COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS *PETROPOLITANAE.*

TOMVS XIV.

AD ANNVM MDCCXLIV - XLVI.

PETROPOLI.

TYPIS ACADEMIAE.

MDCCLI.

INDEX COMMENTARIORVM

In classe Mathematica.

In classe Physica.

G. W.

In classe Historica.

Astronomicae Obseruationes.

SVMMARIVM

DISSERTATIONVM

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS I.

Quae a PETRO MAGNO, immortalis memoriae Imperatore, anno MDCCXXIV. fundata, et a dilectissima Tori Socia, Eiusque in Imperio Successore, Clementissima CATHARINA a. MDCCXXV. instaurata erat Academia Imperialis Scientiarum Petropolitana; ea tandem a. MDCCXLVII. a paternarum virtutum Herede, feliciter hodie toti Russiae imperante, ELISABETA AVGVSTA, *Deliciis generis humani*, praeclaris legibus lautoque stipendio munificentissime ornata, aucta et firmata est.

Iudicauerat scilicet prouida *Patriae Mater*, vestigiis Augustissimorum Parentum insistens, ad scientias et artes in vastissimo totius orbis Imperio prouehendas, omnino opus esse, vt conseruetur eiusmodi societas eruditorum virorum, qui illas nouis inuentis ditare, ab aliis inuenta examinare et perficere, veraque a falsis separare, denique cauere possint, ne sumtus in res penitus inutiles, aut impossibiles impendantur, hosque coniunctis viribus longe maiores facere posse progressus, quam quidem a singulis, tametsi praestantissimis, exspectari debeant.

Eiusmodi autem societas statutis et sanctionibus conuenientibus vel ideo munienda fuerat, vt vnusquisque sodalium, quid a se requiratur aut sibi agendum sit, perspectum haberet.

Operae ergo pretium visum est, praeclara haec statuta antea exponere, quam de argumento dissertationum in *Nouis Commentariorum* tomis digestorum, fusius verba faciamus.

Paucis tamen antea lector monendus est, omnes dissertationes, quae ad praecedentes Commentariorum tomos vsque ad annum MDCCXLVI. spectant, iam sub prelo sudare, et illis coronidem imposituras esse: hunc autem et sequentes tomos *Nouorum Commentariorum* nomine ideo venire, quia Academia nunc nouis legibus instructa est, et classes hic aliter, ac in praecedentibus tomis fieri solebat, dispositae inueniuntur. Scilicet noua haec volumina, mathematico-physicis meditationibus, exclusis, quae ad classem historicam pertinent, disquisitionibus, potissimum dicata sunt. Hinc classis prima horum *Nouorum Commentariorum*, quae *Mathesin* proprie spectant, complectitur; altera *physico-mathematica*, quae ad Physicam experimentalem et Mechanicam pertinent, comprehendit; tertia *physica*, anatomicas, botanicas et chemicas exhibet dissertationes, et quarta denique *astronomica*, quae ob rationem pag. 466. Tom. I. Comm. allatam, ad finem cuiusque Tomi *Nouorum Commentariorum* reiicietur, obseruationes potissimum sistit astronomicas.

Nec silentio praetereundum est, recensiones has, quae forte nonnullis iusto longiores videbuntur, indigenarum huius Imperii caussa potissimum typis mandatas esse, vt eo melius intelligat proficiendi cupidissima Natio, quid dissertationum harum auctores ad incrementum scientiarum conferre studuerint.

IN-

INSTITVTA ACADEMICA

EDICTVM
IMPERATORIAE MAIESTATIS SENATVI PROPOSITVM DE REBVS ACADEMICIS.

Immortalis memoriae AVGVSTA, dilectiſſima noſtra *Parens*, *Domina* atque *Imperatrix* CATHARINA ALEXIAS omnium, qui Imperio EIVS ſubiecti fuerant, commodis materno amore atque cura proſpiciens, cupiensque perficere, quae *Parens Noſter* Deſideratiſſimus PETRVS MAGNVS animo complexus fuerat ingentia molimina, inſtituit erudiendorum populorum ſuorum cauſa Academiam Scientiarum, cui non longo poſt interuallo, quam tutelam Imperii Ruſſici ſuſceperat, ſummam a PETRO MAGNO conſtitutam viginti quatuor millium nongentorum et duodecim rubellorum repraeſentari iuſſit.

At quum Dominus atque *Parens Noster* in animo habuerit huic et Academiam artium, sine qua maturiores ab ipsa scientiarum Academia vix sperare licet fructus, coniungere, (quae res paullatim instituta auctaque Imperio haud aspernandos Nostro fructus tulit) cui tamen Academiae artium sustinendae atque perficiendae nondum, quae debet, summa constituta est, Nos, quibus salus populorum Nostrorum et artium incrementa curae sunt, scopum, quem sibi proposuerant Parentes Nostri, tenendum tuendumque suscepimus: Itaque summae supra memoratae clementissime iubemus adiici octo et viginti millia rubellorum, trecentos et octoginta sex, tuendae Academiae artium, et ornando augendoque cimeliophylacio atque bibliothecae Nostrae. Ex quo adparet, summam vniversam, quae impenditur quotannis tolerandis sumtibus vtriusque quum scientiarum tum artium Academiae, nec non Vniuerſitatis, (quae quidem ſumma ex curia reditus Imperii Noſtri diſpenſante tranſſcribenda eſt) eſſe quinquaginta trium millium, ducentorum et nonaginta octo rubellorum; eam autem pecuniam ſecundum tenorem libelli, qui ſtatum continet academicum, quem quidem Nos clementiſſime adprobauimus, adminiſtrari iubemus. Ac ne doctis viris in exſoluendis ſalariis mora aliqua interiiciatur, volumus ac iubemus clementiſſime, vt iſta pecunia ſemper, quum eam popoſcerit Academiae Praeſes, aut illo abſente Cancellaria academica, nulla interpoſita mora erogetur. Quibus autem modis ſeſe academici viri et in reliquis rebus gerere debeant, monſtrabunt leges academicae, quas quidem Nos clementiſſime comprobauimus.

Quocirca omnes qui Noſtro Imperio ſubiecti ſunt, quum generoſi, tum

cete-

ceteri, cuiuscunque demum ſint conditionis atque ordinis, ſolis capite cenſis exceptis, admonentur, ne negligant neue vereantur liberos ſuos atque neceſſarios Academiae tradere, inſtruendos liberalibus artibus atque doctrina ciuilium rerum, quo Nobis et reipublicae fiant vtiliores. Imbuentur autem iis artibus, earumque ſcientia rerum, ad quas quemque naturalis fert propenſio, nullam inſtitutionis ſoluturi mercedem, cautione tamen ea, vt alimenta et ceteras neceſſitates ſibi proſpiciant ipſi. Senatum autem Noſtrum volumus mandatum hoc Noſtrum curare diligenter.

Tabulis authenticis *Imperatoria Maieſtas* ſubſcripſit nomen infra poſitum

ELISABETA.

Villa regia, a. 1747. Iul. 24.

LEGES

LEGES
IMPERATORIAE SCIENTIARVM
ET ARTIVM
ACADEMIAE PETROPOLITANAE.

Longam de vtilitate liberalium disciplinarum et artium in regnis rebusque publicis instituere orationem superuacaneum videtur; neque tamen alienum fuerit docere, qua potissimum via eae tractari et in patriae commodum conuerti debeant. PETRVS *Magnus* gloriosissimus *Ille* Russorum *Imperator*, iam suo aeuo ad vtramque, quum sublimiorum disciplinarum tum ingenuarum artium, Academiam formandam, animum adpulit, et quae de instituenda Scientiarum Academia proposita fuerant, publica auctoritate sanciuit, dilato interim Academiae artium stabiliendae consilio. Ceterum auspiciis gloriosissimae Russorum *Imperatricis* CATHARINAE, etsi fundamenta satis firma vtrique proposito tenendo videbantur posita, tamen nondum tanto satis dignos instituto vel Scientiarum vel artium Academia tulit fructus, legum videlicet ignara, necdum certa formula constituta, quid cuique sequendum, quidue fugiendum, quaenam cuiusque conditio, quiue aut quanti sumtus in quemque erogandi essent. Quibus incommodis haud dubie PETRVS *Imperator*, ac post Eum CATHARINA *Imperatrix* obuiam issent ipsi, nisi morte praeuenti fuissent.

ACADEMIA DVAS CONTINET CLASSES, QVARVM ALTERA SVO SIBI NOMINE ACADEMIA, ALTERA NOVO VOCABVLO VNIVERSITAS ADPELLATVR.

1.

Superiore significatione Academia est coetus doctorum hominum, qui de rerum natura et effectibus omnium, quae sunt in hoc Vniuerso corporum, inquirere, et quae ipsi norunt, aliis demonstrare, denique maturiores ingenii foetus in lucem edere satagunt. Igitur dignus Academia vir non contentus est cognitione rerum iam inuentarum, progreditur vlterius, praeclari alicuius inuenti auctor ipse, vel certe particeps. Ex quo adparet, academicos viros indefesso studio teneri vel adnotandi, quae sunt memoratu digna, vel legendi idoneos scriptores, vel componendi libros. Neque vero, qui se totum in hac cura consumserit, erudiendae vacare potest iuuentuti. Sunt igitur Academici, docendi muneris expertes, nisi si quos habeant penes se Adiunctorum vocabulo insignitos, aut studiosos peculiari suae curae traditos: sunt item Professores Vniuersitatis, qui docendi munus sustinent; de quibus inferius, quum de Vniuersitate sermo erit, agetur. Ceterum si necessitas exigat, non alienum existimabit ab instituto Academicus, et Vniuersitati operam suam commodare; modo ne talis cura eum ab aliis iisque grauioribus negotiis auertat. Iudicium et cura totius negotii penes Academiae Praesidem esto.

2.

Nemo est, opinor, qui infitias ire audeat, homines peritos cursus coelestium corporum, et nauigationis et Geogra-

graphiae, quum terrarum orbis, tum patriae suae, cuiuis regno magno esse et adiumento et ornamento. Igitur in republica academica prima classis est Astronomorum et Geographorum. Sunt enim ii, quorum ex scholis prodire solent rerum maritimarum peritissimi, qui non solum terrasque tractusque maris, coelumque profundum describere, sed et interdum vincula rerum perrumpere, nouosque, si fortuna adsit, nobili ausu et felici successu detegere orbes queant.

3.

Quamuis Russorum Imperium solum habeat herbis, plantis, lapidibus, salibus, metallis gignendis prae aliis terris longe foecundissimum, atque adeo multa quum in visceribus, tum in superficie terrae deprehendantur, quibus curiosi naturalium rerum inuestigatores ingenia exercere possint; tamen multo maxuma hominum pars earum rerum, quarum vberem nobis largitur prouentum, nomina et adpellationes, nedum virtutes et efficacitates satis nouit. Igitur opus est alia classe Physicorum, quae quidem constabit Botanico eodemque rerum naturalium inuestigatore historico, Anatomico item et Chemico.

4.

Etsi status regiminis politici, artes, publicae opificum officinae, exercitus, classes, commercia cum exteris, cetera denique in Imperio satis salua esse videantur, tamen vt conseruentur, quae recte constituta sunt, opus est quibusdam adminiculis. Opus est, v. g. variis machinis et instrumentis bellicis quum pedestris exercitus tum vsibus classium adcommodatis. Taceo architectonicam ciuilem et militarem,

 taceo

taceo artem fundendi tormenta bellica, repurgationem fossarum, fluminum, et alterius in alterum deriuationem: omitto officinas pannorum quum sericorum tum laneorum, praetereo agriculturam, hortos et innumera alia, quibus eget ciuitas. Quapropter tertiam duabus prioribus adiungi placet, classem videlicet physicam cum mathematica coniunctam, eamque occupabit Academicus, rerum naturam, variosque naturae rerum effectus demonstrans experimentis; itemque alter Mechanicus, cuius partes erunt excogitare varia instrumenta et machinas architectonicae quum militari tum ciuili adcommodatas.

5.

Istas, quas modo recensui rerum naturalium disciplinas, regnis rebusque publicis vtilissimas esse, nemo sanus, opinor, negauerit. Verum sunt nonnulla, quae perfectiorem reddere possint statum Academiae, si addantur, puta, examina ponderis atque mensurae, rerum item naturalium et artificiosarum inter se aequationes. Igitur adsciscendus est, mathesi sublimiori totum qui sese tradidit, cuius partes erunt reliquorum problemata academicorum soluere, et expedire praeterea, si qua forte aliunde missa proponantur explicanda.

6.

Porro requiritur, qui Academicorum res gestas memoriae tradat Secretarius, cuius de officio dicetur infra.

7.

In consortium academicorum ordinariorum recipiuntur et honorarii, quos et ipsos munere Academicorum fungi verum

rum est. Quacirca quum ipsis mittentur grauioris paullo momenti theuremata Academicorum, sententiam suam de iis expromere ne vereantur, neue grauentur, quae ipsi commenti sunt egregia, cum Academia communicare. Quae vt aequiore animo faciant, ostenditur singulis auctoramentum, quod tamen ducenorum summam rubellorum excedere non debet. Neque vero plures quam decem eodem tempore cooptari visum est. Et ii quidem, qui sunt in praesentia academici honorarii, locum quem tenent, tenebunt. Ceterum Academia id aget, vt deinde ex praecipuis Europae regnis, rebusue publicis eligantur singuli, quorum ministerio commercium litterarium per vniuersam Europam vigeat. Praeter istos decem, quos dixi honorarios, Praesidi si visum fuerit, licebit et alios eruditione claros et illustres nobilitate viros, quamcunque demum disciplinam profiteantur, siue Russi fuerint, siue peregrini, titulo honorariorum recipere, excepto tamen honorario.

8.

Sunt ergo in Academia Scientiarum decem ordinarii, quos abolita Professorum adpellatione, nominari deinde placet Academicos. Sunt praeterea decem honorarii, et ii quidem extra limites Russici Imperii. Hi omnes in id vnice incumbent, vt quae ab natura et arte proficiscuntur, ad summum perfectionis proueheant fastigium.

9.

Academico adiungitur Adiunctus, suo quisque Academico operam praestans vicariam. Itaque Academicus curam habebit Adiuncti, et Adiunctus ita sese geret, vt dignus euadat,

dat, qui, quum aliquando excesserit Academicus, in eius locum succedat. Praeterea Adiunctus in rebus ad disciplinam suam spectantibus Academico suo erit pro interprete.

10.

Quum tale collegium constet viris eruditione praecellentibus, qui claris ingenii foetibus orbi litterario studia sua dudum adprobauerint, neque tamen alio pacto euocari queant nisi mutua stipulatione, manifestum est, stipendia in eos aequis portionibus conferri minime posse, sed aliis minora, maiora aliis pro re nata dari oportere. Porro quum dignitatis augendae nulla aut exigua admodum sit copia, incommodum istuc munificentia compensandum videtur. Sed arbitrium et ius erogandorum salariorum est penes Praesidem, qui bene meritos vel praemio vel auctiori stipendio afficiet, modo liberalitas ista expensarum modum, qui Maiestatis Imperatoriae *auctoritate constitutus est, ne excedat. Pari modo Adiunctorum alii ab aliis distinguendi sunt; et eorum quidem, qui luxu et inertia torpent, prauitas coërcenda; aliorum autem, qui in rebus gerundis strenuam nauare operam solent, solertia beneficio remuneranda videtur, inprimis si faueant testimonia Academicorum.*

DE OFFICIO ACADEMICORVM ET ADIVNCTORVM.

11.

Academicis, Adiunctis, Vniuersitati, Cancellariae et ceteris, quotquot sunt, Academiae partibus, constitutus ab Imperatoria Maiestate *Praeses auctoritate praeest, omniumque rerum curam, administrationem et regimen tenet. Is ante*

ante omnia videbit, ne recipiantur, qui nullius sunt frugis, neue impensae frustra fiant. Ceterum *Academia Scientiarum et artium more aliarum in* Europa *Academiarum sub auspiciis et tutela* Imperatoriae Maiestatis *et sub ductu Praesidis, ab aliis iurisdictionibus libera et immunis agito, nec nisi a Praeside, aut si is absit, ex Academiae Cancellaria edicta* Maiestatis Imperatoriae *accipito.*

12.

Adsciscendi Academici aut ab Academia remouendi potestas et iudicium penes Praesidem esto.

13.

Et eruditione insignem et moribus egregium bonumque virum decet esse, quicunque locum Academici affectat, siue Russorum ex gente fuerit, siue aduena. Adiunctorum tamen ex grege nemo nisi russicae gentis esto. Neque vero quemquam in Academiam, siue Academici siue Adiuncti partes tuendas poscat, recipiendum puto, nisi specimen aliquod doctrinae suae orbi erudito ostenderit.

14.

Principio cuiusque anni, hoc est, primis Ianuarii diebus quilibet Academicus in congressibus academicis demonstrare debet, quae qualiaue studia illo anno sibi proposuerit pertractanda; et quarto quoque mense, quum tempus instat repraesentandi salaria, codicillis notum facere debet Praesidi, quid praestiterit ipse, quantosue progressus fecerit Adiunctus, laborum eius socius.

15.

15.

Acroases Academicae singulis dierum hebdomadibus ternae sunto. In congressibus Academici commentationes suas ceteris coram legunto, ordine quo quisque receptus est, et eas quidem ab hora nona ad duodecimam. Si quis dissertationem suam legendo nondum absoluerit, reiiciet eam in proxime sequentem congressum, non exspectato tempore vicis suae. Adiunctis sententias suas expromere libere, vnaque cum Academicis ad eandem mensam adsidere licet.

16.

Quilibet Academicorum id proprie aget, quod suarum est partium: Itaque non opus est, vt v. g. Mathematicorum lineas moretur Botanicus, aut Anatomicus coelum curet Astronomorum.

17.

Nulla heuremata Academicorum, quamuis egregie excogitata, in commentarios Academiae Scientiarum nisi iussu Praesidis referri possunt. Etenim Academicus, nedum Adiunctus, nihil publicorum negotiorum attrectare potest, inuito Praeside, aut, si is absit, Cancellaria.

18.

Vt autem magis ex voto procedant omnia, Academiae Secretarius ephemerides conficiet rerum ab Academicis gestarum; deinde digeret doctas Academicorum commentationes et inuenta, quorum nihil ex tabulario auferri potest sine chirographo; tum commercium litterarium instituet cum viris doctrina praestantibus; postremo ordinabit omnia

omnia mandata et edicta, quae a Praeside, vel si is absit, ex Cancellaria mittentur. Quae vt commodius fiant, adiungitur Secretario Tabularius.

19.

Et diarium et commentationes Academicorum, denique omnia, quae ex isto coetu in lucem proferuntur, latine aut russice scribi debent; gallica autem germanicaue lingua nihil quicquam publicarum rerum traditor.

20.

Si qua Academico intercesserint negotia cum foro alieno, de istis communicare debet cum Praeside, aut illo absente cum Cancellaria. Neque enim studia Academicorum strepitu ciuitatis aut tumultu forensi disturbari conuenit.

21.

Principio cuiusque anni Praeses per Secretarium publicabit problema, quod erudito orbi soluendum tradet, proposito praemio, quicunque feliciorem prae ceteris solutionem illius argumenti exhibuerit. Tractabuntur autem ista exemplo et more aliarum Academiarum.

22.

Commentationes, et quae quisque Academicorum praeclara excogitauerit alia, Secretario Academiae ipse sua manu adseruanda tradet, syngrapho ab eo accepto. Is deinde cauebit, ne quid horum pereat, neue detrimentum capiat. Si quae facta sunt experimenta in aedibus priuatis, ea institui debent iterum, sed publice, sed prae-

ſente Praeſide, in loco ad talia negotia deſtinato.

23.

De controuerſiis, quae ſorte inter Academicos exorientur, diſceptabunt modeſte, vt graueis decet viros, qui reuerentiam habent et famae et loci. Eos autem, qui praeter opinionem mutuis ſeſe lacerabunt contumeliis, Academiae Secretarius interpellando ab iniuria cobibebit, ceterum rem integram apud Praeſidem deſeret.

24.

Academicorum quotquot ſunt, recens editos ſuae profeſſionis libros legunto. Quocirca ſimulac reſciuerint diuulgatos, poſcere eos ex bibliotheca, et adnotationibus illuſtrare, et quae viſa fuerint alicuius momenti, cum ceteris ſodalibus communicare debent. Et eas quidem adnotationes, dummodo ſit operae pretium, Praeſes in ruſſicum ſermonem conuerti, preloque ſubiici iubebit.

25.

Si quando reſciuerint Academici de nouo aliquo experimento, is, cuius intereſt, frequente Academicorum coetu illud ſub examen reuocare diligenter, rerumque momentis atque ponderibus adcurate penſitatis, in ephemerides, quidquid de toto negotio indicauerit, inſerere debet.

26.

Praeterea Academici component libros, argumentum artis et ſolertiae ſuae, qui rei ruſſicae et decori ſint et emolumento; et eos quidem libros ruſſice reddi atque imprimi reip. intereſt. Nullus tamen liber

liber typis mandari potest, quin perlectus sit totus praesentibus Academicis omnibus, vel certe iis, quibus id negotii Praeses dederit; et quum publicandus est liber, publicabitur ille perscripta Praesidis auctoritate, cui chirographum e regione adponet Secretarius.

27.

Si quid forte ex aliis regionibus huc mittetur reuocandum sub examen, vel publico testimonio comprobandum, de hoc Academici graue, sincerum atque firmum dabunt testimonium, ac rationem iudicii sui exponent Praesidi codicillis.

28.

Alienorum hominum, quem non duxerit ipse Praeses, aut huius iussu Secretarius, coetum Academicorum ingrediatur nemo, ne is quidem, qui doctas suas curas atque meditationes cum Academicis communicaturus venit.

29.

Conuentus Academicorum solennes quotannis terni sunto. Binae in illis conuentibus praeleguntor dissertationes, altera earum latino, altera russico sermone. Ipsi suorum ex numero eligent, quos quidem censent ad tale negotium maxime idoneos. Latinam tamen dissertationem reddi prius russice, eamque typis imprimi et inter auditores distribui oportet, quam in conuentu solenni legatur. Primus quisque conuentus immortali PETRI Magni, Academiae Fundatoris memoriae sacer esto, idemque primis Ianuarii diebus habetor: alius immortali CATHARINAE Imperatricis memoriae, primis Maii diebus dicator: ter-

 tius

tius conuentus indicitor, quum praeterierit dies festus, memoriae Sachariae vatis sacer et ELISABETAE.

30.

Primum inter Academicos locum in conuentibus occupat Praeses. Inter ceteros, qui prior in Academia prouinciam capessiuit, is et priorem in consessibus Academicorum locum obtinet.

31.

In cognoscendis causis quae ad incrementa pertinent rei litterariae, quod maior Academicorum pars iudicarit, id ius ratumque esto; quae tamen coram Praeside fieri debent omnia. Quod si is absit, tum vero rei litterariae causas tractat et cognoscit Academicorum senior.

32.

Circa finem Nouembris mensis Secretarius publicabit cum interpretatione russica capita omnium, quae per annum vertentem factae sunt dissertationes, quibus callidas adiunget epicriseis suas.

33.

Praeses, quae in Academia instituta rite sunt, ea quam maxima potest cura tueri debet. Quum primum conuenerint Academici, repraesentandae sunt istae leges coram, quarum exemplum semper penes se habebit Secretarius, ne quis obtentum quaerat, quasi nesciat.

FRVCTVS, QVI PROVENIVNT EX INDVSTRIA ACADEMICORVM.

34.

Si quando, qui rebus Imperii administrandis praesunt, poscent Academiam Scientiarum vel formam operis alicuius, vel

vel inuentionem machinae, vel nodorum paullo difficiliorum solutionem, vel notitiam rerum quae vel ad Geographiam, vel ad Nauigationem, vel Botanicen, vel Chemiam pertinent; denique si qua sint alia, quae vel maritimarum, vel rerum vrbanarum tribunal requirat, aut quae rebus metallicis, aut salibus, aut agriculturae, aut aliis rebus perficiendis conducant; ea Praeses curabit omnia, Academicorum ex numero sine mora destinando talibus negotiis maxime idoneos, qui quidem indefesso studio operi intenti, quicquid praestiterint, Cancellariae indicabunt: Ast Cancellaria, more inter tribunalia recepto, omnem cum illo, cui opera Academicorum vsus fuerit, tribunali rem communicabit. Porro quaecunque praeclara, ornandis vel ciuilibus, vel rebus militaribus excogitauerint Academici, ea Praesidi aperient, aut quum is absuerit, Cancellariae, quae quidem nulla interposita mora, quo debent loco, reddenda ea curabit.

35.

Euenit interdum, vt peregre arcessendus videatur homo aliquis, qui certis negotiis vel in tribunali rerum maritimarum, vel alibi praeficiatur. Quem si arcessant ipsi, periculum est ne fugiant, vt aiunt, praeter casam. Petent ergo rite et more tradito ab Academiae Cancellaria, quae, si praesto sit indigena, eum tradet; sin minus, rectius talem hominem euocabit ipsa. Huius etenim est scire, quibus ex locis idonei rebus gerendis homines acciri debeant.

ALTERA ACADEMIAE PARS QVAE EST VNIVERSITAS.

36.

Neque vero Russia hoc vno contenta est, vt alat viros eruditione claros, quorum ex industria nonnullos fructus capiat; id potius agit, vt perpetuo habeat viros dignos, qui in aliorum locum, si opus sit facto, sufficiantur, maxime iuuenes. At quum Academia in praesentia sine ope maximam partem alienigenarum sese tueri vix possit, in reliquum autem tempus constare debeat tota indigenis, idcirco cum Academia coniungitur pars ea, quae vocatur Vniversitas.

37.

Vniuersitas est frequentia hominum partim docentium, partim discentium. Illi Professores, hi studiosi vocitari consueuerunt. Professores non linguas docent, sed doctrina rerum imbuunt. Igitur studiosos par est latine iam scire, vt Professorum lectiones intelligant, quae non nisi latino aut russico sermone tradentur. Horum triginta maxime idonei et in latina lingua exercitati ex ludis litterariis, quibus ex locis visum fuerit Praesidi, exciti nomina profitebuntur apud Academiam, publicaque largitate sustentabuntur et gratuitis habitationibus, separatis quidem illis, sed tamen intra eosdem penates. Atque vt iste numerus constans sit et perpetuus, instituitor Gymnasium, in quo adolescentulorum viginti publicis Academiae sumtibus alantur. Et eorum quidem qui sunt strenui, in supplementum Academiae studiosorum scribuntor; alieniores a musis per officinas Academiae artium disperguntor. Numerus discipulorum et studiosorum, in quos publica erogantur stipendia, constituto maior ne esto.

Nam

Nam ceterorum qui sponte sua veniunt, suo aere litterarum studiis vacaturi, numerum definire haud sane libet. Ceterum pro institutione poscendi aliquid neque Academici, neque Professores neque Praeceptores quicquam iuris habent.

38.

Forma Vniuersitatis ad exemplum ceterarum in Europa Vniuersitatum dirigitor. Aperiuntor ante omnia scholae, in quibus doceantur a praeceptoribus linguae, latina, graeca, gallica atque germanica. Ex scholis transscribentur in Academiam studiosi, imbuendi a Professoribus disciplinis, quae vel latino vel russico sermone tradentur. Disciplinarum classes sunto tres, Mathematum, Physices et Humaniorum.

39.

Si disciplinarum ratio ita constituta est, adparet, virorum eruditione praestantium in Russia copiam etiam nunc desiderari. Huic incommodo medebitur Vniuersitas, quae sufficiet viros, quibus non solum academica, sed et alia longe grauissima negotia committi tuto possint. Neque enim eruditio cuiquam erubescenda, immo vero maximae laudi ducitur, esse in omni statu tam militari quam ciuili, domi forisque russicae gentis viros doctrina praestantes, rebus gerendis idoneos.

40.

Quapropter et ex Academia equestri, si qui sunt, qui politicarum studio rerum exerceri cupiunt, ad vniuersitatem mittendi sunt, iis instituendi disciplinis, quae apud ipsos non tractantur. Quo facto et Professores negotium habe-

habebunt, neque locus excuſationi relinquetur, quaſi nemo ſit, in quo erudiendo animum habeant occupatum.

41.

Ad Vniuerſitatem omnibus, quibus ingenii vigor ineſt, cuiuscunque demum ſint conditionis, aditus patet, ſolis capite cenſis exceptis. At ſi qui iſtorum ante recepti tirocinii rudimenta iam poſuerunt, eorum opera Academia et in reliquum tempus vtetur. Generoſos publicis Academiae ſumtibus ali non placet, niſi forte eos, quibus eſt res familiaris tenuior. Iidem, quum in examine ſolenni Academicis adprobauerint profectus ſuos, eandem ac Academiae equeſtris iuuenes ſpem apiſcendorum honorum habent. Quilibet eorum, qui ſe nobiles ferunt, quum nomina dabunt Vniuerſitati, repraeſentare debent datum ex curia heraldica teſtimonium, nobilitatis ſuae indicem.

42.

Qui propriis ſtudent ſumtibus, ii ſui iuris cenſendi, neque contra voluntatem ſuam retinendi ſunt. At de his, qui ſublimioribus ſeſe tradiderunt ſtudiis, ad legitima tribunalia referendum eſt, vt ad altiores promoueri queant gradus, iique dignitate et loco pares ſunto his, qui ordines ducunt in exercitibus.

43.

Inter initia rerum Profeſſores, quamcunque demum profiteantur de rebus coeleſtibus doctrinam, nullo diſcrimine admittuntur. Ceterum quum ingrediuntur prima muneris ſui ſpatia, iure iurando obſtringi debent, ne vel praeceptis vel conſilio auditorum ſuorum auribus inſtillent quidquam

quam, quod orthodoxae Graecorum confessioni sit contrarium. Praeterea sacerdos aliquis doctrina clarus, ex numero hieromonachorum instruendus est publico Academiae salario, qui singulis Saturni diebus in auditorio magno elementa fidei tradat in catechesibus, simulque operam det, vt diuinae leges et sanctorum ecclesiae patrum tradita ab omnibus obseruentur.

44.

Professores et praeceptores, nec non studiosi et discipuli, siue suis, siue academicis sumtibus in Vniuersitate studeant, legibus obtemperare debent omnes. Eas autem leges condet Praeses ad exemplum aliarum, quae sunt in Europa Vniuersitatum, statuetque, quo tempore et quibus modis ratio docendi et discendi instituenda sit.

DISCIPLINAE, QVARVM SCIENTIA INSTRVVNTVR TIRONES IN VNIVERSITATE.

45.

1. Institutio latini sermonis, quae quidem fieri debet lingua russica: gallicae et teutonicae linguae vsu in tradendis linguae latinae praeceptis plane interdicitur.
2. Poësis.
3. Lingua graeca.
4. Latini sermonis elegantiae et fundamenta stili cultioris.
5. Arithmetica.
6. Ars delineandi.
7. Geometria et aliae Matheseos partes.
8. Geographia, Historia, Genealogia et Ars heraldica.
9. Logica et Metaphysica.

10. *Physica theoretica et experimentalis.*
11. *Antiquitates et historia litteraria.*
12. *Ius naturae et philosophia practica.*

46.

Omnes Praeceptores russica, at Professores latina lingua docento.

47.

Studiosi ad gradus Magistrorum, Adiunctorum, Professorum, et Academicorum promoueri possunt, ex more et consuetudine recepta in Vniuersitatibus. Sed de his plura dicentur in legibus Vniversitatis, quas Praeses promulgabit.

48.

Ordo disciplinarum est talis: primo addiscenda est lingua latina, vt quiuis auctor classicus facile et sine cunctatione intelligi possit, eodemque temporis tractu incumbendum est in studium graecae linguae, et geographiae, et historiae et arithmeticae. Quum iam discipuli in gymnasio tantos progressus fecerint, vt lectiones latine propositas intelligere possint, tum vero transscribendi in Vniuersitatem et institutioni Professoris Eloquentiae tradendi sunt, qui exorsus ab arte poëtica deinde perget ad institutionem Rhetoricae latinae. Rhetorices russicae praecepta separatim tradi neutiquam opus est; latinae enim eloquentiae regulas qui nouit, eas ad cuiusuis alterius linguae vsum adcommodare facile potest. Itaque neque tempus frustra perdendum, neque ingenia tironum superuacaneis disciplinis oneranda videntur. Rhetoricis exercitationibus interponi potest gallicae linguae, aut si cui cordi est, delineandi studium. Quibus absolutis audient studiosi lectiones logicas et metaphysicas;

tum

tum incumbent in studia physices theoreticae et experimentalis, cum quibus coniungent historiam, primo ciuilem, deinde litterariam, post genealogiam, tum heraldicam, postremo philosophiam practicam. Neque vero istae disciplinae confuse et quasi per saturam, sed ordine et sigillatim tractandae sunt, inprimisque cauendum, ne tenera studiosorum ingenia pluribus simul propositis disciplinis obruantur. Promouendi autem et in aliarum disciplinarum institutionem tradendi sunt, quum praecesserit examen.

49.

Postremo Praeses quarto quoque mense, postquam certior factus fuerit ab academicis, quid praestiterint ipsi, quosue progressus fecerint ipsorum adiuncti et studiosi, examinare debet gymnasii tirones et studiosos Vniuersitatis, quo sciat labores docentium et diligentiam successusque discentium. Tali modo neque ratio publicarum impensarum neque summa Imperatoriae Maiestatis *munificentia curaque frustra erunt.*

DE CANCELLARIA.

50.

Forma Cancellariae edictis Imperatoriae Maiestatis *ad amussim respondere debet. Haec est sedes illa locusque, ex quo Praeses vniuerso corpori academico moderatur. Ceteros, qui vna cum Praeside rebus academicis praeficiuntur, sublimiores disciplinas et linguas nonnihil attigisse decet, quo rectius intelligant, quid a quoque exigi oporteat. Iidem, quum Praeses abest, coniunctim res Academiae administrant, eadem auctoritate, qua pollet ipse, quum coram adest Praeses; ideoque et in conuentibus academi-*

 demi-

demicis conſeſſus et ſententias dicendae ius habent. Porro qui praeſunt Cancellariae academicae, cum extraneis pactiones faciunt, et augendi minuendiue ſalaria pro dignitate et meritis cuiusque poteſtate pollent. Praeterea labores cuiusque habent perſpectos, et diligenter examinant, an, quae quisque facit, eo modo faciat, quo facere debet lege pactionis, qua ſemet obſtrinxit: Eorum denique eſt, de rebus ad Academiam pertinentibus communicare cum omnibus, quorum id intereſt, collegiis, ad eorumque manus perueniunt edicta Imperatoria *et libelli memoriales. Vt paucis expediam, quum doctores, tum diſcentes, nihil quidquam quod ad eorum forum non pertineat, ſponte ſua ſuſcipere, ſed omnia ad Cancellariam referre debent, quae quidem cunctarum rerum curam gerendo, rationes aerarii diſponet, illudque ſartum tectum, et ab omni incommodo et detrimento ſincerum atque integrum conſeruabit, et quid ex quoque negotio emolumenti naſcatur, cum cura explorabit. Qui rebus gerendis praeſunt, eundem dignitatis gradum tuentur, atque ii, qui in ceteris collegiis iisdem honorum vocabulis vtuntur; praeterque eos in Cancellaria ſunto Secretarius, actuarius, commiſſarius, curator regeſtorum, inſtitor, chirurgus eiusque ſocius et adminiſter, interpres, duo Cancellariae ſcribae rebus ruſſicis, vnus germanicis negotiis curandis; duo item alii, ordinis ſequioris, iisdem ruſſicis, itemque vnus ſcribendis rebus germanicis, et octo amanuenſes.*

BIBLIOTHECA ET CIMELIOPHYLACIVM.

51.

Bibliothecarius ſub regimine Praeſidis praeeſt Imperatoriae

ratoriae Maiestatis *bibliothecae et cimeliophylacio*, *ac secundum hunc is qui vicem eius sustinet. Amborum est ordinare et ornare bibliothecam et cimeliophylacium, eaque nouis libris nouaque supellectile instruere. His dicto audientes sunto pictor animalium et plantarum, nec non medicamentarius, qui conseruabit anatomica et alia vnguentariorum praeparata; item duo interpretes, quorum alter germanica russice, alter russica germanice reddere sciat; et hi quidem quum propter litterarum, res per Europam gestas continentium, tum propter aliorum scriptorum, quae publicae luci exponi debeant, interpretationes.*

52.

Quum magna adhuc sit penuria, in bibliotheca librorum, rerum in cimeliophylacio, curiosorum hominum perlustratione dignarum, huic incommodo minuendo destinatur quotannis ex reditibus bibliopolii summa binorum millium rubellorum: ad coëmendos autem varios cimeliophylacio necessarios adparatus, puta spiritum vini, vitrea, camphoram et id genus alia, statuenda est certa pecuniae summa, quam quidem in alios impendere sumtus nemini licet.

53.

Denique certa pecuniae summa constituitur botanico horto et laboratorio chemico tuendis, comparandis item variis, quibus vsus est in astronomia, physica experimentali et aliis disciplinis, instrumentis, et ceteris rebus necessariis, postremo tribuendis praemiis, quibus donantur homines ingeniosi et eruditi, de quibus supra art. 21. facta mentio est.

ARTES.

TYPOGRAPHIA.

54.

Typographiae ſunto duae, quarum in altera exoticarum, in altera ruſſicae linguae libri imprimantur. Vtrique praepoſitus eſt prouiſor, qui cunctorum operariorum curam gerit, videtque vt eorum quilibet ſua cum ſtudio agat atque cura. Ac ne quid fraudis maliue doli proficiſci poſſit ex operis, idem ille prouiſor typos, formas, prela quam diligentiſſime cuſtodiet. Sed de his ampliora ſeparatim dabuntur mandata. De numero autem et conditionibus iſtorum libellus, qui ſtatum Academiae continet, plura tradet.

BIBLIOPOLIVM.

55.

Bibliopolio praeficitur prouiſor, cuius eſt cum transmarinis bibliopolis ſocietatem commercii epiſtolaris de libris venalibus iungere, et curare rationes accepti et expenſi. Huic duo adiunguntur ſocii, qui libros in taberna libraria ordinent, eosque mundos terſosque praeſtent, diſponant item exemplaria, et librorum emtionem ac venditionem in codicem referant. Bibliopolii ratio ad morem et rationem bibliopoliorum, quae ſunt apud exteros, exigenda, et de acceptis et expenſis, item de numero librorum vni Cancellariae ratio reddenda videtur; hoc enim loco moris, qui in collegio rerum maritimarum obtinet, ratio haberi nulla poteſt; fieri enim nequit, vt conſtans libris pretium ſtatuatur; praeterea venditio librorum variis fit modis, vt taceam auctorum et editionum diuerſitatem, quae pene innumera eſt.

ARS

ARS FVNDENDI TYPOS.

56.

Horum numerum, quo minor definiri in Academia non potest, et conditionem libellus statum academicum continens, demonstrabit.

ARS COMPINGENDI LIBROS.

57.

Refertur et de his in eodem de statu Academiae libello. Neque vero Academiae tantum, sed et omnibus Imperii locis, ex quibus pueri discendae huius artis causa mittentur, eorum opera vtilis est.

ARS IMPRIMENDI FIGVRAS AENEAS.

58.

Numerus et munia horum in eodem libello designantur.

ARTIFICES ET OPIFICES ALII.

59.

Architectus, tres caelatores, quorum hic imaginibus, ille regionibus, iste litteris aeri incidendis inseruiat, pictor idemque inuentor, mechanicus fabricandis instrumentis mathematicis, item alius barometris faciendis, concinnator horologiorum, faber ferarius et cum dolatore tornator. Habebunt ii adiutores singuli singulos, singulosque aut binos discipulos, secundum normam libelli, qui statum continet Academiae. Merces et auctoramentum eis statuetur pro ratione meritorum.

60.

Ex quibusuis Imperii locis ad quascunque artes aut opificia perdiscenda recipiuntur discipuli gratis; at sustentationis

tationis et alimentorum, a quibus traditi sunt, hi curam habebunt.

61.

In officinis operariorum vsus est variis adparatibus; itaque praeficitur apothecae inspector, cui postremae sortis omnium Academiae classium mercenarii atque operae parebunt.

62.

Certa statuitur summa coëmendis lignis atque candelis in vsum officinarum et ceterorum, qui in academicis aedibus publicis commodis inseruiunt.

63.

Pari modo summa mediocris destinatur sustentandis impensis extraordinariis, coëmendis item chartis, calamis scriptoriis, atramento, cerae signatoriae et ceteris, quorum adcurata iniri ratio non potest: ceterum qui facti sunt in haec atque huiuscemodi sumtus, percensendi et in commentarios referendi sunt omnes. Leges et mandata omnibus, qui in officinis operam nauant, dabit Praeses, quo quisque sciat, quid sibi faciendum, quidue vitandum sit.

64.

In manu Praesidis positum est, hisce statutis pro re nata vel aliquid addere vel immutare nonnulla, si quidem artibus amplificandis ista conducere et e republica litteraria esse cognouerit; modo ne ea fiant sine grauissimis caussis. Illud vnum animo eius penitus infixum haerere debet,

an-

annui qui impenduntur in Academiam Scientiarum et Artium ſumtus, conſtitutam conceſſamque ſummam ne egrediantur.

Tabulis authenticis Sereniſſima Imperatrix *ſubſcripſit ſolenni formula*,

RATA HAEC SVNTO,

easque tabulas ſigillo publico muniuit.

* * *

Nunc diſſertationum ab Academicis in priuatis conventibus *vi* horum inſtitutorum ab an. 1746. praelectarum, breuem exhibemus conſpectum, quem poſtea commentationes ipſae, eo quo recenſitae ſunt ordine, excipient.

MATHEMATICA.

L. EVLERI, DE SVPERFICIE CONORVM SCALENORVM ALIORVMQVE CORPORVM CONICORVM DISSERTATIO.

Varia veterum circa ſectiones conicas et conorum naturam in vulgus nota ſunt molimina, haec autem ad conos rectos ſolummodo, non vero ſcalenos aut alia corpora conica, quorum ſuperficies determinanda erat, ſpectant. Primus, qui derelicta a veteribus argumenta pertractauit, fuit Cel. Varignonus, qui in Cent. II. Miſcell. Berol. lineam curuam exhibuit, cuius conſtructio a quadratura circuli pendet, mediante cuius rectificatione area *coni* ſcaleni aſſignari queat. Huic diſſertationi magnus

gnus Leibnitzius additionem subiunxerat, in qua idem negotium per rectificationem curuae Algebraicae soluere annisus fuerat, sphalma autem, quod in solutionem hanc ingenio Leibnitziano alias dignissimam et maxime aestimandam, inaduertentia viri alias sagacissimi irrepserat, illam inutilem plane reddiderat.

Propositum igitur fuit Cel. Eulero, superficiem coni scaleni, ope rectificationis lineae algebraicae exhibere; porro, explanationem superficiei cuiuscunque per lineam curuam algebraicam absoluere, et lapsum summi emendare Leibnitzii. Id quod abunde praestitit, dum non solum fontem aperit e quo constructio curuae Varignonianae fluit, sed et methodo Hermanniana docet, quomodo scopus, quem Varignonius et Leibnitzius sibi proposuerunt, obtineri possit, et loco curuae, cuius arcus superficiei conicae non est proportionalis, sed qui perpetuo quadam quantitate algebraica augeri aut minui debet, aliam assignari docet, quae sine assumta alia quantitate superficiei conicae portionem quamuis metiatur.

Expeditis sic conis scalenis, conos quoscunque considerat, qui formantur dum linea recta per verticem perpetuo transiens, circa lineam quamcunque circumducitur, harumque superficiem, variis modis inueniri posse docet.

Tandem constructionem Leibnitzianam elegantissimam emendare aggreditur, in quo peculiari modo procedit, et fuse demonstrat, non solum quomodo illa inuenienda sit, sed et, quod praecipuum erat, curuam Leibnitzianam si in rectam quampiam constantem ducatur, praebere superficiem

ciem conicam quaesitam, sed quae antea portione quadam minui debeat.

Sicque Celeberrimus auctor constructionem Leibnitzianam emendatam, ad conos, quorum bases sunt figurae quaecunque, extendit, eamque reddidit vniuersalissimam.

L. EVLERI THEOREMATA CIRCA DIVISORES NVMERORVM.

Doctissima haec dissertatio ita comparata est, vt ab harum rerum intelligentibus legi oporteat, quibus proin ieiuna quaedam recensio parum, ceteris autem lectoribus nihil commodi allaturam esse persuasi sumus. Introitus autem viri Celeberrimi in hanc dissertationem meretur, vt hic in conspectum producatur. Scilicet, summos semper Geometras agnouisse asserit, plurimas in natura numerorum praeclarissimas absconditas esse proprietates, quarum cognitio fines matheseos non mediocriter esset amplificatura, tametsi iis, qui eas ad Arithmetices elementa referant, aliter visum nec creditum sit, iis aliquid inesse, quod vllam sagacitatem aut vim analiseos requirat. Hic Fermatium, insignem Geometram testem adducit, qui diligentius in hoc genere versatus, plurima huiusmodi theoremata produxit, quorum veritas euicta videtur, quamuis eius lateat demonstratio.

Sicque vtique attentionem meretur, quae porro proponit in mathesi pura, in Arithmetica scilicet, quae tamen prae reliquis matheseos partibus maxime pertractata et perſpecta haberi ſoleat, dari tales veritates, quas cognoſcere, non autem demonſtrare valeamus, cum nulla in Geometria occurrat propoſitio, cuius veritas ſiue falſitas firmiſſimis rationibus euinci nequeat.

Porro demonſtrat in Arithmetica, vbi numerorum natura perpenditur omnium abſtruſiſſimas contineri veritates, quoniam veritas eo magis abſtruſa cenſenda, quo minus ad eius demonſtrationem aditus pateat.

Nec eum moratur ſummorum mathematicorum auctoritas, veritates huiusmodi prorſus eſſe ſteriles et haud dignas, in quarum inueſtigatione opera collocetur, quandoque pronuntiantium. Quoniam praeter quod omnis cognitio veritatis per ſe excellens ſit, etiamſi ab vſu populari abhorrere videatur, etiam veritates omnes, quas nobis cognoſcere licet, ita inter ſe eſſe connexas, vt nulla ſine temeritate tanquam prorſus inutilis repudiari poſſit. Accedit ſi vel maxime propoſitio quaedam demonſtrata nihil ad vtilitatem praeſentem conferre videatur, quod tamen methodus, qua eius vel veritas vel falſitas eruitur plerumque viam ad alias veritates vtiliores cognoſcendas patefacere ſoleat.

Haud ergo inutiliter operam ac ſtudium in indagatione demonſtrationum quarundam propoſitionum ſe impendiſſe confidit Cel. auctor. quibus inſignes circa diuiſores numerorum proprietates continentur.

Neque enim hanc de diuiſionibus doctrina omni carere vſu, ſed nonnunquam in Analyſi non contemnendam praeſtare vtilitatem affirmat. Non dubitat porro vir Cel. methodum ratiocinandi, qua vſus eſt, in grauioribus

oribus aliis inuestigationibus aliquando non parum subsidii afferre posse.

Propositiones quas hic demonstratas exhibet, diuisores numerorum respiciunt in hac formula $a^n + b^n$ contentorum, quarum nonnullae iam ab ante memorato Fermatio sed *sine* demonstratione sunt publicatae.

De *cetero* omnes Alphabeti litteras hic constanter numeros *integros* indicare monet.

Ex reliquis elegantibus meditationibus breuiter notamus, demonstrationem Theorematis quinti sibi peculiarem esse, *prouti* §. 20 ipse adserit Cel. auctor.

Porro quod §. §. 24, 28, 31, 32 et 38 compendia quaedam insignia adducat, quodque citato §. 32 problema difficillimum Fermatii, qua numerus primus dato maior quaerebatur, adhuc manere insolutum affirmet, et tandem, quod veritates nonnullas, quas nosse, non autem demonstrare licet, §. 59 et 69 et alias nondum ex omni parte demonstratas §. 63 et 66 adducat.

L. EVLERI VARIAE DEMONSTRATIONES GEOMETRICAE.

In hac dissertatione vir Celeberrimus non solum theorema quoddam a Fermatio Geometris demonstrandum propositum, sed et nonnulla alia de areis trianguli et quadrilateri circulo inscriptis, praesertim autem theorema quoddam circa naturam trapezii demonstrat, quod et a nonnullis aliis Geometriae amatoribus, quibus vir Celeberrimus idem proposuerat, demonstratum esse nouimus.

e 3 Fatetur

Fatetur Celeberr. auctor theoremata haec primo intuitu nihil difficultatis inuoluere videri, earumque veritatem per analysin haud difficulter agnosci. Sed longe aliter se rem habere, si ab iis, qui artis analyseos expertes sunt intelligi debeant, quem in finem memoratus Fermatius eiusmodi demonstrationem geometricam requisiuerit, quae more veterum Geometrarum sit adornata, quae ab iis etiam qui analysi non sint adsueti intelligi possit.

Rem igitur aggressus vir Celeberrimus omnium horum theorematum demonstrationes pure Geometricas tradidit, in quibus nullum analyseos percipiatur vestigium, quae ita comparata sunt, vt hic recenseri non commode possint et a Geometriae cultoribus in ipsa dissertatione legi debeant.

L. EVLERI DE PROPAGATIONE PVLSVVM PER MEDIVM ELASTICVM.

Arduam sane materiam, quae tamen in Physica simul maximi est momenti, sibi pertractandam sumsit vir Cel. dum in propagationem pulsuum per medium elasticum inquirere conatur, siquidem hac theoria inuenta, quae circa soni et luminis propagationem occurrunt phaenomena, simul cognita erunt et exacte determinata.

Hinc ad resoluendam hanc maximi momenti quaestionem viam sternens ex primis principiis mechanicis, a casu simplicissimo orditur, vnicam prticulam solummodo considerando, et tandem inuenit, eam circa punctum medium

medium alternis motibus instar penduli motum iri, huncque motum perpetuo esse duraturum, nisi quatenus a resistentia diminuatur.

Hoc casu facillime expedito §. 8 duo corpuscula considerat, hic autem, quod bene notandum, motum inuenit a priori maxime discrepantem, neque amplius oscillatorio motui similem, qui ob hoc ipsum et multo difficilius definiri possit.

Fatetur tamen ingenue inuentionem numeri accuratam, quo celeritas propagationis pulsuum per quoduis medium elasticum definiatur, maxime esse arduam, nec sine insigni amplificatione doctrinae serierum expectari posse. Methodum tamen, qua Cel. Newtonus ad propagationem pulsuum vsus sit, non parum esse elegantem, et tametsi a rigore Geometrico valde abhorreat, pro idonea approximatione haberi posse, qua occasione, quomodo per experientiam valoris desiderati proxime determinari possint declarat.

Simulque docet, si veri valores non exactissime inueniantur, nos tamen modum, quo pulsus per medium propagentur elasticum, satis clare perspicere posse, et in diversis fluidis elasticis, celeritates, quibus pulsus per ea propagentur, esse in ratione subduplicata composita ex directa elasticitatum et inuersa densitatum affirmat.

Haec tamen iam aliunde constare dicit, et a Newtono firmiter iam esse demonstrata, quoniam ad hoc non opus sit, vt ipsa singularum particularum fluidi elastici agitatio sit perspecta.

Tandem ex iis quae supra allata sunt de motu vnius particulae oscillatorio, duarum autem seu plurium particularum quae celeritas tanta, vt consueta remigatione vix maior obtineri possit, huicque longe anteferenda, et maximo cum fructu venti loco adhibenda, prouti fusius Celeb. Eulerus ostendit.

Dum autem considerat, hanc vtilitatem nimis magnam esse in re nautica, quam vt diu latere potuisset, praesertim dum non admodum abscondito mechanismo contineatur, et ideo ob ipsam commodorum magnitudinem in suspicionem incurrat, quae adhuc augeatur, quod descriptio huius artificii tantum in opusculis posthumis reperiatur, nec viuente viro sit deuulgata. Hinc admodum probabile videtur virum beate defunctum, nisi de successu felici ipse dubitasset, non celaturum fuisse tantum inuentum, quod omnibus eius reliquis inuentis, etiamsi sint maxima, palmam praeripuisset.

Quapropter nihil se meritis summi viri detracturum confidit, si demonstrauerit, huiusmodi penduli ictibus naui nullum prorsus motum imprimi.

Vt autem inuestigatio effectuum penduli commode peragatur, definire conatur, quantum nauis a pendulo retro agatur, dum descendit per quadrantem, deinde ictum considerat, quo nauis propellitur, motumque, qui naui proram versus imprimitur, exacte determinat et tandem despicit, vtrum nauis postquam pendulum recesserit, motum habeat reliquum antrorsum directum nec ne, et quantus is sit futurus. Et quoniam motus huius reciproci determinatio, si resistentiae aquae rationem habere voluisset, maxime difficilis futura fuisset, haud sine calculo molestissimo expedienda, igitur aliam viam faciliorem pro-

proponit §. 11. 12. 13. et primo pendulum ſimplex conſiderat, vbi legem conſtanter conſeruat, vt celeritates per radices quadratas ex altitudinibus ipſis debitis et temporis elementa per ſpatiola interea percuſſa ad celeritates applicata exprimat.

§. 18 tandem demonſtrat motum quem percuſſio penduli naui imprimere conatur, proram verſus praeciſe aequalem eſſe illi, quem vires pendulum tendentes, quamdiu deſcenſus et aſcenſus vnus abſoluitur in contrariam directionem generare valeat, ex quo apparet, etiamſi nauis ab ictu penduli propulſionem proram verſus accipiat, tamen totum hunc motum deinceps ab aſcenſu penduli omnino ſublatum iri, et quoniam deſtructio haec poſt ſingulos ictus eueniat nullum omnino motum progreſſiuum naui conciliari poſſe, prouti Celeb. Bernoullius putauerat, per errorem ad id ſtatuendum, inductus, quem in determinatione vis propellentis a percuſſione oriundi commiſerat, quem ipſum errorem Cl. Cramerus eius commentator, probe animaduerterat, non autem ob calculi moleſtiam correxerat.

§. 19 et ſequentibus oſtendit, perfectam hanc virium propellentium et repellentium compenſationem quoque locum habere, ſi pendulum non totum quadrantem ſed et minores arcus abſoluat.

Poſtquam de pendulis ſimplicibus hucusque egiſſet §. 22. pendula adgreditur compoſita, in quibus idem obtinenere affirmat, ita vt hanc aequalitatem perfectam inter vires propellentes et repellentes primis mechanicae principiis adnumerare haud dubitet et tandem concludat, naves nonſolum hoc modo Bernoulliano propelli non poſſe, ſed quaſcunque alias machinationes, quae totae naui ſint incluſae, nullique principio externo innituntur, aeque eſſe inutiles, neque nauibus vllum motum imprimere valere.

Quomodo ſtabilito hoc principio problemata, huc pertinentia, ſolutu longe difficillima, ſolui poſſint §. 23. oſtendit, hoc firmiſſime affirmando, in quocunque caſu, perfectam ſemper inter vires nauem propellentes, et eas quae in regionem oppoſitam effectum exerant, fore aequalitatem.

Cuius principii rationem §. 24. ſeqq. affert; qua occaſione memorabile paradoxon mechanicum proponit §. 26. „quod ſcilicet frictio ipſa motus cuiuſpiam cauſa eſſe „poſſit, ita vt frictione ſublata nullus plane motus ſecu„turus ſit.„

Haec dum §. 27. ſequentibus ad reſiſtentiam aquae applicat, dubium quod ex ea oriri poſſet, ſoluit et tandem concludit, nullo modo naui ab hucusque deſcriptis pendulis celeritatem conſtantem antrorſum directam imprimi poſſe.

G. W. KRAFFTII DISSERTATIO GEOMETRICA DE PROBLEMATIBVS ALIQVOT CONICIS PER ANALYSIN CONCINNE SOLVENDIS.

Clariſſimus diſſertationis huius auctor viam monſtraturus, quomodo varia problemata conica per Analyſin concinne ſolui poſſint, praemiſſis tribus theorematibus, duo

duo sequentia soluta exhibet problemata, alterum, *datis duabus diametris coniugatis ellipseos inuenire axes*, et alterum *data vna diametrorum coniugatione inuenire alteram sub angulo quouis dato*. Speciatim autem circa primum notat, problema hoc, si praeter diametros coniugatas perimeter detur, facile solui posse, pronti *Apollonius* prop. 46 et 47 libr. II. fecerit: quodsi autem non data sit, pronti obtinet, tunc solutionem difficiliorem fore. Interim non negat constructionem huius problematis iam in *Pappi* exstare collectionibus, sed absque demonstratione, quam *Fred. Commandinus* supplere haud feliciter conatus sit, testantibus *Greg. a. St. Vincentio* et *Blondello*, qui in Comm. Acad. Reg. Scient. Gallico idiomate ab Ao. 1666 — 1699 editis idem solutum dederit, cum quibus conferenda sint, quae *Marchio Hospitalius* in libr. II. prop. II. sectionum conicarum adtulerit.

Interim sperat Cl. auctor si cui placuerit, omnes has demonstrationes *Vincentii*, *Blondelli* et *Hospitalii*, cum illa quam hic dederit, comparare, illum inuenturum, eam reliquas et concinnitate superare et euidentia.

G. W. KRAFFTII DEMONSTRATIONES DVORVM THEOREMATVM GEOMETRICORVM.

Consueuerunt iam diu primi ordinis Geometrae, si nouam quandam demonstrationem veritatis cuiusdam inuenerunt Geometricae, propositionem ipsam cum amicis

cis, cum quibus ipsis commercium intercedit literarium communicare, vt demonstrationem eiusdem proprio, vt aiunt, marte, inueniant, sicque magis confirmetur, si a pluribus eadem demonstratio allata sit, aut fines amplificentur scientiae, si nouum vel prorsus aliud fundamentum pro demonstratione inuentum sit.

Hinc factum est, vt Cel. Eulerus veritatem theorematis, quam in hoc ipso nouorum Comm. Tomo et quidem §. 26. seqq. dissertationis quae inscribitur, *Variae demonstrationes Geometricae* supra pag. 64 seqq. demonstratam dedit, Cl. Krafftio in literis d. 17 Febr. 1748 proponeret. Quod theorema non modo nouum visum, sed et generalitate sua mirum in modum eidem placuit, hinc praemisso quodam lemmate e trigonometria petito, demonstrationem ab Euleriana tametsi diuersam non autem minus firmam, propositi exhibet theorematis.

Cum autem eodem fere tempore in aliud incidisset theorema, Cl. Krafftius quod a *Rob. Smith*, inter opuscula *Cotesii* sed sine demonstratione editum fuerat, quam quidem alii Geometrae, et inter reliquos Celeberrimus, cuius obitum nunc orbis luget eruditus, dederat *Bernoullius*, subtilem tantoque Geometrae dignam, vires suas experiri voluit Cl. Krafftius, et ex eodem quod supra praemiserat, lemmate, casus aliquot huius theorematis deducere, et sic nobilissimo huic cyclometriae atque abstrusissimo theoremati lucem clariorem conciliare, simul tamen in quolibet propositorum exemplorum casu rigidissime probare annisus est.

PHYSI-

PHYSICO-MATHEMATICA.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE TVBINGAE 1745 et 1746. a *G. W. Krafft factae.*

Exhibuit Vir Clarissimus duabus dissertationibus obseruationes suas Tubingae institutas et quidem in primo dissertationis primae paragrapho instrumenta, quibus vsus est, et reliquas obseruationum circumstantias adducit, quae in dissertatione ipsa relegenda.

§. 2. et 3. Obseruationis altitudinis barometricae maximae et minimae differentiam 1. poll. Lond. 56. Cent. mediamque altitudinem barometri $28^{p}. 58^{c}.$ nulla habita instrumenti supra *Nicri* fluuii ripam eleuati ratione, quae 60. pedes adaequat, affert. Hinc §. 4. notat 1.) barometri variationem annuam Tubingae longe minorem esse quam est Petropoli, et 2.) variationes menstruas barometri in primis et vltimis anni mensibus plerumque esse maiores, quam in mediis, prouti id idem etiam Petropoli obseruauerat.

§. 5. et 6. Obseruationes exhibet thermometricas easque cum Petropolitanis comparat, notando iis diebus, quibus Petropoli cessauit frigus his iisdem illud Tubingae ortum esse, ita vt fere materia quaedam mota ex nostra regione in illam produxisse id videatur.

Maximum calorem h. 2. et 3. p. m. in diebus aestiuis et calidis, solis radiis libere ad thermometrum allabentibus thermometro Fahrenheitiano gradum 103. Tubingae iisdem sub circumstantiis vno gradu minorem scil. 102. obseruauit. Contra

Contra calorem aëris vmbrosi Petropoli minorem quam Tubingae inuenit scil. Petropoli 83°. Tubingae 89°.

Maximum autem frigus in thermometris Petropoli aëre libero in obseruatorio Imper. ibidem expositis deprehendit 1740. 25. Ian. st. v. 30°. infra o. Tubingae autem An. 1745. d. 21. Ian. frigus maxime insolens ibi visum, thermometro Fahrenheitiano saltem 13°. infra o monstrante.

§. 7. Nonnulla lucis borealis vestigia obseruata adducit, et §. 8. appendicis loco obseruationes in specu prope Reutlingam haud incelebri institutas et declinationem acus magneticae a tonitrubus et fulguribus mutatam affert, testaturque se praeeunte Grahamio quoque declinationem illam (si exacte ad eam attendatur) singulis horae quadrantibus aliquot minutis primis mutatam deprehendisse.

In sequenti dissertatione, quae obseruationes anni 1746. comprehendit, §. 1 et 2. ex obseruatione maxima et minima barometri quodammodo mutata, differentiam 1^p. 71^c. et mediam 28^p. 50½^c. deducit.

§. 3. autem maximum calorem huius aestatis longe lateque per totam Europam feruentissimae, die 25. Iul. 94°. in aëre vmbroso boream versus obseruauit.

