) idaeam subministrant.

Pinguedo in neruis detecta.

Eiusdem vsus.

Nunc de trium insignium neruorum super dorso penis deambulantium dispositione admodum curiosa et a nemine indicata, dicendum est. Et quidem, quod praefatum numerum ternarium attinet, diu fateor, in ea opinione fui, ac si duo tantum nerui, vnus super dextrum, alter super sinistrum corpus nerueo spongiosum, peni proprii essent, prout apud Anatomicos receptum est:

Tres insignes nerui.

 Sed

ſed reuera tres eſſe poſtliminio cognoui ; Praeter duos enim praememoratos,qui ſuper corpora nerueo ſpongioſa in ſocietate vaſorum ſanguineorum incedunt, vnus aeque inſignis in medio prope iunctionem ſeu concurſum praefatorum corporum iacet, qui demum in conſpectum venit, poſtquam vaſa ſanguinea ſuperincumbentia dimota, pelliculaeque plurimae inuoluentes ſeparatae ſunt. Ab iſto prius incipiam,quoniam ſine pari ac plane ſingularis eſt. Is igitur ſpatio praedicto, quod inter duo penis corpora ſpongioſa medium eſt, incluſus, aſſumta loco teretis quam initio habet, figura plana, ſuper tegumentum nerueum ſeu corticem penis, a quo vix diſtingui poteſt, mirum in modum diffunditur, adeo vt ſpatium quatuor digitos latum iuxta totam penis longitudinem, ſolo huius nerui contextu repletum ſit. Iſtius contextus,ac reliquarum rerum quae in Tab. XXVI. fig. I. continentur, aſpectu, partim naturae magnificentiam, partim delineatorem *Schwenterum** depraedicare fas eſt. Eius enim ſolertiae ac humanitati debemus, quod partium Elephanti internarum figuras optimas ac elegantiſſimas totidem tabulis comprehenſas nunc poſſideamus: Figuram propterea praememorati contextus aſpicere ſolummodo oportet, in qua id clare expreſſum eſt, quod alias vix ac ne vix deſcribi poteſt. Haud enim abſimilis eſt telis acu pictis ſeu texturis artificioſis, incredibili fibrarum neruearum implexu conſtans, ac ea tenacitate

Neruus sine pari deſcribitur.

*Is p. t. Medici Caſtrenſis officio ornatus ad mare Caſpium diſceſſit. **

** Viri Cl. et amiciſſimi *Ioh. Georg. Gmelin, M. D. diligentia collataque opera toto diſſectionis tempore hic quoque laudanda eſt.*

tate corporibus cauernosis agglutinatus, vt auelli nequeat. Caeterum tum praefatum situm seu agglutinationem, tum prodigiosam foecunditatem vnius nerui, tum funiculorum contextum haud satis admiratus sum, quoniam dum caeteri neruorum funiculi mox mox describendi, in gratiam hinc musculorum, hinc vasorum sanguineorum dispositi sunt, hic otiosi ac sibi relicti ad voluptatem solummodo destinati esse videntur. Ast ne errorem committam, id quoque repraesentandum est, quod per huius contextus cancellos seu foramina vasa plurima sanguinea ex truncis dorso penis incumbentibus emissa, ac corpus vtrumque cauernosum perforantia transeant, vnde non male actio coniici potest, qua sanguinis transitus in veneris actu determinari debet. *Ad voluptatem praecipue inservit.*

De duobus aliis neruis lateraliter super corpora cauernosa in societate magnorum vasorum incedentibus res clara ac euidens est, si rem (vti decet) contemplari placeat: Vtrique corpori nerueo-spongioso, praeter vnam arteriam duasque venas, neruus maximus cum praedictis vasis intra vnum fasciculum comprehensus incumbit, in qua societate recta deorsum, ad penis extremitatem vsque descendens, singularem respectu vasorum dispositionem, quae pariter hactenus ignota fuit, obtinere visus est: Nam toto itinere, tum e dextro quam sinistro neruo, frequentes propagines abscedunt, quarum nonnullae ad contextum medium supra memoratum tendentes in eo terminantur, aliae ad truncum recurrentes, eumque amplexae compedes efformant, quibus vasa socia veluti carcere includuntur, ac in potestatem suam reducun- *Caeteri Nerui penis.*

Tensionis penis causa assignatur. ducuntur. Quamobrem non ab alia causa, quam ab ista mirabili neruorum dispositione, totum negotium penis tensionem spectans, pendere manifestum est, absque musculorum attollentium seu erectorum ministerio, vti supra diximus: Nam certum est, quod in hoc casu Natura vasa sanguinea intra nerueos cancellos minime inclusisset, in quibus necesse est, vt ad quoslibet neruorum invigorationes cedant, hincque via sanguinis in corporibus nerueo spongiosis, per vicissitudines libera vel impedita sit, prout huius luculentum exemplum in Liene prostat, de cuius vsu aliquando loquendi occasio dabitur.

Neruorum interior structura inquiritur. Hisce, quae de Neruis ad penem spectantibus, pro instituti ratione exarata sunt, relationem obseruationum Nevrologicarum; seu structurae neruorum intimae, prout in maximis Elephanti neruis, ea constanter mihi oblata est, descriptionem subiungo, eamque, vt spero, errori minus obnoxiam, quia moles filamentorum insignis (selegi enim talia, quae diametro sesquilineae aut lineae respondebant) simulque probitas et praestantia instrumentorum opticorum perspecta fuit. Attentio quoque maxima fuit, vt in extractione aut resectione et expositione talium filamentorum, quam minima vis inferretur. Nerui tum crudi, tum longa maceratione emolliti et laxati in hunc vsum vocati. At in vtrisque phaenomena eadem obseruata sunt. 1. Effluxum succi aut humoris. 2. Tenuissima filula. 3. Tubulosam structuram obseruare nunquam valui, etsi sectiones optimae fuerint. 4. Neruo transuersim secto superficiem medullarem obseruaui, in qua inaequalitas veluti plu-

plurium globulorum ſeu capitulorum conſpicua fuit, quae veſtigia ſeu indicia plicarum mihi viſa ſunt. 5. In nervo per longum ſecto, ſubſtantiam pariter medullarem obſeruaui, in qua ſtriae ſubtiliſſimae, ceu fibrae, parallelae, in longum ductae ac parum protuberantes viſae, quas pro totidem etiam plicis habeo. 6. Vtroque modo diſſectum filamentum, poſtquam ſub microſcopio qua licuit celeritate, expanſum fuit, ecce nihil aliud oblatum eſt, quam tela ſeu membranula pellucida, ſed ineffabili miraeque tenuitatis et pulchritudinis pictura ramulorum nigricantium infinitis modis concurrentium ornata, ac plurimum ſimilitudinis obtinens cum corticali ſubſtantia cerebri, vel cum pia matre ad *Rhuyſchii* methodum praeparata. Quamobrem cogitatio incidit, an ne nervus ex membranis puris, aut laminis medullaribus complicatis ſolummodo conſtet, prout in oculo piſcis Xyphiae a *Summo Malpighio* * obſeruatum eſſe legimus. Rogaui autem, huius Academiae Socios, Viros amiciſſimos *Georgium Bernhardum Bulffingerum* Phyſices Profeſſorem, ac *Fridericum Chriſtoph. Maierum*, vt cum obſervando, tum delineando mecum facere vellent. *Illius* haec de phaenomenis verba ſunt.

An Neruus ex puris membranis aut laminis medullarib. compactus sit? Coniectura.

Poſcis, Vir Eximie, vt ego, quid viderimus, exponam. Gratior Anatomicis Tua erit deſcriptio, propior ſcil. recepto inter ipſos ſermoni, et aptior concluſionibus. Sed intelligo, quid velis? Meum *eſt enarrare viſa, quibus vti* Tuum *erit. Contineo me intra hiſtoriam, ſi bina exceperis vocabula, quae tanquam aliena carcere Rhe-*

* Epiſt. de Cerebro ad Carol. Fracaſſatum.

torico ( ) conclusi. Nihil dico, nisi quod vterque vidimus; nam et vltima, quae singulariter hic enuncio, ex eo tempore iuncti saepe spectauimus. Res omnis huc redit.

Subiecta est Microscopiis fibra nerui Elephantini, ad Diaphragma pertinentis: Eam tunica omni nudatam sine vitri auxilio spectator oculus homogeneam iudicauerat.

1. *In transuersa fibrae sectione, cuius diameter vnam facile lineam aequabat, superficies mediocriter aucta albicans apparuit vniuersa. Quando minoribus vitris amplius atque amplius expansam vidimus, tractibus obscurioribus tanquam maculis passim interstincta fuit, latioribus illis et strictioribus, varieque inflexis, nec ad sensum cohaerentibus. Area omnis reliqua videbatur limpidissima, infinitis farcta corpusculis nitescentibus, et roris in modum colores spargentibus. Papillularum illa, vel bullularum dimidia sui parte prominentium, speciem referebant, visa in extremitatibus sectionis, aut in fibrillis ab reliqua mole distractis. Erant autem eiusmodi puncta micantia ipsis etiam, quos dixi, tractibus obscurioribus passim, sed rarius, intexta.* (Quare etiam) *vsu venit, vt pro varia superficiei aduersus solem expositione magis aut minus obscurae, latiores etiam aut graciliores viderentur maculae memoratae.*
2. *Secta in longitudinem fibra, iisdemque obiecta microscopiis, simplicibus quidem sed bonis, vidimus vtique strias in longum porrectas obscuriores, quarum interstitia splendentibus, vt ante, corpusculis plenissima apparuerunt. Non istae multum a parallelismo abludebant: Sed distributae erant inaequaliter. Alicubi plures latiores-*

que

que obscuri tractus, subtilissimis tantum lineolis micantibus, neque illis perfecte continuis, distincti: Alibi ampliores erant nitidi, in quibus obscúriores discernere lineas hac methodo non licuit.

Hactenus autem obuersa erat soli superficies, quam intuebamur. Postea in mentem venit, excursiones et connexiones horum tractuum melius perceptum iri, si inter solem et oculum tenuissimus fibrae orbiculus transuersim sectus interponeretur. Id vtique egregium foret, seruiretque ad texturam nerui certius definiendam, si plures orbiculi sese inuicem excipientes microscopio examinarentur. Sed intercedit huic consilio fibrarum tenacitas, qua fit, vt sine multa structurae subtilissimae offensa tales a neruo cylindrulos tenuissimos non facile liceat rescindere. Placuit igitur, subtilem a fibra portiunculam cultelli acie, vt fieri tum potuit, separare, et vitro affixam suo glutine ad microscopium aptare compositum. Radios solares conuexa lens excepit, iisdemque collectis obiectam Soli particulam, quoties opus fuit, illustriorem reddidit.

3. *Hic vero texturam apparere mirabilem, tractibus obscuriusculis, per vniuersam portiunculam excurrentibus, et mirum in modum sibi implexis, formantibus insulas micantibus punctis refertissimas. Negabant lumini transitum obscuri tractus, nisi directum illud a sole veniret. Fines areolarum translucidarum, et obscuriorum tractuum nitebant conspicui iridis coloribus; plane vt fieri solet, cum res opacae soli expositae trans vitreum triangulare prisma spectantur. Posui ad latus parti-*

culae prioris portiunculam membranae, qua neruus integitur. Erat haec vulgari oculo nigricans, in qua nihil licebat distinguere. Beneficio collecti luminis, et subsidiorum oculi facies apparuit priori simillima, nisi quod micantium punctorum longe visa sit pauperior haec portiuncula.

4. *Denique repetitis tentaminibus, adhibitaque cura, vt secundum fibrae longitudinem abscinderetur filum microscopio aptandum, licuit et hoc percipere; strias obscuriores, quales iuxta nerui longitudinem porrectas vidimus n. 2. etiam inter sese connecti aliis gracilioribus lateraliter discurrentibus, rete simul elegantissimum et inordinatissimum referentibus. Vsus sum microscopio, quod tenuis pili crassitiem ad lineae latitudinem extendebat; neque tamen excedebat tractuum obscuriorum latitudo subtilis pili speciem. Illud dici non potest, quanta micantium particularum copia apparuerit, etsi filum hoc nerueum simplici oculo tantum non exsuccum videretur. Vltimum hoc phaenomenon, prima vice, qua pluuium tempus erat, ad candelae flammam obseruaui. Nosti autem, quoties ad id sereno coelo postmodum attendimus, id simile nobis et constans apparuisse.* Hactenus Celeb. Bülffingerus.

Sanguinis et vasorum copia.

Ea sanguinis tenacis copia Elephanti genitale inebriatum ac infarctum deprehensum est, vt ex hoc solo indicauerim de copia et magnitudine vasorum ad tantam vim humorum tam aduehendam quam resorbendam, prout etiam dissectio iniectioque comprobauit. Praecipua autem cura fuit, veram inuestigandi huius partis angeiologiam interiorem exterioremque: vasorum diuersis ſas ſpecies, communicationes, retia, excurſiones per varias regiones penis, conformationemque internam externamue, quae omnia cum in homine, tum caeteris animantibus difficilioris indaginis eſſe compertum eſt. Totus penis, detractis ſolummodo inuolucris communibus, hoc eſt, cute, panniculo et membrana adipoſa, in crate ſeu reticulo vaſis innumeris peramplis incredibili artificio contextis exſtructo, ac ſuper vniuerſum penem omnibus ſuis partibus inſtructum expanſo tam ſtricte inclusus eſt, vt prae ipſo ad partes ſubiectas viam ſeu aditum inuenire impoſſibile ſit. Hocce autem ſpectaculo nil pulchrius ac elegantius in hocce genere imaginari fas eſt. Cuius formatio talis mihi oblata fuit; Ex vtroque balani latere eiusque ſpongioſa ſeu interiori ſubſtantia, tres quatuorue propagines, mediocris ſtyli magnitudine, diſtinctae apparere incipiunt, quae mox prope balanum in duas inſignes venas digito minimo aequales commutabantur. Haec itaque quatuor vaſa, ad latera penis in diſtantia pollicis a ſe inuicem diſpoſita, praefati reticuli firmamenta, et veluti quatuor angulares columnas, (quibus textura reliqua vaſcularis ſuper totum penis ambitum expanſa, interiecta et firmata eſt), conſtituunt: Nonniſi vero ad certam altitudinem (fere dimidii pedis) tales trunci diſtincti manent, et a ſubtiliore interiecto rete eos dignoſcere licet: Nam dum illud ſurſum aſcendit, adeo increſcit tum numerus, tum magnitudo, tum varietas directionum vaſorum reticularium, vt quatuor praefati trunci euaneſcant, diſcernique amplius minime queant, id quod circa medium penis praecipue obſeruatur.

Vaſa externa. Eorumque origo, numerus, diviſiones.

et

Inceſſus

vatur. Illa enim regione, nihil quam ductuum duplo maiorum crassiorumque sese mutuo subingredientium variasque cancellorum angulorumue species seu figuras circa totum penis ambitum efformantium contextum cernere licet, in quo hoc solummodo discrimen oblatum est, quod anteriori parte praefati contextus, facies amplior ac plenior simulque robustior, quam posterior appareat. Eidem porro magno contextui, alii particulares subtilioresque ac minus ampli inter panniculum et adipem conspicui, ex venis cutis integumentorumque omnium conflati, continuati sunt; Verbo, tanta reticulorum frequentia passim occurrit, vt finem seu metam eorum inuenire vix liceat, quam tandem feliciter in medio musculorum erectorum, vbi tendinea aponeurosis litt. G. eos iungit, assecuti sumus: Nam eo loco vena magna versus pubem incedens, quam ideo pudendam seu externam appellare libet, conspicua est; In hanc manifesto, ex vtroque latere, nonnullas propagines ex descripto reticulo emissas, (quae NB. contractiores sunt iis, quae dictum reticulum efformant), ascendere ac terminari vidimus. Vt haecce insertio, simulque contextus, quem descripsimus, vniuersus, vno ictu oculi, ac momento in oculum caderet, prope balanum flatum venae inieci, qui cito omnes plexus et reticula venosa hactenus descripta peruadens, per dictam venam magnam redire visus est. Neque hoc tantum sufficit: Verum adhuc quaedam alia, circa eundem contextum haud incuriosa mihi oblata sunt: Nam communicationem admodum euidentem obseruaui, inter praedictum contextum externum internumque, quoties in-

Praeter magnum Rete penem includens, plures plexus minores.

Vena magna, ex omnium ramorum concursu formata.

insufflatio facta est, qua per vtrumque simul flatus penetrauit, idque gemina via, vna per duplicem venae ramum, qui anterius e reticulo abscedens, ambagioso itinere musculos erectores hederae instar amplexus, posterius tendit, seseque penem inter et musculos praefatos insinuans, in sinum maximum vasorum internorum desinit. Altera, per ambas itidem propagines, quae mox iunctae breuiori cursu, per medium musculorum erectorum ad praedicta vasa interna penetrant, venamque peramplam, de qua mox, efformant. Vlterius in diuersis huius reticuli locis, structura quaedam valde singularis et a communi structura venarum admodum recedens oblata est, (prout fig. 2. ostendit), cuius infra occasione venarum internarum simili structura gaudentium, dicendi locus erit. Postremo, singulae venae in contextu praememorato contentae, peculiari capsula adiposo-tendinea crassiore, admodum sensibili inuestitae sunt, qua fit, vt crassorum et ampliorum quam reuera sunt, apparentiam vasorum obtineant. Quamobrem, in subsidium forte venarum data sunt praefata inuolucra, vt partim calorem foueant, partim vim ac resistentiam ipsarum augeant, sicuti in pluribus casibus id necessarium ac vtilissimum esse censendum est.

Communicatio inter vasa externa et interna.

In quibusdam locis fabrica venarum singularis.

Capsula adiposo-tendinea.

Eiusque vsus.

In vasis internis profundius sitis, ad quae nunc transeundum est, talem capsulam (quae autem neruea visa est:) Item talia venarum receptacula, prouti citata fig. ostendit, contemplari fas fuit, distractis tantummodo musculis erectoribus super ea positis, sicuti in fig. 1 litt. CC. designatur.

Vasa interna.

Venis

Descriptio singularis fabricae in venis obseruatae.

Venis itaque, nonnullis locis, machinamentum (quod admodum insolens visum) a natura concessum est, forte ad sanguinem ex variis penis regionibus refluum, magnaque proinde varietate notatum probe miscendum; vel compendii gratia etiam, ad ingentis vasorum multiplitudinis reductionem; ac forte aliquando in talem vsum, vt turgentibus illis conceptaculis, tumor ardorque penis diutius perseueret, prout eius actioni conuenit. Est vero crassa et ampla cauitas circularis seu saccus ad verticilli figuram accedens, quoniam in medio foramen piso aequale vtrinque apertum habet fig. 2 litt. *a*. Cum ramis *bbbb* ei annexis, prout delineatus est, consideratus, potius figuram quadratam mentitur. Eorum maximus facta dimensione 14. lin. latus, 11. longus erat. Alios atque praecipue illos, qui in venis exterioribus conspicui sunt, tum figurae quae magis oblonga est, tum amplitudinis respectu, cum priore comparare haud licet. Cauitatis (cuius diameter 4. linear.) nuda ac polita superficies valuulis chordisque destituta visa est: Neque ad ostium ramorum vllae valuulae oblatae sunt: Verum solummodo, in notabili ab hacce cauitate distantia, in venis supra et infra eam incedentibus apparere incipiunt, eaeque coniugatae seu duplices, faucibusque suis versus pubem obuersae sunt. Omnes porro venae internae, hisce receptaculis cum supra tum infra alligatae sunt, eorumque ope in duos veluti ordines distinguuntur. Quae infra sunt, illae communi venarum exteriorum ortu, scil. ex vtroque balani latere progenitae, ductus vtrinque binos arteriae neruoque antea

Venae internae duplicis ordinis.

de-

descripto associatos, ac nerueo-spongiosis corporibus secundum eorum longitudinem suffultos, efformant L. KK, atque hi toto illo itinere, non solum longam seriem ductuum verticalium breuium, per interualla aequalia e corporum praefatorum interiori substantia emergentium, sub forma pectinis annexam habent L. *ddddd*: (Haud enim aliter, quam praedicta forma, venae, arteriae Lit. LL. nerui, L. MMM penis substantiam subeunt: excepta arteria bulbi propria, quae secundum eius longitudinem incedit.) Verum etiam frequentissimis ramificationibus inosculationibusque, contextum admiratione dignissimum, qui supra praedictos venarum, arteriarum, neruorumque truncos retis instar expansus est, efformant, l. NNNN. cuius retis plures propagines, (praeter duas principales venas suprememoratas, L. KK. secundum penis longitudinem ad vtrumque latus tendinis musculorum erectorum communis incedentes), hinc dextrorsum, hinc sinistrorsum, in illis receptaculis seu cauitatibus L. OO earumque parte inferiore desinunt. Ex altera, hoc est, ex superiore eorundem receptaculorum parte, nouae ac ampliores venae exsurgentes, (quarum prope pubem abscissarum orificia trium fere linearum diametrum aequabant) paucum, quod de itinere versus pubem restat, sex distinctis truncis 1. 2. 3. 4. 5. 6. (tribus nempe in vnoquoque latere) absoluunt. Quam ob rem, quum iuxta sex venas tresque neruos hactenus descriptos, 7. 8. 9. duae adhuc arteriae, 10. 11. (quarum probe pubem abscissarum diameter fere 2. linear. est,) simul hic conspicuae sint, quae de caetero, adinstar venarum sociarum, toto itinere per interualla aequidistantia verticales propagines L. *eee*. cor-

Non earum trunci, verum rami laterales penem subeunt.

Rete venarum elegantissimum

Sex earum trunci prope pubem.

Duae arteriae earumque incessus interior exteriorve.

poribus nerueo -ſpongioſis ſuppeditando, formam pectinis aut raſtri aemulantur, transmiſſis quoque ad partes vicinas, ad integumenta, quibusdam ramis litt. *ffff.* Quumque etiam exterioribus penis partibus vena inſignis pag. 390. bulboq; duae arteriae totidemque venae propriae 15. conceſſae ſint, ſumma omnium truncorum arterioſorum, venoſorum, nerueorumque peni propriorum, ſedecim erit, de quibus iam ſatis.

Summa omnium truncorum.

T.XXVI. *Fig.* 3. *Penis textura interior.*

Hiſce perluſtratis, nunc penis textura interior, prout haec per inſtitutas quam plurimas ac diuturnas inueſtigationes mihi oblatá fuit, exponenda eſt. Penis capſula eſt Litt. AA conicae figurae, ſepto perpendiculari L. BBB. ſecundum totam longitudinem aequaliter diuiſa, admodum craſſa ac coriacea, duo corpora ſpongioſa L. CC. proprio inuolucro tenui cincta continens. Singulorum diameter tres pollices facile aequabat, praeter craſſitiem capſulae, quae digito minori aequalis erat. Quare haec, cum praefatae craſſitiei, tum ſoliditatis cauſa, ligni duritiem habebat. In eo ſtriae eminentes, rectae ac parallelae, coeruleae, ſecundum longitudinem excurrentes extus conſpicuae ſunt, quibus tota propemodum ſuperficies quaſi contexta ac nonnihil exaſperata eſt: ſed adhuc aliae transuerſales fibrae pariter coeruleſcentes iisdem intermixtae ac intertextae in locis obſeruantur, vbi tendines muſculorum terminari videntur, quibus mutuo ſeſe interſecantibus ac contortis validiſſima textura efficitur. Vaſcula etiam ſubtiliſſima, pellucida, conſpicua ſunt (an lymphatica an ſanguinea incertum), quae facto circuitu, in venam verſus dorſum excurrentem finire viſa ſunt. Atque ex talibus fibris tenaciſſimis textura totius

Eiusque

Capſula deſcribitur.

Incertum, an vaſa lymphatica al ſint.

totius capſulae compoſita eſt, in qua maiorem ſolummodo fibrarum implexum reſiſtentiamque inueni. Parte capſulae interna ſeu concaua, duplex cauitas, ad locandum vtrumque corpus nerueo-ſpongioſum, conſpicua eſt, eaeque ſepto inſigni adeo interſtinctae ſunt, vt vnum corpus ab altero penitus ſecluſum ac ſequeſtratum ſit, amboque corpora facile extrahere ſic liceat, vt ſeptum immotum ac integrum maneat, pateatque euidenter partem eſſe, a dictis corporibus perfecte diſtinctam ac independentem, etſi de coetero ad eorum functionem forte adiuuandam haud inutilis ſit, prout ex eiusdem haud vulgari textura hariolari licet.

Praedicta capſula in duas cauitates bipartita eſt.

Septum a corporibus ſpongiosis diſtinctum eſt.

Septi penis conſtructio.

Etenim, cum ex ima, tum ſuprema internaque capſulae facie L. DDD, ſecundum totam longitudinem penis, chordarum inſignium, ſibi contiguarum, ſpatiaque *aaaaa* inter ſeſe relinquentium ſeries, vna aſcendens, altera deſcendens exoritur L. EEEE, quae facto breui itinere, propius iunctae ac inuicem confuſae, in vnum planum ſolidum L. FFF. coeunt, quod veluti in ſerra aut pectine vtrinq; dentato, vel lamina vtraque parte in multas lacinias diuiſa, intermedium eſt, cuius propterea craſſities dupla eſt chordarum, duarum nimirum linearum. Originem ſtructuramque interſepti praefatam conſideranti, haud credibile amplius apparet, tanta induſtria conſtructum fuiſſe, vt ſimplicis ac immobilis parietis ſeu clauſtri vices ageret: Ad hoc, opus ne eſt tot fiſſuris laciniiſque ſeu diuiſionibus, a chordarum diſtantia ſeu diuulſione oriundis? An ad cruoris commeatum reciprocum, ab vna cauitate in alteram? Hunc vero ſine tali fabrica Auctores explicant, quamquam v-

 ſum

ſum huncce ego haud penitus improbem, caeteris ſolummodo, quae hic ſimul obſeruanda ſunt, probe explicatis. Nam tales vtique ac tam grandes fiſſurae ſecundum totam longitudinem, ad ſolum ſanguinis tranſitum minime neceſſariae videntur, quia per pauciora ac minora foramina tranſitus non ſolum, ſed vis etiam ac ſoliditas maior ſepti fuiſſet. Quare per haſce amplas fiſſuras, ceu ianuas apertas, ſubſtantiam corporum ſpongioſorum transmitti, ab vno latere in aliud adeoque confundi, diſtincte obſeruabam *bb*, quod reuera annotatione digniſſimum eſt: Propterea, hiſce viſis, credere incipio, huicce interſepto vim aliam nobiliorem inſitam eſſe, qua ſupramemoratae chordae veluti totidem lacerti, aliquando contrahi ac proximiores effici, ſpatiaque iis interiecta arctari poſſunt, quod toties euenire neceſſe eſt, quoties ſubſtantia ſpongioſa, quae praefatis ſpatiis incluſa eſt, alteraque toti ſepto contigua, compreſſione opus habet. Ad huius compreſſionis neceſſitatem oſtendendam, texturam cauernoſam, ac per eam effuſam ſanguinis copiam vnaque difficultatem regreſſus duntaxat conſiderare oportet. Ad haec, ſi ſtructura corporum ſpongioſorum probe perſpecta ſit, tunc demum res clara ac euidens fiet.

Nouus vſus ſepti exponitur.

Ad praefata igitur corpora ſpongioſa L.CC.fig. 1.PP. nunc tranſeundum eſt. Ac primo inuolucro membranaceo-muſculari, quod cum capſula, cui agglutinatum eſt, haud confundere oportet, vtrumq; inueſtitum eſt L.GG: In eo etiam illud pro raro ac inſolenti tenendum eſt, quod fibris carneis rubentibus totum conflatum ſit, haeque adeo conſpicuae factae

Corpora ſpongioſa penis.

Vtriusque inuolucrum proprium carnoſum.

factae sunt, vt musculum cauum referrent: De caetero, quamuis in earum contextu quaedam confusio apparuerit, haud difficile tamen fuit, sub fibris exterioribus, quas ideo remouere oportet obliquum incessum, vt potiorem ac insigniorem animaduertere. Itaque, hancce texturam non ad simplex velamentum, destinatam esse, euidentissimum est; siquidem crassissimus cortex capsulae ad id sufficiens videtur: Quid ergo? Ad comprimendum, sollicitandum vel agitandum contextum spongiosum, cuius, vti et sanguinis in eo contenti, moles magna, vires tamen paruae sunt: Etsi enim extra huncce contextum viarum libertas integra esset, sanguis tamen intus effusus, sola cellularum vi, (prout e spongiae vel arundinis indicae exemplo patet) non exprimetur, verum in stagnationis periculo versabitur. *Eiusdem actio.*

Actionem cellularum, e quibus tota compages corporum spongiosorum conflata est, vna concurrere, non quidem simplici coniectura, sed ex diligenti earum perlustratione mihi compertum est. Etenim, in amputata ac probe mundata orbiculari penis particula, totam compagem perlustrare fas fuit. (Si e contrario, secundum longitudinem dissectio facta sit, priorem cellularum faciem ac regularitatem videre amplius non licebat.) Eae, veluti in spongia aut arundine indica, sine certo ordine figurave haud dispositae sunt. Nam, sicuti primae cellularum areae seu orbis, sic omnium reliquarum sequentium per totam longitudinem conformatio non dissimilis apparet; adeoque cauernulae fortuito ac sine consilio haud factae sunt, quemadmodum in homine ac aliis Ani- *Cellularum actio.*

 manti-

Cellularum structura curiosa. mantibus Anatomici tradunt; Verum singulae cellulae, apum alveolis similes, e tenuissima membranula conflatae, pentagoni figuram induunt, sicque inuicem iunctae et adaptatae, nexum contextumque admirabilem efformant. Eodem tempore, inter praedictas cellulas, quaedam filamenta carnea, (Warthono* carnis glandulosae species) in conspectum veniunt, exterioribus supra *Fibrae musculares* memoratis fibris in superficie extima conspicuis melius comparanda, quam vasis sanguineis in rete expansis: Visum enim est, inter exteriores interioresque fibras aliquem nexum ac cognationem intercedere, nihilque adeo obstare, quo minus hisce aeque ac illis communem actionem tribuamus. Vtraque ergo actione cum externa, tum interna opus fuit, ad euitandum, ne sub tanta mole sanguinis, cellularum compages cito eneruetur. Fallor, an non propter eandem causam illud quoque, de quo nunc dicturus sum, ab animantium Conditore fabricatum sit. Transuersi vel obliqui, ac vna extremitate *Chordae.* septo, altera capsulae annexi funiculi seu chordae, (quales supra in descriptione septi, ac in lamella penis *Balaenae* a Ruyschio delineatae sunt,) per interualla, secundum totam longitudinem penis, praefatum cellularum contextum peruadunt litt. HH. fig. 1. gg. Harum maximae, seu crassiores in ima seu posteriore penis facie, numero terno aut quaterno locatae sunt, minores seu tenuiores econtra medium occupant. Magno insuper robore seu firmitate, constant. Ad haec, tota cellularum compage, iis instar uvarum racemi adhaerente, inuestitae et obsessae, istam molem vt et vasorum transuersos ramos vel-

* Adenograph. Cap. 3.

vti

vti ſuſtinere videntur. Has tamen ad fulciendum ſolummodo conditas eſſe minus credibile eſt: Verum illud potius agere videntur, vt ſpongioſum contextum comprimendo, cruorem exprimant, ac intra venas cogendo, penem ab onere citius liberent. *Chordarum actio.*

Reſtat, vt in praeſato contextu, venarum arteriarumque ſtatum, prout is mihi oblatus fuit, poſtremo exponam. Poſtquam itaque, in dorſo penis, duplex ſeries venarum arteriarumque (vid. pag. 393.) ad contextum interiorem ſpectantium formata eſt, (quarum altervtra breuibus verticalibusque inſtar clauorum, ſecundum totam penis longitudinem, vtrinque peni infixis ramis, conſtat,) omnes diſtinctis et transuerſum digitum a ſe inuicem diſtantibus foraminibus, penis cauitatem ingreſſi in ea terminantur; Arterias primo, ad introitum vsque cauitatis perſequenti, nihil aliud conſpectui oblatum eſt, quam iidem rami ſubito extenuati, ac in capillamenta mox viſum effugientia conuerſi, quibus propterea vsque ad eorum inſertionem cognoſcendis, labor fruſtra inſumtus fuit: Quare iniectiones etiam inſtitutae ſunt, quarum vero ſucceſſus haud proſperior fuit; Liquor enim cito quidem cellulas peruadebat plurimas; ſed per vias obſcuras ac inconſpicuas; Vice verſa, viae reducentes adeo patulae et manifeſtae, et a ſtructura venarum conſueta adeo diſcrepantes viſae ſunt, vt ad ſuſcipiendas mutationes easque ſubitas quibus obnoxius eſt, nouum veluti circuitus genus in pene a natura conſtitutum ſit, prout ex tota eius fabrica fere perſpicuum eſt. Arteriae ſingulari capſula incluſae, lacertis ſimiles ſunt. E contra loco

Vaſorum conformatio in cellulis.

Diſtincta pro ſingulis vaſis foramina.

Arteriae mox diſparent.

Earum capſula.

Venae cribriformes. loco venarum ductus solummodo cribriformes, foraminibus vndique pertusi ac veluti erosi, a cellulis aegre discriminandi, extra capsulam penis, venarum (seu breuium tubulorum verticalium) formam induentes, in conspectum veniunt. Caeterum, in homine, praefata venarum penis proprietas, iampridem inuentore *Ruyschio* detecta fuit, hodie autem obliuioni data est. vid. *Ruysch.* Obs. Anat. Chirurg. *pag.* 134. Act. Erud. *A.* 1691. *p.* 69. *Ioh. Guil. Pauli* Annot. ad Ioh. van Horne Microcosm. Lips. *A.* 1707. excus. *p.* 243. not. 11. *Godof. Bergeri* Phys. Med. pag. 453. „ Sanguis per penem et glandem re„dux non per minutissimos ramulos, neque per corpus „reticulare vt loquitur Malpighius regreditur, sed per ve„narum patentia et visibilia oscula aut foramina. Ve„nae enim per penem distributae, si non omnes, saltem „tot, quot vnquam offendi, sunt poris magnis et visi„bilibus foraminibus pertusae cribri instar, queemadmo„dum quoque in vena splenica vitulina (vid. fig. 83. et „84.) conspicitur, quod nunquam hactenus obseruatum „esse putem. Eiusmodi venarum perforatio in causa „est, quod sanguis per penem redux citissime possit a pe„ne regredi, pene momento flaccescente. Addo, quod *An ob sanguinis crassitiem.* quum in pene tum in splene, (in quo venarum similis fabrica a *Malpighio* detecta) sanguis forte e cellulis refluus paulo crassior et pigrior factus sit, magna opus sit meatuum libertate, ne is praeternaturalem moram ageret.

Antequam historiae penis finem imponam, de altera quoque penis parte essentiali, prout in Elephanto sese habet, postremo commemorandum est. Huic itaque parti, quae verti-

verticem penis imum, totamque vrethram ambit, tria ſucceſſiue nomina tanquam rebus diſtinctis impoſita ſunt, bulbus, corpus ſpongioſum minus, et balanus, etſi nihil aliud ſit, quam homogenea continuataque ſubſtantia, craſſitiem figuramq; variam ab imo vsque ad ſummum fere penis aſſumens. Ea exterius, prope finem penis, (vbi extenuatio magna in eo obſeruatur) ad manus transuerſae longitudinem incipiens, fig. 1. L. QQQ. penis ſolam poſteriorem faciem adeoque ſemicircumferentiam inuoluit, anterius vero L. R. deficit, cuius locum tendo muſculorum erectorum L. H. occupat.) Dumque tumore ſuo, praefata ſubſtantia aequalitatem penis amiſſam reſtituit, neque commiſſura aut interſtitium, quale vulgo inter glandem et penem obſeruatur, apparet, falſam opinionem glandem deficere, prima fronte ante diſſectionem cutis (qua perinde ac reliquum penis corpus obtectus eſt L. S) excitat. Caeterum ſupra iam annotatum fuit pag. 389. eidem ſubſtantiae, quum ſeſe expandere incipit, vaſorum in dorſo penis incedentium extremitates annexas ac implantatas, eaque proinde cum peni, tum balano communia eſſe. Quare etiam, quin hiſce partibus commercium conceſſum ſit, haud dubitaui, non obſtante eo, quod diſtincta quoque ac propria huicce ſubſtantiae vaſa inſint, quae autem vrethrae magis inſeruire viſa ſunt. Porro nerui omnes, quotquot iuxta longitudinem penis deſcendunt (vid. pag. 383.) hic terminantur: Propterea, ſeu papillarum nerueaerum, ſeu villorum a Celeb. Anatomicis Ruyſchio et Cowpero inuentorum, adeoque ſenſus, qui in hac parte viuidiſſimus eſt, cauſa perſpicua eſt. Ad haec non im-

Deſcriptio Balani.

Eiusque

Cum pene commercium.

Cauſa ſenſus acutiſſimi.

Causa compagis strictioris. probabile est, quod propter eandem causam textura in hoc loco, seu in balano strictior sit, quam in alio, etsi fibrae quoque tendinis supramemorati Lit. H. ad idem efficiendum idoneae esse possint.

Corpus spongiosum minus vrethrae. Quum sic origo seu formatio mihi satis patuisset, obseruabam vlterius, quod in spatio, quod pro transitu vrinae et seminis perforatum est, substantia consimilis, ceu appendix, ad totam vrethram inuoluendam, abscedat, quae propterea cum praecedente continuum corpus efficit. Attamen distincto nomine, corpus spongiosum mi- *Eiusque* nus, ab Anatomicis vocatur, quod eam vrethrae partem, (quae inter musculum comprimentem ac balanum inclusa est), instar diploe complectitur; soloque proinde crassitiei ac firmitatis gradu discrepat. Postquam enim praefatum musculum attingit, eandem crassitiem amplius non habet. Haec pars Bulbus appellata est, qui tamen nihil aliud est, quam extremitas corporis spongiosi sub *Bulbus. Fig. I. Lit. T. Fig. III. Lit. I.* musculo comprimente vrethrae, cui firmiter agglutinatur incedens, prout pag. 379. indicaui, sed in molem maximam tumefacta. Eius namque circumferentia 7. poll. et 2. lin. Longitudo 14. poll. aequabat. Figura eius instar magnae pastinacae: Vrethram inter fig. 1. litt. V. (cui ope vasorum sanguineorum annectitur), ac praefatum musculum Litt. E. situs, lateraliterque *et* ad penem fibrarum suarum ope firmatus est. Texturam denique, quod attinet, exterius capsula fibris carneis obliquis contexta, totum bulbum ac reliquum corpus spon- *Textura.* giosum vrethrae inuestit. Interius vero, textura cellularum, (prout in penis capsula), sed subtiliorum in conspectum

ctum venit, quam vtrinque peruadit arteria vsque ad extremitatem excurrens, vrethrae magis quam bulbo inseruiens, sicuti vascula numerosissima ad eam transmissa testantur. Plurima porro venarum perexigui ramuli bul bo egressi, vtrinque venam N. 15. sub bulbo ad latus vrethrae incedentem efformant. . . .