§. 4. Varias obseruationes aurorae borealis mensibus Ian. Sept. Oct. Nou. et Dec. institutas affert, et

Tandem §. 5. instar appendicis, locum quendam e Historia imperii Ottomanici a Principe Moldauiae Demetrio Cantemiro conscripta fol. 364. sub Osmanno II. §. 3. citat, e quo verosimiliter probat; anno iam 1620. d. 22. Febr. st. v. spinam illam celestem seu lumen Cassinianum

nianum ibi obſeruatam eſſe, ſicque eius epocham quam An. Chriſti 1659. affigere ſolent, per 39 annos retrahit.

Ad reliquas huius claſſis Pyhſico-Mathematicae diſſertationes quod attinet, grato animo agnoſcimus, quod nobis otia fecerint Clariſſimi earundem auctores, dum breuem doctiſſimorum ſuorum laborum conſpectum ipſi conficere haud grauati fuerunt, ideirco eundem ipſiſſimis eorum verbis exhibere nulli dubitauimus, idque lectores noſtros latere noluimus.

DE QVANTITATE CALORIS, QVAE POST MISCELAM FLVIDORVM CERTO GRADV CALIDORVM ORIRI DEBET COGITATIONES.

Item

FORMVLAE PRO GRADV EXCESSVS CALORIS, SVPRA GRADVM CALORIS MIXTI EX NIVE ET SALE AMMONIACO, POST MISCELAM DVARVM MASSARVM AQVEARVM, DIVERSO GRADV CALIDARVM, CONFIRMATIO PER EXPERIMENTA. A. G. W. RICHMANN.

Calorem quidem fluidorum et quomodo calor fluidi vnius ad calorem alterius fluidi habeat, definire non licet: definiri tamen poteſt exceſſus caloris vnius fluidi ſupra gradum caloris alterius fluidi, et ratio exceſſuum caloris duorum fluidorum ſupra gradum caloris conſtantem. Huic rei inſeruiunt thermometra. Si materiae fluidae homogeneae diuerſarum temperierum miſcentur, media quaedam temperies poſt miſcelam oriri debet in mixto, vel potius medius quidam exceſſus caloris ſupra gradum caloris definitum.

Quomodo hic exceſſus poſt miſcelam cognitis maſſis ſingulis et ſingularum maſſarum exceſſu caloris ſupra gradum caloris conſtantem definiatur, oſtenſum eſt ab auctore in cogitationibus de quantitate caloris, quae poſt miſcelam fluidorum certo gradu calidorum oriri debet. Nimirum ſingularum maſſarum exceſſum caloris ſupra gradum caloris conſtantem multiplicandum eſſe in maſſas ſingulas et ſummam factorum per ſummam maſſarum dividendam eſſe. Hoc ibidem Cl. Krafftii experimentis probatum et nouis ſtabilitum eſt in confirmatione formulae pro gradu exceſſus caloris ſupra gradum caloris mixti ex niue et ſale ammoniaco poſt miſcelam maſſarum aquearum diuerſo gradu calidarum.

INQVISITIO IN LEGEM SECVNDVM QVAM CALOR FLVIDI VASE CONTENTI CERTO TEMPORIS INTERVALLO, IN TEMPERIE AERIS CONSTANTER EADEM DECRESCIT VEL CRESCIT, ET DETECTIO EIVS, SIMVLQVE THERMOMETRORVM PERFECTE CONCORDANTIVM CONSTRVENDI RATIO HINC DEDVCTA. AVCT. G. W. RICHMANN.

Decreſcit calor aquae in aëre frigidiori et creſcit in aëre calidiori aqua. Qua lege hoc fiat inueſtigauit autor idem, et ex multis obſeruationibus quas communicauit in inquiſitione ſua in legem decrementi et incrementi caloris deriuauit, (1) decrementa et incrementa in paruis temporibus aequalibus in genere eſſe, in ratione compoſita ex directa ſuperficierum integrarum, et differentiarum inter temperiem aquae et aëris et inuerſa maſſarum. (2) hinc deduxit, differentias temperierum inter temperiem aquae et aëris, in temperie aëris conſtanti, temporibus ſecundum arithmeticam progreſſionem ſeſe excipientibus, ſecundum progreſſionem geometricam de-

decrescere. Si. e. g. differentia initio est 100, et post quinque min. pr. 95. gr. post 10. minuta erit 90¼ gr. (3) Ex lege decrementi et incrementi caloris etiam deriuauit autor thermometra perfecte concordantia et aeque velocia non obtineri, nisi superficies bulborum Thermometricorum *sint*, vt volumina bulborum.

TENTAMEN LEGEM EVAPORATIONIS AQVAE CALIDAE IN AERE FRIGIDIORI CONSTANTIS TEMPERIEI DEFINIENDI. AVCT. G. W. RICHMANN.

Inquisiuit *etiam* idem autor in euaporationem, et primo *euaporationem* ex superficie aquae calidioris aëre ex*aminauit*, et inuenit ex obseruationibus in tentamine *sua* definiendi legem euaporationis, quantitates euaporatas in constanti aëris temperie esse ferme in ratione spatiorum Logarithmicae cuius semiordinatae exhibent differentias inter temperiem aquae et aëris, sese successiue excipientes, et abscissae tempora, vel, ob constantem subtangentem, esse vt differentias differentiarum inter temperiem aquae et aëris.

MEDITATIONES DE CALORIS ET FRIGORIS CAVSA. AVCT. M. LOMONOSOW.

Calorem in motu materiae constare ostenditur, §. 1. Motum illum calidis corporibus inesse, quamuis non semper percipiatur sensu, §. 2. Calorem constare in motu materiae intestino probatur, §. 3. Motum intesti*num* materiae coherentis caloris causam esse asseritur §. 4,

 quod

quod §. 5, confirmatur. Motus inteſtinus triplex indicatur, progreſſiuus, tremulus, gyratorius, §. 6. Calorem conſiſtere in motu materiae cohaerentis inteſtino gyratorio docectur, §. 7-11. Ad obiectionem reſpondetur, §. 12. Conſectaria nonnulla eliciuntur, §. 13. Theoria ad phaenomena prouocatur, §. 14. Quattuordecim phaenomenis confirmatur, §. 5-25. Quid de intumeſcentia calentium corporum iudicandum ſit innuitur, §. 26. Summum frigoris gradum in orbe noſtro terraqueo non dari ex propoſita theoria infertur, §. 27. Hypotheſis de propria calori materia per corporum poros vagabunda ad examen vocatur, §. 28. Corporibus aucto calore intumenſcentibus acceſſum calorificae alicuius materiae non argui §. 29. et 30; nec incremento ponderis calcinatorum, nec condenſatione radiorum ſolis per inſtrumenta cauſtica, nec denique experimentis circa materiam frigorificam inſtitutis idem euinci oſtenditur, §. 31-33. Quod aetheris officium ſit circa producendum calorem indicatur, §. 34. Frigoris propria materia breuiter refutatur 35.

TENTAMEN THEORIAE DE VI AERIS ELASTICA. AVCT. M. LOMONOSOW.

Poſt inuentam antliam pneumaticam multa quidem in natura aeris detecta, verumtamen cauſa elateris nondum ſatis explicata eſſe cenſetur, §. 1. Hypotheſes viribus centralibus innixae prae reliquis placent, §. 2. Quid in illis deſideretur, aut potius ſuperfluum ſit, oſtenditur

ditur, §. 3. A clara notione elateris aeris explicandi initium capitur, §. 4. Elaterem aeris non ab organicis et compositis quibusdam moleculis, sed a simplicissimis et solidissimis atomis illius proficisci ostenditur, §. 5 - 7. Figura atomis elaterem producentibus sphaerica et superficies *asperula* conuenientissima esse iudicantur, §. 8 et 9. *Particulas* aeris elaterem producentes non interfuso *aliquo* fluido, aere ipso subtiliore, sed mutua ipsarum actione a se inuicem pelli docetur, §. 10 - 12. Particulas aeris calore in gyrum actas et asperis superficiebus collisas a se inuicem resilire, indeque elaterem illius pendere probatur, §. 12 - 17. Exemplo explicatur theoria, §. 18 praecipua phoenomena, quae aer exserit, explicantur, eoque theoria proposita magis adstruitur 19. et seqq.

DISSERTATIO DE ACTIONE MENSTRVORVM CHYMICORVM IN GENERE AVCT. M. LOMONOSOW.

Inter abstrusas Chymicorum phoenomenum causas ea solutionis inuestigatione digna inprimis esse iudicatur, §. 1 et 2. Vulgaris explicandi ratio in sola pororum et corpusculorum magnitudine et figura quaesita reiicitur, §. 3 - 6. Ingressum menstruorum in poros soluendorum fieri ob homogeneitatem materiae ostenditur, §. 7 - 10. Propositum indicatur, §. 11 et 12. Phaenomena solutiones comitantia inter se contraria, nempe spirituum acidorum cum metallis incalescentia et aquae cum salibus refrigeratio pro fundamento ponuntur, §. 13. Metalla aëris vi elastica in poris eorum renata solui docetur, §. 51 - 27. Veritas experimentis confirmatur §. 28 et 29, et §. 30 - 34, phoenomenis explicatis vlterius probatur. Mathematico calculo denique adstruitur, §. 35 - 38. Sales in aqua solui sola frictione et confusione corpusculorum illius cum aqueis particulis salium ostenditur, §. 39 - 47 Solutiones in mediatas et immediatas diuiduntur, §. 48 et 49. Suspensarum in menstruo particularum fit mentio §. 50.

DE MOTV AERIS IN FODINIS OBSERVATO. AVCT. M. LOMONOSOW.

Primo phoenomeni obseruatio et descriptio ex Georgio Agricola proponitur. Tandem §. 1 - 9. definitones cum corollariis exhibentur. Denique §. 10 - 24. ostenditur, ex diuersa densitate aëris fodinarum ab ea quam externus habet, motum hunc nasci, et cum in fodinis aëris calor sit constans, externi vero varius, et quidem maior aestate, hyeme minor, reciprocantes fluxiones inde proficisci. Vltimo vsus huius theoriae breuiter indicatur.

DE INSIGNI PARADOXO PHYSICO AERE SCIL. IN 1837. VOLVMINIS PARTEM AQVA GELASCENTE REDVCTO, ET DE COMPVTATIONE VIS QVAM AQVA GELASCENS ET SESE IN MAIVS VOLVMEN EXPANDENS IN SPHAERA CAVA FERREA, BOMBA, DICTA, AD EAM DISRVMPENDAM IMPENDIT, COGITATIONES ET CONSILIVM QVOMODO REPETI DEBEAT EXPERIMENTVM. AVCT. G. W. RICHMANN.

Auctor examinauit quantum paradoxo Halesii experimento de compressione aëris, aqua congelascente in in 1837 voluminis partem redacti, tribuendum sit et conclusit nihil certi hinc deduci posse. Simulque in calculo, Cl. de Buffon, qui Cel. Hallesii computationem vis comprimentis aërem emendare voluit, errorem detexit.

TENTAMEN EXPLICANDI PHAENOMENON PARADOXON SCIL. THERMOMETRO MERCVRIALI EX AQVA EXTRACTO, MERCVRIVM IN AERE AQVA CALIDIORI DESCENDERE ET OSTENDERE TEMPERIEM MINVS CALIDAM, AC AERIS AMBIENTIS EST. A. G. W. RICHMANN

Phaenomenon in Obseruationibus thermometricis paradoxon sequens occurrit. Si in aëre temperiei definiti gradus ex aqua temperiei paulo minoris gradus thermometrum extrahitur, tantum abest, vt ascendat mercurius in thermometro, vt potius descendat modo plus modo minus. Huius paradoxi explicationem aliqualem idem autor suscepit in tentamine explicandi phaenomenon paradoxum scil. thermometro mercuriali ex aqua extracto mercurium in aëre aqua calidiori descendere, et ostendere temperiem minus calidam ac aëris ambientis est, et visum est ei, materias quasdam in aëre volitare, quarum concursu et vnione cum cuticula aquea bulbum thermometri ambiente, inter euaporandum, refrigerium oriretur.

SYNOPSIS METHODI NOVAE TVBOS MAIORES TRACTANDI. AVCT. C. G. KRATZENSTEIN.

Cum astronomis in obseruationibus coelestibus nihil magis incommodo sit, quam tractatio tuborum praesertim maio-

maiorum, licet etiam optimis fulcris Hugenianis, Hirianis etc. vtantur, autori visum est, hocce incommodum non melius posse remoueri, ac si tubus plane immobilis in situ quodam commodo, e. g. horizontali constituatur, et tum radii obiectorum, in vna eademque semper directione fixati quasi, ad tubum deferantur. Exhibita nuper per Cel. S' Grauesande in nouiss. edit. physices machinula quadam incogniti inuentoris, quae ad experimenta optica melius instituenda speculum per horologium in eo semper positu gerit, vt radius solis in cameram obscuram reflexus eandem semper seruet directionem, non dubitauit autor hanc intento scopo suo optime posse accommodari. Describit itaque hanc machinam mutatis nonnullis dispositionibus, prout ipsi scopo astronomico magis conuenire visum fuit.

Huc pertinent loculamentum anterius ex horologio remotum, quia rotarum in illo contentarum vacillatio euitari nequit, et dispositio fulcri, vt totum instrumentum statim in situm obseruationi conuenientem redigi possit. Determinat deinde dispositionem et diuisionem rotarum singularum, quam Cel. S' Grauesande horologipoeorum iudicio reliquit; ostendit denique in quo vsus et commoditas huius methodi consistat.

Spectator nimirum iam ad tubum quoad eius directionem sedet otiosus et quietus, metitur diametros apparentes, delineat maculas, determinat phases et adtendit ad motum vertiginis planetarum, absque quod motus eorum diurnus et progressiuus ipsi vllo incommodo esse possit. Et quis dubitabit ad multa phaenomena e. g. annulum nullum Saturni, ſtrias, Iouis etc. dum quaſi quieſcunt, multo melius poſſe attendi, ac dum motu continuo feruntur et obſeruatorem duplici labore occupatum tenent.

Obiectiones quae contra hanc methodum ex imperfectione ſpeculorum metallicorum fieri poſſent, inde refutat, quia noſtris temporibus actu conſtruuntur ſpecula metallica tantae perfectionis, vt cum optimis vitris obiectiuis de praecellentia certare poſſint.

SVPPLEMENTVM AD DISS. DE VI AERIS ELASTICA. AVCT. M. LOMONOSOW

Cauſa huius ſupplementi proponitur, §. 1. Bernoulliana deductio citatur, elaſticitates aëris in magnis compreſſionibus denſitatibus proportionales non eſſe §. 2. Deinde ad §. 10 vsque ex ruptis vi aquae globis per calculum deducitur conſectarium Bernoulliano geminum. §. 11. - 13. quomodo id cum propoſita ſuperius theora conſentiat, oſtenditur.

PHYSICA.

I. WEITBRECHTII, DE VTERO MVLIEBRI OBSERVATIONES ANATOMICAE.

Quas deſideratiſſimus Collega paucis ante obitum hebdomadibus conuentui exhibuerat obſeruationes Anatomicas, dum recenſere adgredimur, non nobis propoſitum eſt, eas integras hic inſerere; quoniam citra mutilationem vix contractionem pati videntur, ſed ſaltim paucis exponere, quae potissimum ex obseruationibus suis circa quatuor cadauera foeminina, mulieris septem menses praegnantis, duarum vetularum et virginis theatro Anatomico anno 1746. illatis, praesertim autem circa vterum praegnantem institutis, deduxerit corollaria, quae si non noua omnia videbuntur, aliqua tamen cum Cl. Auctore speramus fore, quae ad huius partis historiam amplificandam et perficiendam facere poterunt: sed ad propositum.

§. 1. et 2. Cl. Auctor discrimen inter tumorem circa praegnantes et anasarcodem aut asciticum eum in finem adducit, quia cautelas quasdam suggerit, quae in mulierculis vere an falso grauidis, ex solo habitu externo diiudicandis, obscurae saepe rei, lumen adspergere possunt.

§. 4. Mentem suam de disputatione quae inter artis obstetricandi magistros viget, circa determinationem crassitudinis vteri grauidarum aperit et phaenomena a se obseruata magis fauere docet sententiae illorum, qui vterum grauidum attenuari perhibent.

Porro veretur, ne qui a Mauricello dissentiunt, causa sua cadant.

§. 7. Docet, difficile indagatu esse, an vteri interna cauitas singulari tunica inuestiatur, obseruationes autem suas magis illorum sententiae fauere, qui illam negant.

§. 9. Quomodo cauitas vteri praegnantis et virginei inter se differant explicat, huncque non dici posse concauum s. in eo cauitatem aliquam spatiosam, laqueatam, turgidulam non esse fingendam, quoniam paries eius anterior et posterior sibi ceu planum plano accumbunt

bunt, et ſolo muco interſtinguuntur, ne concreſcant; Ille vero in ampullam expandatur. Hinc praegnantem vterum recte veſicae inflatae, virgineum vero lagenae compreſſae aequiparari.

§. §. 10. et *ſeq.* quae circa ceruicem vteri, haud exiguam quippe *huius* organi portionem, obſeruauerit, profert, et exinde §. 14. ſeq. notat, haec obſeruata ad multas *veritates* viam pandere. Primo ſcilicet exinde aſſertum *Graſii* confirmari docet, qui ſtabiliuit, collum non *ſequi* dilatationem vteri grauidi, ſed priſtinum fere ſtatum retinere, *id* quod de mediis geſtationis menſibus intellectum *vult*. Exinde opinionem eorum confellit qui vteri *praegnantis* ceruicem ſibi fingunt, ceu vnicum *oſculum*, annulo quaſi membraneo occluſum, qui paulatim mollior fiat et amplior, donec ita hiet vt foetum transmittere poſſit; hinc a *Deuenter* in novo Lumine Obſt. p. 4. pictam figuram corrigendam cenſet.

§. 15. Exinde apparere ait, quam difficile ſit primis menſibus ex ſolo tactu diiudicare, num foemina praegnans ſit, nec ne, et ex ſolo augmento ceruicis aliquid veri concludere, exercitatiſſimam manum et acutum iudicium requirere, id quod ab obſtetricibus popularibus non facile expectandum ſit.

§. 16. Rationem affert, quare (aliis tamen cauſis neutiquam poſthabitis), mulieres, quae primis vel mediis menſibus abortum patiuntur, doloribus multo vehementioribus et acutioribus diſcruciari ſoleant, quam ſi iuſtum parturiendi terminum attigerint.

§. 17. Ex compreſſa ceruicis figura et muco lento

h 2 tenaci

tenaci totam cauitatem et omnia eius foraminula ab vno osculo ad aliud obsidente, recte colligi posse arbitratur, vterum praegnantem perfecte clausum esse, omnemque igitur introitum vel aëri vel alii cuipiam humori denegari nullamque in systemate vermiculari superfoetationem fieri posse,

§. 18. Tandem etiam has obseruationes ad illustrandam historiam ouulorum *Nabothianorum* facere commemorat, suamque coniecturam sequentibus exponit. Quod arbitretur istas vesiculas *Nabothianas* non esse particulas organicas aut constitutiuas corporis animalis, non igitur esse ouula neque etiam esse hydatides morbosas, sed esse corpuscula plane fortuita, maceratione et contrectatione nata. Quam suam coniecturam admodum reddit probabilem et postquam figuras duas (quarum altera vterum ex muliere septimum mensem praegnantis secundum longitudinem apertum, vt cauitas interior laterum, crassitudo et sinus venosi cum directione fibrarum pateant, comprehendit, altera vero ceruicem vteri praegnantis apertam cum portione vaginae sistit,) explicuerat, dissertationi huic eruditae finem imponit.

A. K. BOERHAAVE, HISTORIA ANATOMICA OVIS PRO HERMAPHRODITO HABITI.

Dum Celeberrimus Auctor in dissectionibus cadauerum saepenumero, tam in masculino, quam foeminino sexu institutis, praecipue attentus fuit ad corporis humani, quoad partes externas in genere, speciatim autem ad genitalium et pudendorum diuersitatem, vix vn-

vnquam eandem perfecte figuram tam in internis quam externis a se obseruatam ait, licet partes constituentes in genere similes fuerint.

Consuesse quidem plerosque, si pudenda vel defectu vel augmento peccent, et deformationem quandam monstrent de hermaphroditis cogitare, qui an re ipsa dentur, scilicet in vtramque venerem paratos cum foeminis concumbentes et vicissim viros admittentes, nonsolum non determinat vir Clar. (ad negatiuam potius procliuis sententiam) sed et testimonio auctorum suffultus, vehementer dubitat, an tales existant, in quibus vnus sexus praevaleat, addito genitalium alterius quodam supplemento, quoniam hi attentius examinati vltimum hoc deformatum nec peruium, nec ad opus aliquod venereum aut vrinae excretionem aptum, gerant. Hac occasione mentionem iniicit memorabilis historiae quam *Regnerus de Graf*, de puero post mortem puella inuento narrat et quae ipse notauerat circa pauperem foeminam, viginti et vltra annis hermaphroditum a natiuitate declamatam, affert.

His praemissis rariorem illum casum, forsan in historia naturali nullibi notatum commemorat de quatuor hominibus sibiricis ex duobus parentibus natis, eadem exacte genitalium deformatione praeditis, quos occasione descriptionis a Cl. *Gmelino* in Sibiria factae et ad Academiam Imperialem missae, e Sibiria arcessere, operae pretium iudicatum fuit.

Postquam autem paucis diuersas hac de re Academicorum *Gmelini*, *Weitbrechtii* et *Wildii* sententias in prolixioribus dissertationibus expositas, quam vt in

Tertia obſeruatio continet cerebri inflammationem in ſuppurationem et gangrenam ſe terminantem, vbi rupta in anteriori cerebri loco vomica mortem ſubitaneam homini ebrio conciliauerit, qua occaſione profert alias obſeruationes, et varios allegat auctores, qui de abſceſſibus intra cranium, inter duram matrem et cranium intra duram et piam matrem et in cerebri ventriculo in ipſaque cerebri ſubſtantia aliquid memoriae prodiderunt, inter quos et Hippocratem adducit.

In quarta obſeruatione occaſione pericardii cum corde concreti prolixe neceſſitatem et praeſentiam pericardii validiſſimis adſtruit argumentis et ſuam autopſiam doctiſſimi aduerſarii autopſiae in elephante diſſecto opponit.

Quinta tandem obſeruatio, quae in cadauere viri in noſocomio maritimo Petropolitano lenta febri enecto notata fuerunt exponit, ſcilicet omnia viſcera abdominis et thoracis vidit inter ſe concreta, ſuo tamen loco diſpoſita, vt nullum plane liberum foret, et omnes has concretiones (vti tunc temporis auditoribus ſe exhibuiſſe teſtatur) fuiſſe per membranas extenſas, quae duplicaturae concretae tenacula effecerunt. Qua occaſione, quam de harum ortu fouet, ſententiam more ſolito, id eſt doctiſſime exponit.

ST. KRASCHENINNIKOW DESCRIPTIONES RARIORVM PLANTARVM.

Quatuor in hac diſſertatione nouarum plantarum ſpecies deſcribit clare doctus D. Adjunctus, quae in horto

horto Academico botanico e feminibus ad Academiam missis, floruerunt, *Persicariam* scilicet, *Saluiam*, *Lunariam* et *Thalictrum*, copioseque recenset, quae circa vegetationem singularum obseruauerit, quae in ipsa dissertatione relegenda sunt.

Quod ad *Persicariam* attinet, nos pro more breuiter notamus, illam septentrionalibus imperii Sinarum regionibus familiarem esse, ibidemque ad conficiendum coeruleum pigmentum, *Indigo* dictum, materiam praebere, id quod a Rev. Gaubilo, Academiae nostrae membro honorario, didicisse se scribit. Addit porro rationem, cur eam Persicariae foliis ouatis glabris nomine salutauerit.

De *Saluia* refert, eam non tantum foliis cordatis obtuse crenatis, aut spicis florum nutantibus, sed caulibus nudis, ramis cauli approximatis et parallelis, non difficulter a congeneribus distingui posse.

De natali huius plantae loco sibi quidem pro certo non constare fatetur, auditu tamen se percepisse scribit, eam e feminibus a *Cl. Gerbero*, Florae Tanaicensis auctore lectis, propagatam, hincque credibile esse nasci eam in adiacentibus Tanai regionibus.

Lunariam quod spectat, quoniam Stellerus eam in America septentrionali maturum iam fructum ferentem legerit, et sub nomine Leucoii saxatilis descriptam dederit, idcirco primo Stelleri descriptionem sistit, tum suam adiicit, partim ad supplendam Stelleri descriptionem, partim vt appareat, quantum diuersa soli natura vnam eandemque plantam immutare valeat: Rationem deinde reddit, cur Lunariae eam iunxerit et non nouum genus constituerit.

Tandem *Thalictrum*, quod e seminibus a Stellero in Camschatka lectis, prodiit, pro noua specie describit, differentiamque eius a congeneribus addit.

ASTRONOMICA.

DE MOTV NODORVM LVNAE EIVSQVE INCLINATONIS AD ECLIPTICAM VARIATIONE. A. L. EVLERO.

Quicunque theoriam lunae breuiter, sed clare ac perspicue pertractatam legere gestiunt, iis dissertationem hanc Cel. Euleri, nec non sequentem, quae quantum motus terrae a luna perturbetur accuratius inquirit, merito commendamus. Instituti nostri ratio equidem posceret, vt praecipua contenta hic exponamus, veremur tamen valde, ne, dum breuiores Cel. auctore esse volumus, lectoribus nostris obscuriores fiamus, hinc aliquem saltem praegustum altarum harum speculationum dedisse, fontemque ipsum monstrasse contenti erimus.

Lunam scilicet, corpus inter omnia coelestia nobis proximum, cuius distantiam ope parallaxeos sine sensibili errore assignare valemus, quo subsidio circa solem, praecipue autem fixas adhuc caremus, motum habere asserit vir. Cel. adeo implicatam, totque perturbationibus obnoxium, vt nullis adhuc certis legibus circumscribi

et

et ope tabularum exacte determinari potuerit, quoniam non in vno eodemque plano, sicut planetae, motum absoluat, et eius distantia maxima et minima variabilis semper et inconstans deprehendatur. Hinc inaequalitatem eius non ad vnicam aequationem reuocare licuisse, sed plures fuisse condendas tabulas aequationum; quae quamuis calculum effecerint molestissimum, tamen non perfecte cum coelo consentire deprehensas fuisse.

§. 2. Docet, non obstante motu hoc perturbato theoriam summi *Neutoni*, *Kepleri* legibus superstructam maximopere conducere ad soluendas difficultates circa motum contumacissimi huius sideris obuias, tametsi attractionem, quam sectatores *Neutoni* ad omnia prorsus corpora extendere atque adeo proprietatibus materiae annumerare sunt conati, tanquam ausum nimis temerarium reiiciat, quoniam pro vsu Astronomico sufficiat, nosse eiusmodi vires in mundo re ipsa existere, quarum effectus, cum solus spectetur, perinde sit causa siue cognita siue incognita.

Id saltim nos lucrari, quod positis his principiis, quo omnia corpora coelestia se mutuo attrahere statuuntur, determinatio motuum qui in coelo fiunt ad resolutionem problematum mechanicorum reducatur, prouti fusius et eleganter §. 3. exponitur, et tandem euincitur Magnum *Neutonum*, qui ipse primum hoc negotium aggressus, incredibileque studium in hac quaestione enodanda posuit, summas difficultates ob oculos ponere, quibus iste calculus adhuc laboret, tantum abesse, vt susceptum hoc opus aut ipse, aut qui post eum huic negotio se applicuerunt, confecerit, praesertim dum hi vltimi vix idem praestiterint, in quo *Neutonum* feliciter praeeuntem habuere, non tamen negat tabulas Astronomicas ad mentem huius viri summi conditas, multo propius locum lunae quouis tempore, quam reliquas exhibere.

§. 4. Exponit vir Cel. quid eum impediuerit, vt tentatum hunc a se laborem non perfecerit, et tandem aperit, quomodo in praesentem modum quo problema hoc soluere adgreditur inciderit, quo mediante lineam nodorum lunae et inclinationis eius ad eclipticam variationem, quae res aliis methodis vix calculo comprehendi possunt, satis commode definire ipsi licuit, et cui viae insistendo haud dubitat, quin reliqua motus lunae phaenomena multo felicius explicari queant.

§. 5. A faciliori problematis solutione orditur, et notari vult, quoniam spectatorem in terra concipiat eiusque respectu motum omnem diiudicat, motum terrae tam in solem quam in lunam contrario modo inducendum et singulas vires, quibus terra sollicitatur pariter in contrariis directionibus tam soli quam lunae affigendas esse.

Paragraphis sequentibus vires determinat quibus motus solis perturbatur et sic totam solis theoriam §. 11. absoluit simulque methodum qua vtitur clare exponit.

Hinc §. 12 ad lunam progreditur et vt terram quiescentem obtineat etiam hic, prouti supra in sole factum, in directionibus contrariis vires, quibus terra incitatur in lunam transfert.

Et tandem §. 19. determinat celeritatem lineae nodo-

do-

dorum retrogradam directe esse, vt cosinus distantiae lunae a sole, sinus distantiae solis a nodo et sinus distanniae lunae a nodo coniunctim, reciproce vero vt cubus distantiae solis a terra et celeritas lunae secundum longigitudinem, ita vt motus lineae nodorum ab his quinque elementis pendeat, hanc autem expressionem mirifice cum *Neutoni* determinatione L. III. pag. 30 princ. congruere docet.

In sequentibus paragraphis vsque ad 31 §. quid singulae hae aequationes, si fiant, maximae efficere possint, adducit, et ob harum nonnullarum in tabulis Astronomicis neglectum ipsas non mediocri emendatione indigere asserit, in reliquis 32 - 34 §. variationem inclinationis orbitae lunae quoque determinat, et quamuis differentiam inter inclinationem maximam et minimam duobus fere minutis primis maiorem quidem quam tabulae exhibere solent deprehendat, tamen ideo eam in suspicionem cadere haud posse affirmat, tum quoniam in tabulis quaedam aequationes, vti supra innuimus, neglectae, tum quia per obseruationes vehementer est difficile hos limites exactissime constituere.

QVANTVM MOTVS TERRAE A LVNA PERTVRBETVR ACCVRATIVS INQVIRITVR. A. L. EVLERO.

In superiori dissertatione dum Cel. Eulerus nouas pro motu solis tabulas condere conatus fuit, assumpserat commune centrum grauitatis terrae et lunae, in ellipsi circa solem in eius foco existentem, reuolui atque ex loco lunae aberrationem centri terrae ab ista ellipsi ad quod-vis tempus assignauerat. Haec autem hypothesis cum ad veritatem proxime quidem accedat, non autem cum ea perfecte conueniat, idcirco sibi proposuit vir Cel. in istum errorem diligenter inquirere, quo ista hypothesis a veritate recedat, et hunc in finem deuiationem terrae de orbita elliptica ex ipsis sollicitationibus lunae inuestigare conatur, nulla communi centri grauitatis ratione habita, quod quidem negotium ad maxime complicatos calculos auctorem deduxit, cum illa hypothesis rem facillime expediuisset.

Nos missis his difficultatibus in dissertatione ipsa feliciter expeditis paucis attingimus, virum Cel. inter maximorum Geometrarum *Neutoni* et *Danielis Bernoullii*. quorum prior massam terrae ad massam lunae vt 39. ad 1, alter vt 62. ad 1. statuit, mediam quandam determinationem inuenisse, statuendo massam terrae quadragesies octies grauiorem esse luna, maximam correctionem loci solis in ecliptica 16''. 38''', et maximam correctionem log. distantiae solis in syzigiis 34 ad logarithmum e 6. notis constantem vel addendam vel subtrahendam esse, et tandem demonstrasse, quod tabulae suae solares, prouti ex hac dissertatione sequi videbatur, nondum notabili indigeant emendatione.

G. W. KRAFFTII OBSERVATIO ECLIPSIS SOLARIS DIE 25. IVL. 1748. TVBINGAE FACTA.

Quomodo vir Cl. eclipsin solis cum maculis in eo haerentibus d. 25 Iul. 1748 st. n. Tubingae obserseruauerit, quasque simul instituerit obseruationes meteorologicas, hic commode, nisi describendae essent, referri non possunt.

Quod idem de Cl.

HEINSII OBSERVATIONE ECLIPSIS LVNAE PARTIALIS d. 30 Aug. 1746 INSTITVTA,

vt et de Cl.

BRAVNII ET POPOVII IN OBSERVATORIO IMPERIALI DIE $\frac{14}{25}$ IVL. ET $\frac{29\ \text{Iul.}}{9\ \text{Aug.}}$ 1748 HABITIS OBSERVATIONIBVS ECLIPSIS SOLIS ET LVNAE

intelligendum, quapropter harum rerum curiosos ad Commentarios ipsos remittimus.

C. N. DE WINSHEIM, DE ABERRATIONE FIXARVM.

Recensionum harum auctor, has de aberratione fixarum manuductiones, rogatus a collegis in vsum obseruatorii Petropolitani in ordinem redegit, easque ideo publici iuris fieri permisit, quoniam experientia iam edoctus fuit, etiam mediocria ingenia, qui nullam vel paruam analyseos habuerunt cognitionem, doctrinam hanc, non aeque clare ac perspicue vbique propositam, mediantibus his regulis, captui eorum magis accommodatis, sibi admodum reddidisse familiarem.

OBSERVATIONES ALIQVOT COELESTES LIPSIAE 1746. aestate habitae, A. G. Heinsio.

Cl. Heinsius ante omnia instrumenta sua describit, quibus in praesentibus vsus est obseruationibus, eum

potis-

potissimum in finem, vt in sequentibus ad hanc descriptionem lectores ablegare possit. Hinc quadrantem cum suo errore, horologium oscillatorium, nec non telescopium catadioptricum Gregorianum cum suis speculis et ocularibus fuse describit, simulque indigitat, quo apparatu in sequentibus obseruationibus eclipsium Iouialium vsus sit, scilicet eo, quo per telescopium obiecti diameter 52. vicibus maior appareat, quam nudo oculo, quem vel ideo elegerit, quoniam in hoc statu maximam lucis satellitum copiam obtinuit, ad quam conditionem respiciendum erat, cum in his obseruationibus Iupiter plerumque in vicinia horizontis versaretur, et altitudo meridiana Iovis vix 18. gradus superauit, figuram tamen Iouis oualem fascias atque satellites Iouis se distinctissime hoc suo apparatu coelo sereno vidisse testatur vir Clarissimus.

Deinde quatuor emersiones d. 27. Iun. 4. 20. et 27. Iulii obseruatas adducit; porro obseruationes eleuationis poli Lipsiensis respicientes, partim ex altitudine solis circa solstitium, partim ex altitudinibus nonnullarum fixarum sumpta declinatione earumdem e catalogo Halleii et Cassinii affert, mediamque quandam eleuationem ex iis deducit, quam cum eleuationibus a reliquis Astronomis aut captis, aut in catalogum latitudinum relatis, comparat.

Vltimo nonnullas obseruationes refert meteorologicas pro maximo aestu Lipsiae d. 15. Iul. st. n. 1746. obseruato determinando, quem cum aestu Petropoli olim ab auctore notato, et quem in insula Borbonica 1734. obseruatum fuisse in Commentariis legerat Parisinis, comparat.

Con-

CONTINVATIO OBSERVATIONVM ASTRONOMICARVM Lipſiae habitarum 1746. ſt. n. Auct. G. Heinſio.

Hic vnicam adhuc emerſionem I ſatellitis d. 12. Aug. obſeruatam et eclipſin lunae partialem d. 30. Aug. 1746. a ſe conſpectam exhibet Cl. Heinſius, de quibus hic dicere nil attinet, quoniam iam ſupra lectores ad Commentarios ipſos ratione huius et ceterarum ibi commemoratarum obſeruationum ablegauimus.

CONTINVATIO OBSERVATIONVM LIPSIAE habitarum 1747. ſt. n.

Pergit Cl. Auctor cum Academia communicare, quas iisdem inſtrumentis, quae in ſuperiori diſſertatione deſcripſerat et ſub eodem teleſcopii apparatu obſeruauit duas emerſiones I ſatellitis Iouis, deinde quas circa ſolſtitium brumale inſtituit obſeruationes altitudinum ſolis affert, et collatis inter ſe praecedentibus obſeruationibus, eleuationem poli Lipſienſem 51°. 22′ ¼ figit.

Porro exhibet, quas de ſtellis variabilibus in conſtellatione Cygni nominatim P. et x Bayeri inſtituit obſeruationes, cum iis, quae a Cl. Aſtronomo *Godofr. Kirchio* et *Maraldi* habitae ſunt, reuolutionemque variabilis in collo Cygni x ſcil. *Bayeri* rotunde 405½. dierum determinat.

Tandem ſubiungit nonnullas obſeruationes meteorologicas exhibentes maximam barometri altitudinem extraordi-

 nariam

Venerem quoque ab aliis ſpectatoribus nudis oculis conſpectam, ab obſeruatore ad alias obſeruationes attento non animaduerſam eſſe afferit.

Et tandem §. 15. qui diſſertationem claudit, quae ab amico, tempore eclipſis inſtitutae ſunt obſeruationes meteorologicae, praecipue quae thermometro in loco vmbroſo conſtituto et deinde ſoli expoſito acciderint, adducuntur.

CLASSIS PRIMA.

CONTINENS

MATHEMATICA.

METHODVS INTEGRANDI FORMVLAS DIFFERENTIALES RATIONALES VNICAM VARIABILEM INVOLVENTES.

AVCTORE
L. Eulero.

§ 1.

Omnes formulae differentiales, quarum integrationem hic sum traditurus, continentur in hac forma generali $X\,dx$, vbi X denotat functionem quamcunque rationalem ipsius x. Cum igitur omnis functio rationalis sit vel integra vel fracta, tractatio nostra esset bipartita constituenda, nisi integratio illis casibus, quibus X est functio integra, nulla laboraret difficultate. Si enim X huiusmodi est functio, denominatore, qui quidem variabilem x complectatur, destituta, semper ad hanc formam reuocabitur, vt sit:

$$X = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 \text{ etc.}$$

hocque casu erit

$$\int X\,dx = \Delta + Ax + \tfrac{1}{2}Bx^2 + \tfrac{1}{3}Cx^3 + \tfrac{1}{4}Dx^4 + \tfrac{1}{5}Ex^5 + \text{etc,}$$

vbi Δ constantem quamcunque denotat. Latius autem ratio huius integrationis patet, atque ad exponentes ipsius x non solum integros affirmatiuos sed etiam negatiuos et fractos extenditur. Ita si m, n, p, q etc. exponant numeros quoscunque siue integros siue fractos, siue positiuos siue negatiuos, fuerintque

$$X = Ax^m + Bx^n + Cx^p + Dx^q \text{ etc.}$$

erit, vti ſponte patet

$$\int X dx = \frac{1}{m+1} Ax^{m+1} + \frac{1}{n+1} Bx^{n+1} + \frac{1}{p+1} Cx^{p+1} + \frac{1}{q+1} Dx^{q+1} \text{ etc.}$$

Quae cum ſint iam fere triuialia, huic priori generi, quo X eſt functio ipſius x integra, amplius non immoror, ſed ad functiones, quae forma exprimuntur fracta, progredior.

§. 2. Sit igitur X functio quaecunque fracta ipſius x, numeratore ac denominatore contenta, atque ſemper in huiusmodi forma latiſſime patente continebitur:

$$X = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \text{etc.}}$$

De qua primum obſerua, ſi x in numeratore tot vel plures habeat dimenſiones quam in denominatore, formulam ad aliam reuocari poſſe, in qua ſumma ipſius x dimenſio in numeratore minor ſit quam in denominatore: quae reducta vti conſtat diuiſione abſoluitur, ſi enim ſit

$$X = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3} \text{ fiet}$$

$$X = \frac{E}{\delta}x + \frac{A + (B - \frac{E\alpha}{\delta})x + (C - \frac{E\beta}{\delta})x^2 + (D - \frac{E\gamma}{\delta})x^3}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3}$$

atque vlterius reſoluendo

$$X = \frac{E}{\delta}x(\frac{D}{\delta} - \frac{E\gamma}{\delta\delta}) + \frac{A - \frac{D\alpha}{\delta} + \frac{E\alpha\gamma}{\delta\delta}) + (B - \frac{E\alpha}{\delta} - \frac{D\beta}{\delta} + \frac{E\beta\gamma}{\delta\delta})x + (C - \frac{E\beta}{\delta} - \frac{D\gamma}{\delta} + \frac{E\gamma\gamma}{\delta\delta})xx}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3}$$

Cum iam prioris partis $\frac{E}{\delta}x + \frac{D}{\delta} - \frac{E\gamma}{\delta\delta}$, ſi per dx multiplitiplicetur, integratio fit obuia, tota difficultas ad integrationem partis posterioris, quae est vera forma fracta, reducitur. Ideoque cardo rei versatur in integratione huiusmodi formae $X\,dx$, si fuerit:

$$X = \frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \text{etc.}}$$

vbi quidem summa potestas ipsius x in numeratore minor sit, quam summa potestas ipsius x in denominatore. Ex quo regulas sequentes tantum ad huiusmodi formulas sum relaturus.

§. 3. *Si in denominatore terminus primus α vel aliquot termini initiales desint seu euanescant, integratio multum leuari atque ad casum faciliorem, quem postmodum tractabimus, reduci potest.* Reductio autem in hoc constat, quod denominatur tum habeat vnum factorem cognitum, qui erit vel x, vel x^2, vel x^3, etc. prout vnus pluresue termini initiales denominatoris euanescant, ideoque poterit fractio proposita in duas alias fractiones resolvi, quarum altera, cum habeat potestatem ipsius x simplicem pro denominatore, nullo negotio integratur, ita vt tantum altera remaneat, cuius integrale quaeratur. Sic si primus tantum terminus denominatoris desit, erit formula differentialis proposita huiusmodi.

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{x(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.})}\,dx$$

quae aequalis est his duabus iunctim sumtis

$$\frac{A}{\alpha x}\,dx + \frac{(B - \frac{A\beta}{\alpha}) + (C - \frac{A\gamma}{\alpha})x + (D - \frac{A\delta}{\alpha})x^2 + (E - \frac{A\varepsilon}{\alpha})x^3 \text{ etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}}\,dx$$

 quarum

quarum prioris partis $\frac{A\,dx}{\alpha x}$ integrale eſt $\frac{A}{\alpha}\,l\,x$. poſterioris vero partis integrale methodo deinceps tradenda reperiri debet.

§. 4. Si bini termini initiales denominatoris euaneſcant, formula differentialis erit huiusmodi,

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{x^2(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}}\,.\,dx$$

quae vt reſoluatur in duas fractiones factores hos denominatoris pro denominatoribus habentes, ponatur ea aequalis his duabus fractionibus;

$$\frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x}{x^2}\,dx + \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}}\,dx$$

Addantur hae fractiones more conſueto, ac denominator ſummae quidem ſponte aequalis fiet denominatori fractionis propoſitae; numerator autem erit;

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{a}\beta x + \mathfrak{a}\gamma x^2 + \mathfrak{a}\delta x^3 + \mathfrak{a}\varepsilon x^4 + \text{etc.} \\ \quad + \mathfrak{b}\alpha x + \mathfrak{b}\beta x^2 + \mathfrak{b}\gamma x^3 + \mathfrak{b}\delta x^4 + \text{etc} \\ \qquad\qquad + \mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}x^3 + \mathfrak{C}x^4 + \text{etc} \end{array}\right\} dx$$

qui vt numeratori propoſito aequalis fiat, termini ſinguli homologi aequentur vnde elicietur.

$$\mathfrak{a} = \frac{A}{\alpha}$$
$$\mathfrak{b} = \frac{B}{\alpha} - \frac{\mathfrak{a}\beta}{\alpha} = \frac{B}{\alpha} - \frac{A\beta}{\alpha^2}$$
$$\mathfrak{A} = C - \frac{A\gamma}{\alpha} - \frac{B\beta}{\alpha} + \frac{A\beta^2}{\alpha^2}$$
$$\mathfrak{B} = D - \frac{A\delta}{\alpha} - \frac{B\gamma}{\alpha} + \frac{A\beta\gamma}{\alpha^2}$$
$$\mathfrak{C} = E - \frac{A\varepsilon}{\alpha} - \frac{B\delta}{\alpha} + \frac{A\beta\delta}{\alpha^2}$$
etc.

His

His coefficientibus initio assumtis determinatis innotescent binae fractiones simpliciores, in quas proposita resoluitur; ac prioris quidem $\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x}{xx}dx$ integrale est $= -\frac{\mathfrak{a}}{x} + \mathfrak{b}\,l\,x$; ita vt integratio formulae propositae iam ad integrationem partis posterioris reducatur. Ceterum ex ipsa terminorum comparatione intelligitur non opus fuisse, vt numeratori fractionis prioris $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x$ plures quam duos terminos tribueremus; cum litterarum determinandarum numerus hoc modo cum numero aequationum congruat: vnicus autem terminus α ad hoc non suffecisset, eo quod si possuissemus $\mathfrak{b} = 0$, secundae aequationi $B = \mathfrak{a}\beta$ ob $\mathfrak{a}$ iam determinatum satisfieri non potuisset.

§. 5. Ponamus iam tres terminos initiales denominatoris formulae initio propositae abesse; ac formula differentialis integranda erit huiusmodi

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{x^3(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}}\cdot dx$$

quae in duas fractiones huius formae resolui poterit:

$$\frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}x+\mathfrak{c}x^2}{x^3}dx + \frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^3+\text{etc.}}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.}}dx$$

quarum summae denominator cum denominatore proposito congruit, numerator vero erit

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{a}\beta x + \mathfrak{a}\gamma x^2 + \mathfrak{a}\delta x^3 + \mathfrak{a}\varepsilon x^4 + \text{etc.}\\
&\quad + \mathfrak{b}\alpha x + \mathfrak{b}\beta x^2 + \mathfrak{b}\gamma x^3 + \mathfrak{b}\delta x^4 + \text{etc.}\\
&\qquad\quad + \mathfrak{c}\alpha x^2 + \mathfrak{c}\beta x^3 + \mathfrak{c}\gamma x^4 + \text{etc.}\\
&\qquad\qquad\quad + \mathfrak{A}x^3 + \mathfrak{B}x^4 + \text{etc.}
\end{aligned}$$

qui vt aequalis reddatur numeratori proposito debebit esse

$$\mathfrak{a} = \frac{A}{\alpha}$$
$$\mathfrak{b} = \frac{B}{\alpha} - \frac{\mathfrak{a}\beta}{\alpha} = \frac{B}{\alpha} - \frac{A\beta}{\alpha^2}$$
$$\mathfrak{c} = \frac{C}{\alpha} - \frac{\mathfrak{a}\gamma}{\alpha} - \frac{\mathfrak{b}\beta}{\alpha} = \frac{C}{\alpha} - \frac{A\gamma}{\alpha^2} - \frac{B\beta}{\alpha^2} + \frac{A\beta^2}{\alpha^3}$$

atque

$$\mathfrak{A} = D - \frac{A\delta}{\alpha} - \frac{B\gamma}{\alpha} + \frac{2A\beta\gamma}{\alpha^2} - \frac{C\mathfrak{b}}{\alpha} + \frac{B\beta^2}{\alpha^2} - \frac{A\beta^3}{\alpha^3}$$
$$\mathfrak{B} = E - \frac{A\varepsilon}{\alpha} - \frac{B\delta}{\alpha} + \frac{A\beta\delta}{\alpha^2} - \frac{C\gamma}{\alpha} + \frac{A\gamma\gamma}{\alpha^2} + \frac{B\beta\gamma}{\alpha^2} - \frac{A\beta^2\gamma}{\alpha^3}$$

etc.

Apparet igitur nec plures nec pauciores terminos pro numeratore fractionis prioris accipi oportuiſſe, quam tres; atque ex natura rei generaliter intelligitur pro numeratore prioris fractionis tot terminos aſſumi debere, quoad perveniatur ad exponentem ipſius x vnitate minorem, quam continet exponens denominatoris, ſeu quod eodem redit, numerator tot terminos habere debet, quot vnitates continet exponens denominatoris.

§. 5. Ex his iam ſatis patet modus, quemadmodum fractio differentialis, cuius denominator factorem habeat, qui ſit poteſtas ipſius x, cuiusmodi eſt

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{x^n(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.})}\, dx$$

reſolui debeat in binas alias fractiones, quarum denominatores ſint hi bini factores ſeorſim ſumti. Scilicet ea transmutabitur in huiusmodi binas formulas:

$$\frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + \mathfrak{d}x^3 \ldots\ldots\ldots + \mathfrak{n}x^{n-1}}{x^n}\, dx$$
$$+ \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \mathfrak{E}x^4 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}}\, dx$$

habe-

habebuntque coefficientes aſſumti hos valores:

$$\mathfrak{a} = \frac{A}{\alpha}$$
$$\mathfrak{b} = \frac{B}{\alpha} - \frac{\mathfrak{a}\beta}{\alpha}$$
$$\mathfrak{c} = \frac{C}{\alpha} - \frac{\mathfrak{a}\gamma}{\alpha} - \frac{\mathfrak{b}\beta}{\alpha}$$
$$\mathfrak{d} = \frac{D}{\alpha} - \frac{\mathfrak{a}\delta}{\alpha} - \frac{\mathfrak{b}\gamma}{\alpha} - \frac{\mathfrak{c}\beta}{\alpha}$$
etc.

$$\mathfrak{A} = P - \mathfrak{n}\beta - \mathfrak{m}\gamma - \mathfrak{l}\delta - \mathfrak{k}\varepsilon - \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B} = Q - \mathfrak{n}\gamma - \mathfrak{m}\delta - \mathfrak{l}\varepsilon - \mathfrak{k}\zeta - \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C} = R - \mathfrak{n}\delta - \mathfrak{m}\varepsilon - \mathfrak{l}\zeta - \mathfrak{k}\eta - \text{etc.}$$
etc.

vbi in numeratore propoſito $A + Bx + Cx^2 +$ etc. denotat P coefficientem poteſtatis x^n, et Q coefficientem poteſtatis x^{n+1}, et R coefficientem poteſtatis x^{n+2} et ita porro. Hac ergo facta reſolutione prioris fractionis integrale eſt in promtu per §. 2, ita vt ad plenam integrationem ſuperſit modus integrandi fractionem poſteriorem. Hanc obrem tota difficultas huc redit, vt modus tradatur integrandi huiusmodi formulam

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}} \cdot dx$$

in cuius denominatore primus terminus α non ſit $= 0$.

§. 7. Caſus ſimpliciſſimus, qui in hac forma continetur, erit, ſi in numeratore omnes termini, praeter primum, in denominatore vero omnes praeter duos primos euaneſcant, ita vt haec habeatur formula integranda:

$$\frac{A}{\alpha + \mathfrak{b}x} dx.$$

 Pona-

Ponatur ea $= dy$; vt fit $dy = \frac{A\,dx}{\alpha + \mathfrak{b}x}$ erit $\frac{\mathfrak{b}y}{A} = \frac{\mathfrak{b}dx}{\alpha + \mathfrak{b}x}$ quod cum fit differentiale ipfius $l(\alpha + \mathfrak{b}x)$ erit $\frac{\mathfrak{b}y}{A} = l(\alpha + \mathfrak{b}x)$, ideoque integrale quaefitum

$$\int \frac{A}{\alpha + \mathfrak{b}x} dx = y = \frac{A}{\mathfrak{b}} l(\alpha + \mathfrak{b}x)$$

feu adiiciendo conftantem $\int \frac{A}{\alpha + \mathfrak{b}x} = \frac{A}{\mathfrak{b}} l \frac{\alpha + \mathfrak{b}x}{\alpha}$. fimili modo fi numerator totus per dx multiplicatus fit differentiale denominatoris, integratio facile per logarithmos expedietur. Si enim formula integranda fit:

$$\frac{\mathfrak{b} + 2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\varepsilon x^3}{\alpha + \mathfrak{b}x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4} dx$$

integrale erit logarithmus denominatoris, fcilicet $l(\alpha + \mathfrak{b}x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)$. Quodfi autem formula differentialis fit huiusmodi, vt numerator in dx ductus fit multiplum quodpiam denominatoris, nempe:

$$dy = \frac{n\mathfrak{b} + 2n\gamma x + 3n\delta x^2 + 4n\varepsilon x^3}{\alpha + \mathfrak{b}x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4} dx$$

erit pariter per logarithmos integrale quaefitum

$$y = n\,l(\alpha + \mathfrak{b}x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4).$$

§. 8. Deinde etiam alius cafus eft obuius, fi denominator fit quaepiam poteftas, ac numerator in dx ductus fit differentiale radicis denominatoris, vel eius multiplum veluti fi fuerit

$$dy = \frac{n\mathfrak{b} + 2n\gamma x + 3n\delta x^2 + 4n\varepsilon x^3}{(\alpha + \mathfrak{b}x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)^m} dx$$

Ponatur breuitatis ergo denominatoris radix

$$\alpha + \mathfrak{b}x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 = z$$

erit $(\mathfrak{b} + 2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\varepsilon x^3)dx = dz$

huicque

hincque habebitur $dy = \frac{n\,dz}{z^m}$, cuius integrale erit $y = -\frac{n}{(m-1)z^{m-1}}$ atque valore ipsius z restituto prodibit integrale quaesitum

$$y = -\frac{n}{(m-1)(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)^{m-1}}$$

cui insuper pro arbitrio quantitatem constantem adiicere licet. Praeterea vero etiam vsu venire potest, vt integrale sit quantitas algebraica, etiamsi numerator non sit ita comparatus, vti in hoc casu assumsimus. Omnes autem hi casus vna formula comprehendi poterunt, si in genere huiusmodi functio

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^3+\text{ etc.}}{(\alpha+\mathfrak{b}x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{ etc.})^{m-1}}$$

differentietur; cum enim differentiale huiusmodi habiturum sit formam:

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ etc.}}{(\alpha+\mathfrak{b}x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{ etc.})^m}\,dx$$

huius formulae vicissim integrale habebitur.

§. 9. His casibus exceptis, nulla alia via ad huiusmodi formulas differentiales fractas integrandas patet, nisi vt denominator $\alpha+\mathfrak{b}x+\gamma x^2+$ etc. in suos factores simplices resoluatur, vbi quidem, cum non sit $\alpha=0$, pro α vnitas scribi potest, quod opus autem saepenumero maximis difficultatibus est obnoxium, quas tollere huius non est loci. Quanquam enim radicum inuestigatio, cum qua resolutio in factores congruit, adhuc non vltra aequationes quatuor dimensionum generatim est perducta, tamen

 in

in integrationum negotio merito nobis resolutionem aequationum quotcunque dimensionum concedi postulamus. Atque is formulae seu aequationis differentialis integrationem perfecte dedisse censendus est, qui eam ad resolutionem seu constructionem aequationis algebraicae reuocauerit. Quamobrem assumamus denominatoris propositi:

$$1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\text{ etc.}$$

factores simplices, in quibus x vnicam habeat dimensionem, esse hos:

$$(1+px)(1+qx)(1+rx)(1+sx)(1+tx)\text{ etc.}$$

quorum factorum numerus, vti constat, aequalis est maximae dimensioni ipsius x, quam habet in denominatore proposito. Praeterea vero manifestum est coefficientes p, q, r, s, etc. cum coefficientibus cognitis α, β, γ, δ, etc. ita esse connexos, vt sit

$\alpha = p+q+r+s+$ etc. $=$ summae singulorum
$\beta = pq+pr+ps+qr+$ etc. $=$ sum. factor. ex binis
$\gamma = pqr+pqs+qrs+$ etc. $=$ sum. factor. ex ternis
$\delta = pqrs+pqrt+$ etc. $=$ sum. factor. ex quat.
$\varepsilon = pqrst+$ etc. $=$ sum. factor. ex quinis

et ita porro.

Quamobrem has quantitates p, q, r, s etc. tanquam datas ac determinatas per cognitas α, β, γ, δ, etc. iure accipere licet.

§. 10. Hac posita denominatoris in factores resolutione, formula differentialis

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ etc.}}{1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\text{ etc.}}\,dx$$

abibit in hanc formam:

A +

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{(1+px)(1+qx)(1+rx)(1+sx)\ \text{etc.}}\, dx$$

quae porro resolui poterit in fractiones totidem simplices, quot denominator continet factores, sintque haec fractiones simplices differentiales hae:

$$\frac{P\,dx}{1+px} + \frac{Q\,dx}{1+qx} + \frac{R\,dx}{1+rx} + \frac{S\,dx}{1+sx} + \text{etc.}$$

Patet enim his fractionibus addendis expressionem esse prodituram superiori similem; namque denominator summae sponte aequalis fiet denominatori oblato: numerator quidem illi non congruens orietur, verum tamen tot non prodibunt dimensiones ipsius x in numeratore quam in denominatore; quamobrem litterae adhuc ignotae P, Q, R, S, etc. ita determinari poterunt vt numerator ipsi proposito congruat. Tot enim sunt litterae P, Q, R, etc. quot x habet dimensiones in denominatore, totidem vero numerator continet terminos, ita vt haec operatio sufficiat ad omnes literas P, Q, R, etc. determinandas. Ex hocque patet ratio, cur x in numeratore pauciores habere debeat quam in denominatore; si enim totidem haberet vel plures, litterae assumtae P, Q, R, etc. non sufficerent ad numeratorem propositum producendum.

§. 11. Si ad valores litterarum P, Q, R, S etc. inueniendos, omnes fractiones simplices actu addere, ac numeratorem resultantem cum numeratore proposito congruentem reddere velimus, poterimus quidem valores illarum litterarum P, Q, R, etc. omnium assignare, verum si numerus fractionum simplicium fuerit modicus tantum, labor fere fit insuperabilis. Eaedem autem aequationes multo facilius eruentur; si singulae fractiones simplices reiicien-

reiiciendo dx per diuiſionem in ſeries conuertantur, quo facto prodibit ſumma omnium per ſeriem expreſſa:

$$\begin{array}{l}
+P-Ppx+Pp^2x^2-Pp^3x^3+Pp^4x^4-Pp^5x^5+\text{etc.}\\
+Q-Qqx+Qq^2x^2-Qq^3x^3+Qq^4x^4-Qq^5x^5+\text{etc.}\\
+R-Rrx+Rr^2x^2-Rr^3x^3+Rr^4x^4-Rr^5x^5+\text{etc.}\\
+S-Ssx+Ss^2x^2-Ss^3x^3+Ss^4x^4-Ss^5x^5+\text{etc.}
\end{array}$$

etc.

Quarum ſumma cum aequalis eſſe debeat fractioni propoſitae reiecto pariter factore differentiali dx;

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\text{etc.}}{1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\text{etc.}}$$

conuertatur haec pariter per diuiſionem in ſeriem infinitam, quae erit ſeries recurrens:

$$\begin{array}{llll}
A-A\alpha x & +A\alpha^2x^2 & -A\alpha^3x^3 & +\\
\quad +Bx & -B\alpha x^2 & +B\alpha^2x^3 & -\\
 & -A\beta x^2 & +2A\alpha\beta x^3 & -\\
 & +Cx^2 & -B\beta x^3 & + \qquad \text{etc.}\\
 & & -A\gamma x^3 & +\\
 & & -C\alpha x^3 & +\\
 & & +Dx^3 & -
\end{array}$$

Quod ſi iam termini homologi inter ſe comparentur, atque inter ſe aequales reddantur, obtinebuntur ſequentes aequationes;

$$\begin{array}{l}
P+Q+R+S+\text{etc.}=A\\
Pp+Qq+Rr+Ss+\text{etc.}=A\alpha-B\\
Pp^2+Qq^2+Rr^2+Ss^2+\text{etc.}=A(\alpha^2-\beta)-B\alpha+C\\
Pp^3+Qq^3+Rr^3+Ss^3+\text{etc.}=A(\alpha^3-2\alpha\beta+\gamma)-B(\alpha^2-\beta)+C\alpha-D
\end{array}$$

etc.

Harum

Harum aequationum, quarum numerus quidem est infinitus, capiantur tot, quot habentur litterae determinandae P, Q, R, etc. ex iisque earum valores more consueto definiantur.

§. 12. Calculus hac methodo instituendus fit autem admodum prolixus, si plures habeantur litterae determinandae: attamen si a simplicioribus ad magis composita progrediamur, per inductionem certam non difficulter deprehendetur valores quaesitos sequenti modo expressum iri, vt sit:

$$P = \frac{A - \frac{1}{p}B + \frac{1}{p^2}C - \frac{1}{p^3}D + \text{etc.}}{(1-\frac{q}{p})(1-\frac{r}{p})(1-\frac{s}{p})(1-\frac{t}{p})\text{etc.}}$$

$$Q = \frac{A - \frac{1}{q}B + \frac{1}{q^2}C - \frac{1}{q^3}D + \text{etc.}}{(1-\frac{p}{q})(1-\frac{r}{q})(1-\frac{s}{q})(1-\frac{t}{q})\text{etc.}}$$

$$R = \frac{A - \frac{1}{r}B + \frac{1}{r^2}C - \frac{1}{r^3}D + \text{etc.}}{(1-\frac{p}{r})(1-\frac{q}{r})(1-\frac{s}{r})(1-\frac{t}{r})\text{etc.}}$$

$$S = \frac{A - \frac{1}{s}B + \frac{1}{s^2}C - \frac{1}{s^3}D + \text{etc.}}{(1-\frac{p}{s})(1-\frac{q}{s})(1-\frac{r}{s})(1-\frac{t}{s})\text{etc.}}$$

etc.

Inductio haec, qua valores litterarum P, Q, R, S etc. inuenimus, etsi est certissima, tamen non sine ingenti molestia, atque loco α, β, γ, etc. suos valores per p, q, r, s etc. expressos substituendo reperitur, quare cum non cuique liceat hunc calculum repetere aliam modum faciliorem idem efficiendi proponamus, cuius simul in sequentibus amplior sit vsus.

§. 13.

§. 13. In hac methodo tantum ad vnicum factorem $1+px$ tanquam cognitum respicimus, atque sine respectu ad reliquos factores simplices determinabimus valorem litterae P pro fractione simplici vna $\frac{P\,dx}{1+px}$. Pari deinceps ratione, qua vna fractio simplex est inuenta reperientur reliquae omnes $\frac{Q\,dx}{1+qx}$, $\frac{R\,dx}{1+rx}$ etc. quarum omnium summa aequetur formulae differentiali propositae. Discerpamus igitur formulam differentialem propositam

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}}{1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\text{etc.}}\,dx$$

in cuius numeratore pauciores inesse ponimus dimensiones ipsius x quam in denominatore; discerpamus inquam hanc formulam in binas partes quarum altera sit $=\frac{P\,dx}{1+px}$, alterius vero denominator erit quotus qui resultat, si ille denominator formulae propositae per $1+px$ diuidatur, id quod vtique fieri potest, cum $1+px$ sit factor illius denominatoris. Ponamus quotum ex hac diuisione oriundum esse $1+\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}x^2+\mathfrak{c}x^3+\mathfrak{d}x^4+$ etc. in quo ergo maximus dimensionum numerus ipsius x vnitate deficit ab illo, quem habet in denominatore primo

$$1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\text{etc:}$$

Sit igitur altera pars praeter $\frac{P\,dx}{1+px}$, in quam formula proposita resoluitur haec

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^3+\text{etc.}}{1+\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}x^2+\mathfrak{c}x^3+\mathfrak{d}x^4+\text{etc.}}\,dx$$

vbi ob eandem rationem in numeratore x pauciores habere debet dimensiones quam in denominatore.

§. 14. Cum igitur summa harum duarum formularum

$$\frac{P\,dx}{1+px}+\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\mathfrak{D}x^3+\text{etc.}}{1+\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}x^2+\mathfrak{c}x^3+\mathfrak{d}x^4\ \text{etc.}}\,dx$$

aequalis esse debeat formulae propositae

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}}{1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\text{etc.}}\,dx$$

primum ob denominatores aequales habebitur

$$\begin{array}{ll}\alpha=\mathfrak{a}+p & \mathfrak{a}=\alpha-p\\ \beta=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}p & \mathfrak{b}=\beta-\alpha p+p^2\\ & \text{etc.}\\ \gamma=\mathfrak{c}+\mathfrak{b}p & \mathfrak{c}=\gamma-\beta p+\alpha p^2-p^3\\ \delta=\mathfrak{d}+\mathfrak{c}p & \mathfrak{d}=\delta-\gamma p+\beta p^2-\alpha p^3+p^4\\ \text{etc.} & \text{etc.}\end{array}$$

Vel cum formulae $1+\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}x^2+\mathfrak{c}x^3+\mathfrak{d}x^4+$ etc. factores sint $(1+qx)(1+rx)(1+sx)$ etc. fiet $\mathfrak{a}$ quantitatum p, r, s, etc. summa, $\mathfrak{b}$ summa factorum ex binis, $\mathfrak{c}$ summa factorum ex ternis, $\mathfrak{d}$ ex quaternis et ita porro. Quamobrem valores litterarum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, etc. duplici modo cognoscuntur, primo scilicet ex coefficientibus α, β, γ, δ, etc. ac deinde etiam ex factoribus $(1+px)(1+qx)(1+rx)$ etc. in quos denominator $1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+$ etc. resoluitur. Quodsi ergo praeter primum factorem $1+px$ quem hic solum contemplamur, alii reliqui fuerint incogniti, priori modo, quo litteras $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, etc. determinauimus, vtendum erit.

§. 15. Cum iam per additionem more solito absoluendam denominator summae congruens prodeat cum denominatore formulae propofitae, fupereft vt numeratores identicos reddamus. Fiet itaque

$$\begin{array}{l|l}
A = \mathfrak{A} + P & \mathfrak{A} = A - P \\
B = \mathfrak{A}p + \mathfrak{B} + \mathfrak{a}P & \mathfrak{B} = B - Ap + P(p - \mathfrak{a}) \\
C = \mathfrak{B}p + \mathfrak{C} + \mathfrak{b}P & \mathfrak{C} = C - Bp + Ap^2 - P(p^2 - \mathfrak{a}p + \mathfrak{b}) \\
D = \mathfrak{C}p + \mathfrak{D} + \mathfrak{c}P & \mathfrak{D} = D - Cp + Bp^2 - Ap^3 + P(p^3 - \mathfrak{a}p^2 + \mathfrak{b}p - \mathfrak{c}) \\
E = \mathfrak{D}p + \mathfrak{E} + \mathfrak{d}P & \mathfrak{E} = E - Dp + Cp^2 - Bp^3 + Ap^4 \\
 & \qquad - P(p^4 - \mathfrak{a}p^3 + \mathfrak{b}p^2 - \mathfrak{c}p + \mathfrak{d}) \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Quoniam vero termini numeratoris $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 +$ etc. non in infinitum progrediuntur, fed ibi terminantur vbi exponens ipfius x eft vnitate minor, quam maximus exponens in denominatore, in litteris $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. tandem peruenietur ad euanefcentem, poftquam fequentes omnes euanefcent; ac tum valorem ipfius P definire licebit. Quo igitur valor ipfius P generatim determinetur, ponamus fucceffiue numeratorem $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 +$ etc. nullo tum vnico, poft duobus, tribus, quatuor etc. terminis tantum conftare, eritque fi

$$\begin{array}{l}
\mathfrak{A} = 0;\ P = A \\
\mathfrak{B} = 0;\ P = \frac{Ap - B}{p - \mathfrak{a}} \\
\mathfrak{C} = 0;\ P = \frac{Ap^2 - Bp + C}{p^2 - \mathfrak{a}p + \mathfrak{b}} \\
\mathfrak{D} = 0;\ P = \frac{Ap^3 - Bp^2 + Cp - D}{p^3 - \mathfrak{a}p^2 + \mathfrak{b}p - \mathfrak{c}} \\
\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

Hinc facile concluditur fore generaliter quotcunque affuerint dimenfiones ipfius x;

$$P = \frac{A - \frac{1}{p}B + \frac{1}{p^2}C - \frac{1}{p^3}D + \frac{1}{p^4}E - \text{etc.}}{1 - \frac{1}{p}\mathfrak{a} + \frac{1}{p^2}\mathfrak{b} - \frac{1}{p^3}\mathfrak{c} + \frac{1}{p^4}\mathfrak{d} - \text{etc.}}$$

quae

quae expressio perpetuo terminatur, si formula differentialis proposita finito terminorum numero constet.

§. 16. Numeratorem quidem huius fractionis, quam pro valore ipsius P inuenimus apprime conuenit cum numeratore fractionis praecedenti modo §. 12. pro eadem quantitate P inventae. At denominatores a se inuicem discrepare videntur: re autem propius perpensa apparebit summum inter vtrosque esse consensum. Sumamus enim denominatorem priorem: $(1-\frac{q}{p})(1-\frac{r}{p})(1-\frac{s}{p})(1-\frac{t}{p})$ etc. atque patebit actuali multiplicatione eiusmodi prodituram esse expressionem:

$$1-\frac{\mathfrak{P}}{p}+\frac{\mathfrak{Q}}{p^2}-\frac{\mathfrak{R}}{p^3}+\frac{\mathfrak{S}}{p^4}-\frac{\mathfrak{T}}{p^5}+\text{ etc.}$$

in qua sit $\mathfrak{P}$ = summae quantitatum q, r, s, t etc.

et $\mathfrak{Q}$ = summae factorum ex binis

$\mathfrak{R}$ = summae factorum ex ternis

$\mathfrak{S}$ = summae factorum ex quaternis

etc.

Cum igitur expressio $1+\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}x^2+\mathfrak{c}x^3+\mathfrak{d}x^4+$ etc aequalis sit producto $(1+qx)(1+rx)(1+sx)(1+tx)$ etc. (§. 14.) erit ob eandem rationem

$\mathfrak{a}$ = summae quantitatum q, r, s, t, etc.

$\mathfrak{b}$ = summae factorum ex binis

$\mathfrak{c}$ = summae factorum ex ternis

$\mathfrak{d}$ = summae factorum ex quaternis

etc.

Consequenter erit $\mathfrak{P}=\mathfrak{a}$; $\mathfrak{Q}=\mathfrak{b}$; $\mathfrak{R}=\mathfrak{c}$; $\mathfrak{S}=\mathfrak{d}$; etc. ideoque denominator prius inuentus

$$(1-\frac{q}{p})(1-\frac{r}{p})(1-\frac{s}{p})(1-\frac{t}{p})\text{ etc.}$$

transmutabitur in sequentem,

$$1-\frac{1}{p}\mathfrak{a}+\frac{1}{p^2}\mathfrak{b}-\frac{1}{p^3}\mathfrak{c}+\frac{1}{p^4}\mathfrak{d}-\text{ etc.}$$

qui est ipse denominator modo posteriori erutus, qui adeo priori est aequalis.

e. 17. Denominatorem hunc etiam poterimus exprimere per coefficientes α, β, γ, δ, etc. qui continentur in denominatore formulae differentialis propositae, eo quod supra §. 14 per hos coefficentes valores literarum $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}$ etc. determinauimus. In hoc autem negotio nosse oportebit, ex quot omnino terminis constet expressio $1 - \frac{1}{p}\mathfrak{a} + \frac{1}{p^2}\mathfrak{b} - \frac{1}{p^3}\mathfrak{c} +$ etc. Ponamus ergo eam constare ex

terminis	erit valor ipsius expressionis
1	1
2	$2 - \frac{1}{p}\alpha$
3	$3 - \frac{2}{p}\alpha + \frac{1}{p^2}\beta$
4	$4 - \frac{3}{p}\alpha + \frac{2}{p^2}\beta - \frac{1}{p^3}\gamma$
5	$5 - \frac{4}{p}\alpha + \frac{3}{p^2}\beta - \frac{2}{p^3}\gamma + \frac{1}{p^4}\delta$
:	
:	
n	$n - \frac{(n-1)\alpha}{p} + \frac{(n-2)\beta}{p^2} - \frac{(n-3)\gamma}{p^3} + \frac{(n-4)\delta}{p^4} -$ etc.

Vbi numerus n indicat quot sint termini in formula $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 +$ etc. seu si forte qui termini desint, $n-1$ dat maximum ipsius x exponentem in denominatore formulae differentialis propositae. Cum autem $1 + px$ sit factor huius expressionis, ea si loco x ponatur $-\frac{1}{p}$ euadet $= 0$, hoc est, erit

$$0 = 1 - \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p^2} - \frac{\gamma}{p^3} + \frac{\delta}{p^4} - \frac{\varepsilon}{p^5} + \text{etc.}$$

quae ab illa n vicibus subtracta relinquit hanc expressionem

$$\frac{\alpha}{p} - \frac{2\beta}{p^2} + \frac{3\gamma}{p^3} - \frac{4\delta}{p^4} + \frac{5\varepsilon}{p^5} - \text{etc.}$$

quae

quae ergo est tertia expressio eandem denominatorem pro fractione ipsi P aequali suppeditans.

§. 18. Si ergo proposita fuerit formula differentialis

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{etc.}}\, dx$$

in cuius numeratore x pauciores habeat dimensiones, quam in denominatore; tum ea in tot formulas differentiales simplices logarithmicas resolui poterit, quot vnitates contineat maximus ipsius x dimensionum numerus in denominatore. Ad quas inueniendas ponamus denominatorem esse productum ex his factoribus

$$(1 + px)(1 + qx)(1 + rx)(1 + sx)\ \text{etc.}$$

atque vnusquisque factor vnam suppeditabit fractionem simplicem; nempe ex factore $1 + px$ orietur formula differentialis $\frac{P\,dx}{1+px}$, eritque

$$P = \frac{A - \frac{1}{p}B + \frac{1}{p^2}C - \frac{1}{p^3}D + \frac{1}{p^4}E - \text{etc.}}{(-\frac{q}{p})(1 - \frac{r}{p})(1 - \frac{s}{p})(1 - \frac{t}{p})\ \text{etc.}}$$

vel quod eodem redit

$$P = \frac{A - \frac{1}{p}B + \frac{1}{p^2}C - \frac{1}{p^3}D + \frac{1}{p^4}E - \text{etc.}}{\frac{1}{p}\alpha - \frac{2}{p^2}\beta + \frac{3}{p^3}\gamma - \frac{4}{p^4}\delta + \frac{5}{p^5}\varepsilon - \text{etc.}}$$

Simili autem modo, quo hic ex factore $1 + px$ formulam differentialem $\frac{P\,dx}{1+px}$ inuenimus, ex reliquis omnibus factoribus totidem formulae differentiales $\frac{Q\,dx}{1+qx}$, $\frac{R\,dx}{1+rx}$, $\frac{S\,dx}{1+sx}$ etc. reperientur. Quibus omnibus inuentis erit formulae propositae differentialis integrale quaesitum $=$

$$\frac{P}{p}l(1+px) + \frac{Q}{q}l(1+qx) + \frac{R}{r}l(1+rx) + \frac{S}{s}l(1+sx)\ \text{etc.}$$

 tot

tot constans membris longarithmicis, quot x in denominatore formulae propositae habet dimensiones.

§. 19. Fieri autem nequit, vt horum membrorum vllum euanescat, seu vt vnquam fiat $P = 0$, nisi in ipsa formula differentiali proposita communis diuisor numeratoris ac denominatoris existat. Quod vt clarius appareat ponamus numeratorem fractionis valorem ipsius P exhibentis $= v$ hoc est $A - \frac{1}{p}B + \frac{1}{p^2}C - \frac{1}{p^3}D +$ etc. $= 0$. Haec autem expressio resultat ex numeratore formulae differentialis

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

ponendo $-\frac{1}{p}$ loco x; quare cum haec postrema expressio fiat $= 0$ posito $-\frac{1}{p}$ loco x, sequitur $x + \frac{1}{p}$ seu $1 + px$ eius diuisorem esse; hocque casu quo $P = 0$ necesse est, vt numerator et denominator formulae differentialis propositae communem habeant diuisorem. Contra autem facile euenire potest, vt valor ipsius P in infinitum excrescat euanescente denominatore

$$(1 - \tfrac{q}{p})(1 - \tfrac{r}{p})(1 - \tfrac{s}{p})(1 - \tfrac{t}{p}) \text{ etc.}$$

quod eueniet si inter reliquas litteras q, r, s, t, etc. vna pluresue reperiantur ipsi p aequales. Ponamus esse $p = q$, seu denominatorem $1 + \alpha x + \beta x^2 +$ etc. duos habere factores aequales, tum in vtraque fractione $\frac{P dx}{1+px}$ et $\frac{Q dx}{1+qx}$ numerator in infinitum excrescet. Interim tamen integrale ipsum non erit infinitum, ob bina ista infinita se destruentia, sed finitum, atque adeo ad quantitatem algebraicam reducetur quantitas alias perpetuo a logarithmis pendens. Tradamus igitur modum illam integralis partem, quae a duobus factoribus aequalibus oritur defi-

definiendi, cum ea ex praecedentibus formulis infinitis difficulter colligi queat.

§. 20. Si igitur duo pluresue denominatoris factores interse fuerint aequales, eos a se inuicem disiungi non conuenit, sed *integralis* membrum, quod ex illis coniunctim nascitur, peculiari modo est inuestigandum. Sint igitur duo denominatoris factores $(1+px)^2$ aequales atque ponamus formulam differentialem propositam

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}}{1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\text{etc.}}dx$$

resolui *in* has duas partes

$$\frac{\mathfrak{P}dx+\mathfrak{Q}xdx}{1+2px+ppxx}+\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}x+\mathfrak{C}x^2+\text{etc.}}{1+\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}x^2+\mathfrak{c}x^3+\text{etc.}}dx$$

erit primo vt per additionem denominator propositus proveniat

$\alpha=\mathfrak{a}+2p$	$\mathfrak{a}=\alpha-2p$
$\beta=\mathfrak{b}+2p\mathfrak{a}+pp$	$\mathfrak{b}=\beta-2\alpha p+3pp$
$\gamma=\mathfrak{c}+2p\mathfrak{b}+pp\mathfrak{a}$	$\mathfrak{c}=\gamma-2\beta p+3\alpha pp-4p^3$
$\delta=\mathfrak{d}+2p\mathfrak{c}+pp\mathfrak{b}$	$\mathfrak{d}=\delta-2\gamma p+3\beta pp-4\alpha p^3+5p^4$

Deinde vt numerator propositus producatur esse oportebit

$$A=\mathfrak{A}+\mathfrak{P}$$
$$B=\mathfrak{B}+2\mathfrak{A}p+\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}\mathfrak{a}$$
$$C=\mathfrak{C}+2\mathfrak{B}p+\mathfrak{A}pp+\mathfrak{Q}\mathfrak{a}+\mathfrak{P}\mathfrak{b}$$
$$D=\mathfrak{D}+2\mathfrak{C}p+\mathfrak{B}pp+\mathfrak{Q}\mathfrak{b}+\mathfrak{P}\mathfrak{c}$$
$$E=\mathfrak{E}+2\mathfrak{D}p+\mathfrak{C}pp+\mathfrak{Q}\mathfrak{c}+\mathfrak{P}\mathfrak{d}$$
etc.

Ex his aequationibus vicissim elicientur valores litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. sequentes.

$\mathfrak{A}=$

$$\mathfrak{A} = A - \mathfrak{P}$$
$$\mathfrak{B} = B - 2Ap + \mathfrak{P}(2p - \mathfrak{a}) - \mathfrak{Q}$$
$$\mathfrak{C} = C - 2Bp + 3App - \mathfrak{P}(3p^2 - 2\mathfrak{a}p + \mathfrak{b}) + \mathfrak{Q}(2p - \mathfrak{a})$$
$$\mathfrak{D} = D - 2Cp + 3Bpp - 4Ap^3 + \mathfrak{P}(4p^3 - 3\mathfrak{a}p^2 + 2\mathfrak{b}p - \mathfrak{c}) - \mathfrak{Q}(3pp - 2\mathfrak{a}p + \mathfrak{b})$$

etc.

Hae aequationes eousque ſunt continuandae, donec in expreſſione $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 +$ etc. quae finito conſtat terminorum numero, ad finem perueniatur; tum enim ob ſequentes valores in ſerie litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. euaneſcentes ſtatim occurrent duae aequationes ex quibus coefficientes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ determinari poterunt.

§. 21. Si ordine progrediamur, ac primo $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, deinde $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$, tum $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ etc. euaneſcentes ponamus, tum pro caſibus particularibus valores litterarum $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ inuenimus, ex earum autem formis difficulter generales expreſſiones colligentur. Interim tamen alio modo ſatis concinne valores ipſarum $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ determinari poterunt: Ponatur

$$\frac{A - \frac{1}{p}B + \frac{1}{p^2}C - \frac{1}{p^3}D + \text{ etc.}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\mathfrak{a} + \frac{1}{p^3}\mathfrak{b} - \frac{1}{p^4}\mathfrak{c} + \text{ etc.}} = V$$

erit V functio ipſius p et quantitatum cognitarum A, B, C, etc. et $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, etc. Quodſi ergo quantitas haec V differentietur ponendo tantum p variabili fiet $\frac{dV}{dp}$ quantitas algebraica eaque cognita. Iam dico valores ipſarum $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ ita definiri vt ſit

$$\mathfrak{P} = \frac{dV}{dp} \text{ et } \mathfrak{Q} = \frac{pp}{dp} d.\frac{V}{p} = \frac{pdV}{dp} - V$$

Ad quas expreſſiones demonſtrandas, notari debet cum in ſerie litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. ad euaneſcentes litteras

teras fuerit peruentum, tum binas eiusmodi prodituras esse aequationes.

$$nAp^{n-1}-(n-1)Bp^{n-2}+(n-2)Cp^{n-3}-(n-3)Dp^{n-4}+\text{etc.}$$
$$=\mathfrak{P}(np^{n-1}-(n-1)\mathfrak{a}p^{n-2}+(n-2)\mathfrak{b}p^{n-3}-(n-3)\mathfrak{c}p^{n-4}+\text{etc.})$$
$$-\mathfrak{Q}((n-1)p^{n-2}-(n-2)p^{n-3}+(n-3)\mathfrak{b}p^{n-4}-(n-4)\mathfrak{c}p^{n-5}+\text{etc.})$$

et

$$(n+1)Ap^{n}-nBp^{n-1}+(n-1)Cp^{n-2}-(n-2)Dp^{n-3}+\text{etc.}$$
$$=\mathfrak{P}((n+1)p^{n}-n\mathfrak{a}p^{n-1}+(n-1)\mathfrak{b}p^{n-2}-(n-2)\mathfrak{c}p^{n-3}+\text{etc.})$$
$$-\mathfrak{Q}(np^{n-1}-(n-1)\mathfrak{a}p^{n-2}+(n-2)\mathfrak{b}p^{n-3}-(n-3)\mathfrak{c}p^{n-4}+\text{etc.})$$

Ponatur iam:

$$Ap^{n}-Bp^{n-1}+Cp^{n-2}-Dp^{n-3}+\text{etc.}=M$$
$$p^{n-1}-\mathfrak{a}p^{n-2}+\mathfrak{b}p^{n-3}-\mathfrak{c}p^{n-4}+\text{etc.}=N$$

atque binae illae aequationes transibunt in has

$$\frac{dM}{dp}=\frac{\mathfrak{P}d.Np}{dp}-\frac{\mathfrak{Q}dN}{dp}$$
$$\frac{d.Mp}{dp}=\frac{\mathfrak{P}d.Np^{2}}{dp}-\frac{\mathfrak{Q}d.Np}{dp}$$

ex quibus elicitur:

$$\mathfrak{Q}=\frac{\mathfrak{P}Ndp+\mathfrak{P}pdN-dM}{dN}\ \text{et}$$
$$\mathfrak{Q}=\frac{2\mathfrak{P}Npdp+\mathfrak{P}p^{2}dN-Mdp-pdM}{Ndp+pdN}$$

Atque ex harum comparatione oritur

$$\mathfrak{P}=\frac{NdM-MdN}{N^{2}dp}=\frac{1}{dp}d.\frac{M}{N}$$
$$\mathfrak{Q}=-\frac{M}{N}+\frac{p(NdM-MdN)}{N^{2}dp}=-\frac{M}{N}+\frac{p}{dp}d.\frac{M}{N}$$

Ponatur iam $\frac{M}{N}=V$ vt sit

$$V=\frac{Ap^{n}-Bp^{n-1}+Cp^{n-2}-Dp^{n-3}+\text{etc.}}{p^{n-1}-\mathfrak{a}p^{n-2}+\mathfrak{b}p^{n-3}-\mathfrak{c}p^{n-4}+\text{etc.}}$$

erit si numerator et denominator per p^{n} diuidatur, prorsus vt ante assumsimus

$$V = \frac{A - \frac{1}{p}B + \frac{1}{p^2}C - \frac{1}{p^3}D + \text{etc.}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\mathfrak{a} + \frac{1}{p^3}\mathfrak{b} - \frac{1}{p^4}\mathfrak{c} + \text{etc.}}$$

Hocque adeo valore ipsius V assumto habebimus:

$$\mathfrak{P} = -\frac{dV}{dp} \text{ et } \mathfrak{Q} = \frac{pdV}{dp} - V \text{ seu } \mathfrak{P} = \frac{p}{dp}\cdot\frac{dV}{p}\ \mathfrak{Q} = \frac{pp}{dp}d.\frac{V}{p}$$

§. 22. Simili modo si formulae propositae

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{etc.}}\,dx$$

denominator habeat tres factores simplices aequales, ita vt sit diuisibilis per $(1+px)^3$, tum resolutio in duas istiusmodi partes fieri debet

$$\frac{\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}xdx + \mathfrak{R}x^2dx}{1 + 3px + 3p^2x^2 + p^3x^3} + \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \text{etc.}}{1 + \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}x^2 + \text{etc.}}\,dx$$

vt iam summae denominator cum proposito congruat, oportebit esse

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a} &= \alpha - 3p \\
\mathfrak{b} &= \beta - 3\alpha p + 6pp \\
\mathfrak{c} &= \gamma - 3\beta p + 6\alpha pp - 10p^3 \\
\mathfrak{d} &= \delta - 3\gamma p + 6\beta pp - 10\alpha p^3 + 15p^4 \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Numeratorum autem identitas dabit has aequationes:

$$\begin{aligned}
A &= \mathfrak{A} + \mathfrak{P} \\
B &= \mathfrak{B} + 3\mathfrak{A}p + \mathfrak{Q} + \mathfrak{P}\mathfrak{a} \\
C &= \mathfrak{C} + 3\mathfrak{B}p + 3\mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{R} + \mathfrak{Q}\mathfrak{a} + \mathfrak{P}\mathfrak{b} \\
D &= \mathfrak{D} + 3\mathfrak{C}p + 3\mathfrak{B}p^2 + \mathfrak{A}p^3 + \mathfrak{R}\mathfrak{a} + \mathfrak{Q}\mathfrak{b} + \mathfrak{P}\mathfrak{c} \\
E &= \mathfrak{E} + 3\mathfrak{D}p + 3\mathfrak{C}p^2 + \mathfrak{B}p^3 + \mathfrak{R}\mathfrak{b} + \mathfrak{Q}\mathfrak{c} + \mathfrak{P}\mathfrak{d} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Hinc-

Hincque viciſſim ſequentes valores pro litteris $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, etc. eliciuntur.

$$\mathfrak{A} = A - \mathfrak{P}$$
$$\mathfrak{B} = B - 3Ap + \mathfrak{P}(3p - \mathfrak{a}) - \mathfrak{Q}$$
$$\mathfrak{C} = C - 3Bp + 6Ap^2 - \mathfrak{P}(6pp - 3\mathfrak{a}p + \mathfrak{b}) + \mathfrak{Q}(3p - \mathfrak{a}) - \mathfrak{R}$$
$$\mathfrak{D} = D - 3Cp + 6Bp^2 - 10Ap^3 + \mathfrak{P}(10p^3 - 6\mathfrak{a}p^2 + 3\mathfrak{b}p - \mathfrak{c})$$
$$- \mathfrak{Q}(6pp - 3\mathfrak{a}p + \mathfrak{b}) + \mathfrak{R}(3p - \mathfrak{a})$$
$$\text{etc.}$$

Ponatur iam vt ante fecimus:

$$Ap^n - Bp^{n-1} + Cp^{n-2} - Dp^{n-3} + \text{etc.} = M$$
et
$$p^{n-2} - \mathfrak{a}p^{n-3} + \mathfrak{b}p^{n-4} - \mathfrak{c}p^{n-5} + \text{etc.} = N$$

erit vbi ad valores euaneſcentes peruenitur

$$ddM - \mathfrak{P}\,dd.Np^2 + \mathfrak{Q}\,dd.Np - \mathfrak{R}\,ddN = 0$$
$$dd.Mp - \mathfrak{P}\,dd.Np^3 + \mathfrak{Q}\,dd.Np^2 - \mathfrak{R}\,dd.Np = 0$$
$$dd.Mp^2 - \mathfrak{P}\,dd.Np^4 + \mathfrak{Q}\,dd.Np^3 - \mathfrak{R}\,dd.Np^2 = 0$$

poſito in duplici differentiatione dp conſtante. Quod ſi iam ponatur $\frac{M}{N} = V$ ita vt ſit

$$V = \frac{A - \frac{1}{p}B + \frac{c}{p^2}C - \frac{1}{p^3}D + \text{etc.}}{\frac{1}{pp} - \frac{\mathfrak{a}}{p^3} + \frac{\mathfrak{b}}{p^4} - \frac{\mathfrak{c}}{p^5} + \text{etc.}}$$

reperientur ſequentes valores pro $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{R}$.

$$\mathfrak{P} = \frac{ddV}{2dp^2} = \frac{p}{2dp^2} \cdot \frac{ddV}{p}$$
$$\mathfrak{Q} = \frac{pddV}{dp^2} - \frac{dV}{dp} = \frac{pp}{dp^2} \cdot d \cdot \frac{dV}{p}$$
$$\mathfrak{R} = \frac{ppddV}{2dp^2} - \frac{pdV}{dp} + V = \frac{p^3}{2dp^2} \cdot dd \cdot \frac{V}{p}$$

§. 23. Haec iam ſufficiunt ad legem cognoſcendam cuius beneficio reſolutio formulae propoſitae in duas partes

 abſolui

absolui debeat, si denominator quotcunque habeat factores simplices aequales. Quae lex vt facilius perspiciatur repetamus breuitur, quae hactenus sunt tradita. Sitque proposita haec formula

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + etc.}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \epsilon x^5 + etc.} dx$$

cuius integrale requiritur in cuius numeratore x pauciores habeat dimensiones quam in denominatore; sitque denominatoris factor aliquis $1 + px$. Quod si iam hic factor $1 + px$ alium non habeat sui aequalem, ex ipso integralis quaesiti pars reperietur $\int \frac{\mathfrak{P}\, dx}{1+px}$, in quo coefficiens $\mathfrak{P}$ ita determinabitur. Diuidatur primo denominator $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 +$ etc. per $1 + px$ sitque quotus $= 1 + \mathfrak{a} x + \mathfrak{b} x^2 + \mathfrak{c} x^3 +$ etc. Tum ponatur

$$\frac{A - \frac{1}{p}B + \frac{1}{p^2}C - \frac{1}{p^3}D + \text{ etc.}}{1 - \frac{1}{p}\mathfrak{a} + \frac{1}{p^2}\mathfrak{b} - \frac{1}{p^3}\mathfrak{c} + \text{etc.}} = V$$

eritque $\mathfrak{P} = p \cdot \frac{V}{p}$, atque integrale ex factore $1 + px$ ortum erit

$$p \cdot \frac{V}{p} \int \frac{dx}{1+px} = \frac{V}{p} l(1 + px)$$

hocque modo ex singulis denominatoris factoribus simplicibus respondentes integralis partes eruantur, quae simul sumtae totum integrale quaesitum praebebunt.

§. 24. Quod si autem denominator duos factores simplices habeat aequales, seu $(1 + px)^2$ factor fuerit denominatoris, tum ex hoc factore quadrato integralis pars inueniri debet, quae erit huiusmodi $\int \frac{\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}xdx}{(1+px)^2}$; in qua coefficientes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ hoc modo reperientur. Diuidatur deno-

denominator $1+\alpha x+\beta x^2+$ etc. per $(1+px)^2$ sitque quotus $= 1+\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}x^2+\mathfrak{c}x^3+$ etc. Tum ponatur

$$\frac{A-\frac{1}{p}B+\frac{1}{p^2}C-\frac{1}{p^3}D+\text{ etc.}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}\mathfrak{a}+\frac{1}{p^3}\mathfrak{b}-\frac{1}{p^4}\mathfrak{c}+\text{ etc.}}=V$$

erit V functio ipsius p quae differentietur more consueto ponendo tantum p variabile, fietque

$$\mathfrak{P}=\frac{p}{1dp}\cdot\frac{dV}{p}$$
$$\mathfrak{Q}=\frac{pp}{1dp}\cdot d\cdot\frac{V}{p}$$

Atque integrale ex factore $(1+px)^2$ oriundum erit

$$\frac{p}{1dp}d\frac{V}{p}\int\frac{dx}{1+px}+p\cdot\frac{V}{pp}\int\frac{dx}{(1+px)^2}$$

seu $\frac{1}{1dp}d\cdot\frac{V}{p}l(1+px)-\frac{V}{pp}\cdot\frac{1}{1+px}$.

§. 25. Habeat denominator tres factores simplices aequales, seu sit $(1+px)^3$ eius diuisor; tum ex hoc toto factore quaeratur integralis pars, quae sit

$$\int\frac{\mathfrak{P}dx+\mathfrak{Q}xdx+\mathfrak{R}x^2dx}{(1+px)^3}.$$

Coefficientes autem $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, et $\mathfrak{R}$ hoc modo definientur. Diuidatur denominator $1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+$ etc. per $(1+px)^3$ sitque quotus $1+\mathfrak{a}x+\mathfrak{b}x^2+\mathfrak{c}x^3+$ etc.

Tum ponatur $\dfrac{A-\frac{1}{p}B+\frac{1}{pp}C-\frac{1}{p^3}D+\text{ etc.}}{\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^3}\mathfrak{a}+\frac{1}{p^4}\mathfrak{b}-\frac{1}{p^5}\mathfrak{c}+\text{ etc.}}=V$

ex hoc ipsius V valore cognito erit

$$\mathfrak{P}=\frac{p}{1.2dp^2}\cdot\frac{ddV}{p}$$
$$\mathfrak{Q}=\frac{2p^2}{1.2dp^2}\cdot d\cdot\frac{dV}{p}$$
$$\mathfrak{R}=\frac{p^3}{1.2dp^2}\cdot dd\cdot\frac{V}{p}$$

 Atque

Haec autem difficultas versatur in inuentione seriei $1 + \mathfrak{a} x + \mathfrak{b} x^2 + \mathfrak{c} x^2 + \mathfrak{d} x^3 +$ etc. quae resultat si denominator $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 +$ etc. vel per $1 + px$ vel per $(1 + px)^2$ vel per $(1 + px)^3$ vel etc. diuidatur. Facilior igitur calculus reddetur si pro quouis casu in valore ipsius V loco litterarum $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c},$ etc. earum valores per $\alpha, \beta, \gamma,$ etc. substituamus, qui cum sint sponte cogniti inuentione litterarum $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d},$ etc. supersedere poterimus. Casu igitur primo §. 23. pertractato, quo denominator $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 +$ etc. semel tantum diuisorem $1 + px$ admittit, erit:

$$V = \frac{A - \frac{1}{p} B + \frac{1}{p^2} C - \frac{1}{p^3} D + \text{etc.}}{\frac{\alpha}{p} - \frac{2\beta}{p^2} - \frac{3\gamma}{p^3} + \frac{4\delta}{p^4} - \text{etc.}} \quad (§. 18.)$$

quae operatio, vt adhuc breuius absolui queat, ponatur in formula differentiali proposita

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{etc.}} dx$$

numerator: $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ etc. $= P$
et denomin: $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 +$ etc. $= Q$
erit $V = \frac{P p dx}{dQ}$ posito $-\frac{1}{p}$ loco x; quo facto obtinebit V eum ipsum valorem per p expressum, qui ipsi conuenit pro casu, quo $1 + px$ est factor denominatoris Q; ex hocque factore integralis quaesiti pars oritur haec

$$\frac{V}{p} \int \frac{p dx}{1 + px}$$

§. 29. Si denominator Q factorem habeat $(1 + px)^2$ tum sumatur $V = \frac{1 \cdot 2 P p^3 dx^2}{ddQ}$ ponendo in differentiatione ipsius Q x variabile et dx constans, tumque loco x scribendo $-\frac{1}{p}$, quo facto V fiet functio ipsius p, quae proin

posita

posita hac p variabili differentiari poterit. Erit autem integralis quaesiti membrum ex factore $(1+px)^2$ oriundum:

$$\frac{d.\frac{V}{p}}{1dp}\int\frac{pdx}{1+px}+\frac{V}{p^2}\int\frac{pdx}{(1+px)^2}$$

Sin denominator Q factorem habeat $(1+px)^3$ tum sumatur $V=\frac{1.2.3Pp^5dx^3}{d^3Q}$; vbi primo in differentiatione ipsius $Q=1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+$ etc. ponatur x variabile et in sequentibus differentiationibus dx constans; tum fiat $x=-\frac{1}{p}$, vt prodeat V functio ipsius p deinceps differentianda posito p variabili. Atque integralis quaesiti pars ex factore $(1+px)^3$ oriunda erit

$$\frac{dd.\frac{V}{p}}{1.2dp^2}\int\frac{pdx}{1+px}+\frac{d.\frac{V}{p^2}}{1dp}\int\frac{pdx}{(1+px)^2}+\frac{V}{p^3}\int\frac{pdx}{(1+px)^3}$$

Si denominator Q factorem habeat $(1+px)^4$ tum sumatur $V=\frac{1.2.3.4Pp^7dx^4}{d^4Q}$ et seruatis iisdem circa differentiationes legibus erit integralis portio ex denominatoris factore $(1+px)^4$ oriunda $=$

$$\frac{d^3.\frac{V}{p}}{1.2.3dp^3}\int\frac{pdx}{1+px}+\frac{d^2.\frac{V}{pp}}{1.2dp^2}\int\frac{pdx}{(1+px)^2}+\frac{d.\frac{V}{p^3}}{1dp}\int\frac{pdx}{(1+px)^3}+\frac{V}{p^4}\int\frac{pdx}{(1+px)^4}$$

sicque vlterius, quousque libuerit, progredi licebit.

§. 30. Generatim igitur, quae hactenus sunt tradita huc redeunt. Si proposita sit formula differentialis rationalis

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}}{1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\epsilon x^5+\text{etc.}}dx$$

in qua variabilis x pauciores habeat dimensiones in numeratore quam in denominatore huiusque integrale quaeratur; dico integrale ex tot compositum fore partibus, quot denominator contineat factores simplices a se inuicem diversos. Atque ex quolibet factore denominatoris simplici eiusque potentia quacunque pars integralis quaesiti sequenti modo inuestigatur. Sit

$(1+px)^n$ factor seu diuisor denominatoris.

Atque ponatur breuitatis gratia:

numerator $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ etc. $= P$

denominat. $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 +$ etc. $= Q$

Tum continuo differentiando denominatorem Q, posito x variabili et dx constanti, capiatur

$$V = \frac{Pp^{2n-1}dx^n}{d^nQ} \text{ vel quodidem est } V = \frac{Pp^{n-1}(1+px)^n}{1.2.3\ldots n.Q}$$

ac fiat postea $x = -\frac{1}{p}$, vt exeat ex hac expressione x, maneatque V functio ipsius p et constantium; quae deinceps differentietur ponendo p variabile et dp constans. Quo facto ex factore $(1+px)^n$ nascetur integralis quaesiti ista pars:

$$\frac{n\,d^{n-1}\frac{V}{p}}{dp^{n-1}}\int\frac{pdx}{1+px} + \frac{n(n-1)\,d^{n-2}\frac{V}{p^2}}{dp^{n-2}}\int\frac{pdx}{(1+px)^2} + \frac{n(n-1)(n-2)\,d^{n-3}\frac{V}{p^3}}{dp^{n-3}}\int\frac{pdx}{(1+px)^3}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\,d^{n-4}\frac{V}{p^4}}{dp^{n-4}}\int\frac{pdx}{(1+px)^4} + \text{etc.}$$

quae tot constabit membris, quot n continet vnitates.

§. 31. Habemus hic valorem ipsius V duplici modo expressum, quorum eo, qui commodior visus fuerit, vti conueniet. Si quidem denominator Q iam fuerit in suos factores

factores resolutus, tum expediet vti modo posteriori quo est

$$V = \frac{Pp^{n-1}(1+px)^n}{1.2.3\ldots\ldots nQ}$$

tum enim statim fiet $\frac{Q}{(1+px)^n}$ quantitas integra, eo, quod denominatorem Q diuisibilem esse ponimus per $(1+px)^n$. Quod autem diximus inuento hoc modo valore ipsius V loco x poni debere $-\frac{1}{p}$; hic probe cauendum est, ne loco p numerum determinatum scribendo contra institutum peccemus, ac talem pro V expressionem obtineamus, quae differentiari nequeat. Quamobrem etsi reuera p eam quantitatem determinatam denotat, quae reddat $(1+px)^n$ diuisorem denominatoris Q, tamen loco $-\frac{1}{x}$ non illa quantitas determinata, sed potius character p, quasi adhuc esset incognitus, indeterminate substitui debet, quem etiam tamdiu retinebit donec per differentiationem singuli integralis coefficientes fuerint reperti. Quod vt clarius ob oculos ponatur, sit integranda ista formula differentialis Exemplum

$$\frac{x\,dx}{(1-x)^3(1+x)^2(1+2x)}$$

Erit ergo $P = x$ et $Q = (1-x)^3(1+x)^2(1+2x)$ atque integrale ex tribus constabit partibus, quae ex tribus factoribus $(1-x)^3$, $(1+x)^2$ et $1+2x$ reperientur. Sumatur primum factor $(1-x)^3$, ex quo est $p = -1$ quem autem valorem tum demum loco p substituemus, cum omnes coefficientes fuerint determinati.

Erit ergo $n=3$ et $\frac{Q}{(1+px)^3} = (1+x)^2(1+2x)$, ex quo fit $V = \frac{p^2x}{6(1+x)^2(1+2x)} = \frac{-p^4}{6(p-1)^2(p-2)}$. Hinc erit $\frac{V}{p^3} = \frac{-p}{6(p-1)^2(p-2)}$ et $\frac{6V}{p^3} = \frac{-p}{p^3-4pp+5p-2}$; $\frac{6d.\frac{V}{pp}}{dp} = \frac{p^3+pp-4p}{(p-1)^3(p-2)^2}$ itemque $\frac{3V}{p} = \frac{-p^3}{2(p-1)^2(p-2)}$ vnde erit $\frac{3}{dp}d.\frac{V}{p} = \frac{2p^3-3pp}{(p-1)^3(p-2)^2}$; atque $\frac{3}{dp^2}d^2.\frac{V}{p} = \frac{-4p^4+7p^3+6pp-12p}{(p-1)^4(p-2)^3}$. Cum nunc fit $p=-1$ erit

$$\frac{3}{dp^2}d^2.\frac{V}{p} = \frac{7}{16\cdot 27}$$
$$\frac{6}{dp}d.\frac{V}{p^2} = \frac{-4}{8\cdot 9}$$
$$6\frac{V}{p^3} = \frac{-1}{4\cdot 3}$$

atque integrale ex factore $(1-x)^3$ oriundum erit

$$\frac{7}{16\cdot 27}\int\frac{dx}{1-x} + \frac{4}{8\cdot 9}\int\frac{dx}{(1-x)^2} + \frac{1}{4\cdot 3}\int\frac{dx}{(1-x)^3} =$$
$$\frac{7}{16\cdot 27}\, l\frac{1}{1-x} + \frac{4}{8\cdot 9}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{1}{8\cdot 3(1-x)^3}.$$

Porro sumatur factor $(1+x)^2$ erit $n=2$, et $p=1$ atque $V = \frac{px}{2(1-x)^3(1+2x)} = \frac{-p^4}{2(p+1)^3(p-2)}$. Hinc est $2.\frac{V}{pp} = \frac{-pp}{(p+1)^3(p-2)} = \frac{1}{8}$ posito $p=1$: ac $\frac{2}{dp}d.\frac{V}{p} = \frac{p^4-2p^3+6pp}{(p+1)^4(p-2)^2} = \frac{5}{16}$ posito $p=1$. Ergo ex denominatoris factore $(1+x)^2$ nascitur integralis pars haec.

$$\frac{5}{16}\int\frac{dx}{1+x} + \frac{1}{8}\int\frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{5}{16}\, l(1+x) - \frac{1}{8(1+x)}$$

Denique ex factore $1+2x$, fit $n=1$ et $p=2$ oriturque $V = \frac{x}{(1-x)^3(1+x)^2} = \frac{-p^4}{(p+1)^3(p-1)^2}$ et quia nulla differentiatione opus est ponatur $p=2$ fiet $\frac{V}{p} = \frac{-8}{27}$ et integralis pars ex factore $1+2x$ oriunda erit $= \frac{-8}{27}\int\frac{2dx}{1+2x} = \frac{-8}{27}\, l(1+2x)$

Ex

Ex his itaque formulae differentialis huius

$$\frac{x\,dx}{(1-x)^3(1+x)^2(1+2x)}$$

integrale completum colligitur esse:

$$\frac{7}{16\cdot 27}\, l\frac{1}{1-x} + \frac{5}{16}\, l(1+x) + \frac{8}{27}\, l\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{18(1-x)} + \frac{1}{24(1-x)^2} + \frac{1}{8(1+x)} + \text{Const.}$$

§. 32. Ex his igitur dilucide perspicitur, quibus operationibus cuiuscunque formulae differentialis, dummodo sit rationalis, integrale inueniri oporteat. Primum enim si denominator formulae propositae fuerit diuisibilis per x, vel eius potestatem quamcunque, tum docuimus, formulam in duas partes discerpere, quarum altera integrationem sponte admittat, habens pro denominatore illam ipsam potestatem ipsius x, altera pars autem habeat denominatorem non amplius diuisibilem per x, quae adeo reducetur ad hanc formam:

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \text{etc.}}\, dx$$

in cuius integrale inquiri oporteat. Secundo videndum est vtrum in hac forma variabilis x in numeratore tot vel plures habeat dimensiones quam in denominatore, an pauciores. Nam si tot habeat vel plures dimensiones, tum iterum formula differentialis in duas partes discerpi poterit, quarum altera sit nullo negotio integrabilis, altera autem habitura sit in numeratore pauciores dimensiones ipsius x, quam in denominatore; quae ideo erit istius modi:

$$\frac{A' + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \epsilon x^5 + \text{etc.}}$$

missimis argumentis est confirmatum. Factores enim simplices expressionis algebraicae formantur ex radicibus eiusdem expressionis nihilo aequalis positae, sic si aequationis huius

$$z^n + \alpha z^{n-1} + \beta z^{n-2} + \gamma z^{n-3} + \text{etc.} = 0$$

radices fuerint $z = p$; $z = q$; $z = r$; etc. tum huius expressionis algebraicae:

$$z^n + \alpha z^{n-1} + \beta z^{n-2} + \gamma z^{n-3} + \text{etc.}$$

factores simplices erunt: $z - p$; $z - q$; $z - r$; etc. itaque inuentio factorum simplicium absoluitur inuentione radicum aequationis algebraicae: atque radices reales praebebunt factores simplices reales imaginariae vero imaginarios. Demonstratum autem est, si maximus ipsius z exponens n sit numerus impar, tum aequationem vel vnam habere radicem realem, vel tres, vel quinque, vel septem, etc. ita vt numerus radicum non realium seu imaginariarum erit par, eo quod numerus radicum omnium aequetur numero n qui est impar. Deinde etiam demonstratum est si maximus incognitae z exponens n fuerit numerus par, tum aequationem vel nullam habere radicem realem, vel duas, vel quatuor, vel sex, etc. vnde etiam hoc casu numerus radicum imaginariarum erit par. Ex quibus colligitur, si quaecunque expressio algebraica habuerit factores simplices imaginarios, tum eorum numerum perpetuo esse parem, ideoque factores imaginarios habebit vel nullum, vel duos, vel quatuor, vel sex, etc. secundum numeros pares.

39. Si iam haec ad denominatorem formulae nostrae differentialis propositae accommodemus, is vel nullum habebit factorem simplicem imaginarium, quo casu vtique

vtique integrale per methodum traditam in forma reali reperitur; vel habebit duos factores simplices imaginarios, vel quatuor, vel sex, vel octo; etc. Ponamus denominatorem duos tantum habere factores simplices imaginarios, reliquos vero omnes reales; ac diuidamus eum per productum ex omnibus factoribus realibus, quod vtique erit quantitas *realis*; manifestum est quotum fore quantitatem *realem*. At quotus erit productum ex binis illis factoribus imaginariis; ideoque horum productum erit quantitas realis. Hinc si denominator $1 + \alpha x + \beta x^2$ $\gamma x^3 + \delta x^4 +$ etc. duos tantum habeat factores imaginarios, eorum productum erit huiusmodi $1 + px + qx^2$, in quo coefficientes p et q sint reales; ideoque iste denominator loco duorum factorum simplicium imaginariorum habebit vnum factorem trinomialem $1 + px + qx^2$ realem, cuius factores cum sint imaginarii erit $q > \frac{pp}{4}$. Cum igitur sit $\frac{pp}{4}$ quantitas positiua, erit q etiam quantitas positiua atque maior quam quadratum semissis ipsius p. Quodsi iam in producto omnium factorum simplicium realium ponamus in coefficientibus eiusmodi mutationem fieri, vt vnus factor fiat imaginarius, simul alium imaginarium fieri oportebit, horumque duorum productum per idem ratiocinium fiet reale. Vnde colligitur loco omnium factorum simplicium imaginariorum, quorum numerus sit $= 2m$, factores trinomiales huius formae $1 + px + qxx$ reales, quorum numerus sit $= m$ substitui posse.

§ 36. Si igitur formulae differentialis propositae

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{etc.}} dx$$

denominator habeat quotcunque factores simplices imaginarios, eorum loco poterimus adhibere factores trinomiales $1 + px + qxx$ reales; hocque modo resoluemus denominatorem in factores meros reales. Scilicet tot simplices quot habebit reales, ac pro imaginariis factores trinomiales reales introducemus. Quare cum iam ostenderimus, quomodo ex singulis factoribus simplicibus partes integralis respondentes inueniri oporteat; superest vt modum tradamus inueniendi integralis partes ex factoribus trinomialibus oriundas. Sit igitur factor denominatoris trinomialis $1 + px + qxx$, atque formula differentialis proposita in has duas partes discerpi concipiatur:

$$\frac{\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}xdx}{1 + px + qxx} + \frac{\mathfrak{A}dx + \mathfrak{B}xdx + \mathfrak{C}x^2dx + \text{ect.}}{1 + \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}x^2 + \mathfrak{c}x^3 + \text{etc.}}$$

Atque ex parte $\frac{\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}xdx}{1 + px + qxx}$ nascetur integrale

$$\frac{\mathfrak{Q}}{2q}l(1 + px + qxx) + \frac{2\mathfrak{P}q - \mathfrak{Q}p}{q\sqrt{(4q - pp)}}\text{A tang.}\frac{x\sqrt{(4q - pp)}}{2 + px}$$

erit enim ob duos factores simplices imaginarios in $1 + px + qxx$ contentos $4q > pp$. Quodsi autem hibini factores essent reales, et $4q < pp$, tum integrale formulae $\frac{\mathfrak{P}dx + \mathfrak{Q}xdx}{1 + px + qxx}$ a solis logarithmis penderet foretque

$$\frac{\mathfrak{Q}}{2q}l(1 + px + qxx + \frac{2\mathfrak{P}q - \mathfrak{Q}p}{2q\sqrt{(pp - 4q)}}l\frac{2qx + p - \sqrt{(pp - 4q)}}{2qx + p + \sqrt{(pp - 4q)}}$$

§. 37. Valores autem coefficientium $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ ex his aequationibus definientur:

A =

$\mathrm{A} = \mathfrak{A} + \mathfrak{P}$
$\mathrm{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}p + \mathfrak{Q} + \mathfrak{P}\mathfrak{a}$
$\mathrm{C} = \mathfrak{C} + \mathfrak{B}p + \mathfrak{A}q + \mathfrak{Q}\mathfrak{a} + \mathfrak{P}\mathfrak{b}$
$\mathrm{D} = \mathfrak{D} + \mathfrak{C}p + \mathfrak{B}q + \mathfrak{Q}\mathfrak{b} + \mathfrak{P}\mathfrak{c}$
etc.

ex quibus eliciuntur ſequentes valores:

$\mathfrak{A} = \mathrm{A} - \mathfrak{P}$
$\mathfrak{B} = \mathrm{B} - \mathrm{A}p + \mathfrak{P}(p-\mathfrak{a}) - \mathfrak{Q}$
$\mathfrak{C} = \mathrm{C} - \mathrm{B}p + \mathrm{A}(pp-q) - \mathfrak{P}(pp-q-\mathfrak{a}p+\mathfrak{b}) + \mathfrak{Q}(p-\mathfrak{a})$
$\mathfrak{D} = \mathrm{D} - \mathrm{C}p + \mathrm{B}(pp-q) - \mathrm{A}(p^3-2pq) +$
$\mathfrak{P}(p^3-2pq-\mathfrak{a}(p^2-q)+\mathfrak{b}p-2) - \mathfrak{Q}(pp-q-\mathfrak{a}p+\mathfrak{b})$
etc.

vbi cum in ſerie litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. tandem ad euaneſcentes perueniatur, prodibunt aequationes, ex quibus $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ determinari poterunt. His autem aequationibus implicabitur haec ſeries

$1;\ p;\ p^2-q;\ p^3-2pq;\ p^4-3p^2q+qq;$ etc.

cuius terminus generalis ſeu indici n reſpondens eſt $= \dfrac{(\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}pp-q)})^n-(\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}pp-q)})^n}{\sqrt{(pp-4q)}}$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}pp-q)} = r$ et $\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}pp-q)} = s$ atque cum ad coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. euaneſcentes fuerit peruentum, habebitur iſta aequatio indefinita

$+\mathfrak{P}(r^n \mp \mathfrak{a}r^{n-1} \pm \mathfrak{b}r^{n-2} \mp 2r^{n-3}$ etc. $-\mathfrak{P}(s^n - \mathfrak{a}s^{n-1} \pm \mathfrak{b}s^{n-2}$ etc.$)$
$-\mathfrak{Q}(r^{n-1} \mp \mathfrak{a}r^{n-2} \pm \mathfrak{b}r^{n-3}$ etc.$) + \mathfrak{Q}(s^{n-1} \mp \mathfrak{a}s^{n-2} \pm \mathfrak{b}s^{n-3}$ etc.$)$
$= \mathrm{A}r^n \mp \mathrm{B}r^{n-1} \pm \mathrm{C}r^{n-2}$ etc. $- \mathrm{A}s^n + \mathrm{B}s^{n-1} \pm \mathrm{C}s^{n-2}$ etc.

cuius duo caſus ſufficient ad valores ipſorum $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ determinandos.

§. 38. Ponamus breuitatis gratia:

$$A r^n - B r^{n-1} + C r^{n-2} - D r^{n-3} + \text{etc.} = R$$
$$A s^n - B s^{n-1} + C s^{n-2} - D s^{n-3} + \text{etc.} = S$$
$$r^{n-1} - \mathfrak{a} r^{n-2} + \mathfrak{b} r^{n-3} - \mathfrak{c} r^{n-4} + \text{etc.} = P$$
$$s^{n-1} - \mathfrak{a} r^{n-2} + \mathfrak{b} r^{n-3} - \mathfrak{c} s^{n-4} + \text{etc.} = Q$$

atque obtinebimus hanc aequationem:

$$\mathfrak{P} P r - \mathfrak{P} Q s - \mathfrak{Q} P + \mathfrak{Q} Q = R - S$$

hancque pari modo sequetur ista in loco $n+1$

$$\mathfrak{P} P r^2 - \mathfrak{P} Q s^2 - \mathfrak{Q} P r + \mathfrak{Q} Q s = R r - S s$$

ex his eliminando $\mathfrak{Q}$ reperitur:

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{P}(Pr - Qs) - R + S}{P - Q} = \frac{\mathfrak{P}(Pr^2 - Qs^2) - Rr + Ss}{Pr - Qs}$$

hincque obtinebuntur sequentes determinationes:

$$\mathfrak{P} = \frac{QR - PS}{(r-s)PQ} = \frac{QR - PS}{PQ\sqrt{(pp-4q)}} = \frac{1}{r-s}\left(\frac{R}{P} - \frac{S}{Q}\right)$$
$$\mathfrak{Q} = \frac{QRs - PSr}{(r-s)PQ} = \frac{QRs - PSr}{PQ\sqrt{(pp-4q)}} = \frac{1}{r-s}\left(\frac{Rs}{P} - \frac{Sr}{Q}\right)$$

at in his valoribus est independenter ab n;

$$\frac{R}{P} = \frac{A - \frac{1}{r}B + \frac{1}{r^2}C - \frac{1}{r^3}D + \text{etc.}}{\frac{1}{r} - \frac{\mathfrak{a}}{r^2} + \frac{\mathfrak{b}}{r^3} - \frac{\mathfrak{c}}{r^4} + \text{etc.}}$$
$$\frac{S}{Q} = \frac{A - \frac{1}{s}B + \frac{1}{s}C - \frac{1}{s}D + \text{etc.}}{\frac{1}{s} - \frac{\mathfrak{a}}{s^2} + \frac{\mathfrak{b}}{s^3} - \frac{\mathfrak{c}}{s^4} + \text{etc.}}$$

Denotant autem $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$, etc. sequentes valores

$$\mathfrak{a} = \alpha - p$$
$$\mathfrak{b} = \beta - \alpha p + pp - q$$
$$\mathfrak{c} = \gamma - \beta p + \alpha(pp - q) - (p^3 - 2pq)$$
$$\mathfrak{d} = \delta - \gamma p + \beta(pp - q) - \alpha(p^3 - 2pq) + (p^4 - 3ppq + qq)$$
etc.

vel

vel cum sit $p = r + s$; et $q = rs$ erit vt sequitur

$$-\mathfrak{a} = r + s - \alpha$$
$$+\mathfrak{b} = rr + rs + ss - \alpha(r+s) + \beta$$
$$-\mathfrak{c} = r^3 + r^2 s + rss + s^3 - \alpha(rr + rs + ss) + \beta(r+s) - \gamma$$

His valoribus substitutis prodibit denominator

$$\frac{1}{r} - \frac{\mathfrak{a}}{rr} + \frac{\mathfrak{b}}{r^3} - \frac{\mathfrak{c}}{r^4} + \frac{\mathfrak{d}}{r^5} - \text{etc.}$$

aequalis *huic* expressioni pro n dimensionibus

$$\frac{n}{r} + \frac{(n-1)s}{rr} + \frac{(n-2)ss}{r^3} + \frac{(n-3)s^3}{r^4} + \frac{(n-4)s^4}{r^5} + \text{etc.}$$
$$-\frac{\alpha}{r}\left(\frac{n-1}{r} + \frac{(n-2)s}{r^2} + \frac{(n-3)s^2}{r^3} + \frac{(n-4)s^3}{r^4} + \text{etc.}\right.$$
$$+\frac{\beta}{r^2}\left(\frac{n-2}{r} + \frac{(n-3)s}{r^2} + \frac{(n-4)s^2}{r^3} + \text{etc.}\right)$$
$$\frac{\gamma}{r^3}\left(\frac{n-3}{r} + \frac{(n-4)s}{rr} + \text{etc.}\right.$$
$$\text{etc.}$$

quae series, cum sint omnes summabiles, habebitur

$$\frac{1}{(r-s)^2}\left(nr - (n+1)s + \frac{s^{n+1}}{r^n} - \frac{\alpha}{r}\left((n-1)r - ns + \frac{s^n}{r^{n-1}}\right) + \frac{\beta}{r^2}\cdot\right.$$
$$\left.\left((n-2)r - (n-1)s + \frac{s^{n-1}}{r^{n-2}}\right) - \text{etc.}\right)$$

§. 39. Quoniam autem $1 + px + qxx$ euanescit posito loco x vel $-\frac{1}{r}$ vel $-\frac{1}{s}$, eaque ipsa quantitas est diuisor denominatoris $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 +$ etc. erit quoque posito pro x vel $-\frac{1}{r}$ vel $-\frac{1}{s}$

$$0 = 1 - \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{rr} - \frac{\gamma}{r^3} + \frac{\delta}{r^4} - \text{etc.}$$
$$0 = 1 - \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{ss} - \frac{\gamma}{s^3} + \frac{\delta}{s^4} - \text{etc.}$$

Hinc itaque erit

$$\frac{s^{n+1}}{r^n} - \frac{\alpha}{r}\cdot\frac{s^n}{r^{n-1}} + \frac{\beta}{rr}\cdot\frac{s^{n-1}}{r^{n-2}} - \frac{\gamma}{r^3}\cdot\frac{s^{n-2}}{r^{n-3}} + \text{etc.} = 0$$

atque

$$nr-(n+1)s - \frac{\alpha}{r}(nr-(n+1)s) + \frac{\beta}{r^2}(nr-(n+1)s) - \text{etc.} = 0.$$

quae duae expressiones si coniunctim subtrahantur a superiori, transmutabitur ista expressio

$\frac{1}{r} - \frac{a}{r^2} + \frac{b}{r^3} - \frac{c}{r^4} +$ etc. in hanc

$$\frac{1}{(r-s)^2}\left(\frac{\alpha(r-s)}{r} - \frac{2\beta(r-s)}{r^2} + \frac{3\gamma(r-s)}{r^3} - \frac{4\delta(r-s)}{r^4} + \text{etc.}\right)$$

quae cum diuidi queat per $r-s$ emergit:

$$\frac{1}{r-s}\left(\frac{\alpha}{r} - \frac{2\beta}{r^2} + \frac{3\gamma}{r^3} - \frac{4\delta}{r^4} + \text{etc.}\right),$$

simili modo ista expressio:

$$\frac{1}{s} - \frac{a}{s^2} + \frac{b}{s^3} - \frac{c}{s^4} + \frac{d}{s^5} - \text{etc.}$$

factis substitutionibus transibit in hanc:

$$\frac{1}{s-r}\left(\frac{\alpha}{s} - \frac{2\beta}{s^2} + \frac{3\gamma}{s^3} - \frac{4\delta}{s^4} + \text{etc.}\right)$$

Quare tandem pro §. 38. habebitur:

$$\frac{R}{(r-s)P} = \frac{A - \frac{1}{r}B + \frac{1}{r^2}C - \frac{1}{r^3}D + \text{etc.}}{\frac{\alpha}{r} - \frac{2\beta}{r^2} + \frac{3\gamma}{r^3} - \frac{4\delta}{r^4} + \text{etc.}}$$

$$\frac{-S}{(r-s)Q} = \frac{A - \frac{1}{s}B + \frac{1}{s^2}C - \frac{1}{s^3}D + \text{etc.}}{\frac{\alpha}{s} - \frac{2\beta}{s^2} + \frac{3\gamma}{s^3} - \frac{4\delta}{s^4} + \text{etc.}}$$

Hisque inuentis est $\mathfrak{P} = \frac{R}{(r-s)P} - \frac{S}{(r-s)Q}$ atque

$\mathfrak{Q} = \frac{Rs}{(r-s)P} - \frac{Sr}{(r-s)Q}$; et $2\,\mathfrak{P}q - \mathfrak{Q}p = \frac{Rs}{P} + \frac{Sr}{Q}$.