DE FRICTIONIBVS CORPORVM SOLIDORVM

Specimen

G. B. Bülffingeri.

I.

NOn admodum diu est, quod de *Frictionibus* corporum *solidorum* coeperunt aliqui Eruditorum commentari. Vulgares libelli statici exponunt machinarum vires sepositis frictionibus. Inde fit, vt magnos in praxi errores committant, qui potentiarum effectus ex solis illis regulis computant: non sane, quod fallat inutilis theoria, sed quod eandem minus completam applicari ad naturam contigat. Pretium igitur est operae, quae cognoscendis corporum frictionibus impenditur. Inter Gallos *Amontonius* experimenta instituit, et conclusiones intulit nonnullas: quas diuerso instituto examinarunt *La Hirius* et M. Sept. 1727.

Parentius. In Germania de machinarum frictione nonnihil differuit *Leonh. Christoph. Sturmius*: et *Leibnitius* diuidendo frictionum classes aliqua rectius distinxit. Laudabilis omnium cura fuit, cui nihil detractum volo. Dabo hoc loco accessionum aliquid; si non alio, saltim eo fine, vt refricetur Eruditis frictionum memoria.

II. Non est incongrua methodus examinandi frictionum momenta, quam *Amontonius* sequitur in *Memoriis Acad. Scient. Paris* ad A. 1699. Placet tamen varietatis caussa nouam adiungere, in quam incidi, cum plana inclinata tractarem alio consilio. Habebit vnaquaeque suos prae altera vsus in diuersis casibus; dantur enim, quibus nostra videtur esse simplicior; dantur etiam, quibus altera est commodior. Vtor autem planis inclinatis, quibus imposita vel quiescunt vel mouentur corpora, pro magnitudine eleuationis plani, et potentiarum corporibus applicatarum.

III. Inueniatur experimento saepius instituto angulus eleuationis ille, quo dato corpus plano impositum tantum non descendit; descensurum, si nonnihil augeatur; et haesurum cum aliqua aduersus descensum renitentia, si minuatur angulus eleuationis. Dicatur autem hic angulus breuitatis caussa *angulus quietis*. Eoque invento sic inferatur:

Vti *sinus totus* ad *sinum rectum anguli quietis*; ita *pondus absolutum* est ad *frictionem* eius *super plano ad praedictum angulum inclinato*.

Atque iterum:

Vti *sinus totus* ad *tangentem anguli quietis*; ita *pon-*

pondus absolutum eſt ad *frictionem* eius *ſuper plano horizontali*, cum trahitur in directione ad horizontem parallela.

IV. *Demonſtratio* propoſitionis vtriusque perfacilis eſt. Sit AB, *ab*, planum inclinatum: BAC, *bac* angulus quietis memoratus, et corporis P, *p*, pondus abſolutum $=a$: Erit per ordinarias de plano perfecte polito demonſtrationes, vis corporis P nitens ad deſcenſum in directione plano parallela $\frac{a.DG}{DF}=\frac{a.BC}{AB}$; quodſi enim ponderi P in directione memorata GDH opponatur aliud pondus $Q=\frac{a.BC}{AB}$, quieſcet corpus P ſuper plano polito. Iam in plano aſpero in vicem ponderis Q ſubit frictio ponderis P, faciens aequilibrium cum vi deorſum nitente. Itaque frictio corporis $P=\frac{a.BC}{AB}$, hoc eſt, vti ſinus totus AB, ad ſinum rectum anguli eleuationis BC; ita pondus abſolutum *a*, ad frictionem corporis ſuper plano ad dictum angulum inclinato, *quod erat primum*. Fig. I. et II.

V. Iam vt idem transferatur ad planum horizontale: debet grauitas naturalis ſecundum lineam DF nitens reduci ad grauitatem fictitiam, quae agat ſecundum directionem DE, vt adeo planum inclinatum AB ſit illius reſpectu horizontale: ſiue generaliter loquendo, vice ponderis naturalis abſoluti *a* debet conſiderari vis alia *b*, qua corpus P ad planum AB apprimitur perpendiculariter. Hic notum eſt ex ſtaticis, pondus illud vicarium, ſiue vim appreſſionis *b* eſſe $=\frac{a.DE}{DF}=\frac{a.AC}{AB}$. Frictio autem huius ponderis, cum trahitur in directione ad pla-

 num

num AB parallela, modo inuenta eſt $= \frac{a.BC}{AB}$. Adeoque pondus vicarium, ſed abſolutum b erit ad frictionem eius tanquam tracti ſuper plano horizontali in directione ad planum parallela vti $\frac{a.AC}{AB} : \frac{a.BC}{AB} = AC : BC$, hoc eſt, pondus quodcunque abſolutum eſt ad frictionem eius horizontalem, vti ſinus totus AC ad tangentem anguli quietis BC; *quod erat ſecundum.*

VI. Poſſunt haec duo theoremata inſeruire examini propoſitionum hactenus publice exhibitarum. *Amontonij* ſententia eſt, ab aliis tamen non ſemel reuocâta in dubium, quod 1 *frictiones* ſint *preſſionibus proportionales*; quod 2. aequentur tertiae parti preſſionum; et quod 3. ſuperficiei magnitudo frictionem ceteris paribus nec augeat, nec minuat. Poſſunt ſingulae hae propoſitiones examinari facile per plana noſtra inclinata; et, ſi quae abludat a vero, emendari. Incipiamus a facillimis.

VII. In *duobus*, quos memoraui §. 4. et 5. caſibus ſunt vtique, ceteris omnibus paribus, frictiones proportionales preſſionibus. Eſt frictio ſuper plano inclinato $= \frac{a.BC}{AB}$, et frictio ſuper horizontali $= \frac{a.BC}{AC}$, adeoque illa ad hanc $= AC : AB$, hoc eſt, vti preſſio corporis P ſuper planum hoc inclinatum ad preſſionem eius ſuper planum horizontale.

VIII. An id *de omni ſitu plani* vtcunque inclinati verum ſit, manente corpore et plano eodem: ita experimentis definiri poteſt. Fingatur, frictiones eſſe preſſionibus proportionales, et computetur, ſi angulus eleuationis ſit maior, quam qui §. 3. inuentus eſt, quantum

pon-

pondus S requiratur, ad retinendum corpus P in quiete ſuper plano inclinato; Sin minor fuerit angulus eleuationis, quantum pondus R requiratur ad hoc, vt corpus P tantum non deorſum trahatur ſuper plano ſuo. *Fig. III.*

IX. Sit preſſio ad frictionem $= m : n$. Pondus naturale abſolutum $= a$. Sinus totus $= m$. Sinus rectus anguli eleuationis $= x$. Erit preſſio corporis P in planum $= b = \frac{a\sqrt{(mm - xx)}}{m}$ §. 5. adeoque frictio eius $= \frac{an\sqrt{(mm - xx)}}{mm}$. Haec frictio addita ponderi S debet aequare niſum corporis deorſum ſuper plano. Hic niſus $= \frac{ax}{m}$ §. 4. igitur $S = \frac{ax}{m} - \frac{an\sqrt{(mm - xx)}}{mm}$. Ex aduerſo preſſio ponderis P deorſum $(= \frac{ax}{m})$ vna cum pondere R aequatur frictioni corporis: itaque $R = \frac{an\sqrt{(mm - xx)}}{mm} - \frac{ax}{m}$.

X. *Primum* obtinet, quando x maius eſt valore formulae $\frac{nm}{\sqrt{(mm + nn)}}$: *Secundum*, quando x minus eſt. Cum vero $x = \frac{nm}{\sqrt{(mm + nn)}}$ euaneſcunt pondera S et R, manetque aequilibrium inter frictionem et niſum corporis deorſum: *Inſervitque* haec *formula*, *tum* ad inueniendam ex dato angulo relationem frictionis ad preſſionem, *tum* ad determinandum ex data hac relatione angulum quietis. Eſto enim ex *Amontonii* ſententia preſſio ad frictionem, vti 3 : 1. emerget $x = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{3.162} = \frac{1000}{1054}$. Igitur dicendum: vti ſinus totus m, ad ſinum rectum x $(= 3 : \frac{1000}{1054} = 3162 : 1000)$ ita ſinus totus tabularis 100000 ad ſinum rectum eleuationis quaeſitae, 31657, cui in tabulis reſpondet angulus 18. grad. 27. min. Sit porro ex ſententia *Parentii* $m : n = 20 : 7$, erit

$x =$

$x = \frac{nm}{\sqrt{(mm+nn)}} = \frac{140}{\sqrt{449}} = \frac{140}{21.189}$. Vnde fit $m : x = 20 : \frac{140.000}{21.189} = 423.78 : 140.00 =$ ſinus totus 100.000 : ſin. eleuationis quaeſitae 33036, cui in tabulis reſpondet angulus 19° 17′.

XI. Si angulum hucusque mutauimus manente pondere, poteſt nunc *pondus mutari* manente angulo. Si enim frictiones ſunt proportionales preſſionibus: debet angulus quietis manere vnus idemque, poſita ſuperficie eadem et aucto pondere abſoluto. Manente enim angulo preſſiones ad planum ſunt proportionales ponderibus abſolutis: ſunt etiam niſus corporum, quibus deſcendere ſuper plano conantur. Obuia haec ſunt omnia: velim autem, vt in experimentis caueatur a circumſtantiis alienis.

XII. Inſeruiet etiam haec methodus ad *comparanda* inuicem diuerſi generis *corpora*. Eandem fere frictionem eſſe ferri, cupri, plumbi, ligni mutuo combinatorum, ſi axungia illinantur, annotat *Amontonius*. Id etiam examinari hac methodo poteſt, et cum et ſine axungia: nimirum quaeritur, an idem ſit pro omnibus angulus quietis?

XIII. Denique eadem anguli conſtantia requiritur pro corporibus homogeneis et aequaliter politis, aeque aut minus grauibus, *ſed diuerſa ſuperficiei extenſione* gaudentibus; ſi ex vero dixit Vir Egregius, quod diuerſa ſuperficiei extenſio frictionem ceteris paribus nec augeat nec minuat. §. 6. Poteſt id tentari cum corporibus aeque grauibus: poteſt vero etiam cum inaequaliter grauibus

bus ob §. 11, modo ſint homogenea, et aequaliter polita.

XIV. Notari etiam meretur, poſſe hac ratione inueniri relationem frictionum in motu *voluente*, et *radente*. Poſſunt enim ſuper eodem plano inclinato ſucceſſiue poni corpora, quae voluendo ſe deſcendunt et quae radendo. Si enim pro vtroque caſu inuenias angulum quietis: erit frictio corporis ſeſe voluentis fig. 2. $=\frac{a\times bc}{ab}$ et corporis radentis fig. 1. $=\frac{a.BC}{AB}$. Eſt igitur illa ad hanc, pro corporibus in experimento adhibitis $=bc\times AB$: $BC\times ab$ hoc eſt (propter $ab=AB$) $=bc$: BC, hoc eſt, vti ſinus recti angulorum quietis.

XV. Praeterea, poſito frictiones eſſe preſſionibus proportionales, inquiri poteſt, *quantum* requiratur *Pondus* T ad corpus P ſuper plano ſuo ſurſum trahendum in directione plano parallela. Patet enim, pondus T debere nonnihil excedere corporis niſum deorſum, et frictionem eius ſuper plano: proximus igitur ante aſcenſum hic caſus eſt, quando T = frictioni et niſui ſimul ſumtis, hoc eſt ex §. 9. cum $T=\frac{an\sqrt{(mm-xx)}+amx}{mm}$. Vnde denuo ex dato T et x definiri poteſt relatio frictionis ad preſſionem; vel ex data relatione et angulo inueniri pondus T; vel ex data relatione et pondere T inueniri angulus eleuationis.

XVI. Habet autem haec conſideratio *maximum* aliquod: differentiata enim ſolito more, et reducta aequatione per *methodum de maximis et minimis* prodit $x=\frac{mm}{\sqrt{(mm+nn)}}$ pro maxima vel minima ſurſum trahendi difficultate. Sed maximam esse patet vtique ex valorum substitutionibus. Sit enim ex. gr. $m:n=3:1$ ex §. 10. atque $x=\frac{mm}{\sqrt{(mm+nn)}}$, vel $=\frac{mm}{\sqrt{(mm+nn-1)}}$ vel $\frac{mm}{\sqrt{(mm+nn+1)}}$ erit in primo casu difficultas $=\frac{\sqrt{10}}{3}$ ponderis absoluti; in secundo $=\frac{9}{3}$, in tertio $=\frac{9}{3}\frac{+\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$, qui vterque valor *primo* minor est.

XVII. Conuenit autem cum hac maxima ad sursum trahendum difficultate vis minima sustentans S, cuius hunc valorem deprehendimus §. 9. $S=\frac{amx-an\sqrt{(mm-xx)}}{mm}$ Haec enim formula differentiata, et reducta dat $\pm x=\frac{mm}{\sqrt{(mm+nn)}}$: vbi notandum est, adhibito signo *positiuo*, quaestionem de pondere S motam statim transire in quaestionem alteram de pondere T ex eodem latere positam, adeoque non minimum aliquod, sed maximum inueniri, vti patet ex comparatione operationum pro paragrapho superiori, et praesenti. Adhibito autem signo *negatiuo*, primo quidem planum AB mutari in planum LAK, posita scil. $CK=-x=\frac{mm}{\sqrt{(mm+nn)}}$, atque tum demum pondus S transire in alterum latus, et conuerti ibidem in pondus T2. id quod vel sine calculo ex ipsa quaestionis natura poterat erui. Dum enim $x=\frac{mn}{\sqrt{(mm+nn)}}$, euanescit S; et si x fiat adhuc minus, fiet S negatiuum, hoc est conuertetur S in R super plano AB, donec etiam $x=0$, quo casu R aequatur toti ponderis frictioni horizontali; quod si autem porro x fiat negatiuum, sumendum infra AC, tum pondus R reuera transit in pondus T §phi antecedentis, sed ex latere prioris opposito pendulum.

Fig. IV.

XVIII.

XVIII. Destinaui hunc computum cautelae practicae, vt scilicet in ponderibus ope plani inclinati eleuandis caueatur angulus, cuius sinus rectus $x = mm : \sqrt{(mm + nn)}$; si sub arbitrio Artificis Mechanici sint vires trahentes, nec euitato hoc angulo maiores aliunde generentur molestiae. Equidem tantus prodiit pro motu radente hic angulus, vt nihil facile ab illo metuendum sit, nisi forte iis in casibus, quibus onera funis ope super trochleam ducti sursum trahere potentia debet. Iis igitur commodum est nosse, quod in hypothesi Amontoniana, qua $m : n = 3 : 1$, angulus maximae difficultatis sit 71. gr. 35. min. in Parentiana, qua $m : n = 20 : 7$, angulus fiat 70. gr. 44. min. Sin fuerit $m : n = 4 : 1$, vti postea memorabimus, emergat angulus 86. gr. 1. min.

XIX. Fatendum etiam, in praxi frictionum incommoda plurimum detrahere vtilitati planorum inclinatorum, cum de motu agitur radente. Quodsi enim angulus eleuationis sit verbi gr. 10. grad. iam tum dimidium oneris trahere debet potentia eleuans in hypothesi Amontoniana, cum sine frictionibus nondum quinta pars requireretur. Cumque angulus est 50. grad. oneris eleuandi resistentia iam prope aequat pondus corporis absolutum, vt adeo, nisi aliae rationes accedant, praestet planum non adhibere, sed eleuare corpus perpendiculariter, quoties maiorem 50 gradibus angulum eleuationis circumstantiae deposcerent.

XX. Etsi autem in maiori angulo difficultas eleuationis ipsum pondus corporis absolutum superet: In casu tamen necessitatis solatii loco esse potest, quod hic

 ipse

ipſe exceſſus nunquam ingens euadat. Si enim in formula generali qua $T\left(=\frac{an\sqrt{(mm-xx)}+amx}{mm}\right)$ ſubſtituatur pro x valor eius $=mm:\sqrt{(mm+nn)}$ emerget $T=a\sqrt{(mm+nn)}:m$. Adeoque in ſententia Amontonii erit ſumma difficultas $=a\sqrt{10}:3$ paulo maior pondere abſoluto, habens ſe ad pondus abſolutum a, vti $(\sqrt{10}=)\,3,163$ ad $3,000$. Vnde exceſſus $=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{9}}{3}=\frac{3.163-3.000}{3}=0,054=\frac{1}{18}$ In Parentiana autem fit $T=\frac{a\sqrt{449}}{20}=\frac{a\times 21.189}{20}$. Vnde $T:a=21,189:20,000$ et exceſſus ipſius F ſuper $a=\frac{1.189}{20}=0.059=\frac{1}{18}$ prox.

XXI. Patet etiam, quo minor fuerit n reſpectu ipſius m, hoc eſt frictio ratione preſſionis, eo minorem eſſe hunc exceſſum. Et, ſi vel maxime frictionem velis magnam ſupponere, fingendo exempli gratia $n=m$, fore ſummam difficultatem ad pondus abſolutum $=\sqrt{2}:1=141:100$, vt adeo exceſſus non poſſit ad dimidium abſoluti ponderis excreſcere, niſi frictio ſit ipſa preſſione maior. Ceterum in hypotheſi $n=m$, notari poteſt, quod ſumma ad eleuandum difficultas §. 16. cadat in ipſum angulum quietis §. 10. vbi aequilibrium eſt inter frictionem corporis, et eius niſum deorſum. Accidit vero vtrumque, cum angulus eleuationis eſt ſemirectus.

XXII. Quicquid hactenus dixi, pertinet ad motum radentem, et ſupponit, potentias, quae ſurſum aut deorſum trahunt pondera planis impoſita, agere in directione plano parallela. Ad ceteros directionum caſus extendere dicta non lubet, quoniam id nemini non facile eſt. De motu voluente nihil certum licuit definire

finire hactenus, instrumenti accuratioris defectu; quemad modum et de radente per eandem caussam determinare omnia, vti destinaueram, nondum valeo.

XXIII. Vnum hoc licet de meis asserere tentaminibus: Cum super plano buxino, aut quercino, corpora examinarem varia; prismata eiusdem speciei lignea, quorum nec aspera basis erat, nec polita, sed sic satis glabra; eiusdemque generis orbes metallicos; cylindros item eburneos secundum longitudinem positos: eundem fere angulum quietis prodiisse, non obstante basium et ponderum differentia; nec mutatum, cum oleo corpora et plana inungerem, atque iterum probe abstergerem. Vnum me male habuit, quod omnes hi anguli inter 12. et 15. gradus caderent: adeoque frictio esset ad pressionem, vti 1 : 4, secus atque visum est Antecessoribus nostris.

XXIV. Nolim vero praecipitare sententiam, donec omne examen absoluero. Illi sequentem destinaui tabulam, quam ad hypotheses alias accommodare facillimum est. Hic Amontonium secutus facio $m:n=3:1$, estque R §. 9. aequalis differentiae, quae prodit, cum *Fig. III.* sinus rectus aufertur a cosinu ducto in rationem $n:m$, S §. 9. aequalis differentiae, quae prodit, vbi cosinus ductus in rationem $n:m$, subducitur a sinu recto anguli: et T aequalis summae sinus recti, et cosinus ducti in rationem $n:m$, vt adeo facile sit, aut continuare tabulam, aut ad alias aptare frictionum hypotheses.

Tabula pro hypothesi frictionis Amontoniana, posito pondere absoluto 10000 partium.

Ang. gr.	Elevat. min.	Potentia R §. 9.	Potentia S §. 9.	Potentia T. §. 15.
0	0	0.3333		0.3333
5		0.2449		0.4191
10		0.1546		0.5018
15		0.0631		0.5807
18	27	0	0	0.6325
20			0.0287	0.6551
25			0.1217	0.7246
30			0.2113	0.7886
35			0.3005	0.8465
40			0.3874	0.8980
45			0.4714	0.9427
46	45		0.4999	0.9568
50			0.5517	0.9802
55			0.6279	1.0102
60			0.6993	1.0326
65			0.7654	1.0471
70			0.8256	1.0535
71	35		0.8435	1.0539
75			0.8796	1.0519
80			0.9269	1.0426
85			0.9771	1.0251
90			1.0000	1.0000

Ob-

Obſeruatio Anatomica
De Receptaculis Caſtorei.

1 Quum in diſſectione Caſtoris foeminae, folliculi Caſtoreum continentes viſui oblati eſſent, optabam, vt non ſolum, quae a Viris doctiſſ. circa ſtructuram patefacta ſunt, ſed quoque (ſi fieri poſſet) eorum, quae adhuc deſiderantur notitiam, qua naturae in iſtius ſucci nobiliſſimi confectione conſilium perſpicuum fieret, acquirerem. Quamquam omnia, quae ad hanc rem ſpectant, (quod ſane prima vice et vnica diſſectione difficillimum eſt) haud affecutus ſim, obſeruationis tamen, quam hic affero, eam vim vſumque fore puto, vt ſenſuum imbecillitati opem lucemque ferre valeat.

2. Geminae capſulae verum caſtoreum includentes, ſeparata pelle faſciaque muſculari eas inueſtiente, (iuxta duas alias ſubiectas materiam ſeu ſuccum diuerſum continentes) in conſpectum veniunt. Earum longitudo 3. poll. latitudo 1½ poll. aequabant. Ad tactum durae et ponderoſae, in ſuperficie plicis oblongis, quarum ſex numeraui, ornatae. Coloris albido-flaueſcentis. Primum inuolucrum muſculare viſum eſt. 2dum Nerueum argenti inſtar reſplendens, villoſum, nec non ſquamulis tenuiſſimis conſtans, quarum ſingulae papillam ſubiectam, corpori reticulato fuſco nigricanti inſidentem, continent. 3um Vaſculoſum, ac inſtar piae menyngis, plicis ſeſe inſinuans. Duo oſtia hiſce capſulis reſpondentia, (praeter 5. alia), intra communem cloacam, pollicem lata et rugoſa, conſpicua ſunt.

3. Poſt haec, contenta capſularum inſpicienti, ecce cavita-

vitatem, resinoso succo flauescente, admodum fragrante, cui nomen *Castorei* est, haud turgidam, sed, prout cauitas stomachi, solummodo inunctam ac profunde imbutam; gyros quoque seu plicas, quae eodem succo infectae erant. Ingenti vero (intuitu huius succi), admiratione me perculsum fuisse fateor, in eo inuiscata corticum ramenta aliaque inueniens, qualia in ventriculo intestinisque paulo ante collecta obseruaueram. Si, prout initio suspicabar, sub finem vitae, impetu morbi, aut casu quocunque, eo compulsa fuissent, aliae impuritates, vel signa praeternaturalia simul obseruata fuissent: Aliique (ante me) iam pridem inuenissent, eiusque mentionem fecissent.

4. Antequam ad coniecturam transeam, nonnulla de Castore prius memoranda sunt, quae eam haud improbabilem esse, testari videntur. Primo, qui ventriculum dissecuerunt, nihil intus inuenerunt praeter segmenta ex corticibus et radicibus arborum. 2. Ventriculi superficies instar panni serici tonsi visa est, succus vero *Castorei* odore praeditus. 3. Castorem, aiunt, ad acuendum et excitandum appetitum languentem, folliculo pede expresso, castoreum ore lambere et deglutire; Indosque laqueos, quibus vtuntur ad castores capiendos eo oblinire.

5. Quamobrem, quia Castoris alimentum exsuccum, et concoctu difficillimum est, 2. quia structura ventriculi et receptaculorum Castorei, item succorum odores conueniunt; 3. quia praefatus succus ventriculo horum animalium adeo amicus est, vt eum saepe deglutiant; Quaeri potest, num ex noua, quam attuli, obseruatione opinari liceat, haecce receptacula forte data esse, vt paruorum ventriculorum instar, quaedam ramenta alimentorum, in intestinis residua, Castorei ope, dissoluant ac incidant, posteaque, immediate sanguineis vasis super ea ambulantibus infundant.

* * *

Monstra duo, Casani et Petropoli in lucem edita, hoc anno examini subiecta fuere, quorum descriptiones in seqq. annum reseruare necesse fuit.

CLASSIS
TERTIA
CONTINENS
HISTORICA
ET
CRITICA

DE CIMMERIIS

Auctore

T. S. Bayero

Regiomontano.

DIxi Cimmerios ante Scytharum irruptionem inter Borysthenem et Tanaim coluisse, pulsos deinde, eas regiones reliquisse victoribus. (1) Quae gens Cimmerii, vnde orta, quas terras petierit postea, exquirendum nunc duco. Nihil est magis vero consentaneum, quam quod Bochartus, *M. Febr. 1727.*

Ggg 2 ma-

(1) In Actis superioris anni p. 407. linea 8. scriptum fuisse CCCXLVII. et linea 19. fuisse scriptum 8. *Gradus cum pedibus* o. per se quisque facile animaduertet: monendum tamen duxi.

magno vir ingenio, et multiplici doctrina, nos docuit e Geneſi, Cimmerios eſſe diuini ſcriptoris Gomeritas, a Gomero Iapeti filio, profectos ex Armenia ſeptemtrionem verſus, donec campos illos ad vtramque Tanais ripam peruagati a longo errore conquieuerunt. Eorum cognati fuere Iones a Iauane, et Thraces a Tira, qui ante eos profecti, vrgentibus Gomeritis a tergo, Graeciam et regiones ad Iſtrum occuparunt. Id accidit ante Ioſephi Patriarchae tempora. Nam, ſi Geneſin recte inſpicias, tum illa tibi non vnius Moſis commentarios, ſed ante eum, patriarcharum omnium diaria continere videbitur, quae Ioſephus denique in vnum corpus collegit, Moſes autem in pentateuchum recepit. Non id nunc ago, vt hanc meam opinionem de ſanctiſſimo libro operoſe explicem aut ſtabiliam, dicam tantummodo quod ſentio, a Ioſepho patriarcha, non modo extrema illa de vita ſua, verum etiam totum caput vndecimum de coloniis priſcis et quaſi noui orbis geographia inſerta videri, vt tum res erat notiſſima in Aegypto et populo Iſraelitico. Iisdem in locis Homerus ſua aetate Cimmerios degere acceperat. Ita enim cecinit:(2)

Ενθα δὲ Κιμμερίων ἀνδρῶν δῆμος τε πόλις τε
Ηέρι ϗ νεφέλῃ κεκαλυμμένοι, ὐδὲ ποτ' ἀυτὒς
Ηέλιος φαέθων ἐπιδέρκεται ἀκτίνεσσι,
Αλλ' ἐπὶ νὺξ ὀλοὴ τέταται δειλοῖσι βροτοῖσι.

Iſthic Cimmeriorum gens eſt et vrbs Cimmerium
Nebula nubeque obducta : neque enim eos

Sol

(2) Odyſſ. λ. v. 15.

Sol omnia collustrans, radiis suis respicit,
Vtpote cum miserabilis miserabilibus populis incubat nox.

Orta est fabula ex vocabuli interpretatione. E Gomeritis Ionici populi Κιμμερίους fecere, inde posteritas credidit, Χειμερίους dictos fuisse ab *hyeme et tempestatibus*. Et sic quoque in quibusdam Homeri exemplaribus scriptum fuisse minora scholia testantur, pro quo Κερβερίους reposuit Crates Malleota. Ad vim illius vocis accessit aliqua eorum narratio, qui in Ponto nauigauerant. Nam quod Thomas Hyde in itineribus mundi animaduertit, (3) quodque ab oculatis accepi testibus, totum Pontum regionesque littorum illorum densa et tenebrosa nebula infestat. Idcirco Pontus Turcis قره دکز *Karab Dekfi* et hodie Graecis Μαυροθάλασσα, vt nobis *Mare nigrum* vocatur. Id e vetustis clarissime confirmat Hippocrates in libro de *aere, aquis et locis*: (*) aerem enim in Scythia plerumque totos dies nubilum esse scribit, sed in immensum quoque exaggerat, tamquam vix paucis diebus aestas fit, ceterum hiems in his regionibus desaeuiat, et quae sunt ex eo genere alia apud Hippocratem. Ob rem tam paruam, tot de Cimmeriis tenebris ἐπιφυλλίδες καὶ στωμύλματα e fertili poetarum ingenio propullularunt. Scriptores argonautici his fabulis scenam instruxerunt. Iidem Cimmerios super Ponto ad Tanaim protendunt, vt tum fuere siti, cum heroes

 illi

(3) p. 57. (*) c. 45.

illi Colchida peterent: Dionysius Periegetes autem φλυαρίζει, cum iisdem in tractibus Cimmerios sua aetate reponit, deceptus fortassis a nomine Cimmerii vrbis, quae a veteribus incolis appellationem ad id tempus retinuit. Maeotin, inquit, *Scythae vocant matrem Ponti.*

Ἐκ τῆς γὰρ Πόντοιο τὸ μυρίον ἕλκεται ὕδωρ
Ὀρθὸν Κιμμερίου διὰ Βοσπόρου. ὧ πάρα πολλοὶ
Κιμμέριοι ναίουσιν, ὑπὸ ψυχρῷ ποδὶ Ταύρου.

Nam ex Ponto multam aquam trahit per medium Bosporum Cimmerium, iuxta quem sub algidi radicibus Tauri Cimmerii frequentes colunt. Ad quem locum Eustathius plane sui similis est, cum ait Κιμμέριοι, τὸ Σκυθικὸν ἔθνος. Cum postea has Cimmerias tenebras ad Pontum, ita vt Homerus in maius extulerat fingendi licentia, non sentirent Graeci, pro sua in poetam religione, ne fefellisse videretur, altius sub septemtrione quaerebant Cimmerios et tenebras illas horribiles, vt Onomacritus in Argonauticis, parum sibi constans, (**) de Cimmeriis ait:

οἵ ῥά τε μοῦνοι
Αἴγλης ἄμμοροί εἰσι πυριβρόμου ἠελίοιο
Ἐν μὲν γὰρ Ῥίπαιον ὄρος καὶ Κάλπιος αὐχὴν
Ἀντολίας εἴργουσι,

et quae apud eum plura sunt in eam sententiam. Quare Pytheas Massaliota, vt est apud Cosmam Indicopleusten in topographia christiana, gloriatus est, barbaros ostendisse sibi παραγενομένῳ ἐν τοῖς βορειοτάτοις τόποις,

(**) v. 1118.

τὴν

τὴν ἡλίου κοίτην, ὡς ἐκεῖ τῶν νυκτῶν ἀεὶ γενομένων παρ' αὐτοῖς. Quamquam, si ea, quae Cleomedes in meteorologicis ex Pythea habet, inspicias, non ille perpetuas sine sole noctes in Thule et septemtrione prodidit, sed hanc vicissitudinem diei noctisque, quae pro anni tempestatibus obtingere extremis sub polo regionibus solet. Alii Cimmerios ad tartarum et Plutonios campos relegarunt, simul cum Acheronte fluuio, qui haud procul ab Heraclea in Pontum incidit, alio nomine Σωοναύτης. Sed quoniam Ἀχερουσίας quoque prope Cumas ad mare Tyrrhenum habebant Itali et Auernum lacum inferis deuotum, idcirco, vt ait Strabo, (4) καὶ τοῦτο χωρίον Πλουτώνιόν τι ὑπελάμβανον καὶ τοὺς Κιμμερίους ἐνταῦθα λέγεσθαι *etiam hunc agrum tamquam Plutonium et populos circum ea loca Cimmerios commenti sunt*. Haec sunt illi σκοτεινῷ Lycophroni (5) Κιμμερίων ἔπαυλα. Sic Cimmerii sunt veluti aliqua Luciani Hecate, πολύμορφόν τι θέαμα καὶ ἄλλοτε ἀλλοῖον τι φανταζόμενον.

Itaque nos Herodoto tantum auscultabimus. Is tradit, Cimmerios olim intra Borysthenem et Tanaitidas regiones degisse pulsosque a Scythis concessisse in Asiam. (6) Isthic excursionem fecisse, et Ionicas vrbes infestasse: nec cepisse eas, aut euertisse, sed in agris earum praedas egisse. (7) Tum Sardes aggressi, Ardye regnante, vrbem praeter arcem expugnarunt. (8) Tandem Cherso-

(4) f. 266. (5) v. 695. (6) l. IV. c. 12. (7) l. 1. c p. 6. (8) l. I. c. 15.

ſoneſum Sinopicam condidere, vbi quietam ſedem tenerent. (9) Halyattes eos tota Aſia expulit. (10) Et Scythae quidem eos a Tanai refugientes perſecuti ſunt, ſed cum Cimmerii porta Caucaſea fugiſſent in Aſiam, Scythae alio itinere per Caſpias portas ſe effuderunt in Mediam. (1) Cum autem Cimmerii tam late coluerunt, vt poſtea Scythae, non eſt veroſimile, omnem gentem metu Scytharum ſe in Aſiam praecipitaſſe. Velim autem animaduertas, quod, cum fama eſſet, Scythas a Volga aduentare, Cimmerii concilium gentis ad Tiram fluvium habuerint. Eo in conuentu, aliis fugae auctoribus, reges manendum bellumque pro aris et focis conferendum cenſuerunt. Ex ea diſſenſione tumultus ortus captisque armis, (nam reges et regiae domus, pares numero reliquae turbae erant) praelium commiſſum, in quo reges omnes caeſi ſepultique ſunt a popularibus eodem omnes tumulo ad Tyram fluuium. Is tumulus ad Herodoti vsque aetatem exſtabat et celebrabatur. (2) Scythae enim, cum vacuam regionem occupaſſent, religioni ſibi duxerunt, fortium virorum monumenta violare. Manſerunt quoque Cimmerii muri, incertum tamen quibus in tractibus, et Cimmerium vrbs cum regione Cimmeria et Boſporus Cimmerius priſcum nomen retinuerunt. (3) Tiras fluuius, ad quem populi concilium celebratum eſt, longius diſtat a Tanai, vt plane ſit a fide alienum, Cimmerios ab eo fluuio in medium incen-

(9) l. IV. c. 12. (10) l. I. c. 16. (1) l. IV. c. 12. (2) l. IV. c. 11. (3) ib. c. 12.

cendium ſe praecipitaſſe et obuiam occurriſſe perduellibus, dum Tanain et infeſtum Scythicis, quae perhorreſcebant, armis orientem petunt, qui occidentem et auerſas a diſcrimine tanto prouincias ſibi vi pateſacere poterant. Itaque mihi Herodoti verba omnia perpendenti vel maxime probabile videtur, Cimmerios, qui ad Tiram confluxerant, occidentem et ſeptemtrionem petiiſſe, alios e locis Tanai vicinioribus, ſalutem quaeſiuiſſe in Caucaſeis ſaltibus et Aſia.

Ita iam nonnulli ante nos ſenſere apud Plutarchum in Mario. (4) Cimbrine igitur a Cimmeriis ſunt orti? Nempe, ſi audimus turbam magnam eruditorum, res manifeſta eſt. Ego neque excedere quaſi finibus meis atque Cimmerios perſequi cupio, neque admodum curae cordique habeo, quibus ab ſtirpibus Cimbri ſint prognati. Tamen, quoniam haec quaeſtio in ſeptemtrione maxime agitata, infinitos paene errores excluſit, quibus Scythicarum gentium regionumque harum, quarum hiſtoriam tractandam ſuſcepi, veteres res propemodum ſunt oppreſſae, ipſa me neceſſitas manu ducit in hanc diſputationem, a qua abſtinere aequiore iure maluiſſem. Hugo Grotius, qui ad illarum opinionum, quae poſtea a Stirnhielmo, Verelio, Rudbequio ſunt eductae, ſementim, ſua quaedam ſemina contulit, non potuit a ſe impetrare, vt cum Cimmeriis confunderet Cimbros. Quae autem ratio induxit, non hos dicam inſigni doctrina viros, ſed veteres quosdam omni genere laudis illis longe inferiores,

(4) f. 411.

vt Cimbros repeterent a Cimmeriis? Nulla profecto alia, quam vocabulorum ad sonum congruentia. *Hic vero Grotius, vt erat admirabili iudicio, praeuidit animo, quantum perturbationis in omnem veterem historiam inuehi possit, si incautius paullo nos in hoc negotio geramus, et senserat hoc ex maiorum in illa via aberrationibus. Sapienter ille in prolegomenis ad historiam Gothicam monuit, posse populos toto genere et caelo diuisos idem nomen gerere. Ne Vandalos quidem, qui ab omni aeuo a scriptoribus memorantur, ex eodem sanguine illius populi, qui in Africa rerum potitus est, repeti patitur. Sic, quis Nomadas, (quasi Germanus Vandalos dicat) illico putet Scythas esse, cum in Africa quoque populus id nominis a moribus suis gessit? Borusci a Ptolemaeo non longe a Volga seu Russia veteri collocantur, a quibus qui Borussos seu Prussos antiquos ducunt, nae illi vehementer falluntur. Et vt in hoc exemplo ostendam, quam facile sit in eo genere falli, cum in nominis conuenientia cardo et vis omnis coniecturae illius vertitur, fugit tamen bonos viros, Prutenos primum a Vilelmo Gnapheo, et Georgio Sabino et Lotichio et ceteris illius aetatis poetis nomen Borussorum accepisse, accommodatius, vt illi quidem iudicabant, ori Romano et carmini. Omnis autem antiquitas medii aeui *Prutenos*, *Pruzos*, *Prucios*, *Brutios* aut in eum modum vocauit. Testimonia producere possem, quae multas paginas impleant, si eo ingenio essem, vt in his me ostentarem. Qui mihi e contrario ante Gnapheum

aut

aut Sabinum et ante hos inquam ducentos annos aliquem producat auctorem, cui Borussi dicantur, illum ego vero lubens remunerabor: nec verius est quidquam, quam quod Matthaeus Praetorius vidit, vnde Pruteni se vocauerint populari lingua, quae sententia antiquis historiarum monumentis confirmatur. Sed hoc non ago: illud tantum in exemplo docere volui, quam infirmum omne illud de nominum congruentia argumentum sit. At cum Dido aliquis Aquitanicarum rerum scriptor (5) Danos a Danais, cum alii a Dacis et Dahis deriuant, cum Eluardus Suecos a Sueuis, cum alii Saxones a Sacis, hoc est, si diis placet, a Scythis deriuant, ea mehercle vigilantium somnia sunt, ne quid dicam grauius. Talibus delectati sunt scriptores septemtrionales et Auentinus et ille non indoctus, vt tunc erat, fabularum parens Annius Viterbiensis. Satis erat aliqua nominum allusio, vt nouas conderent historias, vtque probarent plebi eruditorum. Quid autem tantum est in Cimmeriorum et Cimbrorum nomine, vt eorum nos stirpem populorum miscere oporteat? Cimmerios a Gomeritis dictos fuisse, admodum probabile est, aut plane paratus sum deierare, vnde dicti sint, non liquere. At Romani Plutarcho et S. Pompeio Festo auctoribus, Cimbrorum nomen Celticum esse et *latronem* significare compererunt. Id vocabuli adhuc habent linguae Celticae. Islandicam dico, Noruegicam, Suedicam, Danicam, Germanicam. In monosyllabis Islandicis Ionae Rugmanni *kamp* est *lucta*, *pa-*

(5) apud Saxonem Grammaticum f. 5.

laestra, plane vt apud nos Germanos. Snorro Sturlaeus parte secunda Eddae heroas dicit, vel *Kuppar*, vel *Kiempur* vel *Garpar* fuisse, quod Resenius Danice protulit *Herrers*, *Kiempers*, *Fitteris*. In Celticis Leibnitii: *Campau*, *ludi*, *quales Olympiaci*.

Iuuat me nunc, quoniam in hanc concertationem incidi, ipsam originem τῆς πολυτρόπου καὶ πολυειδοῦς φαντασίας paullo altius repetere, quoniam antiqua satis est. Cimbri, vt habet in Mario Plutarchus, cum Italiam inuaderent, obscurum Romanis nomen erant, praeterquam quod proceritate corporum et caesiis oculis Germanicam referrent stirpem. Serius est cognitum, Teutonico vocabulo latrones, seu potius bellatores dici atque a septemtrionali oceano profectos, traiecto Rheno, Belgicae se infudisse annisque aliquot incubuisse Galliae ceruicibus. Ex quo factum est, vt Sallustius *Gallos* diceret, aduersus quos a L. Caepione et M. Manlio Coss male pugnatum fuit et Cicero de prouinciis consularibus *bellum Gallicum*, quod a C. Mario confectum est, Cimbris Teutonisque caesis. Ab Rheno mouerunt in Noricum et ad fines Illyricos profecti, in Carnis ad Noreiam vrbem Carbonem cum exercitu fuderunt atque per Heluetios Allobrogasque petiere Galliam, donec Hispaniam attingerent, vnde per Celtiberos repulsi coniunctique cum Teutonis, tanto maiori clade adfecerunt Galliam omnem praeter Belgicam et M. Iunium Silanum Cos oppresserunt. Hinc ille turbo aliquanto post interuallo Italiam inuasit. A Mario fusi fugatique Cimbri, traiecto Rheno, iuxta Belgas consederunt. Antiqua autem

Cim-

Cimbrorum ſedes ſub ſeptemtrione auſpiciis Caeſaris Auguſti et Tiberii Caeſaris eſt cognita et paene armis petita. Res hae tam planiſſimae nactae ſunt inanes hariolatores, Graecos homines, qui tumultum, quam Cimbri, conciuere maiorem. Alii apud Plutarchum Cimmerios ferunt a Scythis pulſos partem in Aſiam, Lygdamo quodam duce, (quem Herodotus ignorat, Strabo et Plutarchus (6) nominant) effuſos, partem aliam et maximam bellicoſiſſimamque occidentem verſus fugiſſe. Recte illud adhuc, quantum iudico, niſi quod denſas et profundas ſyluas vltra Hercyniam incolentibus, contractiores dies productioresque noctes, Homero de Cimmeriis tenebris fabulam fabricandi occaſionem praebuiſſe adiiciunt. Ex eo enim conficitur, non animaduertiſſe eos, Homeri Cimmerios nondum tum a Scythis fuſos fugatosque, ad Ponti littora, non autem ſub hoc ſeptemtrione egiſſe. Alii apud Plutarchum, regionibus omnibus ab oceano occidentali ſeptemtrionalique ad Maeotin vsque in arctum contractis, Gallos Scythas in omni illo tractu poſuere, quorum pars eſſent Cimmerii ſeu Cimbri. Ταῦτα μὲν, inquit Chaeronenſis, homo non obeſae naris, εἰκασμῷ μᾶλλον, ἢ κατὰ βέβαιον ἱστορίαν λέγεται. Adeo ille haec ſuſpecta habet. Sed quantum in his Poſidonius ad hariolandum ſibi permiſit! Cimbros ait homines fuiſſe praedones et in primis vagos (7) (id enim erat neceſſe, vt impetraret, quae vellet, Poſidonius

(6) Strabo f. 57. Plutarchus in Mario f. 411. (7) Strabo f. 333.

nius) armisque ad Maeotin progressos nomen dedisse Cimmerio Bosporo, quasi Cimbrico: Boios Hercyniam syluam incolentes, cum Cimbri ad se quoque in armis venirent a Maeotide, si diis placet, regressi, manus conseruisse Cimbrosque illata clade ad Tauriscos Gallos et Heluetios compulisse, vnde in Italiam impressionem fecerint. Hanc non improbabilem coniecturam vocat Strabo, cum in ea absurda sunt omnia, gentes resque et secula inter se confusa. Cimbros dicit ab septemtrionali oceano ad Maeotin paludem profectos nomen dedisse Cimmerio Bosporo. Cimbri ante Cn. Papirium Carbonem Cos et A. V. C. ɔcxxxx. profecti sunt ab Rheno: Cimmerium autem vrbs iam annis centum et amplius ante vrbem conditam Homero nota fuit. At de illa superioris aeui migratione Cimbrica, qua Cimmerii sunt ad Pontum et Bosporum tamquam ver sacrum in coloniam missi, nisi fallor, loqueris ὦ δαιμόνιε;

Quo teneam vultus mutantem Protea nodo?

Quem vero auctorem habes Posidoni? Nempe aegram sine somno noctem. Scythas pepulere Cimbri, vt visum est Posidonio. Male sit illi Halicarnassensi, qui Cimmerios a Scythis exterminatos tradidit. Nimirum seduxit Posidonium grammaticus. Exstat indicium eius rei in minoribus Homeri scholiis, vbi aliquis veterum (8) ὑπὸ Κιμμερίων Σκύθας ἐξελαθῆναι *a Cimmeriis Scythas esse pulsos* asserit et tamen Herodotum citat testem.

En

(8) ad Od. Λ. v. 15.

En cor Zenodoti! en iecur Cratetis!
Romani nouerant Cimbros a ſeptemtrione profectos Rhenum traieciſſe patrem amnium: Poſidonius iocum putat Romanam fidem et ab oriente Cimmerios ducit aduerſus Boios ad Hercyniam ſyluam, inde male mulctatos in Italiam. *Vndique totis vsque adeo turbatur agris.* Dicam ſicuti ſentio de Poſidonio, philoſopho quidem non indocto, ſed in his noſtris infante. Quoniam philoſophi haud longe abſunt a deum conditione, vt mundos, quoties volunt, condant nouos, eo credidit Poſidonius idem ſibi licere in rerum geſtarum hiſtoria. Nec immerito vero, cum Cimbros cognouiſſet aliquando profectos a ſeptemtrione, Cimmerios autem, vel Homero teſte et Herodoto, incoluiſſe Ponti littora. Hoc ſatis erat ad exordiendam longam fabulam. Nihil tamen hoc eſt adhuc prae eo, quod dicam. Cimmerii in iisdem regionibus coluere, in quibus poſtea Scythae, vt quidem Herodotus auctor eſt: Cimbri autem, vt Strabo, Tacitus, Plinius, Ptolemaeus, praetendebantur Suetiae: ergo Suetia eſt illa vetus Scythia. Ridiculum eſt, quod dico, tamen nonnulli in illum modum aciem ingenii ſubtiliſſimi exeruerunt, cum critices huius, quae ad hiſtoriarum veritatem exquirendam, neceſſaria eſt, plane ignari eſſent. Nec caruere vitio hoc Graeci quidam vetuſtiores, vt exemplo eſſe poteſt ὁ θαυμάσιος Poſidonius. Audiamus tantummodo Geographum Rauennatem: (9) *inter oceanum, procul, magna inſula, antiqua*

Scy-

(9) p. 26. ed. Porcheronis,

Scythia reperitur, quam insulam plerique philosophi historiographi conlaudant, quam et Iordanes (Iornandem putat,) *sapientissimus cosmographus Scanzam appellat, ex qua insula pariterque gentes occidentales egressae sunt: nam Gothos et Danos, immo simul Gepidas ex ea antiquitus exisse legimus.* Qui, malum, Gothi e Scandinauia? Nempe Ablauius aliquis philosophus cognouerat, proxime Scythas atque paene inter eos quoque, coluisse Getas, e Scandinauia autem iam ante eum alii Scythiam fecerant, ergo tempus erat, vt inde Gothos faustis auibus immitteret Ponticis regionibus atque inde florentibus prouinciis. Adeo haec pars historiae vario et ancipiti tumultu est plenior,

Quam magno vento plenum est vndarum mare.

Ita Suetia facta est *officina gentium, aut certe velut vagina nationum*, vt Iornandis verbis vtamur. (10) Et Iornandes quidem hanc Getarum a Scandinauis et Cimbris originem, *Getarum carminibus priscis paene historico ritu in commune fuisse recoli solitam*, scribit, et ego pro mea simplicitate his carminibus haud parum fidei detulerim, si exstarent: nunc mihi Epicharmus cantilenam illam suam insusurrat, νᾶφε καὶ μέμνασο ἀπιστεῖν. Cum enim Iornandes ab his carminibus non seiunxit sua illa e Graecis et Latinis, non satis constat, quantum ex obscuris Getarum carminibus acceperit, periculum est autem, ne pro vetustis populi illius monumentis, Iornandis figmenta amplectamur, *nubem pro Iunone.* Multa ille a patre et auo ceterisque gentis suae

(10) f. 193. 194. Muratorii

ſuae hominibus ante ſe geſta accepit, in quibus minime eſt reprehendendus. At vbi explere veterem memoriam e vetuſtis libris, quos *triduana lectione* euoluerat *et nonnulla ex hiſtoriis Graecis atque Latinis conuenientia* addere conatus eſt, in his illi praepropera haec male ceſſerunt, vt ei fides ſeu nulla, ſeu admodum circumſpecte adhibenda ſit. Quod autem caput rei eſt, vſum eum eſſe Strabone reperio, e quo Poſidonii illa inſomnia hauſit. Igitur e Poſidonii coniectura tenui ſcaturigine manauit opinio, quae latiori alueo a Iornandis credulitate profluxit, donec a Stirnhielmo, Verelio, Rudbequio aggeribus perfoſſis omnibus, orbem prope vniuerſum inundauit. Quot enim gentes eorum opinione ex Suetia non ſunt egreſſae? Viri illi fuerunt ſummo ingenio et exquiſita admirabilique doctrina, ſed in quibus aut patriae amor incredibilis veritatem obfuſcauit, aut qui vix quidquam de his ex animi ſententia dixerunt. De Iornandis erroribus alio tempore accuratius diſputabimus. Virum bonum dico, ne quis me reprehendat, ſed mehercle, in vetuſtis temporibus non idoneum auctorem. Paruo nauigio euectum fluctus obruerunt in littore.

NVMI DECEM ERYTHRAEORVM IN IONIA *ILLVSTRATI* T. S. B.

M. Maio 1727.

QVamquam Erythrae aliae siue in Locride, vt Stephano Byzantio, siue in Aetoliae Ἐπικτήτȣ finibus, vt Liuio visum est, aliae in Cypro (Paphon puta ipsam, vetustiori nomine Erythras) aliae in Libya Cyrenaica sitae fuere, tamen duae tantum vrbes exstant et celebrantur, quibus eruditi inscriptos Erythraeorum nomine numos acceptos ferunt. Plerosque Ionico oppido attribuunt, vnum Boeotis vindicauit Ioannes Harduinus, quem honoris caussa nomino. Ita enim ille in numis populorum vrbiumque illustratis fatus est: " Erythrae in Boeotia. Numus ex "argento perpulcher, formae mediocris, apud Mar"chionem de Montauban, parte antica vultum exhibens "Alexandri, tecto capite, pelle leonina, in altera pa"gina

" ΕΡΥ

" *cum auicula, claua Herculis*,

" ΔΙΟΠΕΙΘΗΣ

" *pharetbra cum theca.*

"Erythras in Bocotia Plinius commemorat. *Fuere* "*Boeotiae Thebae* (inquit ille ibidem) *duorum numinum*

"Li-

Liberi atque Herculis, vt volunt, patria. Claua Her-„ culis, pharetra symbolum Liberi est. Thebis ab A-„ lexandro expugnatis, vt Plinius refert, videtur mone-„ ta ab eodem fuisse translata Erythras. Erythrensis ma-„ gistratus est ΔΙΟΠΕΙΘΗΣ. Auiculam perdicem„ esse, ex Plinio intelligimus, quo teste, perdices non„ transuolant Boeotiae fines in Atticam.„

Nobis omnia aliter sunt visa in nouem Erythraeorum numis, quos Ioannes Christianus Buxbaumius, non *Tab. 28. Fig. II. vsque X.* modo a botanices scientia et excellenti laude, sed etiam ob veterum studium numorum mutuamque amicitiam mihi iucundissimus, ex peregrinatione Thracica et Asiatica secum tulit Coemerat Constantinopoli a Iudaeo quodam numos Erythraeorum argenteos, numero ad viginti tres, pretio non maiori, quam quo argentum non signatum venit. Ex his selegit nouem numos magistratuum nominibus discrepantes, ceteros diuisit inter amicos. Summo veteris Graeciae ingenio et artificio elaboratos nulla aetatis iniuria foedauit, vt praesertim in tertio, quarto, quinto, sexto et nono numo perspicuis lineamentis auis quae sit, sine suspicandi molestia adpareat: nam in ceteris paullo altiores habet pedes et erectiorem ceruicem et breuius caput, quam vt fallere haec species non possit eos, qui vnum tantum viderint numum, non inter se contenderint omnes nouem. Noctua igitur est, non alia auis, nedum perdix, vt ipsum fundamentum, super quo Harduinus inaedificauit, subrutum et euersum esse scias. Nihil enim aliud induxit ingeniosissimum virum, vt crederet numum suum Boeoticae fuisse officinae, quam quod eum numum, in quo perdix esset, ita demum e

Tab. 28. Fig. XIII. Plinio sibi visus est illustrare posse. Apposui decimum numum e Carolo Patino, (1) qui immane quantum a vero deflexit. Nam ex auicula in numo obtrito non perspicue obseruata, aliquid seu clauo, seu pedo, seu palmae, seu nescio cui simile rei fecit. Ceterum Patinus quoque numum suum ad Alexandrum M. refert, illud autem ΕΡΥ negotium inexplicabile putauit.

Iam, quae mea opinio est, numi omnes decem Erythris in Ionia signati, noctuam idcirco gerunt, quod Mineruae summa religio eius ciues vrbis teneret: quae vt eorum animos inuaserit atque a quibus populis sit ducta, haud absurde ab ipsa stirpe repetemus. Agrum illum vniuersum primi Cares tenuere, siue illi ex insulis profecti, quae apud Cretenses fama obtinuit, siue aborigines fuerint Lydorum Mysorumque cognati. (2) Cum inter Europae filios contentione orta, Minos per factionem superior Sarpedonem fratrem et partium socios expulisset, hi quoque isthaec littora petiere, Lyciique sunt dicti. (3) Confecto bello Troiano Calchas Pamphylios in eundem agrum deduxit. At Erythrus Rhadamanthi (is quoque Minois frater fuit) filius, tempore non multo post e Creta profectus, inter Caras, Lycios, Pamphylios partem necessitudine, partem societate Cretensibus deuinctos consedit, vrbique ab se nomen imposuit Erythris. Cleopus aut potius Cnopus Codri filius, collecta ex Ionicis vrbibus manu, inter veteres Erythraeos sedem cepit. Ita videlicet Erythraeorum testimonio Pausanias. (4)

Ery-

(1) In nummis Imperatorum f. 9. (2) Herodotus l. 1. c. 171. sequ. (3) ib. c. 173. (4) f. 528. 529.

Erythrus vrbem a ſe inſtitutam ſub Mineruae tutela eſſe voluit, eaque cauſſa ΑΘΗΝΑΣ ΠΟΛΙΑΔΟΣ delubrum et ſimulacrum deae, eximia magnitudine, ſedentis in ſolio et in vtraque manu colum, capite caeli orbem geſtantis, dedicauit. Non hoc quisquam de Erythro planiſſime ita prodit, ſed probabili quadam inueſtigatione verum tenemus. Nam illud ſimulacrum Mineruae, Erythris ſumma religione cultum, Pauſania iudice, (5) Endoei opus fuit: Endoeus autem Athenienſis Daedalum magiſtrum ob caedem Cali exulem ſecutus eſt in Cretam. (6) In hoc temporis quaſi veſtigio quod veroſimillimum eſt deprehenditur. Nam Endoeus aequalis eſt Troianis temporibus, vt Daedalus Minoi et Herculi. Itaque haud difficulter conſequitur, Endoei hoc opus a Cretenſibus in Aſiam fuiſſe deportatum et ab Erythro dedicatum in noua vrbe. Sic ab ipſis Erythrarum exordiis Minerua *arcis praeſes* fuit, vt Liuiano verbo vtar, qui πολιάδα ϗ πολιοῦχον Mineruam ſic interpretatur. (7) Cum autem Minerua omnibus in vrbibus coleretur, non tamen Polias aut Poliuchos fuit, niſi ſi qua in vrbe aut arce tutelare numen erat, praecipua et ante deos deasue alios religione et deuotione ciuium conſecratum. Ita πολιάοχος Παλλὰς apud Camarinos, quam Pindarus canit, (8) ciues eleganti in numo ſignarunt, (9) ita Minerua Polias Corinthi, quae vbi de tutela

 vrbis

(5) f. 534. (6) Pauſanias f. 62. (7) l. XXXI. 30. et alibi, adi Phornutum de natura deorum p. 187. ed. Gal. (8) Olymp. E. v. 23. (9) apud L. Begerum Theſ. Brandeburg. T. I. f. 378.

vrbis cum Neptuno certauerat, ex Iouis iudicio hunc honorem cum eo diuisit, vt ipsa Polias, Neptunus Rex diceretur, quare, inquit Pausanias, (10) vetustus eius populi numus ἐπίσημα habet tridentem et Mineruae caput. Apud Tegeatas Poliadi sacra faciebant ἐν Ερύματος ἱερῷ *in aede castelli seu arcis*, quod Minerua inexpugnabilem fecisset vrbem, cum de Medusae crinibus angui-neos cincinnos Cepheo Alei filio custodiendos dedit, (1) quare etiam in Tegeatarum numis Mineruae caput caelatum est. Eiusdem Mineruae delubrum apud Chios, Erythraeis proxima cognatione deuinctos, constructum fuit. (2) Quid dicam de Poliade Atheniensium? de qua non ignobile exstat scolium in compotationibus cani solitum Athenis: (3) Παλλὰς τριτογένεια, ἄνασσα Ἀθηνᾶ, ὄρθου τήνδε πόλιν τε καὶ πολίτας ἄτερ ἀλγεών τε καὶ στάσεων καὶ θανάτων ἀώρων. *Pallas Tritogenia, Minerua regina, rege et ciuitatem hanc et ciues, sine calamitatibus, sine seditionibus, sine intempestiuis funeribus.* His enim muneribus tutela Mineruae continebatur. Mirumne adeo, vrbis et arcis praesidem tutelamque noctuae signo in numis Erythraeorum dedicari?

Id enim commune erat Mineruae ἐπίσημον, cuiusmodicumque habitus cultusque deae esset. Discrepabant enim in his palladia vrbium. Apud Erythraeos simulacrum ligneum Mineruae μεγέθει μέγα, καθήμενόν τε ἐπὶ θρόνου, καὶ ἠλακάτην ἐν ἑκατέρᾳ τῶν χειρῶν ἔχον

(10) f. 182. (1) Pausan. f. 696. (2) Herodotus l. I. c. 160. (3) apud Athenaeum f. 694.

ἔχον, καὶ ἐπὶ τῆς κεφαλῆς πόλον, *in vtraque manu* ἠλακάτην, *capite caeli orbem gestabat.* Vtrumque ob artes, quarum Minerua praeses erat: eius enim erat et contemplandi caeli et tractandae lanae scientia. Ἠλακάτην dicit Pausanias, qui vtique colus est, vt scholia minora Homeri explicant: (4) τὸ γυναικεῖον ἐργαλεῖον, ἐξ οὗ τὸ νῆμα ἕλκουσιν. ὡς ἐκεῖ ὁ ποιητής.

Ἠλακάτη τετάνυστο ἰοδνεφὲς εἶρος ἔχουσα. (5)

Ἠλακάτη *est instrumentum, quo mulieres opus habent: ex eo enim stamen trahunt, vt apud Homerum*, (cum Helenae colum describens ait: super aurea corbe, in qua stamen repositum), *reclinata erat colus reuinctaque lana purpurea.* Etymologus Magnus e contrario ὄργανον, περὶ ὃ εἱλοῦσιν αἱ γυναῖκες τὸ νῆμα, *instrumentum, circa quod mulieres arcte stamina circumagendo voluunt.* Fusum dicit et veriuerbium respicit, cum ἠλακάτη est ἠλακτή τις, παρὰ τὸ ἠλάσσω. In veteri Epigrammate Ἐργάτιν εὐκλώστου νήματος ἠλακάταν. Formam eius expressam habet Plato decimo de republica: (6) ait enim ἀτράκτου seu fusi Parcarum tres esse partes, ἠλακάτην seu scapum, ἄγκιστρον seu vncum, per quem stamen transit et σφόνδυλον seu verticulum cauum, ὥστε ἠλακάτην διαμπερὲς διὰ μέσου ἐληλάσθαι, *ita vt scapus per medium verticulum agitetur*, quo simul ἔτυμον vocis explicatur. Hac quasi pictura inducor, vt in semisse apud Fontanam Equitem, (7) fusi a Platone descripti *Tab. 28. Fig. I.*

(4) ad Il. Π. v. 183. (5) Odyss. Δ. 135. (6) f 471. 472. ed. H. Petri. (7) Apud Montefalconem Antiquitatum explicatarum T. III. parte I. Tab. 89. 5.

ſcripti iconem mihi videre videar, et idcirco muliebre caput, Mineruae eſſe putem. Fuerunt enim priſcae matres Romanae vel maxime domiſedae et lanificii ſtudioſae, vt non puderet Quirites, dea et colo fuſoque ſignare ſemiſſes. Cum autem Minerua Erythraea vtraque manu geſtare ἠλακάτην dicitur, non vtique ſolam colum intelligi velim, ſed etiam fuſum, quoniam Ηλακάτη vtrumque ſignificat, ita, vt Catulliano verſu habitum deae poſſis deſcribere: (8)

Laeua colum molli lana retinebat amictum:
Dextera tum leuiter deducens fila ſupinis
Formabat digitis, tum prono in pollice torquens
Libratum tereti verſabat turbine fuſum:
Atque ita decerpens aequabat ſemper opus dens,
Laneaque aridulis haerebant morſa labellis
Quae prius in leni fuerant exſtantia filo.
Ante pedes autem candentis mollia lanae
Vellera virgati cuſtodiebant calathiſci.

Ea vetuſtiſſima ratio tractandae lanae fuit: altera commodior, quam in monumento Apolloniae inter marmora Oxonienſia cernimus, (9) vbi ancillarum vna colum, altera fuſum tenet et dominae miniſtrat, quamquam paulo rudior pictura eſt, vt vix ſatis, quae ſit, cognoſci queat. Hoc autem habitu Minerua eſt efformata ab Endaeo, quod matres Cretenſes eo genere operis ſtudioſe occuparentur. Manſit ea induſtria in colonia Erythraea et Ionicis quoque mulieribus. Quocirca Theocritus

Theu-

(8) epigr. LXV. 311. (9) f. 82.

Theugenidi vxori Niciae Milesii Ἠλακάτην dono dedit in idyllio, cuius hoc est principium:

> Γλαυκᾶς ὦ φιλέριϑ' ἀλακάτα δῶρον Ἀϑανάας
> Γυναιξὶ νόος οἰκωφελέεσσι σός ἐπήβολος.

> *O colus amica lanae, munus glaucae Mineruae,*
> *Matronis cura, quae domum suam locupletant.*

In eum modum Erythrae a Cretensibus conditae, Mineruam arcis praesidem accepere. His ego potius fidem adhibuerim, Erythraeis ipsis veterem memoriam ita recolentibus, quam Straboni (10) qui Erythras Ionicas coloniam Boeoticarum, nullo certo auctore prodidit. In Boeotia Homeri (1) veteres critici vrbem Boeoticam βαρυτόνως Ἐρύϑρας, Ionicam autem vrbem ὀξυτόνως Ἐρυϑρὰς pronunciari annotarunt. At Homerus, vt nunc in exemplaribus est, κατὰ τὴν λήγουσαν Boeoticas enunciat. Tum quoque in eo disputant critici, acceperintne Erythrae Boeoticae nomen ab Erythro filio Neptuni et Amphimeduses Danai, an ab Erythra filia Porphyrionis, qui erat Seriphi. Sunt haec commenta veterum grammaticorum, quibus primordia vrbium populorumque, fabulis inserere, eximia voluptas et summa gloria fuit. Nulli autem Boeotici aut Dorici generis Erythraeo in agro consedere, sed postremi secundum Cretenses aduenere Iones. Quis eos Erythras deduxerit, ob dissensionem scriptorum ambigitur. Velleius Paterculus (2) principem et auctorem harum coloniarum edidit Io-

(10) f. 466. ed. H. Petri. (1) Ill. B. v. 499. (2) l. 1. c. 4.

nem, estque illius caussa rei ab eruditis reprehensus et a Iusto Lipsio propemodum laceratus, donec Thomas Lydiatus iam vndique circumuento auxilia submisit ostenditque seu ex vero, seu probabili coniectura, Ionem illum non vtique Xuthi sed Codri fuisse filium, Nelei fratrem. Hellanicus in Atticis (3) deductam Erythras coloniam refert a Neleo Codri filio, a quo caeteras quoque Ionicas colonias constitutas fuisse multorum opinio est, quos omnes hoc loco testes producere putidum nobis videtur, cum in illius memoria aetatis nihil celebratius Heraclidarum aut Ionum profectione sit. Iones autem ab Heraclidis ἐν καθόδῳ ex Aegialea et Isthmo eiecti, cum in Attico agro, (sterili praesertim et inope) exsuperante multitudine, nouas terras quaerere cogerentur, ducem reperere Neleum Codri filium, qui regno Atheniensi per vim occupato exciderat. Nam cum Medon Nelei frater regno illo precario potitus esset ex Pythii sententia, Neleus Ionas factionis suae sibi aggregauit Asiamque cum classe petiit. Hanc Ionum ἀποικίαν veterum quidam centum et quadraginta annorum interuallo a Troia capta definiunt, a quo tempore chronicon marmoreum non admodum abhorret, cum centum et triginta duobus annis ab excidio vrbis ΕΦΕΣΟΝ ΕΡΥΘΡΑΣ ΚΛΑΖΟΜΕΝΑΣ conditas prodit. At non vnius ducis, nec anni vnius id opus fuit. Praeter Neleum ceteri quoque Codri filii profecti sunt diuersis annis. In quibus Pherecydes auctor est, (4) Androclum fre-

(3) apud Harpocrationem p. 173. (4) apud Strabonem 730. 731. Is est Phercydes Syrus, qui Cyri temporibus, primus historiam Graecam tractauit.

frequentasse Ephesum, Cydrelum nothum Myuntem, Nauclum Teum, et Caenopum, Codri item nothum, Erythras. Huc traho Stephani testimonium: Ἐρυθρά, πόλις Ἰώνων, ἐκαλεῖτο δὲ Κνωπούπολις ἀπὸ Κνώπου, *Erythra, vrbs Ionica: vocata est autem Cnopopolis a Cnopo.* Stephanus auctorem habet Hecataeum Milesium, cui vt antiquo scriptori et rerum admodum gnaro fidem non negauerim. Quamobrem Caenopum aut Cnopum conditorem coloniae Ionicae apud Erythras fuisse censeo et Cleopum Pausaniae ex eo nomine esse deprauatum. Polyaenus in stratagematis (5) narrat, Cnopum cum Erythras appugnaret, ex oraculi sententia ad se accersiuisse e Thessalia sacerdotem Hecates Chrysamen. Hanc herbis et carminibus taurum excantasse atque cornibus inauratis, corpore sertis et purpura exornato, in conspectu hostium ad aram inter duo castra mediam duxisse. Cum autem taurus oestro ab incantamentis percitus se ab ara proripuisset ad hostes, ab iis omine, vt rebantur, fausto laetis, diis esse immolatum: at cum eius tauri carne in sacris vescerentur Erythraei, omnes in vesaniam versos furientium more saltasse atque ita a Cnopo esse caesos. Sic, inquit, Cnopus ἐκράτησε τῆς Ἐρυθραίων πόλεως, μεγάλης τε καὶ εὐδαίμονος.

Non est operae pretium, vt, quanta religio Mineruae aut Athenis aut in Ionibus obtinuerit, vel verbo dicam: quis enim ab antiquitatis studio, vel vitae quodam instituto vel iudicio et ratione sic abhorret, vt hoc nesciat?

(5) l. VIII. c. 42.

Noua Erythraeorum ſacra nobis in memoriam reuocat claua nodoſa et corytus Herculis. Nam quid nobis cum Libero patre, poſtquam ea opinio labefactata eſt, qua haec Harduini de Libero coniectura fulciebatur. Quis neſcit Herculis virtutem non minus ſagittis inſignem, quam claua? Stymphalides aues et cerua Dianae et Neſſus et genu Chironis, ipſe denique Nemaeus leo teſtimonio ſunt, Herculem non degenerem Euryti (6) diſcipulum in ſagittandi arte fuiſſe. Corytus in omnibus his numis eximia pulcritudine conſpicitur, vt quatuor conſtringitur angulis, vt bullis ſeu aereis ſeu argenteis circum extrema ornatur, vt pars ſuperior clathrata eſt ad minuendum pondus, vt media eſt loris deuincta, quae retro reiecta pendent, quo leuari corytus poſſit et indui humeris, vt arcus denique inſertus eſt, prominente extremo cornu et neruo, ita vt maiori forma deſcripſimus, quoniam ea adhuc deſiderata eſt. Fere eadem forma eſt corytorum quibus Sinenſes et Tattari vtuntur e corio, quales ſunt quaedam in Imperatorio muſeo. Gloſſae veteres: γωρυτὸς θήκη δερματίνη βελῶν. Bene habet, quod corytus e corio confici dicitur, leuitatis cauſſa. Virgilius: (7)

Tab. 28. Fig. XV.

queis tela, ſagittae,
Corytique leues humeris, et letbifer arcus.

Ob eandem cauſſam Herculis pharetram Theocritus πολύῤῥαπτον (8) dixit. At corytum *ſagittarum thecam,*

(6) Heracliſcus Theocriti v. 105. (7) Aen. x. 169. (8) in Hercule Leont. v. 265.

cam, *seu pharetram* vetustissimi non dixerunt. Pharetra est ὀϊςοδόκη, ὀϊςοϑήκη, *venenatis grauida sagittis*, vt ait Flaccus: sed γωρυτὸς est ϑήκη τȣ͂ τόξȣ *arcus tegumentum*, vt Critici minores in Odysseam (9) τοξοϑήκη vt Hesychius. Ioannes Pediasimus in scholiis Hesiodeis, (10) sollicite distinguit corytum et pharetram. Pharetram dicit *telorum thecam esse*, *in quam coniiciuntur sagittae*, παρὰ τὸ φέρειν τὰ τρῶσαι δυνάμενα, *quasi quae ferat ea*, *quae vulnerare possunt*: et corytum esse, *in quo reponitur arcus*, ἀπὸ τȣ͂ γῶ τὸ χωρῶ καὶ τȣ͂ ῥυτὸν τὸ ἑλκυςὸν, τὸ χωρȣ͂ν δηλαδὴ τὸ ἑλκυςὸν, ἤγȣν τὸ τόξον, *a* γῶ *et* ῥυτὸν *quorum alterum recipere significat*, *alterum autem arcum*, *qui neruis attrahitur*. Sic etiam Isidorus Hispalensis. E contrario Etymologus magnus, ita vt veteres Glossae. P. Papinii scholiasta, (1) *corytos dicitur sagittarum theca*; *pharetra*. Et quidem hoc ad mentem Papinii, cum sic ait: *caelestibus implet corytum telis*. Sin Homerum, vt aequum est, audimus, corytus vtique diuersus fuit a pharetra. Nam in Odyssea pharetram inter penetralia domus Vlysseae repositam sic describit: (2)

Φαρέτρη
Ιοδόκος, πολλοὶ δ᾽ ἔνεσαν ςονόοντες ὀϊςοί.

pharetra tela quae continet, *multae autem in ea erant stridulis sagittae pennis*. At Penelopen inducit, vt conscendit scabellum et de clauo suspensum arcum detrahit

 Ἔνϑεν

(9) Odyss. Φ. 11;. (10) ad Scutum Herculis v. 128.
(1) Odyss. Θ. 53.

Ενθεν ὀρεξαμένη ἀπὸ πασσάλȣ ἄνυτο τόξον
Αυτῷ γωρυτῷ, ὅς οἱ παρέκειτο Φαεινός.

Arcum de clauo porrexit, ſimul cum coryto ſplendido, qui erat circumiectus. Ouidius quoque in triſtibus, (3) coryton et arcum iunxit, cum ait de Sarmatis:

In quibus eſt nemo, qui non coryton et arcum
Telaque vipereo lurida felle gerant.

Secutus tamen eſt Papinius auctoritatem Maronis, qui *corytos leues* dixit, cum et pharetram et thecam arcus in animo haberet. Ille vero σκοτεινὸς Lycophron, (4) inſolitarum et ambiguarum vocum auceps, γωρυτὸν Σκύθην, incertum, an corytum cum arcu dicat, quem Hercules a Teutaro Scytha, vt ait, acceptum dono dedit Aiaci, an pharetram. Itaque ſatis lucide adparet, apud vetuſtiores heroas corytum et pharetram diſcrepantium nomina rerum fuiſſe. Habuerunt corytos, in quibus domi arcus conderent. Illorum ſuperiori patentique parti tegumenta impoſita fuiſſe, ne puluis penetraret, neruosque corrumperet, veroſimile fit etiam ex his numis, in quibus ſuperior pars ad recipiendum tegumentum accommodata eſt. Quod autem Harduinus talem thecam coryti in numo ſe videre cenſet, hoc ſeu numi vitio, ſeu errore oculorum accidit, vt thecam crederet id, quod extremum cornu arcus eſt. Geſtarunt quoque humeris corytos, quod ex loris, quibus hi noſtri conſtringuntur et ex tota forma intelligitur. Quocirca in hoc inſigni argenteo numo Auguſti, quem (5) Paulus Pedru-
ſius,

(3) l. V. c. 8. (4) v. 458. (5) tom. II. tab. X. 9.

ſius e Parmenſi gaza produxit corytus cum arcu, atque pharetra cum ſagittis coniuncta ſunt in vno quaſi corpore, quo commodius geſtentur. Poſteaquam breuioribus arcubus vti coeperunt (nam veteres heroes grandioribus et rigidioribus delectati ſunt) arcum inter ſagittas poſuere, ita vt pharetra etiam coryti munus nomenque ſubiret. Id adparet ex numo ſerrato, qui in gazophylacio Imperatorio adſeruatur, a L. Begero quidem e cimeliis Regis Pruſſiae iam antea editus, (6) ſed ob quandam diuerſitatem a nobis quoque producendus. C. Poblicius Q. F. Herculem exhibet, qui in eum fere modum, vt Theocritus cecinit, leonem Nemaeum conficit. Eſt enim corytus cum arcu et duabus ſagittis, quoniam Hercules principio ſagittis petiit leonem: eſt claua, qua irruentem beſtiam feriit: iam ſeminecem belluam conſtringit et ſuffocat, more tamen alio, quam Theocritus praeſcripſit. In plerisque numis, ne quid diſſimulem, arcus ſine corytis cernimus, ſiue in manu, ſiue humeris ſuſpenſos iuxta pharetras. Praeſertim in Dianae ſignis, quae in Poſtumiorum, Ti. Claudii Ahenobarbi, Maſſilienſis vrbis aliisque numis ſpectantur. Ad poſtremum non omnes coryti et pharetrae forma differebant. Nam quales hic in noſtris numis coryti ſunt, talis eſt pharetra in numo Antonini Commodi inſcripto: HERCVLI. ROMANO. AVG. (7) quales deinde pleraeque aliae ſunt

Tab. 28. *Fig.* XIV.

Tab. 28. *Fig.* XII.

(6) T. II. f. 573. (7) apud Bergerum T. II. f. 679. (8) ib. T. III. 45. et apud Montefalconem in Antiquit. T. I. parte II. tab. 136.

ſunt pharetrae, talis eſt corytus in nummo Coenſium, (8) in quo Herculem Iouis filium conſecrant.