§. 40. Etsi hic quantitates r et s habeant valores imaginarios, tamen in valoribus pro $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ imaginaria se destruunt, atque oriuntur valores reales. Ponatur enim primum productum amborum denominatorum

$(\frac{\alpha}{r}$

$$\left(\frac{\alpha}{r}-\frac{2\beta}{r^2}+\frac{3\gamma}{r^3}-\text{etc.}\right)\left(\frac{\alpha}{s}-\frac{2\beta}{s^2}+\frac{3\gamma}{s^3}-\text{etc.}\right)=W$$

erit ob $rs=q$ et $r+s=p$ multiplicatione peracta

$$W=\begin{cases}+\frac{\alpha^2}{q}+\frac{4\beta^2}{qq}+\frac{9\gamma^2}{q^3}+\frac{16\delta^2}{q^4}+\frac{25\varepsilon^2}{q^5}+\text{etc.}\\ -p\left(\frac{2\alpha\beta}{qq}+\frac{6\beta\gamma}{q^3}+\frac{12\gamma\delta}{q^4}+\frac{20\delta\varepsilon}{q^5}+\text{etc.}\right)\\ +(pp-2q)\left(\frac{3\alpha\gamma}{q^3}+\frac{8\beta\delta}{q^4}+\frac{15\gamma\varepsilon}{q^5}+\frac{24\delta\zeta}{q^6}+\text{etc.}\right)\\ -(p^3-3pq)\left(\frac{4\alpha\delta}{q^4}+\frac{10\beta\varepsilon}{q^5}+\frac{18\gamma\zeta}{q^6}+\text{etc.}\right)\\ \text{etc.}\end{cases}$$

Ex his inuenitur $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ vti sequitur

$$\mathfrak{P}=\begin{cases}+\frac{A}{W}\left(\frac{\alpha p}{q}-\frac{2\beta(pp-2q)}{qq}+\frac{3\gamma(p^3-3pq)}{q^3}-\frac{4\delta(p^4-4p^2q+2qq)}{q^4}+\text{etc.}\right)\\ -\frac{B}{W}\left(\frac{2\alpha}{q}-\frac{2\beta p}{qq}+\frac{3\gamma(pp-2q)}{q^3}-\frac{4\delta(p^3-3pq)}{q^4}+\text{etc.}\right)\\ +\frac{C}{W}\left(\frac{\alpha p}{qq}-\frac{4\beta}{qq}+\frac{3\gamma p}{q^3}-\frac{4\delta(pp-2q)}{q^4}+\text{etc.}\right)\\ -\frac{D}{W}\left(\frac{\alpha(pp-2q)}{q^3}-\frac{2\beta p}{q^3}+\frac{6\gamma}{q^3}-\frac{4\delta p}{q^4}+\text{etc.}\right)\\ \text{etc.}\end{cases}$$

$$\mathfrak{Q}=\begin{cases}+\frac{A}{W}\left(2\alpha-\frac{2\beta p}{q}+\frac{3\gamma(pp-2q)}{qq}-\frac{4\delta(p^3-3pq)}{q^3}+\text{etc.}\right)\\ -\frac{B}{W}\left(\frac{\alpha p}{q}-\frac{4\beta}{q}+\frac{3\gamma p}{qq}-\frac{4\delta(pp-2q)}{q^3}+\text{etc.}\right)\\ +\frac{C}{W}\left(\frac{\alpha(pp-2q)}{qq}-\frac{2\beta p}{qq}+\frac{6\gamma}{qq}-\frac{4\delta p}{q^3}+\text{etc.}\right)\\ -\frac{D}{W}\left(\frac{\alpha(p^3-3pq)}{q^3}-\frac{2\beta(pp-2q)}{q^3}+\frac{3\gamma p}{q^3}-\frac{8\delta}{q^3}+\text{etc.}\right)\\ \text{etc.}\end{cases}$$

Inuentis ergo hoc modo $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ reperietur integrale, quod ex denominatoris factore $1+px+qxx$ oritur, quippe quod est

$$\frac{\mathfrak{Q}}{2q}\, l(1+px+qxx)+\frac{2\mathfrak{P}q-\mathfrak{Q}p}{q\sqrt{(4q-pp)}}\,\text{A tang.}\,\frac{x\sqrt{(4q-pp)}}{2+px}$$

In casibus autem particularibus saepenumero praestat litteras r et s retinere, donec valores pro $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ fuerint inuenti;

inuenti; etsi enim hi valores sunt imaginarii, tamen ordo progressionis, quo in formulas $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ ingrediuntur, facilius apparet, simulque sponte imaginaria se tollunt. Huius adeo methodi beneficio omnis formulae differentialis rationalis, vtcunque factoribus imaginariis scateat, integrale reale ope logarithmorum et arcuum circularium poterit exhiberi.

§. 41. Quae hic non mediocri labore pro factore trinomiali inuenimus, ea multo facilius directe ex iis quae de factoribus simplicibus attulimus, deriuari possunt. Sit enim in formula differentiali proposita

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}}{1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{etc.}}$$

vbi x vti ponimus iam pauciores habeat dimensiones in numeratore quam in denominatore. Sit inquam $1 + px + qxx$ factor trinomialis, isque realis denominatoris $1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 +$ etc. cuiusmodi factores vtique dantur; bini enim factores simplices in $1 + px + qxx$ contenti sunt vel reales vel imaginarii, atque vtroque casu eorum productum est reale. Sint igitur $1 + rx$ et $1 + sx$ bini factores simplices siue reales siue imaginarii, quorum productum sit $= 1 + px + qxx$ ita vt sit $r = \frac{p + \sqrt{(pp - 4q)}}{2}$ et $s = \frac{p - \sqrt{(pp - 4q)}}{2}$; et quaerantur integralis partes, quae ex vtroque factore simplici oriuntur. Pro primo quidem factore si ponatur

$$R = \frac{A - \frac{1}{r}B + \frac{1}{r^2}C - \frac{1}{r^3}D + \frac{1}{r^4}E - \text{etc.}}{\frac{\alpha}{r} - \frac{2\beta}{r^2} + \frac{3\gamma}{r^3} - \frac{4\delta}{r^4} + \frac{5\varepsilon}{r^5} - \text{etc.}}$$

erit integralis pars inde oriunda $= \int \frac{R\,dx}{1 + rx}$.

At

At pro altero factore $1+sx$, si ponatur:

$$S = \frac{A - \frac{1}{s}B + \frac{1}{s^2}C - \frac{1}{s^3}D + \frac{1}{s^4}E - \text{etc.}}{\frac{\alpha}{s} - \frac{2\beta}{s^2} + \frac{3\gamma}{s^3} - \frac{4\delta}{s^4} + \frac{5\varepsilon}{s^5} - \text{etc.}}$$

erit integralis pars inde oriunda $= \int\frac{S\,dx}{1+sx}$.
Quamobrem ex vtroque factore coniunctim hoc est ex factore trinomiali $1+px+qxx$ orietur integralis pars haec $\int\frac{R\,dx}{1+rx} + \int\frac{S\,dx}{1+sx} = \int\frac{(R+S)dx + (Rs+Sr)x\,dx}{1+px+qxx}$ vbi tam $R+S$ quam $Rs+Sr$ erunt quantitates reales; atque hoc integrale vel a solis logarithmis vel simul a quadratura circuli pendebit, prout r et s fuerint vel quantitates reales, vel imaginariae: hocque apprime congruit cum eo, quod ante inuenimus.

§. 42. Simili modo si denominator fuerit diuisibilis per $(1+px+qxx)^2$, atque factores simplices ipsius $1+px+qxx$, qui sint $1+rx$ et $1+sx$ fuerint imaginarii, integralis portio inde oriunda in forma reali dabitur. Cum enim ipsius $(1+px+qxx)^2$ factores sint $(1+rx)^2$ et $(1+sx)^2$, tractetur vterque modo supra exposito. Scilicet pro factore $(1+rx)^2$ ponatur

$$R = \frac{A - \frac{1}{r}B + \frac{1}{r^2}C - \frac{1}{r^3}D + \text{etc.}}{\frac{1}{r^3}\left(1.2\beta - \frac{2.3\gamma}{r} + \frac{3.4\delta}{r^2} - \text{etc.}\right)}$$

eritque integrale hinc oriundum:

$$\frac{2d.\frac{R}{r}}{dr}\int\frac{r\,dx}{1+rx} + 2.1.\frac{R}{r^2}\int\frac{r\,dx}{(1+rx)^2}$$

Simili modo pro factore $(1+sx)^2$ ponatur:

$$S = \frac{A - \frac{1}{s}B + \frac{1}{s^2}C - \frac{1}{s^3}D + \text{etc.}}{\frac{1}{s^3}\left(1.2\beta - \frac{2.3\gamma}{s} + \frac{3.4\delta}{s^2} - \text{etc.}\right)}$$

 atque

atque hinc orietur integralis portio:

$$\frac{2d.\frac{S}{s}}{ds}\int\frac{s\,dx}{1+sx}+2.1\frac{S}{s^2}\int\frac{s\,dx}{(1+sx)^2}$$

quae duae formae si r et s fuerint quantitates imaginariae inuicem addantur, prodibitque formula differentialis integranda realis huius formae

$$\frac{\mathfrak{P}dx+\mathfrak{Q}xdx+\mathfrak{R}x^2dx+\mathfrak{S}x^3dx}{(1+px+qxx)^2}$$

cuius integrale resoluitur in has duas partes

$$\frac{\mathfrak{P}p-2\mathfrak{Q}+\mathfrak{R}\frac{p}{q}-\mathfrak{S}(\frac{pp-2q}{qq})+(2\mathfrak{P}q-\mathfrak{Q}p+\mathfrak{R}(\frac{pp-2q}{q})-\mathfrak{S}(\frac{p^3-3pq}{qq}))x}{(4q-pp)\;(1+px+qxx)}$$

$$+\int\frac{(2\mathfrak{P}q-\mathfrak{Q}p+2\mathfrak{R}-\mathfrak{S}\frac{p}{q})dx-\mathfrak{S}(\frac{pp-4q}{q})xdx}{(4q-pp)\;(1+px+qxx)}$$

quae ergo integratio ope logarithmorum et arcuum circularium absolui potest. Pari autem modo erit procedendum, si denominatoris factor fuerit $(1+px+qxx)^3$ vel alia altior potestas quaecunque.

§. 43. Ex his igitur intelligitur, quomodo formulae cuiuscunque differentialis rationalis integrale inueniri atque adeo in forma reali exhiberi oporteat; postquam enim differentiale per modos prius expositos ad formam posterius pertractatam fuerit perductum, tum totius negotii cardo vertetur in inuentione factorum realium denominatoris, qui, vti ostendimus, sunt vel simplices binomiales vel trinomiales; atque quilibet factor dabit partem integralis quaesiti; quare si methodo praescripta ex singulis factoribus integralis partes respondentes fuerint inuentae, tum omnium harum partium aggregatum erit integrale quaesi-

tum

tum. Ex his porro patet veritas non exigui momenti, quod omnis formulae differentialis rationalis perpetuo concessis logarithmis et arcubus circularibus exhiberi queat; ita vt integratio si algebraice absolui nequeat alias quantitates transcendentes non requirat praeter logarithmos et arcus circulares. Cum igitur modus, quo ad integrale perueniendum est, satis sit expositus; nil aliud super est, nisi vt vsum eius in aliquot exemplis alias difficilioribus monstremus; quae partim iam sint ab aliis tractata, partim hic de nouo producta vel saltem fusius exposita. In hoc autem negotio, quia praecipuum opus in inuentione factorum versatur, alia exempla proferre non licet, nisi in quibus factores denominatoris actu exhiberi queant; hanc obrem in subsidium vocabimus praecipua illa artificia a Celeb. Moivraeo aliisque excogitata, quorum beneficio factores propositae cuiuspiam expressionis assignari possunt, sicque plura occurrent ad algebrae finitae incrementum facientia, quae etsi huc minus pertinent, tamen fusius prosequemur.

Problema 1.

§. 44. Inuenire integrale huius formulae differentialis $\frac{x^m dx}{1+x^{2n}}$ existente m numero integro minore, quam $2n$.

Solutio.

Si exponens m maior esset quam $2n$ tum per diuisionem formula ad casum praesentem perduceretur; perspicuum autem est denominatorem nullum omnino factorem simplicem realem habere, ex quo factores trinomiales quaeri debebunt reales quorum numerus erit n. Sit huiusmodi factor $= 1 + px + qxx$ realis, qui ſit productum ex his imaginariis $(1 + rx)(1 + sx)$, exiſtente $r + s = p$ et $rs = q$. His ad paragr. 41. reuocatis erit R $= (-\frac{1}{r})^m : -2n(-\frac{1}{r})^{2n} = \frac{-(-r)^{2n-m}}{2n}$ in ſubſidium vocatis quae §. 28. ſunt tradita. Simili modo eſt S $= \frac{-(-s)^{2n-m}}{2n}$; vnde ex factore $1 + px + qxx$ orietur iſta integralis pars

$$\int \frac{-((-r)^{2n-m} + (-s)^{2n-m})\,dx + rs\,((-r)^{2n-m-1} + (-s)^{2n-m-1})\,x\,dx}{2n(1 + px + qxx)}$$

eſt vero $r = \frac{p + \sqrt{(pp-4q)}}{2}$ et $s \frac{p - \sqrt{(pp-4q)}}{2}$

Formetur hinc ſeries, cuius terminus generalis ſit $= (-r)^k + (-s)^k$, eiusque termini ita progredientur

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -p; & +(pp-2q); & -(p^3-3pq); & +(p^4-4p^2q+2qq); \text{ etc.} \end{array}$$

ponatur huius ſeriei terminus, cuius index eſt $2n - m - 1 = M$ et terminus ſequens cuius index eſt $= 2n - m$ ſit $= N$, habebiturque iſtud integrale

$$\int \frac{-N\,dx + Mqx\,dx}{2n(1 + px + qxx)}$$

quod per logarithmos et arcus circulares dat:

$$+ \frac{M}{4n} l(1 + px + qxx) - \frac{2N - Mp}{2n\sqrt{(4q-pp)}} \text{ A tang. } \frac{x\sqrt{(4q-pp)}}{2+px}$$

at ex natura ſerierum recurrentium M et N ita a ſe inuicem pendent, vt ſit $N^2 + MNp + M^2q = -q^{2n-m-1}(pp-4q)$ ſeu $N = -\frac{Mp}{2} + (4q-pp)(q^{2n-m-1} - \frac{M^2}{4})$ Cum ergo ſit $2N + Mp = \sqrt{(4q-pp)(4q^{2n-m-1} - M^2)}$ erit integrale formulae $\int \frac{-N\,dx + Mqx\,dx}{2n(1+px+qxx)} =$

$$+ \frac{M}{4n} l(1 + px + qxx) - \frac{\sqrt{(4q^{2n-m-1} - M^2)}}{2n} \text{ A tang. } \frac{x\sqrt{(4q-pp)}}{2+px}$$

eſtque $M = \pm \left(\frac{p+\sqrt{(pp-4q)}}{2}\right)^{2n-m-1} \pm \left(\frac{p-\sqrt{(pp-4q)}}{2}\right)^{2n-m-1}$

vbi

vbi signa superiora $+$ valent si $2-m-1$ fuerit numerus par, sin sit impar, signa inferiora $-$ sunt capienda. Haec expressio M autem commode per multiplicationem arcuum circularium exprimi potest, si quidem est $4q > pp$, vti ponimus. Nam si arcus cuiuspiam circuli Φ cosinus fuerit $= u$, ita vt sit $\Phi = A \cos. u$ posito sinu toto $= 1$; erit cosinus arcus $k\Phi = \frac{(u+\surd(uu-1))^k + (u-\surd(uu-1))^k}{2}$. Quodsi iam ponamus $u = \frac{p}{2\surd q}$, ita vt sit $\Phi = A \cos. \frac{p}{2\surd q}$, orietur: $M = \mp 2q^{\frac{2n-m-1}{2}} \cos. A. (2n-m-1)\Phi$; vbi signum $+$ habet locum si fuerit $\frac{2n-m-1}{2}$ numerus par, contrarium autem $-$, si $2n-m-1$ sit numerus impar. Hinc fiet $\surd(4q^{2n-m-1} - MM) = \mp 2q^{\frac{2n-m-1}{2}} \sin. A. (2n-m-1)\Phi$; ideoque integrale ex denominatoris factore $1+px+qxx$ oriundum erit $= \pm \frac{q^{\frac{2n-m-1}{2}} \cos. A. (2n-m-1)\Phi}{2n} l(1+px+qxx) \mp \frac{q^{\frac{2n-m-1}{2}} \sin. A. (2n-m-1)\Phi}{n} A \tang. \frac{x\surd(4q-pp)}{2+px}$ existente Φ arcu circuli, cuius cosinus est $= \frac{p}{2\surd q}$, in circulo cuius radius $= 1$. Valent autem signa superiora si $2n-m-1$ fuerit numerus par, inferiora autem si sit numerus impar. Cum igitur singuli factores denominatoris $1+x^{2n}$ huius formae $1+px+qxx$ praebeant partes integralis, quae ex cognitis coefficientibus p et q modo praescripto assignari queant, hos ipsos factores trinomiales denominatoris $1+x^{2n}$ eruere debemus. At ex theoremate quodam Moivreano si habeatur expressio huiusmodi $1+ax+bx^2+cx^3+\ldots\ldots$

 $+m$

$+ mx^n + \ldots\ldots + cx^{2n-3} + bx^{2n-2} + ax^{2n-1} + x^{2n}$ cuius coefficientes finales ordine retrogrado congruunt cum coefficientibus initialibus; ea resoluitur in factores trinomiales $1 + \alpha x + xx$; $1 + \beta x + xx$; $1 + \gamma x + xx$; $1 + \delta x + xx$; etc. quorum numerus est n eruntque coefficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. radices huius aequationis n dimensionum.

$$Z^n - Az^{n-1} + Bz^{n-2} - Cz^{n-3} + Dz^{n-4} - \text{etc.} = 0$$

cuius coefficientes sequentem tenent legem:

$$A = a$$
$$B = b - n$$
$$C = c - (n-1)a$$
$$D = d - (n-2)b + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}$$
$$E = e - (n-3)c + \frac{(n-1)(n-4)}{1 \cdot 2}a$$
$$F = f - (n-4)d + \frac{(n-2)(n-5)}{1 \cdot 2}b - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$
$$G = g - (n-5)e + \frac{(n-3)(n-6)}{1 \cdot 2}c - \frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a$$
$$H = h - (n-6)f + \frac{(n-4)(n-7)}{1 \cdot 2}d - \frac{(n-2)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3}b + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

etc.

His valoribus substitutis habebimus hanc aequationem

$$\left.\begin{array}{l} z^n - nz^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}z^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^{n-6} + \text{etc.}) \\ - a(z^{n-1} - (n-1)z^{n-3} + \frac{(n-1)(n-4)}{1 \cdot 2}z^{n-5} - \frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^{n-7} + \text{etc.}) \\ + b(z^{n-2} - (n-2)z^{n-4} + \frac{(n-2)(n-5)}{1 \cdot 2}z^{n-6} - \frac{(n-2)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^{n-8} + \text{etc.}) \\ - c(z^{n-3} - (n-3)z^{n-5} + \frac{(n-3)(n-6)}{1 \cdot 2}z^{n-7} - \frac{(n-3)(n-7)(n-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3}z^{n-9} + \text{etc.}) \\ \qquad \text{etc.} \end{array}\right\} = 0$$

Ad

Ad expressionem hanc distinctius cognoscendam sit ψ arcus circuli cuius cosinus $= \frac{z}{2}$, erit

$$2 \cos. A. k\psi = z^k - kz^{k-2} + \frac{k(k-3)}{1 \cdot 2} z^{k-4} - \frac{k(k-4)(k-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^{k-6} + \text{etc.}$$

vnde superior aequatio pro incognita z transmutabitur in sequentem:

$$\cos. A. n\psi - a \cos. A (n-1)\psi + b \cos. A (n-2)\psi - c \cos. A (n-3)\psi + \ldots \pm \frac{m}{2} = 0$$

Ex hoc aequatione reperientur n diuersi valores pro ψ, quorum cosinus bis sumti dabunt totidem valores quaesitos pro $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. Ex hac generali reductione theorematis Moivreani pro nostro casu, quo omnes litterae a, b, c, etc. euanescunt; obtinemus hanc simplicem aequationem $\cos. A. n\psi = 0$. Quaeramus ergo omnes arcus, quorum cosinus sunt $= 0$, qui sunt

$$\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}; \text{etc.}$$

denotante $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam ex his valoribus capiantur n, qui erunt totidem valores pro $n\psi$, vnde ipsius ψ valores erunt sequentes arcus in circulo cuius radius $= 1$

$$\frac{\pi}{2n}; \frac{3\pi}{2n}; \frac{5\pi}{2n}; \frac{7\pi}{2n}; \frac{9\pi}{2n}; \frac{11\pi}{2n}; \ldots\ldots \frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

Ex his valores pro coefficientibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. erunt $2 \cos. A. \frac{\pi}{2n}$; $2 \cos. A. \frac{3\pi}{2n}$; $2 \cos. A. \frac{5\pi}{2n}$; $2 \cos. A. \frac{7\pi}{2n}$; ...; $2 \cos. A \frac{(2n-1)\pi}{2n}$. At est $\cos. A. \frac{(2n-1)\pi}{2n} = -\cos. A. \frac{\pi}{2n}$; $\cos. A \frac{(2n-3)\pi}{2n} = -\cos. A. \frac{3\pi}{2n}$ vnde si n fuerit numerus par, valores pro $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. erunt.

$$\pm 2 \cos. A. \frac{\pi}{2n}; \pm 2 \cos. A. \frac{3\pi}{2n}; \pm 2 \cos. A. \frac{5\pi}{2n}; \ldots \pm 2 \cos. A. \frac{(n-1)\pi}{2n}$$

sin autem n sit numerus impar, tum valores litte-

litterarum α, β, γ, δ, etc. erunt sequentes

$\pm 2 \cos. A. \frac{\pi}{2n}$; $\pm 2 \cos. A. \frac{3\pi}{2n}$; $\pm 2 \cos. A. \frac{5\pi}{2n}$; .... $\pm 2 \cos.$ $A. \frac{(n-2)\pi}{2n} + 2 \cos. A. \frac{\pi}{2}$.

Ex quo patet casus, quibus n vel est numerus par vel impar, probe a se inuicem esse distinguendos in nostro instituto.

Denominatoris ergo nostri $1 + x^{2n}$ factores trinomiales omnes continentur in hac forma generali

$$1 \pm 2 x \cos. A. \frac{k\pi}{2n} + xx$$

denotante k omnes numeros impares minores quam $2n$. Comparetur forma assumta $1 + px + qxx$ cum hac inventa, erit $q = 1$, et $p = + 2 \cos. A. \frac{k\pi}{2n}$: hincque $\frac{p}{2\sqrt{q}} = \cos. A. \frac{k\pi}{2n}$. Cum iam Φ sit arcus circuli cuius cosinus est $\frac{p}{2\sqrt{q}}$, erit $\Phi = \frac{k\pi}{2n}$. Ex isto igitur factore generali reperietur pars integralis inde oriunda haec:

$$\pm \frac{1}{2n} \cos. A. \frac{(2n-m-1)k\pi}{2n} l (1 + 2 x \cos. A. \frac{k\pi}{2n} + xx) \mp \frac{1}{n} \sin. A. \frac{(2n-m-1)k\pi}{2n} A \tang. \frac{x \sin. A. \frac{k\pi}{2n}}{1 + x \cos. A. \frac{k\pi}{2n}}$$

vbi signorum ambiguorum ante coefficientes superiora valent, si $2n - m - 1$ sit numerus par, inferiora si impar. In casu quo $k = n$, quo occurrit si n est numerus impar, tum fit $\cos. A. \frac{k\pi}{2n} = 0$, et denominatoris diuisor erit $1 + xx$ ex quo nascitur integrale

$$\pm \frac{1}{2n} \cos. A. \frac{(2n-m-1)\pi}{2} l (1 + xx) \mp \frac{1}{n} \sin. A. \frac{(2n-m-1)\pi}{2} A \tang. x$$

Quod si iam loco k successiue substituantur omnes numeri impares minores quam $2n$, et omnes expressiones in vnam

vnam summam colligantur, habebitur integrale quaesitum formulae differentialis propositae

$$\frac{x^m dx}{1+x^{2n}}$$

si quidem m fuerit numerus minor quam $2n$.

Q. E. I.

Exemplum. 1.

§. 45. Formulae differentialis $\frac{dx}{1+xx}$ integrale inuenire: Hic fit $m=0$; $n=1$; $2n-m-1=1$ numero impari, valent ergo signa inferiora, habebiturque

$$-\tfrac{1}{2}\operatorname{cos}. A. \tfrac{k\pi}{2}\, l\left(1+2x \operatorname{cos}. A. \tfrac{k\pi}{2}+xx\right)+\operatorname{sin}. A. \tfrac{k\pi}{2}\; A\,tang. \frac{x \operatorname{sin}. A. \frac{k\pi}{2}}{1+x\operatorname{cos}. A. \frac{k\pi}{2}}$$

Ob $2n=2$, habebit k vnicum valorem nempe $k=1$ ex quo propter $\operatorname{cos}. A. \frac{\pi}{2}=0$, et $\operatorname{sin}. A. \frac{\pi}{2}=1$, reperietur integrale quaesitum $= A\,tang.\, x$.

Exemplum. 2.

§. 46. Formulae differentialis $\frac{dx}{1+x^4}$ integrale inuenire: Hic fit $m=0$; $n=2$; $2n-m-1=3$ numero impari, ita vt signa inferiora valeant: habetur ergo

$$-\tfrac{1}{4}\operatorname{cos}. A. \tfrac{3k\pi}{4}\, l(1+2x\operatorname{cos}. A. \tfrac{k\pi}{4}+xx)+\tfrac{1}{2}\operatorname{sin}. A. \tfrac{3k\pi}{4}\; A\,tang. \frac{x\operatorname{sin}. A. \frac{k\pi}{4}}{1+x\operatorname{cos}. A. \frac{k\pi}{4}}$$

ob $2n=4$ tribuendi sunt ipsi k duo valores 1 et 3 successiue, ex quo integrale quaesitum erit:

$$+\tfrac{1}{8}\,\text{cof. A}.\tfrac{3\pi}{8}\,l\,\frac{1+2x\,\text{cof. A}.\tfrac{3\pi}{8}+xx}{1-2x\,\text{cof. A}.\tfrac{3\pi}{8}+xx}+\tfrac{1}{4}\,\text{fin. A}.\tfrac{3\pi}{8}\;\text{A tang}.\frac{2x\,\text{fin. A}.\tfrac{3\pi}{8}}{1-xx}$$

Exemplum 5.

§. 49. Formulae differentialis $\frac{dx}{1+x^{2n}}$ integrale invenire.

Si $2n$ fuerit numerus pariter par, feu n numerus par, tum integrale erit

$$+\tfrac{1}{2n}\,\text{cof. A}.\tfrac{\pi}{2n}\,l\,\frac{1+2x\,\text{cof. A}.\tfrac{\pi}{2n}+xx}{1-2x\,\text{cof. A}.\tfrac{\pi}{2n}+xx}+\tfrac{1}{n}\,\text{fin. A}.\tfrac{\pi}{2n}\;\text{A tang}.\frac{2x\,\text{fin. A}.\tfrac{\pi}{2n}}{1-xx}$$

$$+\tfrac{1}{2n}\,\text{cof. A}.\tfrac{3\pi}{2n}\,l\,\frac{1+2x\,\text{cof. A}.\tfrac{3\pi}{2n}+xx}{1-2x\,\text{cof. A}.\tfrac{3\pi}{2n}+xx}+\tfrac{1}{n}\,\text{fin. A}.\tfrac{3\pi}{2n}\;\text{A tang}\frac{2x\,\text{fin. A}.\tfrac{3\pi}{2n}}{1-xx}$$

$$+\tfrac{1}{2n}\,\text{cof. A}.\tfrac{5\pi}{2n}\,l\,\frac{1+2x\,\text{cof. A}.\tfrac{5\pi}{2n}+xx}{1-2x\,\text{cof. A}.\tfrac{5\pi}{2n}+xx}+\tfrac{1}{n}\,\text{fin. A}.\tfrac{5\pi}{2n}\;\text{A tang}\frac{2x\,\text{fin. A}.\tfrac{5\pi}{2n}}{1-xx}$$

$$\vdots$$

$$+\tfrac{1}{2n}\,\text{cof. A}.\tfrac{(n-1)\pi}{2n}\,l\,\frac{1+2x\,\text{cof. A}.\tfrac{(n-1)\pi}{2n}+xx}{1-2x\,\text{cof. A}.\tfrac{(n-1)\pi}{2n}+xx}+\tfrac{1}{n}\,\text{fin. A}.\tfrac{(n-1)\pi}{2n}\;\text{A tang}.\frac{2x\,\text{fin. A}.\tfrac{(n-1)\pi}{2n}}{1-xx}$$

Sin autem $2n$ fuerit numerus impariter par, feu n numerus impar, tum erit integrale

+

$$+\frac{1}{2n}\cos. A.\frac{\pi}{2n}\, l\,\frac{1+2x\cos. A.\frac{\pi}{2n}+xx}{1-2x\cos. A.\frac{\pi}{2n}+xx}+\frac{1}{n}\sin. A.\frac{\pi}{2n}.\,A\,\mathrm{tang.}\,\frac{2x\sin. A.\frac{\pi}{2n}}{1-xx}$$

$$+\frac{1}{2n}\cos. A.\frac{3\pi}{2n}\, l\,\frac{1+2x\cos. A.\frac{3\pi}{2n}+xx}{1-x2\cos. A.\frac{3\pi}{2n}+xx}+\frac{1}{n}\sin. A.\frac{3\pi}{2n}.\,A\,\mathrm{tang.}\,\frac{2x\sin. A.\frac{3\pi}{2n}}{1-xx}$$

$$+\frac{1}{2n}\cos. A.\frac{5\pi}{2n}\, l\,\frac{1+2x\cos. A.\frac{5\pi}{2n}+xx}{1-2x\cos. A.\frac{5\pi}{2n}+xx}+\frac{1}{n}\sin. A.\frac{5\pi}{2n}.\,A\,\mathrm{tang.}\,\frac{2x\sin. A.\frac{5\pi}{2n}}{1-xx}$$

$$\vdots$$

$$+\frac{1}{2n}\cos. A\frac{(n-2)\pi}{2n}\, l\,\frac{1+2x\cos. A\frac{(n-2)\pi}{2n}+xx}{1-2x\cos. A\frac{(n-2)\pi}{2n}+xx}+\frac{1}{n}\sin. A.\frac{(n-2)\pi}{2n}$$

$$A\,\mathrm{tang.}\,\frac{2x\sin. A\frac{(n-2)\pi}{2n}}{1-xx}+\frac{1}{n}A\,\mathrm{tang.}\,x$$

$$\vdots$$

Exemplum 6.

§. 50. Formulae differentialis $\frac{x^m dx}{1+x^{2n}}$ integrale invenire existente m numero pari.

Quoniam m est numerus par erit $2n-m-1$ numerus impar, ideoque signa inferiora valent; Porro autem erit $\cos. A\frac{(2n-m-1)k\pi}{2n}=-\cos. A\frac{(m+1)k\pi}{2n}$ ob k numerum imparem et $\sin. A\frac{(2n-m-1)k\pi}{2n}=\sin. A\frac{(m+1)k\pi}{2n}$; tum etiam ha-

$$-\frac{1}{2n}\cos. A.\frac{(m+1)k\pi}{2n}\, l\left(1+2x\cos. A.\frac{k\pi}{2n}+xx\right)-\frac{1}{n}\sin. A.\frac{(m+1)k\pi}{2n}\, A.\, tang.\, \frac{x\sin. A.\frac{k\pi}{2n}}{1+x\cos. A.\frac{k\pi}{2n}}$$

vbi loco k omnes numeri impares vsque ad $2n-1$ substitui debent. Si pro k ponamus $2n-k$, habebitur haec forma

$$-\frac{1}{2n}\cos. A.\frac{(m+1)k\pi}{2n}\, l\left(1-2x\cos. A.\frac{k\pi}{2n}+xx\right)+\frac{1}{n}\sin. A.\frac{(m+1)k\pi}{2n}.\, A.\, tang.\, \frac{x\sin. A.\frac{k\pi}{2n}}{1-x\cos. A.\frac{k\pi}{2n}}$$

quae duae formae coniunctim sumtae dabunt:

$$-\frac{1}{2n}\cos. A.\frac{(m+1)k\pi}{2n}\, l\left(1-2xx\cos. A.\frac{k\pi}{n}+x^4\right)+\frac{1}{n}\sin. A.\frac{(m+1)k\pi}{2n}\, A\, tang.\, \frac{xx\sin. A.\frac{k\pi}{n}}{1-xx\cos. A.\frac{k\pi}{n}}$$

Hoc modo bini valores ipsius k coniunguntur, vnde si n sit numerus par integrale reperitur si loco k successiui omnes numeri impares vsque ad $n-1$ substituantur, erit ergo integrale:

$$-\frac{1}{2n}\cos. A\frac{(m+1)\pi}{2n}\, l\left(1-2xx\cos. A\frac{\pi}{n}+x^4\right)+\frac{1}{n}\sin. A.\frac{(m+1)\pi}{2n}\, A.\, tang.\, \frac{xx\sin. A.\frac{\pi}{n}}{1-xx\cos. A.\frac{\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{2n}\cos. A.\frac{3(m+1)\pi}{2n}\, l\left(1-2xx\cos. A.\frac{3\pi}{n}+x^4\right)+\frac{1}{n}\sin. A.\frac{3(m+1)\pi}{2n}\, A\, tang.\, \frac{xx\sin. A.\frac{3\pi}{n}}{1-xx\cos. A.\frac{3\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{2n}\cos. A.\frac{5(m+1)\pi}{2n}\, l\left(1-2xx\cos. A.\frac{5\pi}{n}+x^4\right)+\frac{1}{n}\sin. A.\frac{5(m+1)\pi}{2n}\, A\, tang.\, \frac{xx\sin. A.\frac{5\pi}{n}}{1-xx\cos. A.\frac{5\pi}{n}}$$

— ;

$$\vdots$$

$$-\frac{2}{2n}\,\text{cos. A.}\,\frac{(n-1)(m+1)\pi}{2n}\,l\left(1-2xx\,\text{cos. A}\,\frac{(n-1)\pi}{n}+x^4\right)+\frac{2}{n}\,\text{sin. A.}\,\frac{(n-1)(m+1)\pi}{2n}\,\text{A tang.}\,\frac{xx\,\text{sin. A.}\,\frac{(n-1)\pi}{n}}{1-xx\,\text{cos. A}\,\frac{(n-1)\pi}{n}}$$

Quodsi autem n sit numerus impar, tum loco k substitui debent omnes numeri impares vsque ad $n-2$, et numerus impar medius n erit solitarius, vnde sequens prodibit integrale.

$$-\frac{2}{2n}\,\text{cos. A.}\,\frac{(m+1)\pi}{2n}\,l\left(1-2xx\,\text{cos. A.}\,\frac{\pi}{n}+x^4\right)+\frac{2}{n}\,\text{sin. A.}\,\frac{(m+1)\pi}{2n}\,\text{A tang.}\,\frac{xx\,\text{sin. A.}\,\frac{\pi}{n}}{1-xx\,\text{cos. A.}\,\frac{\pi}{n}}$$

$$-\frac{2}{2n}\,\text{cos. A.}\,\frac{3(m+1)\pi}{2n}\,l\left(1-2xx\,\text{cos. A.}\,\frac{3\pi}{n}+x^4\right)+\frac{2}{n}\,\text{sin. A.}\,\frac{3(m+1)\pi}{2n}\,\text{A tang.}\,\frac{xx\,\text{sin. A}\,\frac{3\pi}{n}}{1-xx\,\text{cos. A.}\,\frac{3\pi}{n}}$$

$$-\frac{2}{2n}\,\text{cos. A.}\,\frac{5(m+1)\pi}{2n}\,l\left(1-2xx\,\text{cos. A.}\,\frac{5\pi}{n}+x^4\right)+\frac{2}{n}\,\text{sin. A.}\,\frac{5(m+1)\pi}{2n}\,\text{A tang.}\,\frac{xx\,\text{sin. A.}\,\frac{5\pi}{n}}{1-xx\,\text{cos. A.}\,\frac{5\pi}{n}}$$

$$\vdots$$

$$-\frac{2}{2n}\,\text{cos. A}\,\frac{(n-2)(m+1)\pi}{2n}\,l\left(1-2xx\,\text{cos. A}\,\frac{(n-2)\pi}{n}+x^4\right)+\frac{2}{n}\,\text{sin. A}\,\frac{(n-2)(m+1)\pi}{2n}\,\text{A tang.}\,\frac{xx\,\text{sin A.}\,\frac{(n-2)\pi}{n}}{1-xx\,\text{cos. A.}\,\frac{(n-2)\pi}{n}}$$

$$-\frac{1}{2n}\,\text{cos. A}\,\frac{(m+1)\pi}{2}\,l(1+xx)$$

 vbi

vbi cof. $A\frac{(m+1)\pi}{2}$ erit vel $+1$ vel -1, prout $m+1$ fuerit vel numerus pariter par vel impariter par.

Problema 2.

§. 52. Inuenire integrale huius formulae differentialis $\frac{x^m dx}{1+x^{2n+1}}$, exiftente m numero integro minore quam $2n+1$.

Solutio.

Huius formulae denominator $1+x^{2n+1}$ vnum habet factorem realem $1+x$, reliqui factores fimplices omnes funt imaginarii; eorumque adeo loco factores trinomiales accipi debent. Quod ad factorem fimplicem $1+x$ attinet, intelligitur fi pro eo ponatur $1+rx$, inde hanc integralis partem effe orituram $\frac{-(-r)^{2n-m+1}}{(2n+1)}\int\frac{dx}{1+rx}$. Sit ergo $r=1$, atque ex denominatoris factore $1+x$ nafcetur integralis pars $\frac{1-(-1)^{2n-m+1}}{2(2n+1)}l(1+x)=\frac{(-1)^{2n-m}}{(2n+1)}l(1+x)$ quae adeo erit $\pm\frac{1}{2n+1}l(1+x)$ vbi fignum $+$ valet, fi $2n-m$ fuerit numerus par, feu fi m fit numerus par, alterum vero fignum $-$ valet, fi m fit numerus impar.

Quod iam ad factores trinomiales attinet, fit eorum quilibet $1+px+qxx$; atque ex folutione praecedentis problematis ponendo $2n+1$ loco $2n$ colligitur integralis pars ex hoc factore oriunda $=$

$$\pm q^{\frac{2n-m}{2}}\frac{cof. A(2n-m)\Phi}{2n+1}l(1+px+qxx)\mp 2q^{\frac{2n-m}{2}}\frac{fin. A(2n-m)\Phi}{2n+1}$$
$$A\,tang.\frac{x\surd(4q-pp)}{2+px}$$

de-

denotante ϕ arcum circuli, cuius cosinus $= \frac{p}{2\sqrt{q}}$; valent autem signorum ambiguorum superiora, si $2n-m$ fuerit numerus par, hoc est si m fuerit numerus par, sin autem m sit numerus impar, valebunt signa inferiora.

Iam ad factores trinomiales inueniendos diuidatur denominator $1 + x^{2n+1}$ per factorem simplicem $1 + x$, prodibitque quotus:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots - x^{2n-3} + x^{2n-2} - x^{2n-1} + x^{2n}$$

cuius factores trinomiales quaeri oportet, id quod fiet ope theorematis in solutione praecedente adhibiti. Erunt scilicet factores trinomiales huiusmodi $1 + \alpha x + xx$; $1 + \beta x + xx$; $1 + \gamma x + xx$ etc. quorum numerus erit n, et cum sit $a = -1$, $b = +1$, $c = -1$, etc. formanda est aequatio

$$\text{cos. A}\, n\psi + \text{cos. A}\,(n-1)\psi + \text{cos. A}\,(n-2)\,\psi + \ldots\ldots + \text{cos. A}\,\psi + \tfrac{1}{2} = 0$$

ex qua aequatione n valores pro arcu ψ orientur, quorum cosinus bis sumti in loca litterarum α, β, γ, etc. substitui debent. Aequatio autem haec resolui poterit ex isto principio, quod cosinus arcuum in arithmetica progressione crescentium tenent seriem recurrentem: est nempe cos. A. $n\psi = z$ cos. A $(n-1)\,\psi$ − cos. A $(n-2)\,\psi$ existente cos. A $\psi = \frac{z}{2}$. Cum iam sit

$$+\text{cos.A.}\,n\psi + \text{cos.A.}\,(n-1)\psi + \ldots + \text{cos.A.}\,2\psi + \text{cos.A.}\,\psi + 1 = \tfrac{1}{2}$$

erit
$$+ z\,\text{cos.A}\,n\psi + z\,\text{cos.A}\,(n-1)\psi + z\,\text{cos.A}\,(n-2)\psi + \ldots\ldots + z\,\text{cos.A}\,\psi + z = \tfrac{z}{2}$$
$$- \text{cos.A}\,n\psi - \text{cos.A}\,(n-1)\,\psi - \text{cos.A}\,(n-2)\psi - \text{cos.A}\,(n-3)\,\psi - \ldots\ldots - 1 = -\tfrac{1}{2}$$

subtrahantur inferiores aequationes à superiore, orietur

$$(1-z)\,\text{cos.A}\,n\psi + \text{cos.A}\,(n-1)\,\psi + \text{cos.A.}\,\psi + 1 - z = 1 - \tfrac{z}{2}$$

quae

quae ob cos. A $\psi = \frac{z}{2}$ transmutatur in hanc

$(1-z)$ cos. A. $n\psi$ + cos. A $(n-1)\psi = 0$ seu

cos. A. $n\psi - 2$ cos. A. ψ. cos. A $n\psi$ + cos. A $(n-1)\psi = 0$

at est cos. A $(n-1)\psi$ = cos. A. ψ. cos. A. $n\psi$ + sin. A ψ sin. A. $n\psi$ erit ergo

$(1-$ cos. A. $\psi)$ cos. A. $n\psi$ + sin. A. ψ. sin. A $n\psi = 0$; vnde concluditur fore

tang. A. $\frac{\psi}{2}$ + tang. A. $n\psi = 0$.

At ex natura tangentium constat esse:

tang. A. $\frac{\psi}{2}$ + tang. A $(k\pi - \frac{\psi}{2}) = 0$

denotante k numerum quemcunque integrum; ex quo erit $n\psi = k\pi - \frac{\psi}{2}$, hincque $\psi = \frac{2k\pi}{2n+1}$. Substituendo ergo pro k successiue numeros $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots n$, oriuntur n valores pro arcu ψ, quorum cosinus bis sumti dabunt coefficientes α, β, γ, δ, etc. in factoribus $1 + \alpha x + xx$; $1 + \beta x + xx$; $1 + \gamma x + xx$; etc. Quilibet ergo factor continetur in hac forma $1 + 2x$ cos. A. $\frac{2k\pi}{2n+1} + xx$. Quare cum pro factore generali assumserimus hanc formam $1 + px + qxx$ erit $q = 1$ et $p = 2$ cos. A $\frac{2k\pi}{2n+1}$ atque $\frac{p}{2\sqrt{q}}$ = cos. A. $\frac{2k\pi}{2n+1}$; quia nunc Φ est arcus, cuius cosinus $= \frac{p}{2\sqrt{q}}$ erit $\Phi = \frac{2k\pi}{2n+1}$; et hanc obrem ex factore $1 + 2x$ cos. A. $\frac{2k\pi}{2n+1} + xx$ orietur integralis pars

$$\pm \frac{1}{2n+1} \text{ cos. A } \frac{2k(2n-m)\pi}{2n+1} \, l\left(1 + 2x \text{ cos. A. } \frac{2k\pi}{2n+1} + xx\right)$$

$$\mp \frac{2}{2n+1} \text{ sin. A. } \frac{2k(2n-m)\pi}{2n+1} \text{ A tang. } \frac{x \text{ sin. A. } \frac{2k\pi}{2n+1}}{1 + x \text{ cos. A. } \frac{2k\pi}{2n+1}}$$

vbi

vbi signa superiora valent si m fuerit numerus par, inferiora autem si m numerus impar. At est

$\operatorname{cos}. A . \frac{2k(2n-m)\pi}{2n+1} = \operatorname{cos}. A . \frac{2k(m+1)\pi}{2n+1}$ atque

$\operatorname{sin}. A . \frac{2k(2n-m)\pi}{2n+1} = - \operatorname{sin}. A . \frac{2k(m+1)\pi}{2n+1}$, vnde cuiusque partis integralis ex factore denominatoris trinomiali oriunda est

$$\pm \frac{2}{2n+1} \operatorname{cos}. A . \frac{2k(m+1)\pi}{2n+1} l\left(1 + 2x \operatorname{cos}. A . \frac{2k\pi}{2n+1} + xx\right) \pm \frac{2}{2n+1} \operatorname{sin}. A . \frac{2k(m+1)}{2n+1} A \operatorname{tang}. \frac{x \operatorname{sin}. A . \frac{2k\pi}{2n+1}}{1 + x \operatorname{cos}. A . \frac{2k\pi}{2n+1}}$$

successiue scilicet loco k scribantur omnes numeri integri $1, 2, 3, \ldots \ldots n$; addanturque formae resultantes, atque ad summam addantur insuper integrale ex factore simplici $1 + x$ oriundum $\pm \frac{1}{2n+1} l(1 + x)$, quo facto habebitur formulae differentialis propositae $\frac{x^m dx}{1 + x^{2n+1}}$ integrale quaesitum hoc:

$$\pm \frac{1}{2n+1} l(1 + x)$$

$$\pm \frac{2}{2n+1} \operatorname{cos}. A . \frac{2(m+1)\pi}{2n+1} l\left(1 + 2x \operatorname{cos}. A . \frac{2\pi}{2n+1} + xx\right) \pm \frac{2}{2n+1} \operatorname{sin}. A . \frac{2(m+1)\pi}{2n+1} A \operatorname{tang}. \frac{x \operatorname{sin}. A . \frac{2\pi}{2n+1}}{1 + x \operatorname{cos}. A . \frac{2\pi}{2n+1}}$$

$$\pm \frac{2}{2n+1} \operatorname{cos}. A . \frac{4(m+1)\pi}{2n+1} l\left(1 + 2x \operatorname{cos}. A . \frac{4\pi}{2n+1} + xx\right) \pm \frac{2}{2n+1} \operatorname{sin}. A . \frac{4(m+1)\pi}{2n+1} A \operatorname{tang}. \frac{x \operatorname{sin}. A . \frac{4\pi}{2n+1}}{1 + x \operatorname{cos}. A . \frac{4\pi}{2n+1}}$$

$$\pm \frac{1}{2n+1} \text{cos. A.} \frac{6(m+1)\pi}{2n+1}\, l\left(1+2x \text{ cos. A.} \frac{6\pi}{2n+1} + xx\right) \pm \frac{2}{2n+1}$$
$$\text{sin. A.} \frac{6(m+1)\pi}{2n+1} \text{ A tang.} \frac{x \text{ sin. A.} \frac{6\pi}{2n+1}}{1 + x \text{ cos. A.} \frac{6\pi}{2n+1}}$$

$$\vdots$$

$$\pm \frac{1}{2n+1} \text{cos. A.} \frac{2n(m+1)\pi}{2n+1}\, l\left(1+2x \text{ cos. A.} \frac{2n\pi}{2n+1} + xx\right) \pm \frac{2}{2n+1}$$
$$\text{sin. A.} \frac{2n(m+1)\pi}{2n+1} \text{ A tang.} \frac{x \text{ sin. A.} \frac{2n\pi}{2n+1}}{1 + x \text{ cos. A.} \frac{2n\pi}{2n+1}}$$

vbi signorum ambiguorum superiora valent, si m fuerit numerus par, inferiora autem sunt capienda, si m sit numerus impar. Q. E. I.

Exemplum 1.

§. 53. Huius formulae differentialis $\frac{dx}{1+x^3}$ integrale invenire.

Hic est $m = 0$, et $n = 1$, atque $2n+1 = 3$. Deinde habemus

$$\text{cos. A.} \frac{2(m+1)\pi}{2n+1} = \text{cos. A.} \frac{2\pi}{3} = \text{cos. A. } 120^\circ = -\frac{1}{2}$$
$$\text{sin. A.} \frac{2(m+1)\pi}{2n+1} = \text{sin. A.} \frac{2\pi}{3} = \text{sin. A. } 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quoniam igitur ob m numerum parem signa superiora valent, erit formulae propositae integrale

$$+ \tfrac{1}{3}\, l(1+x)$$
$$- \tfrac{1}{6}\, l(1-x+xx) + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ A tang.} \frac{x\sqrt{3}}{2-x}$$

vbi constantem non adiicimus, quia hoc integrale iam euanescit posito $x = 0$.

Exem-

Exemplum. 2.

§. 54. Huius formulae differentialis $\frac{xdx}{1+x^3}$ integrale invenire.

Hic est $m=1$ et $n=1$, ex quo signa inferiora valebunt. Erit autem pro hoc casu:

$$\operatorname{cos}. A. \frac{2(m+1)\pi}{2n+1} = \operatorname{cos}. A. \frac{4\pi}{3} = -\operatorname{cos}. A. \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cos}. A. \frac{2\pi}{2n+1} = \operatorname{cos}. A. \frac{2\pi}{3} = -\operatorname{cos}. A. \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sin}. A. \frac{2(m+1)\pi}{2n+1} = \operatorname{sin}. A. \frac{4\pi}{3} = -\operatorname{sin}. A. \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sin}. A. \frac{2\pi}{2n+1} = \operatorname{sin}. A. \frac{2\pi}{3} = \operatorname{sin}. A. \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

vnde integrale quaesitum erit hoc

$$-\frac{1}{3} l(1+x)$$
$$+\frac{1}{3} l(1-x+xx) + \frac{1}{\sqrt{3}} A \operatorname{tang}. \frac{x\sqrt{3}}{2-x}.$$

Corollarium.

§. 55. Huius ergo formulae differentialis $\frac{(1-x)dx}{1+x^3}$ integrale erit $\frac{2}{3} l(1+x) - \frac{1}{3} l(1-x+xx) = \frac{1}{3} l \frac{1+2x+xx}{1-x+xx}$

Exemplum. 3.

§. 56. Huius formulae differentialis $\frac{dx}{1+x^6}$ integrale invenire.

Hic est $m=0$, ideoque signa superiora valent, et $n=2$, vnde integrale quaesitum erit:

$$+\frac{1}{3} l(1+x)$$
$$+\frac{2}{3} \operatorname{cos}. A. \frac{2\pi}{5} l(1+2x \operatorname{cos}. A. \frac{2\pi}{5} + xx) + \frac{2}{3} \operatorname{sin}. A. \frac{2\pi}{6}$$
$$A \operatorname{tang}. \frac{x \operatorname{sin}. A. \frac{2\pi}{5}}{1+x \operatorname{cos}. A. \frac{2\pi}{5}}$$
$$-\frac{1}{5}$$

$$-\tfrac{2}{5}\,\text{cos}.\,A.\tfrac{\pi}{5}\,l(1-2x\ \text{cos}.\,A.\tfrac{\pi}{5}+xx)+\tfrac{2}{5}\,\text{sin}.\ A.\tfrac{\pi}{5}$$

$$A\ \text{tang}.\frac{x\,\text{sin}.\,A.\frac{\pi}{5}}{1-x\,\text{cos}.\,A.\frac{\pi}{5}}$$

At est $\text{cos}.\,A.\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$; $\text{sin}.\,A.\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4}$; atque $\text{cos}.\,A.\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\text{sin}.\,A.\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}$

Exemplum. 4.

§. 57. Huius formulae differentialis $\frac{xdx}{1+x^5}$ integrale invenire

Hic est $m=1$, ideoque signa inferiora valent, et $n=2$: ex quo integrale quaesitum erit.

$$-\tfrac{1}{5}\,l(1+x)$$

$$+\tfrac{2}{5}\,\text{cos}.\,A.\tfrac{\pi}{5}\,l(1+2x\,\text{cos}.\,A.\tfrac{2\pi}{5}+xx)\,\tfrac{2}{5}\,\text{sin}.\,A.\tfrac{\pi}{5}.$$

$$A\ \text{tang}.\frac{x\,\text{sin}.\,A.\frac{2\pi}{5}}{1+x\,\text{cos}.\,A\frac{2\pi}{5}}$$

$$-\tfrac{2}{5}\,\text{cos}.\,A.\tfrac{2\pi}{5}\,l(1-2x\,\text{cos}.\,A.\tfrac{\pi}{5}+xx)+\tfrac{2}{5}\,\text{sin}.\,A.\tfrac{2\pi}{5}$$

$$A\ \text{tang}\frac{x\,\text{sin}.\,A.\frac{\pi}{5}}{1-x\,\text{cos}.\,A.\frac{\pi}{5}}$$

Exemplum. 5.

§. 58. Huius formulae differentialis $\frac{xxdx}{1+x^5}$ integrale invenire.

Hic est $n=2$ et $m=2$, vnde signa superiora valent: ex quo integrale quaesitum erit

$$+\tfrac{1}{5}\,l(1+x)$$

$$-\tfrac{2}{5}\,\text{cos}.\,A.\tfrac{\pi}{5}\,l(1+2x\,\text{cos}.\,A.\tfrac{2\pi}{5}+xx)-\tfrac{2}{5}\,\text{sin}.\,A.\tfrac{\pi}{5}.$$

$$A\ \text{tang}.\frac{x\,\text{sin}.\,A.\frac{2\pi}{5}}{1+x\,\text{cos}.\,A\frac{2\pi}{5}}$$

+

$$+\tfrac{2}{5}\cos. A. \tfrac{2\pi}{5}\, l\, 1 - 2x \cos. A. \tfrac{\pi}{5} + xx) + \tfrac{2}{5}\sin. A. \tfrac{2\pi}{5}.$$

$$\text{A tang. } \frac{x \sin. A. \frac{\pi}{5}}{1 - x \cos. A. \frac{\pi}{5}}$$

Exemplum. 6.

§. 59. Huius formulae differentialis $\frac{x^3 dx}{1+x^5}$ integrale inuenire.

Hic est $n = 2$ et $m = 3$, vnde signa inferiora valent, ex quo integrale quaesitum erit:

$$-\tfrac{1}{5}\, l(1 + x)$$

$$-\tfrac{2}{5}\cos. A. \tfrac{2\pi}{5}\, l(1 + 2x \cos. A \tfrac{2\pi}{5} + xx) + \tfrac{2}{5}\sin. A. \tfrac{2\pi}{5}$$

$$\text{A tang. } \frac{x \sin. A. \frac{2\pi}{5}}{1 + x \cos. A. \frac{2\pi}{5}}$$

$$+\tfrac{2}{5}\cos. A. \tfrac{\pi}{5}\, l(1 - 2x \cos. A. \tfrac{\pi}{5} + xx) + \tfrac{2}{5}\sin. A. \tfrac{\pi}{5}$$

$$\text{A tang, } \frac{x \sin. A. \frac{\pi}{5}}{1 - x \cos. A. \frac{\pi}{5}}.$$

Problema. 3.

§. 60. Inuenire integrale huius formulae differentialis $\frac{x^m dx}{1-x^{2n+1}}$ existente m numero integro minore, quam $2n+1$.

Solutio.

Quia denominator $1 - x^{2n+1}$ hic habet vnum factorem simplicem realem $1 - x$, per quem, diuisione peracta, resultat quotus $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{2n}$ huius factores trinomiales perinde ac in praecedente problemate poterunt inueniri, ex iisque integrale quaesitum determinari. At si rem probe perpendamus, solutio praecedentis pro-

 blema-

blematis simul nobis suppeditabit solutionem praesentis; nam si hic ponamus $x = -y$, habebimus hanc formulam $\frac{-(-y)^m dy}{1+y^{2n+1}}$ seu $\frac{\mp y^m dy}{1+y^{2n+1}}$; vbi signum superius valet, si m fuerit numerus par, inferius vero, si m numerus impar. Huius autem formulae integrale iam inuenimus in solutione praecedentis problematis, vbi simul hoc commode accedit, vt signa illa ambigua tollantur, et vbique idem signum $-$ locum habeat: tum vero in illa solutione loco x poni oportet $-x$; hincque formulae nostrae propositae integrale erit:

$$-\frac{1}{2n+1}\, l(1-x)$$

$$-\frac{2}{2n+1}\operatorname{cos.A}\frac{2(m+1)\pi}{2n+1}\, l\left(1-2x\operatorname{cos.A}.\frac{2\pi}{2n+1}+xx\right)+\frac{2}{2n+1}$$

$$\operatorname{fin.A}.\frac{2(m+1)\pi}{2n+1}\ \operatorname{A\,tang.}\frac{x\operatorname{fin.A}.\frac{2\pi}{2n+1}}{1-x\operatorname{cof.A}.\frac{2\pi}{2n+1}}$$

$$-\frac{2}{2n+1}\operatorname{cof.A}.\frac{4(m+1)\pi}{2n+1}\, l\left(1-2x\operatorname{cof.A}.\frac{4\pi}{2n+1}+xx\right)+\frac{2}{2n+1}$$

$$\operatorname{fin.A}.\frac{4(m+1)\pi}{2n+1}\ \operatorname{A\,tang.}\frac{x\operatorname{fin.A}.\frac{\pi}{2n+1}}{1-x\operatorname{cof.A}.\frac{4\pi}{2n+1}}$$

$$-\frac{2}{2n+1}\operatorname{cof.A}.\frac{6(m+1)\pi}{2n+1}\, l\left(1-2x\operatorname{cof.A}.\frac{6\pi}{2n+1}+xx\right)+\frac{2}{2n+1}$$

$$\operatorname{fin.A}.\frac{6(m+1)\pi}{2n+1}\ \operatorname{A\,tang.}\frac{x\operatorname{fin.A}.\frac{6\pi}{2n+1}}{1-x\operatorname{cof.A}.\frac{6\pi}{2n+1}}$$

$$\vdots$$

$$-\frac{2}{2n+1}\operatorname{cof.A}.\frac{2n(m+1)\pi}{2n+1}\, l\left(1-2x\operatorname{cof.A}.\frac{2n\pi}{2n+1}+xx\right)+\frac{2}{2n+1}$$

$$\operatorname{fin.A}.\frac{2n(m+1)\pi}{2n+1}\ \operatorname{A\,tang.}\frac{x\operatorname{fin.A}\frac{2n\pi}{2n+1}}{1-x\operatorname{cof.A}.\frac{2n\pi}{2n+1}}$$

Q. E. I.

Proble-

Problema. 4.

§. 61. Inuenire integrale huius formulae differentialis $\frac{x^m dx}{1-x^{2n+2}}$, existente m numero integro minore, quam $2n+2$.

Solutio.

Denominator $1-x^{2n+2}$ duos habet factores reales, nempe $1+x$ et $1-x$, reliqui factores simplices omnes sunt imaginarii. Sit ergo $1+rx$ factor simplex. Ex eo si consulatur §. 41. orietur $R = \frac{(-r)^{2n-m+2}}{2n+2}$, atque integralis pars ex factore $1+rx$ oriunda erit $= \frac{1}{2n+2}\int\frac{(-r)^{2n-m+2}dx}{1+rx}$.

Sit iam primo $r=+1$, ac factor $1+x$ in integrali dabit hanc partem

$$\frac{1}{2n+2}\int\frac{\pm dx}{1+x} = \pm\frac{1}{2n+2}l(1+x)$$

vbi signum superius valet, si m fuerit numerus par, inferius si m impar. Sit nunc $r=-1$; ac factor $1-x$ in integrali inducet hoc:

$$\frac{1}{2n+2}\int\frac{dx}{1-x} = -\frac{1}{2n+2}l(1-x).$$

Pro factoribus trinomialibus sit nobis propositus iste: $1+px+qxx=(1+rx)(1+sx)$, ita vt sit $r+s=p$ et $rs=pq$. Quare cum ex factore simplici $1+rx$ oriatur integralis pars haec: $\frac{1}{2n+2}\int\frac{(-r)^{2n-m+2}dx}{1+rx}$; ex factore composito $1+px+qxx=(1+rx)(1+sx)$ orietur pro integrali

$$\int \frac{((-r)^{2n-m+2}+(-s)^{2n-m+2})dx - rs((-r)^{2n-m+1}+(-s)^{2n-m+1})xdx}{(2n+2)(1+px+qxx)}$$

quae formula cum ea, quam in solutione problematis 1. habuimus, ita congruit, vt si ibi loco $2n$ ponamus $2n+2$, prodeat haec nostra negatiue sumta. His consideratis, si sit Φ arcus circuli, cuius cosinus est $=\frac{p}{2\sqrt{q}}$, ex factore trinomiali $1+px+qxx$ oritur ista integralis pars

$$\pm \frac{q^{\frac{2n-m+1}{2}} \operatorname{cos.} A\,(2n-m+1)\Phi}{2n+2}\, l(1+px+qxx) \mp$$

$$\frac{q^{\frac{2n-m+1}{2}} \operatorname{fin.} A\,(2n-m+1)\Phi}{n+1}\, A \operatorname{tang.} \frac{x\sqrt{(4q-pp)}}{2+px}$$

vbi signa superiora valent, si m sit numerus par; inferiora vero, si m sit numerus impar. Superest igitur, vt in factores trinomiales denominatoris $1-x^{2n+2}$ inquiramus, ex quibus ob $1-xx$ factorem iam in computum ductum constet productum:

$$1+x^2+x^4+x^6+\ldots\ldots\ldots+x^{2n}$$

Haec forma, si cum theoremate in solutione primi problematis allegato comparetur, erit alternatim $a=0$, $b=1$, $c=0$, $d=1$, etc. At quod ad terminum medium attinet, quem posuimus mx^n, erit vtique $m=1$, si n sit numerus par; at erit $m=0$ si n sit numerus impar. Quare duo casus sunt tractandi, alter quo n est numerus par, qui dat hanc aequationem:

$$\operatorname{cos.} A.\,n\psi + \operatorname{cos.} A(n-2)\psi + \operatorname{cos.} A(n-4)\psi + \ldots\ldots + \operatorname{cos.} A\,2\psi + \tfrac{1}{2} = 0$$

alter casus, quo n est numerus impar, dat hanc aequationem:

cos. A.

$$\operatorname{cos}. A\, n\psi + \operatorname{cos}. A(n-2)\psi + \operatorname{cos}. A(n-4)\psi + \ldots\ldots + \operatorname{cos}. A\,\psi = 0$$

ex quibus n diuersi arcus ψ eruuntur, quorum cosinus bis sumti praebebunt valores pro p substituendos in factore generali $1 + px + qxx$, et q semper est $= 1$ ita vt factor quisque trinomialis sit futurus

$$1 + 2x \operatorname{cos}. A\,\psi + xx, \text{ estque } \phi = \psi$$

Sit primo n numerus par, atque aequatio

$$\operatorname{cos}. A\, n\psi + \operatorname{cos}. A(n-2)\psi + \operatorname{cos}. A(n-4)\psi + \ldots\ldots + \operatorname{cos}. A\,2\psi + \tfrac{1}{2} = 0$$

quae eodem modo, quo in solutione probl. 2. tractata eadem dabit $\psi = \frac{k\pi}{n+1}$, atque loco k substituendo successiue numeros 1, 2, 3, etc. .... n, prodibunt n diuersi valores pro ψ simulque pro ϕ. Quamobrem casu quo n est numerus par, formulae propositae differentialis $\frac{x^m dx}{1 - x^{2n+2}}$ integrale erit

$$\pm \frac{1}{2(n+1)}\, l(1+x) - \frac{1}{2(n+1)}\, l(1-x)$$

$$\pm \frac{1}{2(n+1)} \operatorname{cos}. A. \frac{(m+1)\pi}{n+1}\, l\left(1 + 2x \operatorname{cos}. A. \frac{\pi}{n+1} + xx\right) \pm \frac{1}{n+1} \operatorname{sin}. A \frac{(m+1)\pi}{n+1}\, A \operatorname{tang}. \frac{x \operatorname{sin}. A. \frac{\pi}{n+1}}{1 + x \operatorname{cos}. A \frac{\pi}{n+1}}$$

$$\pm \frac{1}{2(n+1)} \operatorname{cos}. A. \frac{2(m+1)\pi}{n+1}\, l\left(1 + 2x \operatorname{cos}. A \frac{2\pi}{n+1} + xx\right) \pm \frac{1}{n+1} \operatorname{sin}. A \frac{2(m+1)\pi}{n+1}\, A \operatorname{tang}. \frac{x \operatorname{sin}. A. \frac{2\pi}{n+1}}{1 + x \operatorname{cos}. A \frac{2\pi}{n+1}}$$

$$\pm \frac{1}{2(n+1)} \operatorname{cos.} A. \frac{2(m+1)\pi}{n+1}\, l\left(1 + 2x \operatorname{cos.} A. \frac{2\pi}{n+1} + xx\right) \pm \frac{1}{n+1}$$
$$\operatorname{sin.} A \frac{2(m+1)\pi}{n+1} A \operatorname{tang.} \frac{x \operatorname{sin.} A \frac{\pi}{n+1}}{1 + x \operatorname{cos.} A \frac{\pi}{n+1}}$$

$$\vdots$$

$$\pm \frac{1}{2(n+1)} \operatorname{cos.} A. \frac{n(m+1)\pi}{n+1}\, l\left(1 + 2x \operatorname{cos.} A. \frac{n\pi}{n+1} + xx\right) \pm \frac{1}{n+1}$$
$$\operatorname{sin.} A \frac{n(m+1)\pi}{n+1} A \operatorname{tang.} \frac{x \operatorname{sin.} A \frac{n\pi}{n+1}}{1 + x \operatorname{cos.} A \frac{n\pi}{n+1}}$$

vbi signorum ambiguorum superiora valent, si m est numerus par, inferiora vero si m numerus impar.