Quam antiquae caeremoniae religionesque in Herculem apud Erythraeos tenuerint, Pauſanias declarauit. (9) Erat ſimulacrum dei non Aeginaeo aut Attico aut Aegyptio Herculi ſimile, ſed in ratibus ſtabat. Traditum vero eſt, hoc ſimulacrum Herculis ab Tyro delatum in Ionicum pelagus primum ad Heran Meſaten adpuliſſe. Ea ab Erythraeorum portu ſoluentibus in Chium, propemodum medio in curſu ſuit. Cum rates a promontorio proxime abeſſent, Erythraei et Chii diuerſis ſtudiis ad ſuum quisque littus trahebant. Interea Phormio quidam Erythraeus ex morbo oculis captus (is Phormio antea e piſcatu victum quaeſiuerat) admonitus in ſomnio Erythraeos adiit, iuſſitque vt matres comam tonderent atque vt ex ea coma viri contexto fune ratem traherent. Id vero ingenuis mulieribus non eſt perſuaſum. Igitur Threiſſae, quae liberis natae parentibus, mercenariam vitam in vrbe agebant, tondendas ſe praebuerunt. Ex quo, cum Hercules, leniter ſequente rate, Erythras eſſet vectus, ſolas e Thracia mulieres intrare herois delubrum fas fuit. Funiculum iſtum Pauſanias ipſe ſe vidiſſe praedicat. Interſeritur huic loco etiam ea fabula, quod piſcator hoc facto viſum recuperauerit. Haec enim illorum temporum inſania et horribilis caecitas fuit. Memoriam huius religionis Ioannes Harduinus iudicat conſecratam fuiſſe in eo nummo, quem Iacobus Sponius in

(9) f. 533.

in itinere Attico conſignauit. Eſt enim in aduerſa turritum vrbis caput, inſcriptumque ΕΡΥΘΡΑΙ in altera autem parte, prora nauis. A qua opinione non abhorrerem, niſi rates et prora nauis ad artis praecepta factae, nimium inter ſe diſcreparent. Malim igitur ad portus et nauigationes Erythraeorum in illo numo explicando reſpicere. Damaſtes Sigeenſis, Herodoti aequalis, in periplo (10) auctor eſt: *biremem Erythraeos primos feciſſe.* Fortaſſis ille hoc, vt alia, ex Hecataeo Mileſio. Colebant Erythris quoque Herculem cognomento Ipoctonum, φθαρτικὸν τῶν ἀμπελοφάγων ἰπῶν, *quoniam vermes, qui vites arrodunt, ſuſtulit.* Soli enim Erythraei ab hac peſte non vexabantur. Teſtis eſt Strabo. (1) Hae ſunt cauſſae, quae Erythraeos induxerunt, vt Herculis corytum et clauam in elegantiſſimis numis argentoque ſuo ſignarent. Suo inquam argento: erant enim fodinae argenti in agro Erythraeo, in quibus quae ratio fundendi metallum fuerit Strabo oſtendit. (2) Exſtat praeterea apud Triſtanum numus Erythraeus Elagabali cum templo et ſimulacro Herculis, tum Otaciliae et Valeriani quoque numi cum vultu Herculis viſuntur.

A naue ad caput peruenimus: veteres enim Romani, quam nos in numo aduerſam, caput dixerunt, nauem autem, quam nos auerſam nunc appellamus, vt ex Macrobio et auctore de origine gentis Romanae conſtat. Harduinus in numo ſuo caput Alexandri ſe videre putat: ſed mea opinione Herculis eſt. Alexandrum ob genus Macedonum regum, ductum ab Hercule, ἀντὶ ταινίας ϗ στέμματος ϗ πορφύ-

 ρας

(10) apud Plinium l. VII. c. 56. (1) f. 709. (2). f. 155.

ρας βασιλικῆς τῷ δέρματι τῆς κεφαλῆς τȣ̃ λέοντος se deuinxisse, eumque cultum super gemmis et vnionibus aestimasse, Constantinus Porphyrogenneta (3) animaduertit, ϗ μάρτυς, inquit, ἀξιόπιςος ἀυτὸ τὸ νόμισμα τȣ̃ Μακεδόνος Ἀλεξάνδρȣ ταιάυτῃ εἰκόνι καλλωπιζόμενον. Si is hoc non diceret, tamen tot numi qui exstant, per se testarentur. At non idcirco omnes numi, qui capita hunc in modum signata praeferunt, illico Alexandrum potius monstrant nobis, quam Herculem. Vt ille numus Luceriae vrbis apud Laurentium Begerum (4) et ex eo apud Bernardum Montefalconem, qui clauam habet et arcum et pharetram et caput iisdem fere lineamentis, vt Alexandri regis. Quid Luceriae cum Alexandro magis, quam cum Hercule? siue illa vrbs in Apulia, siue in Gallia Cisalpina sita fuit, quae hunc numum feriendum curauit. Nempe signantur Herculis et Alexandri capita multis in numis, *vt hominem homini similiorem numquam videris alterum*: prorsus vt Syracusani illi Menaechmi. Id quomodo euenerit, non possim certo asseuerare. Possum suspicari, numos eos ad vnum omnes cusos esse post Alexandrum, Herculem autem ad Alexandri vultum fuisse effictum imitatione artificiosissimorum Alexandri numorum, ob admirationem illius herois. Sic eum Lysippus aere duxerat, nam vt ait Flaccus.

Edicto vetuit, ne quis se praeter Apellem
Pingeret, aut alius Lysippo duceret aera
Fortis Alexandri vultum simulantia.

Illum

(3) de thematibus f. 22. ed. Bandurii (2) T. I. f. 317.

Illum vero artificem in caelum tulerunt, illum exprimere, si qua poterat, secunda gloria fuit. Sic Herculem cum signarunt, Alexandri vultum habitumque corporis et leoninam pellem ex numis eius surripuere. Nullum igitur Alexandrum eo cultu in numis agnouerim, nisi in Macedonicis, aut vbi nomen eius diserte appositum reperiam. Non inficias eo, exstitisse Ionum studia in Alexandrum ea, vt in luco, qui supra Clazomenios et Chalcidenses (hi proximi fuere Erythraeis) situs erat, Alexandrea agerent Paniones. Testis est Strabo. (5) Et exstitere speciatim in Erythraeos Alexandri beneficia: is enim (6) Chytrophoria insulas (postea eaedem Hippi dictae) per duo stadia continenti iunxit et planitiem septem millium et quingentorum stadiorum intercidi iussit, vt duos sinus committeret et Erythras Mimante circumfunderet. Sed si Alexandrum Erythraei honoris caussa in aere fingere maluere, quam Herculem suum, cur nomen eius in tot numis non ediderunt? Praeterea numi omnes decem Alexandro superstite signari non potuerunt: eo autem defuncto recentia erant ciuitatum aut in Antigonum et Demetrium, aut in Seleucum aliosque principes studia et adulationes. Tamen quis mihi ex omni antiquitate proferre potest numum ciuitatum Ionicarum illorum cum vultu regum? Satius est igitur Herculem agnoscere in numis Erythraeis, cultu quidem suo, sed habitu oris ad Alexandri similitudinem. Id seu tantum artificum studio imitandi Lysippi, seu prae-

Lll 2 terea

(5) f. 742. (6) Plinius l. V. c. 29. Pausanias f. 529.

terea vrbis in Alexandrum quodam honore factum sit, non interpretor.

Nomina, quae in nauibus numorum Erythraeorum cusa fuerunt, haec sunt

I. ΑΣΚΛΗΠΙΑΔΗΣ ΔΗΜΑΔΟΣ *Asclepiades Demadis filius.*

II. ΑΠΕΛΛΑΣ *Appellas.*

III. ΑΡΙΣΤΕΑΣ *Aristeas.*

IV. ΔΙΟΠΕΙΘΗΣ. *Diopithes.*

V. ΠΕΛΟΠΙΔΗΣ *Pelopides.*

VI. ΔΙΟΝΥΣΟΣ *Dionysus.*

VII. ΜΟΛΙΩΝ *Molion.*

VIII. ΧΑΡΜΗΣ *Charmes.*

IX. ΑΝΟΘΕΜΙΣ *Anothemis.*

X. ΞΩΠΕΙΡΟΣ *Sopyrus.*

Hunc Sopyrum e Patino me adiecisse, supra commemoraui. Quem illi magistratum Erythris gessere, vt eorum nominibus numi insignirentur? Dicam, sicuti sentio, vbi res Erythraeas inde a principio percensuero. Antiquissimis temporibus Erythraei in duodecim Ioniae populis censebantur et ad Panionium conueniebant.(7) Sed cum Samiis Chiisque proximiori necessitudine ab stirpe vsque deuincti, eadem cum iis dialecto vtebantur. Attamen siue per inuidiam simulacri Herculis, siue alia caussa, vt inter vicinos, bellum gessere cum Chiis. Aliquando Λευκωνίας πέρι, (quae qualis sit siue vrbs siue regio, haud sane video) tam infestis animis certarunt, vt Chii se excessuros singulos cum chlaena et tunica sponderent.

(7) Herodotus L. I. c. 142. 143.

derent. Monentibus tamen coniugibus, animum recepere ad audaciam et Erythraeos ipſo illo obſtinato furore perterruerunt. Auctor eſt Polyaenus. (8) Et erant mutua eorum odia inſatiabilia, vt Erythraei etiam hoſpitali iure, quo inter Graecos nullum maius, ſpreto, inter menſas enecturi fuerint Chios, niſi aliquis eos de diſcrimine admonuiſſet, vt Anticlides proditum reliquit. (9) Res quoque cum Mileſiis geſſere aduerſus Naxios, vt Andriſcus in rebus Naxicis et Theophraſtus auctores ſunt. (10) Libertate ſunt exuti a Croeſo Lydorum rege, vt tributum ex eo tempore penderent. Cum Cyrus aduerſus Lydos duceret, per legatos ad defectionem ſollicitati, conditionem cum ceteris Ionibus, praeter Mileſios, reſpuerunt: igitur Lydis victis et legatis, quos miſerant ad regem, ab eo reiectis, arma ceperunt et deſerti a Spartanis, quorum auxilium implorauerant, in deditionem venerunt, deterioribus conditionibus, quam Lydi. Harpalus, qui Medos Cyro prodiderat, dux eo bello aduerſus Ionas fuit. (1) Victi captique auxilia Perſis tulere contra Caras, Cauconas aliosq; populos. Pertaeſi autem ſeruitutis, Hiſtiaeo Mileſio auctore, Ariſtagora duce, eiectis tyrannis popularem ſtatum vrbis reſtituerunt. Sex annos bellum eſt geſtum a Darii Hyſtaſpis praefectis, donec victis Ionibus Ariſtagoras ad Thracas perfugit, (2) Hiſtiaeus bellum infeliciter reſtaurauit. (3) Hiſtiaeus duce-

(8) l. VIII. p. 647. ed. Caſaub. (9) apud Athenaeum f. 384. (10) apud Parthenium Nicaeenſem in Eroticis c. 9 (1) Herodotus l. I. c. 169. (2) Herod. lib. V. c. 126. (3) Herod. l. VI. c. 1.

ducebat magnam nauium classem. Milesii octoginta naues, Prienenses duodecim, Miusii tres, Teii septemdecim, Chii centum, Erythraei octo, Phocenses tres, Lesbii septuaginta, Samii sexaginta praebuerunt, vt ex eo de potentia singularum vrbium iudicari possit. Sed partem proditione, partem discordia, in ordinem redacti, Xerxem secuti sunt in Graeciam. In pugna ad Mycalen, quae eodem die, Leutychide Lacedemonio duce, commissa est, quo victus ad Plataeas Mardonius, Iones defecere ad Graecos. (4) Erythraei Athenienses maxime sectati, fractis illis vicesimo Peloponnesiaci belli anno, defecerunt et Chiis contra Athenienses opem tulerunt, vt Thucydides auctor est. Post id tempus tamen Atheniensibus fauerunt ducesque eorum copiis suis adiuuere. (5) Alexander benigne egit cum Ionibus: Antigonus ceterique Asiae reges libertati eorum non sunt aduersati. Hoc maxime cognoscitur ex foedere Smyrnaeorum et Magnetum pro Seleuco Callinico, quod in Arundelianis marmoribus insigne est. Romanos rerum dominos summo honore coluere. Itaque Attasum Pergami regem bello Macedonico a Philippo rege mari pulsum in portum receperunt. (6) In bello aduersus Antiochum regem Romanis quoque portum praebuerunt, ex quo maritimas vrbes ad defectionem sollicitarent et triremes miserunt ad augendam classem Rhodiam. (7) Quare bello

(4) Herod. l. IX. c. 102. seq. (2) Demosthenes de Chersoneso f. 38 (6) Polybii excerpta p. 1013. (4) Liuius l. XXXVI. 45. XXXVII. 8. 11.

bello confecto Romani Erythraeos pro singulari fide, quam praestiterant, et agro donarunt et in omni praecipuo honore habuerunt. Ita Liuius e Polybio. (8) Hic praeterea addit, agro donatos, quem iure suum ostenderunt esse. Bello Mithridatico Erythrae in potestate regis fuerunt, a L. Lucullo liberatae. (9) Restituto Capitolio, quod L. Scipione, C. Norbano Coss. conflagrauerat, C. Curio Cos. ad senatum retulit, *vt legati Erythras mitterentur, qui carmina Sibyllae Erythraeae conquisita Romam deferrent.* Missi sunt P. Gabinius, M. Otacilius, L. Valerius, qui descriptos a priuatis versus circa mille Romam deportarunt, vt ex Fenestella et Varrone et Apollodoro Erythraeo refert Lactantius Firmianus. (10) Herophile illa Sibylla fuit, quam Erythraei in antro Coryci montis apud se natam gloriabantur, patre Theodoro pastore, matre nympha cognomento Idaea. (1.)

Ex his rerum Erythraearum conuersionibus intelligi potest, ciues eius vrbis primum a Cnopo in formam reipublicae redactos, sub Lydis Persisque tyrannos accepisse, quibus eiectis vix sextum in annum libertate potiti, iterum iugum subierunt. Pulsis tyrannis Aristagoras e consilio Histiaei Milesii

στρα-

(8) Liuius l. XXXVIII. 39. Polybius p. 1172. (9) Appianus p. 339. ed. Tollii. Tacitus Annalium l. VI. c. 12. et Historiar. l. III. 72. (10) Institutionum diuinarum l. VI. c. 6. de ira Dei c. 22. (1) Pausanias f. 827.

στρατηγοὺς ἐν ἑκάστῃ τῶν πόλεων ἑκάστους *in singulis ciuitatibus praetorem vnum* instituit. Auctor est, Aristagorae fere aequalis Herodotus. (2) Is magistratus qualis apud Athenienses fuerit, satis exploratum habemus. Sunt autem e singulis tribubus quotquot annis lecti numero ad decem, ita vt vndecimus polemarchus adiiceretur, tamquam praefectus. Eorum munus in his fere versabatur, vt vrbem munirent et custodirent resque ad arma necessarias seu bello seu pace procurarent: eorum quoque erant ἐξετάσεις καὶ συντάξεις, censurae quoddam genus, et tributi pro modo facultatum descriptio ad τριηραρχίαν, tum iudicia iis de caussis, si quis περὶ ἀποφάσεως ἢ καὶ περὶ ἀντιδόσεως postularetur, aut si quis bellum aciemque deseruisset: pacis caussa, seu communicata re cum senatu, (vt in psephismate de legatis ad Philippum apud Demosthenem de corona), seu ex sui sententia collegii, (vt in decreto senatus in Antiphonis vita inuenio) legatos mittendi ius habebant. Id exemplum imitati sunt Erythraei ceterique Iones, nisi quod vnum praetorem sufficere putarunt, credo quod non ita magna vrbs esset. (3) Non diuturnus hic status fuit, Persis tyrannos restituentibus, aut potius optimatum in vrbibus potentiam, cui magis fidebant, vt nouarum rerum minus cupidae. Ceterum iustum et aequum imperium fuit, vt Aristoteles in politicis auctor est: (4) καὶ ἐν Ἐρυθραῖς δὲ ἐπὶ τῆς τῶν Βασιλιδῶν ὀλιγαρχίας, ἐν τοῖς ἀρχαίοις χρόνοις, καίπερ καλῶς ἐπιμελουμένων τῶν ἐν

τῇ

(2) l. V. c. 38. (3) Aristoteles Politicorum l. VI. c. 8. (4) l. V. c. 6.

τῇ πολιτέια, ὅμως διὰ τὸ ὑπ' ὀλίγων ἄρχεσθαι ἀγανακτῶν ὁ δῆμος μετέβαλε τὴν πολιτέιαν. *Erythris quoque, cum vrbs ſub Perſarum regum imperio paucorum dominatione regeretur antiquis temporibus, tametſi qui praeerant, bene rem publicam adminiſtrabant, tamen tantummodo idcirco motus populus, quod a paucis regeretur, rei publicae ſtatum mutauit* Summa igitur poteſtas ad populum deuoluta, qui praetores quotannis e corpore ſuo legit. Quemadmodum autem in pleriſque Ioniae vrbibus antiquum Ariſtagorae inſtitutum, iterum excuſſa Perſarum dominatione, ſeruatum non eſt, vt ſummus magiſtratus praetor eſſet, ita Erythris nihil inuenio mutatum. Mileſii ſub Imperatoribus etiam archontas habuere, vt in numo Commodi ΕΠΙ. ΑΡΧ. ΜΕΝΕΚΛΕΟΥΣ. In numis Seueri Prytanean et Soterium, in Aurelii numo Euareſtum, in Gallieni Diogenem archontem Harduinus vidit. Prienenſes in eum modum archontem Iulium Saturninum in numo Valeriani, Chii Praſinum iterum et Aurelium Chryſogonum Epaphroditum et Cothyan Primum archontem ſignarunt. Samii in numo quodam ΕΠΙ. ΛΥCΑΝΔΡΟΥ. ΙΕΡΕ. *ſub Lyſandro Pontifice*, Epheſii plerumque aut Ἀρχιερέα aut Γραμματέα poſuerunt. Clazomenii ſub Claudio ΕΠΙ ΗΓΕΜΟΝΟΣ ΑΣΚΛΗΠΙΑΔΟΥ ΚΛΑΖΟΜΕΝΩΝ in Iuliae Domnae numo autem ſub *Philone praetore iterum*. Haec ſunt teſtimonia leuium quarundam iis in ciuitatibus conuerſionum. At Phocaeenſes, Colophonii, Teii, Erythraei non niſi praetores habent in numis. Vt de Erythraeis tantum dicam, in numis ſub Traiano apud Harduinum ΑΥΤ. ΝΕΡΟΥΑΝ. ΤΡΑΙΑΝΟΝ. ΕΠΙ. ΣΤΡΑ. ΠΡΕΙΜΟΥ in Elagabali numo ΕΠ. ΣΤΡ. ΑΥΡ. ΝΕΙΚΩΝΟΣ. Β. *sub Nicone iterum praetore*, in Alexandri Seueri numo ΕΠ ΣΤ Π. ΑΙ. ΑΤΤΑΛΟΥ. ΤΟ. Β.

Volupe esset, hos decem praetores suis annis assignare, vt ea re aliquantum iuuari possit Ionicarum ciuitatum historia. Nunc, quoniam eius copia nobis non fit, id agemus, vt saltem aliquam in aetatem numos inseramus. Atque cum Herculis vultus omnia Alexandro similia habet in his numis, sequitur ex mea opinione, sub extremam huius herois aetatem et paullo post cusos esse. Idem postulat elegantia numorum. Nam Graecia his artibus vsque ad ciuile bellum populi Romani enituit, ita vero vt Alexandri temporibus summum fastigium consecuta, labi paullatim et deficere sit visa. Ad postremum quae Harduinus de Erythris Boeoticis et de moneta a Thebis eam in vrbem translata praedicat, ea vero, vt dicam sine iracundia, in officina Archontii Seueri, lepidi senis, cusa fictaque sunt. Illis temporibus cum Thebae euersae, et post paullo cum hi numi cusi sunt, Erythrae in Boeotia, vt Tertullianeo verbo alia in re vtar, fuere nullae.

NVMVS

NVMVS GYRTONES *VRBIS THESSALICAE* ILLVSTRATVS

Auctore

T. S. B.

IN Graecarum vrbium memoria desiderati adhuc sunt Gyrtoniorum numi. Ioannes Harduinus, qui in vrbium populorumque numis illustrandis maxima laude paene vnus omnium versatus est, huius vrbis numum alium, quam ex Pyrrhi Ligorii schedis nullum citat. Et illum ne describit quidem, credo quod diffidebat Ligorii fidei, quem decoxisse satis constabat. (1) Lucas Holstenius autem numum illum e Ligorii schedis ita describit in castigationibus Stephani Byzantii: *Circum caput muliebre* ΓΥΡΤΩΝΙΩΝ *in cuius altera parte caput iuuenis cum galea cristata conspicitur, iuxta cuius frontem leguntur duae litterae* ΠΕ. *quas Ligorius, forte non male,* ΠΕΡΡΑΙΒΙΑΝ *significare putat. Equidem* ἐπέχειν *malo.* Hunc, quem produxi, aeneum numum Buxbaumius ex oriente attulit, tanto artis lumine nitentem, vt alios eius similes paucos, ab elegantiori autem opera et ingenio Graecos viderim nullos. Aduersa ha- M. Oct. 1727.

(1) Vide Raphaelem Fabrettum in *Columna Traiani* et in *Collectione inscriptionum* passim.

bet caput virile laureatum,cuius barbae ramentum metalli inter cudendum adhaesit, quod eximiam artem aliquantum obfuscauit. Eo est insignior auersa, quae caput matronae cum diademate refert et hanc epigraphen ΓΥΡΤΩΝΙ .... *Gyrtoniorum.*

Thessaliam antiquitus Pelasgi incoluere et iuxta eos Perrhaebi, vtrique testati et illustres Homericis versibus, cum Thessalicum nomen nondum exstaret. Eodem auctore Homero, (2)

Οἱ Ἄργισσαν ἔχον καὶ Γυρτώνην ἐνέμοντο,
Ὄρθην, Ἠλώνην τε, πόλιν τ᾽Ὀλοοσσόνα λευκὴν
Τῶν αὖ ἡγεμόνευε Μενεπτόλεμος Πολυποίτης
Υἱὸς Πειριθόοιο, τὸν ἀθάνατος τέκετο Ζεύς.
Qui Argissam tenebant et Gyrtonem incolebant,
Orthen, Elonamque vrbemque Oloossona albam,
Eorum dux fuit (bello Troiano) *Meneptolemus Polypoetes,*
Filius Pirithoi, quem immortalis genuit Iupiter.

At Guneus ex Cypho duas et viginti naues duxit, quem Enienes et Perrhaebi sequebantur. (3) Fuere igitur Gyrtonii cum caeteris ciuitatibus foederatis sui iuris et inter Pelasgos censebantur, postea partem sunt Perrhaebis, partem Thessalis adscripti. Strabo Perrhaebiae attribuit, quam iuxta Peneum vsque ad mare antiquitus protendi meminerat, minora vero in Homerum scholia Thessaliae, Apollonii Rhodii scholiasta (4) alterutri, Stephanus Byzantius vtrique: Γύρτων πόλις Θεσσαλίας

(2) Il. B. v. 738. (3) ib. v. 748. (4) l. I. v. 57.

ταλίας καὶ Περραιβίας, ἣν Ομηρος Γυρτώνην καλεῖ, ὡς Ιτώνην καὶ Ιτῶνα. (5) Scilicet quod Perrhaebia in Theſſalia erat ſita. Claudio Ptolemaeo quid acciderit, cum illius ſitum vrbis deſcriberet, non ſatis exploratum habeo, tantum coniecturis ducor. Ita in editis legitur:

ΠΕΛΑΣΓΙΩΤΩΝ

Γόννος μη'. ιβ. – λ'θ. L'. ιβ.

Gonnus 48. 12.—39½.12.

Λάρισσα ν. – λ'θ. ς'.

Lariſſa 50. 0.—39. 6.

Φεραὶ ν. L' – λ'θ. ς'.

Pherae 50½. —39. 6.

ΣΤΥΜΦΑΛΙΑΣ.

Γυρτώνη μ'ς. L' γ'.– λ'θ. L'.

Gyrtone 46½. 3.—39. ½.

ΕΣΤΙΩΤΩΝ.

Φαιςὸς μ'ζ. δ'. – λ'θ. γ'.

Phaeſtus 47. 4.—39. 3.

Γομφοὶ μ'ζ. γ. – λ'θ. ς'.

Gomphi 47. 3.—39. 6.

ΘΕΣΣΑΛΩΝ.

Υπατα μ'ζ. L' γ. – λη'. L' ηγ'.

Hypata 48½. 3.—38½. 3.

(5) Sic quoque e Stephano Euſtathius ad Homeri Boeotiam f. 333. ed. Rom.

Stymphalia in Arcadibus fuit, ad quos nihil aut Gyrtone, aut hic Ptolemaei locus. Idcirco acutissimus Palmerius emendauit, vt esset ΣΤΥΜΦΑΙΑΣ. Stymphaea regio in Epiro est, super Thesprotiis. Et huic regioni numeri quoque congruunt graduum, quos in Ptolemaeo positos cernimus. Idcirco Gerardus Mercator vrbem quoque in Epiri finibus collocauit, ad quos nihil pertinere, vel ex eo certum est, quod Gyrtone haud longe a Larissa sita fuit. Quare, vt plerique alii numeri, ita hi quoque in geographo corrupti fuerunt, nam verum situm Ptolemaeus ignorare non poterat. Si itaque gradus longitudinis emendes, habebis Gyrtonem suo in situ prope Larissam. Scribes autem sic

Γυρτώνη μ'϶.L'γ'–λ'϶. L'. *Gyrtone* $49\frac{1}{2}$. 3–$39\frac{1}{2}$

Ita scripsisse videtur Ptolemaeus, dein cum corrupti essent numeri, vt ad Stymphaeam quadrarent, sciolus aliquis id nomen regionis inseruit, ex quo iterum corrupto, facta est denique Stymphalia. Id autem ipse vrbium ordo suadet. Nam Ptolemaeus monuit (б) se in qualibet regione situs oppidorum a borea prosequi, donec in noto desinat. Itaque Gonni, Larissa, Pherae, Gyrtone, altera infra alteram tamquam australior ponenda fuit. Addidit Ptolemaeus se situs quoque vrbium ab occidente versus orientem citare. Sed illud in eo non est perpetuum. Hoc loco cum Epirum subiectam Macedoniae, in qua Thessalos, tamquam minores et, vt tum erat, attributas gentes, censet, perpetuo respicit et

(9) l. II. c. 1.

et ad eam paullatim appropinquat, ſitus vrbium ab oriente verſus occidentem perſequitur. Sic Phaeſtus Gomphi et omnis Eſtiaeotis regio, ſic Theſſaliotis ad occidentem poſt Pelaſgiotas ponuntur et denique Phthiotis regio extrema eſt, quod et Pelaſgiotidi et Theſſaliotidi ad meridiem praetenderetur. Quae cum ita ſint, Pelaſgiotidi Gyrtona attribuit Claudius. Hieronymus apud Strabonem tradit (7) τὸ καλȣ́μενον Πελασγικὸν πεδίον *Pelaſgicum campum, vt tunc nuncupabatur*, habuiſſe vrbes *Lariſſam*, *Gyrtona*, *Pheras*, *Magnetin* et alias quasdam. Alia videtur eſſe Pelaſgiotis regio, ad quam nihil Magnetis, alius Pelaſgicus ager, in quo etiam Magnetis cenſebatur. Μαγνῆτις etiam Sophocli et Parthenio eſt Μάγνησις *Magneſia*, caput prouinciae eius nominis. Sed Ptolemaeus nullam prouinciam Magneſiam edidit. Vrbem Magneſiam et eius regionis alias tres Pelaſgiotis, ceteras vrbes Phthiotis adſcripſit. Ex quo vides errorem Plinii, cum Gyrtona in Magneſia collocat, veluti inter Pelaſgiotida et Magneſiam prouinciam nihil diſcriminis ſit. Decipere eum etiam Strabo poterat, (8) qui ſic fatus eſt: περὶ τὸν Πήνειον καὶ τὸν Πήλιον οἰκȣ̃ντες καὶ οἱ τὴν Γυρτῶνα ἔχοντες καὶ ἄλλοι πλέȣς *ad Peneum et Pelium colunt cum Gyrtonii, tum alii plures*. Recte de Peneo fluuio, at Pelius mons in Magneſia potius erat ſitus. Magneſiae igitur vrbs erat Gyrtone, ſi Pelio monti ſubiecta fuit. Aut denique ex eo natus eſt error, quod Plinius Gyrtoni finitimam vrbem Lariſſam eſſe acceperat,

(7) f. 505. (8) f. 503.

rat, eam autem iudicauit Lariſſam dici, quae ad Oſſam in Magneſia ſita fuit. Ad ſitum autem vrbis confirmandum oportebat animaduerti, quod tres iſtis in regionibus Lariſſae eſſent. Vna ad Oſſam in Magneſia, non admodum celebrata, nota tamen Straboni et Stephano, altera ἐπὶ θαλάσσῃ dicta Pauſaniae, Cremaſte cognomine, in Phthiotide, aliquanto interuallo a mari, tertia Pauſaniae παρὰ τὸν Πηνειόν. Strabo et ex eo Stephanus Cremaſten illam etiam Πελασγίαν dictam fuiſſe teſtantur: ſed fortaſſis aliquis error ſubrepſit, vt id nominis attribuendum ſit potius Lariſſae ad Peneum, quam nobilem Theſſaliae vrbem vocat Liuius: (9) *Lariſſam,* inquit, *non illam in Theſſalia nobilem vrbem, ſed alteram, quam Cremaſten vocant, ſubito aduentu cepit.* In hac Lariſſa ad Peneum obiit Hippocrates Cous medicorum facile princeps atque in agro inter eam vrbem atque Gyrtona interiecto ſepultus eſt, vt e vita eius apud Soranum Epheſium cognoſcimus, cuius ad aetatem monumentum ſuperfuit. Ex quo etiam Ioannes Tzetzes in chiliadibus (10) θανὼν ἐτάφη μέσον δὲ Λαρίσσης καὶ Γυρτῶνος.

In antiquis fabulis quoque non obſcura fuit Gyrton. Fuit quondam *proles Elateia, Caenis,*

Theſſalium virgo pulcerrima, perque propinquas
Perque tuas vrbes (tibi enim popularis Achille)
Multorum fruſtra votis optata procorum, (1)

Il-

(9) l. XXXI. 46. (10) hiſtor. VII. Chil. CLV. 945. (1) Vide praeter Naſonem, Scholia in Apollonium Rhodium l. I. v. 59.

Illius amore virginis captus Neptunus; voti compos fit et post gaudia optionem permittit, quae vellet, petendi. Illa de amisso pudore praefata, in alterius conditionem sexus transire cupit,

grauiore nouissima dixit
Verba sono, poteratque viri vox illa videri,
Sicut erat: nam iam voto deus aequoris alti
Annuerat.

Scholiasta Luciani, qui Samosatensi hoc scurra dignus obtigit, in Gallo, (2) fabulam hanc lepidiorem fecit, cum per se esset nequissima. Ait enim, puellam Neptuno negasse, ni iuraret, facturum se prius, quae ipsa petiisset: petiisse eo annuente, vt illico e virgine esset mas: fecisse ita Neptunum Stygia numina et iusiurandum metuentem eaque mala fraude ductum voto excidisse potiundae puellae. Nec sic tamen Caeneo consistere licuit per Maronem; apud quem Aeneae in vmbris occurrit

Iuuenis quondam, nunc foemina Caeneus,
Rursus et in veterem fato reuoluta figuram.

Vt Ouidius Perrhaebum, ita Palaephatus Peripateticus Thessalum fuisse scribunt: at Hyginus tradit (3) Magnesium fuisse Caeneum Elati filium eundemque apud Gyrtonios egisse et ea in vrbe genuisse Coronum filium. Quid si cui per insomnium porta eburnea immittantur hae cogitationes, Caenin et Caeneum vtroque sexu alternis in numi partibus spectari? Quid? si Ar-

(2) p. 18. (3) p. 34. ed. Munkeri.

chontius ille Seuerus hunc quoque numum Rufo Celso alicui, aut Ceionio Iuliano aut Fabio Sosiano, aut si cui alii fallendi artifici protulit, hi autem ex virili muliebrique eodem in numo vultu, talem nobis fabulam et Hyginum excuderunt? Plane, vt e numis Sidonis, Tyri aliarumque vrbium effictas esse fabulas contendis iucundissime Harduine. Si cui ista non satis arguta videntur, huic per me licet conditorem auctoremque Gyrtones in illis signis quaerere: habemus enim iterum vtriusque optionem sexus. Phlegyam primum in agro Gyrtonio consedisse reperio. Nam Strabo testis est, (3) ab eo Phlegya Phlegyas dictos, qui postea Gyrtonii dicti, a Gyrtone Phlegyae fratre, vt Stephanus Byzantius, aut a Gyrtona Phlegyae filia, vt eruditi in Apollonium Rhodium critici. (4) Haec vt intelligas, genealogiam apponemus

Sisyphus

Halmus

Mars = Chrysa

I *Phlegyas* — II *Gyrton*

I *Ixion = Dia* — II *Gyrtone*

Pirithous = Hippodamia

Polypoetes

Po-

(3) f. 503. (7) L. I. v. 57.

Polypoeten ducem ſecuti ſunt ad bellum Troianum, Homero teſte, Gyrtonii. Is, eodem teſte, Pirithoi erat filius, Pirithous Iouis. Nam alii, vt Pauſanias et docti Critici Apollonii Rhodii, Diam Pirithoi matrem Ioui ſuccubuiſſe ferunt, alii Ixioni marito filium hunc peperiſſe tradunt, in quibus eſt Apollodorus. Ixion Lapitharum, populi ad Peneum, rex, Phlegyam patrem habuit, vt ſcholia minora ad primam rhapſodiam, quamquam alii diuerſa tradunt: Phlegyas Chryſan matrem, Halmi filiam, Siſyphi neptem, vt Apollodorus γενεαλογεῖ. At Strabo Phlegyam hunc Ixionis fratrem prodit. Ergo Gyrton Phlegyae ſecundum Stephanum frater, frater quoque Ixionis, Gyrtone vero Phlegyae filia Pirithousque patrueles fuerunt. Quod aliter fuit, ſi communem fabularum fidem ſequimur. At Onomacritus vetus argonauticorum auctor Phalerum Alconis filium conditorem vrbis prodit his verbis. (5)

Αλκωνος δὲ Φάληρος ἀπὸ Αισήποιο ῥοάων
Ηλυθεν, ὃς Γύρθωνος ἀλιςεφὲς ἔκτισεν ἄςυ.
Phalerus Alconis filius ab Aeſopo flumine
Venit, qui munitam Gyrtonen vrbem condidit.

Deinde eum cum Argonautis profectum eſſe canit. Alcon autem ille, Erechthei erat filius, Athenienſis.

Sed nihil horum in numo quaerendum eſt. Nam vt liquido dicam, nullius alterius vultus ille laureatus eſt, quam Iouis Olympii. Nam eo in agro Gyrtonii coluerunt, in quo ſedes huius religionis et numinis ad Peneum fluuium in Tempis Theſſalicis et ſummo Olympo fuit.

(5) v. 143. (6) Pauſanias f. 412. 417.

Matrona autem in auerſo numo Iuno Pelaſgia eſt, a Theſſalis maxime culta, a qua non diuerſam arbitror Iunonem Olympiam, niſi quod hoc nomine coleretur a mulieribus in Elide, cui etiam Iunonia celebrabant, quinto quouis anno Olympicum ſtadium ingreſſae.

Numus cuſus videtur florentiſſimis Theſſalorum rebus et arte fingendi in aere ad ſummum faſtigium euecta, hoc eſt, poſt Philippum Amyntae regem. Is enim cum tyrannos e Theſſalia eiecit, reſpirare ſibi ſunt viſi Theſſali et animos accipere. Ex eo tempore *Philippus* tam beneficiis, quam clandeſtina vi, Theſſalorum voluntates obnoxias tenuit, Quare Demoſthenes in Philippica tertia: (7) ἀλλὰ Θετταλία πῶς ἔχει; ὐχὶ τὰς πόλεις ϗ τὰς πολιτείας αὐτῶν ἀφήρηται ϗ τετραδαρχίας κατέστησε παρ᾽ αὐτοῖς, ἵνα μὴ μόνον κατὰ πόλεις, ἀλλὰ ϗ κατὰ ἔθνη δουλεύωσιν; *at, qui ſtatus Theſſaliae eſt? nonne et vrbes ademit? et ſtatum rerum publicarum peruertit et quatuor principatus inſtituit, vt non modo ſingulae vrbes, ſed gentes quoque ſingulae ei ſeruiant.* Id tamen nihil offecit Theſſalorum rebus, qui aliter rationes ſuas de libertate inibant, quam populus Athenienſis. Sub Alexandro Magno militarunt Theſſali, fidiſſimi omnium et ab eo tempore Macedoniae regibus ſemper obnoxii. A Philippo denique Demetrii filio oppreſſi Romanos gratanter acceperunt. Victo rege, T. Quintius Flamininus ἐλευθέρους, ἀφορολογήτους, νόμοις χρωμένους τοῖς πατρίοις, inter ceteros quoque iuſſit Theſſalos et Perrhaebos (8) Cum Antiochus Magnus Theſſaliam cum ex-

(7) f. 47. ed. Aurelianenſis. (8) Polybius p. 1108. 1111. Liuius l. XXXIII. 32.

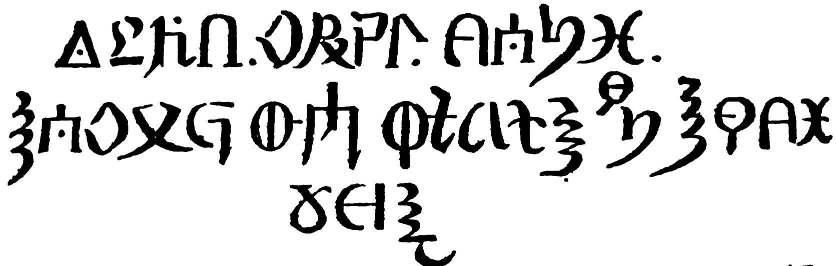
exercitu ingressus vrbes partem deditione, partem pugnando in potestatem accepit, Larissa frustra obsessa, Gyrton ne petita quidem e vicino armis. (9) Ex quo intelligi potest, vrbem fuisse munitissimam. Nam etiam Perseus, cum Thessalos ad societatem belli aduersus Romanos armis cogeret, Mylasque moenibus firmissimis vi cepisset, non ausus est Gyrtonem in propinquo sitam tentare, quam T. Minucius Rufus et Hippias Thessalorum praetor quam praesidio intrauerant. (10) Extremum beneficiorum S. P. Q. R. in Graecos, libertas Macedonum. Post ea haud longe ab extrema seruitute Graecorum conditio discrepauit. Hoc illud spatium est, quo libertas Thessalorum et Perrhaeborum primum a Philippo firmata, tum nequidquam a Philippo Demetrii filio et Antiocho et Perse regibus attentata, Romanis opportuna vindicantibus, postremo sub initium perturbationum in Romana republica oppressa est. Artium autem illarum, quae in aere fingendo metalloque versatae sunt, summa dignitas sub Alexandri Macedonis aetatem fuit. Nam Plinius auctor est, (1) post Olympiadem centesimam vicesimam artes eas cessasse, centesima autem quinquagesima quinta reuixisse, cum tamen artifices fuere, illis, qui antea viguerant, longe inferiores. Hic numus tantum in arte decus seruat, vt ad illam priorem artificum aetatem referri mereatur.

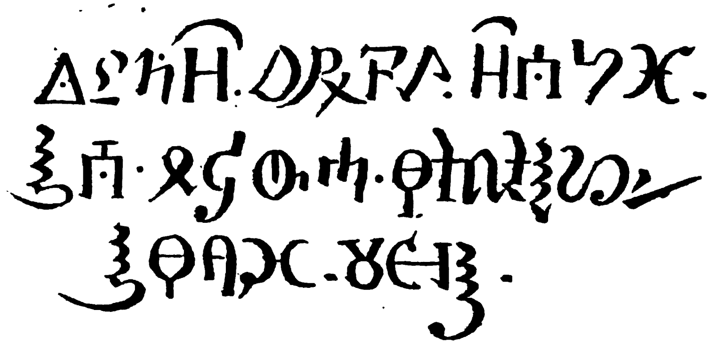
Nnn 3 VETVS

(9) Liuius l. XXXVI. 10. (10) Liuius l. XLII. 54. (1) l. XXXIV. c. 8.

VETVS INSCRIPTIO PRVSSICA

T. S. B.





Singulares eſſe has litteras, nec antea in Europa viſas, exclamabunt omnes talium curioſi: nos, vnde eas acceperimus, primum dicemus, tum ſententiam noſtram exponemus, quae cupio quidem, vt eruditis viris placeat, malim tamen, vt poſt me alii quod veriſſimum ſit inueniant, aut noſtram opinionem amplius confirment: fieri enim poteſt, vt res

haec

haec tam exilis, aliquem fructum in historiam importet, si planius explicetur. Christianus aliquis cum Philippo aliisque e Cistercienſium disciplina inter primos fuere, qui in Oliuienſe monaſterium Samborii liberalitate inſtitutum conceſſerunt. Et Christianus quidem Freieualdenſis in in monaſterio Coluicenſi litteris, vt tum erat, ſic ſatis eruditus, in Oliua factus eſt Abbas. Is cum animaduerteret, in Prutenis non modo e plebe homines, ſed ſummo loco et potentia ad religionem veri numinis commoueri, cum Philippo ſuo profectus eſt Romam ad Innocentium III. vt eum de his, quae in Pruſſia fiebant, quaeque ſibi videbantur, admoneret. Roma anno cIↃcxcvIII. cum mandatis ad archiepiſcopum Gneſnenſem rediit, cui, quae epiſcoporum muneris eſſent, a Pontifice commendata ſunt interea, donec ſuos Epiſcopos Pruteni acciperent. (1) Anno cIↃccxIv. Christianus Varpodam et Suauabrimum principes viros e Prutenis, tamquam primitias Romam deduxit, et Varpoda quidem Philippi, Suauabrimus autem Pauli nomine initiati ſunt. Philippus Lauſaniam, quam tenuerat, Paulus Lubouiam, dono dedere Cistercienſium ordini. Innocentius anno poſt, donationem confirmauit et Christianum Pruſſiae primum epiſcopum fecit. (2) Inſecuta ſunt ea tempora, quibus expeditionem ſacram ſuſceperunt equites Teutonici, ſubactaque quadam Pruſſiae parte, anno

cIↃccxLI

(1) Haec et cetera omnia ex diplomatibus accepimus, quorum quaedam in decretis et epiſtolis Innocentii III. a Baluzio editis, alia in Lucae Dauidis chronico MSto reperiuntur. (2) E bulla Pontificis et chronico Montis Sereni p. 109. Monachus Trium Fontium p. 444. 445.

clↄccxl i. Chriſtianus diem obiit. Is, quae ad ſuperſtitionem Pruſſorum hiſtoriamque veterem et expeditionem ab equitibus Teutonicis ſuſceptam pertinebant, diligenter conſignauit in libro, (3) qui nunc quidem aut latet in tabulariis aut certe nobis periit. Vſi autem eo ſunt Simon Gruna, monachus Dominicanus et ille pater hiſtoriae Prutenicae Lucas Dauid, qui ante hos centum et quinquaginta annos et amplius, commentarios ſuos excuderunt, nondum publice editos. *Ambo* e Chriſtiano epiſcopo inſcriptionem vexilli Prutenici ſuis *ſcriptis* inſeruerunt. Quae quia in Simonis Grunae MS. quod apud Regiomontanos in bibliotheca Auguſta exſtat, nonnihil differt ab ea, quam Lucas Dauid expreſſit in autographo, ex quo in eadem bibliotheca nos noſtrum exemplar deſcripſimus, idcirco primum e Gruna, tum deinde etiam e Dauide inſcriptionem ſub principio poſuimus. Caſpar Schuzius quoque numos quosdam ex agro erutos in chronico producit litteris non abhorrentibus ab illarum forma: de quibus tamen hoc loco non dicemus.

Duae opiniones de his litteris obtinuere adhuc inter populares meos. Nonnulli ab otioſis confictas eſſe opinati ſunt: alii runas eſſe contenderunt. Vtrique mihi compendium facere ſunt viſi. Nam quae quis non intelligit, ea, ſi ſomnia et nugas dicat eſſe, in perpetuum ſe expedire videtur ab inquirenda veritate, ne tamen confiteatur ſe hominem eſſe et aliquid ignorare: qui autem runas eſſe perhibent, hi ſibi videntur aliquid dicere, dum

(3) Cui titulus is fuit: *Liber filiorum Belial et de eorum ſuperſtitionibus.*

dum nobili quidem, sed obscura voce alios absterrent, ne quaerant amplius. Hos ego patienter audirem, si runas recordarentur a septemtrionalibus populis dici cuiusuis litteras gentis, non eas modo, quae in saxis Sueonicis, Noruagicis, Islandicis, Danicis incisae sunt. Sic *Griskar runir*, Graecas, *Ira runir*, Irlandicas, *Groelandoukar runir* Gronlandicas vocant, teste Arngrimo Iona in Crymogaea, et *Vplandoukar runir* et *Venda runir*, ne quid dicam de *Sigrunar* seu magicis ad incantationem characteribus. Istum in modum per me quisque has quoque Prutenicas runas nuncupet, dum ne aliud se dicere putet, quam ἀυτὸ τῦτο, γράμματα. At illi nostri aliter sentiunt. In Britannia veteres Saxones runis seu litteris septemtrionalibus vsos esse, ex eo coniicit Georgius Hickesius, (4) quod, cum ab Aelfredo rege ad Romanum Francicumque scribendi modum Saxonica scriptura conformata est, vestigia tamen runici characteris manserunt, vt e specimine codicis Lichfeildensis apparet. (5) Francos etiam et Alemannos septemtrionalibus his ruinis aliquando vsos fuisse, Olaus Vormius in litteratura Danica ex Auentino et Lazio colligit. Id quoque e Francico alphabeto intelligas, quod Mabillonius libro quinto rei diplomaticae exhibet. In eum igitur modum aliqui hos ad orientem populos, et Prutenos veteres a Scandinauis runas accepisse contendent. Sed tanta in ignoratione runarum septentrionalium versantur,

(4) In Thesauro linguar. septemtrional. T. I. praef. f. xxxv.
(5) In Grammatica Franco Theotisca. f. 3. 4.

vt operofa confutatione nequaquam indigeamus. Qui fidem Chriſtiani ſuſpectam habent, duobus monumentis refelluntur, quae doctiſſimus Meſſerſchmidius Gedanenſis ex oriente deſcripta ſecum attulit et Societati noſtrae communicauit. In his enim idem litterarum genus magna cum voluptate conſpeximus.
Tab. 28. I. II Primum monumentum eſt inter *Teſcham* et *Ioerbam* fluuios in Ienizeam ſe effundentes in deſerto Kirgiſico, loco inter agreſtes tumulos eminenti, repertum. Alterum autem ſaxum in editiore colle Kirgiſici deſerti ex aduerſo
Tab. 28. III. IV. profluentium in *Vybatbem Bee* et *Nonacb* oſtiorum poſitum fuit.

Quales nunc dicemus eas litteras eſſe? Nihil valde affeueranter dixerim. Attamen intelligere mihi videor, populos ad Caucaſum atque in omni tractu ſeptemtrionali vſos eſſe peculiari hoc genere litterarum. Clemens Alexandrinus in Stromatis (6) ex Pherecyde coniecturam duxit, Scythas certa ſymbola adhibuiſſe. Sed Faſti Siculi, qui in Heracleo minore deſinunt, inter gentes litteratas recenſent, Sarmatas, Scythas, Cappadocas, Iberos ſeu Georgianos et Baſtarnas. Et Euſtathius in Homerum, (8) illorum populorum litteras his verbis attigit: καὶ τῶν τινες ὕϛερον Σκυθῶν ἐσήμαινον, ἃ ἤθελον, εἴδωλά τινα καὶ πολυειδῆ γραμμικὰ ξέσματα ἐγγράφοντες, ἤτοι ἐγγλύφοντες πίναξι, τουτέϛι σανίσιν ἀλλοίαις τε καὶ ταῖς ἐκ πύξων, *quidam*, inquit, *poſteriorum*

(6) *f.* 567. (7) p. 60. ed. Rad. (8) f. 632. ed. Rom.

rum aetate Scytharum, quae vellent, ſymbolis quibusdam ſuis notabant, variaeque ductus figurae inſcribebant aut inſculpebant potius tabulis ſeu aſſeribus, tum aliis, tum buxeis. Τὰς ὕστερον Σκύθας vocat iſtas, quae veterem Scytharum ſedem occuparunt, alterius ſtirpis et corporis gentes. Tabulas etiam Graeci veteres adhibuerunt, ex quo *ὁ πίναξ καὶ τὸ πυξίον liber* dicebatur, et *ξύειν ſcribere*, vt alibi Euſtathius. Sic Romani ab rudium aetatum more *tabulas* appellarunt ſeu legum ſeu teſtamentorum codices. In Scythia et Thracia lapides litteratos paſſim exſtitiſſe, Herodotus (9) planis verbis teſtatur eosque Seſoſtri et Aegyptiacae expeditioni attribuit. Iornandes Geta, ſeu Alanus potius, ſcribit, auum ſuum Periam notarium fuiſſe apud Candacem regem Alanorum inferiorem Moeſiam tenentium. His addit: *ego quoque, quamuis agrammatus* (Latinis puta litteris nondum inſtitutus) *ante conuerſionem meam notarius fui.* Suas igitur et peculiares litteras Alani adhibuerunt.

Nicolaus Keder digniſſimus illa nobilitate et virtutum et doctrinae humanitatisque gloria, in numis Gothicis, quos magna cura collegit, ſibi ipſe minime ſatisfecit, quod runas nullas vsquam reperiret. Nec poterat aliter fieri, cum Scandinauicae runae fruſtra quaererentur in numis nec Sueonicis, nec Geticis. Nam quod doctiſſimi viri numos Macedonios et Thracios, ab illa

(9) L. II. c. 106.

eluuione gentium passim disseminatos, Hispanicos etiam quosdam a Gothis suis conflatos opinantur, in eo nimium pietati patriae, qua omnes populos antecellunt, tribuisse videntur. Is ipse numus, in quo Kederus amicissimus Othinum sibi reperisse videtur, ex illa seu Macedonum seu Thracum officina exiit. Testimonio esse possunt numi qui extant indubitatae fidei Macedonici et Thracici, quos si cum his conferas, de quibus dubitatur, quosue tamquam ex inopia consilii et ex desperatione Gothicos nonnulli etiam in Italia et Gallia vocarunt, nihil prius in mentem veniet, quam id quod sentio et dico. Vnum eximium habet cimeliarchium Imperatorium, plane talem, vt sunt caeteri omnes, quos Gothicos dicunt, sed in quo Π Graecum diserte scriptum est, veluti hic in figura vides, vt Perdiccam possis agnoscere alterutrum, nam id ego nunc non ago. Tametsi igitur in his numis frustra quaesitae litterae Alanorum et Getarum, forte et vetustiorum Scytharum, tamen mea opinione, his quae produxi, monumentis conseruatae sunt.

Tab. 28. Fig. V.

Inter primos populos, qui litteras ad sermonem adhiberent, Syri et Phoenices fuere, a quibus Graecos edoctos fuisse satis constat. Dolendum est tamen, ita periisse nobis Phoeniciarum memoriam litterarum, vt ex numis Punicis et Palmyrenis Persicisque monumentis nondum plane restitui potuerit. Bernardus Montefalco in Palaeographia Graeca (10) infeliciter tentauit aliquas lit-

(10) f. 118. vide Diarum Italicum eiusdem p. 365.

litteras reducere, vſus eſt enim numis principio truncatis littera vna, vt numus alius extremo caret apud Nicoluum Haymum Romanum. (11) Apud Haymum tamen is ipſe numus, quem Demetrio inſcriptum Montefalco exhibet, integris litteris omnibus reperitur. (1) Huic vni numo multum debemus, nec deſperandum eſt, in reſtituendis litteris Phoeniciis progreſſus inſignes fieri poſſe, ſi quis huic negotio ſe dedat. Litterae autem Phoenicicae minores exſtant in numis, maiores quadrataeque, forte et antiquiores in monumentis Palmyrenis. In monte Sinai quoque inciſae ſunt litterae, quas Coſmas Indicopleuſtes Iuſtiniano imperante vidit. Earum aliquas Athanaſius Kircherus in prodromo Copto et Oedipo edidit, alias mecum communicauit clariſſimus La-croſus e ſchedis Egmontii de Nyenborg nobilis Bataui, qui anno cIↃ IↃCCXXI. eas de rupibus Sinai montis deſcripſerat. Plane autem cum Phoenicicis, vt in numis exſtant, conueniunt. Phoenicicae litterae in Perſiam quoque commigrarunt, vt alibi è Diodoro Siculo monui. Apparet id etiam ex inſcriptionibus Perſepolitanis. Ab hac ſtirpe Parthicae quoque litterae propullularunt, quibus ad hanc vsque aetatem Gauri, Magorum reliquiae, pulſae ex Perſia quidem, ſed in India receptae, vtuntur. Primus eas Thomas Hyde Europaeis oſtendit. Armeni et Perſicis et Graecis litteris ſunt vſi, teſte Moſe Chorenenſi in genealogia Armenica poſteriorum Iapeti. (2) Is ſuo tempore vetuſta prouinciarum, vicorum, aedium,

(11) N. Theſoro Britanico. t. I. p. 105. (1) t. I. p. 100.
(2) p. 9. 410. ed. Amſtelod.

priuatarum litium foederumque acta Persicis Graecisque litteris exstitisse, Armenicas autem litteras ante Miesrobum neminem instituisse scribit. Rem omnem ita narrat Moses Chorenensis. Cum christiana religio auspiciis Tiridatis regis tertio post Christum natum seculo per S. Gregorium in Armenia radices egisset, ex eo tempore Miesrobus Varasdati et Arsacis IV. a secretis, vir religiosus et pietatis augendae cupidus, relicta aula concessit in monasterium. Atque cum esset Graecae linguae peritus, non modo praelegere populo sacras scripturas solebat, sed etiam interpretari. Graeci alii sacerdotes ignari Haicanae linguae praelegebant quidem Graeca, sed qui interpretaretur, erat nemo. Haec res commouit Miesrobum, vt apud animum suum constitueret, Graeca Armenice traducere. Nequidquam hoc tentabat, nisi si litterae exstarent, quibus ea commode transcriberentur. Communicato consilio cum Isaaco patriarcha Armeno, adiit Abelem quendam, quem audiuerat id ipsum agere, vt efformatis secundum Graecos litteris, Haicanum sermonem litteratum efficeret. Cum autem imperfecta omnia isthic reperiret, ad Danielem episcopum in inferiori Mesopotamia et Edessae ad Platonem rhetorem tabulario praefectum adit formasque litterarum fabricari instituit. Sed cum Plato in talibus parum se proficere videret, Epiphanium commendat magistrum suum, hominem perquam eruditum. Ad eum profectus Miesrobus Samosatam, acceptoque, diem obiisse Epiphanium, cum Rufino discipulo Epiphanii

Grae-

Graecis litteris doctiſſimo rem communicat, nec hilum proficit. Huic loco Moſes Chorenenſis τὸν Θεὸν ἀπὸ μηχανῆς aduocat. (3) Mieſrobo viſum videre animi cogitatione manum inſcribere lapidi omnes litterarum formas copulationesque Armenicae ſcripturae. Protinus Mieſrobus ita vt animo conceperat rem, Rufino oſtendit et perfecit. Perfecit autem, vt ait Moſes, litterarum formis e Graeco deriuatis, reuerſusque in Armeniam Iſaaco patriarchae expoſuit, hic autem regi Vramſchapo. Rem placebat conferri cum Theodoſio Graecorum imperatore et Attico patriarcha CPlitano, interea Iſaacus et Mieſrobus mittunt Edeſſam, Alexandriam Athenas et CPlin iuuenes, qui Graecis litteris inſtituti ſacras ſcripturas Haicana lingua interpretati ſunt. Easdem litteras Mieſrobus Iberibus et Georgianis tradidit, teſte Moſe Chorenenſi (4)

Haec ita de origine litterarum Armenicarum et Ibericarum Armeni. Ego vt non negauerim, eſſe quandam Graecarum Armenicarum et Georgianarum litterarum conuenientiam, vt aliae ex aliis ſint ductae, tamen id potius mihi ſentire videor, ex Graecis litteris factas eſſe Ibericas, ex Ibericis demum Armenicas, Ibericas vero antiquiores eſſe, vulgatasque per populos Scythicos, Alanicos, Geticos vsque in extremum orientem penetraſſe. Sane, ſi quis haec, quae produxi, tum Prutenica, tum neſcio cuius populi in diſertis Kirgiſicis

(3) p. 401. (4) p. 412.

ſicis monumenta inſpiciet atque cum Ibericis litteris conferet, is minime dubitauerit, ſummam earum litterarum congruentiam animaduerti. Duo autem ſunt genera litterarum Ibericarum, minora, quibus maxime vtuntur, ſed recentia, tum maiora, ſed vetuſta. Primum quod ſcio, alphabetum Ibericum vulgatum eſt in Europa anno CIↃIↃCXXIX. typis Congregationis Cardinalium de propaganda fide, cum quibusdam ſpeciminibus linguae. Sed minores tantummodo litterae eo in libello excuſae fuerunt. Eodem anno iisdem typis Stephanus Paolinus, adiuuante Nicephoro Irbacho Georgiano monacho S. Baſilii, edidit lexicon Georgianum et Italicum, in quo etiam alphabetum illud minus principio libri poſitum eſt. Maiores autem litteras primus nobis deſcripſit Franciſcus Maria Maggius Panormitanus, Clericus regularis Romae iisdem typis, anno CIↃIↃCLXX in ſyntagmate linguarum orientalium, quae in Georgiae regionibus audiuntur. In his prima eſt inſtitutio Georgianae linguae. Ex Maggio litteras illas Andreas Mullerus Greiffenhagius produxit. Praeterea Romae doctrina chriſtiana Bellarmini et Litania Mariae Lauretanae edita ſunt Georgiana lingua.

Tab. 28. Fig. VI. Vt igitur Ibericae litterae cum his Prutenicis et illis Kirgiſicis comparari poſſint, appoſui eas hic in tabula. Vnum adhuc aduertet lectorem, quod in monumento figuram ſtatuae plane Aegyptiacam cernit. Hoc nobis minime aduerſum eſt. Nam in Colchide, vnde has litteras profectas diximus, multa veſtigia Aegyptiacae

ſtirpis

ſtirpis cum ab Herodoto tumab aliis animaduerſa ſunt. Herodotus ſic ait : (5) Φαίνονται ἐόντες οἱ Κόλχοι Αἰγύπτιοι, νοήσας δὲ πρότερον ἀυτὸς, ἢ ἀκέσας λέγω *Colchi videntur Aegyptii eſſe : id dico, quod iudicio quodam meo et ſenſu animaduerti, prius quam ab aliis idem referri accepi.* Et Colchi quidem, quos percunctatus eſt, e priſca memoria aſſeuerabant, maiores ſuos ab Aegypto profectos. Aegyptii non ita aſſeuerate quidem, attamen vt opinarentur Colchos ab Seſoſtris exercitu iis in regionibus relictos fuiſſe colonos. Argumento erat, quod vultus Colchorum Aegyptiaca ora referrent, quodque ſoli illis in tractibus Colchi et Aegyptii lini fabricas haberent et quod lingua vtriusque populi congueret, quod poſtremum maximi facio. Dionyſius Periegetes (6) idcirco quoque

Πὰρ δὲ μυχὸν Πόντε, μετὰ χθόνα Τυνδαριδάων
Κόλχοι ναιετάεσι, μετήμυδες Αἰγύπτοιο.

Ad intimum Ponti receſſum, poſt terram Tyndaridarum
Colchi degunt, colonia Aegypti.

Itaque mirum non eſt, ſi e Colchide et Iberia aliquid Aegyptiacis ſimile ad vicinas gentes vna cum litteris penetrauit.

(5) l. II. c. 104. (5) v. 688.

NICOLAI BERNOVLLI
Ioh. Fil.
VITA.
C. G.

Annum cIↄIↄccxxvI. vti ſingulari *CATHARINAE AVGVSTAE* clementia memorabilem, ita duplici funere luctuoſum Societas noſtra habuit, quando paullo ante publicum illum Academicorum conuentum Imperatricis praeſentia illuſtrem, *Michael Burger* primus, deinde et *Nicolaus Bernoullius* e viuis diſceſſerunt. De *Burgeri* quidem vita nihil admodum dicendum habemus, donec certiora nobis documenta offerantur, interea non poſſumus quin vitam *Nicolai Bernoulli* collegae deſideratiſſimi et grato animo recolamus ipſi, et aliis, quibus res noſtrae ac bonarum artium incrementa curae ſunt, ſeruandam commendemus.

Originem duxit e gente, quae primarias in Heluetia dignitates iam inde a longinquo tempore obtinuit. Auus eius paternus fuit *Nicolaus Bernoullius ſupremi in Republica Baſileenſi tribunalis Aſſeſſor*, huius filius natu maximus *Iacobus Prof. Math. Baſileenſis.* Secundus *Nicolaus Reipubl. Baſil. Senator Pater Nicolai Bernoulli Profeſſoris Log. Baſileenſis.* Tertius *Iohannes, Profeſſor Math. Baſil.* Quartus *Hieronymus, mercator.* Mater Nicolai noſtri ſuperſtes eſt *Dorothea, Danielis Falkneri* filia, cuius auos pro-

proauosque a multis faeculis vel inter praefides vel certe inter praecipuos qui eiusdem Respublicae gubernacula tenuerunt, numerari conftat, ita vt dubitari poffit, vtrum maiorem haec familia claritatem ex ampliffimis muneribus, quibus domi praefecta fuit, acceperit, an maiorem fuae familiae famam atque celebritatem *Iacobus Bernoullius* et *Iohannes* frater, huiusque filii et fratris filius incredibili rerum penitus abditarum fcientia intulerit. *Iohannem* autem *Bernoullium* Nicolai noftri patrem fine elogio nominare praeftat, quam committere vt tanti viri merita tam longo tempore ab acutiffimis iudicibus publice cognita et commendata mediocri laude minuantur.

Natus eft Nicolaus VI. Calend. Febr. *ft. v.* A. clↃlↃc LXXXXV. Bafileae, fed infans vix octomeftris cum parentibus fuis Groningam migrauit, qui poft decem annos elapfos tribus aucti liberis Bafileam reuerterunt. Erat in noftro a prima pueritia ingenium ductile et fequax, et quaedem alacritas quafi connata, quam ob rem nihil omiferunt parentes, quod ad primam filii educationem (erat enim natu maximus) pertineret. Octo annorum puer germanice, gallice, belgice et latine loquebatur. Vifusque fuit, dum in Heluetiam ex Belgio redirent, fi qua in vrbe paullum moraretur et linguam et mores hominum imitari ex tempore. Patriae redditus, litteris fedulus incubuit. A. clↃlↃccvIII. ciuium Academicorum, A. clↃlↃccxI. Doctorum Philofophiae numero, patre *Decano*, adfcriptus, quo tempore cum fextum et decimum annum egreffus effet, ac de vitae, quod eligeret, genere deliberaret, etiamfi amabat litterarum ftudia, ta-

 men

men quod aegre ferret vitam illam quasi vmbratilem et secessum quem requirunt, parum abfuit, quin ea relinqueret omnino, nisi patris exemplo atque auctoritate confirmatus fuisset. Idcirco momentis omnibus probe expensis animum ad Iuris prudentiam conuertit; erat autem illud aetatis Geometriae non solum peritus, sed in hac scientia excellens, et quae reliquit illo tempore scripta, ostendunt eum *Arithmeticae Differentialis*, *Integralis* et *Exponentialis* iam tunc gnarum ac difficillimis in Mathesi problematibus soluendis parem fuisse, quin imo patrem in scribendis ad exteros eruditos epistolis, quarum argumenta ex recondita Mathesi petita erant, subleuabat identidem, ita vt tanto magistro vsus, breui tempote plus sciret quam ipse sibi didicisse videretur. Id vero apparuit, cum amore fraterno ductus, Danielem Bernoullium, qui vndecimum annum agebat, iis ipsis doctrinis instituerct, quanquam paullo post agnouit, se discipulum nactum esse, cui quod porro discendum statueret vix ipse inueniret. Sed his rebus occupatus nihilo minus Iuris prudentiae, quam sibi delegerat, operam dedit, praeceptore vsus *Iacobo Battierio* celebri dum viueret Iuris Antecessore Basileensi, eo successu, vt Idibus Nov. A. cIↄ Iↄ ccxv. post publicam *de Iure detractus* disputationem, *Licentiam*, quam vocant, ad supremos in Iure honores impetraret.

Occasionem deinde sibi a patre oblatam in peregrinas terras proficiscendi summa cum voluptate arripuit, qua in re partim indoli nouarum rerum quas disceret atque tractaret cupidissimae obsecutus est, partim con-

consuetudini gentis suae, quae adolescentibus augendae apud exteros doctrinae et humanitatis caussa quandam videtur peregrinandi legem imposuisse, satisfecit. Inter Italos cum aliquamdiu moraretur, in amicitiam illustrium virorum *Poleni*, *Manfredorum*, *Riccati etc.* receptus fuit. *Reghino* autem et *Fabrisio*, in quibus tam morum elegantiam quam iudicii acumen spectabat, familiarissime vsus est, in Galliam deinde progressus Lutetiae Parisiorum *Monmortium* et *Varignonum* in primis coluit. Iam in eo erat, vt magnum ex peregrinatione fructum perciperet, sed morbo repente afflictus, cum spem per plures regiones eundi accisam videret, mutato prorsus consilio in patriam, quam primum potuit, curandae valetudinis caussa remigrauit A. clↄ lↄccxvIII. vbi instauratis viribus Mathesin rursus maiore quam vnquam antea contentione exercuit, inuenta sua digessit et litterarum commercia cum eruditis vel continuauit, vel noua instituit. Interea ab amicissimo Fabrisio identidem vt Italiam reuisere vellet, incitatus, tandem repugnare non potuit cum simul ab illustri *Vezzio* Nobili Veneto qui ad multiplicem qua praeditus erat, doctrinam, matheseos quoque scientiam adiungere gaudebat, humanissime inuitaretur. Huius viri erga se adfectum ac beneuolentiam saepe praedicauit. Vtebatur autem eius contubernio duos annos circiter, nec a latere illustris viri discessisset, nisi patris iussu Basileam fuisset reuocatus A. clↄ lↄ ccxxII. vbi mox data occasione muneris *Professoris iurisprudentiae* ambiuit et in tribus competitoribus fuit qui sorte certabant. Postulant enim leges Basileenses, vt candidati, qui dignissimi aliquo munere habentur tres omnino eligantur communibus suffragiis, vnus denique ex tribus sorte vincat, quam cum hic aduersam sibi expertus esset, paullo post, initio anni cIↄIↄccxxIII. Bernam honorifico senatus decreto vocatus (ea enim in vrbe sorte non certatur) ad simile munus concessit et quae solent ingenii atque scientiae specimina edidit.

In hoc statu cum ex animi sententia viueret, atque in amicitiam *Tillieri* et *Sinneri*, primariorum virorum ciuitatis suo merito venisset, ita erat huic vrbi addictus, vt ab his amicis et hoc genere vitae, quamuis alio semel atque iterum aequissimis conditionibus vocaretur, diuelli non posset. Vnum permoleste tulit, quod fratris contubernio, qui eo tempore erat Venetiis, tam diu carebat, quem non modo vt fratrem et discipulum, sed velut amicum et familiarem, et sibi maxime necessarium diligebat. Fuit quidem certe inter eos animorum consensus atque concordia singularis, nihil accidebat alteri quod alter ad se pertinere non putaret, neque satis habebant permiscere ac mutuo amore confundere quidquid vterque in Mathesi suo ingenio excogitauerant, in lucem edere parabant has ipsas lucubrationes communi nomine, vt omnes intelligerent, hoc inuicem affectu atque indulgentia fuisse par fratrum Bernoulliorum. Ex quo iudicari potest, quanta cum voluptate oblatum sibi munus in Academia Petropolitana vterque susceperint. Praeterea et *Daniel Bernoullius* conditiones atque praemia sub idem tempus in alia regione sibi destinata, spe maioris lucri, quod in fratris conuictu positum erat, repudiauit, ita vt ambo agnoscerent illustris Praesidis nostri prouidentiam

tiam, quo auctore atque adiutore factum est, vt quos fatalis quaedam ſors in ipſa patria disiunxiſſet, eos fortuna minime exſpectata in terra tam diſtante rurſus conſociatos foueret. Igitur *Nicolaus* noſter poſtquam tertium fere annum Bernae transegerat, Baſileam rediit et mox compoſitis ad abitum rebus ſe vna cum *Daniele* fratre in viam dedit VIII. Kal. Septembr. Petropolin venit VI. Kal. Nouemb. A. cIↄIↄ ccxxv.

Hic primum valetudine ſic ſatis ſecunda vſus eſt, ſeque totum ad ſubtiliſſimam matheſin, cui a pueritia adſuetus erat, contulit, Praeſidi noſtro inprimis carus, fratri, vt diximus, omni ſtudio coniunctus, collegis integritate amicitiae ſuauis atque vtilis, omnibus candore pariter et humanitate commendatiſſimus; vt nihil homini hoc ingenio ac fortuna ad beate viuendum deeſſe videretur. Sed quid eſſe poteſt in hac vitae inconſtantia diu? Poſt octo admodum menſes febre lenta, quae principio minus periculoſa credebatur, correptus, deinde afflictus etiam et oppreſſus VI. Calend. Aug. cIↄIↄccxxvI. moribundo ſimilis iacuit, et quamquam remittebat dolor, tamen viribus iam minutis atque exhauſtis biduo, poſt horam tertia matutina mentis et rationis ad extremum compos exanimatus eſt.

Iam ſeptimo ante obitum die, cum mortem imminentem praeuideret nec fratri diſſimulare poſſet, epiſtolas nonnullas, quas ſibi ſuperſtites nolebat, combuſſit. Corporis anatome vomicam inteſtini manifeſtauit, quae nulla humana ope ſanari poterat. Ingenii ſui monumenta tum in actis Lipſienſibus noſtrisque commentariis, tum tam vero magnam partem in ſcriptis, quae a *Daniele* conſeruantur, reliquit. Funus *CATHARINA AVGVSTA* ſuo ſumtu efferri iuſſit et cum in Academiam veniſſet, vocato ad ſe defuncti fratre, ſui luctus ſimul et clementiae (quae vna erat in hac calamitate maxima conſolatio) indicium dedit.

Sed quo animo exiſtimemus patrem fuiſſe, cum nuncium acciperet de morte filii, quem tanta cura educauerat, in quem tantum contulerat ſuae doctrinae ſuarumque virtutum, in quo, vt paucis dicam, nihil inueniebatur, quod Bernoulliano nomine dignum non eſſet. Quis iniuſtum neget ex tam improuiſo, tam acerbo, tam alte adacto vulnere dolorem? quem ſi vlla res lenire vel minuere poteſt, ſuperſtitum certe filiorum in patris veſtigia ſuccedentium magna indoles et praeclara inſtitutio mitigabit. Inter omnes qui aliquod inſigne nomen in matheſi, noſtra memoria, adepti ſunt, pauci filios reliquerunt eadem diſciplina perfecte eruditos, *Iohanni Bernoullio* prope dicam ſoli contigit, vt aetatem ingraueſcentem filiorum ſuorum meritis partim iam confirmatis et in luce poſitis, partim adhuc in ſummam ſpem adoleſcentibus ſolari poſſet, qui tam proſperi euentus quando non obſcure etiam ad collegium noſtrum pertinent fructumque nobis ampliſſimum promittunt, vehementer cupimus atque exoptamus, vt vir praeſtans virtutis ac ſcientiae gloria, depoſito filii luctu, tantis bonis praeſentibus quam diutiſſime perfruatur.

OB-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE

PETROPOLI

FACTAE.

CONTINUATA RELATIO ECLIPSIUM SATELLITUM IOVIALIUM PETROPOLI OBSERVATARUM

a

D. I. N. DeL'Isle.

A. 1728.	N. St. Die	H.	′	″	
Sept.	8	16	34	30	IMmersio primi. Intra pauca scrupula secunda tubis 13 et 15 pedum observata.
	17	12	57	36	Immersio primi. Intra 15″ dubia propter nubes raras, tubo 13 pedum. Tempus vero unico horologio constat.
Octob.	1	16	53	16	Immersio primi bona observatio tubo 15 pedum.
	3	11	21	56	Immersio primi exacta, tubis 13 et 15 pedum.
	7	13	3		Immersio quarti } tubis
		15	5		Emersio quarti } 13 et 15 pedum. Ultra scrupula prima nil licuit definire amplius propter

N. St.		Tempus verum.			
					observationis incertitudinem lento satellitis motui et obliquitati incidentiae imputandam.
1728	Die	H.	′	″	
Octob.	8	12	23	45	Immersio tertii tubo 13 pedum.
		14	58	51	Emersio *tertii* tubo 13 pedum.
	10	13	17	23	Immersio primi tubo 15 pedum bene observata.
Nov.	2	13	30	43	Immersio primi tubo 13 pedum exacte
Dec.	2	15	28	41	Immersio primi tubo 15 pedum, dubia intra aliquot secunda.
	4	9	57	2	Immersio primi tubo 15 pedum.
	11	11	46	5	Immersio primi tubo 13 pedum, dubia intra pluscula secunda. Tempus item verum uno horologio tantum definitum est.
	14	14	24	30	Immersio secundi aliquot secundis dubia, tubo 22½ pedum: tempus verum

	N.St. Die	Tempus verum. H.	′	″	
1728 Dec.					rum uno horologio constat.
	18	13	36	30	Immersio prim. tubo 15 pedum. Satelles Iovi quam proximus fuit. Tempus vero uno constat horologio.
1729 Ianuar.	8	14	6	3	Emersio secundi paucis secundis dubia tubo 22½ p.
Febr.	13	6	51	37	Emersio primi tubo 15 pedum. Satis bene.
	27	8	26	42	Emersio secundi tubo 13. pedum. Mediocriter.
Mart.	6	11	5	55	Emersio secundi tubo 15 pedum.
		12	39	52	Emersio primi tubis 13 et 15 pedum.
	7	6	33	7	Immersio } quarti. tubo
		10	14	15	Emersio } 15 pedum.
	31	7	30	11	Emersio primi. Tubo 15 pedum. Tempus verum duobus horologiis definitum est.
April.	7	11	7	25	Emersio secundi. Tubo 15. pedum.

		H.	′	″	
1729 April.	14	11	24	12	Emerſio *primi* aliquot ſecundis dubia. *tubo* 13. p.
	30	9	46	9	Emerſio *primi. tubo* 15 pedum. Celo ſereno.
Maii.	4	11	6	2	Emerſio tertii tubis 13 et 15 pedum.

Pleraſque harum obſervationum tutas praeſtiti ab errore qui nonnunquam ex eo oriri poteſt, ſi non niſi unico horologio tempus verum definitur. *Licet* enim iſtud motui ſolis duobus illis meridiebus, quas obſervatio intercedit, exacte comparatum fuerit, errori nihilominus locus eſt ſi motus horologii non ſit uniformis. Remedio fuerunt quatuor horologia poſtremae hac Iovis apparitione uſurpata, quae ſibi ipſis ſemper comparavi ſtatim poſt tranſitum Solis in linea mea meridiana capillari, itemque mox poſt alias quaſcunque ſive diurnas ſiue nocturnas obſervationes, ſi quidem veri temporis exactam poſtularunt notitiam. Non ſine voluptate expertus ſum ſaepius, quod tempus verum ex ſingulis horologiis deductum idem prorſus provenerit. Quandoque tria conſpirarunt horologia, quartum aliquot ſecundis differebat, quod, ſi ſolum adfuiſſet errorem ita peperiſſet. Obſervationes quarum tempora vera non niſi unico aut duobus horologiis potuerunt definiri notatae ſunt a latere praecedentis catalogi. Ubi nihil notatum eſt, ibi ſubintelligere oportet quod eiusmodi obſervatio tempus ſuum verum ex quatuor aut tribus horologiis conſentientibus habeat.