Ponamus iam n esse numerum imparem, atque ad arcuum ψ vel Φ valores inueniendos, resolui oportet hanc aequationem.

$$\operatorname{cos.} A\, n\psi + \operatorname{cos.} A\,(n-2)\psi + \operatorname{cos.} A\,(n-4)\psi + \ldots\ldots + \operatorname{cos.} A.\, 3\psi + \operatorname{cos.} A\,\psi = 0$$

Quorum arcuum in progressione arithmetica progredientium cum sit differentia $= 2\psi$, erit $\operatorname{cos.} A\, n\psi = 2 \operatorname{cos.} A.\, 2\psi \operatorname{cos.} A\,(n-2)\psi - \operatorname{cos.} A\,(n-4)\psi$. Formemus ergo has aequationes:

$$\begin{array}{l}
\quad + \operatorname{cos.} A\, n\psi + \ldots\ldots\ldots + \operatorname{cos.} A.\, 5\psi + \operatorname{cos.} A.\, 3\psi + \operatorname{cos.} A.\, \psi = 0 \\
-2 \operatorname{cos.} A\, 2\psi \operatorname{cos.} A\, n\psi - 2 \operatorname{cos.} A.\, 2\psi \operatorname{cos.} A\,(n-2)\psi - \ldots - 2 \operatorname{cos.} A\, 2\psi \operatorname{cos.} A.\, 3\psi - 2 \operatorname{cos.} A.\, 2\psi \operatorname{cos.} A\, \psi = 0 \\
+ \operatorname{cos.} A\, n\psi + \operatorname{cos.} A\,(n-2)\psi + \operatorname{cos.} A\,(n-4)\psi + \ldots - \operatorname{cos.} A\, \psi = 0
\end{array}$$

quarum summa dabit hanc aequationem:

$$(1 - 2 \operatorname{cos.} A.\, 2\psi) \operatorname{cos.} A.\, n\psi + \operatorname{cos.} A\,(n-2)\psi + \operatorname{cos.} A.\, 3\psi + (1 - 2 \operatorname{cos.} A.\, 2\psi) \operatorname{cos.} A\, \psi = 0$$

At est $\operatorname{cos.} A.\, 3\psi = \operatorname{cos.} A\psi \operatorname{cos.} A.\, 2\psi - \operatorname{sin.} A\psi.\, \operatorname{sin.} A.\, 2\psi$ et $\operatorname{cos.} A\, 3\psi - 2 \operatorname{cos.} A\psi \operatorname{cos.} A\, 2\psi = - \operatorname{cos.} A\psi \operatorname{cos.} A\, 2\psi - \operatorname{sin.} A\psi \operatorname{sin.} A\, 2\psi = - \operatorname{cos.} A.\, \psi$ ex quo erit $\operatorname{cos.} A.\, 3\psi + (1 - 2 \operatorname{cos.} A.\, 2\psi) \operatorname{cos.} A\psi = 0$. Deinde est $\operatorname{cos.} A(n-2)\psi = \operatorname{sin.} A.\, 2\psi \operatorname{sin.} A n\psi +$ cos.

cos. A 2ψ. cos. A $n\psi$. Quibus substitutis habetur haec aequatio:

$$\text{cos. A.} n\psi + \text{sin. A.} 2\psi . \text{sin. A} n\psi - \text{cos. A.} 2\psi . \text{cos. A.} n\psi = 0$$

seu

$$\text{cos. A.}\, n\,\psi = \text{cos. A}\,(n+2)\,\psi$$

At est generaliter cos. A. $n\psi$ = cos. A $(2k\pi - n\psi)$ denotante k numerum quemcunque integrum: vnde fit $2k\pi - n\psi = (n+2)\psi$, atque $\psi = \frac{k\pi}{n+1}$, qui valor quia congruit cum eo, quem casu praecedente, quo n est numerus par, inuenimus. Patet quoque isto casu idem proditurum esse integrale, quod in casu praecedente. Quocirca siue n sit numerus par siue impar idem prodit integrale, hocque integrale iam casu praedente exhibuimus: ita vt problemati ex asse sit satisfactum. Q. E. I.

Scholion I.

§. 62. Quod ambae aequationes, quas pro arcu ψ determinando inuenimus, cum casu, quo n est numerus par tum quo est impar, eosdem plane valores arcus ψ praebeant, etiamsi ipsae aequationes omnino discrepant, mirum videri potest. Sin autem rem curatius inspiciamus, reperiemus binas illas aequationes in hac vna contineri:

$$a = \text{cos. A}\, n\psi + \text{cos. A}(n-2)\psi + \text{cos. A}(n-4)\psi + \ldots + \text{cos. A} -(n-4)\psi + \text{cos. A} -(n-2)\psi + \text{cos. A} -n\psi$$

cum enim cosinus arcuum negatiuorum aequentur cosinibus eorundem arcuum affirmatiue sumtorum, termini extremi inter se sunt aequales, ideoque eundem terminum duplicatum dabunt, et si n sit numerus vnus, terminus in medio: cos. A. $0\,\psi = 1$ solitarius relinquetur. Quare cum resolutio huius aequationis pro vtroque casu valeat, necesse

est

est, vt eadem reperiatur expressio pro arcu ψ, siue n sit numerus par siue impar. Si enim ad modum serierum recurrentium summam omnium terminorum inuestigemus, proueniet $0 = (1 - 2 \cos. A. 2\psi) \cos. A\, n\psi + \cos. A\, (n-2)\psi + (1 - 2 \cos. A. 2\psi) \cos. A. -n\psi + \cos. A. -(n-2)\psi$ hoc est ob $\cos. A. -n\psi = \cos. A. n\psi$ et $\cos. A. -(n-2)\psi = \cos. A. (n-2)\psi$ erit $0 = \cos. A (n-2)\psi - 2 \cos. A. 2\psi \cos. A. n\psi + \cos. A. n\psi$, atque ex lege progressionis ob $\cos. A\, (n+2)\psi = 2 \cos. A. 2\psi. \cos. A\, n\psi - \cos. A\, (n-2)\psi$ erit $\cos. A\, (n+2)\psi = \cos. A\, n\psi$. At est generaliter $\cos. A. n\psi = \cos. A\, (2k\pi - n\psi)$, vnde oritur $2k\pi - n\psi = (n+2)\psi$, hincque $\psi = \frac{k\pi}{n+1}$; siue n sit numerus affirmatiuus siue negatiuus. Adnotari hic conuenit arcum ψ esse eiusmodi, vt $2n+2$ vicibus sumtus det peripheriam totam aliquoties sumtam, ex quo erit $\cos. A\, 2(n+1)\psi = 1$. Quamobrem si expressionis $1 - x^{2n+2}$ factor seu diuisor fuerit $1 + 2x \cos. A\psi + xx$, arcus ψ ita erit comparatus, vt sit $1 - \cos. A\, (2n+2)\psi = 0$, quo ipso ingens analogia cum expressione $1 - x^{2n+2}$ perspicitur in reliquis casibus confirmanda. Iste autem factor $1 + 2x \cos. A\psi + xx$ non solum factores trinomiales formae $1 - x^{2n+2}$ in se complectitur, verum etiam ipsos factores simplices reales eiusdem formulae nempe $1 + x$ et $1 - x$ indicat: namque vi determinationis esse potest $\psi = \pi$ et $\psi = 2\pi$; priori casu fit $\cos. A\psi = -1$, altero $\cos. A. \psi = 1$, vnde oriuntur hi factores $1 + 2x + xx$ et $1 - 2x + xx$, qui sunt quadrata factorum simplicium $1 + x$ et $1 - x$. Neque vero discrimen inter quadrata et radices scrupulum mouere potest, cum in logarithmis, ad quos totum negotium refertur, totum discrimen in coefficientes

cadat,

cadat, quos hic non respicimus. Haec vero obseruatio confirmatur in reliquis formulis adhuc tractatis; nam si formae $1+x^{2n}$ factor sit $1+2x\cos. A\psi+xx$, erit $\psi = \frac{k\pi}{2n}$, denotante k numerum quemcunque imparem; erit ergo $2n\psi = k\pi$ et $1+\cos. A. 2n\psi = 0$. In problemate secundo vidimus, si formulae $1+x^{2n+1}$ factor seu diuisor sit $1+2x\cos. A.\psi+xx$, fore $\psi = \frac{k\pi}{2n+1}$ denotante k numerum parem, ex quo erit $1+\cos. A(2n+1)\psi = 0$. Atque ex solutione problematis 3 colligitur, si formae $1-x^{2n+1}$ factor fuerit $1-2x\cos. A\psi+xx$ fore $1-\cos. A(2n+1)\psi = 0$. Haecque omnia huc redeunt, vt si expressionis $1\pm x^k$ diuisor fuerit $1\pm 2x\cos. A\psi+xx$ fore $1\pm\cos. A. k\psi = 0$. In casu ergo signi superioris $+$ arcus ψ valores sunt $\frac{\pi}{k}$; $\frac{3\pi}{k}$; $\frac{5\pi}{k}$; etc. pro signo autem inferiore sunt $\frac{0\pi}{k}$; $\frac{2\pi}{k}$; $\frac{4\pi}{k}$; $\frac{6\pi}{k}$; etc. Si pro ψ tot capiantur termini, quot k continet vnitates, quilibet factor $1\pm 2x\cos. A.\psi+xx$ bis occurrunt, exceptis aliquot casibus, quibus est $\cos. A\psi$ vel $+1$ vel -1. Ex quo sequitur $1\pm x^k$ esse productum ex k factoribus huius formae $\sqrt{(1\pm 2x\cos. A.\psi+xx)}$, tribuendo ipsi ψ successiue valores, huius progressionis

$$\frac{\pi}{k};\ \frac{3\pi}{k};\ \frac{5\pi}{k};\ \frac{7\pi}{k};\ \ldots\ldots\ \frac{(2k-1)\pi}{k}$$

si signum $+$ valeat, at pro signo $-$, hos

$$\frac{0\pi}{k};\ \frac{2\pi}{k};\ \frac{3\pi}{k};\ \frac{6\pi}{k};\ \ldots\ldots\ \frac{(2k-2)\pi}{k}.$$

Huius igitur theorematis ope per diuisionem circuli factores tam simplices quam trinomiales formulae $1\pm x^k$ exhiberi possunt: hocque theorema elegantissimum Cotesio debetur. Est vero $\sqrt{(1\pm 2x\cos. A\psi+xx)} =$

$\sqrt{((x \pm \operatorname{cos}. A\,\psi)^2 + (\operatorname{fin}. A\,\psi)^2)}$; vnde fatis illa concinna conftructio geometrica fponte fequitur.

Scholion. 2.

§. 63. Inueniri hinc poffunt per circuli diuifionem omnes radices huius aequationis $x^k \pm 1 = 0$: hoc eft omnes numeri fiue reales fiue imaginarii, quorum poteftates exponentis k faciunt vel -1 vel $+1$. Ac primo quidem aequationis $x^k - 1 = 0$ radices inuenientur ex aequatione $xx - 2x \operatorname{cof}. A\psi + 1 = 0$ fubftituendo loco ψ fucceffiue hos numero k arcus:

$\frac{0\pi}{k}$; $\frac{2\pi}{k}$; $\frac{4\pi}{k}$; . . . . . . $\frac{(2k-2)\pi}{k}$

eritque $x = \operatorname{cof}. A.\psi + \sqrt{-1}$, fin. $A\psi$. Ex quo omnes radices, quarum numerus eft k, huius aequationis

$$x^k - 1 = 0$$

erunt fequentes:

$$x = \operatorname{cof}. A. \tfrac{0\pi}{k} - \tfrac{1}{\sqrt{-1}} . \operatorname{fin}. A. \tfrac{0\pi}{k} = 1$$

$$x = \operatorname{cof}. A. \tfrac{2\pi}{k} - \tfrac{1}{\sqrt{-1}} . \operatorname{fin}. A. \tfrac{2\pi}{k}$$

$$x = \operatorname{cof}. A. \tfrac{4\pi}{k} - \tfrac{1}{\sqrt{-1}} . \operatorname{fin}. A. \tfrac{4\pi}{k}$$

$$\vdots$$

$$x = \operatorname{cof}. A. \tfrac{(2k-2)\pi}{k} - \tfrac{1}{\sqrt{-1}} \operatorname{fin}. A. \tfrac{(2k-2)\pi}{k}$$

Harum ergo expreffionum omnium poteftates, quarum exponens eft $= k$, faciunt vnitatem.

Deinde

Deinde aequationis $x^k + 1 = 0$ radices omnes inueniuntur ex aequatione $xx + 2x \cos. A . \psi + 1 = 0$ substituendo loco ψ, successiue hos arcus numero k; qui sunt:

$$\frac{\pi}{k};\ \frac{3\pi}{k};\ \frac{5\pi}{k};\ \frac{7\pi}{k}\ \ldots\ldots\ \frac{(2k-1)\pi}{k}$$

eritque adeo $x = -\cos. A . \psi + \frac{1}{\sqrt{-1}} . \sin. A . \psi$.

Hanc obrem omnes radices huius aequationis

$$x^k + 1 = 0$$

quarum numerus est k erunt sequentes

$$x = -\cos. A . \frac{\pi}{k} + \frac{1}{\sqrt{-1}} \sin. A . \frac{\pi}{k}$$

$$x = -\cos. A . \frac{3\pi}{k} + \frac{1}{\sqrt{-1}} \sin. A . \frac{3\pi}{k}$$

$$x = -\cos. A . \frac{5\pi}{k} + \frac{1}{\sqrt{-1}} \sin. A . \frac{5\pi}{k}$$

$$\vdots$$

$$x = -\cos. A \frac{(2k-1)\pi}{k} + \frac{1}{\sqrt{-1}} \sin. A \frac{(2k-1)\pi}{k}$$

harumque expressionum omnium potestates exponentis k faciunt -1.

Problema 5.

§. 64. Inuenire integrale huius formulae differentialis $\frac{x^m dx}{1 + 2bx^n + x^{2n}}$, existente m numero integro minore quam $2n$, et $bb < 1$.

Solutio.

Quia est $bb < 1$ denominator $1 + 2bx^n + x^{2n}$ factorem simplicem realem non habebit: quare is in factores trinomiales resolui debet. Sit factor trinomialis $1 + px + qxx$ qui sit productum ex his duobus simplicibus imaginariis

nariis $(1+rx)(1+sx)$. Quaeratur ergo integralis pars ex vtroque factore simplici $1+rx$ et $1+sx$ oriund. secundum praecepta §. 28. Hunc in finem erit numerator $P = x^m$ et denominator $Q = 1 + 2bx^n + x^{2n}$, vnde $\frac{dQ}{dx} = 2nbx^{n-1} + 2nx^{2n-1}$. Ex his fit propter $p = r$ vel s illo loco:

$$V = \frac{x^m p}{2n(bx^{n-1} + x^{2n-1})} = \frac{r(-\frac{1}{r})^m}{2n(b(-\frac{1}{r})^{n-1} + (-\frac{1}{r})^{2n-1})}$$

seu $V = \dfrac{-(-r)^{2n-m}}{2n + 2nb(-r)^n}$. Atque ex factore $1+px + qxx = (1+rx)(1+sx)$ nascitur integralis pars haec

$$\frac{-(-r)^{2n-m}}{2n(1+b(-r)^n)}\int\frac{dx}{1+rx} \quad \frac{-(-s)^{2n-m}}{2n(1+b(-s)^n)}\int\frac{dx}{1+sx}$$

seu.

$$\int\frac{-((-r)^{2n-m} + (-s)^{2n-m} + bq^n(-r)^{n-m} + bq^n(-s)^{n-m})\,dx + (q(-r)^{2n-m-1} + q(-s)^{2n-m-1} + bq^{n+1}(-r)^{n-m-1} + bq^{n+1}(-s)^{n-m-1})\,xdx}{2n(1+b(-r)^n + b(-s)^n + bbq^n)(1+px+qxx)}$$

At est $(-r)^k + (-s)^k = \pm r^k \pm s^k$ vbi signa superiora valent, si sit k numerus par, inferiora, si sit impar. Hinc ad eundem modum, quo in solutione problematis primi, posito Φ arcu circuli, cuius cosinus $= \frac{p}{2\sqrt{q}}$; erit $(-r)^k + (-s)^k = \pm 2q^{\frac{k}{2}}$ cos. A. $k\Phi = 2q^{\frac{k}{2}}$ cos. A $k(\pi - \Phi)$

Hinc facta substitutione erit integrale ex factore $1+px + qxx$ oriundum.

$\int ((-$

$$\frac{\int\left(-2q^{\frac{2n-m}{2}}\operatorname{cos}.A(2n-m)(\pi-\Phi)-2bq^{\frac{3n-m}{2}}\operatorname{cos}.A(n-m)(\pi-\Phi)\right)dx \atop \int+\left(2q^{\frac{2n-m+1}{2}}\operatorname{cos}.A(2n-m-1)(\pi-\Phi)+2bq^{\frac{3n-m+1}{2}}\operatorname{cos}.A(n-m-1)(\pi-\Phi)\right)x\,dx}{2n\left(1+2bq^{\frac{n}{2}}\operatorname{cos}.A\,n(\pi-\Phi)+bbq^{n}\right)(1+px+qxx)}$$

cuius integrale est

$$\frac{+q^{\frac{2n-m-1}{2}}\operatorname{cos}.A(2n-m-1)(\pi-\Phi)+bq^{\frac{3n-m-1}{2}}\operatorname{cos}.A(n-m-1)(\pi-\Phi)}{2n\left(1+2bq^{\frac{n}{2}}\operatorname{cos}.A.\,n(\pi-\Phi)+bbq^{n}\right)}\,l(1+px+qxx)$$

$$\frac{+q^{\frac{2n-m-1}{2}}\operatorname{fin}.A(2n-m-1)(\pi-\Phi)+bq^{\frac{3n-m-1}{2}}\operatorname{fin}.A(n-m-1)(\pi-\Phi)}{n\left(1+2bq^{\frac{n}{2}}\operatorname{cos}.A\,n(\pi-\Phi)+bbq^{n}\right)}\;A\,\operatorname{tang}.\frac{x\sqrt{(4q-pp)}}{2+pq}$$

fupereft, vt fingulos factores trinomiales denominatoris inveftigemus: in quem finem theorema in folutione primi problematis adhibitum huc transferamus; eritque $m=2b$; et obtinebimus hanc aequationem cof. A. $n\psi \pm b = 0$, fignum $+$ valet fi n fit numerus par, fignum $-$ vero fi n numerus impar. Sit ω arcus cuius cofinus $= \mp b$, nempe $-b$, fi n fit numerus par, et $+b$, fi n fit impar; eritque cof. A. $n\psi =$ cof. A. $\omega =$ cof. A $(2k\pi-\omega)$, vnde nafcitur $\psi = \frac{2k\pi-\omega}{n}$; cuius n funt valores differentes ponendo loco k fucceffiue numeros $0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$ Quilibet ergo factor trinomialis denominatoris continetur in hac forma

$$1+2x\ \operatorname{cos}.A.\frac{2k\pi-\omega}{n}+xx$$

et huiusmodi factorum numerus erit $= n$, quare, cum hactenus $1 + px + qxx$ pro factore generali assumserimus, erit $q = 1$ et $p = 2 \text{ cos. A.} \frac{2k\pi - \omega}{n}$, hineque $\Phi = \frac{2k\pi - \omega}{n}$. Integralis ergo quaesitae pars ex vnoquoque denominatoris factore trinomiali oriunda erit

$$\frac{+ \text{cos. A.} (2n - m - 1)\left(\frac{(n-2k)\pi + \omega}{n}\right) + b \text{ cos. A} (n - m - 1)\left(\frac{(n-2k)\pi + \omega}{n}\right)}{2n(1 + 2b \text{ cos. A}(n\pi + \omega) + bb)} \; l\left(1 + 2x \text{ cos. A.} \frac{2k\pi - \omega}{n} + xx\right)$$

$$\frac{+ \text{fin. A} (2n - m - 1)\left(\frac{(n-2k)\pi + \omega}{n}\right) + b \text{ fin. A} (n - m - 1)\left(\frac{(n-2k)\pi + \omega}{n}\right)}{n(1 + 2b \text{ cos. A}(n\pi + \omega) + bb)} \; \text{A tang.} \frac{x \text{ fin. A.} \frac{2k\pi - \omega}{n}}{1 + x \text{ cos. A.} \frac{2k\pi - \omega}{n}}$$

Completum ergo integrale obtinebitur, si loco k successiue numeri $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots (n-1)$ substituantur, atque omnes valores resultantes in vnam summam colligantur: existente $\omega = \text{A cos.} \mp b$. Scilicet si n est numerus par, erit $\omega = \text{A cos.} - b$, et si n est numerus impar, erit $\omega = \text{A cos.} + b$. Q. E. I.

Exemplum 1.

§. 65. Huius formulae differentialis $\frac{dx}{1 + 2bx^2 + x^4}$ integrale inuenire, existente $bb < 1$.

Hic est $m = 0$, et $n = 2$, vnde ω erit arcus cuius cosinus $= -b$; seu, si arcus, cuius cosinus $= + b$ sit ϱ erit $\omega = \pi - \varrho$. Cognito ergo arcu ω, erunt bini denominatoris factores $1 + 2x \text{ cos. A.} \frac{\omega}{2} + xx$ et $1 - 2x \text{ cos. A.} \frac{\omega}{2} + xx$, ex quibus nascetur integrale quaesitum

— cos.

$$-\frac{\cos. A. \frac{3\omega}{2} - b\cos. A. \frac{\omega}{2}}{4(1+2b\cos. A.\omega+bb)} l(1+2x\cos. A\tfrac{\omega}{2}+xx) + \frac{\sin A. \frac{3\omega}{2} + b\sin A. \frac{\omega}{2}}{2(1+2b\cos A\omega+bb)}$$

$$A\,\mathrm{tang.} \frac{x\sin. A. \frac{\omega}{2}}{1+x\cos. A. \frac{\omega}{2}}$$

$$+\frac{\cos. A. \frac{3\omega}{2} + b\cos. A. \frac{\omega}{2}}{4(1+2b\cos. A\omega+bb)} l(1-2x\cos. A\tfrac{\omega}{2}+xx) + \frac{\sin. A. \frac{3\omega}{2} + b\sin. A. \frac{\omega}{2}}{2(1+2b\cos A\omega+bb)}$$

$$A\,\mathrm{tang.} \frac{x\sin. A. \frac{\omega}{2}}{1-x\cos. A. \frac{\omega}{2}}$$

At cum sit $\cos. A\omega = -b$ erit $1+2b\cos A\omega+bb = 1-bb$, et $\cos. A. \frac{3\omega}{2} + b\cos. A. \frac{\omega}{2} = -\sin. A\omega. \sin. A\frac{\omega}{2}$, vnde erit integrale quaesitum

$$\frac{1}{8\cos. A. \frac{\omega}{2}} l \frac{1+2x\cos. A\frac{\omega}{2}+xx}{1-2x\cos. A\frac{\omega}{2}+xx} + \frac{1}{4\sin. A\frac{\omega}{2}} A\,\mathrm{tang.} \frac{2x\sin. A\frac{\omega}{2}}{1-xx}$$

Scholion.

§. 66. Ex hoc exemplo videmus generaliter esse $1 + 2b\cos. A(n\pi+\omega) + bb = 1 - bb = \sin. A\omega. \sin. A\omega$ nam si n sit numerus par, erit $\cos. A(n\pi+\omega) = \cos. A\omega = -b$; et, si n sit numerus impar, erit $\cos. A(n\pi+\omega) = -\cos. A\omega = +b$. Deinde etiam numeratores in genere compendiosius exprimere poterimus. Si enim n sit numerus par, quo casu est $b = -\cos. A\omega$, erit $\cos. A n \left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right) = \cos. A\omega$, et $\cos. A(2n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right) = \cos. A\omega \cos. A(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right) - \sin. A\omega. \sin. A(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)$ atque $\sin. A(2n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right) = \sin. A\omega. \cos A(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right) + \cos. A\omega. \sin. A(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)$.

Casu

Casu ergo, quo n est numerus par, erit forma integralis:

$$\frac{-\sin. A(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)}{2n\sin. A.\omega} l\left(1+2x\cos A.\frac{2k\pi-\omega}{n}+xx\right)+\frac{\cos A(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)}{n\sin. A\omega}$$

$$A\,\mathrm{tang.}\frac{x\sin. A.\frac{2k\pi-\omega}{n}}{1+x\cos. A\frac{2k\pi-\omega}{n}}$$

Sit iam n numerus impar, erit $b=\cos. A\omega$, et $\cos. A((n-2k)\pi+\omega)=-\cos. A.\omega$; $\sin. A((n-2k)\pi+\omega)=-\sin A.\omega$ ex his oritur $\cos. A(2n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)=-b\cos. A(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)+\sin. A\omega.\sin. A(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)$; parique modo $\sin. A(2n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)=-\sin. A\omega.\cos. A(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)-\cos. A\omega.\sin. A(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)$, ex quo casu quo n est numerus impar, erit integralis forma

$$\frac{+\sin A(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)}{2n\sin. A.\omega} l\left(1+2x\cos A\frac{2k\pi-\omega}{n}+xx\right)-\frac{\cos A(n-m-1)\left(\frac{(n-2k)\pi+\omega}{n}\right)}{n\sin. A.\omega}$$

$$A\,\mathrm{tang.}\frac{x\sin. A.\frac{2k\pi-\omega}{n}}{1+x\cos. A\frac{2k\pi-\omega}{n}}$$

quae duae expressiones utique multo sunt simpliciores ea, quae in solutione prodiit.

Exemplum 2.

§. 67. Huius formulae differentialis $\frac{dx}{1+2bx^3+x^6}$ integrale inuenire, existente $bb<1$.

Hic est $m=0$, $n=3$, ideoque forma scholii posterior valet, et erit $\omega=A\cos. b$, hinc erit integrale quaesitum.

$$\frac{+\sin. A.\frac{2}{3}\omega}{6\sin. A.\omega} l\left(1+2x\cos. A.\frac{\omega}{3}+xx\right)+\frac{\cos. A.\frac{2}{3}\omega}{3\sin. A.\omega} A\,\mathrm{tang}\frac{x\sin. A.\frac{\omega}{3}}{1+x\cos A\frac{\omega}{3}}$$

+ sin.

$$+\frac{\sin. A.\frac{2}{3}(\pi+\omega)}{6\sin. A.\omega}\, l(1+2x\cos. A\tfrac{2\pi-\omega}{3}+xx)-\frac{\cos. A.\frac{2}{3}(\pi+\omega)}{3\sin. A\omega}$$

$$A\,\mathrm{tang.}\frac{x\sin. A.\frac{2\pi-\omega}{3}}{1+x\cos. A.\frac{2\pi-\omega}{3}}$$

$$-\frac{\sin. A.\frac{2}{3}(\pi-\omega)}{6\sin. A.\omega}\, l(1+2x\cos. A\tfrac{2\pi+\omega}{3}+xx)\mp\frac{\cos. A.\frac{2}{3}(\pi-\omega)}{3\sin. A\omega}$$

$$A\,\mathrm{tang.}\frac{x\sin. A\frac{2\pi+\omega}{3}}{1+x\cos. A.\frac{2\pi+\omega}{3}}$$

Scholion. 2.

§. 68. Formulae illae integrales adhuc commodius exprimi possunt, ita vt nunquam arcus negatiui occurrant. Primo nimirum, si n sit numerus par, quo casu est $\cos. A.\omega=-b$, erit cuiusuis partis integralis haec forma, posito $n-m-1=i$

$$-\frac{\sin. A.\frac{i}{n}((n+2k)\pi+\omega)}{2n\sin. A\omega}\, l(1+2x\cos. A.\tfrac{2k\pi+\omega}{n}+xx)-$$

$$\frac{\cos. A\frac{i}{n}((n+2k)\pi+\omega)}{n\sin. A\omega}\, A\,\mathrm{tang.}\frac{x\sin. A.\frac{2k\pi+\omega}{n}}{1+x\cos. A.\frac{2k\pi+\omega}{n}}$$

Altero autem casu quo est n numerus impar et $\cos. A.\omega=+b$, posito iterum $n-m-1=i$ erit integralis portio quaecunque:

$$+\frac{\sin. A.\frac{i}{n}((n+2k)\pi+\omega)}{2n\sin. A.\omega}\, l(1+2x\cos. A.\tfrac{2k\pi+\omega}{n}+xx)$$

$$+\frac{\cos. A.\frac{i}{n}((n+2k)\pi+\omega)}{n\sin. A.\omega}\, A\,\mathrm{tang.}\frac{x\sin. A.\frac{2k\pi+\omega}{n}}{1+x\cos. A.\frac{2k\pi+\omega}{n}}$$

In vtroque casu integrale constabit ex n huiusmodi partibus, quae obtinentur, si loco k successiue substituantur numeri,

meri, 0, 1, 2, 3; . . . . $(n-1)$. Praeterea hic notandum est, si sit i numerus par, fore

$$\text{sin. A}.\tfrac{i}{n}((n+2k)\pi+\omega) = \text{sin. A}.\tfrac{i}{n}(2k\pi+\omega) \text{ et}$$
$$\text{cos. A}.\tfrac{i}{n}((n+2k)\pi+\omega) = \text{cos. A}.\tfrac{i}{n}(2k\pi+\omega).$$

Quodsi autem fuerit i numerus impar, erit

$$\text{sin. A}.\tfrac{i}{n}((n+2k)\pi+\omega) = -\text{sin. A}.\tfrac{i}{n}(2k\pi+\omega) \text{ et}$$
$$\text{cos. A}.\tfrac{i}{n}((n+2k)\pi+\omega) = -\text{cos. A}.\tfrac{i}{n}(2k\pi+\omega).$$

Exemplum 3.

§. 69. Huius formulae differentialis $\frac{xx\,dx}{1+2bx^4+x^8}$ integrale inuenire, existente $bb<1$.

Erit hic $m=2$, et $n=4$, ex quo formula priori erit vtendum. Sit igitur ω arcus; cuius cosinus $=-b$; et quia $n-m-1=i=1$, numero impari; erit

$$\text{sin. A}.\tfrac{i}{n}((n+2k)\pi+\omega) = -\text{sin. A}.\tfrac{2k\pi+\omega}{4} \text{ et}$$
$$\text{cos. A}.\tfrac{i}{n}((n+2k)\pi+\omega) = -\text{cos. A}.\tfrac{2k\pi+\omega}{4}$$

Hanc obrem formulae propositae integrale reperietur sequenti modo expressum:

$$+\frac{\text{sin. A}.\frac{\omega}{4}}{8\,\text{sin. A}.\omega}\, l\left(1+2x\,\text{cos. A}.\tfrac{\omega}{4}+xx\right) + \frac{\text{cos. A}.\frac{\omega}{4}}{4\,\text{sin. A}\,\omega}$$
$$\text{A tang.}\frac{x\,\text{sin. A}.\frac{\omega}{4}}{1+x\,\text{cos. A}\frac{\omega}{4}}$$

$$+\frac{\text{sin. A}.\frac{2\pi+\omega}{4}}{8\,\text{sin. A}.\omega}\, l\left(1+2x\,\text{cos. A}\tfrac{2\pi+\omega}{4}+xx\right) + \frac{\text{cos. A}.\frac{2\pi+\omega}{4}}{4\,\text{sin. A}\,\omega}$$
$$\text{A tang.}\frac{x\,\text{sin. A}.\frac{2\pi+\omega}{4}}{1+x\,\text{cos. A}\frac{2\pi+\omega}{4}}$$

+ sin.

$$+\frac{\sin. A. \frac{4\pi+\omega}{4}}{8 \sin. A\omega} l\left(1+2x\cos. A. \frac{4\pi+\omega}{4}+xx\right)+\frac{\cos. A. \frac{4\pi+\omega}{4}}{4 \sin. A\omega}$$
$$A \operatorname{tang.} \frac{x \sin. A. \frac{4\pi+\omega}{4}}{1+x\cos. A \frac{4\pi+\omega}{4}}$$

$$+\frac{\sin. A. \frac{6\pi+\omega}{4}}{8 \sin. A\omega} l\left(1+2x\cos. A \frac{6\pi+\omega}{4}+xx\right)+\frac{\cos. A. \frac{6\pi+\omega}{4}}{4 \sin. A\omega}$$
$$A \operatorname{tang.} \frac{x \sin. A. \frac{6\pi+\omega}{4}}{1+x\cos. A \frac{6\pi+\omega}{4}}$$

Scholion 3.

§. 70. Si in formula differentiali proposita $\frac{x^m dx}{1+2bx^n+x^{2n}}$ foret $bb > 1$, tum integratio per problemata praecedentia absolui poterit. Namque hoc casu denominator in hos duos factores reales $1+x^n(b+\sqrt{(bb-1)})$ et $1+x^n(b-\sqrt{(bb-1)})$ resoluitur, ex quo ipsa formula differentialis proposita distribui poterit in binas formulas, quarum denominatores erunt hi duo factores, atque hancobrem earum integralia reperiri poterunt per praecepta ante tradita. Idem praestari poterit, si formula differentialis proposita fuerit $\frac{x^m dx}{1+2bx^n-x^{2n}}$, quippe quo casu denominator pariter resolui poterit in duos factores reales, cuiusmodi ante tractauimus.

DE SVPERFICIE CYLINDRI ET CONI SCALENORVM.

AVCTORE
Georgio Wolffg. Krafft.

§ 1.

Occasionem soluendorum horum duorum problematum praebuit mihi Celeb. Dn. Prof. *Heinsius*, qui ea, sibi in solertissima doctrinae proiectionum astronomicarum indagatione oblata, concinne admodum, methodo tamen a sequente diuersa, explicuit. Cum itaque viderem, rariores inueniri vtriusque horum problematum constructiones; atque *Andr. Tacquetum* in geometriae practicae lib. III. probl. 2, et 4, (*) fateri, *nondum inuentam esse rationem metiendi superficiem cylindri scaleni, multo minus elliptici et aliorum; et pariter, quod attineat ad superficiem coni scaleni, nondum repertam esse rationem, qua reuocari ad mensuram possit*; cuius nimirum aetate calculi *leibnitiani* nondum detecti erant, quorum beneficio haec hodie problemata tractari possunt; vtilem tamen esse immo necessariam scientiis astronomicis et geographicis hanc inuestigationem. Elaboraui, vt calculorum sublimiorum ope eam eruerem; quam, qualem inueni, *Academiae* examini atque iudicio submitto.

Tab. I. fig. 1. §. 2. Sit propositi semicylindri basis inferior semicirculus FEG; diameter inferioris AI, retrorsum producta in B; diameter vero baseos superioris FG. Capiantur pro lubitu

(*) Cap. XVIII.

lubitu arcus aequales AM, et FE, coniunganturque puncta M, E; erit ME latus cylindri: cui adiungatur aliud infinite vicinum, parallelum, me; eritque sic parallelogrammulum $MmeE$ elementum superficiei cylindricae scalenae, cuius areola est inuestiganda. In Mm prolongatam vtrinque, donec diametro AI occurrat in B, hoc est, in tangentem puncti M, demittatur ex F perpendiculum EC: erit ergo areola quaesita $= Mm \times EC$. Est autem Mm elementum circuli, respondens adplicatae PM; restat igitur indaganda sola EC, perpendicularis ex E in tangentem circuli MC.

§. 3. Haec EC vt commode determinetur, ducatur MD parallela diametro AI, et demittatur ex E perpendicularis in planum baseos inferioris, quae necessario cadet in punctum aliquod rectae MD; quod punctum itaque sit D, ita, vt ducta recta CD, anguli MDE et CDE sint recti. Dico iam, angulum in plano baseos inferioris iacentem MCD etiam esse rectum. Quoniam enim duae rectae MD et CD, in plano inferiori ductae, angulos rectos faciunt cum vnica DE, quae erecta est in plano CDE sursum protenso ex communi puncto D: patet, plana triangularia MCD et CDE sibi mutuo ad angulos rectos insistere. Cum itaque recta MC faciat angulum rectum cum CE, ex hypothesi: faciet ea angulos rectos cum omnibus reliquis lineis ex puncto C, in plano CDE ductis; ergo etiam cum CD; quare MCD est angulus rectus.

§. 4. His ita praemissis non difficile erit mensuram rectae EC, perpendicularis ad tangentem MC, exhibere. Sint enim, posito K centro baseos, $KP = x$; PM

 $= y$

$=y$; KM, radius circuli $=r$; DE, altitudo cylindri scaleni $=a$; ME, latus huius cylindri, $=b$; MD $= \sqrt{(b^2-a^2)} = c$. Atque erunt, ob parallelas BI et MD, anguli MBP et CMD aequales; adeoque, ob rectum MCD, (§. 3.) erit CDM = BMP = PKM. Est autem, posito sinu toto $=1$, sinus PKM $= \frac{PM}{MK} = \frac{y}{r}$; vnde in triangulo rectangulo MCD dabitur haec analogia, sin. MCD (1) : MD (c) = sin. CDM ($\frac{y}{r}$) : MC ($\frac{cy}{r}$); erit igitur EC $= \sqrt{(ME^2 - MC^2)} = \frac{\sqrt{(b^2r^2 - c^2y^2)}}{r}$. Cum autem ex natura circuli sit M$m = \frac{rdy}{\sqrt{(r^2-y^2)}}$: erit elementum M$me$E $=$ Mm x EC $= \frac{dy\sqrt{(b^2r^2-c^2y^2)}}{\sqrt{(r^2-y^2)}} = dS$, posita superficie AMEF $=$ S.

fig. 2. §. 5. Quod ergo elementum vt integretur, describatur ellipsis ADB, cuius semiaxis maior AC $=r$, semiaxis minor DC $= \frac{ar}{b}$, CE $=y$, EF $=t$; eritque ex natura ellipseos $t^2 : \frac{a^2r^2}{b^2} = r^2 - y^2 : r^2$, vnde $t^2 = \frac{a^2r^2-a^2y^2}{b^2}$, et F$f = \frac{dy\sqrt{(b^2r^2-c^2y^2)}}{b\sqrt{(r^2-y^2)}}$; aut $b \times$ F$f = \frac{dy\sqrt{(b^2r^2-c^2y^2)}}{\sqrt{(r^2-y^2)}} = dS$, (§. 4.) substituto nempe c^2 pro b^2-a^2; oritur ergo aequatio finalis haec b. F$f = d$S; quae integrata praebet $b \times$ DF $=$ S; quia autem posito arcu DF $=o$, fit $y=o$, et consequenter etiam S $=o$, hinc constante in hac integratione adiicienda opus non est.

§. 6. Hinc igitur emergit sequens constructio inueniendae superficiei cylindri scaleni, demtis basibus circularibus, quod hucusque semper fuit intelligendum. Ex centro baseos
fig. 1. superioris O propositi cylindri scaleni demittatur perpendicularis OQ in planum baseos inferioris; punctum Q et centrum baseos inferioris K coniungatur recta QK, quae eousque in directum prolongetur, donec cylindri latus

tus aliquod AF in A secuerit; atque ex termino diametri I in hoc latus sectum AF demittatur perpendicularis IN. Tum circa axem maiorem $AB = AI$, et axem minorem $DG = IN$, describatur ellipsis ADBG, in qua capiatur $CE = PM$, atque erigatur ad CE perpendicularis EF. Quibus peractis, erit superficies cylindri AFME = rectangulo ex latere cylindri AF in arcum ellipseos DF; vnde manifestum est, cylindri scaleni superficiem dependere à rectificatione ellipseos. fig. 2. et 1.

§. 7. Sed idem hoc facilius etiam sequenti modo ostenditur. Secetur cylindrus obliquus DCIFEG ita, vt noua sectio NMI sit normalis plano DIFE, et axis NI perpendicularis ad latus cylindri DH; eritque haec sectio ellipsis NMI, cuius axis maior DI, minor autem NI. Nam si in noua hac sectione pro semiapplicata quauis PM sit sectio basi parallela AMB; habebitur, quia basis circularis est, $AP \times PB = PM^2$; sed ob triangula similia est $AP:PN = PB:PI$, vnde $PB = \frac{AP \times PI}{PN}$, quod substitutum in priori aequatione efficit hanc $\frac{AP^2 \times PI}{PN} = PM^2$; sed habetur quoque $AP:PN = DI:NI$, aut vero $AP^2 = \frac{PN^2 DI^2}{NI^2}$, quod denuo subrogatum in hac aequatione vltima praebet hanc $\frac{DI^2 \times PN \times PI}{NI^2} = PM^2$; vel $PM^2 : PN.PI = DI^2 : NI^2$; quod indicat, sectionem NMI esse ellipsin, in qua axis ipsi PM parallelus est aequalis ipsi DI, et alter axis aequalis ipsi NI; sed apparet, esse $DI > NI$: ergo NMI est ellipsis, cuius axis minor est NI. Est igitur cylindrus ex hac noua sectione ortus HFIMN ellipticus, ob basin NMI ellipticam, sed est cylindrus rectus, cuius quippe latera perpendicularia sunt ad hanc basin cylindri- fig. 3.

lindricam; igitur superficiei pars quaecunque HKMN aequalis est arcui elliptico NM ducto in latus HN. At vero, ob vngulas NICD et HFGE similes et aequales, area HKMN cylindri recti sed elliptici eadem est cum area correspondente $EemD$ cylindri obliqui sed circularis: vnde patet, etiam aream $EemD$ aequalem esse priori facto, et pendere consequenter ab ellipseos rectificatione. Quod mirum est, cur non deprehenderint acuti geometrae superioris aetatis; cum ex *Sereni Antissensis* meditatione iam cognitum diu sit, sectionem cylindri circularis obliquam efficere ellipsin.

§. 8. Sit nunc simili modo semiconus scalenus AEI, cuius basis semicirculus AMI, in qua diameter AI vtrinque prolongata in B et D. Sit autem in hoc cono triangulum per axem AEI tale, vt demissa ex vertice coni E perpendicularis ED in basin cadat in diametri prolongatae punctum D. Capiatur arcus quilibet A M, et ducatur latus coni ME, cum alio infinite vicino m E, eritque triangulum MmE elementum superficiei conicae scalenae, cuius proinde areola inuestiganda. In Mm prolongatam vtrinque, donec diametro baseos occurrat in B, hoc est in tangentem puncti M, demittatur ex E perpendiculum EC; erit ergo aereola quaesita $= \frac{Mm \times EC}{2}$. Est autem Mm elementum peripheriae circularis respondens semiapplicatae PM, restat ergo indaganda sola EC, perpendicularis ex E in tangentem circuli MC.

fig. 4.

§. 9. Haec EC vt commode determinetur, ducantur rectae MD, CD, cum radio baseos MK; dico iam; angulum in basi iacentem MCD esse rectum. Nam, quia ED est perpendicularis ad planum inferius: erunt anguli EDM,

et

et EDC, recti. Cum itaque in plano horizontali duae sint rectae MD et CD, quae cum vnica DE plani erecti CDE angulos rectos faciunt: erunt haec duo plana EDC et BDC ad se inuicem perpendicularia; cum igitur MC sit perpendicularis ad rectam CE plani CED, (per hyp.) erit eadem etiam perpendicularis ad omnes reliquas in hoc plano ex C eductas, hoc est, erit etiam perpendicularis ad CD: quare angulus MCD est rectus.

§. 10. Est autem ob tangentem BM et radium MK etiam angulus BMK rectus: ergo MK et CD sunt parallelae et triangula BMK, BCD, similia. Vocatis igitur radio $MK = r$, altitudine coni scaleni $ED = a$, recta $KD = b$, $PK = x$, $PM = y$, erit ob triangula similia PKM et MKB analogia haec, $PK(x) : MK(r) = MK(r) : BK(\frac{r^2}{x})$; nec non ob triangula similia BMK et BCD, $BK(\frac{r^2}{x}) : KM(r) = BD(\frac{r^2}{x} + b) : CD(\frac{r^2+bx}{x})$. Hinc ob angulum rectum CDE erit $CE = \frac{\sqrt{(rr+bx^2+a^2r^2)}}{r}$; atque ob $Mm = \frac{-rdx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$, erit areola trianguli $MmE = \frac{Mm \times EC}{2} = \frac{-dx\sqrt{(rr+bx^2+a^2r^2)}}{2\sqrt{(r^2-x^2)}}$; integrali deinde hoc ita sumto, vt id euanescat posito $x = r$.

§. 11. Hoc vero elementum $\frac{-dx\sqrt{(rr+bx^2+a^2r^2)}}{2\sqrt{(r^2-x^2)}}$, vel istud, in quod prius hoc facile transmutatur $\frac{-\frac{1}{2}rdx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$ $\sqrt{(a^2+\frac{r+bx^2}{r})}$, non potest reduci neque ad circuli, neque ad hyperboles quadraturam, quia nulla facta substitutione rationale reddi potest; neque etiam ad rectificationem ellipseos est reducibile. Nulla igitur hactenus alia ratione construi hoc problema potest, nisi descriptione curvae huius quatuor dimensionum, in qua sit $\frac{\sqrt{(rr+bx^2+a^2r^2)}}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$

 $= t$

$= t$, a cuius quadratura integratio elementi quaesiti dependet. Occurrunt de eodem hoc problemate dissertationes *Leibnitii* atque *Varignonii* in Miscellaneis Berolinensibus, Contin. II. quorum hic pro solutione curuam dedit dependentem a quadratura circuli, sed cuius dein curuae rectificatio problemati quaesito nostro inseruit, sed modo valde prolixo et imperfecto; ille autem quaestionis huius responsionem dedit ingeniosam quidem, sed molestissimam, per rectificationem curuae alicuius descriptu valde difficilis, cuius aequatio, si ad coordinatas orthogonias reduceretur, ad ingentem numerum dimensionum ascenderet.

METHO-

METHODVS FACILIOR ATQVE EXPEDITIOR INTEGRANDI FORMVLAS DIFFERENTIALES RATIONALES.

AVCTORE

L. Eulero.

§. 1.

Cum igitur omnium formularum rationalium integratio (*) per praecepta tradita femper abfolui queat, dummodo denominatoris factores fiue fimplices fiue trinomiales habeantur, nihil amplius ad methodum ante expofitam fuperaddendum videbatur. Verum tamen hic omnia, quae ante explicuimus, non folum modo magis naturali ex propriis fontibus deducemus, verum etiam praecepta ita adornabimus, vt integratio omnium huiusmodi formularum multo facilius atque expeditius perfici queat. Primum enim methodum tam latiffime patentem, quam facilem aperiemus cuiuscunque denominatoris factores trinomiales inueniendi; dum antea hos factores eruimus ope cuiuspiam theorematis moivraeani, quod tantum valet, quando fupremae poteftates variabilis x, iisdem, quibus infimae, coefficientibus funt coniunctae: hocque ipfo integrationem ad plurimas alias formulas accommodare poterimus, ad quas prior methodus minus genuina non fufficit. Deinde inuentis factoribus tam fimplicibus quam trinomialibus, methodum longe fimpliciorem ac faciliorem communicabimus ex quolibet factore denominatoris refpondentem integralis partem determinandi: in quo negotio ante vfi fumus methodo cum nimis operofa, tum ex alienis princi-

(*) vid. fuper. meth. integr.

piis deducta. Tertia methodus, quam hic ostendemus, ad omnes formulas differentiales erit aeque accommodata, neque vlla opus erit reductione, quemadmodum ante necesse erat; vbi primum ex denominatore factores, qui erant potestates ipsius x, elicere, atque tum terminum denominatoris absolutum vnitati aequalem reddere oportebat.

§. 2. Sit igitur proposita formula differentialis quaecunque $\frac{M}{N}dx$, cuius integrale requiratur: sintque M et N functiones quaecunque ipsius x, huius formae

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}$$

tam ratione numeri terminorum, quam potestatum ipsius x vtcunque comparatae. Ad integrationem iam absoluendam oportet fractionem $\frac{M}{N}$ in partes simpliciores reales resoluere, quarum denominatores sint vel binomia $p + qx$, vel trinomia $p + qx + rxx$; quemadmodum ante vidimus. Continebuntur vero etiam in fractione $\frac{M}{N}$ partes integrae, si variabilis x in numeratore M totidem pluresue habeat dimensiones quam in denominatore. Quod si ergo fractio $\frac{M}{N}$ in huiusmodi partes siue integras siue fractas fuerit resoluta, quaelibet pars per dx multiplicata et integrata dabit integralis quaesiti partem; atque omnes istae integralis partes ex singulis partibus, in quas fractio $\frac{M}{N}$ resoluitur, oriundae iunctim sumtae praebebunt integrale formulae $\frac{M}{N}dx$ quaesitum. Totum ergo negotium huc redit, vt fractionis $\frac{M}{N}$ omnes partes simplices eruamus siue integras siue fractas: tum enim singulis per dx multiplicatis integratio facili negotio absoluetur.

§. 3

§. 5. Partes integras autem fractio $\frac{M}{N}$, vti iam monuimus, in se complectitur, si x totidem pluresue habeat dimensiones in numeratore M quam in denominatore N. Contra autem si x pauciores habeat dimensiones in numeratore M quam in denominatore N, tum partes integrae in fractione $\frac{M}{N}$ omnino non continentur, hincque consequenter *nullae* partes in integrale inducuntur. Ponamus igitur variabilem x in numeratore M non pauciores habere dimensiones quam in denominatore; tum partes integrae in fractione $\frac{M}{N}$ contentae more consueto per divisionem eliciuntur;

Sit enim $\frac{M}{N} = \frac{Ax^{n+m} + Bx^{n+m-1} + Cx^{n+m-2} + Dx^{n+m-3} + \text{etc}}{\alpha x^{n} + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \delta x^{n-3} + \text{etc.}}$

manifestum est partem integram ex diuisione oriundam huiusmodi formam esse habituram

$$\mathfrak{A}x^{m} + \mathfrak{B}x^{m-1} + \mathfrak{C}x^{m-2} + \mathfrak{D}x^{m-3} + \ldots\ldots + \mathfrak{M}$$

ad cuius coefficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. inueniendos hoc tantum requiritur, vt ista pars integra per denominatorem $\alpha x^{n} + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-1} +$ etc. multiplicetur, et termini omnes, quibus exponens ipsius x non minor est quam n, terminis respondentibus numeratoris aequentur. Tum igitur orietur

$A = \alpha\mathfrak{A}$

$B = \alpha\mathfrak{B} + \beta\mathfrak{A}$

$C = \alpha\mathfrak{C} + \beta\mathfrak{B} + \gamma\mathfrak{A}$

$D = \alpha\mathfrak{D} + \beta\mathfrak{C} + \gamma\mathfrak{B} + \delta\mathfrak{A}$

etc.

hincque coefficientes quaesiti emergent hoc modo

$$\mathfrak{A} = \frac{A}{\alpha}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{B}{\alpha} - \frac{\beta A}{\alpha^2}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{C}{\alpha} - \frac{\beta B}{\alpha^2} + \frac{(\beta^2 - \alpha\gamma)A}{\alpha^3}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{D}{\alpha} - \frac{\beta C}{\alpha^2} + \frac{(\beta^2 - \alpha\gamma)B}{\alpha^3} - \frac{(\beta^3 - 2\alpha\beta\gamma + \alpha^2\delta)A}{\alpha^4}$$

etc.

§. 4. Hoc itaque modo, qui diuisioni actuali idem omnino praebiturae anteferendus videtur, facili negotio inuenitur fractionis $\frac{M}{N}$ pars integra

$$\mathfrak{A}x^m + \mathfrak{B}x^{m-1} + \mathfrak{C}x^{m-2} + \mathfrak{D}x^{m-3} + \ldots\ldots + \mathfrak{M}.$$

definiendis scilicet coefficientibus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc.

His autem definitis simul obtinebitur pars integralis quaesiti, ex ista parte integra oriunda, quippe quae erit:

$$\frac{\mathfrak{A}x^{m+1}}{m+1} + \frac{\mathfrak{B}x^m}{m} + \frac{\mathfrak{C}x^{m-1}}{m-1} + \ldots\ldots + \mathfrak{M}x + \mathfrak{N}$$

denotante $\mathfrak{N}$ quantitatem quamcunque constantem. Neque vero opus est, quemadmodum ante, methodo minus genuina vsi, fecimus, vt simul partem fractam, quae cum parte integra inuenta coniuncta totam fractionem propositam $\frac{M}{N}$ constituat, determinemus; sed sufficiet partem integram tantum inuestigasse, ex eaque integralis partem conuenientem eruisse. Reliquas enim integralis partes ex partibus fractis fractionis $\frac{M}{N}$ oriundas immediate ex ipsa fractione $\frac{M}{N}$ elicere docebimus, ita vt non opus habeamus illa saepenumero laboriosa reductione fractiones $\frac{M}{N}$ ad aliam, in qua variabilis x pauciores obtineat dimensiones in numeratore M quam in denominatore N; quae tamen reductio

ductio necessaria erat visa in methodo praecedente; vbi praeterea factores solitarios denominatoris N formae x^k seorsim elicere, atque reliqui denominatoris terminum absolutum vnitati aequalem efficere coacti fueramus. Methodo autem, quam hic sumus tradituri, nulla istiusmodi praeparatione erit opus.

§. 5. Inuenta parte integra, si quae continetur in fractione $\frac{M}{N}$, ex eaque integralis parte conueniente, progrediamur ad partes fractas singulas simpliciores in fractione $\frac{M}{N}$ contentas eruendas, vt ex his quoque integralis quaesiti partes oriundae obtineantur. Ista autem inuestigatio maximam partem in inuentione factorum simpliciorum denominatoris N absoluitur: qui factores, cum ex instituto nostro, quo totum integrale in forma reali exhibere constituimus, debeant esse reales, erunt illi vel simplices binomiales huius formae $p x + q x$, vel trinomiales $p + q x + r x x$, cuiusmodi factores reales semper exhiberi posse cum docuimus, tum in sequentibus fusius docebimus, etiamsi factores simplices sint imaginarii. Primum igitur de factoribus simplicibus $p x + q x$ agemus, qui in denominatore N continentur; inueniuntur hi ex resolutione aequationis $N = o$; quod si enim huius aequationis radix fuerit inuenta $x = a$, tum simul $x - a$ diuisor erit quantitatis N. Omnia ergo subsidia, quae adhuc sunt inuenta ad radices aequationum algebraicarum eruendas, in praesenti negotio maximam afferent vtilitatem. Probe autem discerni debebunt factores reales ab imaginariis, cum priores solos hoc loco in vsum vocemus, posteriores seorsim tractaturi. Ex resolutione vero aequationum intelligitur, si maximus exponens

ponens ipsius x in N fuerit numerus impar, tum denominatorem N certissime vnum esse habiturum factorem simplicem realem; praeterea vero subinde plures habebit, id quod aequationis $N=0$ resolutio docebit.

§. 6. Sit igitur $p+qx$ factor denominatoris N isque realis; atque ex eo nascatur fractionis propositae $\frac{M}{N}$ ista pars $\frac{P}{p+qx}$; cuius numeratorem P, quem quantitatem constantem esse oportet, sequenti ratiocinio determinabimus. Cum $p+qx$ sit factor denominatoris N, sit $\frac{N}{p+qx}=S$; eritque alterius fractionis, quae instar complementi cum $\frac{P}{p+qx}$ coniuncta constituit fractionem $\frac{M}{N}$, denominator S. Quare si a fractione $\frac{M}{N}$ seu $\frac{M}{(p+qx)S}$ subtrahamus fractionem simplicem $\frac{P}{p+qx}$, residuae fractionis $\frac{M-PS}{(p+qx)S}$, numerator $M-PS$ diuisibilis erit per $p+qx$, quo fractio oriatur denominatorem habens S, vti innuimus. Cum igitur quantitas $M-PS$ sit diuisibilis per $p+qx$, fiet ea $=0$ si ponatur $p+qx=0$ siue $x=-\frac{p}{q}$. Substituto ergo in M et S vbique $-\frac{p}{q}$ loco x, erit $M-PS=0$, hincque nascitur $P=\frac{M}{S}$. Erit itaque numerator ille constans assumtus $P=\frac{M}{S}$ postquam in M et S vbique loco x substitutum fuerit $-\frac{p}{q}$; quo facto quantitas $\frac{M}{S}$ abibit in quantitatem constantem. Ex denominatoris ergo N factore $p+qx$ oritur fractionis $\frac{M}{N}$ pars $\frac{M}{S(p+qx)}$ hincque integralis quaesiti proueniet pars $\frac{M}{S}\int\frac{dx}{p+qx}=\frac{M}{Sq}l(p+qx)$, sicque ex singulis denominatoris N factoribus simplicibus conuenientes integralis partes reperientur.

Exemplum 1.

Exemplum. 1.

§. 7. Huius formulae differentialis $\frac{x^3+x^2}{x-1}dx$ integrale inuenire.

Quia hic est $\frac{M}{N}=\frac{x^3+x^2}{x-1}$, in hac fractione partes integrae continentur, quae vel per diuisionem vel modum ante traditum erutae erunt x^2+2x+2 vnde nascitur haec integralis pars $\frac{x^3}{3}+xx+2x+C$. Deinde cum totus denominator N ex vnico factore $x-1$ constet, erit $p=-1$, $q=1$ et $S=\frac{N}{x-1}=1$. Iam ex factore $x-1$ nihilo aequali posito oritur $x=1$, quo valore in $\frac{M}{S}=x^3+x^2$ substituto prodit 2, ideoque ex denominatore N obtinetur integralis pars haec $2\int\frac{dx}{x-1}=2\,l(x-1)$. Quoniam vero totum integrale componitur ex partibus, quae tam ex parte integra quam fracta resultant, erit integrale formulae propositae $\frac{x^3+x^2}{x-1}dx$ haec quantitas finita $\frac{x^3}{3}+x^2+2x+C+2\,l(x-1)$ cuius veritas per differentiationem faci e comprobatur.

Exemplum. 2.

§. 8. Huius formulae differentialis $\frac{xx+2ax}{aa-xx}dx$ integrale inuenire.

Quia variabilis x in numeratore $xx+2ax$ tot habet dimensiones, quot in denominatore $aa-xx$ pars integra in fractione $\frac{xx+2ax}{aa-xx}$ continetur, quae per diuisionem est -1, vnde integralis pars nascitur $-x+C$. Porro denominator $aa-xx$ in factores $(a-x)(a+x)$ resoluitur: ex priori $a-x$ fit $x=a$, et $\frac{M}{S}=\frac{xx+2ax}{a+x}=\frac{3a}{2}$ posito $x=a$; vnde integralis pars ex factore $a-x$ oriunda est $=\frac{3a}{2}\int\frac{dx}{a-x}=$

$-\frac{3a}{2}l(a-x)$. Ex altero factore $a+x$, qui dat $x=-a$, fit $\frac{M}{S}=\frac{xx+2ax}{a-x}=-\frac{a}{2}$; indeque integralis pars oritur haec $-\frac{a}{2}\int\frac{dx}{a+x}=-\frac{a}{2}l(a+x)$. Integrale ergo quaesitum repertum est $=C-x-\frac{3a}{2}l(a-x)-\frac{a}{2}l(a+x)$

Exemplum 3.