OB-

OBSERVATIONES ALTITUDINIS POLI IN *OBSERVATORIO IMPERIALI* QUOD PETROPOLI EST HABITAE

a

D. I. N. DeL'Isle.

AB eo tempore quo in hanc urbem venimus, polarem eius altitudinem certo determinare, refractionesque ibi indagare ſtuduimus. Pro altitudine poli omnes obſervavimus ſolis meridianas altitudines quas caelum permiſit; quadrante ab initio uſi ſumus 18 pollicum in radio, quem ex Gallia attulimus.

Ab 11. Martii, anni 1726. novi ſtili (qui ſextus dies fuit poſt adventum noſtrum in hanc urbem) usque ad 2. Aprilis anni 1727, hoc inſtrumento ultra 150. cepimus meridianas ſolis altitudines; Plurimas fixarum ſtellarum altitudines meridianas tam boreales quam auſtrales nunc non recenſemus.

Pro refractionibus obſervauimus anno 1726 et ab initio anni 1727 quam plurimas ſolis altitudines matutinas

tinas aeque ac veſpertinas diebus pluribus continue captas, ab horizonte duodecimum usque gradum, menſe Iunio pro refractionibus aeſtivis, menſibus autem Novembre, Decembre, Ianuario et Februario pro hibernis refractionibus obſervatum eſt.

Cum vero Frater meus non multum poſt aequinoctium vernum anni 1727 Aulae iuſſu Archangelopolim et Kolam mitteretur easdem ut ibi faceret obſervationes, atque ſecum quadrantem, cuius radius 18 pollicum eſt, auferret, coepi ſub ipſum ſolſtitium aeſtivum huius anni 1727 quadrantem, cuius radius trium eſt pedum, uſurpare, eoque altitudines ſolis meridianas, ordine non interrupto, obſervavi a 12 Iunii ad praeſens usque tempus, ſumma qua potui diligentia, eaque exactitudine, cuius inſtrumenti magnitudo capax eſt, eo fine ut poſtea poli altitudo pro hac urbe certius elici poſſit.

Pro refractionibus, hoc quoque inſtrumento novas obſervationes inſtitui, magnumque numerum altitudinum extra meridiem diebus pluribus continuis menſe Iunio anni 1728 captas acquiſivi; poſtquam ex obſervationibus integri anni hic quadrans mihi omnino perſpectus erat.

In poſtremis hiſce obſervationibus refractionum gratia habitis, quatuor horologiis oſcillatoriis uſus ſum, quae mihi eo profuerunt, ut certitudo maior fuerit de motibus eorum regularitate, quam quidem ſupponere opus eſt in calculo pro refractionibus methodo mihi uſitata inſtituto.

Eo-

Eodem quadrante obſervavi quoque ſub finem anni 1728, et initio anni ſequentis utramque ſtellae polaris altitudinem meridianam, quod quidem hucusque facere non poteram ob diverſa impedimenta.

Hae ſunt obſervationes omnes poſteriori hoc inſtrumento factae, quas nunc recenſebo tanquam magis idoneas ad poli altitudinem certius definiendam in obſervatorio imperiali, in quo hae omnes poſtremae obſervationes habitae ſunt.

I.

Deſcriptio maioris Quadrantis methodique quo uſus ſum in eo verificando

QUadrans trium pedum in radio, quo uſus ſum poſt Fratris mei abitum hucusque, Londini fabrefactus eſt a I. Rowley, ad modum ſextantis cuius deſcriptionem et delineationem dedit Flamſtedius in tertia parte Hiſtoriae ſuae coeleſtis non ita pridem in publicum emiſſae.

Praeter tubum alterutri laterum quadrantis affixum, alter circa centrum quadrantis mobilis aderat. Mobilis tubus inſerviebat altitudinibus aſtrorum capiendis, poſito prius inſtrumento in ſitum verticalem ope perpendiculi ex centro per diviſionis initium pendentis. Sic tubus mobilis ad aſtri obſervandi altitudinem dirigebatur; Poterat autem tubus admodum lente moveri ope cochleae perennis dentibus inſertae qui extremitati limbi inciſi ſunt.

Limbo nulli linearum ductus insculpti fuerunt praeter transversales decem minutorum intervallis a se invicem distantes, eorum vero subdivisio in singula minuta extabat in parva regula, sive linea fiduciae quae mobilis erat una cum tubo.

Poterant quoque subdivisiones transversalium haberi per circuitus cochleae perennis; Verum, quia constructio talis mihi nimis composita, minusque exacta visa est, substuli tubum mobilem resque ceteras ad eum pertinentes, usurus solo tubo lateri quadrantis affixo, haerente in averso quadrantis plano.

Necesse fuit ob hanc causam ductus transversales ipsos in singula minuta prima subdividere per circulos concentricos. D. Vignon in se suscepit opus; sustulit apparatum priorem quo centrum quadrantis instruebatur, et substituit laminam latam orichalceam plano quadrantis affixam. In ea centrum notavit, ex quo circulos concentricos duxit radiis debitis, quibus subdivisio in singula minuta absolvitur. Quod attinet perpendiculi suspensionem, eam tam subtilem reddidimus quam potuimus, namque centro instrumenti adaptavimus mucronem tenuissimae acus, quem circumdedit annulo satis amplo capillus, qui pondus cui parest ferendo, appensum habet.

Tubus quadratus adest, quo perpendiculum includitur et a vento tuetur. Quin et ad aestimandas quam exactissime minutorum subdivisiones in qualibet observatione, lens adhibetur in regione capilli quae notabiliter amplificat.

Ante-

Antequam hoc inſtrumentum ad obſervationes adhibuimus, ſumma diligentia verificavimus per plures dies continuos ſitum tubi fixi quem habet reſpectu diviſionis; idque methodo inverſionis a D. Picarto demonſtrata in tractatu ſuo de menſura terrae, et poſt hunc, a D. de la Hire ubi agit de uſu ſuarum tabularum aſtronomicarum.

Poſthaec 6 vel 7 notas in obiecto diſſito elegimus, ad quas dereximus quadrantem eadem die et hora, qua eius errores per inverſionem deteximus, unde verum notarum ſitum reſpectu obſervatorii definivimus. Atque ſic in poſterum nil amplius requirebatur pro quadrantis examinatione quam ut eum ad notas correctorias dirigeremus, quod quidem ſemper facimus paulo ante quamcunque altitudinis obſervationem habendam aut mox poſt habitam; hoc medio quadrantis error innoteſcit, quem obſervationis tempore habet.

Quam ita examinando quadranti impendimus curam, ea inutilis non fuit; Nam cognovimus quod quandoque tubus nihilominus luxatus fuerit, licet omnem adhibuerimus diligentiam ut caute et circumſpecte tractaretur, hoc eſt, ne tubus tangeretur. Verum hoc obſervationibus nil obeſt, quia, veluti iam diximus, quantitatem emotionis tubi deprehendimus quoties obſervatio habetur.

II.

Altitudines meridianae ſtellae polaris neglecto quadrantis errore.

Altitudines polo altiores veſperi captae.

A. 1728. N. St.		°	′	″
Nov.	29	61	42	30
Dec.	1	61	42	35
	3	61	42	35
	4	61	42	40
	14	61	47	0
	18	61	47	20
	19	61	46	15
	22	61	46	10
	23	61	46	15
	24	61	46	10
	28	61	46	15
A. 1729 Ianuar.	8	61	46	20

Altitudines polo humiliores mane captae.

A. 1728. N. St.		°	′	″
Nov.	30	57	25	0
Dec.	1	57	25	0
	4	57	25	0
	19	57	30	0
	20	57	28	40
	23	57	28	35
	24	57	28	40
	25	57	28	40

Ex hiſce apparet obſervationibus 1, quod quadrans a 29 Novembris ad 4 Decembris nulli ſenſibili mutationi obnoxius fuerit. Maxima tum altitudo fuit 61°. 42′. 35″, et minima 57°, 25′.0″. quo diameter paralleli ſtellae polaris apparens concluditur eſſe 4°. 17′.35.

2. A 19. Decembris veſpere ad finem usque obſervationum quadrans itidem ſenſibiliter mutatus non fuit. Maxima tum altitudo fuit 61°. 46′. 15″. minima vero

ro 57°, 28'. 40", quo denuo diameter apparens paralleli ſtellae polaris conficitur eſſe 4°, 17'. 35". Quanquam itaque quadrans, interea dum binae hae obſervationum ſeries inſtitutae fuerunt immutatus fuerit minutis 3' 40", apparens tamen polaris paralleli diameter certo ſcitur, qualis a diviſione quadrantis exhibetur.

III.

Errores Quadrantis cum obſervarentur ſtellae polaris altitudines.

QUoniam altitudines ſtellae polaris noctu captae ſunt, non potuit quadrans ad notas dirigi eotempore quo obſervatio facta eſt. Verum quia quadrans ſenſibilem mutationem per plures dies paſſus non eſt, pro erroribus veris ii haberi poſſunt qui obſervati ſunt quovis meridie obſervationem polarem antecedente vel ſequente.

Hi ſunt autem quadrantis errores quos hiſce meridiebus invenimus, ſumendo medium eorum quae quolibet meridie ex ſex illis vel ſeptem notis deprehenſa fuere.

Error quadrantis additivus.

	ſub meridiem '	"		*ſub meridiem* '	"
A. 1728. Nov: St. n. 29	23	25	*A. 1728. Dec. St. n.* 14	18	25
30	22	55	19	18	55
Dec. 1	22	50	22	19	15
2	23	10	23	19	10
3	22	40	24	19	15
			25	19	35

 Sunt

Sunt hic errores qui differunt inter se, qui tamen differre non debebant, cum notum sit ex prioribus observationibus quadrantem tum immutatum mansisse. Verum maxima harum differentiarum pars provenit a variationibus, quibus, uti notum est, obnoxiae sunt refractiones horizontales, et quae horizonti sunt vicinae. Non multum autem errabitur si medium eorum arithmeticum sumatur.

Pro prima igitur observationum serie, hoc est pro iis, quae ab 29 Novembris usqne ad 4. *Decembris* factae sunt, quadrantis error est 23′ 0″. Pro altera vero serie observationum quae ab 19 Decembris vesperi ad finem usque factae sunt, habetur error 19′ 20″, qui utrinque additivus est, unde maxima altitudo correcta fit 62°, 5′, 35″. minima vero 57°, 48′. 0″.

IV.

De electione alicuius tabulae refractionum.

Methodus qua ad refractiones indagandas utor poli altitudinem cognitam assumit, eoque ipso etiam refractiones. Circulus tamen vitiosus committitur nullus; approximatio potius instituitur quam in eiusmodi inquisitione vitare non licet, non secus ac in aliis astronomicis problematibus fieri assolet.

Coactus igitur refractionibus uti antequam quae regioni huic conveniunt repererim, tabulam eligere debui quae refractiones exacte computatas habeat, secundum regulam aliquam geometricam simplicem et experientiae satis conformem. Hanc ob causam aliis omnibus prae-

tuli

tuli quam D. Caſſinus dedit in Commentariis Academ. Pariſ. Anni 1714. pag. 33. editionis Pariſienſis, in qua aſſumit quod quivis lucis radius per athmoſphaeram arcum circularem deſcribat.

Utut veroſimile non eſt curvam radiorum circulum eſſe, attamen, quia curvae quas ad computum refractionum adhibere liceret differentiam attentione multa dignam non inferrent, utar ego ſuppoſitione Caſſiniana tanquam omnium ſimpliciſſima.

V.

Computatio altitudinis poli ex obſervationibus ſtellae polaris.

°	′	″	
62	5	35	Apparens ſtellae altitudo maxima
		31	Refractio ſubtrahenda
62	5	4	Vera altitudo maxima
57	48	0	Apparens ſtellae altitudo minima
		37	Refractio ſubtrahenda
57	47	23	Vera altitudo minima
4	17	41	Vera diameter paralleli ſtellae polaris
2	8	50	Diſtantia ſtellae polaris a polo.
59	56	13	Altitudo poli pro obſervatorio Imperiali Petropolitano.

VI.

VI.

Observationes pro solis altitudine meridiana sub solstitio aestivo.

NOtum est quod circa solstitia solis declinatio admodum lente variet, quia etiam quantitas variationis huius nota est ex variis solis distantiis a solstitio, sequitur inde, quod ex observationibus plurium *dierum* ante et post solstitium altitudo solstitialis certius quam ex sola meridiana altitudine solstitio proxima concludi possit.

Observationes vero omnes quas comparavi ut ex iis veram altitudinem solstitialem aestivam concluderem, sunt sequentes.

Die 15. Iunii A. 1727. n. St.

°	′	″	
53	20	20	Altitudo apparens limbi solaris superioris
	19	20	Error quadrantis addendus
		44	Refractio
		6	Parallaxis
	15	51	Semidiameter solis
53	23	11	Altitudo vera centri solaris
	9	14	Declinationis differentia a solstitiali declinatione
53	32	25	Altitudo solstitialis.

Die

Die 18 Iunii 1727.

°	′	″
53	25	45
	20	30
		43
		6
	15	50
53	29	48
	2	49
53	32	37

Die 19 Iunii

°	′	″
53	27	35
	20	20
		43
		6
	15	50
53	31	28
	1	30
53	32	58

Die 20 Iunii

°	′	″
53	28	0
	20	20
		43
		6
	15	50
53	31	53
		35
53	32	28

Die 22 Iunii 1727.

°	′	″
53	26	40
	22	30
		43
		6
	15	50
53	32	43
		1
53	32	44

Die 24 Iunii

°	′	″
53	25	20
	22	30
		43
		6
	15	50
53	31	23
	1	6
53	32	29

Die 25 Iunii

°	′	″
53	24	20
	22	35
		43
		6
	15	50
53	30	28
	2	16
53	32	44

Die 27 Iunii. 1727

°	'	"
53	20	50
	22	25
		44
		6
	15	50
53	26	47
	5	49
53	32	36

D. 11. Iun. 1728

°	'	"
53	6	40
	22	20
		44
		6
	15	51
53	12	31
	20	19
53	32	50

Die 12 Iunii

°	'	"
53	11	45
	21	0
		44
		6
	15	51
53	16	16
	16	27
53	32	43

D. 13. Iunii 1728

°	'	"
53	15	0
	21	10
		44
		6
	15	51
53	19	41
	12	58
53	32	39

D. 14. Iunii

°	'	"
53	17	50
	21	25
		44
		6
	15	51
53	22	46
	9	55
53	32	41

D. 19. Iunii.

°	'	"
53	28	45
	19	30
		43
		6
	15	50
53	31	48
		45
53	32	33

Die

D. 20 Iunii 1728

°	′	″
53	29	30
	19	25
		43
		6
	15	50
53	32	28
		11
53	32	39

D. 21 Iunii

°	′	″
53	30	30
	18	45
		43
		6
	15	50
53	32	48
		0
53	32	48

D. 24. Iunii

°	′	″
53	28	15
	18	45
		43
		6
	15	50
53	30	33
	1	57
53	32	30

D. 25. Iunii 1728

°	′	″
53	26	45
	18	50
		44
		6
	15	50
53	29	7
	3	25
53	32	32

D. 26. Iunii

°	′	″
53	25	15
	18	45
		44
		6
	15	50
53	27	32
	5	18
53	32	50

D. 27. Iunii.

°	′	″
54	22	45
	18	45
		44
		6
	15	50
53	25	2
	7	38
53	32	40

 Dic

D. 28. Iunii 1728.

°	′	″
53	18	25
	20	30
		44
		6
	15	50
53	22	27
	10	18
53	32	45

D. 29. Iunii.

°	′	″
53	15	0
	20	30
		44
		6
	15	50
53	19	2
	13	23
53	32	25

D. 30. Iunii.

°	′	″
53	11	40
	20	30
		44
		6
	15	50
53	15	42
	16	56
53	32	38

D. 8. Iunii 1729.

°	′	″
52	53	10
	20	10
		45
		6
	15	51
52	56	50
	35	41
53	32	31

D. 15. Iunii.

°	′	″
53	21	20
	20	15
		44
		6
	15	51
53	25	6
	7	53
53	32	59

D. 16. Iunii

°	′	″
53	23	40
	20	10
		44
		6
	15	51
53	27	21
	5	32
53	32	53

Die

D. 17. Iunii 1729.

°	′	″
53	25	25
	20	10
		43
		6
	15	50
53	29	8
	3	36
53	32	44

D. 20. Iunii 1729.

°	′	″
53	28	35
	20	5
		43
		6
	15	50
53	32	13
		17
53	32	30

Medium arithmeticum inter 27. veras altitudines meridianas ſolſtitii aeſtiui tribus hiſce annis repertas eſt 53°. 32′. 40″.

VII.

Obſervationes pro ſolis altitudine meridiana ſub ſolſtitio hiberno.

Die 8. Decembris 1727.

°	′	″
7	23	20
	20	20
	6	54
		10
	16	22
7	20	34
	45	7
6	35	27

D. 11. Dec. 1727.

°	′	″
7	6	30
	20	40
	7	9
		10
	16	22
7	3	49
	27	48
6	36	1

D. 17. Dec. 1727.

°	′	″
6	43	45
	20	45
	7	28
		10
	16	22
6	40	50
	5	38
6	35	12

D. 18. Dec.

°	′	″
6	42	0
	20	50
	7	30
		10
	16	22
6	39	8
	3	35
6	35	33

D. 9. Ian. 1728.

°	′	″
7	53	25
	21	35
	6	29
		10
	16	18
7	52	23
1	16	40
6	35	43

D. 10. Ian. 1728.

°	′	″
8	2	0
	21	25
	6	23
		10
	16	18
8	0	54
1	25	14
6	35	40

D. 14. Dec.

°	′	″
6	52	35
	18	25
	7	22
		10
	16	22
6	47	26
	11	52
6	35	34

D. 19. Dec.

°	′	″
6	41	25
	18	55
	7	32
		10
	16	22
6	36	36
	1	2
6	35	34

Die

D. 22. Dec. 1728

°	′	″
6	40	30
	19	15
	7	32
		10
	16	23
6	36	0
		11
6	35	49

D.8.Ian.1729.

°	′	″
7	54	0
	19	15
	6	27
		10
	16	23
7	50	35
1	14	51
6	35	44

D. 9. Ian. 1729

°	′	″
8	2	20
	19	15
	6	18
		10
	16	23
7	59	4
1	23	18
6	35	46

D. 10. Ian.

°	′	″
8	11	25
	19	15
	6	10
		10
	16	23
8	8	17
1	32	12
6	36	5

Media inter 12. has altitudines ſolſtitii hiberni meridianas veras duos intra hos annos acquiſitas eſt 6° 35′ 40.

VIII.

VIII.

Altitudo Aequatoris et obliquitas Eclipticae.

°	′	″	
53	32	40	Altitudo ſolſtitii aeſtivi vera
6	35	40	Altitudo ſolſtitii hiberni vera
46	57	0	Diſtantia tropicorum
23	28	30	Obliquitas eclipticae
30	4	10	Altitudo aequatoris
59	55	50	Altitudo Poli Petropolitani in Obſervatorio Imperiali.

Per ſtellam polarem haec altitudo inventa eſt, 59°, 56′ 13″ (§. 5.)differunt igitur inter ſe ſcrupulis ſecundis 23 duae hae poli altitudines duobus diverſis modis erutae, D. Caſſini refractionum tabulas uſurpando ſuae hypotheſi novae ſuperſtractas.

Si altitudinis ſolſtitii hibernalis refractio ſcrupulis 46″ maior quam tabulae Caſſinianae volunt, aſſumta fuiſſet, altitudo Polaris prodiret per altitudines ſolſtitiorum eadem quae per ſtellam polarem inventa fuit, uti ex computu patet ſequenti.

6° 35′

°	′	″	
6	35	40	Altitudo ſolſtitii hiberni (articulo 7.)
		46	Augmentum refractionis ſuppoſitum
6	34	54	Altitudo ſolſtitii hiberni
53	32	40	Altitudo ſolſtitii aeſtivi
46	57	46	Diſtantia tropicorum
23	28	53	Obliquitas eclipticae
30	3	47	Altitudo aequatoris
59	56	13	Altitudo poli per ſolem inventa
59	56	13	Altitudo poli per ſtellam polarem inventa.

Nec ſine ratione ſupponetur refractio ſolſtitii hiberni tribus quadrantibus unius minuti primi maior quam in tabula D. Caſſini habetur. Namque haec augmentatio non ſolum conciliat obſervationes ſtellae polaris et ſolſtitiorum; ſed et ipſius D. Caſſini obſervationes quas Pariſiis habuit (vid. Comment. Acad. 1714. p. 33.) maiores refractiones produnt (hibernas potiſſimum) quam ſua exhibet tabula ſuae novae hypotheſi innixa.

Hieme ſuperioris anni indicium mihi obtigit notatu dignum, quo refractionis augmentatio circa ſolſtitii altitudinem veriſimilis fit. Sunt nimirum altitudines ſolis meridianae quas exactiſſime obſervavi diebus 23, 24 et 25 Decembris Anni 1728; eas in numerum ſupra allatarum non retuli, ob hunc ipſum effectum extraordinarium, ſed ſeorſim eas una cum altitudine ſolſtitiali inde derivata hic recenſeo.

Die 23. Decembris 1728 N. St.

°	′	″	
6	42	0	Altitudo apparens limbi ſolaris ſuperioris
	19	10	Error quadrantis addendus.
	7	31	Refractio
		10	Parallaxis
	16	23	Semidiameter ſolis
6	37	26	Altitudo vera centri ſolaris
		50	Declinationis differentia a ſolſtitiali declinatione
6	36	36	Altitudo ſolſtitialis.

D. 24. Dec.			D. 25. Dec.		
°	′	″	°	′	″
6	43	0	6	44	20
	19	15		19	35
	7	30		7	29
		10			10
	16	23		16	23
6	38	32	6	40	13
	2	1		3	36
6	36	31	6	36	37

Media

Media inter hasce tres altitudo solstitialis est 6°, 36′ 35″, quae fere scrupulum primum integrum plus habet quam ea quae antea ex duodecim aliis observationibus eruta fuit (artic. 7.) Unde apparet quod tribus hisce diebus refractio obtinuerit uno scrupulo maior quam vulgo solet. Discrimen hoc unius scrupuli fere integri observationibus erroneis imputari nequit, congruunt enim per tres hosce dies intra pauca scrupula secunda, quod exactitudinis certum indicium est. Haud vero inutile erit hic monere, quod barometri simplicis mercurius tribus hisce diebus summam attigerit altitudinem, quam quidem alioquin per duos hos annos, quolibet meridie altitudinem mercurii notare solitus, nondum observavi.

Monitum.

CUm D. Prof. *Maierus* p. 185. horum Commentarior. quatuor altitudines meridianas ex his quas modo attuli (*Artic.* 6.) ea intentione adhibuerit, ut exemplo aliquo methodum suam de inveniendis ex observatione solstitiis commonstret, easdem vero paulo a meis diversas attulerit; hinc necessarium duximonere, diversitatem hanc non exinde profectam esse, quod diverso a meo instrumento eas obtinuerit, sed quod hisce meis observationibus correctionem quadrantis applicuerit a mea nonnihil diversam.

Deinde quod attinet ad veram ſolſtitii aeſtivi altitudinem, quam ex quatuor ibi adductis altitudinibus, iuxta ſuam methodum comparatis, 16. ſec. minorem deduxit, quam ego illam inveni medium inter 27. altitudines ſumendo: oritur haec differentia quoad maximam partem ex eo, quod refractionem 13. ſec. maiorem quam ego aſſumpſerit, et praeterea parallaxim ſolis omiſerit; quae poſtea etiam praecipua cauſa fuit, cur elevationem poli Petroburgenſem 23. ſec. maiorem repererit quam ego (art. 8. pag. 513.) Cum inſuper etiam obliquitatem eclipticae tanquam ex aliunde notam ſuppoſuerit in numeris rotundis 23° 29′ quam ego paullo minorem deprehendi ex duabus altitudinibus ſolſtitialibus a me obſervatis et meo more correctis. Verum enim vero de genuina poli elevatione huius urbis nihil ſtatuendum cenſeo, niſi demonſtratis antea refractionibus huic uſui adhibendis; id quod in ſequentem Tomum horum Commentariorum reſervatum eſſe volo.

Erratum.

Pag. 497. lin. 12. pro *quo* lege *qua*.

In primo Tomo.

Pag. 473. lin. antepenult. pro 1727. lege 1726.

Pag. 480. lin. 11. pro *maiorum* lege *maiorem*.

lin. vltima 47^h 57′ 30″ lege 47° 57′ 30″.

EMEN-

EMENDANDA.

Cum Autor Diſſertationum quae ſecundo huic Commentariorum Tomo inſertae ſunt, *De Motibus variatis*, et *Conſtructione aequationum Differentialium primi gradus*, alius generis laboribus diſtineretur quando ſchediaſmata haec prelo ſubiiciebantur, impreſſionisque maturatio apprime vrgeretur, vix aliud fieri potuit, quam vt nonnulli errores feſtinantiſſimo calamo ſchedas tranſcribenti exciderent: eorum tamen aliqui Typographis ſunt adſcribendi reliqui autori. Ex hiſce vero omnibus eos hic cum emendationibus annotatos inueniet B. L. qui Autori ſpecimina ſua iam impreſſa curſim relegenti in oculos incurrerunt.

Pag. 148. lin. 10. pro FIKD lege FIKO.

Pag. 152. lin. 3. pro quam vt in fig. 6. lege, quam vt angulus FGB (*fig* 4.) aequalis fiat ang. CBE (*fig*. 6. Ibid. lin. 9. lege $dy = \frac{dz\sqrt{(pp-bR)}}{\sqrt{bR}}$ et lin. 10. lege $\frac{(g-bf)zz+bf^3}{bfzz-bf^3} = xx$.

Pag. 154. lin. 3. a fine, lege $-2pdx + 2es^n dx = ds$.

Pag. 159. lin. 20. pro AC lege AB.

Pag. 161. lin. 2. pro littera O, ſcribatur vbique G.

Ibid. lin. 11. deletis iis quae poſt haec verba, quantitatem $2dA\sqrt{b} - 2dB$, ſequuntur vsque ad finem paragraphi, ſcribatur in eorum locum: vel $2dB - 2dA\sqrt{b}$, nam ſigna hisce contraria inde proueniunt, quod creſcente angulo AGB, decreſcant ipſae BG ſeu z. Habetur vero integrando $AGB = 2B - 2A\sqrt{b}$. Nam exiſtente

$z =$

$z=f=AG$, fiet $s=o$, adeoque dictae fummae nulla quantitas conftans addi debet. Id vero hanc conftructionem praebet: in recta indefinita AD abfcindantur $AC=b$, et $DC=1$, ductaque normali CF, capiantur in ea CF $=s$, et $CB=\frac{\sqrt{(2fg-2eg)}}{\sqrt{(aa-2fg+2eg)}}$, ductisque AF, AB nec non DF et DB, conftituatur (*fig.* 10.) ang. nAC ad ang. FAC in ratione data $\sqrt{b}$ ad 1. In *fig.* 11. vero fiat ang. $AGB=2ang.\, AnD$, quem DF producta cum An continet, factaque $GB=2ang.\, AnD$, quem DF duoducta cum An continet, factaque $GB=\frac{f\times(ss+b)}{b\times(ss+1)}$, punctum B erit in *Brachiftochrona* quaefita. Angulus vero AGO $=2ang.\, ANB$ (*fig.* 10).

Pag. 162. lin. 16. fcribatur in margine *Fig.* VIII.

Pag. 163. lin. 7. pro $\int \frac{aalldl}{mpz-a^{2mb}l^{2n}}$, fcribatur $\int \frac{aalldl}{(mp-a^{2n}bl^{2n})\times(f-z)}$

Ibid. lin. 13. deletis omnibus in paragraph. qui incipit: Sed fi fint etc. vsque ad haec verba inclufiue: modo α non fit $=-2$, in eorum locum fcribatur: fi fint $p=\frac{2abl^{2n}}{m}-\frac{aaL^{1-\alpha}}{\alpha\beta M}$ et $z=f-\beta L^{\alpha}$, exiftente L quantitate data per l et conftantes, $M=dL:dl$, item α exponente ac β coefficiente datis, fiatque $f=AG$, et $z=AM$ (*fig.* 8). Curua ABO conftrui poteft. Fiat enim angulus $AGB=\int\frac{alMdl}{mL}$, punctum B, erit in *Brachiftochrona* optata.

Pag. 164. lin. 9. pro EG fcrib. FG; et lin. 11. pro potentis lege potentias.

Pag.

Pag. 165. lin. 6. a fine pro $\frac{\alpha dp}{p}$, ſcribe $\frac{-\alpha dp}{p}$.

Pag. 166. lin. 3. a fine, pro $\frac{2P^{1-2n}}{P^{2-2n}}$ ſcribatur $\frac{2P^{1-2n}dP}{P^{2-2n}}$.

Pag. 167. lin. 5. pro ambo, ſcribe duo priora membra. Lin. 6. praefigatur quantitati $2eg^{n-1}$ ſignum $-$, lin. 7. pro Mdt ſcribatur Mdl. Lin. 9. poſt dM ponatur ſignum $=$, denique lin. 12. ſcrib. inuenientur.

Pag. 169. lin. 14. ſcrib. $\frac{Adq}{dr}$, Lin. 2. a fine, pro CD ſcrib. CB.

Pag. 170. lin. 10. In Denominatore praefigatur quantitati Adx^2 ſignum $+$.

Pag. 172. lin. 5. a fine lege tempuſculo dt.

Pag. 173. lin. 8. pro $dz=rdl$, ſcrib. $dx=rdl$.

Pag. 189. lin. 2. immediate poſt Log. $R=\int(dP:z-P)$, ſcribatur $S=\int(dQ:zR-PR)$, et Pag. 190. lin. 7. pro $+bc$ ſcrib. $-bc$. Lin. 17. deleatur ſignum $=$ inter $\frac{-\frac{1}{2}ndr}{r+1}$, et $\frac{-dr}{r}$!.

Pag. 191. lin. vlt. ſcribatur aequatio $(2xx-2Qx+2yy)^{\frac{5}{6}}\times(Q-x)^{-\frac{2}{3}}\times y=(Q-x)^{-1}\times ay$.

Pag. 192. lin. 5. pro 137, ſcribatur 197.

Ibid. lin. 18. proportio elementorum Parabolae dat aequationem $\frac{dy\sqrt{(4y+a)}}{\sqrt{y}}=\frac{ndx\sqrt{(4x+a)}}{\sqrt{x}}$, non autem $dy\sqrt{(4y+a)}=ndx\sqrt{(4x+a)}$, vt ibi per inaduertentiam ſcriptum eſt, nam haec aequatio per ſe integrabilis eſt. Iccirco aſſumta non parabolae proportionaliter diuidendae conueniunt, et hanc ob cauſam ceſſat concluſio quae ibi

ibi apposita est, etiamsi exemplum ipsum aequationi $dy \sqrt{(4y+a)} = ndx \sqrt{(4x+a)}$ applicatum, methodi bonitatem illustrat.

Pag. 195. Methodus construendi aequationem $Ayy+Bxy+Cxx+Dy+\text{etc.}=0$, hoc loco indicata ita generaliter succedere non potest; quia resolutio aequationis in suos factores sine certa relatione inter coefficientes locum non habet.

Pag. 72. lin. penult. } pro Percoiwitz, lege Bercowitz
Pag. 73. lin. 4. }

Pag. 73. lin. 8. pro Gran lege Graen

Pag. 76. lin. 5. sq. in ☾ et ☉ columna ita ponendum

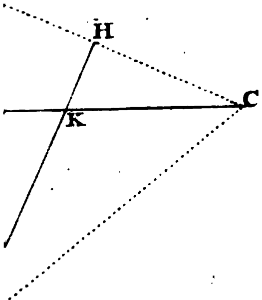
2 Marc	48	Carr.
16 Loth	24	Carr.
1 ℥	3	Carr.
1 Loth. vel	18	græna
	$4\frac{1}{2}$	græn.
	$2\frac{1}{4}$	græn.
	$1\frac{1}{8}$	græn.
	$\frac{9}{16}$	græn.
	$\frac{9}{32}$	græn.
	$\frac{9}{64}$	græn.

Pag. 68. in margine §. 2. praeponatur Tab. VII.

Pag. 177. lin. 14. in marg. pro Fig. VI. leg. Fig IV.

Pag. 474. seqq in marg. pro Tab. 28. lege semper Tab. 29.

fig: 1.



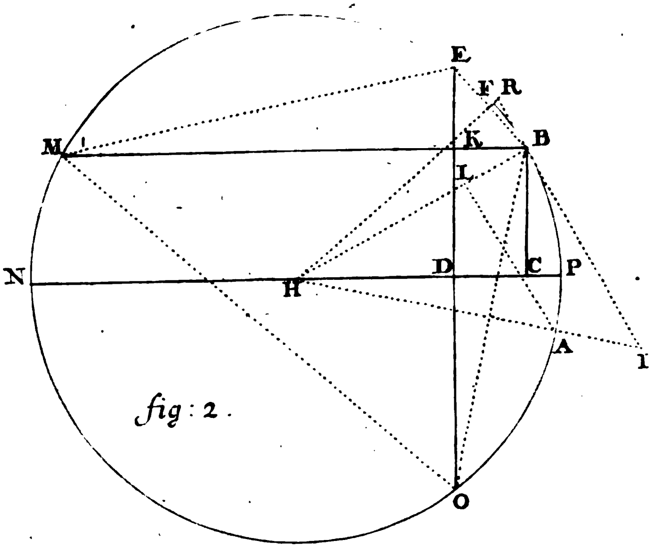
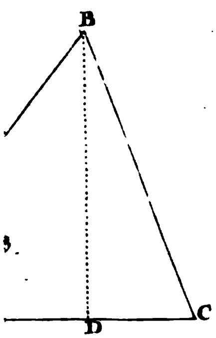
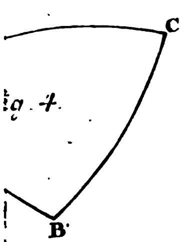


fig: 2.



3.



ig. 4.

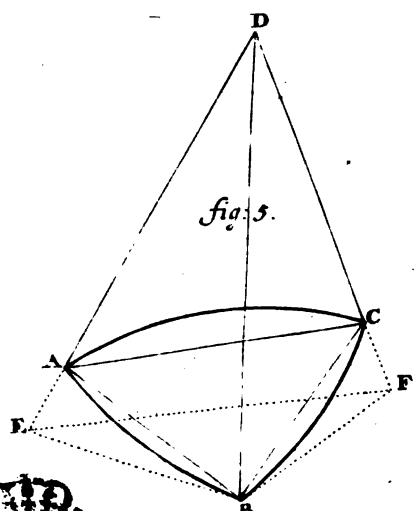


fig: 5.