§. 9. Huius formulae differentialis $\frac{xxdx}{(1-x)(2-x)(3-x)(4-x)}$ integrale inuenire.

Hic variabilis x in numeratore pauciores habet dimensiones, quam in denominatore; ideoque in hac fractione partes integrae non continentur. Ad denominatoris ergo factores aggredimur, qui singuli sunt simplices reales. Primus factor $1-x$ dat $x=1$, et $S=(2-x)(3-x)(4-x)$ hincque $\frac{M}{S}=\frac{xx}{(2-x)(3-x)(4-x)}=\frac{1}{6}$ posito $x=1$: ex primo ergo factore $1-x$ nascitur integralis pars $\frac{1}{6}\int\frac{dx}{1-x}=-\frac{1}{6}l(1-x)$. Secundus factor $2-x$ dat $x=2$, et $\frac{M}{S}=\frac{xx}{(1-x)(3-x)(4-x)}=-\frac{4}{2}=-2$ posito $x=2$ hincque nascitur integralis pars $-2\int\frac{dx}{2-x}=2l(2-x)$. Tertius factor $3-x$ dat $x=3$ et $\frac{M}{S}=\frac{xx}{(1-x)(2-x)(4-x)}=\frac{9}{2}$ vnde oritur integralis pars $\frac{9}{2}\int\frac{dx}{3-x}=-\frac{9}{2}l(3-x)$. Quartus factor $4-x$ dat $x=4$ et $\frac{M}{S}=\frac{xx}{(1-x)(2-x)(3-x)}=\frac{16}{1\cdot2\cdot3}=-\frac{16}{6}=-\frac{8}{3}$; vnde prodit conueniens integralis pars $-\frac{8}{3}\int\frac{dx}{4-x}=\frac{8}{3}l(4-x)$. Ex his ergo formulae differentialis propositae $\frac{xxdx}{(1-x)(2-x)(3-x)(4-x)}$ integrale colligitur $=C-\frac{1}{6}l(1-x)+2l(2-x)-\frac{9}{2}l(3-x)+\frac{8}{3}l(4-x)$.

§. 10.

§. 10. **Ex** his igitur exemplis clare intelligitur, quemadmodum propositae formulae differentialis, cuius denominator in factores simplices reales inter se inaequales est resolubilis, integrale inueniri oporteat, siue variabilis x in numeratore pauciores siue plures habeat dimensiones quam in denominatore. Huius negotii praecipua pars absoluitur in coefficientis inuestigatione per quem formula $\int \frac{dx}{p+qx}$ multiplicari debet, vt integrale ex denominatoris N factore $p+qx$ oriundum obtineatur. Inuenimus autem hunc coefficientem esse $\frac{M}{S}$, postquam vbique loco x eius valor $-\frac{p}{q}$ quem obtinet ex aequatione $p+qx=0$ fuerit substitutus. Hunc igitur valorem $-\frac{p}{q}$ loco x tum in M quam in S substitui oportet. Est autem M numerator formulae differentialis propositae $\frac{M}{N}dx$, qui perpetuo manet idem, at S pro quouis factore denominatoris $p+qx$ variatur, cum sit $S=\frac{N}{p+qx}$: ita vt S habeatur, si totus denominator N per suum factorem $p+qx$ diuidatur. Quodsi ergo denominator N in suos factores iam fuerit vel actu resolutus, vel facile resolubilis, tum omittendo factorem propositum $p+qx$ statim emergit valor litterae S; in quo loco x valorem constantem $-\frac{p}{q}$ substitui oportet: hocque casu expedite reperitur valor coefficientis $\frac{M}{S}$ ponendo vbique $-\frac{p}{q}$ loco x.

§. 11. Sin autem quotus, qui oritur ex diuisione denominatoris N per suum factorem $p+qx$, fiat admodum prolixus, vel etiam indefinitus, vti si fuerit $N=1+x^{50}$ eiusque diuisor $1+x$, vel si fit $N=1-x^{n}$ eiusque factor $1-x$: priori enim casu quotus S constaret ex 99 terminis, posteriori autem numerus terminorum foret etiam indefinitus n; vnde substitutio loco x facienda fieret admodum operosa, neque valor ipsius S, nisi summatio serierum in subsidium vocetur, commode exhiberi posset. His igitur casibus alium modum tradi conueniet, quo expedite valor ipsius S, quem induit posito $-\frac{p}{q}$ loco x, indicari queat. Cum enim sit $S = \frac{N}{p+qx}$, quaeritur valor fractionis $\frac{N}{p+qx}$ resultans, si loco x ponatur $-\frac{p}{q}$: hoc autem casu non solum denominator fractionis $\frac{N}{p+qx}$ euanescit, sed etiam numerator N, eo quod ipse sit per $p+qx$ diuisibilis. Quocirca valor fractionis $\frac{N}{p+qx}$ posito $-\frac{p}{q}$ loco x idem erit ac fractionis huius $\frac{dN}{q\,dx}$ eadem facta substitutione, quae fractio ex illa oritur differentiando tam numeratorem N quam denominatorem $p+qx$, sumta x pro variabili. Erit itaque $S = \frac{dN}{q\,dx}$ posito vbique $-\frac{p}{q}$ loco x: at totus coefficiens requisitus $\frac{M}{S}$ erit $\frac{Mq\,dx}{dN}$ posito vbique $-\frac{p}{q}$ loco x, vnde pars integralis ex denominatoris N factore $p+qx$ oriunda erit $\frac{Mq\,dx}{dN}\int\frac{dx}{p+qx} = \frac{M\,dx}{dN}\,l(p+qx)$.

§. 12. Compendium hoc insigni emolumento adhibebitur in inueniendis partibus integralis huiusmodi formularum differentialium $\frac{x^m\,dx}{a^n - b^n x^n}$; ex denominatoris $a^n - b^n x^n$ factoribus. Cum enim denominatoris $a^n - b^n x^n$ factor sit $a - bx$, fiet ex hoc factore $S = \frac{a^n - b^n x^n}{a - bx}$ existente $M = x^m$ et $N = a^n - b^n x^n$. Facto ergo $x = \frac{a}{b}$ fiet

x fiet $M = \frac{a^m}{b^m}$ et $S = \frac{-nb^n x^{n-1} dx}{-bdx} = nb^{n-1} x^{n-1} = na^{n-1}$ atque $\frac{M}{S} = \frac{a^{m-n+1}}{nb^m}$, qui valor congruit cum $\frac{Mqdx}{dN}$ seu $-\frac{Mbdx}{dN}$ ob $q = -b$ posito $x = \frac{a}{b}$; est enim $dN = -nb^n x^{n-1} dx$; et $-\frac{Mbdx}{dN} = \frac{bx^m}{nb^n x^{n-1}} = \frac{x^{m-n+1}}{nb^{n-1}} = \frac{a^{m-n+1}}{nb^m}$ posito $x = \frac{a}{b}$. Quocirca ex denominatoris $a^n - b^n x^n$ factore $a - bx$ integralis formulae $\frac{x^m dx}{a^n - b^n x^n}$ nascetur ista pars $\frac{a^{m-n+1}}{nb^m} \int \frac{dx}{a-bx} = \frac{-a^{m-n+1}}{nb^{m+1}} l(a-bx)$, quae priori via sine summatione seriem inveniri non potuisset.

§. 13. Duplicem ergo nacti sumus viam partem integralis, quae ex denominatoris N factore quocunque simplici oritur, assignandi. Sit enim in formula differentiali proposita $\frac{M}{N} dx$ denominatoris N factor simplex $p + qx$, erit integralis pars ex hoc factore oriunda vel $\frac{M}{S} \int \frac{dx}{p+qx}$ existente $S = \frac{N}{p+qx}$, vel $\frac{Mqdx}{dN} \int \frac{dx}{p+qx}$, posito in vtroque coefficiente vbique $-\frac{p}{q}$ loco x, quem valorem x obtinet ex posito factore $p + qx = 0$. Quouis igitur casu oblato ea via vti conueniet, quae fuerit facilior atque ad operationem accommodatior: perpetuo enim vtraque via ad eundem coefficientem deducet. Sic in hac formula differentiali $\frac{dx}{1+x-2x^4}$ est $M = 1$, et $N = 1 + x - 2x^4$, huiusque denominatoris diuisor $1 - x$, ita vt sit $p = 1$,

 $q =$

$q = -1$. Via ergo priori est $S = 1 + 2x + 2xx + 2x^3$, et $\frac{M}{S} = \frac{1}{7}$ posito $x = 1$; vnde integralis pars ex factore $1 - x$ oriunda erit $\frac{1}{7}\int \frac{dx}{1-x} = -\frac{1}{7}\, l(1-x)$. Via autem posteriori est $dN = dx - 8x^3 dx$, et $\frac{M\,dx}{dN} = \frac{1}{8x^3 - 1} = \frac{1}{7}$ posito $x = 1$, prorsus vt ante.

§. 14. Quamquam haec methodus perpetuo tuta nullisque difficultatibus obnoxia videatur, tamen eius vsus penitus cessat, si denominator N duos pluresue habeat factores inter se aequales. Ponamus enim denominatorem N diuisibilem esse per $(p + qx)^2$; erit coefficiens portionis integralis $\int \frac{dx}{p+qx}$ pro vno factore $p + qx$ vti vidimus $= \frac{M}{S}$ posito $p + qx = 0$ seu $x = -\frac{p}{q}$. Quoniam vero est $S = \frac{N}{p+qx}$; erit S etiamnunc per $p + qx$ diuisibile ideoque facto $x = -\frac{p}{q}$ fiet $S = 0$, hincque coefficiens $\frac{M}{S}$ abibit in infinitum. Vtriusque ergo portionis integralis $\int \frac{dx}{p+qx}$ ex binis factoribus $p + qx$ et $p + qx$ oriundae coefficiens fiet infinitus, alterius quidem affirmatiuus, alterius negatiuus, ita vt integralis portio ex binis coniunctim oriunda sit differentia inter duo infinita, quam finitam esse posse ex natura infiniti satis liquet. Quanta autem sit ea differentia, ex alio fonte decidi oportet, quem mox aperiemus.

§. 15. Ponamus igitur fractionis $\frac{M}{N}$ denominatorem N duos habere factores aequales seu diuisibilem esse per $(p + qx)^2$, ita vt sit $N = (p + qx)^2 S$, atque partem fractionis $\frac{M}{N}$, quae ex hoc factore quadrato $(p + qx)^2$ oritur, seorsim inuestigemus. Sit igitur pars ista $= \frac{A}{p+qx} + \frac{B}{(p+qx)^2}$; ac reliqua pars, quae cum hac fractionem $\frac{M}{N}$ consti-

constituit, sit $\frac{T}{S}$; vbi A et B quantitates constantes, T vero functionem variabilem ipsius x integram denotabit, quam nosse non opus habemus, sufficiet enim coefficientes A et B determinasse. Cum igitur sit $\frac{T}{S} = \frac{M}{N} - \frac{A}{p+qx} - \frac{B}{(p+qx)^2}$, ob $N = (p+qx)^2 S$ erit $\frac{T}{S} = \frac{M - A(p+qx)S - BS}{(p+qx)^2 S}$ ideoque $T = \frac{M - A(p+qx)S - BS}{(p+qx)^2}$, quae cum quantitas integra esse debeat, necesse est vt quantitas $M - A(p+qx)S - BS$ sit diuisibilis per $(p+qx)^2$. Quoniam autem S non amplius per $p+qx$ diuisibilem esse ponimus, eo quod denominatorem N tantum per quadratum $(p+qx)^2$ non vero aliam potestatem superiorem diuisibilem esse assumimus, necesse est vt $\frac{M}{S} - A(p+qx) - B$ sit diuisibile per $(p+qx)^2$. Ex natura igitur aequationum, cum quantitas $\frac{M}{S} - A(p+qx) - B$ duos habeat factores aequales, oportet, vt tam ipsa, quam eius differentiale $d.\frac{M}{S} - Aqdx$ sit diuisibilis per $p+qx$; ergo tam ipsa illa quantitas, quam eius differentiale euanescet posito $p+qx=0$ seu $x = -\frac{p}{q}$. Fiat igitur $x = -\frac{p}{q}$; et prior aequatio dabit $\frac{M}{S} - B = 0$ seu $B = \frac{M}{S}$; posterior vero $A = \frac{d.\frac{M}{S}}{qdx}$. Determinatis ergo coefficientibus A et B, ex formula differentiali $\frac{M}{N}dx$, cuius denominator N factorem habet $(p+qx)^2$, hic ipse factor praebebit inregralis partem hanc $\frac{d.\frac{M}{S}}{qdx}\int\frac{dx}{p+qx} + \frac{M}{S}\int\frac{dx}{(p+qx)^2}$ posito in coefficientibus vbique $-\frac{p}{q}$ loco x.

§. 16. Si denominator N habeat tres factores aequales seu diuisibilis sit per $(p+qx)^3$; ex eo orietur eius-

modi

modi pars $\frac{A}{(p+qx)^3} + \frac{B}{(p+qx)^2} + \frac{C}{p+qx}$, quae a fractione $\frac{M}{N}$ ablata relinquet fractionem $\frac{T}{S}$ existente $S = \frac{N}{(p+qx)^3}$. Fiet ergo $T = \frac{M-AS-B(p+qx)S-C(p+qx)^2 S}{(p+qx)^3}$, quae, cum quantitas integra esse debeat, oportebit $M-AS-B(p+qx)S-C(p+qx)^2 S$ seu $\frac{M}{S}-A-B(p+qx)-C(p+qx)^2$ diuisibile esse per $(p+qx)^3$: id quod eueniet, sit et ipsa illa quantitas, et eius differentiale, et eius differentio-differentiale fuerint per $p+qx$ diuisibilia. Quare sequentes tres quantitates

$$\frac{M}{S}-A-B(p+qx)-C(p+qx)^2$$
$$d.\frac{M}{S}-Bqdx-2C(p+qx)qdx$$
$$dd.\frac{M}{S}-2Cqqdx^2$$

diuisibiles esse oportet per $p+qx$; ideoque singulae, si in ipsis ponatur $p+qx=0$ seu $x=-\frac{p}{q}$, euanescent. Ponatur ergo in singulis $x=-\frac{p}{q}$, atque ex prima orietur $A=\frac{M}{S}$; ex secunda $B=\frac{1}{qdx}d.\frac{M}{S}$ et ex tertia $C=\frac{1}{2qqdx^2}dd.\frac{M}{S}$. His coefficientibus inuentis ex denominatoris N factore cubico $(p+qx)^3$ orietur sequens integralis pars

$$\frac{M}{S}.\int\frac{dx}{(p+qx)^3}+\frac{1}{qdx}d.\frac{M}{S}.\int\frac{dx}{(p+qx)^2}+\frac{1}{2q^2dx^2}dd.\frac{M}{S}.\int\frac{dx}{p+qx}$$

posito in coefficientibus vbique $-\frac{p}{q}$ loco x; ac existente $S=\frac{N}{(p+qx)^3}$.

§. 17. Simili modo si ponamus formulae differentialis $\frac{M}{N}dx$ denominatorem N quatuor habere factores aequales seu diuisibilem esse per $(p+qx)^4$, ita vt sit $S=\frac{N}{(p+qx)^4}$ quantitas integra. Quod si iam ex hoc factore $(p+qx)^4$ nasci ponatur ista integralis pars $A\int\frac{dx}{(p+qx)^4}+B\int\frac{dx}{(p+qx)^3}$

$+C$

$+ C\int\frac{dx}{(p+qx)^2} + D\int\frac{dx}{p+qx}$; ostendetur pari, quo ante, modo hanc quantitatem

$$\frac{M}{S} - A - B(p+qx) - C(p+qx)^2 - D(p+qx)^3$$

diuisibilem esse oportere per $(p+qx)^4$. Hoc autem eveniet si praeter hanc ipsam quantitatem eius differentialia primi, secundi ac tertii gradus singula fuerint diuisibilia per $p+qx$. Hinc itaque per $p+qx$ diuisibiles erunt quatuor sequentes quantitates

$$\frac{M}{S} - A - B(p+qx) - C(p+qx)^2 - D(p+qx)^3$$
$$d.\frac{M}{S} - Bqdx - 2C(p+qx)qdx - 3D(p+qx)^2 qdx$$
$$dd.\frac{M}{S} - 2Cqqdx^2 - 6D(p+qx)q^2dx^2$$
$$d^3.\frac{M}{S} - 6Dq^3dx^3.$$

singulae ergo euanescent, posito $x = \frac{-p}{q}$. Facto autem vbique $x = \frac{-p}{q}$, prima aequatio dabit $A = \frac{M}{S}$; secunda dabit $B = \frac{1}{qdx}\, d.\frac{M}{S}$; tertia dabit $C = \frac{1}{2q^2dx^2}\, dd.\frac{M}{S}$, et quarta dabit $D = \frac{1}{6q^3dx^3}\, d^3.\frac{M}{S}$. Ex his colligitur integralis pars ex denominatoris factore $(p+qx)^4$ oriunda $=$
$\frac{M}{S}\int\frac{dx}{(p+qx)^4} + \frac{1}{qdx}\, d.\frac{M}{S}\int\frac{dx}{(p+qx)^3} + \frac{1}{2q^2dx^2}\, dd.\frac{M}{S}\int\frac{dx}{(p+qx)^2}$
$+ \frac{1}{6q^3dx^3}\, d^3.\frac{M}{S}\int\frac{dx}{p+qx}$ posito in omnibus coefficientibus $x = \frac{-p}{q}$.

§. 18. Facili igitur negotio hos coefficientes determinamus, quos in superiori tractatione per prolixissimos calculos eruimus, ac pro altioribus potestatibus tantum per inductionem conclusimus; haecque determinatio pro factoribus simplicibus cuiuscunque formae valet, cum superior ad hanc tantum formam $1+qx$ esset accommodata. Hic autem vlterius progrefsuri inductione non indigemus; si enim denominatoris N factor sit $(p+qx)^n$; hincque integralis pars oriunda ponatur $= A\int\frac{dx}{(p+qx)^n} + B\int\frac{dx}{(p+qx)^{n-1}} + C\int\frac{dx}{(p+qx)^{n-2}} + D\int\frac{dx}{(p+qx)^{n-3}} +$ etc. ratiocinio supra adhibito patebit, posito $S = \frac{N}{(p+qx)^n}$, per $(p+qx)^n$ diuisibilem esse debere hanc expressionem $\frac{M}{S} - A - B(p+qx) - C(p+qx)^2 - D(p+qx)^3 - E(p+qx)^4 -$ etc. Tam igitur haec ipsa expressio, quam eius differentialia ordinis primi, secundi, tertii, etc. vsque ad ordinem $n-1$ inclusiue singula per $p+qx$ diuisibilia esse oportet,

$\frac{M}{S} - A - B(p+qx) - C(p+qx)^2 - D(p+qx)^3 - E(p+qx)^4 -$ etc.
$d.\frac{M}{S} - Bqdx - 2C(p+qx)qdx - 3D(p+qx)^2 qdx -$ etc.
$dd.\frac{M}{S} - 2Cq^2dx^2 - 6D(p+qx)q^2dx^2 - 12E(p+qx)^2q^2dx^2 -$ etc.
$d^3.\frac{M}{S} - 6Dq^3dx^3 - 24E(p+qx)q^3dx^3 - 60F(p+qx)q^3dx^3 -$ etc.
$d^4.\frac{M}{S} - 24Eq^4dx^4 - 120F(p+qx)q^4dx^4 -$ etc.
$d^5.\frac{M}{S} - 120Fq^5dx^5 -$ etc.

Quod si iam ponatur $p+qx=0$ seu $x=\frac{-p}{q}$, singulae istae expressiones euanescunt; indeque reperitur

$A = \frac{M}{S}$	$D = \frac{1}{6q^3dx^3}\,d^3.\frac{M}{S}$
$B = \frac{1}{qdx}\,d.\frac{M}{S}$	$E = \frac{1}{24q^4dx^4}\,d^4.\frac{M}{S}$
$C = \frac{1}{2q^2dx^2}\,dd.\frac{M}{S}$	$F = \frac{1}{120q^5dx^5}\,d^5.\frac{M}{S}$
	etc.

Ex

Ex his igitur colligitur integralis quaesiti pars ex denominatoris N factore $(p+qx)^n$ oriunda fore

$$\frac{M}{S}\int\frac{dx}{(p+qx)^n}+\frac{1}{qdx}d.\frac{M}{S}\int\frac{dx}{(p+qx)^{n-1}}+\frac{1}{2q^2dx^2}dd.\frac{M}{S}\int\frac{dx}{(p+qx)^{n-2}}$$

$$+\frac{1}{6q^3dx^3}d^3.\frac{M}{S}\int\frac{dx}{(p+qx)^{n-3}}+\frac{1}{24q^4dx^4}d^4.\frac{M}{S}\int\frac{dx}{(p+qx)^{n-4}}$$

$$+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)q^{n-1}dx^{n-1}}d^{n-1}.\frac{M}{S}\int\frac{dx}{p+qx}$$

existente $S=\frac{N}{(p+qx)^n}$ atque in coefficientibus vbique posito $x=\frac{-p}{q}$.

Exemplum 4.

§. 19. Huius formulae differentialis $\frac{(1-x)dx}{x^4(2x-1)^3(3x-2)^2(4x-3)}$ integrale inuenire.

Hic est $M=1-x$ et $N=x^4(2x-1)^3(3x-2)^2(4x-3)$ et cum variabilis x in numeratore M pauciores habeat dimensiones quam in denominatore N, nulla pars integra in fractione $\frac{M}{N}$ continetur, nullaque inde nascitur integralis pars. Consideremus ergo factores denominatoris, ac primo quidem x^4, erit $S=(2x-1)^3(3x-2)^2(4x-3)$. et $p=0$, atque $q=1$; vnde ponendum erit $x=\frac{-p}{q}=0$. Iam ad coefficientes requisitos inueniendos erit

$$\frac{M}{S}=\frac{1-x}{(2x-1)^3(3x-2)^2(4x-3)}=\frac{1}{12}$$

$$d.\frac{M}{S}=\frac{120x^3-288xx+223x-56}{(2x-1)^4(3x-2)^3(4x-3)^2}dx=\frac{7}{9}.dx$$

$$dd.\frac{M}{S}=\frac{-17280x^5+65664x^4-98016x^3+72068x^2-26162x+3758}{(2x-1)^6(3x-2)^4(4x-3)^3}dx^2=\frac{1879}{216}dx^2$$

$$d^3.\frac{M}{S}=\left(\frac{-26162}{432}+\frac{37580}{432}+\frac{45096}{864}+\frac{45096}{1296}\right).dx^3=\frac{24499}{216}dx^3$$

 Hinc

Hinc ex denominatoris factore x^4 nascitur integralis pars haec $\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x^4}+\frac{7}{9}\int\frac{dx}{x^3}+\frac{1879}{432}\int\frac{dx}{xx}+\frac{24499}{1296}\int\frac{dx}{x}$ seu $C-\frac{1}{36x^3}-\frac{7}{18xx}-\frac{1879}{432x}+\frac{24499}{1296}\,l\,x$.

Sumamus alterum factorem $(2x-1)^3$, quo est $q=2$; $p=-1$; est valor pro x substituendus $=\frac{1}{2}$: deinde est $S=x^4(3x-2)^2(4x-3)$ atque coefficientes quaesiti

$$\frac{M}{S}=\frac{1-x}{x^4(3x-2)^2(4x-3)}=-32.$$

$$\frac{1}{dx}\,d.\frac{M}{S}=\frac{72x^3-168x^2+112x-24}{x^5(3x-2)^3(4x-3)^2}=-192.$$

$$\frac{1}{dx^2}\,dd.\frac{M}{S}=-3200.$$

Integralis ergo pars ex factore $(2x-1)^3$ oriunda est $-32\int\frac{dx}{(2x-1)^3}-96\int\frac{dx}{(2x-1)^2}-400\int\frac{dx}{2x-1}$ siue $+\frac{8}{(2x-1)^2}+\frac{48}{2x-1}-200\,l(2x-1)$

Tertius denominatoris factor $(3x-2)^2$ dat $p=-2$ et $q=3$, atque $S=x^4(2x-1)^3(4x-3)$ vnde ponendo $x=\frac{2}{3}$ oriuntur coefficientes

$$\frac{M}{S}=\frac{1-x}{x^4(2x-1)^3(4x-3)}=-\frac{2187}{16}$$

$$\frac{1}{dx}\,d.\frac{M}{S}=+\frac{32805}{16}$$

integralis ergo pars ex factore $(3x-2)^2$ oriunda erit $-\frac{2187}{16}\int\frac{dx}{(3x-2)^2}+\frac{10935}{16}\int\frac{dx}{3x-2}$ siue $+\frac{729}{16(3x-2)}+\frac{3645}{16}\,l(3x-2)$

Tandem vltimus factor $4x-3$, dat $x=\frac{3}{4}$ atque $S=x^4(2x-1)^3(3x-2)^2$ vnde erit

$$\frac{M}{S}=\frac{1-x}{x^4(2x-1)^3(3x-2)^2}=\frac{8192}{81}$$

vnde integrale ex hoc factore oriundum erit

$$\frac{8192}{81}\int\frac{dx}{4x-3}=\frac{2048}{81}\,l(4x-3)$$

Formulae

Formulae itaque differentialis propositae huius

$$\frac{(1+x)\,dx}{x^4(2x-1)^3(3x-2)^2(4x-3)}$$

integrale completum erit =

$$C - \frac{1}{36x^3} - \frac{7}{48xx} - \frac{1079}{432x} + \frac{24499}{1296}\,lx - 200\,l(2x-1) + \frac{3645}{16}\,l(3x-2)$$
$$+ \frac{8}{(2x-1)^2} + \frac{48}{2x-1} + \frac{729}{16(3x-2)} + \frac{2048}{81}\,l(4x-3)$$

§. 20. Conuenit quandoque loco differentiationum ipsius $\frac{M}{S}$ ipso principio vti, vnde eas deduximus; hocque modo facilius peruenietur ad numeratorem quaesitum. Scilicet si denominatoris N factor fuerit R, ita vt sit $N = RS$, in fractione $\frac{M}{N}$ seu $\frac{M}{RS}$ continebitur fractio simplicior $\frac{V}{R}$, si ea fuerit summa harum $\frac{V}{R} + \frac{T}{S}$. Fiet ergo $M = VS + TR$, vnde oritur $T = \frac{M - VS}{R}$. Quare cum T sit quantitas integra, pro V eiusmodi quantitatem integram quaeri oportet, vt $M - VS$ diuisibile fiat per R; quod autem ita effici debet, vt variabilis x, pauciores obtineat dimensiones in V quam in R. Haec vero quantitatis V inventio interdum sine differentiationibus facilius absoluitur, solo ratiocinio. Sit enim pro $\frac{M}{N}$ proposita ista fractio $\frac{1}{x^m(1+x^n)}$, vbi est $M = 1$, $R = x^m$, et $S = 1 + x^n$; atque ad quaerendam fractionem $\frac{V}{x^m}$ in illa fractione contentam, in cuius numeratore V variabilis x pauciores habeat dimensiones quam m; oportet pro V eius modi functionem inuestigare, vt $1 - V(1 + x^n)$ fiat diuisibile per x^m.

 Patet

Patet autem, vt 1 tollatur, esse debere $V = 1 + X$, quo substituto haec quantitas $X + x^n + X x^n$ diuisibilis est reddenda per x^m. Perspicuum autem est si fuerit $m < n$, tum diuisionem succedere si $X = 0$, ideoque casu $m < n$ in fractione $\frac{1}{x^m(1 + x^n)}$ continetur haec simplicior $\frac{1}{x^m}$. Quod si autem sit $m > n$ tum ponatur $X = Y - x^n$, habebiturque $Y + x^{2n} + Y x^n$ diuisibile per x^m: euenit hoc si $m < 2n$ posito $Y = 0$; quare si $m > n$ et $m < 2n$, tum erit $X = -x^n$ et $V = 1 - x^n$. Hinc facile consequimur generatim fractionem $\frac{V}{x^m}$ fore $\frac{1 - x^n + x^{2n} - x^{3n} + x^{4n} - \text{etc.}}{x^m}$ in cuius numeratore tot capiendi sunt termini, quoad ad exponentem ipsius x maiorem quam m perueniatur. In formula ergo differentiali $\frac{dx}{x^m(1 + x^n)}$ ex denominatoris factore x^m haec elicitur integralis pars

$$\int \frac{dx}{x^m} - \int \frac{dx}{x^{m-n}} + \int \frac{dx}{x^{m-2n}} - \int \frac{dx}{x^{m-3n}} + \text{etc.}$$

eousque continuanda, donec exponentes ipsius x fiant negatiui: ista autem integralis pars hoc pacto multo facilius reperitur, quam per differentiationes ante indicatas.

§. 21. Exposuimus igitur modum facilem atque expeditum ex factoribus simplicibus denominatoris N in formula differentiali $\frac{M}{N}dx$, ac potestatibus eorum, quae quidem in N continentur, partes integralis quaesiti respondentes inueniendi. Totum enim integrale formulae $\frac{M\,dx}{N}$ componitur ex partibus, quae cum ex quantitatibus integris

integris in fractione $\frac{M}{N}$ contentis oriuntur, tum ex singulis factoribus denominatoris N. Eae quidem integralis partes, quae ex quantitate integra in fractione $\frac{M}{N}$ contenta nascuntur, sunt perpetuo quantitates algebraicae; illae autem quae ex factoribus simplicibus denominatoris N proficiscuntur, sint quantitates logarithmicae, cum quibus etiam algebraicae coniunguntur, si potestas cuiuspiam factoris simplicis in denominatore N contineatur; hocque casu subinde euenire potest, vt in integrali pars logarithmica penitus euanescat, solaeque quantitates algebraicae superstites maneant. Quod si igitur denominator N omnes factores simplices habeat reales, tum integrale formulae differentialis $\frac{M\,dx}{N}$ nisi est quantitas algebraica, per logarithmos exhiberi potest. Sin autem in denominatore N contineantur factores simplices imaginarii, tum quidem per methodum integrandi hic expositam perueniretur ad logarithmos imaginarios, quos autem, siquidem quantitatem realem prae se ferant, ad arcus circulares reduci posse constat. Supra autem iam obseruauimus, si denominator N habeat factores simplices imaginarios, tum eorum numerum semper esse parem, atque ex iis binos semper ita esse comparatos, vt eorum productum fiat expressio realis. Hanc obrem loco factorum simplicium imaginariorum formari poterunt factores trinomiales reales, quorum numerus erit duplo minor, ex hisque factoribus peruenietur ad integralis partes a quadratura circuli pendentes.

§. 22. Praecipuum igitur negotium, si denominator N habeat factores simplices imaginarios, in hoc versabitur, vt ipsius denominatoris N factores trinomiales reales exhibeantur

hibeantur, in quibus factores imaginarii contineantur. Sit itaque $p + rx + qxx$ huiusmodi factor trinomialis ipsius N, cuius factores simplices sint imaginarii, erit $4pq > rr$ seu $\frac{r}{2\sqrt{pq}} < 1$. Denotabit igitur $\frac{r}{2\sqrt{pq}}$ cosinum cuiuspiam anguli qui sit Φ, ita vt sit $\frac{r}{2\sqrt{pq}} = \text{cos. A.}\,\Phi$ et $r = 2\sqrt{pq}.\,\text{cos. A}\,\Phi$. Quamobrem generalis forma huiusmodi factoris trinomialis erit

$$p - 2x\sqrt{pq}.\,\text{cos. A}\,\Phi + qxx$$

atque ideo in hoc nobis erit elaborandum, vt inueniamus an huiusmodi factores trinomiales in denominatore N contineantur, et quot sint futuri, et quales. Patet autem in hac forma trinomiali etiam factores simplices reales comprehendi, si fiat $\Phi = 0$; tum enim ob $\text{cos. A.}\,\Phi = 1$, erit factor ille trinomialis $= (\sqrt{p} - x\sqrt{q})^2$, indicabitque denominatorem N diuisibilem esse per $\sqrt{p} - x\sqrt{q}$; etsi concludi non potest, etiam ipsius quadratum $(\sqrt{p} - x\sqrt{q})^2$ esse diuisorem ipsius N: inuestigatio enim diuisorum aequalium ex alio fonte est petenda. Quamobrem si determinauerimus, quot variis modis expressio $p - 2x\sqrt{pq}.\,\text{cos.}$ $\text{A}\,\Phi + qxx$ tanquam factor in denominatore N contineatur, tum simul tum omnes factores trinomiales in imaginarios resolubiles, quam etiam ipsos factores simplices reales assequemur. Atque hinc etiam, si ista inuestigatio perpetuo poterit absolui, intelligetur, quod supra iam probauimus, omnes factores simplices imaginarios ad factores trinomiales reales reduci posse.

§. 23. Ponamus ergo denominatoris N factorem esse $p - 2x\sqrt{pq}.\,\text{cos. A}\,\Phi + qxx$

is

is itaque in se complectitur hos binos factores simplices imaginarios:

$$x\sqrt{q}-\sqrt{p}\,.\,\text{cos}.\,A\Phi+\sqrt{-p}\,.\,\text{sin}.\,A\Phi$$
$$x\sqrt{q}-\sqrt{p}\,.\,\text{cos}.\,A\Phi-\sqrt{-p}\,.\,\text{sin}.\,A\Phi$$

si igitur hi factores simplices nihilo aequales ponantur, et valores ipsius x inde oriundi in N substituantur, vtroque casu valor ipsius N euanescet. Fiet autem, valores ipsius x coniunctim exprimendo

$$x=\sqrt{\tfrac{p}{q}}\,.\,\text{cos}.\,A\Phi\pm\sqrt{-\tfrac{p}{q}}\,.\,\text{sin}.\,A\Phi.$$

vel si ponamus commoditatis gratia $f=\sqrt{\frac{p}{q}}$, erit

$$x=f\,\text{cos}.\,A\Phi\pm f\sqrt{-1}\,.\,\text{sin}.\,A\Phi$$

vterque igitur valor ipsius x in N substitutus ad nihilum perducere debet. Colligitur autem cum ex ipsa operatione instituenda, tum ex proprietatibus de multiplicatione arcuum cognitis, singulas ipsius x potestates sequenti modo expressum iri.

$$x^2=ff\,\text{cos}.\,A\,.\,2\Phi\pm ff\sqrt{-1}\,.\,\text{sin}.\,A\,.\,2\Phi$$
$$x^3=f^3\,\text{cos}.\,A\,.\,3\Phi\pm f^3\sqrt{-1}\,.\,\text{sin}.\,A\,.\,3\Phi$$
$$x^4=f^4\,\text{cos}.\,A\,.\,4\Phi\pm f^4\sqrt{-1}\,.\,\text{sin}.\,A\,.\,4\Phi$$

et generaliter

$$x^k=f^k\,\text{cos}.\,A\,.\,k\Phi\pm f^k\sqrt{-1}\,.\,\text{sin}.\,A\,.\,k\Phi$$

Cum igitur loco cuiusuis potestatis ipsius x duo tantum termini substitui debeant, substitutio vtraque pro vtroque signorum ambiguo facile absoluitur. Quod, quo facilius perspiciatur, scribatur in N primo $f^k\,\text{cos}.\,A\,.\,k\Phi$ loco cuiusuis potestatis x^k, sitque quod prodit $=P$; deinde loco x^k

scribatur f^k sin. A. $k\Phi$; et quod prodit, sit $=Q$: atque manifestum est per substitutionem

$$x^k = f^k \text{cos. A}.k\Phi \pm f^k \sqrt{-1}. \text{sin. A}.k\Phi$$

denominatorem abiturum esse in

$$P \pm Q\sqrt{-1}.$$

quae duplex expressio cum debeat esse $=0$, erit tam $P=0$, quam $Q=0$.

§. 24. Ad valores igitur tam pro p et q quam pro arcu Φ inueniendos, qui reddat

$$p - 2x\sqrt{pq}. \text{cos. A}\Phi + qxx$$

factorem denominatoris N, posito $f=\sqrt{\frac{p}{q}}$, duplicem nanciscimur aequationem, primo scilicet loco x^k ponendo f^k cos. A $k\Phi$, oritur aequatio $P=0$; ac deinde loco x^k ponendo f^k sin. A $k\Phi$, orietur altera aequatio $Q=0$, ex quibus duabus aequationibus tum quantitatem f, tum arcum Φ determinari oportebit. Hoc autem pluribus modis semper praestari poterit, tot scilicet, quot varios factores tam simplices quam trinomiales reales denominator N in se complectitur. Simplices quidem prodeunt, si $\Phi=0$, quo casu alter valor Q sponte fit 0, ob sin. A. $k\Phi=0$; tum autem erit cos. A. $k\Phi=1$, ac valor P ex N nascetur, ponendo simpliciter f loco x. Quare, quot ista aequatio $P=0$ habebit radices reales, tot prodibunt factores simplices reales denominatoris N; ac si omnes radices aequationis $P=0$ fuerint reales, tum vlteriori inuestigatione non erit opus. Sin autem radices imaginariae contineantur, tum alios quaeri oportet valores pro arcu Φ, qui aequationibus $P=0$ et $Q=0$ satisfaciant, hincque con-

conuenienter valores pro f elicientur; atque sic factores trinomiales obtinentur, factores simplices imaginarios complectentes. Vsus autem huius regulae clarius apparebit, si eius ope factores trinomiales inuestigemus denominatorum, quos deinceps in exemplis sumus tractaturi. Sit igitur primum sequens proposita forma, cuius factores reales siue simplices siue trinomiales inuestigari oporteat

$$\alpha + \beta x^n$$

§. 25. Quia substitutiones praescriptae loco potestatum ipsius x sunt faciendae, terminus absolutus α ita est spectandus, quasi esset αx^0. Posito ergo loco potestatis ipsius x generalis x^k tam f^k cos. A $k\Phi$, quam f^k sin. A. $k\Phi$, et vtraque expressione resultante facta $=0$, sequentes duae aequationes habebuntur

$$\alpha + \beta f^n \text{ cos. A}.\, n\Phi = 0$$

$$\beta f^n \text{ sin. A}.\, n\Phi = 0.$$

Primum igitur poni potest $\Phi = 0$, quo posteriori aequationi satisfiet, prior vero dabit

$$\alpha + \beta f^n = 0 \text{ seu } f = \sqrt[n]{-\tfrac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\tfrac{p}{q}}$$

vnde oritur diuisor simplex $\sqrt{p} - x\sqrt{q}$ seu $\sqrt[n]{\alpha} - x\sqrt[n]{-\beta}$ siue $\sqrt[n]{-\frac{\alpha}{\beta}} - x$. Quod si ergo sit n numerus impar, semper vnus habetur factor simplex realis $\sqrt[n]{\alpha} - x\sqrt[n]{-\beta}$. At si n sit numerus par, factor simplex realis non dabitur, nisi $-\frac{\alpha}{\beta}$ fuerit quantitas affirmatiua, hoc vero casu duplex habebitur factor simplex realis, nempe $\pm \sqrt[n]{-\frac{\alpha}{\beta}} - x$; siue huius expressionis $\alpha - \beta x^n$ hi duo erunt factores simplices reales $\sqrt[n]{\alpha} + x\sqrt[n]{\beta}$ et $\sqrt[n]{\alpha} - x\sqrt[n]{\beta}$, si quidem n

est numerus par; hi autem casus per se sunt noti, atque in sequenti inuestigatione denuo occurrent.

§ 26. Non igitur sit $\Phi = 0$, atque aequatio posterior dabit sin. $A . n\Phi = 0$: ex quo posita semiperipheria circuli $= \pi$, existente radio $= 1$; erit $n\Phi =$ multiplo cuicunque semiperipheriae π, quod sit $k\pi$, hincque $\Phi = \frac{k\pi}{n}$. Hinc autem fiet cos. $A\, n\,\Phi =$ cos $A\, k\,\pi = \pm 1$: erit nempe cos. $A . n\Phi = + 1$, si k fuerit numerus par, et cos. $A . n\Phi = - 1$ si k fuerit numerus impar. Substituto hoc valore in priori aequatione habebimus $\alpha \pm \beta . f^n = 0$. Hinc duos casus euolui conueniet, prout α et β sint quantitates vel iisdem signis vel diuersis affectae. Sint primo iisdem signis affectae

$$\alpha + \beta x^n$$

atque sumatur k numerus impar, $2k - 1$, vt sit $\Phi = \frac{(2k-1)\pi}{n}$ et cos. $A . n\Phi = - 1$, erit $\alpha - \beta f^n = 0$ et $f = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{p}{q}}$; vnde $p = \sqrt[n]{\alpha^2}$ et $q = \sqrt[n]{\beta^2}$

Formae igitur propositae $\alpha + \beta x^n$ habebimus hunc factorem trinomialem generalem:

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta} . \text{cos. } A . \frac{(2k-1)\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

Atque hinc tot factores diuersi resultabunt, quot loco k numeris integris substituendis diuersi valores pro cos. $A . \frac{(2k-1)\pi}{n}$ oriuntur. Quod si autem loco k successiue omnes numeros integros $1, 2, 3, \ldots\ldots n$ substituamus, tum quilibet factor trinomialis bis occurret, si n fuerit numerus par, sin autem n fuerit numerus impar, tum in medio solitarius factor relinquetur, posito $2k - 1 = n$; hocque casu fit cos. $A . \pi = - 1$; et ex hoc factor simplex

plex realis nascitur $\sqrt[n]{\alpha} + x\sqrt[n]{\beta}$. Factores autem trinomiales obtinentur, ponendo loco $2k-1$ omnes numeros impares minores quam n.

§. 27. Ex his igitur omnes factores tam simplices quam trinomiales reales exhiberi possunt formae

$$\alpha + \beta x^n$$

si enim n sit numerus par, omnes erunt trinomiales, eorumque numerus $= \frac{n}{2}$: qui erunt

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\mathrm{cos}\,A\,.\,\frac{\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\mathrm{cos}\,A\,.\,\frac{3\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\mathrm{cos}\,A\,.\,\frac{5\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$$\vdots$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\mathrm{cos}\,A\,.\,\frac{(n-1)\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

Quod si autem n fuerit numerus impar, tum vnus factor erit simplex, reliqui trinomiales, horumque numerus $= \frac{n-1}{2}$: omnes autem erunt

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\mathrm{cos}\,A\,.\,\frac{\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\mathrm{cos}\,A\,.\,\frac{3\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\mathrm{cos}\,A\,.\,\frac{5\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$$\vdots$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\mathrm{cos}\,A\,\frac{(n-2)\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$$\sqrt[n]{\alpha} + x\sqrt[n]{\beta}$$

 vtro-

vtroque autem casu factores exhibiti actu in se ducti formam propositam $\alpha + \beta x^n$ producent.

§. 28. Sint iam quantitates α et β diuersis signis affectae, seu quaerantur factores huius expressionis

$$\alpha - \beta x^n$$

atque pro k accipi oportebit numerum parem $2k$, ita vt sit $\Phi = \frac{2k\pi}{n}$ et $\alpha - \beta f^n = 0$ seu $f = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{p}{q}}$, vnde $p = \sqrt[n]{\alpha^2}$ et $q = \sqrt[n]{\beta^2}$

Factor igitur trinomialis realis in genere erit

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\text{cos.}\,A.\,\frac{2k\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

atque tot erunt huiusmodi factores, quot varii prodibunt valores pro cos. A. $\frac{2k\pi}{n}$. Omnes autem diuersi prodibunt valores, si pro $2k$ substituantur omnes numeri pares vsque ad n. Et quidem 0 loco $2k$ substituendo oritur factor simplex

$$\sqrt[n]{\alpha} + x\sqrt[n]{\beta}$$

Praeterea vero, si n numerus par et fiat $2k = n$, denuo factor simplex realis oritur

$$\sqrt[n]{\alpha} + x\sqrt[n]{\beta}.$$

Quare si n fuerit numerus par huius formulae

$$\alpha - \beta x^n$$

sequentes erunt factores reales siue simplices siue trinomiales:

$$\sqrt[n]{\alpha} - x\sqrt[n]{\beta}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\text{cos.}\,A.\,\frac{2\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\text{cos.}\,A.\,\frac{4\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\text{cos.}\,A.\,\frac{6\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$\sqrt{}$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\cos A\,\frac{(n-2)\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$$\sqrt[n]{\alpha} + x\sqrt[n]{\beta}$$

Quod si autem n fuerit numerus impar, tum formulae

$$\alpha - \beta x^n$$

factores reales erunt sequentes:

$$\sqrt[n]{\alpha} - x\sqrt[n]{\beta}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\cos A\,.\,\frac{2\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\cos A\,.\,\frac{4\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\cos A\,.\,\frac{6\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

$$\vdots$$

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\cos A\,.\,\frac{(n-1)\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

Atque vtroque casu productum ex his omnibus factoribus ortum producet formulam $\alpha - \beta x^n$.

§. 29. Ex his perspicitur, si loco k omnes numeri integri ab 1, 2, 3 .... vsque ad n inclusiue substituantur; tum omnes factores trinomiales ex ista forma generali resultantes

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\cos A\,\frac{(2k-1)\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

si in se inuicem ducantur, producturos expressionem hanc

$$(\alpha + \beta x^n)^2$$

ideoque, si ex singulis illis factoribus radices quadratae extrahantur, productum ex his omnibus radicibus dabit formulam

mulam $\alpha+\beta x^n$. Simili modo si, vt ante, loco k omnes numeri integri 1, 2, 3, ... n substituantur, tum omnes factores trinomiales, quorum numerus erit $= n$, qui resultant ex forma generali

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}.\ \text{cos. A.}\ \frac{2k\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

si in se mutuo ducantur, dabunt productum

$$(\alpha-\beta x^n)^2$$

Atque idcirco, si ex singulis his factoribus radices quadratae extrahantur, earum productum dabit ipsam expressionem $\alpha-\beta x^n$.

§. 30. Hoc igitur pacto resolui potest formula $\alpha \pm \beta x^n$ in n factores, quorum quilibet est radix quadrata ex expressione trinomiali huiusmodi.

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta},\ \text{cos. A.}\ \Phi + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

Potest autem radix quadrata ex huiusmodi expressione admodum succincte geometrice construi;

Erit enim $\sqrt{(\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}.\ \text{cos. A.}\Phi + xx\sqrt[n]{\beta^2})} = \sqrt{((\sqrt[n]{\alpha}.\ \text{cos. A.}\ \Phi - x\sqrt[n]{\beta})^2 + (\sqrt[n]{\alpha}.\ \text{sin. A.}\Phi)^2)}$.

Erit ergo quilibet eorum factorum hypothenusa trianguli rectanguli, cuius alter cathetus $= \sqrt[n]{\alpha}.\ \text{cos. A.}\ \Phi - x\sqrt[n]{\beta}$ et alter $\sqrt[n]{\alpha}.\ \text{sin. A.}\ \Phi$, quae expressiones in circulo, cuius radius $= \sqrt[n]{\alpha}$, commodissime exhiberi possunt.

Tab. I. fig. 5. Fiat nempe circulus PQRSTV centro C et radio CP $= \sqrt[n]{\alpha}$; diuidatur eius peripheria in $2n$, seu semiperipheria

pheria in n partes, erit $Pp = \frac{\pi}{n}$; $PQ = \frac{2\pi}{n}$; $Pq = \frac{3\pi}{n}$; $PR = \frac{4\pi}{n}$; $Pr = \frac{5\pi}{n}$; etc.
Capiatur porro in radio CP distantia $CO = x\sqrt[n]{\beta}$; atque ex puncto O ad singula diuisionis puncta ducantur rectae OP, Op, OQ, Oq, etc. quae, quantae futurae sint, ex recta indefinita OM colligi poterit. Sit arcus $PM = \Phi$ et ducta perpendiculari MN erit $MN = \sqrt[n]{\alpha} . \text{fin.} A . \Phi$; $CN = \sqrt[n]{\alpha} . \text{cof.} A\Phi$; ideoque $ON = \sqrt[n]{\alpha} . \text{cof.} A\Phi - x\sqrt[n]{\beta}$; vnde fiet $OM = \sqrt{(\sqrt[n]{\alpha^2} - 2\sqrt[n]{\alpha\beta} \,\text{cof.} A\Phi + x^2\sqrt[n]{\beta^2})}$. Ex his ergo sumendis diuisionum punctis paribus erit

$$OP . OQ . OR . OS . OT . OV = \alpha - \beta x^n$$

sumendis autem diuisionibus imparibus erit

$$Op . Oq . Or . Os . Ot . Ov = \alpha + \beta x^n$$

hocque est theorema elegantissimum a Cotesio inuentum; cuius adeo demonstratio per methodum nostram inuestigandi factores trinomiales a priori est data.

§. 31. Progrediamur ad exemplum magis intricatum atque quaeramus factores reales tum simplices quam trinomiales huius expressionis

$$\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n}$$

cuius factor trinomialis quicunque si fuerit

$$p - 2x\sqrt{pq} . \text{cof.} A\Phi + qxx$$

posito $f = \sqrt{\frac{p}{q}}$, incognitae f et Φ ex his duabus aequationibus erui debebunt.

$$\alpha + \beta f^n \,\text{cof.} A . n\Phi + \gamma f^{2n} \,\text{cof.} A . 2n\Phi = 0$$

$$\beta f^n \,\text{fin.} A . n\Phi + \gamma f^{2n} \,\text{fin.} A . 2n\Phi = 0$$

 Cum

Cum iam ſit ſin. A. $2n\Phi = 2$ ſin. A. $n\Phi$. coſ. A. $n\Phi$, erit ex aequatione poſteriori vel ſin. A. $n\Phi = 0$ vel $\beta + 2\gamma f^n$ coſ. A. $n\Phi = 0$. Sit primo ſin. A. $n\Phi = 0$ erit vel $n\Phi = 2k\pi$ vel $n\Phi = (2k-1)\pi$; ponamus ergo $n\Phi = 2k\pi$ erit coſ. A. $n\Phi = 1$, et coſ. A. $2n\Phi = 1$, vnde $\alpha + \beta f^n + \gamma f^{2n} = 0$; hincque $f^n = \frac{-\beta \pm \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}}{2\gamma}$ ſin autem $n\Phi = (2k-1)\pi$ erit coſ. A. $n\Phi = -1$ et coſ. A. $2n\Phi = +1$ vnde $\alpha - \beta f^n + \gamma f^{2n} = 0$ hincque $f^n = \frac{\beta \pm \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}}{2\gamma}$. Iſtae ergo ſolutiones locum habere, non poſſunt, niſi ſit $\beta^2 > 4\alpha\gamma$. Sit ergo $\beta^2 > 4\alpha\gamma$ atque ſequentes caſus erunt notandi.

I. $\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n}$

Vt f^n affirmatiuum obtineat valorem, ſumi debet $\Phi = \frac{(2k-1)\pi}{n}$ eritque $f = \sqrt[n]{\frac{\beta \pm \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}}{2\gamma}} = \sqrt{\frac{p}{q}}$ ſit $\frac{\beta + \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}}{2} = \zeta$ et $\frac{\beta - \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}}{2} = \eta$ eruntque factores trinomiales huius formae hi bini

$$\sqrt[n]{\zeta^2} - 2x\sqrt[n]{\gamma\zeta}.\text{coſ. A}.\frac{(2k-1)\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$

$$\sqrt[n]{\eta^2} - 2x\sqrt[n]{\gamma\eta}.\text{coſ. A}.\frac{(2k-1)\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$

vtraque expreſſio vt praecedenti caſu tractata dabit factores reales vel ſimplices (nempe ſi n numerus impar) vel trinomiales, qui omnes in ſe inuicem ducti expreſſionem propoſitam producunt.

§. 32. Maneat $\beta^2 > 4\alpha\gamma$, ſitque haec forma propoſita.

II. $\alpha - \beta x^n + \gamma x^{2n}$

Vt f^n affirmatiuum valorem obtineat, ſumi debet $\Phi = \frac{2k\pi}{n}$ eritque $f = \sqrt[n]{\frac{\beta \pm \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}}{2\gamma}} = \sqrt{\frac{p}{q}}$, ſit vt ante

β+

$\frac{\beta+\sqrt{(\beta^2-4\alpha\gamma)}}{2}=\zeta$ et $\frac{\beta-\sqrt{(\beta^2-4\alpha\gamma)}}{2}=\eta$, hincque orientur sequentes duae formae pro factoribus trinomialibus quaesitis

$$\sqrt[n]{\zeta^2}-2x\sqrt[n]{\gamma\zeta}.\,\text{cof. A}.\,\frac{2k\pi}{n}+xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$

$$\sqrt[n]{\eta^2}-2x\sqrt[n]{\gamma\eta}.\,\text{cof. A}.\,\frac{2k\pi}{n}+xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$

qui, quoties fiunt quadrata, radices praebent simplices reales, ceteris casibus factores trinomiales resultant. Sit iam proposita ista expressio

III. $\alpha+\beta x^n-\gamma x^{2n}$

in qua semper est $\beta^2+4\alpha\gamma$ quantitas positiua. Praebet autem casus $\Phi=\frac{2k\pi}{n}$ vnum valorem positiuum pro $f^n=\frac{\beta+\sqrt{(\beta^2+4\alpha\gamma)}}{2\gamma}$; alterque casus $\Phi=\frac{(2k-1)\pi}{n}$ pariter vnum $f^n=\frac{-\beta+\sqrt{(\beta^2+4\alpha\gamma)}}{2\gamma}$. Ponatur $\frac{\beta+\sqrt{(\beta^2+4\alpha\gamma)}}{2}=\zeta$ et $\frac{-\beta+\sqrt{(\beta^2+4\alpha\gamma)}}{2}=\eta$, atque sequentes duae formulae dabunt omnes factores reales tam simplices (quando scilicet fiunt quadrata) quam trinomiales:

$$\sqrt[n]{\zeta^2}-2x\sqrt[n]{\gamma\zeta}.\,\text{cof. A}.\,\frac{2k\pi}{n}+xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$

$$\sqrt[n]{\eta^2}-2x\sqrt[n]{\gamma\eta}.\,\text{cof. A}.\,\frac{(2k-1)\pi}{n}+xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$

§. 33. Quartus casus, quo sponte fit $\beta^2>4\alpha\gamma$, est haec forma

IV. $\alpha-\beta x^n-\gamma x^{2n}$

Hic iterum casus $\Phi=\frac{2k\pi}{n}$ vnum praebet casum positiuum pro $f^n=\frac{-\beta+\sqrt{(\beta^2+4\alpha\gamma)}}{2\gamma}$ alterque casus $\Phi=\frac{(2k-1)\pi}{n}$ pariter vnum $f^n=\frac{\beta+\sqrt{(\beta^2+4\alpha\gamma)}}{2\gamma}$. Ponatur ergo $\frac{-\beta+\sqrt{(\beta^2+4\alpha\gamma)}}{2}=\zeta$ et $\frac{\beta+\sqrt{(\beta^2+4\alpha\gamma)}}{2}=\eta$, atque omnes factores formulae pro-

propositae tam simplices, quam trinomiales continebuntur in his binis sequentibus expressionibus:

$$\sqrt[n]{}\zeta^2 - 2x\sqrt[n]{}\gamma\zeta.\text{cos. A.}\tfrac{2k\pi}{n} + xx\sqrt[n]{}\gamma\gamma$$

$$\sqrt[n]{}\eta^2 - 2x\sqrt[n]{}\gamma\eta.\text{cos. A.}\tfrac{(2k-1)\pi}{n} + xx\sqrt[n]{}\gamma\gamma$$

Ceterum de his casibus, quibus $\beta^2 > 4\alpha\gamma$, notandum est, iis formulam propositam

$$\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n}$$

actu posse resolui in binas formulas reales duobus terminis constantes

$$\sqrt{\alpha} + x^n\left(\frac{\beta + \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}}{2\sqrt{\alpha}}\right)$$
$$\sqrt{\alpha} + x^n\left(\frac{\beta - \sqrt{(\beta^2 - 4\alpha\gamma)}}{2\sqrt{\alpha}}\right)$$

quae cum similes sint iis, quas primo loco tractauimus, vtraque seorsim modo iam exposito in suos factores resolui poterit. Prouenient autem hoc pacto illi ipsi factores, quos hic exhibuimus.

§. 34. Pro casibus iam, quibus non est $\beta^2 > 4\alpha\gamma$, alteram solutionem aequationis

$$\beta f^n \text{ sin. A. } n\Phi + \gamma f^{2n} \text{ sin. A. } 2n\Phi = 0$$

accipi conueniet, quae dat $\beta + 2\gamma f^n \text{ cos. A. } n\Phi = 0$ Sit cos. A.$n\Phi = z$, erit $f^n = \frac{-\beta}{2\gamma z}$; qui valor ob cos. A. $2n\Phi = 2zz - 1$ in priori aequatione substitutus dat $\alpha - \frac{\beta\beta}{2\gamma} + \frac{\beta\beta(2zz-1)}{4\gamma zz} = 0$ seu $4\alpha\gamma zz = \beta\beta$; hinc erit $z = \frac{-\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$; et $f^n = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ ideoque $p = \sqrt[n]{}\alpha$ et $q = \sqrt[n]{}\gamma$. Ponamus eum arcum minimum $= \omega$, cuius cosinus est $\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$

eritque

eritque cof. A $((2k-1)\pi \mp \omega) = \frac{-\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}} = z$; ideoque obtinetur $\Phi = \frac{(2k-1)\pi \pm \omega}{n}$. Quocirca cafu $\beta^2 < 4\alpha\gamma$, fi arcus, cuius cofinus eft $= \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$ ponatur $= \omega$ erit formulae propofitae

$$\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n}$$

quilibet factor trinomialis in hac forma contentus

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma}.\,\text{cof.}\,A.\,\frac{(2k-1)\pm\omega}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$

Huiusmodi autem factores habebuntur numero n, qui prodibunt fi loco k fucceffiue omnes numeri integri $1, 2, 3 \ldots$ vsque ad n fubftituantur, tribuendo ipfi ω fiue fignum $+$ fiue $-$; vtroque enim cafu arcus prodibunt, quorum cofinus congruent. Signum fcilicet $-$ arcu ω praefixum eosdem dabit cofinus, quos fignum $+$, ordine tantum retrogrado, fiquidem loco k numeri $1, 2, 3 \ldots n$ fubftituantur.

vnde factores ipfi erunt fequentes

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma}.\,\text{cof.}\,A.\,\frac{\pi-\omega}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$
$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma}.\,\text{cof.}\,A.\,\frac{3\pi-\omega}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$
$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma}.\,\text{cof.}\,A.\,\frac{5\pi-\omega}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$
$$\vdots$$
$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma}.\,\text{cof.}\,A.\,\frac{(2n-1)\pi-\omega}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$

§. 35. Si coefficiens β fuerit negatiuus, feu, fi huius formae, exiftente $\beta\beta < 4\alpha\gamma$,

$$\alpha - \beta x^n + \gamma x^{2n}$$

 facto-

factores debeant inuestigari; tum calculo vt ante subducto: erit $f^n = \frac{\beta}{2\gamma z}$ et $z = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}} = \text{cos}. A . n\Phi$. Quodsi ergo arcus, cuius cosinus $= \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$ ponatur ω, fiet etiam cos. A $(2k\pi \pm \omega) = \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$ ex quo $\Phi = \frac{2k\pi \pm \omega}{n}$. Factor igitur quicunque formulae propositae continebitur in hac forma

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma} . \text{cos}. A . \frac{2k\pi \mp \omega}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$

Ipsi ergo factores trinomiales, quorum numerus est n, erunt sequentes:

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma} . \text{cos}. A . \frac{2\pi - \omega}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$
$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma} . \text{cos}. A . \frac{4\pi - \omega}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$
$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma} . \text{cos}. A . \frac{6\pi - \omega}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma} . \text{cos}. A . \frac{2n\pi - \omega}{n} + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma}$$

§. 36. Hi etiam factores simili modo, quo casu praecedenti, commode per circulum construi possunt. Construatur enim circulus PQRSTV radio $CA = \sqrt[n]{\alpha}$ eiusque peripheria diuidatur in $2n$ partes, in punctis P, p, Q, q, etc. Tum a puncto primo diuisionis P capiatur arcus P $A = \frac{\omega}{n}$, ita vt arcus $n . PA$ cosinus sit $= \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$. Tum per A ducatur diameter AB, et in eo ex centro C capiatur $CO = x\sqrt[n]{\gamma}$; atque ex puncto hoc O ad singula diuisionis puncta ducantur rectae. Erit autem $Ap = \frac{\pi - \omega}{n}$; $AQ = \frac{2\pi - \omega}{n}$; $Aq = \frac{3\pi - \omega}{n}$, etc. Quoniam vero

Tab. I. fig. 6.

sumto

quocunque arcu $AM = \Phi$, et demisso sinu MN est $MN = \sqrt[n]{\alpha} . \sin. A . \Phi$ et $ON = \sqrt[n]{\alpha} . \cos. A\Phi - x\sqrt[n]{\gamma}$, erit $OM = \sqrt{(\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\gamma} . \cos. A\Phi + xx\sqrt[n]{\gamma\gamma})}$ erit loco Φ arcubus Ap, AQ, Aq, etc. substituendo $\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n} = Op^2 . Oq^2 . Or^2 . Os^2 . Ot^2 . Ov^2$; atque $\alpha - \beta x^n + \gamma x^{2n} = OQ^2 . OR^2 . OS^2 . OT^2 . OV^2 . OP^2$. Quae sunt theoremata a Celeb. Moivraeo demonstrata

§. 37. Antequam istam formulae $\alpha \pm \beta x^n + \gamma x^{2n}$ resolutionem in factores trinomiales dimittamus, non abs re erit annotare, quod cum terminus x^1 desit in producto, summa omnium coefficientium ipsius x in factoribus aequalis nihilo esse debeat. Erit ergo

$$\cos. A . \tfrac{\pi-\omega}{n} + \cos. A . \tfrac{3\pi-\omega}{n} + \cos. A . \tfrac{5\pi-\omega}{n} + \ldots + \cos. A . \tfrac{(2n-1)\pi-\omega}{n} = 0$$

et

$$\cos. A . \tfrac{2\pi-\omega}{n} + \cos. A . \tfrac{4\pi-\omega}{n} + \cos. A . \tfrac{6\pi-\omega}{n} + \ldots + \cos. A . \tfrac{2n\pi-\omega}{n} = 0$$

Quod quidem, si n est numerus par, sponte patet, tum enim alii cosinus fiunt negatiui atque aequales ratione reliquorum. Quando autem n est numerus impar, puta $n = 2m - 1$; tum cosinus negatiui affirmatiuos singuli singulos non destruunt, interim tamen omnes negatiui simul sumti affirmatiuis simul sumtis aequales erunt. Est vero $\cos. A . \Phi = \frac{1}{2}$ chord. $A(\pi + 2\Phi)$ et quia est $\Phi = \frac{(2k-1)\pi - \omega}{2m-1}$, erit $\cos. A \frac{(2k-1)\pi - \omega}{2m-1} = \frac{1}{2}$ chord. $A . (\pi - \frac{2\omega}{2m-1} + \frac{2(2k-1)\pi}{2m-1})$; omnesque hae chordae, quarum numerus est $= 2m - 1$ simul sumtae erunt $= 0$. Sit $\xi = \pi - \frac{2\omega}{2m-1}$, et ponatur $\frac{2\pi}{2m-1} = \varrho$, ita vt ϱ sit vna pars totius peripheriae, si ea ea fuerit in numerum quemcunque imparem partium aequalium diuisa. Hanc obrem erit chord. $A(\xi+\varrho)+$ chord. $A(\xi+3\varrho)+$ chord. $A(\xi+5\varrho)+\ldots\ldots+$ chord. $A(\xi+(4m-3)\varrho)=0$. Si ergo peripheria circuli in numerum quemcunque imparem partium aequalium verbi gratia in nouem partes aequales Pp, pQ, Qq, qR, Rr, rS, Ss, sT, TP diuidatur atque in peripheria punctum capiatur quodcunque A; ex quo ad singula peripheriae puncta chordae ducantur, erit posita vna peripheriae parte nona $=\varrho$, et arcu AP pro arbitrio assumto $=\xi$ erit

Tab. II. fig. I.

chord. $A(\xi+\varrho)=Ap$	chord. $A(\xi+11\varrho)=-AQ$
chord. $A(\xi+3\varrho)=Aq$	chord. $A(\xi+13\varrho)=-AR$
chord. $A(\xi+5\varrho)=Ar$	chord. $A(\xi+15\varrho)=-AS$
chord. $A(\xi+7\varrho)=As$	chord. $A(\xi+17\varrho)=-AT$

$$\text{chord. } A(\xi+9\varrho)=-AP;$$

chordae enim arcuum tota peripheria maiorum, pariter ac sinus arcuum semiperipheria maiorum, fiunt negatiuae. Erit ergo ductis vti praecepimus chordis,

$$Ap+Aq+Ar+As=AP+AQ+AR+AS+AT$$

siue

$$AP-Ap+AQ-Aq+AR-Ar+AS-As+AT=0$$

Quod est theorema circa chordas non inelegans, notum quidem, at ex traditis praeceptis sponte quasi deriuatum.

§. 38. Resolutionem formularum $\alpha+\beta x^n$ et $\alpha+\beta x^n+\gamma x^{2n}$ in factores fusius exposuimus, eo quod formulae quantumuis compositae in eiusmodi formulas resolui possint; ex quo secundum haec praecepta formularum magis compositarum factores

res simplices vel trinomiales inueniri poterunt, concessa resolutione aequationum altiorum dimensionum. Sit nempe proposita ista formula

$$\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n} + \delta x^{3n}$$

posito $x^n = z$, ea abibit in $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3$ quae perpetuo vnum diuisorem simplicem habebit realem, quoniam maximus ipsius z exponens est impar. Quamobrem formula proposita vel in tres binomiales huiusmodi $a + bx^n$ vel in vnam huiusmodi $a + bx^n$ et in vnam trinomialem resoluitur $a + bx^n + ex^{2n}$; hincque eius factores vel trinomiales vel simplices facile per praecepta praecedentia assignantur. Loco formulae igitur $\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n} + \delta x^{3n}$ semper substitui potest huiusmodi expressio

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} x^n)(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x^n + \mathfrak{C} x^{2n})$$

cuius omnes factores reales tam simplices quam trinomiales ope regulae traditae exhibebuntur.

§. 39. Proposita iam sit haec expressio

$$\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n} + \delta x^{3n} + \varepsilon x^{4n}$$

cuius factores reales tam simplices quam trinomiales inuestigari oporteat. Ponamus $x^n = z$, et habebimus hanc expressionem quatuor dimensionum

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4$$

quae nihilo aequalis posita vel omnes radices habebit imaginarias vel duas tantum vel nullam. Posterioribus binis casibus resolutio proposita in factores nulla laborat difficultate, eo quod iis expressio proposita in binas reales huius formae

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} x^n + \mathfrak{C} x^{2n}$$

 distribui

$z^4 + pz^2 + qz + r = (zz + uz + A)(zz - uz + B)$ erit $p = A + B - uu$; $q = Bu - Au$; et $r = AB$, binae priores aequationes vero dant

$$B = p + uu - A = \frac{q + Au}{u} \text{ vnde fit}$$

$$A = \frac{u^3 + pu - q}{2u} \text{ et } B = \frac{u^3 + pu + q}{2u}$$

qui valores in tertia aequatione substituti dant

$$4ruu = u^6 + 2pu^4 + ppuu - qq \text{ seu}$$

$$u^6 + 2pu^4 + (pp - 4r)uu - qq = 0$$

quae cum sit aequatio parium dimensionum, atque terminus absolutus qq semper positiuus signum habeat oppositum summae potestati incognitae u, haec aequatio certo pro u vnam radicem realem dabit. Inuento autem pro u valore reali, valores quoque pro A et B fient reales, hincque factores $zz + uz + A$ et $zz - uz + B$ ipsi prodibunt reales. Simili autem modo demonstrabitur omnem expressionem parium dimensionum semper resolubilem esse in factores trinomiales reales. Hoc certe euictum est hanc expressionem multo latius patentem

$$\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n} + \delta x^{3n} + \varepsilon x^{4n}$$

resolubilem esse in factores reales vel simplices vel trinomiales; quotcunque ea contineat dimensiones.

§. 42. Tradito igitur non solum modo factores trinomiales inueniendi, sed etiam actu euolutis factoribus formularum principalium $\alpha + \beta x^n$ et $\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n}$ exponendum est, quemadmodum, si cognitus fuerit factor trinomialis denominatoris N, in formula differentiali $\frac{M dx}{N}$ integralis pars ex hoc factore oriunda debeat determinari.

minari. Sit igitur denominatoris N factor trinomialis quicunque

$$p - 2x\sqrt{pq}\,.\,\text{cos}.\,A\Phi + qxx$$

qui resoluitur in hos simplices imaginarios

$$x\sqrt{q} - \sqrt{p}\,.\,\text{cos}.\,A\Phi - \sqrt{-p}\,.\,\text{fin}.\,A\Phi$$

$$x\sqrt{q} - \sqrt{p}\,.\,\text{cos}.\,A\Phi + \sqrt{-p}\,.\,\text{fin}.\,A\Phi$$

Ex his per methodum ante expositam resultant integralis quaesiti binae sequentes partes

$$+\int\frac{A\,dx}{x\sqrt{q} - \sqrt{p}\,.\,\text{cos}.\,A\Phi - \sqrt{-p}\,.\,\text{fin}.\,A\Phi}$$

$$+\int\frac{B\,dx}{x\sqrt{q} - \sqrt{p}\,.\,\text{cos}.\,A\Phi + \sqrt{-p}\,.\,\text{fin}.\,A\Phi}$$

vbi coefficientes A et B determinantur ex $\frac{M\,dx}{dN}$ substituendo loco x valorem, quem ex vtroque denominatore nihilo aequali posito obtinet. Sit igitur $\frac{dN}{dx} = L$, eritque $A = \frac{M}{L}$, posito vbique loco x valore $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$ cos. $A\Phi + \frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{q}}$ fin. $A\,.\,\Phi$. Simili vero modo est $B = \frac{M}{L}$ posito loco x hoc valore $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$. cos. $A\Phi - \frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{q}}$. fin. $A\Phi$.

§. 43. Ponatur $f = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$; et cum sit

$$x = f\,\text{cos}.\,A\Phi \pm f\sqrt{-1}\,.\,\text{fin}.\,A\,.\,\Phi$$

erit, vt supra vidimus, potestas quaecunque

$$x^k = f^k\,\text{cos}.\,Ak\Phi \pm f^k\sqrt{-1}\,.\,\text{fin}.\,A\,.\,k\Phi$$

Ad substitutiones ergo faciendas, ponatur primo f^k cos. $A\,.\,k\Phi$ vbique loco x^k, hocque facto abeat M in $\mathfrak{M}$, et L in $\mathfrak{L}$. Deinde ponatur f^k fin. $A\,.\,k\Phi$ loco x^k, abeatque M in $\mathfrak{m}$ et L in $\mathfrak{l}$. Hoc facto fiet $A =$

$$\frac{\mathfrak{M} + \mathfrak{m}\sqrt{-1}}{\mathfrak{L} + \mathfrak{l}\sqrt{-1}}, \text{ et}$$

$$+\frac{2\,\mathrm{sin}.\,A\frac{(n-m-1)(2k-1)\pi}{n}}{n\alpha^{\frac{n-m-1}{n}}\beta^{\frac{m+2}{n}}}\ \mathrm{A\ tang.}\ \frac{x\sqrt[n]{\beta}.\,\mathrm{sin}.\,A\frac{(2k-1)\pi}{n}}{\sqrt[n]{\alpha}-x\sqrt[n]{\beta}.\,\mathrm{cos}.\,A\frac{(2k-1)\pi}{n}}$$

quae etiam hoc modo exhiberi potest:

$$-\frac{\mathrm{cos}.\,A\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}}{n\alpha^{\frac{n-m-1}{n}}\beta^{\frac{m+2}{n}}}\,l\left(\sqrt[n]{\alpha^2}-2x\sqrt[n]{\alpha\beta}.\,\mathrm{cos}.\,A.\frac{(2k-1)\pi}{n}+xx\sqrt[n]{\beta^2}\right)$$

$$+\frac{2\,\mathrm{sin}.\,A.\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}}{n\alpha^{\frac{n-m-1}{n}}\beta^{\frac{n+2}{n}}}\ \mathrm{A\ tang.}\ \frac{x\sqrt[n]{\beta}.\,\mathrm{sin}.\,A.\frac{(2k-1)\pi}{n}}{\sqrt[n]{\alpha}-x\sqrt[n]{\beta}.\,\mathrm{cos}.\,A.\frac{(k-1)\pi}{n}},$$

Si iam loco $2k-1$ substituantur omnes numeri impares $1, 3, 5, 7$, etc. vsque ad n; atque adeo etiam ipse numerus n, si sit impar, prodibunt omnes integralis partes, quae quidem ex denominatore $N=\alpha+\beta x^n$ proficiscuntur. Si igitur m fuerit numerus affirmatiuus minor quam n, his partibus in vnam summam colligendis completum oritur integrale quaesitum: hicque etiam comprehendetur ea integralis pars, quae oritur ex factore simplici reali denominatoris, si n fuerit numerus impar: dummodo eius integralis, quod hoc casu oritur, tantum semissis capiatur; vel loco quadrati, quod hoc casu signum log. l habebit prefixum, eius tantum radix quadrata substituatur. Alterum enim membrum arcum circuli inuoluens hoc casu euanescit.

Locum autem habent haec integralia ex denominatoris $\alpha+\beta x^n$ factoribus orta, siue m sit maior quam n siue minor, siue etiam numerus negatiuus. Nisi autem m sit numerus affirmatiuus minor quam n, ad integrale ex factoribus denominatoris $\alpha+\beta x^n$ inuentum quidpiam insuper est adiiciendum.

Sit

Sit m numerus maior, quam n, ac ponatur $m = \sigma n + \tau$, existente τ numero minore, quam n. Per regulam igitur primum datam ex fractione $\frac{x^{\sigma n + \tau}}{\alpha + \beta x^n}$ pars integra est extrahenda, quae erit huiusmodi $\frac{1}{\beta} x^{(\sigma - 1)n + \tau} - \frac{\alpha}{\beta^2} x^{(\sigma - 2)n + \tau}$ $+ \frac{\alpha^2}{\beta^3} x^{(\sigma - 3)n + \tau} - \ldots \ldots \mp \frac{\alpha^{\sigma - 1}}{\beta^\sigma} x^\tau$, in vltimo termino signum $+$ valet, si σ fuerit numerus impar; signum $-$ autem, si σ sit numerus par. Hoc ergo casu ad integrale ante ex factoribus denominatoris $\alpha + \beta x^n$ inuentum adiici debet hoc integrale:

$$\frac{x^{\sigma n - n + \tau + 1}}{\beta(\sigma n - n + \tau + 1)} - \frac{\alpha x^{\sigma n - 2n + \tau + 1}}{\beta^2(\sigma n - 2n + \tau + 1)} + \frac{\alpha^2 x^{\sigma n - 3n + \tau + 1}}{\beta^3(\sigma n - 3n + \tau + 1)}$$
$$- \frac{\alpha^3 x^{\sigma n - 4n + \tau + 1}}{\beta^4(\sigma n - 4n + \tau + 1)} \ldots \ldots \mp \frac{\alpha^{\sigma - 1} x^{\tau + 1}}{\beta^\sigma(\tau + 1)}.$$

Sit iam m numerus negatiuus, ac ponatur $m = -\sigma n - \tau$, existente τ numero minore quam n; atque ad integrale ex factoribus ipsius $\alpha + \beta x^n$ inuentum insuper addi debet integrale, quod oritur ex $x^{-\sigma n - \tau}$, quod membrum in denominatorem ingredietur. Habebimus scilicet $\frac{M}{N} = \frac{1}{x^{\sigma n + \tau}(\alpha + \beta x^n)}$ ponamus ex $x^{\sigma n + \tau}$ resultare hanc fractionis partem $\frac{V}{x^{\sigma n + \tau}}$, atque manifestum est $1 - V(\alpha + \beta x^n)$ diuisibile esse oportere per $x^{\sigma n + \tau}$. Erit ergo $V = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2} x^n + \frac{\beta^2}{\alpha^3} x^{2n} - \ldots \pm \frac{\beta^\sigma}{\alpha^{\sigma + 1}} x^{\sigma n}$; fiet enim $1 - V(\alpha + \beta x^n) = \mp \frac{\beta^{\sigma + 1}}{\alpha^{\sigma + 1}} x^{\sigma n + n}$, vtique diuisibile

 per

per $x^{\sigma n+\tau}$; vbi signorum ambiguorum superius valet, si σ sit numerus par, inferius si impar. Quare ad integrale ex factoribus ipsius $\alpha+\beta x^n$ inuentum adiici debet insuper

$$\int \frac{V dx}{x^{\sigma n+\tau}} = \frac{-1}{\alpha(\sigma n+\tau-1)x^{\sigma n+\tau-1}} + \frac{\beta}{\alpha^2(\sigma n-n+\tau-1)x^{\sigma n-n+\tau-1}}$$

$$-\frac{\beta^2}{\alpha^3(\sigma n-2n+\tau-1)x^{\sigma n-2n+\tau-1}} + \ldots \mp \frac{\beta^\sigma}{\alpha^{\sigma+1}(\tau-1)x^{\tau-1}}$$

De reliquis casibus, quo m est numerus negatiuus, ad praecedentem reduci potest, ita vt peculiari solutione non sit opus. Si enim proposita sit haec formula differentialis $\frac{dx}{x^m(\alpha+\beta x^n)}$, ponatur $x=\frac{1}{y}$, atque habebitur $-\frac{y^{m+n-2}dy}{\alpha y^n+\beta}$, cuius integratio per extractionem partis integrae ex fractione $\frac{y^{m+n-2}}{\alpha y^n+\beta}$ absoluitur, vti docuimus. Dedimus ergo integrale formulae $\frac{x^m dx}{\alpha+\beta x^n}$ pro valore quocunque exponentis m siue affirmatiuo siue negatiuo. Q. E. I.

Problema 2.

§. 45. Inuenire integrale huius formulae differentialis $\frac{x^m dx}{\alpha-\beta x^n}$, existente m quocunque numero integro siue affirmatiuo siue negatiuo.

Solutio.

Hic est $M=x^m$; $N=\alpha-\beta x^n$ et $L=\frac{dN}{dx}=-nx\beta^{n-1}$.

Factor

Factor autem generalis trinomialis denominatoris $N = \alpha - \beta x^n$ est per §. 28.

$$\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\mathrm{cos.A}.\tfrac{2k\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}$$

vnde est $p = \sqrt[n]{\alpha^2}$; $q = \sqrt[n]{\beta^2}$; $\phi = \frac{2k\pi}{n}$; et $f = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}$.
Ex his autem fiet porro

$$\mathfrak{M} = f^m\ \mathrm{cos.\,A}\,m\phi \quad \Big| \quad \mathfrak{L} = -n\beta f^{n-1}\ \mathrm{cos.\,A}\,(n-1)\phi$$
$$\mathfrak{m} = f^m\ \mathrm{sin.\,A}\,m\phi \quad \Big| \quad \mathfrak{l} = -n\beta f^{n-1}\ \mathrm{sin.\,A}\,(n-1)\phi$$

hincque $\frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{L}} = \mathrm{tang.\,A}\,(n-1)\phi$, et $\lambda = (n-1)\phi = \frac{2k(n-1)\pi}{n}$ atque $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{M}} = \mathrm{tang.\,A}\,.\,m\phi$; et $\mu = m\phi = \frac{2km\pi}{n}$; ideoque $\lambda - \mu = \frac{(n-m-1)2k\pi}{n}$; quare cos. A $(\lambda - \mu) = \mathrm{cos.\,A}\frac{(n-m-1)2k\pi}{n} = \mathrm{cos.\,A}\frac{(m+1)2k\pi}{n}$, et sin. A $(\lambda-\mu) = \mathrm{sin.\,A}\frac{(n-m-1)2k\pi}{n} = \mathrm{sin.\,A}\frac{(m+1)2k\pi}{n}$. Deinde est $\sqrt{(\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{m}^2)} = f^m$ et $\sqrt{(\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{l}^2)} = -n\beta f^{n-1}$

ergo $\mathfrak{K} = \dfrac{-1}{n\beta f^{n-m-1}} = \dfrac{-\beta^{\frac{n-m-1}{n}}}{n\beta\alpha^{\frac{n-m-1}{n}}} = \dfrac{-1}{n\alpha^{\frac{n-m-1}{n}}\beta^{\frac{m+1}{n}}}$

et $\dfrac{\mathfrak{K}}{\sqrt{q}} = \dfrac{-1}{n\alpha^{\frac{n-m-1}{n}}\beta^{\frac{m+2}{n}}}$. Ex factore ergo trinomiali generali nascitur sequens integralis pars;

$$\frac{-\mathrm{cos.\,A}\frac{(m+1)2k\pi}{n}}{n\alpha^{\frac{n-m-1}{n}}\beta^{\frac{m+2}{n}}}\, l\left(\sqrt[n]{\alpha^2} - 2x\sqrt[n]{\alpha\beta}\,.\,\mathrm{cos.A.}\tfrac{2k\pi}{n} + xx\sqrt[n]{\beta^2}\right)$$

$$+\frac{2\,\mathrm{sin.\,A}\frac{(m+1)2k\pi}{n}}{n\alpha^{\frac{n-m-1}{n}}\beta^{\frac{m+2}{n}}}\ \mathrm{A\ tang.}\frac{x\sqrt[n]{\beta}\,.\,\mathrm{sin.\,A.}\frac{2k\pi}{n}}{\sqrt[n]{\alpha} - x\sqrt[n]{\beta}\,\mathrm{cos.\,A}\frac{2k\pi}{n}}.$$

Si iam loco $2k$ successiue omnes numeri pares 0, 2, 4, 6, etc. vsque ad n, atque adeo ipse numerus n, si fit par; substituantur, prodibunt omnes integralis partes ex deno-

 minatore

minatore $\alpha - \beta x^n$ oriundae. Quoties autem fit cos. A. $\frac{2k\pi}{n}$ vel $+1$ vel -1, quorum illud euenit, si $2k = 0$, hoc vero casu $2k = n$, si quidem n est numerus par, tum factor prodit simplex, et membrum a quadratura circuli pendens euanescit: membri autem logarithmici his casibus semissis debet capi, seu quod eodem redit, loco quadrati, quod his casibus signum log. l habebit praefixum, eius tantum radix quadrata scribi debet. Hocque pacto colligendis omnibus istis integralibus resultabit completum integrale quaesitum, si quidem m fuerit numerus affirmatiuus minor quam n. Quodsi autem m fuerit numerus maior quam m puta $m = \sigma n + \tau$, tum ad integrale illud insuper addi debet $\frac{-x^{\sigma n - n + \tau + 1}}{\beta(\sigma n - n + \tau + 1)} \frac{-\alpha x^{\sigma n - 2n + \tau + 1}}{\beta^2(\sigma n - 2n + \tau + 1)} - \frac{\alpha^2 x^{\sigma n - 3n + \tau + 1}}{\beta^3(\sigma n - 3n + \tau + 1)} \ldots\ldots \frac{-\alpha^{\sigma - 1} x^{\tau + 1}}{\beta^\sigma(\tau + 1)}$. Sin autem m fuerit numerus negatiuus, puta $m = -\sigma n - \tau$, tum ad integrale ex factoribus denominatoris $\alpha - \beta x^n$ inuentum adiici oportebit: $\frac{-1}{\alpha(\sigma n + \tau - 1) x^{\sigma n + \tau - 1}} - \frac{\beta}{\alpha^2(\sigma n - n + \tau - 1) x^{\sigma n - n + \tau - 1}}$
$- \frac{\beta^2}{\alpha^3(\sigma n - 2n + \tau - 1) x^{\sigma n - 2n + \tau - 1}} \ldots - \frac{\beta^\sigma}{\alpha^{\sigma + 1}(\tau - 1) x^{\tau - 1}}$

Q. E. I.

Problema. 3.

§. 46. Inuenire integrale huius formulae differentialis $\frac{x^m dx}{\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n}}$, denotante m numerum quemcunque integrum siue affirmatiuum siue negatiuum.

Solutio.

Solutio.

Hic est $M = x^m$; $N = \alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n}$ et $L = \frac{dN}{dx} = n\beta x^{n-1} + 2n\gamma x^{2n-1}$. Factor autem ipsius N quicunque trinomialis sit

$$p - 2x\sqrt{pq}\,.\,\text{cos. A}.\,\Phi + qxx$$

singulos enim factores huius formae supra inuenire docuimus; sit porro $f = \sqrt{\frac{p}{q}}$; eritque

$$\begin{array}{l|l} \mathfrak{M} = f^m \text{cos. A}\,m\Phi & \mathfrak{L} = n\beta f^{n-1} \text{cos. A}.(n-1)\Phi + 2n\gamma f^{2n-1} \text{cos. A}(2n-1)\Phi \\ \mathfrak{m} = f^m \text{sin. A}.m\Phi & \mathfrak{l} = n\beta f^{n-1} \text{sin. A}.(n-1)\Phi + 2n\gamma f^{2n-1} \text{sin. A}(2n-1)\Phi \end{array}$$

hincque $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{M}} = \text{tang. A}.\,m\Phi$ et $\mu = m\Phi$; similique modo $\frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{L}} = \frac{\beta\,\text{sin. A}(n-1)\Phi + 2\gamma f^n \text{sin. A}(2n-1)\Phi}{\beta\,\text{cos. A}(n-1)\Phi + 2\gamma f^n \text{cos. A}(2n-1)\Phi} = \text{tang. A}.\,\lambda$ vnde arcus λ innotescit. Porro est $\sqrt{(\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{m}^2)} = f^m$ et $\sqrt{(\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{l}^2)} = nf^{n-1}\sqrt{(\beta^2 + 4\beta\gamma f^n \text{cos. A}.\,n\Phi + 4\gamma\gamma f^{2n})}$ ideoque $\mathfrak{K} =$

$$\frac{\text{[illegible]}}{nf^{n-m-1}\sqrt{(\beta^2 + 4\beta\gamma f^n \text{cos. A}.\,n\Phi + 4\gamma\gamma f^{2n})}}$$

Ex isto ergo denominatoris factore generali orietur sequens integralis pars

$$\frac{\mathfrak{K}\,\text{cos. A}(\lambda - m\Phi)}{\sqrt{q}}\,l(p - 2x\sqrt{pq}\,\text{cos. A}\,\Phi + qxx) + \frac{2\mathfrak{K}\,\text{sin. A}(\lambda - m\Phi)}{\sqrt{q}}\,\text{A tang.}\,\frac{x\sqrt{q}\,\text{sin. A}\,\Phi}{\sqrt{p} - x\sqrt{q}\,.\,\text{cos. A}\,\Phi}$$

Hoc igitur modo ex singulis denominatoris factoribus trinomialibus respondentes integralis partes reperiuntur: quoniam vero etiam factores simplices in factoribus trinomialibus continentur, quando hi in quadrata abeunt: etiam integralis partes ex his resultantes obtinebuntur, si prioris membri logarithmici semissis sumatur: alterum enim membrum a quadratura circuli pendens sponte euanescit. Quodsi ergo exponens m fuerit numerus affirmatiuus minor quam $2n$, tum hoc modo completum integrale reperietur. At si m sit numerus maior, quam $2n$, tum in fractione $\frac{M}{N}$ pars integra continebitur, ex qua peculiaris integralis pars nascitur. Inuenitur autem haec pars integra per diuisionem, vti supra ostendimus. Quodsi autem m fuerit numerus negatiuus, tum ponatur $x = \frac{1}{y}$, atque formula proposita $\frac{dx}{x^m(\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n})}$ abibit in hanc $\frac{-y^{2n+m-2}dy}{\alpha y^{2n} + \beta y^n + \gamma}$, ex qua si partes integrae eliciantur, atque integrentur, tum ea ipsa integralis pars reperietur, quae ex x^m, quatenus in denominatore versatur, resultat. Ope adeo regulae traditae omnino formularum differentialium integralia concessa aequationum quotcunque dimensionum resolutione actu exhiberi poterunt; ita vt non solum sint quantitates reales, sed etiam alias quadraturas praeter hyperbolae, ac circuli non requirant.

Q. E. I.

Theo-

THEOREMATA
CIRCA DIVISORES NVMERORVM IN HAC FORMA $paa \pm qbb$ CONTENTORVM.

In sequentibus theorematis litterae a et b designant numeros quoscunque integros, primos inter se, seu, qui praeter vnitatem nullum alium habeant diuisorem communem.

Theorema 1.

Numerorum in hac forma $aa + bb$ contentorum diuisores primi omnes sunt vel 2 vel huius formae $4m + 1$ numeri.

Theorema 2.

Omnes numeri primi huius formae $4m + 1$ vicissim in hac numerorum formula $aa + bb$ continentur.

Theorema 3.

Summa ergo duorum quadratorum seu numerus huius formae $aa + bb$ diuidi nequit per vllum numerum huius formae $4m - 1$.

Theorema 4.

Numerorum in hac forma $aa + 2bb$ contentorum diuisores primi omnes sunt vel 2, vel numeri in hac forma $8m + 1$ vel in hac $8m + 3$ contenti.

Theorema 5.

Omnes numeri primi in hac $8m + 1$ vel hac $8m + 3$ forma contenti vicissim sunt numeri huius formae $aa + 2bb$.

Theo-

Theorema 6.

Nullus numerus huius formae $aa+2bb$ dividi potest per vllum numerum huius $8m-1$ vel huius $8m-3$ formae.

Theorema 7.

Numerorum in hac forma $aa+3bb$ contentorum diuisores primi omnes sunt vel 2 vel 3, vel in vna harum formularum $12m+1$, $12m+7$ contenti.

Theorema 8.

Omnes numeri primi in alterutra harum formularum $12m+1$, vel $12m+7$ siue in hac vna $6m+1$ contenti simul sunt numeri huius formae $aa+3bb$.

Theorema 9.

Nullus numerus siue huius $12m-1$ siue huius $12m-7$ formulae, hoc est nullus numerus huius formae $6m-1$ est diuisor vllius numeri in hac forma $aa+3bb$ contenti.

Theorema 10.

Numerorum in hac forma $aa+5bb$ contentorum diuisores primi omnes sunt vel 2, vel 5 vel in vna harum 4 formarum $20m+1$, $20m+3$, $20m+7$, $20m+9$ contenti.

Theorema 11.

Si fuerint numeri $20m+1$, $20m+3$, $20m+9$, $20m+7$ primi, tum erit vt sequitur

$20m+1=aa+5bb$; $2(20m+3)=aa+5bb$

$20m+9=aa+5bb$; $2(20m+7)=aa+5bb$

Theo-

Theorema 12.

Nullus numerus in vna sequentium formularum contentus $20m-1$; $20m-3$; $20m-9$; $20m-7$ potest esse divisor vllius numeri huius formae $aa+5bb$.

Theorema 13.

Numerorum in hac forma $aa+7bb$ contentorum diuisores primi omnes sunt vel 2 vel 7 vel in vna sequentium sex formularum | seu in vna harum trium

$28m+1$	$28m+11$	$14m+1$
$28m+9$	$28m+15$	$14m+9$
$28m+25$	$28m+23$	$14m+11$

sunt contenti.

Theorema 14.

Si fuerint numeri in istis formulis $14m+1$, $14m+9$, $14m+11$ contenti primi, tum simul in hac forma $aa+7bb$ continentur.

Theorema 15.

Nullus numerus huius formae $aa+7bb$ potest diuidi per vllum numerum, qui in vna sequentium sex formularum | seu harum trium

$28m+3$,	$28m+5$	$14m+3$
$28m+13$,	$28m+17$	$14m+5$
$28m+19$,	$28m+27$	$14m+13$

contineatur.

Theorema 16.

Numerorum in hac forma $aa+11bb$ contentorum

 omnes

$68m+1$	$68m+3$
$68m+9$	$68m+27$
$68m+13$	$68m+39$
$68m+49$	$68m+11$
$68m+33$	$68m+31$
$68m+25$	$68m+7$
$68m+21$	$68m+63$
$68m+53$	$68m+23$

Theorema 23.

Omnes numeri primi, qui in priori harum formularum columna continentur ad, quos 2 referri debet, sunt formae $aa+17bb$ vel ipsi quidem vel eorum noncupla. Numerorum autem primorum in altera columna contentorum tripla sunt numeri formae $aa+17bb$.

Theorema 24.

Nullus numerus huius formae $aa+17bb$ diuidi potest per vllum numerum, qui contineatur in aliqua sequentium formularum

$68m-1$	$68m-3$
$68m-9$	$68m-27$
$68m-13$	$68m-39$
$68m-49$	$68m-11$
$68m-33$	$68m-31$
$68m-25$	$68m-7$
$68m-21$	$68m-63$
$68m-53$	$68m-23$

Theo-

Theorema 25.

Numerorum in hac forma $aa+19bb$ contentorum omnes diuisores primi sunt vel 2, vel 19, vel continentur in vna sequentium

18 formularum		vel harum 9
$76m+1$	$76m+5$	$38m+1$
$76m+25$	$76m+49$	$38m+5$
$76m+17$	$76m+9$	$38m+7$
$76m+45$	$76m+73$	$38m+9$
$76m+61$	$76m+7$	$38m+11$
$76m+35$	$76m+23$	$38m+17$
$76m+39$	$76m+43$	$38m+23$
$76m+63$	$76m+11$	$38m+25$
$76m+55$	$76m+47$	$38m+35$

Theorema 26.

Omnes numeri primi, qui in vna harum formularum continentur, sunt vel ipsi, vel saltem quater sumti numeri huius formae $aa+19bb$.

Theorema 27.

Nullus numerus huius formae $aa+19bb$ diuidi potest per vllum numerum, qui contineatur in aliqua sequentium 9 formularum

$38m-1$
$38m-5$
$38m-7$
$39m-9$
$38m-11$

$38m-17$
$38m-23$
$38m-25$
$38m-35$

His igitur theorematis continetur indoles formularum $aa+qbb$, si q fuerit numerus primus, ac primum quidem vidimus omnes diuisores primos huiusmodi formularum esse vel 2 vel q, vel in talibus expressionibus $4qm+\alpha$ ita comprehendi posse, vt nullus diuisor in iis non contineatur, tum vero, vt omnis numerus primus $4qm+\alpha$ simul sit diuisor formulae cuiusdam $aa+qbb$. Deinde etiam hoc colligere licet, si numerus primus formae $4qm+\alpha$ fuerit diuisor cuiusquam numeri $aa+qbb$, tum nullum numerum formae $4qm-\alpha$ diuisorem esse posse eiusdem expressionis $aa+qbb$. Cum igitur inter formas diuisorum formulae $aa+qbb$ semper contineatur haec $4mq+1$ manifestum est, nullum numerum $aa+qbb$ diuidi posse per vllum numerum formae $4mq-1$. Denique attendenti manifestum fiet, si q fuerit numerus primus formae $4n-1$, tum diuisorum formas ad numerum duplo minorem redigi posse, ita vt ad formulas $2qm+\alpha$ reuocari queant, quod fieri nequit, si q sit numerus primus formae $4n+1$. Si igitur pro hac forma $aa+(4n+1)bb$ diuisor fuerit $4(4n+1)m+\alpha$, tum nullus numerus formae istius $4(4n+1)m+2(4n+1)+\alpha$ poterit esse diuisor eiusdem expressionis $aa+(4n+1)bb$. Plures annotationes faciemus, cum etiam formulas $aa+qbb$, quando q non est numerus primus, fuerimus contemplati.

Theo-

Theorema 28.

Numerorum in hac forma $aa+6bb$, vel hac $2aa+3bb$ contentorum diuisores primi omnes sunt vel 2 vel 3 vel in vna sequentium formularum continentur

$24m+1$	$24m+7$
$24m+5$	$24m+11$

Theorema 29.

Omnes numeri primi formae vel $24m+1$ vel $24m+7$ continentur in expressione $aa+6bb$; at numeri primi istam formam $24m+5$ et $24m+11$ continentur in expressione $2aa+3bb$.

Theorema 30.

Nullus numerus siue $aa+6bb$ siue $2aa+3bb$ diuidi potest per vllum numerum, qui contineatur in aliqua harum formularum

$24m-1$	$24m-5$
$24m-7$	$24m-11$

Theorema 31.

Numerorum in hac $aa+10bb$ vel hac forma $2aa+5bb$ contentorum diuisores primi omnes sunt vel 2 vel 5 vel in vna sequentium formularum continentur

$40m+1$	$40m+7$
$40m+9$	$40m+23$
$40m+11$	$40m+37$
$40m+19$	$40m+13$

Theo-

Theorema 32.

Numeri primi in priori harum formularum columna contenti simul sint numeri huius formae $aa + 10bb$ et numeri primi in altera columna contenti sunt numeri huius formae $2aa + 5bb$

Theorema 33.

Nullus numerus siue huius $aa + 10bb$, siue huius $2aa + 5bb$ formae diuidi potest per vllum numerum, qui in aliqua sequentium formularum continetur.

$40m - 1$	$40m - 7$
$40m - 9$	$40m - 23$
$40m - 11$	$40m - 37$
$40m - 19$	$40m - 13$

Theorema 34.

Numerorum in hac $aa + 14bb$ vel hac $2aa + 7bb$ forma contentorum diuisores primi omnes sint vel 2 vel 7 vel in vna sequentium formularum continentur

$56m + 1$	$56m + 3$
$56m + 9$	$56m + 27$
$56m + 25$	$56m + 19$
$56m + 15$	$56m + 5$
$56m + 23$	$56m + 45$
$56m + 39$	$56m + 13$

Theorema 35.

Numeri primi in priori harum formularum columna contenti simul sunt numeri vel huius $aa + 14bb$ vel $2aa$ $+ 7$

$+7bb$ formae, qui autem in altera columna continentur, eorum tripla demum in altera istarum formularum comprehenduntur.

Theorema 36.

Si in superioribus formulis signa $+$ in $-$ commutentur; tum nullus numerus in istis formulis contentus diuisor erit vel formae $aa+14bb$ vel $2aa+7bb$.

Theorema 37.

Numerorum in hac $aa+15bb$ vel hac $3aa+5bb$ forma contentorum diuisores primi omnes sunt vel 2, vel 3 vel 5 vel in vna sequentium formularum continentur

		vel harum 4
$60m+1$	$60m+31$	$30m+1$
$60m+17$	$60m+47$	$30m+17$
$60m+19$	$60m+49$	$30m+19$
$60m+23$	$60m+53$	$30m+23$

Theorema 38.

Numerorum in hac $aa+21bb$ vel hac $3aa+7bb$ forma contentorum diuisores primi omnes sunt vel 2, vel 3 vel 7, vel in vna sequentium formularum continentur.

$84m+1$,	$84m+5$
$84m+25$,	$84m+41$
$84m+37$,	$84m+17$
$84m+55$,	$84m+11$
$84m+31$,	$84m+23$
$84m+19$,	$84m+71$

Theorema 39.

Numerorum in hac $aa + 35bb$ vel $5aa + 7bb$ forma contentorum diuifores primi omnes funt vel 2, vel 5 vel 7, vel in vna fequentium formularum continentur.

		vel harum
$140m + 1$,	$140m + 3$	$70m + 1$
$140m + 9$,	$140m + 27$	$70m + 3$
$140m + 81$,	$140m + 103$	$70m + 9$
$140m + 29$,	$140m + 87$	$70m + 11$
$140m + 121$,	$140m + 83$	$70m + 13$
$140m + 109$,	$140m + 47$	$70m + 17$
$140m + 11$,	$140m + 33$	$70m + 27$
$140m + 99$,	$140m + 17$	$70m + 29$
$140m + 51$,	$140m + 13$	$70m + 33$
$140m + 39$,	$140m + 117$	$70m + 39$
$140m + 71$,	$140m + 73$	$70m + 47$
$140m + 79$,	$140m + 97$	$70m + 51$

Theorema 40.

Numerorum in aliqua harum formularum contentorum

$aa + 30bb$; $2aa + 15bb$

$3aa + 10bb$; $5aa + 6bb$

diuifores primi omnes funt vel 2, vel 3, vel 5, vel in vna fequentium formularum continentur.

$120m + 1$;	$120m + 11$
$120m + 13$;	$120m + 23$
$120m + 49$;	$120m + 59$
$120m + 37$;	$120m + 47$

120

$120m+17$;	$120m+67$
$120m+101$;	$120m+31$
$120m+113$;	$120m+43$
$120m+29$;	$120m+79$

Theoremata haec sufficiunt ad sequentes annotationes formandas, ex quibus natura diuisorum huiusmodi formularum $paa+qbb$ penitius perspicietur.

Annotatio 1.

Formula $paa+qbb$ nullum habet diuisorem, quin sit simul diuisor formulae $aa+pqbb$. Cuius quidem rei ratio facile patet; nam qui numerus est diuisor formulae $paa+qbb$, idem diuidet hanc formam $ppaa+pqbb$, hoc est hanc $aa+pqbb$, posito a loco pa. Hancobrem sufficiet istam vnicam formam $aa+Nbb$ considerasse, quippe quae ratione diuisorum hanc $paa+qbb$ in se complectitur.

Annotatio 2.

Inter numeros primos, qui vllum numerum in hac formula $aa+Nbb$ contentum diuidunt, primum occurrit binarius. Si enim N sit numerus impar, sumendis pro a et b numeris imparibus, formula $aa+Nbb$ fiet per 2 diuisibilis; at si N sit numerus par, sumto a pari, formula quoque per 2 fit diuisibilis. Deinde vero ipse numerus N vel quaelibet eius pars aliquota poterit esse diuisor formulae $aa+Nbb$, quod sumendo $a=N$ est perspicuum.

Annotatio 3.

Reliqui diuisores primi omnes formulae $aa+Nbb$ in istiusmodi expressionibus $4Nm+\alpha$ comprehendi possunt

X 2 ita,

ita, vt etiam viciſſim omnes numeri primi in formis iſtis $4Nm + \alpha$ contenti ſimul ſint diuiſores formulae $aa + Nbb$. Praeterea ſi expreſſio $4Nm + \alpha$ praebeat diuiſores formulae $aa + Nbb$, tum nullus numerus huiusmodi $4Nm - \alpha$ poterit eſſe diuiſor vllius numeri in formula $aa + Nbb$ contenti.

Annotatio 4.

Habebit autem α certos quosdam valores, qui ab indole numeri N pendebunt; ac ſemper quidem vnitas erit vnus ex valoribus ipſius α. Tum vero, quia de numeris primis in formula $4Nm + \alpha$ contentis quaeſtio eſt, perſpicuum eſt neque vllum numerum parem, neque vllum numerum, qui cum N communem habeat diuiſorem, valorem ipſius α conſtituere poſſe.

Annotatio 5.

Valores autem ipſius α omnes erunt minores quam $4N$, ſi enim qui eſſent maiores, per diminutionem numeri m minores, quam $4N$, reddi poſſent. Hinc valores ipſius α erunt numeri impares minores, quam $4N$, atque ad N primi. Neque vero omnes iſtiusmodi numeri impares ad N primi idoneos pro α valores exhibebunt, ſed eorum ſemiſſis ab hoc officio excluditur, quoniam, ſi x fuerit valor ipſius α, tum $-x$ ſeu $4N - x$ eius valor eſſe nequit; viciſſimque ſi x non fuerit valor ipſius α, tum $4N - x$ certo eius valor ſit futurus.

Annotatio 6.

Numerus igitur valorum ipſius α, ita vt $4Nm + \alpha$ contineat omnes diuiſores primos formulae $aa + Nbb$, ſequenti modo definietur. Sint p, q, r, s, cet. numeri

primi

primi inter se diuersi, excepto binario, qui seorsim est considerandus; atque

si fuerit	erit valorum ipsius α numerus
$N = 1$	1
$N = 2$	2
$N = p$	$p - 1$
$N = 2p$	$2(p - 1)$
$N = pq$	$(p-1)(q-1)$
$N = 2pq$	$2(p-1)(q-1)$
$N = pqr$	$(p-1)(q-1)(r-1)$
$N = 2pqr$	$2(p-1)(q-1)(r-1)$

etc.

Annotatio 7.

Quemadmodum autem vnitas semper reperitur inter valores ipsius α, ita etiam quiuis numerus quadratus impar et primus ad N locum habere debet in valoribus ipsius α. Posito enim b numero pari $2c$, formula fiet $aa + 4Ncc$, quae, si sit numerus primus, contineri debet in expressione $4Nm + \alpha$. Ergo α erit aa vel residuum, quod ex diuisione ipsius aa per $4N$ remanet. Simili modo inter valores ipsius α reperiri debent omnes numeri $aa + N$, vel quae ex eorum per $4N$ diuisione supererunt residua; posito enim $b = 2c + 1$ fiet $aa + Nbb = aa + N + 4N(cc + c)$, qui, si fuerit numerus primus, debebit $aa + N$ esse valor ipsius α.

Annotatio 8.

Intelligitur etiam, si x fuerit valor ipsius α, tum quoque xx (quod quidem ex praecedente patet) et omnes omnino potestates ipsius x, puta x^{μ} inter valores ipsius α locum

cum habere debere. Deinde, si praeter x quoque y fuerit valor ipsius α, tum quoque xy et generaliter $x^{\mu}y^{\nu}$ dabit quoque valorem ipsius α. Scilicet si $x^{\mu}y^{\nu}$ maius fuerit quam $4N$, per hoc diuidatur et residuum erit valor ipsius α. Simili modo, si insuper z fuerit valor ipsius α, tum etiam $x^{\mu}y^{\nu}z^{\varsigma}$ erit valor ipsius α. Hincque ex cognito vno vel aliquot valoribus ipsius α facili negotio omnes omnino eius valores inueniuntur.

Annotatio 9.

Sit x quicunque numerus primus ad $4N$, eoque minor, atque vel $+x$ vel $-x$ valor erit ipsius α. Si igitur fuerit x numerus primus, ex sequenti tabula intelligetur, quibus casibus $+x$, quibusque $-x$ valorem ipsius α praebeat

Si	erit
$N = 3n - 1$	$\alpha = +3$
$N = n +$ [illegible]	$\alpha = -3$
si $N = \begin{cases} 5n+1 \\ 5n+4 \end{cases}$	$\alpha = +5$
$N = \begin{cases} 5n+2 \\ 5n+ \text{[illegible]} \end{cases}$	$\alpha = -5$
$N = \begin{cases} 7n+ \text{[illegible]} \\ 7n+3 \\ 7n+6 \end{cases}$	$\alpha = +7$
$N = \begin{cases} 7n+5 \\ 7n+ \text{[illegible]} \\ n+ \text{[illegible]} \end{cases}$	$\alpha = -7$
$N = \begin{cases} 11n+2 \\ n+6 \\ 1n+7 \\ 1n+8 \\ 11n+10 \end{cases}$	$\alpha = +11$
$= \begin{cases} 11n+1 \\ 1n+ \text{[illegible]} \\ 1n+ \text{[illegible]} \\ 11n+5 \\ 11n+9 \end{cases}$	$\alpha = -11$

Si propositus sit numerus quicunque primus, qui vtrum signo + an − affectus valorem ipsius α praebeat, ita inuestigabitur. Bini casus debent euolui, alter, quo propositus numerus primus est formae $4u + 1$, alter quo est formae $4u - 1$. Priori casu erit $\alpha = +(4u+1)$ si fuerit $N = (4u+1)n + tt$, at $\alpha = -(4u+1)$, si fuerit $N = (4u+1)n + tt$. Posteriori casu autem erit $\alpha = +(4u-1)$ si sit $N = (4u-1)n + tt$ at $\alpha = -(4u-1)$ si $N = (4u-1)n + tt$.

Vbi

Vbi notandum est, quemadmodum signum $=$ aequalitatem denotat, ita signum $\neq$ aequalitatis impossibilitatem designare. Quod si autem fuerit pro vtroque casu $N \neq (4u \pm 1)n + s$, erit quoque $N \neq (4u \pm 1)n + s^{\nu}$, denotante ν numerum quemcunque integrum, vnde ista tabella pro quibusuis numeris primis sine negotio construitur.

Annotatio 10.

Quoniam inter formas diuisorum primorum ipsius $aa + Nbb$ habetur $4Nm + 1$, eadem expressio $aa + Nbb$ per nullum numerum diuidi poterit, qui contineatur in hac forma $4Nm - 1$. Simili modo cum $4Nm + tt$ exhibeat formam diuisorum expressionis $aa + Nbb$, sequitur nullum numerum huiusmodi $4Nm - tt$ posse esse diuisorem vllius numeri in hac forma $aa + Nbb$ contenti, si quidem quod semper pono a et b sint numeri inter se primi. Hanc ob rem impossibilis erit ista aequatio $(4Nm - tt)u = aa + Nbb$, ideoque erit $4Nmu - ttu - Nbb \neq aa$, si quidem fuerint $4Nmu - ttu$ et Nbb numeri inter se primi, quod cum certo eueniat, si $b = 1$ et $t = 1$, nanciscimur istud.

Consectarium.

Nullus numerus hac formula $4abc - b - c$ contentus vnquam esse potest quadratus.

Annotatio 11.

Si fuerit N numerus huius formae $4n - 1$, tum formae diuisorum ad numerum duplo minorem rediguntur, ita vt in formulis huiusmodi $2Nm + \alpha$ comprehendantur. Scilicet si fuerit $4Nm + \alpha$ diuisorum forma, tum quoque

4N

$4Nm + 2N + \alpha$ erit forma diuisorum. Quam cum $4Nm + tt$ sit forma diuisorum, sequitur nullum numerum $2Nm - tt$ diuisorem esse posse formae $aa + Nbb$. Hinc erit $(2Nm - tt)u = aa + Nbb$, existente $N = 4n - 1$, vnde oritur hoc.

Consectarium.

Nullus numerus huius formae $2abc - b - c$, si vel b vel c fuerit numerus impar $4n - 1$, vnquam potest esse quadratus.

Annotatio 12.

Si fuerit N numerus impar huiusmodi $4n + 1$ vel etiam numerus impariter par, tum diuisorum formae ad numerum duplo minorem redigi non possunt. Scilicet si $4Nm + \alpha$ fuerit diuisor formae $aa + Nbb$ tum $4Nm + 2N + \alpha$ eiusdem formae diuisor esse non poterit. Hinc $2(2m + 1)N + tt$ non erit diuisor formae $aa - Nbb$, ideoque haec aequatio $(2(2m + 1)N + tt)u = aa + Nbb$ erit aequatio impossibilis, si quidem sint a et b numeri primi inter se: et N sit vel numerus impar formae $4n + 1$ vel numerus impariter par. Ex quo sequitur istud

Consectarium.

Nullus numerus huius formae $2abc - b + c$, existente c numero impari, et b vel impariter pari vel impari formae $4n + 1$, vnquam esse potest quadratus.

Scholion 1.

Quae hic sunt allata sufficienter declarant indolem diuisorum huiusmodi formularum $aa + Nbb$, simulque inseruiunt viunt ad omnes diuisorum formas expedite inueniendas, quibus cognitis quoque eae numerorum formae innotescunt, quae nunquam prebere queant diuisores formulae $aa+Nbb$. Cum igitu haec pateant ad omnes valores ipsius N, siue sint numeri primi, siue compositi; reliquum est, vt etiam casus euoluamus, quibus N denotet numeros negatiuos tam primos quam compositos; perspicuum autem est formulam $paa-qbb$ nullum diuisorem habere posse, quin sit diuisor huius $aa-pqbb$ seu $pqaa-bb$, vnde sufficiet huiusmodi tantum formas $aa-Nbb$ euoluisse.

Theorema 41.

Numerorum in hac forma $aa-bb$ contentorum diuisores primi omnes sunt vel 2 vel $4m \pm 1$, nullus scilicet datur numerus, qui non sit diuisor differentiae duorum quadratorum. Vicissim autem omnes numeri, praeter impariter pares, ipsi sunt differentiae duorum quadratorum.

Theorema 42.

Numerorum in hac forma $aa-2bb$ contentorum omnes diuisores primi sunt vel 2 vel huius formae $8m \pm 1$. Omnesque numeri primi huius formae $8m \pm 1$ ipsi infinitis modis in formula $aa-2bb$ continentur.

Theorema 43.

Numerorum in hac forma contentorum $aa-3bb$ omnes diuisores primi sunt vel 2 vel 3 vel huius formae $12m \pm 1$. Atque vicissim omnes huiusmodi numeri primi simul in hac $aa-3bb$ vel hac $3aa-bb$ forma infinitis modis continentur.

Theorema 44.

Omnes diuisores primi huius formae $aa-5bb$ sunt vel 2 vel 5 vel continentur.

in altera harum formularum	vel in hac vna
$20m \pm 1$, $20m \pm 9$	$10m \pm 1$.

Omnesque numeri primi in his formis contenti simul sunt diuisores formae $aa-5bb$.

Theorema 45.

Omnes diuisores primi huius formae $aa-7bb$ sunt vel 2 vel 7 vel in vna sequentium formularum continentur

$$28m \pm 1;\ 28m \pm 3;\ 28m \pm 9$$

atque viciffim omnes numeri primi in his formis contenti simul sunt diuisores formae $aa-7bb$.

Theorema 46.

Omnes diuisores primi huius formae $aa-11bb$ sunt vel 2 vel 11 vel in vna sequentium formarum continentur

$$44m \pm 1;\ 44m \pm 5;\ 44m \pm 7;\ 44m \pm 9;\ 44m \pm 19$$

atque viciffim omnes numeri primi in his formulis contenti simul sunt diuisores formae $aa-11bb$, quae reciprocatio in omnibus sequentibus theorematis locum habet.

Theorema 47.

Omnes diuisores primi formae $aa-13bb$ sunt vel 2 vel 13 vel in sequentibus formulis continentur:

		quae reuocantur ad has
$52m \pm 1$;	$52m \pm 3$	$26m \pm 1$
$52m \pm 9$;	$52m \pm 25$	$26m \pm 3$
$52m \pm 23$;	$52m \pm 17$	$26m \pm 9$

Theorema 48.

Omnes diuisores primi numerorum huius formae $aa - 17bb$ sunt vel 2 vel 17, vel in sequentibus formulis continentur:

		quae revocantur ad has
$68m \pm 1$;	$68m \pm 9$	$34m \pm 1$
$68m \pm 13$;	$68m \pm 19$	$34m \pm 9$
$68m \pm 33$;	$68m \pm 25$	$34m \pm 13$
$68m \pm 21$;	$68m \pm 15$	$34m \pm 15$

Theorema 49.

Omnes diuisores primi numerorum huius formae $aa - 19bb$ sunt vel 2 vel 19 vel in sequentibus formulis continentur

$76m \pm 1$;	$76m \pm 3$;	$76m \pm 9$
$76m \pm 27$;	$76m \pm 5$;	$76m \pm 15$
$76m \pm 31$;	$76m \pm 17$;	$76m \pm 25$

Theorema 50.

Omnes diuisores primi numerorum formae huius $aa - 6bb$ sunt vel 2 vel 3 vel in his formulis continentur:

$24m \pm 1$; $24m \pm 5$;

Theorema 51.

Omnes diuisores primi numerorum formae $aa - 10bb$ sunt vel 2 vel 5 vel in his formulis continentur:

$40m \pm 1$; $40m \pm 3$
$40m \pm 9$; $40m \pm 13$

Theorema 52.

Omnes diuisores primi numerorum huius formae $aa - 14bb$ sunt vel 2 vel 7 vel in his formulis continentur:

$56m \pm 1$; $56m \pm 5$; $56m \pm 25$
$56m \pm 13$; $56m \pm 9$; $56m \pm 11$

Theorema 53.

Omnes diuisores primi numerorum huius formae $aa - 22bb$ sunt vel 2 vel 11 vel in his formulis continentur:

$88m \pm 1$; $88m \pm 3$; $88m \pm 9$;
$88m \pm 27$; $88m \pm 7$; $88m \pm 21$;
$88m \pm 25$; $88m \pm 13$; $88m \pm 39$;
$88m \pm 29$.

Theorema 54.

Omnes diuisores primi numerorum huius formae $aa - 15bb$ sunt vel 2 vel 3 vel 5 vel in his formulis continentur:

$60m \pm 1$; $60m \pm 7$; $60m \pm 11$; $60m \pm 17$.

Theorema 55.

Omnes diuisores primi numerorum huius formae $aa - 21bb$ sunt vel 2 vel 3 vel 7 vel in his formis continentur:

$84m \pm 1$; $84m \pm 5$
$84m \pm 25$; $84m \pm 41$
$84m \pm 37$; $34m \pm 17$

quae reuocantur ad has

$42m \pm 1$
$42m \pm 5$
$42m \pm 17$

Theo-

Theorema 56.

Omnes diuisores primi numerorum huius formae $aa - 33bb$ sunt vel 2 vel 3, vel 11 vel in his formulis continentur: quae reuocantur ad has

$132m \pm 1$;	$132m \pm 17$	$66m \pm 1$
$132m \pm 25$;	$132m \pm 29$	$66m \pm 17$
$132m \pm 35$;	$132m \pm 65$	$66m \pm 25$
$132m \pm 49$;	$132m \pm 41$	$66m \pm 29$
$132m \pm 37$;	$132m \pm 31$	$66m \pm 31$

Theorema 57.

Omnes diuisores primi numerorum huius formae $aa - 35bb$ sunt vel 2 vel 5 vel 7 vel in his formulis continentur:

$140m \pm 1$;	$140m \pm 9$;	$140m \pm 59$
$140m \pm 29$;	$140m \pm 19$;	$140m \pm 31$
$140m \pm 13$;	$140m \pm 23$;	$140m \pm 67$
$140m \pm 43$;	$140m \pm 33$;	$140m \pm 17$

Theorema 58.

Omnes diuisores primi numerorum huius formae $aa - 30bb$ sunt vel 2 vel 3 vel 5 vel in his formulis continentur

$120m \pm 1$;	$120m \pm 13$;	$120m \pm 49$
$120m \pm 37$;	$120m \pm 7$;	$120m \pm 29$
$120m \pm 17$;	$120m \pm 19$;	

Theorema 59.

Omnes diuisores primi numerorum huius formae $aa - 105bb$ sunt vel 2 vel 3 vel 5 vel 7 vel continentur in his formulis

		quae reuocantur ad has
$420m \pm 1$	; $420m \pm 13$	$210m \pm 1$
$420m \pm 169$	; $420m \pm 97$	$210m \pm 13$
$420m \pm 23$	; $420m \pm 121$	$210m \pm 23$
$420m \pm 187$	; $420m \pm 131$	$210m \pm 41$
$420m \pm 109$	; $420m \pm 157$	$210m \pm 53$
$420m \pm 59$	; $420m \pm 73$	$210m \pm 59$
$420m \pm 101$	; $420m \pm 53$	$210m \pm 73$
$420m \pm 151$	; $420m \pm 137$	$210m \pm 79$
$420m \pm 89$	; $420m \pm 103$	$210m \pm 89$
$420m \pm 79$	; $420m \pm 187$	$210m \pm 97$
$420m \pm 41$	; $420m \pm 113$	$210m \pm 101$
$420m \pm 209$.	; $420m \pm 197$	$201m \pm 103$

Annotatio 13.

Numerorum ergo in formula $aa-Nbb$ contentorum diuisores primi omnes sunt vel 2, vel diuisores numeri N vel in eiusmodi formulis $4Nm \pm \alpha$ comprehenduntur. Quodsi enim $4Nm+\alpha$ fuerit forma diuisorum, tum quoque $4Nm-\alpha$ erit diuisorum forma: secus atque in formulis $aa+Nbb$, quarum si $4Nm+\alpha$ fuerit diuisor tum $4Nm-\alpha$ nullum vnquam praebere potest diuisorem eiusdem formulae.

Annotatio 14.

Posita ergo $4Nm \pm \alpha$ pro forma diuisorum generali numerorum in hac expressione $aa-Nbb$ contentorum, littera α plerumque plures significabit numeros; inter quos vnitas semper continetur, tum vero quia hic de diuisoribus primis sermo est inter valores ipsius α nullus erit numerus

merus par nec vllus diuisor numeri N. Deinde etiam manifestum est, omnes valores ipsius α ita ordinari posse, vt sint minores quam $2N$. Si enim sit $4Nm+2N+b$ diuisor, tum posito $m-1$ loco m, diuisor erit $4Nm-(2N-b)$. Erunt ergo valores ipsius α numeri impares primi ad N, minores quam $2N$, horumque numerorum omnium imparium et primorum ad N et minorum, quam $2N$, semissis tantum praebebit idoneos valores ipsius α, reliqui exhibebunt formulas, in quibus plane nullus continetur diuisor. Perpetuo scilicet totidem habebuntur formulae diuisorum, quot sunt contrariae, solo excepto casu, quo $N=1$.

Annotatio 15.

Quod ad numerum valorum ipsius α pro formula diuisorum $4Nm\pm\alpha$ attinet, quoniam ob signum ambiguum quaeuis formula est duplex, hic quoque eadem valebit regula, quam supra annot. 6. dedi. Sic in vltimo theoremate, quo erat $N=105=3, 5, 7$, numerus valorum ipsius α erit $=2, 4, 6=48$, seu cum quaeuis formula sit gemina, numerus formularum fit 24, quot etiam exhibuimus.

Annotatio 16.

Sicut autem vnitas perpetuo inter valores ipsius α reperitur, ita etiam quiuis numerus quadratus, qui sit primus ad $4N$, valorem idoneum pro α suppeditabit. Posito enim $b=2c$, formula $aa-Nbb$ abit in $aa-4Ncc$ seu $4Ncc-aa$, ex quo patet quemuis numerum quadratum aa, qui sit primus ad $4N$, exhibere valorem idoneum pro α, sumendo scilicet residuo, quod in diuisione ipsius aa per $4N$

4N remanet. Simili modo ponendo $b = 2c + 1$, formula $Nbb - aa$ abit in $4N(cc + c) + N - aa$, vnde etiam omnes numeri $N - aa$ seu $aa - N$, qui quidem sint primi ad $4N$, idoneos valores pro α praebebunt. Deinde quoque notandum est, si sint x, y, z, valores ipsius α, tum quoque x^μ, y^ν, z^ξ itemque omnia producta, quae ex numeris x, y, z eorumue potestatibus quibuscunque resultant, valores ipsius α esse exhibitura; vnde cognito vno vel aliquot valoribus ipsius α facili negotio omnes reperiuntur.

Annotatio 17.

Quo autem clarius appareat, cuiusmodi valores littera α perpetuo sit habitura, tabulam sequentem adiicere visum est, similem eius, quae annot. 9. habetur.

Erit scilicet	si fuerit
$\alpha = 3$	$N = 3n + 1$
$\alpha \neq 3$	$N = 3n - 1$
$\alpha = 5$	$N = 5n \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$
$\alpha \neq 5$	$N = 5n \begin{cases} +2 \\ -2 \end{cases}$
$\alpha = 7$	$N = 7n \begin{cases} +1 \\ +2 \\ -3 \end{cases}$
$\alpha \neq 7$	$N = 7n \begin{cases} -1 \\ -2 \\ +3 \end{cases}$
$\alpha = 11$	$N = 11n \begin{cases} +1 \\ -2 \\ +3 \\ +4 \\ +5 \end{cases}$
$\alpha \neq 11$	$N = 11n \begin{cases} -1 \\ +2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \end{cases}$

$\alpha = 13$

$$\alpha = 13 \quad \Big| \quad N = 13n \begin{cases} +1 \\ -1 \\ +3 \\ -3 \\ +4 \\ -4 \end{cases}$$

$$\alpha = 13 \quad \Big| \quad N = 13n \begin{cases} +2 \\ -2 \\ +5 \\ -5 \\ +6 \\ -6 \end{cases}$$

Annotatio 18.