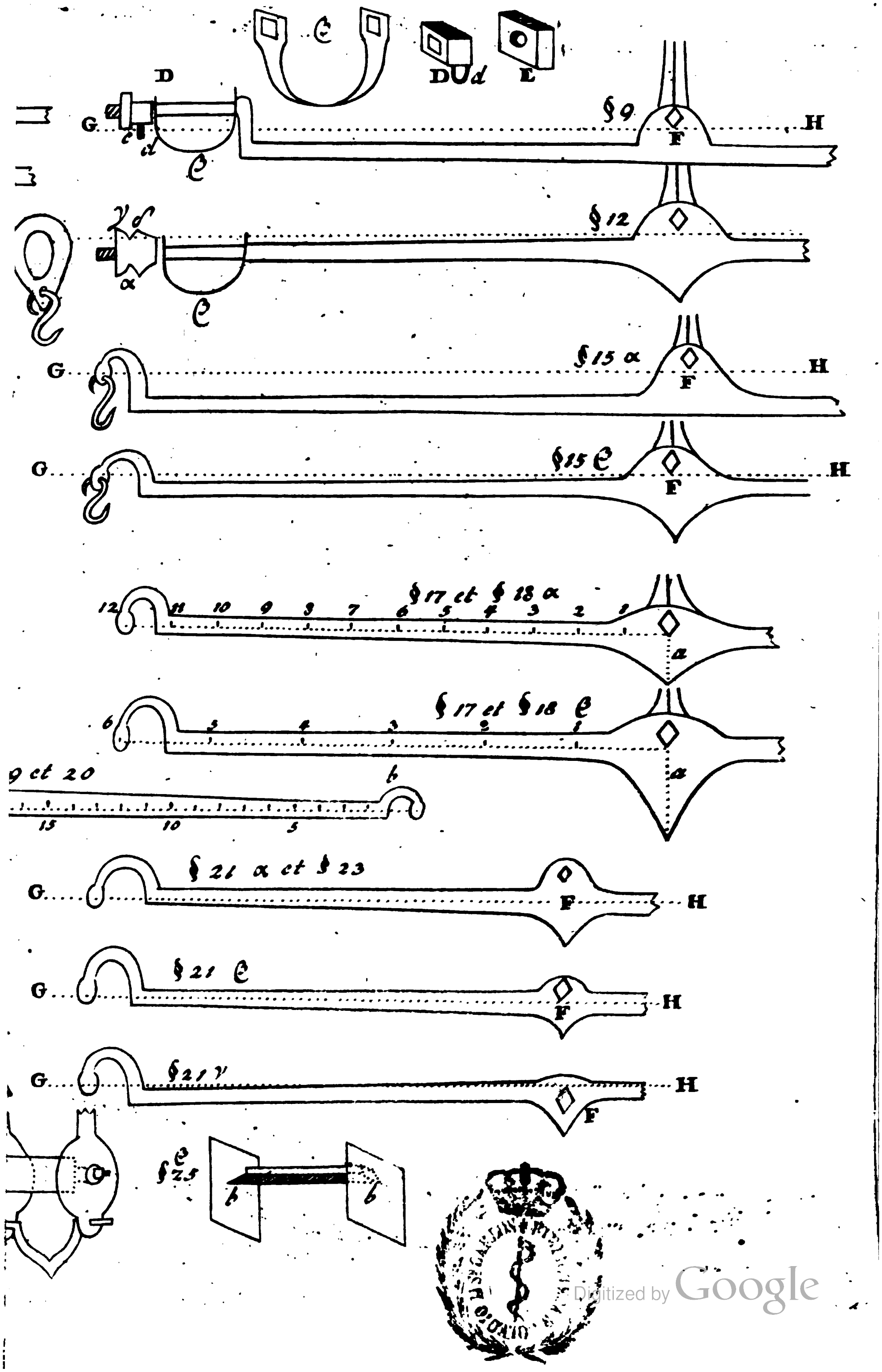
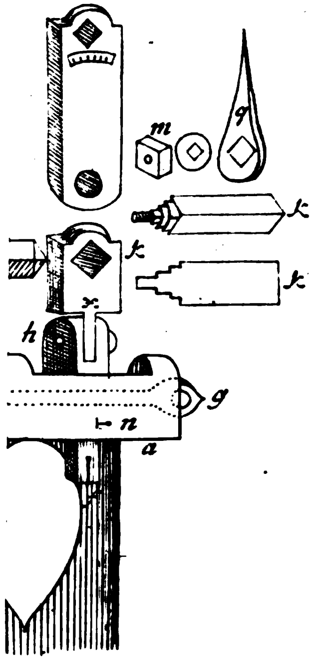
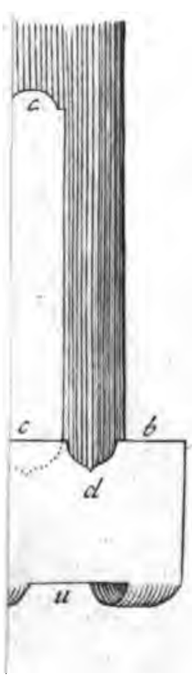
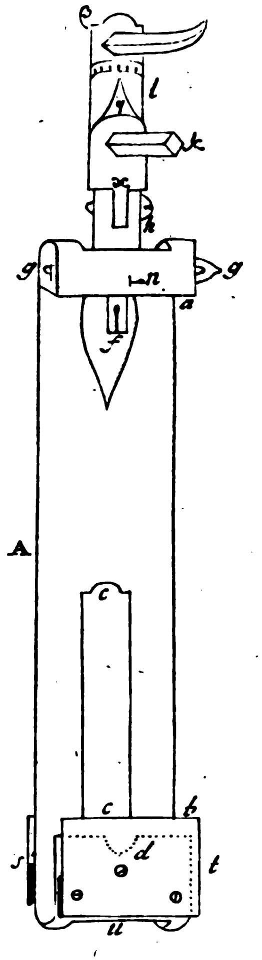
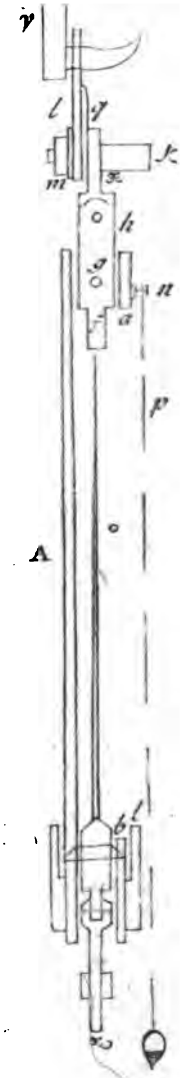

§ 9
§ 12
§ 15 α
§ 15 β
§ 17 et § 18 α
§ 17 et § 18 β
§ 21 α et § 23
§ 21 β
§ 21 γ
G
H
F

Fig. I. α § 27



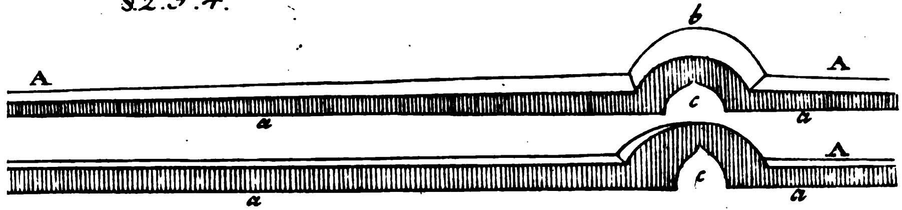




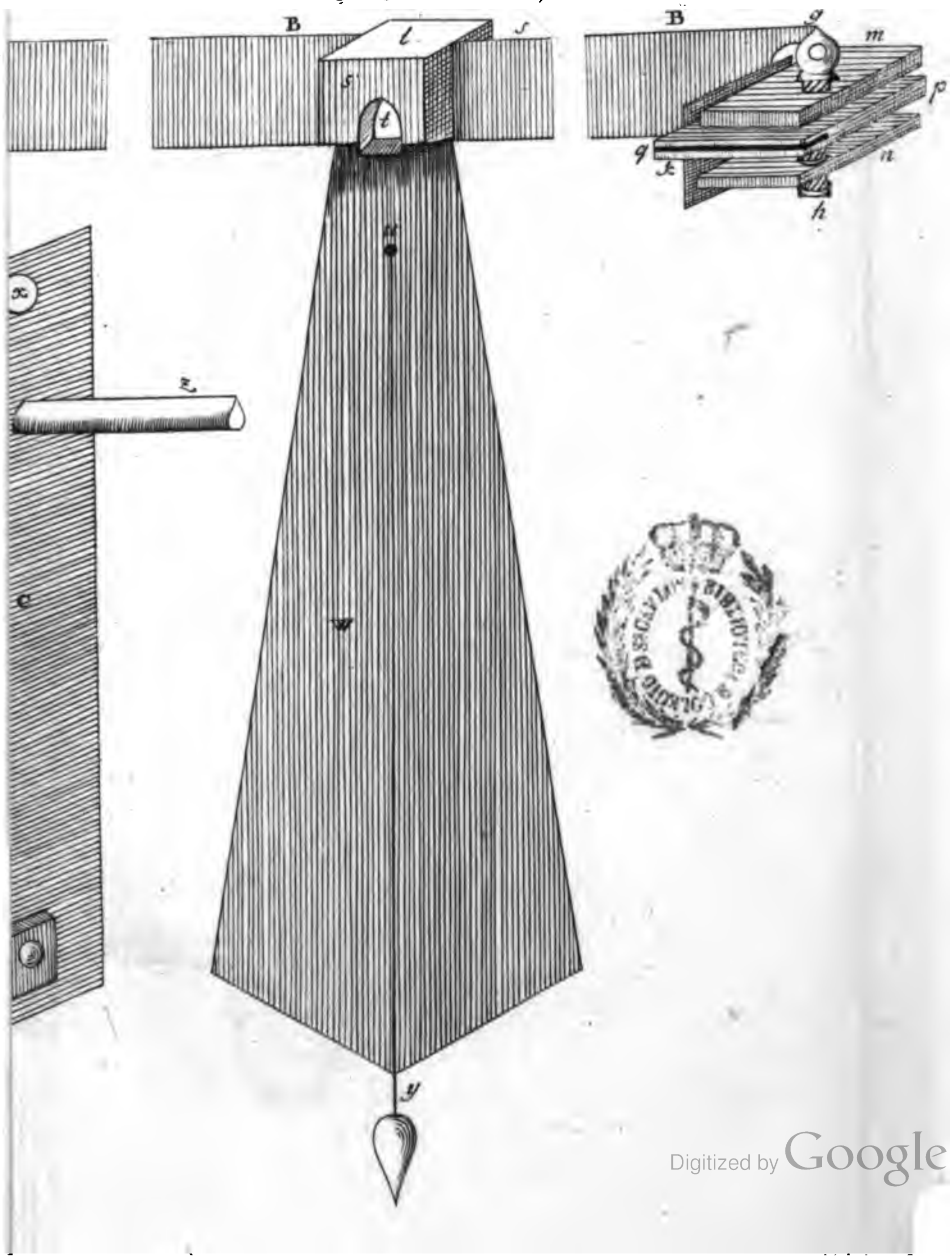


Cap. II.

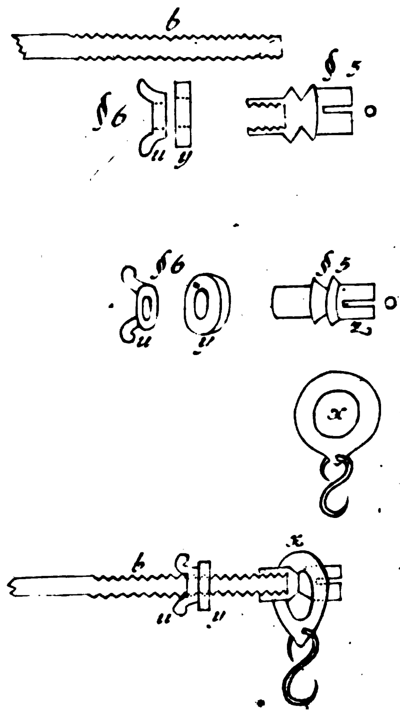
§. 2. 3. 4.

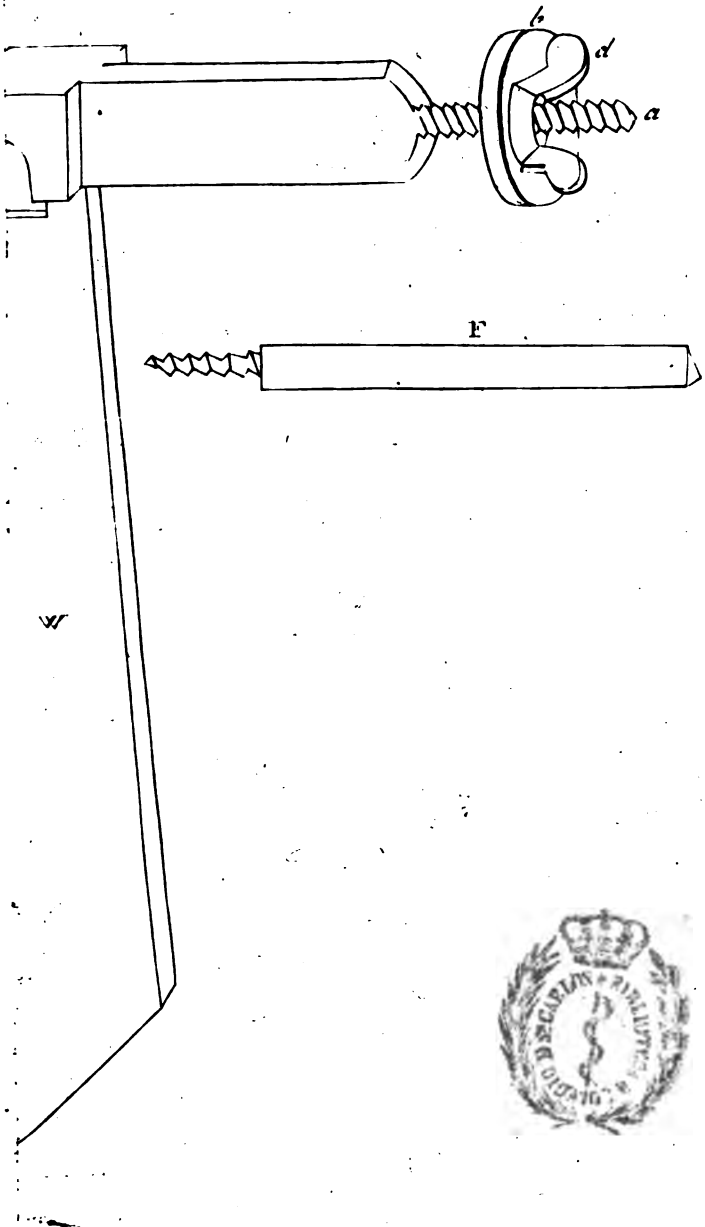


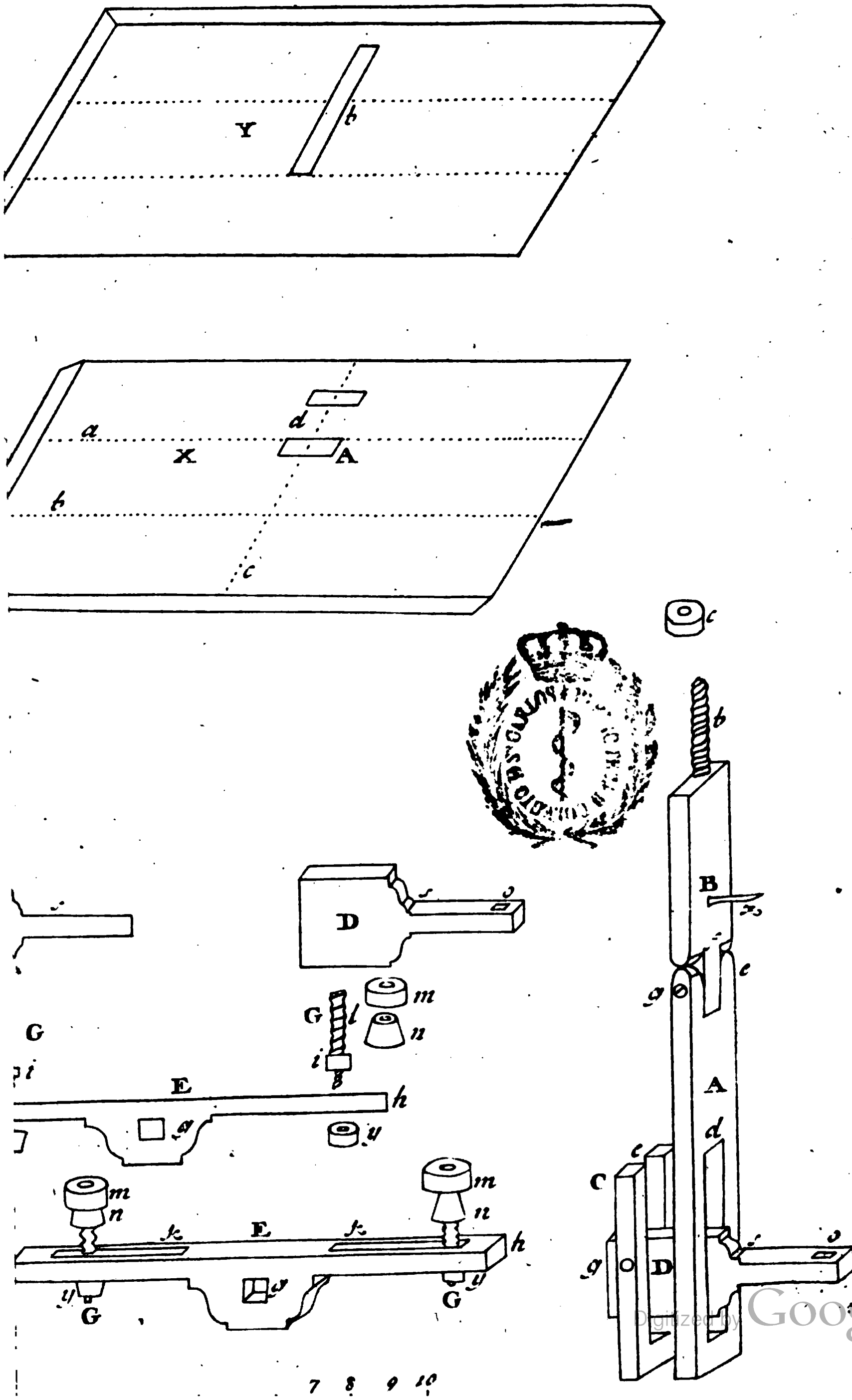
§. 5. 6. 7. 8.

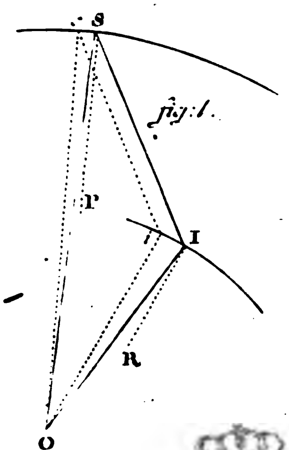


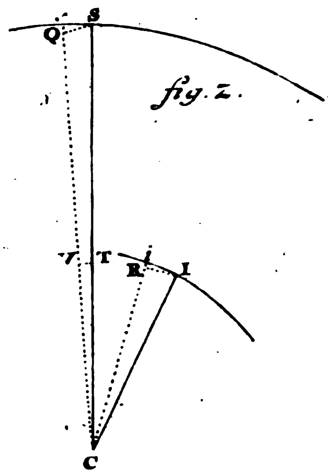
Comm. Ac. Sc. Tom. II. Tab. 5. p. 66.

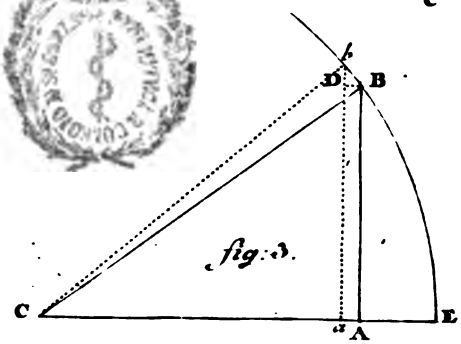



b
d
a
F
W


Y
b
a
d
X
A
b
c
D
G
E
h
m
n
B
C
7 8 9 10


S
P
I
i
R
O
fig:1.


Q
S
T
R
i
I
C
fig. 2.


b
D
B
C
a
A
E
fig: 3.

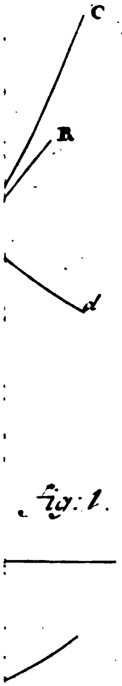


fig: 1.

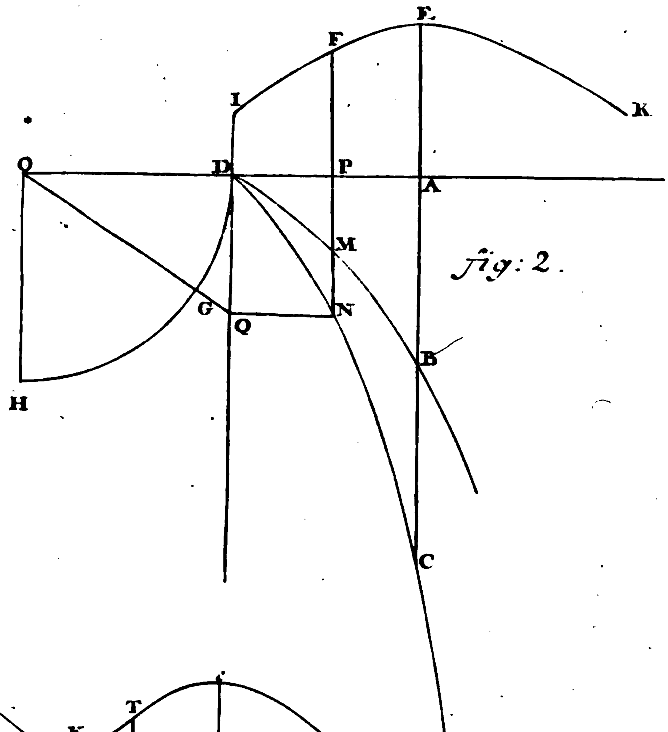


fig: 2.

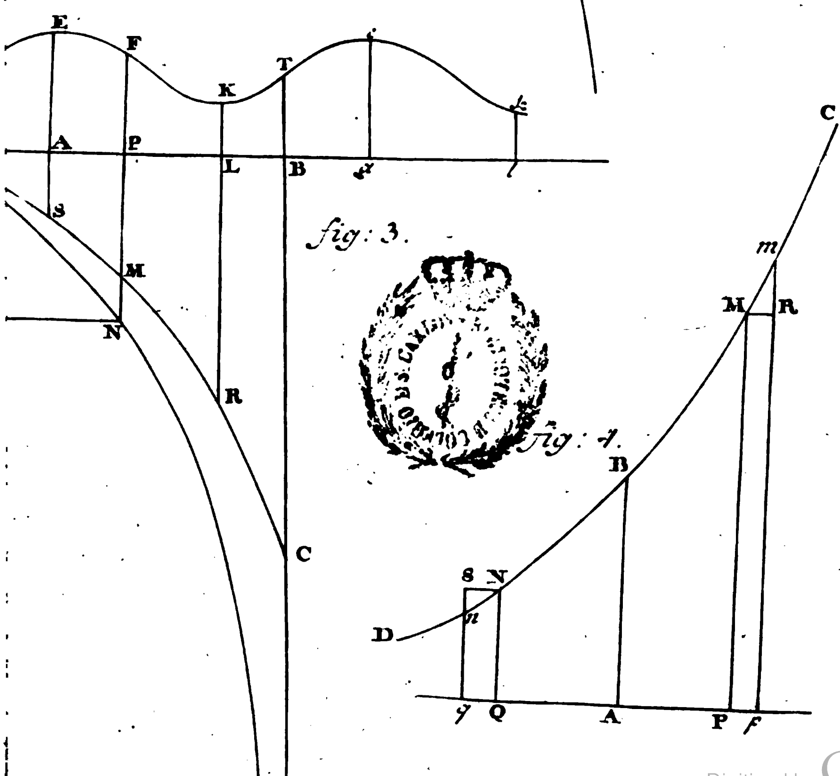


fig: 3.

fig: 4.

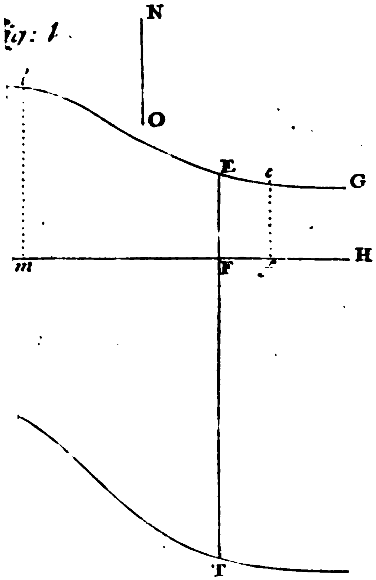


fig: 1.

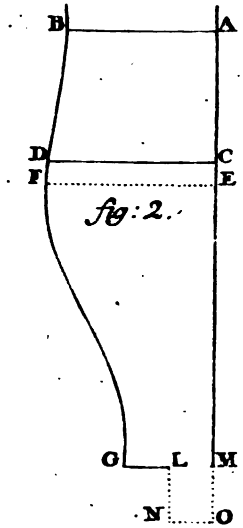


fig: 2.

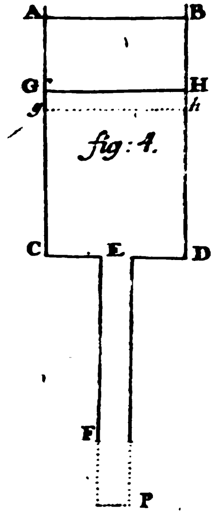


fig: 4.

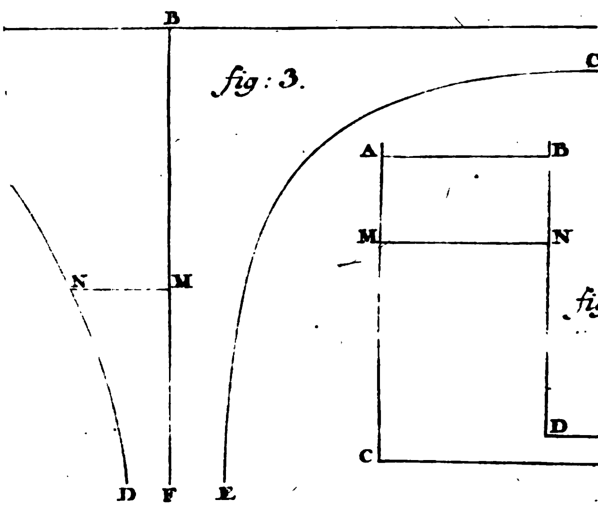


fig: 3.

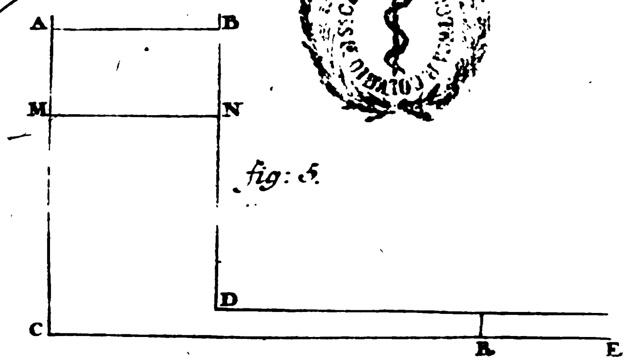
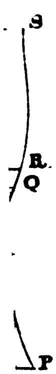


fig: 5.



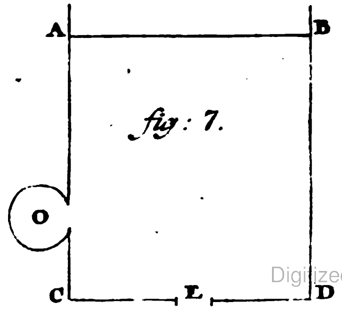


fig: 7.

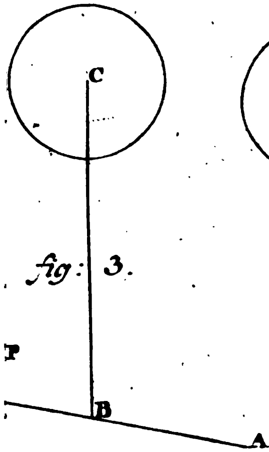


fig: 3.

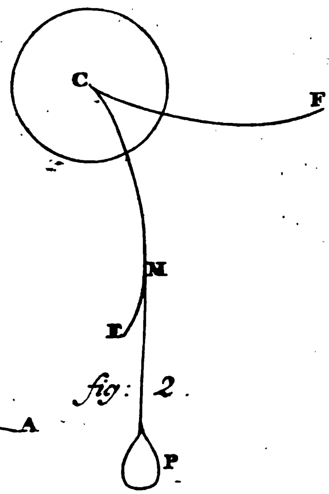


fig: 2.

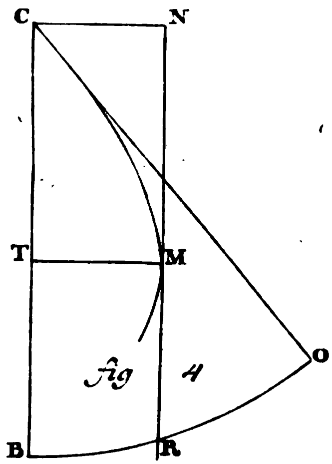


fig 4

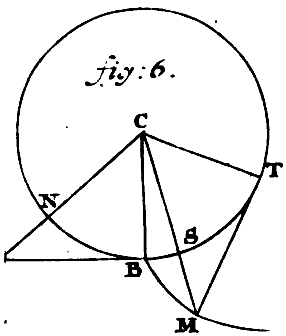


fig: 6.

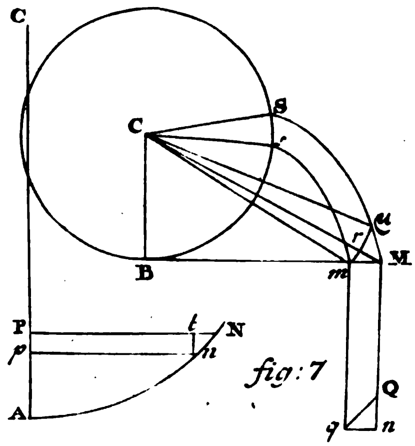


fig: 7

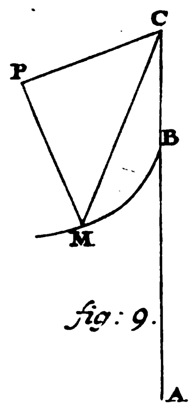


fig: 9.

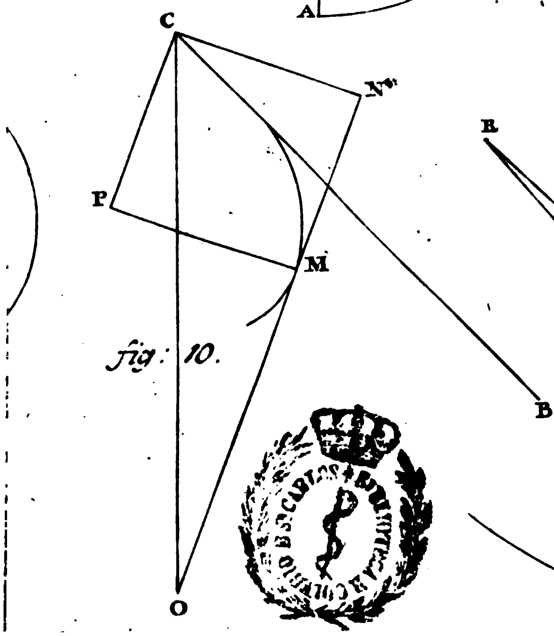


fig: 10.

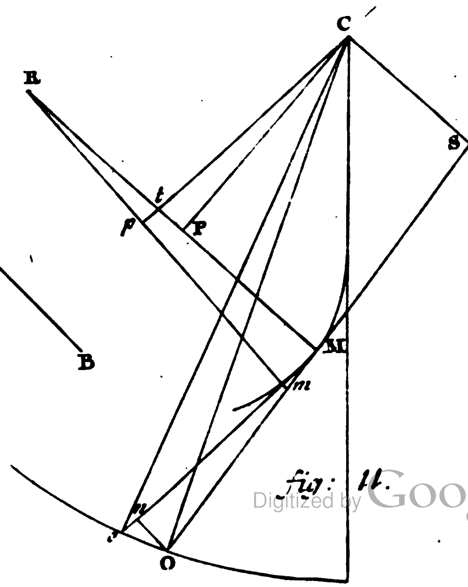
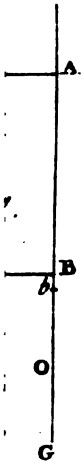


fig: 11.



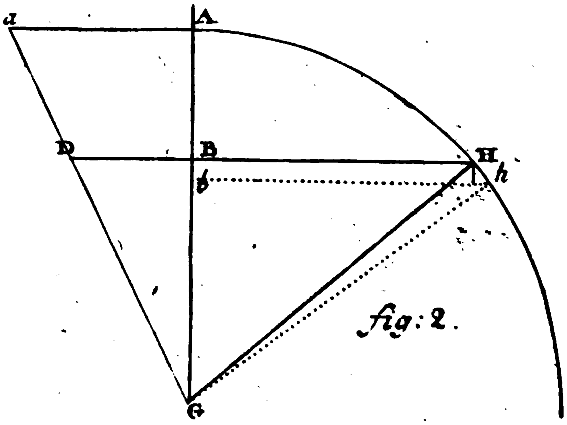
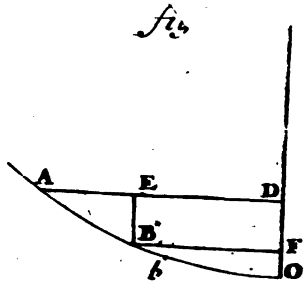


fig: 2.

fi



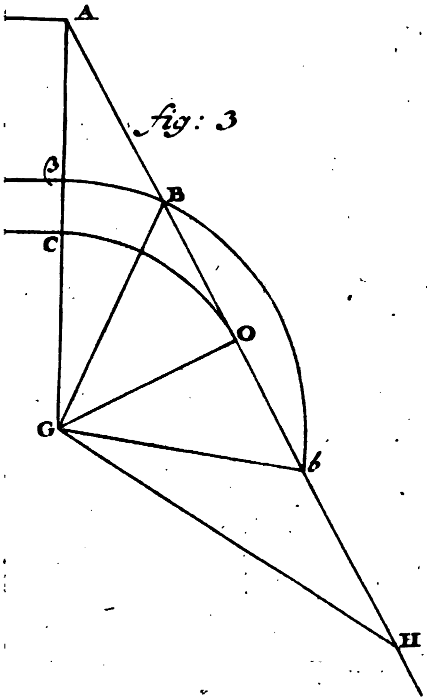


fig: 3

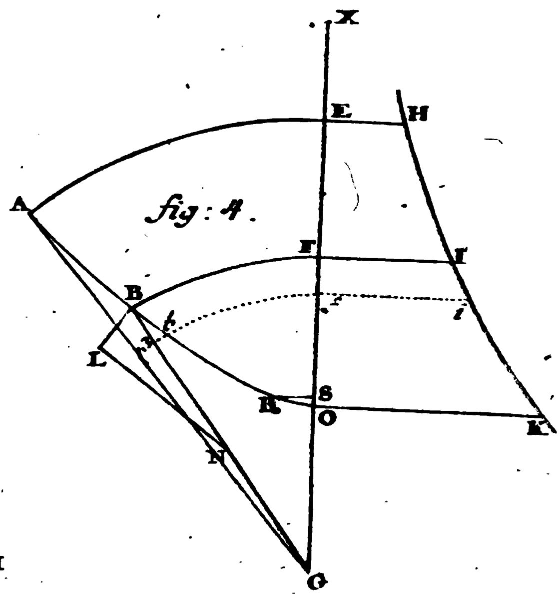


fig: 4.

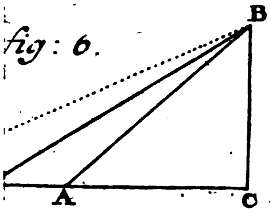


fig: 6.

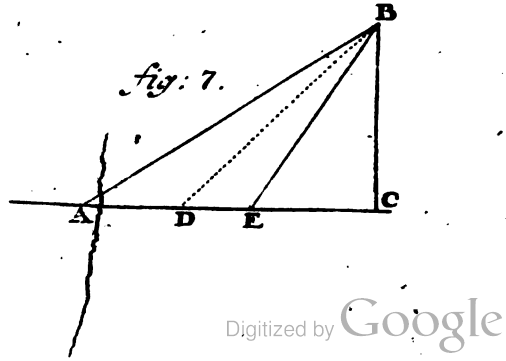


fig: 7.

fig: 9.

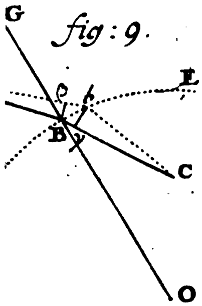


fig: 10

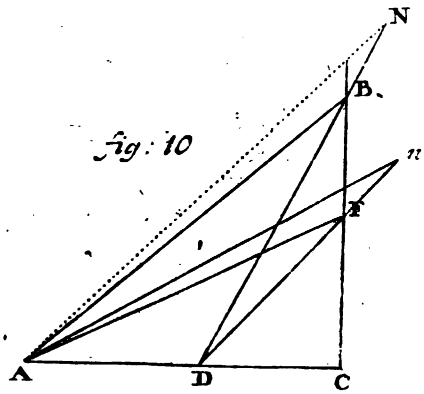
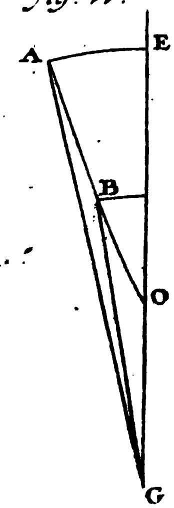


fig: 11.



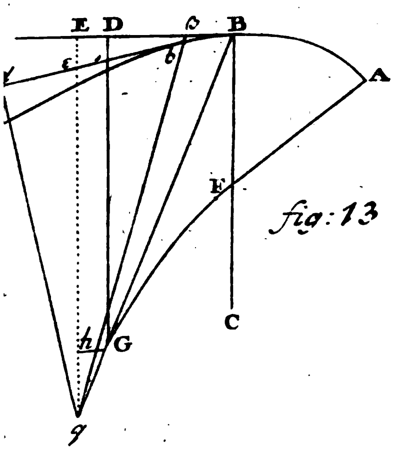


fig: 13

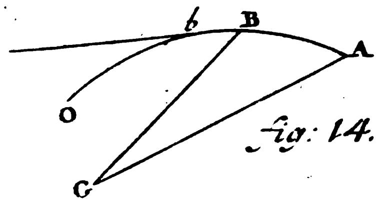
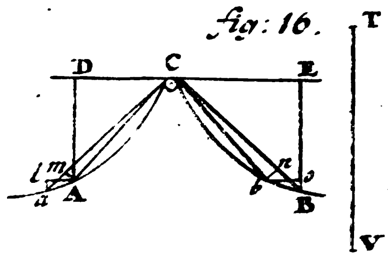


fig: 14.

fig: 16.



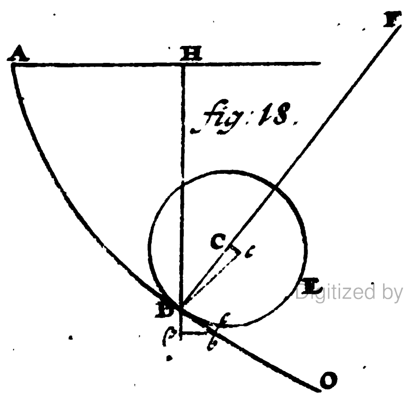
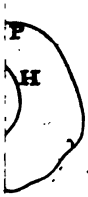


fig: 18.



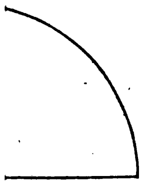


Fig 3

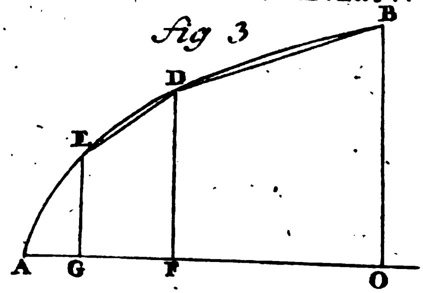
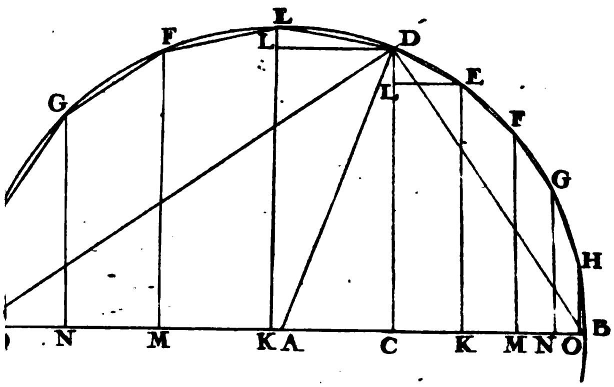


Fig: 1



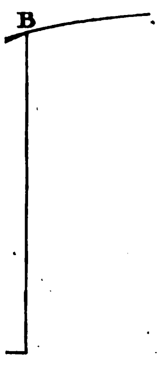


Fig: 4

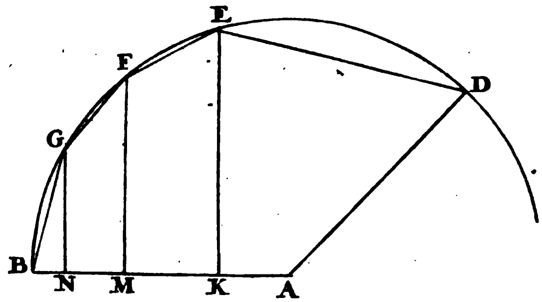
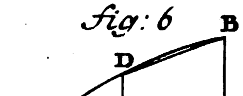


Fig: 6



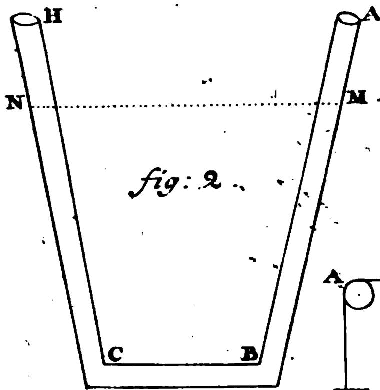


fig: 2.

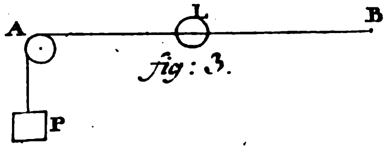


fig: 3.

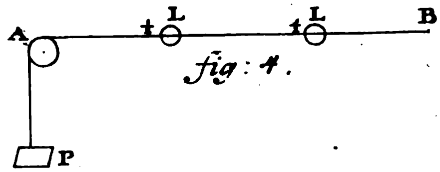


fig: 4.

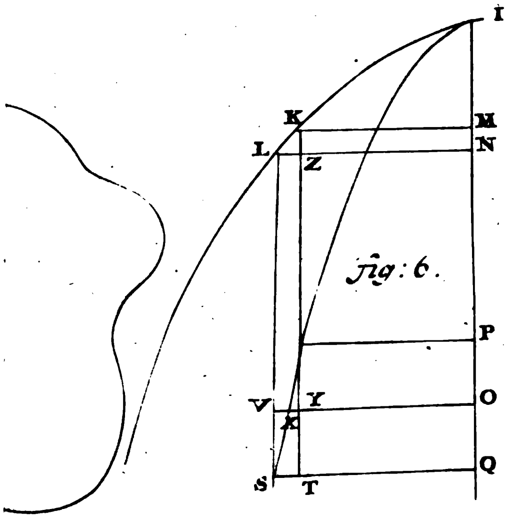


fig: 6.

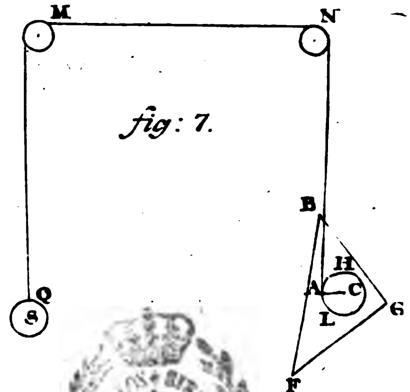


fig: 7.

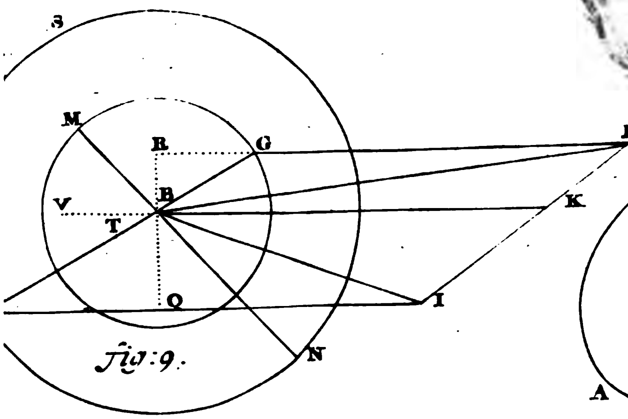


fig: 9.

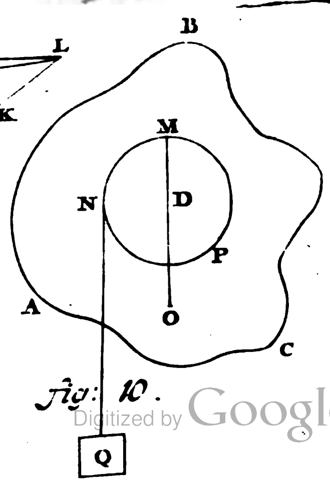
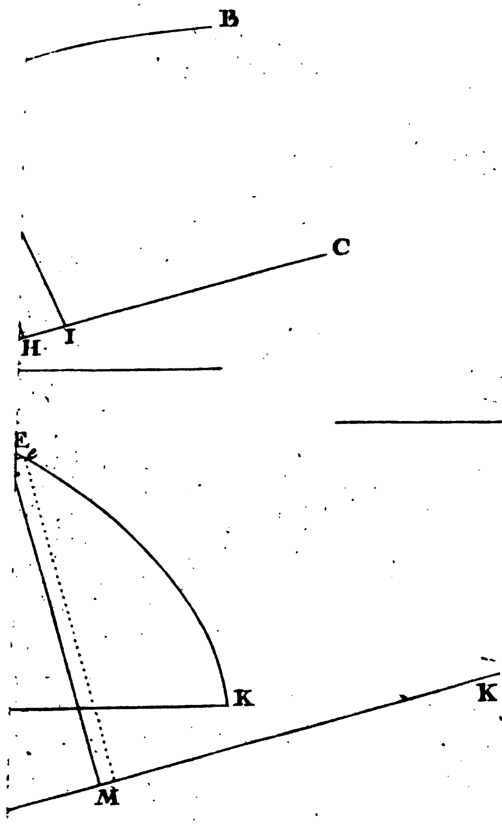


fig: 10.



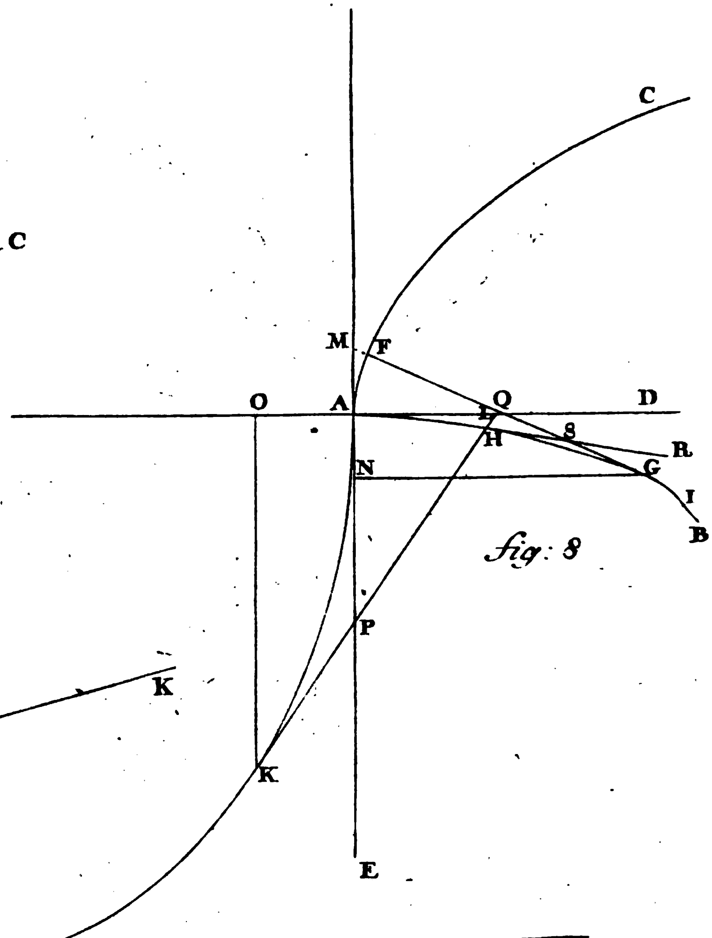
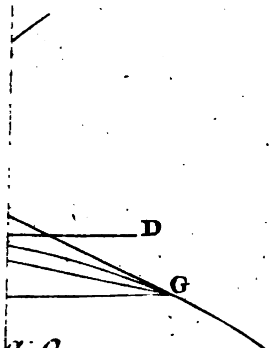


Fig: 8



g: 9

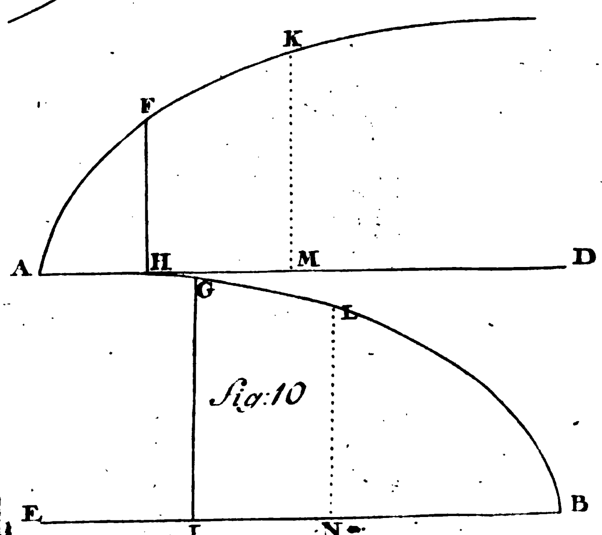
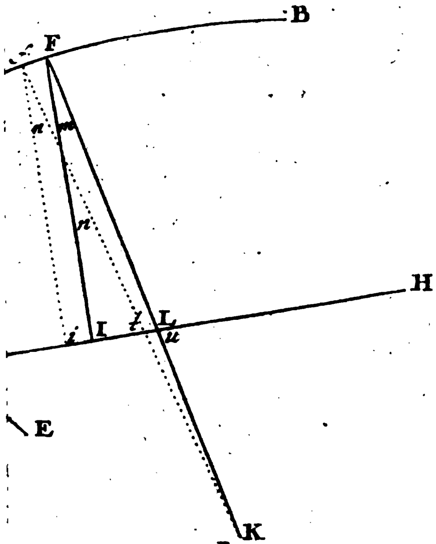
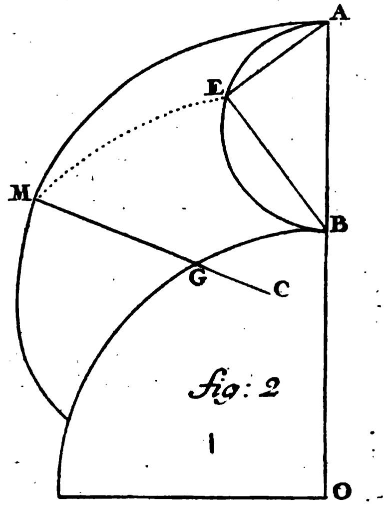
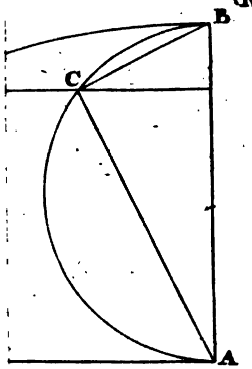
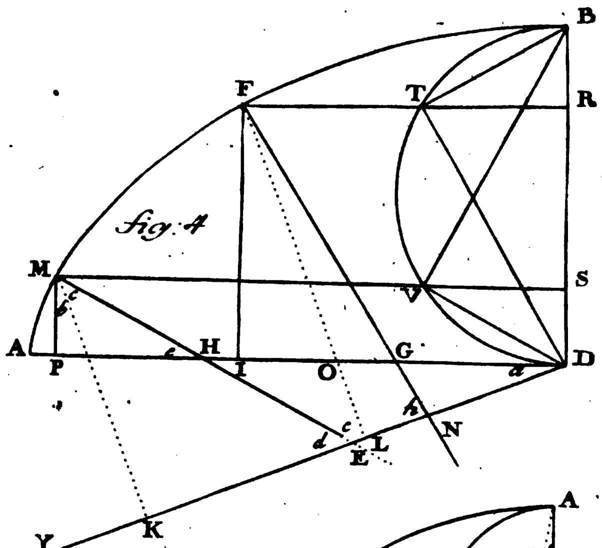


Fig:10

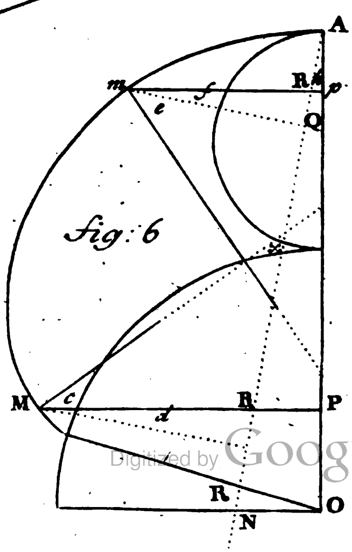

B
F
m
n
n
H
i
I
l
L
u
E
K

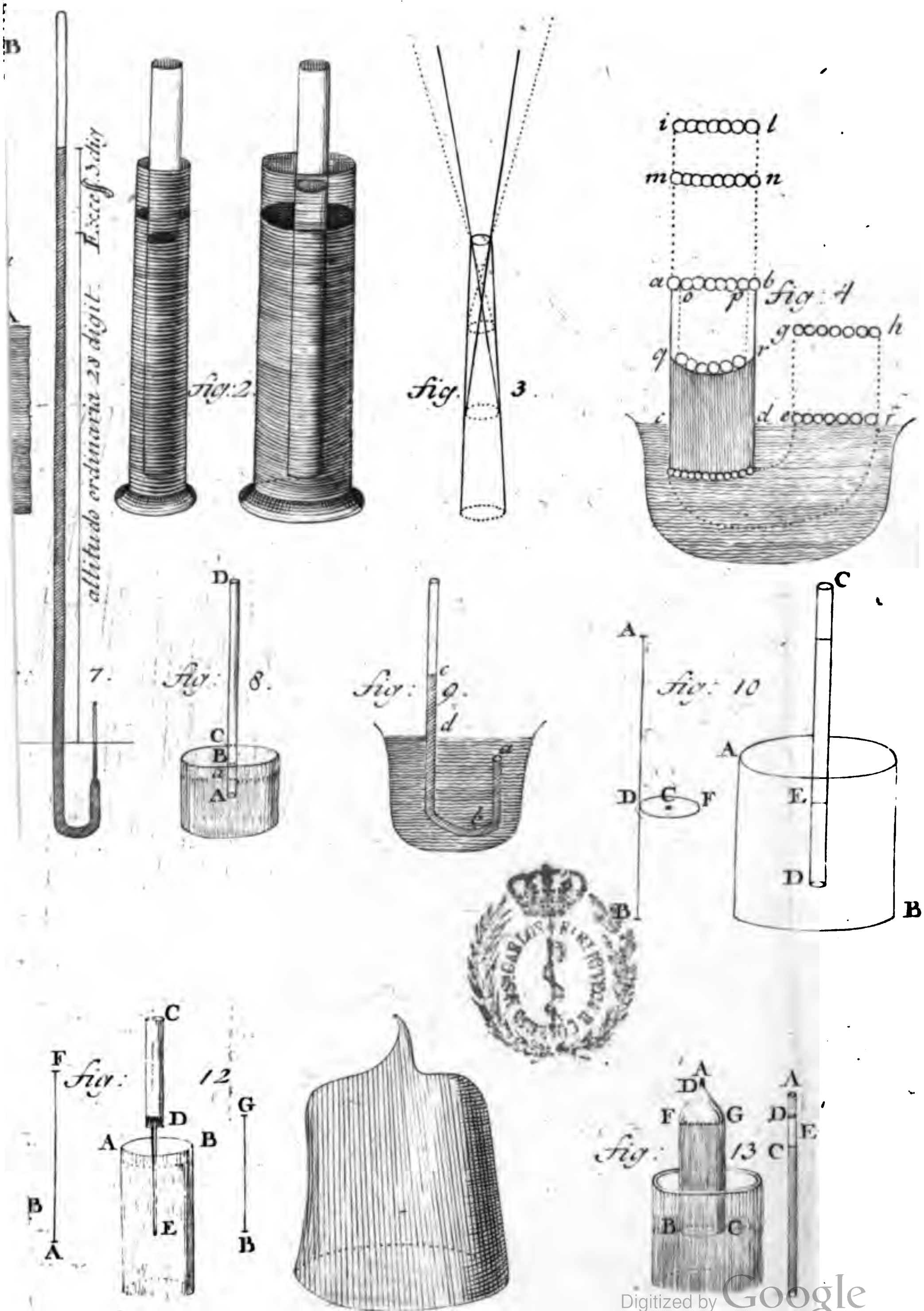

A
E
M
B
G
C
fig: 2
O

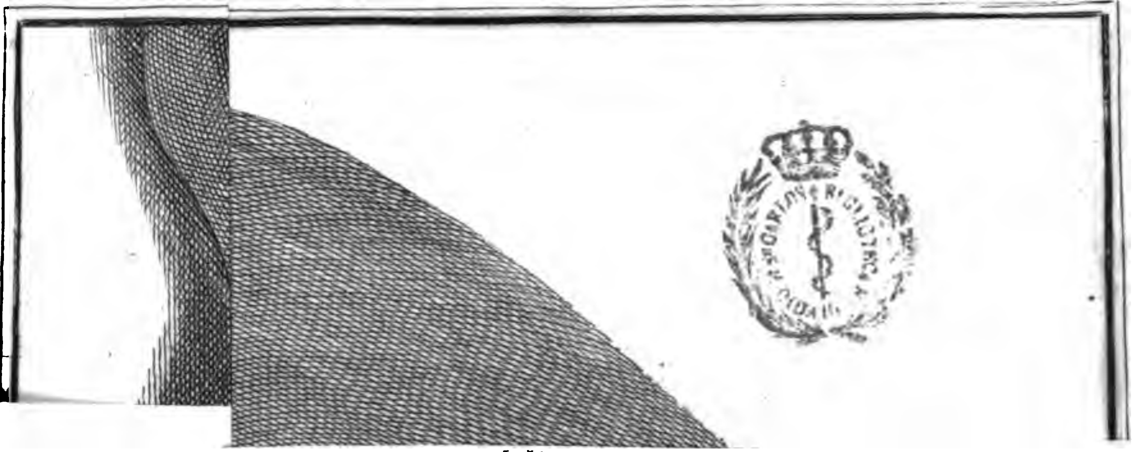

B
C
A

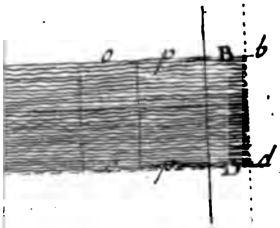

B
F
T
R
fig: 4
M
S
V
A
P
H
I
O
G
D
h
N
d
c
L
E
Y
K

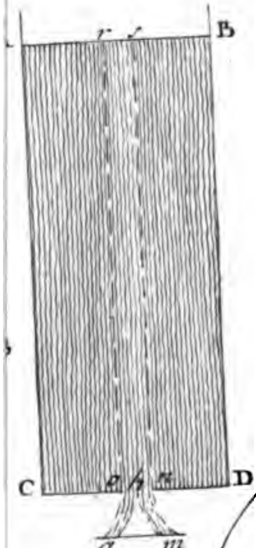

A
p
K
L
B
N
P
O


A
m
f
R
p
e
Q
fig: 6
M
c
d
R
P
R
N
O


B
Excess. 3 dig.
altitudo ordinaria 28 digit.
7.
fig: 2
fig 3
i l
m n
a b
o p
fig: 4
g h
q r
c d e f
D
fig: 8.
C
B
a
A
c
fig: 9.
d
a
b
A
fig: 10
C
A
D C F
E.
D
B
B
C
F
fig: 12
D
A B
G
B
E
A
B
A
D
F G
fig: 13
B C
A
D
E
C







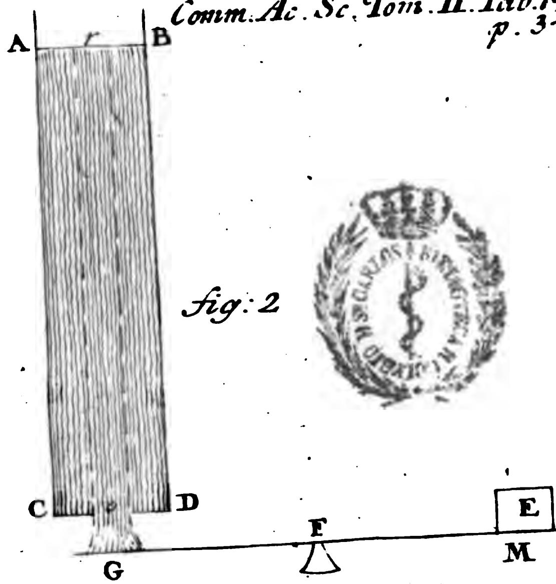


fig: 2

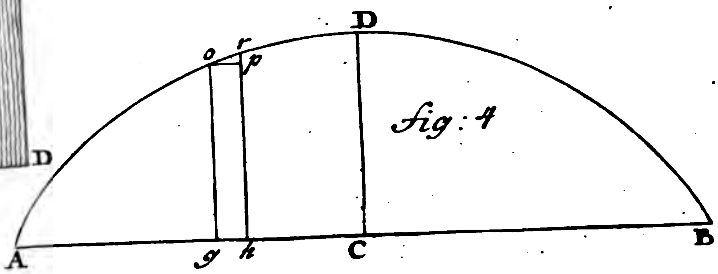
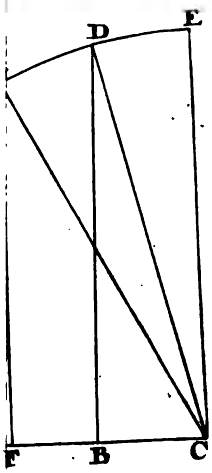


fig: 4



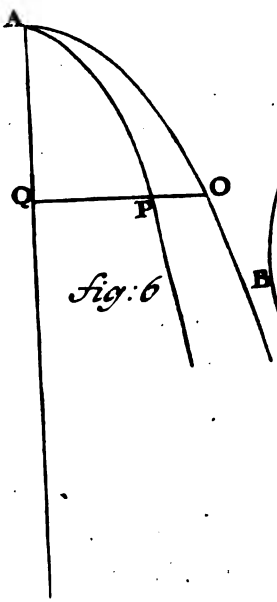


fig: 6

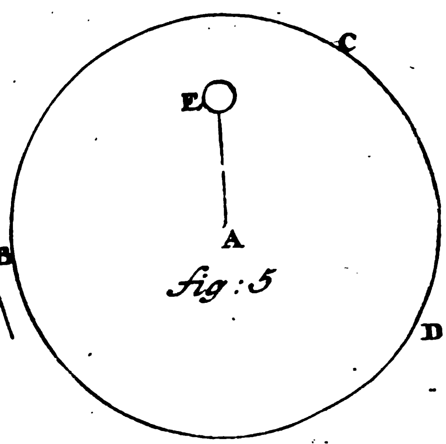


fig: 5

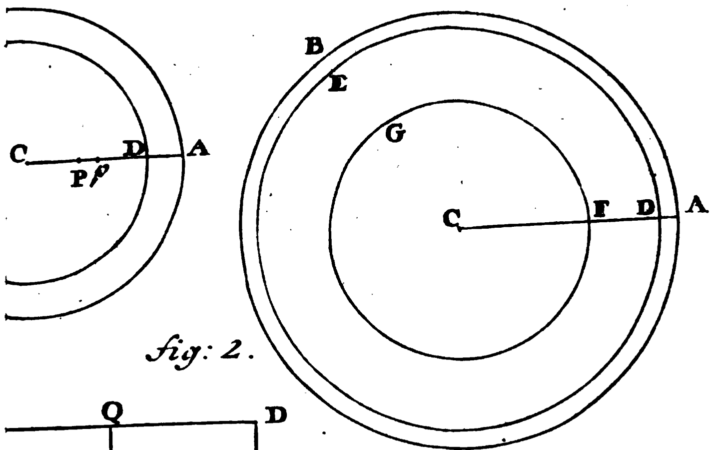


fig: 2.

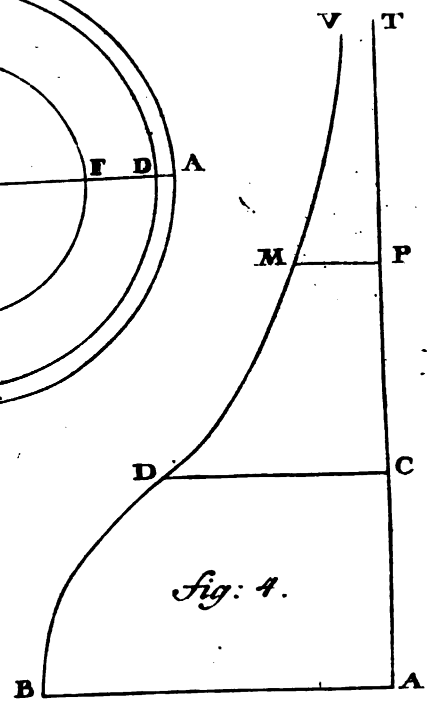
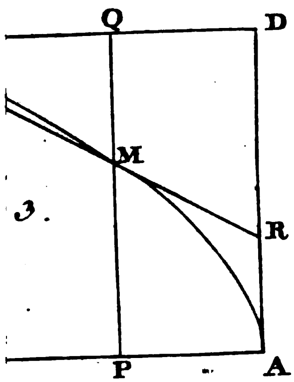


fig: 4.



3.

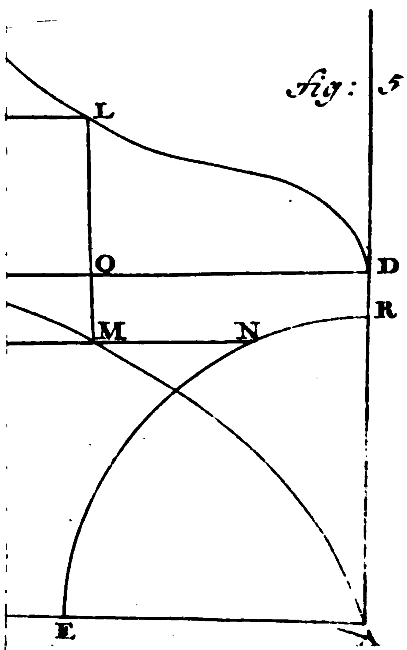


fig: 5.

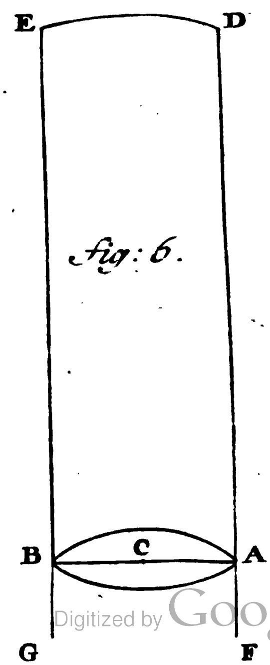


fig: 6.

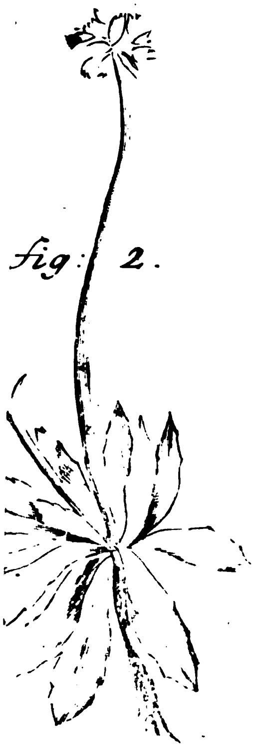
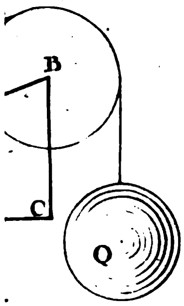


fig: 2.

fig: 3.

Comm. Ac. Sc. Tom. II. Tab. 25. p. 370.



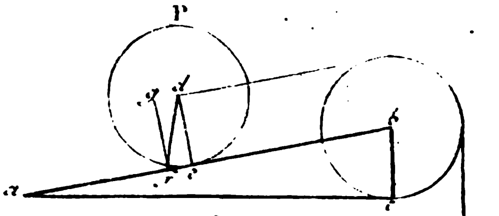
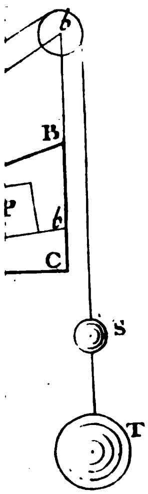


Fig: 2



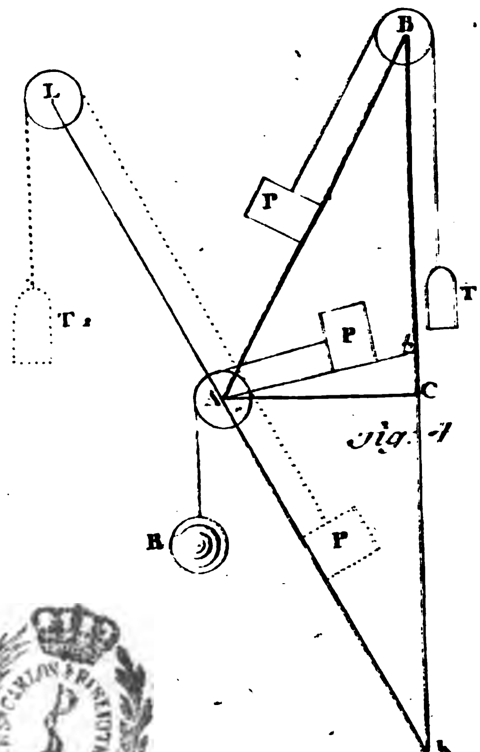
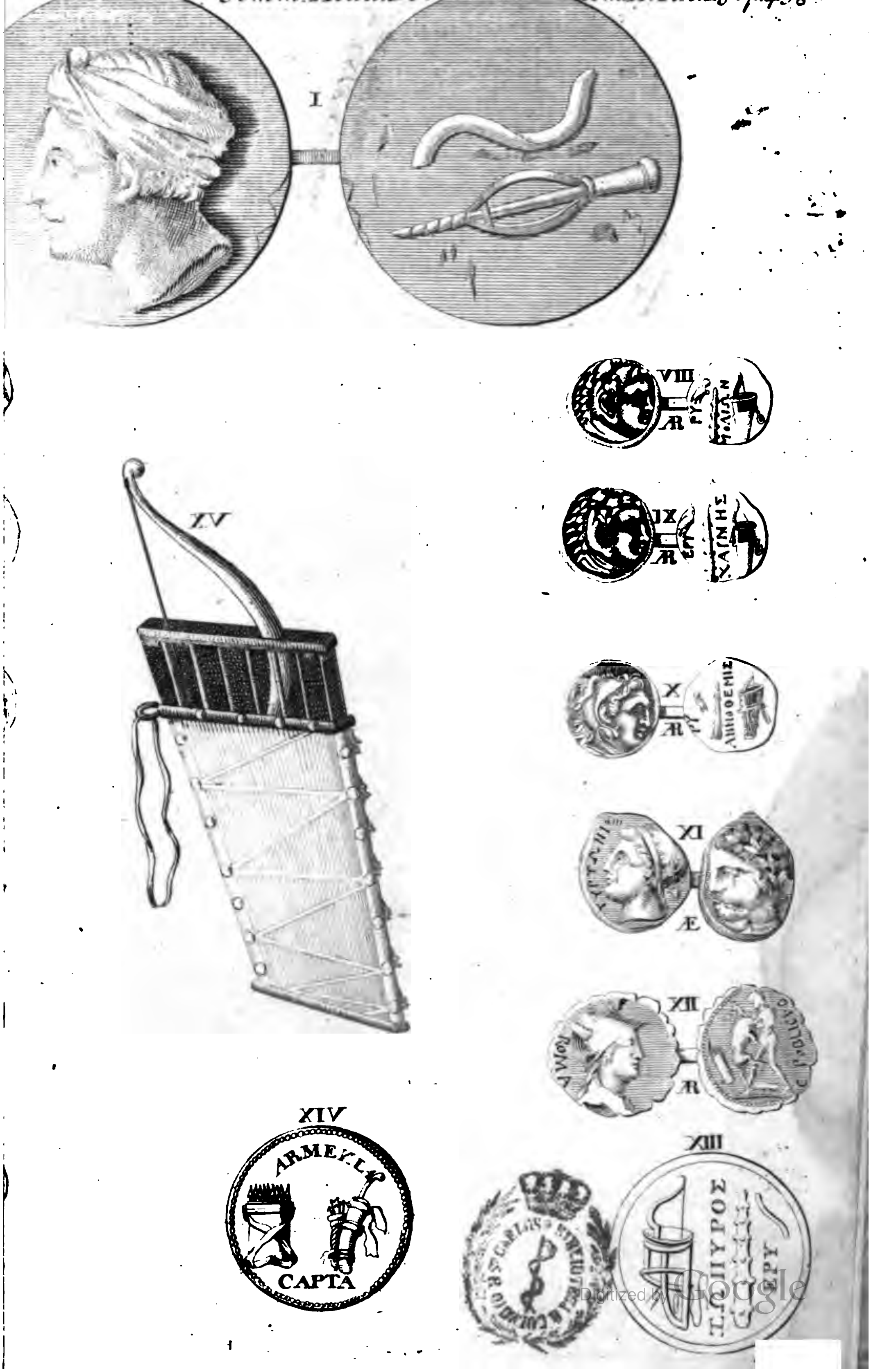
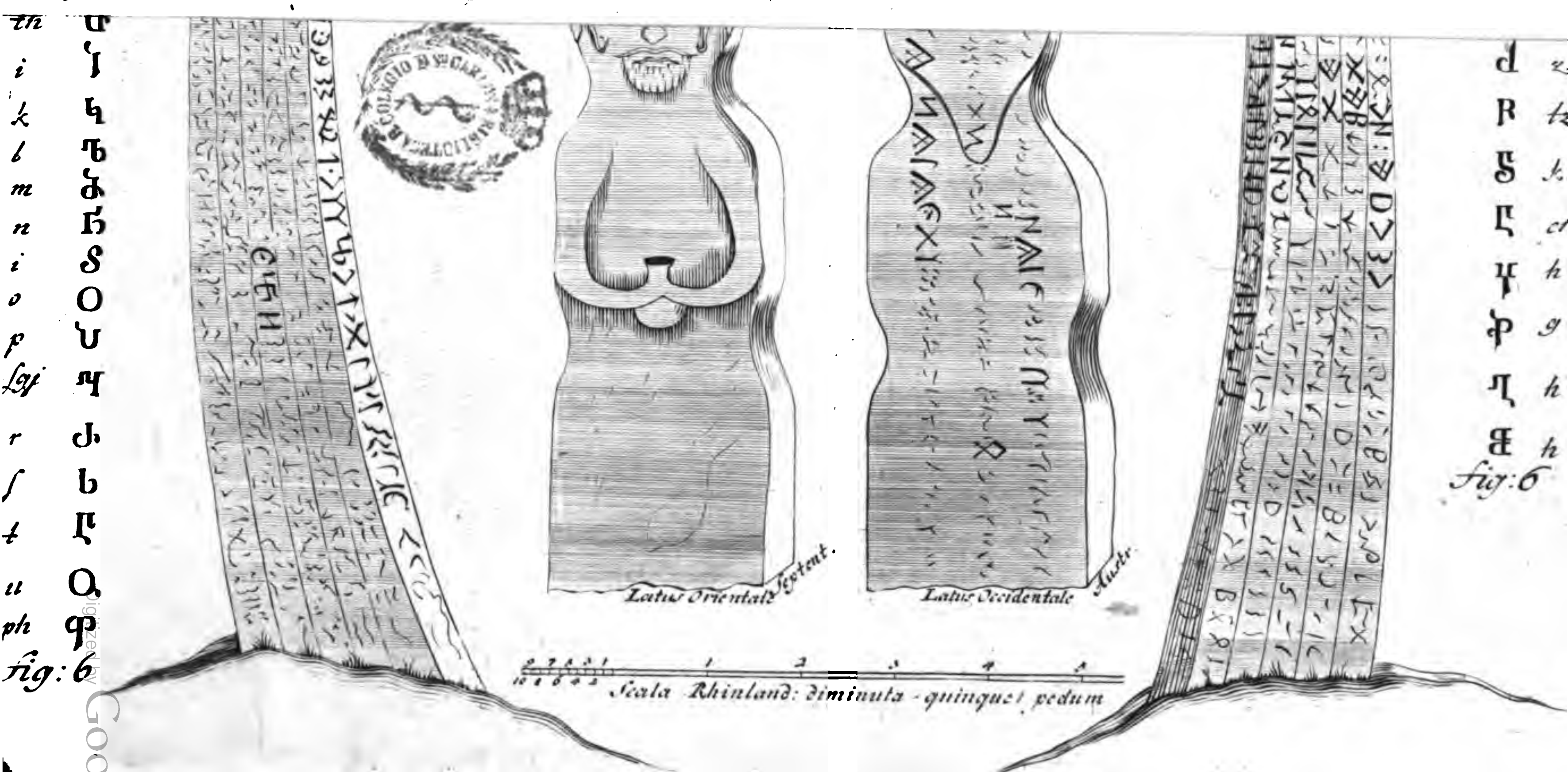


Fig. 4


I
VIII
IX
X
XI
XII
XIII
XIV
XV
CAPTA


Latus Orientale
Septent.
Latus Occidentale
Austr.
Scala Rhinland: diminuta quinque pedum
fig:6