Ex hac igitur tabula numeri primi, qui idoneos valores pro α praebeant, facile dignosci simulque inepti reiici possunt. Proposito scilicet numero primo p, omnes numeri quadrati in huiusmodi formulis $pn + \theta$ comprehendi possunt, quae prodeunt ponendo pro θ numeros quadratos, seu residua, quae ex diuisione quadratorum per p remanent. Quare si N fuerit huiusmodi numerus $pn + tt$, tum inter formas diuisorum $4Nm + \alpha$ formulae $aa - Nbb$ seu $Nbb - aa$, habebitur $\alpha = p$, sin autem numerus N non contineatur in forma $pn + tt$, tum nullus numerus in formula hac $4Nm + p$ contentus poterit esse diuisor vllius numeri huius formae $aa - Nbb$.

Annotatio 19.

Si fuerit N numerus impar formae $4n + 1$ tum expressionis $aa - Nbb$ diuisorum formae $4Nm + \alpha$ ad duplo pauciores reduci possunt, ita vt exhiberi possint hoc modo: $2Nm + \alpha$. Hoc scilicet casu, si $4Nm + \alpha$ fuerit forma diuisorum, tum quoque $4Nm + (2N - \alpha)$ erit diuisorum forma, sic cum casu $N = 13$, vna diuisorum formulae $aa - 13bb$ forma esset $52m + 3$, erit quoque $52m + 23$ forma diuisorum.

Annotatio. 20.

Sin autem fuerit N vel numerus impariter par, vel numeru impar formae $4n-1$ tum ista formarum diuidentium reductio ad duplo pauciores non succedit. Scilicet si hoc casu formulae $aa-Nbb$ fuerit $4Nm\pm\alpha$ diuisorum forma, tum $4Nm\pm(2N-\alpha)$ talis non erit, hoc est: nullus numerus in forma $2(2m\pm1)N\pm\alpha$ contentus erit diuisor vllius numeri huiusmodi $aa-Nbb$. Posito ergo $\alpha=tt$, erit

$$(2(2m\pm1)N\pm tt)u=aa-Nbb.$$

Vnde consequimur sequens.

Consectarium.

Nullus numerus in hac forma $2abc\pm c+b$ contentus vnquam potest esse quadratus, si quidem fuerit a numerus impar, et b numerus seu impariter par, seu impar huius formae $4n-1$.

Scholion 2.

Huiusmodi formulae magis speciales, quae nunquam quadrata fieri queant, innumerabiles superioribus deduci possint. Consideremus enim priorum formam $aa+Nbb$, sitque $4Nm+A$ eiusmodi formula, vt nullus numerus in ea contentus possit esse diuisor formae $aa+Nbb$. Erit ergo $aa+Nbb=(4Nm+A)u$, denotante hoc signo $=$ aequationem impossibilem, ex quo oritur $aa=4Nmu+Au-Nbb$. Sit $b=Ac$ fiet $aa=4Nmu+Au-NAAcc$. Ponatur porro $u=NAcc+d$, eritque $aa=4NNAmcc+4Nmd+Ad$. Sit $d=4NNn$ erit $aa=16N^3mn+4NNAmcc+4NNAn$. Diuidatur haec

haec formula per quadratum $4NN$ ac ponatur $c = 1$ eritque $4Nmn + Am + An$ formula, quae nunquam poterit esse quadratum, si quidem forma $aa + Nbb$ non possit diuidi per vllum numerum in hac formula $4Nm + A$ contentum. Ex superioribus ergo theorematis colligimus nullum numerum, qui in vna sequentium expressionum contineatur, fieri posse quadratum.

$4mn - (m+n)$	$4mn + 3(m+n)$
$8mn - (m+n)$	$8mn + 7(m+n)$
$8mn - 3(m+n)$	$8mn + 5(m+n)$
$12mn - (m+n)$	$12mn + 11(m+n)$
$12mn - 7(m+n)$	$12mn + 5(m+n)$
$20mn - (m+n)$	$20mn + 19(m+n)$
$20mn - 3(m+n)$	$20mn + 17(m+n)$
$20mn - 7(m+n)$	$20mn + 13(m+n)$
$20mn - 9(m+n)$	$20mn + 11(m+n)$
$24mn - (m+n)$;	$24mn + 23(m+n)$
$24mn - 5(m+n)$;	$24mn + 19(m+n)$
$24mn - 7(m+n)$;	$24mn + 17(m+n)$
$24mn - 11(m+n)$;	$24mn + 13(m+n)$
$28mn - (m+n)$;	$28mn + 27(m+n)$
$28mn - 9(m+n)$;	$28mn + 19(m+n)$
$28mn - 11(m+n)$;	$28mn + 17(m+n)$
$28mn - 15(m+n)$;	$28mn + 13(m+n)$
$28mn - 23(m+n)$;	$28mn + 5(m+n)$
$28mn - 25(m+n)$;	$28mn + 3(m+n)$

cet.

Notandum autem est in formulis alterius columnae numeros m et n respectu coefficientis ipsius $m + n$ primos esse oportere. Hanc restrictionem requirit ea conditio, quam initio stabilissimus, vt in forma $aa+Nbb$ numeri a et b sint inter se numeri primi: nisi enim haec conditio obseruetur, quilibet numerus posset esse diuisor istius formae. Ceterum hac conditione obseruata ex praecedentibus perspicuum est, si $4Nmn-A(m+n)$ quadratum esse nequeat, tum quoque hanc latius patentem $4Nmn-A(m+n)\pm 4Np(m+n)$ quadratum esse non posse.

Scholion 3.

Contemplemur iam expressionem $aa-Nbb$ cuius nullus diuisor contineatur in formula hac $4Nm\pm A$. Erit ergo $aa-Nbb=4Nmu\pm Au$ seu $aa=4Nmu+NAA\pm Au$. Ponatur $NA\pm u=d$, seu $u=\pm d\mp NA$, eritque $aa=\pm 4Nmd\mp 4NNAm+Ad$; fit $d=\pm 4NNn$ fietque $16N^3mn\mp 4NNAm\pm 4NNAn=aa$; vnde patet nullum numerum contentum in hac formula $4Nmn\pm A(m-n)$ quadratum esse posse. Neque ergo etiam vllus numerus in hac expressione $4Nmn\pm A(m-n)\pm 4Np(m-n)$ contentus quadratum esse poterit, si modo conditio ante memorata obseruetur, vt a et b sint numeri inter se primi. Hinc itaque ex theorematis posterioribus deducuntur sequentes formulae, quae nunquam numeros quadratos praebere possunt.

$8mn\pm 3(m-n)$, $8mn\pm 5(m-n)$
$12mn\pm 5(m-n)$; $12mn\pm 7(m-n)$
$20mn\pm 3(m-n)$; $20mn\pm 17(m-n)$
$20mn\pm 7(m-n)$; $20mn\pm 13(m-n)$
$24mn\pm 7(m-n)$; $24mn\pm 17(m-n)$
$24mn\pm 11(m-n)$; $24mn\pm 13(m-n)$

$$28mn \pm 5(m-n); \quad 28mn \pm 23(m-n)$$
$$28mn \pm 11(m-n); \quad 28mn \pm 17(m-n)$$
$$28mn \pm 13(m-n); \quad 28mn \pm 15(m-n)$$
cet.

attendenti autem facile patebit ambos numeros m et n respectu coefficientis ipsius $(m-n)$ primos esse debere: alioquin enim, si verbi gratia in formula $12mn \pm 5(m-n)$ poneretur $m = 5p$ et $n = 5q$, prodiret $12.25\,pq \pm 25(p-q)$, neque adeo haec formula $12pq \pm (p-q)$ quadratum esse posset, quod tamen est falsum.

DE
MOTV CORPORVM FLEXIBILIVM.

Argumentum, quod hic pertractandum ſuſcipio, inſignem mechanicae partem conſtituit, cum enim hac ſcientia cunctorum corporum motus, tam quales permaneant, quam quomodo a potentiis immutentur, inueſtigari debeant, ex diuerſa corporum indole primaria tractationis diuiſio originem trahit. Hinc corpora flexibilia, quorum ſtructura ita eſt comparata, vt partes inflecti queant, ad peculiarem mechanicae partem referri debebunt, quae, etſi alias vniuerſa motus ſcientia iam ſatis exculta videatur, tamen ne ad hoc vsque tempus quidem a quoquam eſt tentata, ita vt etiam prima principia, ex quibus corporum flexibilium motus definiri debeat, adhuc ignorentur. Quanquam enim Celeberrimus Daniel Bernoulli et ego motum oſcillatorium huiusmodi corporum feliciter explicauimus, tamen quia tantum oscillationes minimas ſumus contemplati, ipſis genuinis principiis, quibus corporum flexibilium motus continetur, carere poteramus, cum principia ſtatica eſſent ſufficientia. Quoniam igitur hoc argumentum plane eſt nouum atque adhuc intactum, caſus tantum nonnullos ſimpliciſſimos euoluam, vt principia horum motuum in medium proferantur, ſimulque methodus tradatur, qua omnia huius generis problemata reſolui conueniat. Methodo igitur mathematicis conſueta, quae in hanc rem ſum meditatus, ordine proponam.

Defi-

Definitio

1. Flexura est eiusmodi duorum corporis partium AB et BC connexio in B, ita vt vtraque pars circa hoc punctum B liberrime inflecti atque rotari possit. Tab. II. fig. 2.

Scholion

2. Flexura scilicet B tantum diuulsioni partium AB et BC resistit, de cetero autem non impedit, quo minus ambae partes ad quemcunque angulum inter se ABC vel AB inclinentur. Quando autem dico, partes liberrime inflecti posse, hanc flexuram perfectam, de qua hic loquor, a flexura elastica distinguo; ad partes enim circa flexuram perfectam inflectendas tantum opus est, vt inertia partis mouendae superetur, cum si flexura esset elastica, praeterea elater superari deberet. Huiusmodi flexura perfecta producitur, si duo corpora ope fili colligantur, quod quidem cuique est notum, corpora autem circa flexuram satis gracilia esse oportet, vt ne nimis crassa figura inflectionem impediat. Hancobrem hic partes per flexuram inter se connexas tanquam lineas rectas repraesentabo, quod tamen non impediat, quo minus quaecunque figurae, dummodo sint idoneae, in earum linearum rectarum locum mente substituantur.

Corollar. 1.

3. Ex hac definitione proprie intelligitur, quid sit corpus vnica flexura praeditum; quippe quod constat duabus partibus rigidis AB et BC per flexuram B inter se connexis.

Corol-

Corollar. 2.

Tab. II. fig. 3. 4. Hinc vero simul colligitur, corpora duabus pluribusue flexuris praedita, constare ex pluribus partibus rigidis AB, BC, CD, cet. quarum binae quaeque contiguae ope flexurae, vti in B et C, sint connexae.

Corollar. 3.

5. Si longitudines partium rigidarum euanescant, seu fiant quam minimae, numerusque flexurarum in infinitum excrescat, tum perspicuum est, huiusmodi corpus filum seu funem seu catenam perfecte flexilem esse exhibiturum.

Theorema

6. Si corporis flexibilis singulis partibus aequales motus secundum eandem plagam imprimantur, tum totum corpus, quasi esset rigidum, nullam inflexionem patietur, sed eadem perpetua celeritate in eandem plagam moueri perget, nisi a causis externis in hoc motu perturbetur.

Demonstratio.

Veritas huius propositionis sequitur ex prima motus lege, qua omnia corpora motum, quem semel acceperunt, vniformiter in directum conseruare conantur. Corporis igitur flexibilis, de quo sermo est, singulae partes, si essent dissolutae, motum impressum conseruarent, at, quoniam omnibus partibus aequalis motus in eadem directione est impressus, puncta quae initio erant contigua, talia perpetuo manebunt sicque flexuris per hunc motum impressum nulla vis infertur. Quamobrem quotcunque in corpore

fuerint

fuerint flexurae, continuatio motus impressi nequaquam impeditur, ideoque corpus, tanquam esset rigidum, vniformiter in directum moueri perget. Q. E. D.

Corollar. 1.

7. Hoc igitur casu, quo singulis corporis partibus motus aeque celeres secundum eandem directionem imprimuntur, sine vlla difficultate perpetua motus continuatio definiri potest, nisi motus a viribus externis perturbetur.

Corollar. 2.

8. Quando autem singulis partibus diuersi motus imprimuntur, ita, vt singulae suum motum conseruare nequeant, quin simul in flexuris a se inuicem dissoluantur, tum ob id ipsum, quod flexura dissolutioni resistit, motus partium perturbabuntur.

Corollar. 3.

9. Quo igitur appareat, vtrum per flexuram motus immutetur, concipiatur nexus omnis in flexuris tolli, ac dispiciatur, vtrum, dum quaelibet pars motum sibi impressum prosequitur, termini, qui ante in flexuris erant coniuncti, a se inuicem discedant, nec ne, priori enim casu flexurae vis sese in continendis partibus exerens, motum turbabit, altero vero casu motum inuariatum relinquet.

Scholion.

10. Ad motum ergo cuiusque corporis flexibilis determinandum, singulae partes, quasi inter se essent dissolu-

tae, confiderari, et quo motu promoueri pergant, examinari debebunt; tum vero flexurae cuiusque vis eft inveftiganda, quae fingula motus ita moderetur, vt partes, vti natura poftulat, contiguae conferuentur, hocque modo ad quoduis momentum motus fingularum corporis partium definietur. En ergo paucis verbis complexam totam methodum, qua in hoc negotio vti oportet; interim tamen in eius applicatione maxima obftacula occurrunt, quae fingulari circumfpectione remoueri debent. Maximum autem fubfidium in hac inueftigatione in eo verfatur, vt ille ipfe motus, qui quaeritur, modo quam commodiffimo per fymbola repraefentetur; qua de re in fequenti fcholio ante omnia eft explicandum.

Scholion 2.

11. Confideremus primo corpora vnica flexura praedita, his enim pertractatis non admodum difficile erit ad plures flexuras methodum accommodare. Huiusmodi ergo corporis motus, vtcunque fuerit comparatus, mente comprehendetur atque intelligetur, fi primo nouerimus motum, quo ipfa flexura progrediatur, hoc eft, viam, quam defcribit, atque eius celeritatem in fingulis locis. Deinde fi vtraque pars non motu fibi parallelo flexuram fequatur vtriusque motus rotatorius feu angularis circa ipfam flexuram debet cognofci. Tandem ad quoduis tempus fitus partium refpectu plagae datae erit definiendus. Has autem res fi in quouis motu oblato determinare atque affignare poterimus, tum dubium eft nullum, quin totum corporis motum perfecte habeamus cognitum. Ad haec autem expediendа

pedienda primum opus est vt inuestigemus, quemadmodum vtraque pars, si esset ab altera soluta, motum suum esset continuatura, deinde quomodo quaeuis potentia sollicitans hunc motum sit perturbatura. Denique ea flexurae vis est quaerenda, qua fiat, vt vtriusque partis terminus B aequo motu cieatur; sicque vis, quam flexura sustinet, seu qua ruptioni resistit, innotescet, qua cognita vtriusque partis, atque adeo totius corporis motus ita determinabitur, vti ad eius perfectam cognitionem requiri ostendimus.

Problema I.

12. *Si corporis flexibilis vtcunque moti vna pars subito a reliquarum nexu dissoluatur, definire motum, quo ista pars sibi relicta promoueri perget.*

Solutio.

Eo momento, quo pars BC soluitur, habeat punctum seu extremitas B motum secundum directionem BP cum celeritate debita altitudini $= v$, circa punctum B autem ipsa pars BC habuerit motum rotatorium, cuius celeritas angularis in data a puncto B distantia $= 1$ debita sit altitudini $= q$, angulus vero CBP momento solutionis sit $= \Phi$. Quo nunc huius motus continuatio facilius cognoscatur, ponamus toti spatio motum imprimi aequalem et contrarium ei, quem punctum B momento solutionis habuerat; quo facto solus motus rotatorius circa punctum B in parte BC supererit. Consideretur ergo huius partis centrum grauitatis, quod sit in G, existente $BG = g$, atque manifestum erit ex motu rotatorio corporis Tab. II. fig. 4.

poris BC circa B centrum grauitatis G habiturum esse motum secundum directionem Gg ad BG normalem, cuius celeritas debita sit altitudini $= ggq$. Per motus ergo legem generalem centrum grauitatis G hac ipsa celeritate promouebitur vniformiter in directum secundum directionem Gg: interea vero corpus BC circa hoc centrum grauitatis G gyrabitur eodem motu rotatorio, quem circa B momento solutionis habuerat scilicet huius motus celeritas angularis in distantia $= 1$ a centro G erit debita altitudini $= q$. Hocque ergo duplici motu, altero rectilineo centri grauitatis G, altero rotatorio circa idem centrum corpus vniformiter in infinitum promouebitur. Quodsi nunc toti spatio ille motus, quem ipsi impressum esse finximus, iterum dematur, per compositionem orietur motus verus, quem pars BC soluta habebit. Q. E. I.

Coroll. 1.

13. Primo ergo momento pars seu virga BC perveniet in situm bgc, ideoque ad rectam BP perinde inclinabitur, ac si circa punctum fixum B esset rotatum. Scilicet dum centrum grauitatis G absoluit spatiolum $Gg = dx = g\,dt\sqrt{q}$, posito dt pro elemento temporis, fiet $d\Phi = -dt\sqrt{q}$, ob angulum $PBG = \Phi$.

Coroll. 2.

14. Punctum autem B de recta OP transferetur in punctum b, sumta $gb = BG$, et cum ista translatio congruat cum effectu vis centrifugae, qua punctum B circa G rotatur, cuius celeritas est debita altitudini ggq, punctum

ctum B in b vrgebitur vi acceleratrice $= 2gq$, quae id secundum directionem BG sollicitabit.

Coroll. 3.

15. Hinc punctum B perinde mouebitur, ac si sollicitaretur a duabus viribus, quarum altera sit tangentialis eius motum in directione BP accelerans vi $= 2gq \operatorname{cos.} \Phi$, altera vero normalis id a semita OP dextrorsum depellens vi $= 2gq \operatorname{sin.} \Phi$.

Problema 2.

16. Positis, quae ante, si insuper pars BC statim ac dissoluitur, sollicitetur a vi quacunque $BR = R$, determinare motum, quo pars BCD primo saltem momento promoueri perget.

Solutio.

Retentis iisdem denominationibus, quibus ante sumus vsi, sit massa virgae $BC = B$, eiusque momentum inertiae respectu centri grauitatis sit $= nBgg$; angulus vero OBR sit $= \omega$. Quo nunc appareat, quantum motus virgae BC ante definitus perturbetur a vi $BR = R$, primum eius effectus in motu progressiuo centri grauitatis inuestigari debet. Per leges autem, quas corpora rigida, si sollicitantur, obseruant, primo motus centri grauitatis retardabitur vi $= \frac{R}{B} \operatorname{sin.} (\Phi - \omega)$, tum vero de motu rectilineo Gg retrahetur vi secundum GB agente $= \frac{R}{B} \operatorname{cos.} (\Phi - \omega)$. Eadem vero potentia R, mentem a motu rotatorio abstrahendo, punctum B vrgebitur, ita vt in motu suo secundum Bp retardetur vi $= \frac{R}{B} \operatorname{cos.} \omega$, tum vero sinistrorsum vrgetur, vi normali $= \frac{R}{B} \operatorname{sin.} \omega$. At vero praeterea motus

 rota-

rotatorius accelerabitur vi B R $=$ R momento $= Rg$, fin. $(\Phi-\omega)$ quod diuifum per momentum inertiae $= nBgg$ dabit accelerationem in diftantia $= 1$ a centro grauitatis, vnde erit $dq = \frac{-Rgd\Phi}{nBgg}$ fin. $(\Phi-\omega) = \frac{R\,dx}{nBgg}$ fin. $(\Phi-\omega)$. Punctum ergo B in motu circa G rotatorio accelerabitur vi $= \frac{R}{nB}$ fin. $(\Phi-\omega)$ fecundum directionem ad B G normalem. Ergo punctum B in motu fuo tangentiali B P retardatur vi $= \frac{R}{nB}$ fin. $(\Phi-\omega)$ fin. Φ, de recto autem tramite dextrorfum deflectitur vi $= \frac{R}{nB}$ fin. $(\Phi-\omega)$ cof. Φ. His coniunctis omnino punctum B ita mouebitur ac fi follicitaretur primum fecundum directionem motus fui B P vi acceleratrice $= 2gq$ cof. $\Phi - \frac{R}{B}$ cof. $\omega - \frac{R}{nB}$ fin. $(\Phi-\omega)$ fin. Φ. Deinde vero dextrorfum deflectetur vi normali acceleratrice $= 2gq$ fin. $\Phi - \frac{R}{B}$ fin. $\omega + \frac{R}{Bn}$ fin. $(\Phi-\omega)$ cof. Φ. Ex his ergo formulis intelligitur motus, quo punctum B primo momento folutionis progredietur, praeterea vero mutatio motus rotatorii cognofcitur, quoniam celeritas rotatoria in diftantia a puncto B $= 1$, acceleratur vi $= \frac{R\,\text{fin.}\,(\Phi-\omega)}{nBg}$. His autem cognitis problemati perfecte eft fatisfactum Q. E. I.

Corollar. 1.

17 Si igitur vis tangentialis motum puncti B accelerans ponatur $= T$, et vis normalis dextrorfum deflectens $= V$, habebuntur hae duae aequationes

$$T = 2gq\,\text{cof.}\,\Phi - \frac{R}{B}\,\text{cof.}\,\omega - \frac{R}{nB}\,\text{fin.}\,(\Phi-\omega)\,\text{fin.}\,\Phi$$

$$V = 2gq\,\text{fin.}\,\Phi - \frac{R}{B}\,\text{fin.}\,\omega + \frac{R}{nB}\,\text{fin.}\,(\Phi-\omega)\,\text{cof.}\,\Phi$$

Coroll.

Corollar. 2.

18. Ponamus $R \sin. \omega = P$ et $R \cos. \omega = Q$, erit $R \sin (\Phi - \omega) = Q \sin. \Phi - P \cos. \Phi$, quibus valoribus substitutis, habebuntur hae aequationes:

$$T = 2gq \cos. \Phi - \frac{Q}{B} - \frac{Q \sin. \Phi \sin. \Phi}{nB} + \frac{P \sin. \Phi \cos. \Phi}{nB}$$
$$V = 2gq \sin. \Phi - \frac{P}{B} + \frac{Q \sin. \Phi \cos. \Phi}{nB} - \frac{P \cos. \Phi \cos. \Phi}{nB}$$

Corollar. 3.

19. Ex his ergo aequationibus reperitur:

$$Q = \frac{2nBgq \cos. \Phi + P \sin. \Phi \cos. \Phi - nBT}{n + \sin. \Phi \sin. \Phi} \quad \text{et}$$
$$Q = \frac{nP + P \cos. \Phi \cos. \Phi - 2nBgq \sin. \Phi + nBV}{\sin. \Phi \cos. \Phi} \quad \text{vnde deducitur:}$$
$$P = 2Bgq \sin. \Phi - BV + \frac{B \cos. \Phi}{n+1} (V \cos. \Phi - T \sin. \Phi) = R \sin. \omega$$
$$Q = 2Bgq \cos. \Phi - BT + \frac{B \sin. \Phi}{n+1} (T \sin. \Phi - V \cos. \Phi) = R \cos. \omega$$

Corollar. 4.

20. Cum autem inuenerimus $dq = \frac{R\,dx \sin. (\Phi - \omega)}{nBgg}$ erit $dq = \frac{dx}{nBq} (Q \sin. \Phi - P \cos. \Phi) = \frac{dx}{(n+1)gg} (V \cos. \Phi - T \sin. \Phi)$. Cognitis ergo viribus T et V mutatio motus instantanea determinari potest. Est autem $dx = -g\,d\Phi$

Problema 3.

21. Corporis vna flexura B praediti proposito motu quocunque, inuenire huius motus variationem momentaneam, si corpus a nullis viribus externis sollicitetur. Tab. II. fig. 3.

Solutio.

Versetur corpus propositum in situ ABC, vbi flexura B moueatur secundum directionem BP cum celeritate

tate

tate debita altitudini $= v$. Sint anguli, quos partes AB et BC quaſi alae cum recta BP conſtituunt, $ABP = \theta$ et $CBP = \Phi$; tum ſit celeritas rotatoria alae BA circa B in diſtantia $= 1$, debita altitudini p, et celeritas rotatoria alae CB circa B in pari diſtantia debita ſit altitudini q; vtraque autem ala motu rotatorio ad directionem BP accedat. Deinde ſit F centrum grauitatis alae AB, et $BF = f$; G vero ſit centrum grauitatis alae BC et $BG = g$. Denique ſit alae AB maſſa $= A$ eiusque momentum inertiae reſpectu centri grauitatis $= mAff$; ſimilique modo alae BC maſſa ſit $= B$ et momentum inertiae reſpectu ſui grauitatis centri G ſit $= nBgg$. Vtraque igitur ala ſequeretur motum impreſſum, niſi ligamentum in flexura B obſiſteret; ponamus ergo vim flexurae tantam eſſe, vt ala BC in directione BR ſollicitetur vi $= R$, ala autem AB in directione contraria Br aequali vi $= R$, ſitque angulus $OBR = \omega$. Ponamus iam punctum B ita progredi, vt primum in directione BP acceleretur vi $= T$, tum vero de ſemita rectilinea BP dextrorſum deducatur, vi normali $= V$. His poſitis ex conſideratione alae BC erit per coroll. 3. problematis praecedentis:

$$R\,\text{ſin.}\,\omega = 2Bgq\,\text{ſin.}\,\Phi - BV + \frac{B\,\text{cof.}\,\Phi}{n+1}(V\,\text{cof.}\,\Phi - T\,\text{ſin.}\,\Phi)$$

$$R\,\text{cof.}\,\omega = 2Bgq\,\text{cof.}\,\Phi - BT - \frac{B\,\text{ſin.}\,\Phi}{n+1}(V\,\text{cof.}\,\Phi - T\,\text{ſin.}\,\Phi)$$

Eaedem vero formulae ad alam AB accommodantur, ſi loco horum valorum ſubſtituantur iſti

horum valorum	ſubſtituantur iſti
R	$-R$
ω	ω
B	A
g	f
Φ	$-\theta$
q	p
et $\sqrt{\frac{q}{n}}$	$-\sqrt{\frac{p}{m}}$

Quo

Quo facto obtinebimus has aequationes

$$-R\,\text{sin.}\,\omega = -2Afp\,\text{sin.}\,\theta - AV + \frac{A\,\text{cos.}\,\theta}{m+1}(V\,\text{cos.}\,\theta + T\,\text{sin.}\,\theta)$$

$$-R\,\text{cos.}\,\omega = 2Afp\,\text{cos.}\,\theta - AT + \frac{A\,\text{sin.}\,\theta}{m+1}(V\,\text{cos.}\,\theta + T\,\text{sin.}\,\theta)$$

quae si cum superioribus comparentur dabunt:

$$2Afp\,\text{sin.}\,\theta + AV - \frac{A\,\text{cos.}\,\theta}{m+1}(V\,\text{cos.}\,\theta + T\,\text{sin.}\,\theta) =$$

$$2Bfq\,\text{sin.}\,\Phi - BV + \frac{B\,\text{cos.}\,\Phi}{n+1}(V\,\text{cos.}\,\Phi - T\,\text{sin.}\,\Phi) \quad \text{et}$$

$$2Afp\,\text{cos.}\,\theta - AT + \frac{A\,\text{sin.}\,\theta}{m+1}(V\,\text{cos.}\,\theta + T\,\text{sin.}\,\theta) =$$

$$-2Bgq\,\text{cos.}\,\Phi + BT + \frac{B\,\text{sin.}\,\Phi}{n+1}(V\,\text{cos.}\,\Phi - T\,\text{sin.}\,\Phi).$$

Sit breuitatis ergo $m+1=\mu$ et $n+1=\nu$, atque ex his aequationibus elicietur:

$$V = \frac{\begin{matrix}2\mu n B^2 gq\,\text{sin.}\,\Phi - 2\mu ABfp(n\,\text{sin.}\,\theta + \text{cos.}\,\Phi\,\text{sin.}\,\overline{\Phi+\theta}) \\ + 2\nu ABgq(m\,\text{sin.}\,\Phi + \text{cos.}\,\theta\,\text{sin.}\,\overline{\Phi+\theta})\end{matrix} - 2m\nu A^2 fp\,\text{sin}\,\theta}{(mA+\mu B)(\nu A + nB) - AB(\text{cos.}\,\overline{\Phi+\theta})^2}$$

$$T = \frac{\begin{matrix}2\mu n B^2 gq\,\text{cos.}\,\Phi + 2\mu ABfp(n\,\text{cos.}\,\theta + \text{sin.}\,\Phi\,\text{sin.}\,(\Phi+\theta)) \\ + 2\nu ABgq(m\,\text{cos.}\,\Phi + \text{sin.}\,\theta\,\text{sin.}\,(\Phi+\theta))\end{matrix} + 2m\nu A^2 fp\,\text{cos}\,\theta}{(mA+\mu B)(\nu A + nB) - AB(\text{cos.}\,\overline{\Phi+\theta})^2}$$

Ex his porro prodibit

$$V\,\text{cos.}\,\Phi - T\,\text{sin.}\,\Phi = \frac{2\nu A\,\text{sin.}\,\overline{\Phi+\theta}(Bgq\,\text{cos.}\,\overline{\Phi+\theta} - \mu Bfp - mAfp)}{(mA+\mu B)(\nu A + nB - AB(\text{cos.}\,\overline{\Phi+\theta})^2}$$

$$V\,\text{cos.}\,\theta + T\,\text{sin.}\,\theta = \frac{2\mu B\,\text{sin.}\,\overline{\Phi+\theta}(-Afp\,\text{cos.}\,\overline{\Phi+\theta} + nBgq + \nu Agq)}{(mA+\mu B)(\nu A + nB) - AB(\text{cos.}\,\overline{\Phi+\theta})^2}$$

His inuentis, dum punctum B per spatiolum dz progreditur, eius motus ita accelerabitur, vt sit $dv = T\,dz$, simul vero eius semita dextrorsum ita inflectetur vt curuaturae radius existat $= \frac{2v}{V}$. Deinde alae BC motus rotatorius versus BP accelerabitur in distantia $= 1$ a puncto B vi acceleratrice $\frac{V\,\text{cos.}\,\Phi - T\,\text{sin.}\,\Phi}{Vg}$, alae autem AB motus rotatorius versus BP accelerabitur in distantia $= 1$ a puncto B vi acceleratrice $= \frac{-V\,\text{cos.}\,\theta - T\,\text{sin.}\,\theta}{\mu f}$, vnde motus pro-

propositi variatio per sequens tempusculum orta cognoscitur. Q. E. I.

Coroll. 1.

22. Quoniam momentum inertiae alae AB respectu centri grauitatis F posuimus $= m A ff$, erit eiusdem momentum inertiae respectu puncti B $= m A ff + A ff$, et hanc obrem distantia centri oscillationis alae AB pro puncto suspensionis B a B erit $= (m+1) f = \mu f$, simili modo alterius alae BC ex puncto B suspensae distantia centri oscillationis a puncto B erit $= (n+1) g = \nu g$. Quodsi ergo haec centra oscillationis fuerint data, exinde valores numerorum m et n itemque μ et ν definiuntur.

Coroll. 2.

[illegible] Si alae in directum iaceant, fiet angulus $\Phi + \theta$ = duo[illegible]ectis, eiusque sinus $= 0$, vnde hoc casu motus rotatori[illegible]mbarum alarum nullam mutationem patientur primo salte[illegible] momento. Cum autem sit sin. $\theta =$ sin. Φ et cos. $\theta = -$ co[illegible], erit

$$T = \frac{2\mu n B^2 g q \cos.\Phi - 2\mu n A B f p \cos.\Phi \; [\text{illegible}] \; \nu A^2 f p \cos.\Phi + 2\nu m A B g q \cos.\Phi}{(mA + \mu B)(\nu A + n B) - AB}$$

$$\text{seu } T = \frac{2\cos.\Phi (Bgq + Afp)(m\nu A + n\mu B)}{(A+B)(m\nu A + \mu n B)} = \frac{[\text{illegible}]\,\Phi (Bgq - Afp)}{[\text{illegible}] + B}$$

$$\text{et } V = \frac{2\,\text{sin}.\Phi (Bgq - Afp)}{A+B}.$$

Coroll. 3.

24. Si insuper anguli Φ et θ fuerint recti, tum erit quoque $T = 0$, seu celeritas flexurae B nullam variationem patietur; at vero via puncti B inflectetur dextrorsum

sum vi, quae erit $= \frac{2(Bgq - Afp)}{A+B}$ vnde, si alae fuerint eatenus similes, vt sit $Bgq = Afp$, tum quoque haec vis inflectens euanescet. Ceterum vero si fuerit $Bgq > Afp$ ...mita puncti B dextrorsum inflectetur, contra vero si $Afp > Bgq$ sinistrorsum.

Coroll. 4.

25. Praeterea vero notandum est denominatorem pro superioribus formulis inuentum

$$(mA + \mu B)(\nu A + nB) - AB(\operatorname{cof.} \overline{\Phi + \theta})^2$$

etiam hoc modo exprimi posse

$$(A+B)(m\nu A + \mu n B) + AB(\operatorname{fin.} \overline{\Phi + \theta})^2$$

Problema 4.

26. Si corpus ABC vna flexura in B praeditum super plano horizontali politissimo vtcunque fuerit proiectum, neque igitur ab vllis viribus extrinsecus sollicitetur, determinare eius motum ad quoduis tempus. Tab. II. fig. 6.

Solutio.

Sit linea ZB via, quam flexura iam descripsit, quae referatur ad axem ZO, ad quem per B normalis producatur OBP. Ponatur arcus $ZB = z$, et ducta ad B tangente BT vocetur angulus $PBT = u$ eritque radius osculi curuae ZB in puncto $B = \frac{dz}{du}$. His positis sit celeritas flexurae B secundum directionem tangentis BT debita altitudini v, eritque tempusculo infinite paruo dt, $\frac{dz}{\sqrt{v}} = dt$. Deinde sit partis seu alae AB massa $= A$, alae

 BC

$BC = B$, centrum grauitatis alae AB in F et alae BC in G, centrum oscillationis alae AB in f et alae BC in g, vtrumque ad punctum suspensionis B relatum. Vocetur $BF = f$, $BG = g$, $Bf = (m+1)f$ et $Bg = (n+1)g$, positoque breuitatis ergo $m+1 = \mu$ et $n+1 = \nu$, erit $Bf = \mu f$ et $Bg = \nu g$. Praeterea sit angulus $ABP = r$, et angulus $CBP = s$, et in distantia $= 1$ a puncto B sit celeritas angularis alae AB versus $BP = \sqrt{p}$, et celeritas angularis alae BC versus BP circa $B = \sqrt{q}$, erit tempusculo dt assumto, $\frac{-dr}{\sqrt{p}} = dt$ et $\frac{-ds}{\sqrt{q}} = dt$. Denique ponatur angulus $ABT = r+u = \theta$ et angulus $CBT = s-u = \Phi$, erit $r+s = \Phi+\theta$. His positis cum celeritas angularis alae AB circa B versus BP acceleretur in distantia $aB = 1$, vi acceleratrice

$$\frac{-V\cos.\theta - T\sin.\theta}{\mu f} = \frac{2B\sin.(r+s)(Afp\cos.(r+s) - (nB+\nu A)gq)}{(mA+\mu B)(\nu A+nB)f - ABf(\cos.r+s)^2}$$

erit $dp = \frac{-2Bdr\sin.(r+s)(Afp\cos.(r+s) - (nB+\nu A)gq)}{(mA+\mu B)(\nu A+nB)f - ABf(\cos.r+s)^2}$

Simili modo pro acceleratione motus rotatorii alterius alae BC versus BP ex antecedentibus reperitur

$$dq = \frac{-2Ads\sin.(r+s)(Bgq\cos.(r+s) - (mA+\mu B)fp)}{(mA+\mu B)(\nu A+nB)g - ABg(\cos.r+s)^2}$$

Quod postea ad motum puncti B attinet, is primo accelerabitur vi tangentiali T, ita vt sit $dv = T\,dx$ existente

$$T = \frac{2(\nu mA+\mu nB)(Afp\cos.(r+u) + \mu Bgq\cos.(s-u)) + 2AB\sin.(r+s)(\mu fp\sin.(s-u) + \nu gq\sin.(r+u))}{(mA+\mu B)(\nu A+nB) - AB(\cos.r+s)^2}$$

tum vero semita flexurae B dextrorsum incuruabitur a vi normali V ita, vt sit $\frac{2v\,du}{dx} = V$, existente

$$V = \frac{2(\nu mA+\mu nB)(Bgq\sin.(s-u) - Afp\sin.(r+u)) - 2AB\sin.(r+s)(\mu fp\cos.(s-u) - \nu gq\cos.(r+u))}{(mA+\mu B)(\nu A+nB) - AB(\cos.r+s)^2}$$

His autem aequationibus, quas inuenimus, totus corporis motus determinatur. Q. E. I.

CLASSIS.

CLASSIS SECVNDA.

CONTINENS

PHYSICA.

ANIMADVERSIONES VARIAE IN ERINACEORVM TERRESTRIVM ANATOMEN: QVARVM NONNVLLAE NVNC AD STRVCTVRAM VESICVLAREM VISCERVM: NONNVLLAE AD NOVORVM RENVM SVCCENTVRIATORVM ILLVSTRATIONEM PERTINENT.

AVCTORE

D. D. Du Vernoi.

Viscera secundum naturam componi debebant dissimili reliquarum partium ratione, e communibus non solum particulis instrumentalibus, vt sunt canales omnis generis, ad materiam nutritioni et secretionibus vtilem adducendam et reducendam; verum quoque e priuata ac propria substantia, a vasculari natura tam vsu quam structura discrepante, ad actionem secretionis proximam et immediatam et ad reliqua eo spectantia perficienda, quemadmodum Illustris Morgagni scriptis lectu dignissimis, ac imprimis Epist. Anat. 3. praeclare exposuit: contra alios quidem doctissimos viros, docentes, viscera et corpora glandulosa componi ac duntaxat vti simplici fabrica vasculosa, praememoratam secretionis actionem perficiente, cum tamen vniuersim totum corpus animantium venis, arteriis et omnis generis vasis, tam ad circuitum sanguinis, quam ad sensationum et motionum officia sit constructum: hinc, cum iuxta horum sententiam nulla sit partium diuersitas peculiaris, nihil prohiberet, quo minus ossa, cartilagines, musculi, quemadmodum corpora glandulosa, secretionis officium exerceant, Tab. III.

si

ſi nempe rei efficiendae nulla alia quam ſtructura vaſcularis neceſſaria fuiſſet.

Sed contrarium oculis tam perſpicue, vt optari poteſt, conſpicitur, qua nempe ratione e mixta ſubſtantia veſiculari-vaſculoſa viſcera a natura componantur: quod 1. exempla et deſcriptiones ad hoc tempus comprobant quadrupedum, volatilium et piſcium variorum teſte ſ. c. (Epiſt. 3. Anat.) 2. ſpeciatim ac multo adhuc quam antea clarius et ſimplicius res ante oculos poſita eſt ſequenti incomparabili exemplo, de quo iam dicendum eſt.

Exemplum illud ad erinaceorum vbera, lactationis inprimis tempore et ſubcalido adhuc corpore, ſpectat: in quibus, cute duntaxat inciſa, tam interna quam externa ſuperficie, ipſae veſiculae, incredibili frequentia, protinus ſeſe prodere incipiunt, et ſic cuilibet ſpectantium per ſe, nulla manuum opera, vltro conſpicuae ſunt. Antequam has perſequamur, obſeruandum eſt, erinaceorum vbera, numero, forma, ac amplitudine, ab aliis animantibus manifeſto diſcrepare: ex his enim ſunt, quae multiplici ſerie mamillarum: alia contra, quae vno duntaxat pari conſtant: apud nonnulla, ſuperius parte antica pectoris: apud alia, ima abdominis parte vtrinque poſitae: vniverſim, quodam interuallo a ſe inuicem diſiunctae, ac figura oblongo rotunda praeditae ſpectantur. Nullae apud erinaceos a nobis inciſos tales diſtinctae ſeries mamillarum occurrebant, quin imo, inter dexteri et ſiniſtri lateris vbera, nullum diſiunctionis indicium, ſaltem viſibile, verum tam iuxta longitudinem quam latitudinem quae inter iugulum ac imum abdominis intercedit, nihil aliud ſpectatum eſt, quam ſubſtantia vberum continua ac indiuiſa, ad plani et latio-

latioris integumenti, 3. lin. craſſitiem aequantis ſimilitudinem accedens: cui exterius annexae erant multiplices papillae, vtrinque quaternae acuminatae (a Stenone 5. paria) ad plures foetus ſimul alendos: hac ratione, vbera erinaceorum, vnicae et ſimplicis duntaxat, ſed ampliſſimae mamillae ſpeciem referre nobis viſa ſunt.

Vt ad veſiculas nunc reuertamur, tametſi membrana duntaxat tenuiſſima ſint praeditae, illas tamen ſpectare tanto erat facilius, quanto maior luciditas a lactis incluſi copia his accedebat: ſic aliquot millia in extima ſuperficie per ſe ac inermibus oculis erant conſpicua, vt earum peculiaris figura, ſeries et color niueus nunquam exactius et elegantius referri poſſe videretur. Similiter, reliquam ſubſtantiam interiorem ſpectando, nihil ſane ipſa a priore diſcrepabat: hae omnes vniuerſim inter ſe aequali erant figura, et magnitudine, minime diſcrepante, inuicem ſtrictius vnitae, ac per multiplices membranoſas propagines plurimis vaſculis inſtructas ſimul firmatae, ex quibus varia interſepta et retia fibroſo-vaſcularia componebantur; ſimul vero cautum eſt, ne ipſae per haec retia, vel per quaſcunque alias res, vt apud nonnulla animantia contingit, obducerentur: vnde haud minus animaduerſione dignum eſt, quod circa vbera erinaceorum nihil fere pinguedinis, quod prohiberet, poſitum eſſet: Quicquid enim hic pinguedinis exterius collectum erat, vix paucis moleculis ſublutei coloris conſtabat: tantum abeſt, vt ſua continuitate et aequali expanſione, ad ſpeciem adipoſi inuolucri vbera obducentis et contra frigus defendentis, vt apud alia animantia accederet, potius memoratae moleculae paucis duntaxat locis erant poſitae,

 dum

dum reliqua longe amplissima superficie nullae conspicerentur. Similiter per interiora vberum manifestum defectum pinguedinis fuisse obseruandum est; ac ea caussa non solum intra, sed extra aquam perquam facile conspicuum erat, qua frequentia, quo ordine, qua amplitudine, quo denique nexu, vesiculae a multis inique damnatae, naturae consilio per vniuersam substantiam sint intextae.

At credibile tamen est, quod nonnulli erinacei, ob alimentorum regionum et temporum diuersitatem, nostrorum dissimiles ac pinguiores inueniantur, ob quam caussam, per implexum pinguedinis vel per plenitudinem vasorum, vesiculae sic obductae sunt, vt globuli adiposi duntaxat, ac vasa spectari possint: quo magis hinc perspicuum est, cur in variis antea in lucem editis descriptionibus vesicularis structura viscerum omissa fuerit, in quibus ceteroquin multa lectu dignissima, ac in rei anatomicae incrementum vtilissima, obseruata sunt.

Hoc idem iudicium iure meritoque in aliud corpus vesiculoso glandulosum in erinaceis pariter cadere, nempe in capsulas seminales, verisimile nobis visum est, quando a Coitero, accuratissimo alias anatomico, scriptum est, *vbi deferentia vasa terminantur inter rectum intestinum et vesicam vrinariam, eoue in loco, in quo in nobis varicosi adstites collocati sunt, reperiebantur glandulae carnosae tres satis magnae, et laxis ligamentis invicem cohaerentes, nulla praedita cauitate.* Quidnam enim aliud de ista hallucinatione nobis indicandum est, nisi quod tum temporis, ab ignota quacunque caussa, vesicularis structurae ac eam componentium cauearum pristina facies abolita fuerit;

vnde

vnde circa praememoratas partes, nihil quam carnea substantia sub oculos caderet. Nostrorum erinaceorum capsulae seminales 1. corpus referebant amplissimum, mensuram peluis longe excedens, ac versus renes altius ascendens, membrana bipartitum pellucida, per quam non solum dextrae et sinistrae diuisionis nexus, verum etiam commune inuolucrum a natura constitutum erat. 2. Vnicuique diuisioni, quatuor glandulae propriae erant, laxis membranis interstinctae, vt distincti lobuli: vnde totum praememoratum corpus, e glandularum 4. paribus manifesto constabat. 3. Hae e membranosa tenui, alba et pellucida substantia simpliciter constructae erant, vnde per eas semen inclusum manifesto translucebat. 4. Sub communi membrana seu inuolucro has inuestiente, multiplices series orbiculares, forma ac specie pellucidi et longissimi ductus seu sacculi, semen continentis, transparebant: hae series nihil a veris vesiculis discrepant, nisi quod crassitie sint maiores, ac non ad oualem, vt aliae vesiculae, verum ad cylindricam figuram accedant: qua in re nihil est caussae opinor, cur minus pro vesiculis haberi debeant. Postremo, nihil vltra, obseruatione dignum erat, quam ima praememorati corporis parte, tria emissaria seu ductus per se conspicui, recti et perpendiculares, semen intra collum vesicae, inter hanc et rectum intestinum, abducentes, quo in transitu a testium deferentibus vasis, in modum arcus decussabantur: vt colli vesicae carneo annulo excepti sint, sinus vel cauitas peculiaris, diametro vrethrae aequalis, ac transuersali foramine in vrethram patente praedita, sedem inter praememoratum annulum tunicamque vrethrae nacta, conspiciebatur, ad semen quod

 haud

haud immediate in communem vrinae et seminis canalem effundi debebat, asseruandum, ac vna cum aliis nonnullis eo confluentibus humoribus permiscendum: igitur, collo vesicae anterius aperto, ac sinu in longum inciso, sex varia orificia circa eiusdem fundum patebant, nempe par I. vno vtrinque meatu, (iunctis inuicem capsularum seminalium simplici aut duplici emissario, ac testium vase deferente) constans; haec propterea orificia, reliquis sunt ampliora ac protuberantiora. Sequitur par 2^{dum} vtriusque prostatae. Post haec, par 3^{tium} intra sinus angulos paulo altius positum, quod e quadam insigni glandula, exterius sub cute, ad vtrumque latus recti intestini locata, ortum trahebat: vnde, forma tenuis ac longitudinem glandulae triplo excedentis ductus, in praememoratum sinum terminabatur.

Vt ad structuram vesicularem reuertamur, ab ea haud discrepans quoddam vesicularum genus, in erinaceis, per thymi substantiam glandulosam ac nulla infectam labe, disgregatum erat, quas autem silentio hic praetermittimus: quippe singulatim istiusmodi structuras vesiculares indicare ac pertractare studuimus, quarum quisque per se, nulla praeparatione anatomica spectator esse possit: praeter duntaxat intus latentem structuram: ad quam spectandam, parum spei relinquunt tenuitas, angustia, mollities aliaque impedimenta: idcirco, circa vesiculae corpus, et circa eiusdem anatomen euenit, quod in bulla aquea: hac enim disrupta, ac sui nexus experte, de tota vesicula, ac eiusdem pristina specie, et conditionibus, quin imo, sede et cauitate, nullum fere vestigium oculis spectandum relinquitur. Quas ob caussas, quid natura intus molita sit,

num

alim e simplici cauea duntaxat, an ve
genere, vesiculae constent, ad hoc ten
ignoramus, quae secus ac nonnulli exis
anatomes potestate aliena sunt.

Animaduersio de nouis
succenturiatis.

Cum coeptas obseruationes de n
centuriatis a nemine adhuc descriptis,
pus Academiae iudicio submitteremus
brica et conditionibus internis, a gl
Eustachii natura, minime discrepare,
bryones, aequali cortice, cauea ac
his, vt dictum est, moles perexigua
lini, vel vt granum sinapi, vel mag
ioris, vel ad summum vt pisum: f
sum, vel elliptica vt semen lini: c
sedes vt plurimum pone renem succen
rum quam laeuum, sub communi adi
stantia alterius ab altero perexigua: quin
iunctio et accretio in nonnullis manife
merum multiplicem fuisse diximus, in
ccenturiatorum numero aequalem, saep
imo semel vno latere ternarium: hae
perspicuis exemplis omnium huius gen
vatorum renum minimorum tam in ma
nino sexu illustrauimus, ac in spem o
mus, plura ea de recognoscendi, si ne
gentia et solertia accesserit.

Ducto ſic obſeruationum noſtrarum principio a C. H. videndum eſt, num viciſſim hi minimi renes beſtiarum corporibus communes, an contra omiſſi: ac initio quidem commemorandum eſt examen erinaceorum quibus a diuino opifice praememorati renes manifeſto tributi fuerunt.

In echinis iunioribus, ren ſuccenturiatus tam dexter quam ſiniſter, granum hordei aequabat: contra apud adultiores decreſcebat: hi renis ſupremae ac concauae parti, ope membranae celluloſae, quae pauca duntaxat pinguedine eſt inſtructa, annexi erant. Quod autem renum ſuccenturiatorum minimorum disquiſitionem attinet, examen quidem ea de cauſſa, diuerſae aetatis et ſexus erinaceorum, ſaepe multumque a nobis inſtitutum fuit, ſed, vt vera fateamur, nequaquam horum conſpectu frui potuimus: vnde oculos effugiſſe paruitate credibile erat, vt euentus poſtea edocebat: nempe alia occaſione nobis allatus fuit echinus foemina, recens natus, vna cum matre hunc lactante, in qua quidem, nullum renem ſuccenturiatum praeter duos ordinarios, offendere potuimus; verum in iuniore ſpes nequaquam fefellit. Is rene vtroque ſuccenturiato, vt in ſupra memoratis, conſtabat: poſt haec, horum dexter, vt praeclare obſeruabam, alterum ſibi ſocium habebat minimum figurae orbicularis, grano papauerino aequalem, ac vt videbatur, haud extra, ſed intra tunicam celluloſam immediate poſitum, vnde ea detracta, a rene facile hunc auellere licebat. Vas perexiguum, arcus in modum, ad huncce renem tendens ſpectabatur. Denique, eius ſubſtantia renis ſuccenturiati ſimillima, cortice, cauea ac colore praedita erat, vt caeteri noui renes ſuccenturiati, in C. H. primum obſeruati.

De

DE PITVITA GLVTINOSA LARYNGIS.

AVCTORE
Iosia Weitbrecht.

§. 1.

Interiorem oris cauitatem, labiorum, linguae, palati, pharingis, laryngis superficiem, innumeris emunctoriis scatere, quibus humores vario habitu excreti mistim in ore deponuntur, non modo per anatomicorum scrutinia edocti sumus, sed et experientia ipsa sufficienter comprobat. Inter hos humores multum inter se diuisos singularis aliqua materia per screatum ex faucibus reiici solet, quae nec saliua, nec mucus glandularum palati, aut narium, nec denique pus dici potest, sed quae ab his omnibus, consistentia et natura sua, colore, et origine distinguitur, et hinc specialem aliquam considerationem meretur, quam in hoc scripto instituemus.

§ 2. Est autem materia ista singularis pituita aliqua albicans, summe tenax et glutinosa, per screatum in massam spissam et quodammodo consistentem collecta. Haec pituita, quando simul cum sufficiente saliuae tenuis quantitate excernitur, in vnum quasi glomeramen conuoluta illi innatat, nec cum ea commiscetur. Quo purior est, vel, quo minus saliuae aut muci narium palatine admistum habet, eo tenacior est, ita vt non solum internis faucium parietibus sed et externae cuti adplicita tamquam gluten pertinaciter adhaereat, et nonnisi mediante saliua absterftergi queat; infimul haec glutinofitas illi duritiem quandam conciliat, vt dentibus trita ftrepitum aliquem excitet.

§. 3. Haec peculiaris pituitae repugnantia, dum cum faliua fe permifceri non patitur, fatis demonftrat, binos hos humores natura fua inter fe differre, etfi non longe a fe inuicem fegregentur, et in vicinis faucium regionibus confluant. Pari modo inde concluditur, illam non effe pus, quippe quod cum faliua miftum ab illa foluitur, et in vnam maffam cum illa fatifcit. Neque minus a reliquo palati et faucium muco per infignem illam et pertinacem glutinofitatem diftinguitur. Mucus ifte quidem multo maiori lentore gaudet ac ipfa faliua: magis tamen ad confiftentiam pultiformem accedit, et ab hac pituita, (fi quidem aliquam fimilitudinis comparationem inftituere licet) tamquam vnguentum aliquod blandum a bitumine differt.

§. 4. Color huius pituitae varius eft. Plerumque albefcit. Quo copiofior autem eft fecretio, eo magis ab hoc albo colore deflectere et in glaucum vergere expertus fum. Interdum flauedine quadam tingitur. Haec ipfa coloris differentia etiam diuerfum tenacitatis ftatum arguit. Glauca enim pituita femper tenacior eft albicante; omnium minime tenax flaua. Porro totus pituitae glomus opacus eft, quo ipfo a muco narium, qui vitrea plerumque pelluciditate gaudet, diftinguitur. Denique ftriis fubinde maculatur nigris, quae autem a fumigationibus per refpirationem attractis deriuandae videntur.

§. 5. Huius pituitae copiam per plures menfes paullatim collegi, et in vafculo leuiter tecto in mufeo meo conferuaui, vt quibus mutationibus obnoxia foret, cognofcerem.

rem Quamuis igitur totius anni ſpatio absque vllo putredinis aut efferueſcentiae ſigno notabili, quod aut nares feriret aut oculis diſcerneretur, conſiſteret: non tamen plane eadem permanſit. Et quidem primo, quotiescunque noua additio fiebat, omnes pituitae glomi et monticuli tamen poſt aliquot horas in aequabilem planitiem diffluebant. Tum vero, ceſſante collectione, ſuperna ſuperficies paullatim in duram cruſtam inaruit; reliqua autem maſſa non indurata in volumen minus contracta aërem contentum in vnum ſpatium medium coëgit, et amiſſa tenaci glutinoſitate ſua in craſſam, mucoſam, pultiformem, opacam, ſubflauam materiam granulis albis, duriuſculis, friabilibus interſperſam tranſiit. Huius materiae portio retortae indita, et examini ignis ſubiecta, in paucum ſal volatile et oleum acerrimum, intolerabili foetore olea ex C. C. parata longe ſuperans et phlegmati plurimo ſupernatans reſoluta eſt. Alia portio ex granulis iblis albis potiſſimum conſtans per affuſam aquam et quietem ad maiorem putrefactionem euecta in mucum ſebaceum aqua non ſolubilem abiit; in patina autem ferrea prunis candentibus impoſita, euaporata humiditate et proiectis plurimis bullis aëreis in ſquamulas fuſcas, pulueruIentas nullo ſapore praeditas exaruit, relictis in ferro maculis de tenaci cum ferro cohaeſione teſtantibus.

§. 6. Ex allatis (§. 5.) obſeruationibus non ſolum in genere pituitae huius natura eluceſcit, ſed etiam differentiae §. 3 allatae vlterius comprobantur. Differt enim a pure ob ſtatum ſuum incorruptum et foetoris abſentiam; differt vero etiam ob eandem corruptionis difficultatem et ſaporis in vſtione defectum quam maxime a ſaliua;

 hanc

hanc enim non modo, ceteris paribus, intra paucos dies facile in putredinem abire, sed et pulverem eius simili vstionis methodo generatum saporem saturate salsum produxisse expertus sum. Conuenit autem pituita haec potissimum cum muco narium, qui itidem, dum adhuc in calidis narium latebris haeret, facile arescit, et extra illas collectus aeque difficulter corrumpitur. Resolutio denique per ignem facta certissimum characterem prodit, illam regni animalis naturam perfecte conseruare, et pro humore a viribus corporis iam sufficienter subacto et immutato haberi debere, indubitanter docet.

§. 7. Quantum obseruando assequi licet, humor hic glutinosus non in faucibus aut palato aut oesophago haeret, neque etiam in pulmonibus, quam late patent, sedes illius quaerenda; sed in sola trachea, et quidem speciatim in portione eius superiore, nempe in ipsius laryngis cauitate interiore, ventriculis praesertim et cryptis, circa ipsam glottidem et eius operculum. Neque etiam aliter ab illo secreto liberamur, nisi aucta aëris in exspirando velocitate, dum vel per tussim excitatam vel per screatum a lateribus tracheae et laryngis averritur quasi et reiicitur. Interim non nego, fieri posse, vt accumulata pituita certis temporibus etiam paullo profundius in tracheam descendat.

§. 8. Eructatis huius pituitae in statu corporis cetera sano, omnium maxima et fortissima est matutinis horis, quando euigilans corpus erigi et moueri incipit; quemadmodum hoc tempore omnia oris, palati, faucium et narium emunctoria expurgari et ad copiosiorem excretionem, quae tota nocte sufflaminabatur, sollicitari ac determinari

minari solent. Praesentia eius per molestiam aliquam laryngis et vicinarum partium tensionem, et aliqualem respirationis difficultatem indigitatur. Quia vero tum quam maxime pura nec aliis humoribus minus glutinosis intermista est, etiam lateribus laryngis tanto pertinacius adhaeret, et tanto difficilius excernitur. Ad facilitandam igitur eructationem requiritur, vt alii humores aquosi, qui gluten istud obtundere valent, quales sunt vapores salinae ex ore per inspirationem allati, et reliquus tracheae natiuus mador, applicentur. His enim reciprocato aëris traiectu immistis et interpositis pituita tandem a laryngis parietibus soluta abstergitur, ac per tussim et screatum agitata reiicitur. Dum vero accumulata pituita respiratione intra laryngis et tracheae cauitatem nunc sursum nunc deorsum fertur, non potest non glottidis aperturam ipsam obsidere, illam inordinatim coarctare, et inuoluntarium sibilum strepitumque cum raucedine subinde coniunctum efficere.

§. 9. Quando pituita pura et copiosa eructatur, plerumque sub habitu massae alicuius spissae rudis, indigestae et vniformis apparere solet, in qua nulla partium componentium distinctio discernitur. Cum vero aut saliua, aut narium mucus vitreus aut laryngis mador intermiscetur, generatio eius quodammodo manifestatur. Ex plurimis enim massulis quasi granulatis conflata esse videtur, quae massulae porro ex mucosis filamentis serpentino modo intortis ac conuolutis conglomerantur.

§. 10. Haec filamentorum configuratio luculenter, nisi fallor, arguit, adesse singularia organa, ex quorum orificiis angustioribus ista eructentur, et in quorum sinubus ad

 recessi-

recessibus interioribus a massa sanguinea secernantur. Ita quidem ex analogia, quam secretio aliorum humorum paullo spissiorum in C. H. (quales sunt materiae sebaceae) manifesto suppeditat, concludere licet. Organa ista glandulas dicere solemus. Quales autem et quaenam sint istae glandulae, quae hanc pituitam glutinosam et tenacem laryngis secernunt, per solas anatomicas disquisitiones non satis videtur determinatum. Ne igitur temere quid statuamus, aliquas considerationes subiungere non inutile fore putauerim.

§. 11. Duae potissimum species glandularum circa laryngem et tracheam cognitae sunt, quas *solertissimi* Morgagni diligentia partim in apricum produxit, partim exactius descripsit. Tales sunt glandulae epiglottidis et arytenoides in larynge, quae saepe conglomeratarum more, in racemos molles collectae sunt; in trachea autem illae, quae in postica eius portione, in interstitio membraneo longitudinali inter cartilaginum semiannularium terminos relicto, detracta tunica exteriore, solitariae, ouales et compressae conspiciuntur, et quarum canaliculi per subiectas fibras carneas transmissi osculis suis excretoriis intra asperam arteriam hiant. Aut igitur harum specierum alterutra, aut ambae pro pituitae glutinosae scaturigine haberi debent, aut aliae quaedam nouae glandulae hactenus incognitae anatomicorum scrutinio detegendae restant, quibus ista functio assignari queat.

§. 12. Quod ad glandulas in tracheae dorso positas et secundo loco enumeratas attinet, illas huic scopo inseruire vix probabile est. Humor enim hic excrementitius in suprema larynge sedem suam habere solet; glandulae

autem

autem illae humiliore tracheae loco et circa primas bronchiorum diuisiones resident. Tale gluten, si tam profundo loco generaretur, non solum summa cum difficultate et aëris concussione vehementissima eleuari deberet, sed verendum etiam esset, ne perpetuas bronchiorum obturationes efficeret. Recte igitur mihi iudicare videntur anatomici, qui blandum istarum glandularum liquorem illinendis tracheae parietibus et emolliendis eius partibus inseruire arbitrantur, id quod a pituita ista glutinosa exspectari nequit. Neque obstat, quod liquor ex istis glandulis expressus a prosectoribus etiam viscidus deprehensus fuerit, qui enim in cadauerum sectionibus occupati sunt, saliuam, in corpore viuo satis tenuem, et ceteros glandularum oris humores, exhalante parte tenuiore, post mortem in viscidum et tenax liquamen ac spissum mucum fatiscere solere haud ignorant; vt igitur a viscositate liquoris in corpore mortuo de tenacitatis gradu in corpore viuo iudicare neutiquam liceat. Sin accidat, quod in statu corporis morboso subinde fieri posse non negauerim, vt glandularum istarum functio eo degeneret, vt humoris tenuis loco pituitam tenacem fundant: omnia praedicta incommoda oppressionem pectoris minitantia ingruere simul experimur.

§. 13. An singulares glandulae dentur hactenus incognitae, e quarum fonte pituita deriuari posset? cum haec quaestio contradictionem nullam inuoluat, animum meum compulit, vt studiosius has partes perscrutarer; sed repetitis disquisitionibus in hunc finem directe institutis nihil deprehendi, quod non ab aliis iam obseruatum et dictum fuerit. Non possum tamen reticere singularem quandam ſpeciem ventriculorum ſeu burſularum, in quibus humor affluens itidem ſtagnare poteſt. Sitae ſunt iſtae vtrinque in poſtica facie exteriore laryngis, et generantur, dum laxa oeſophagi tunica, quae ſuperficiem cartilaginis cricoidis, et interiorum ventriculorum exteriores parietes inueſtit, in hiatum ſe demittit, qui eſt inter marginem longitudinalem cartilaginis ſcutiformis et inter muſculum cricoarytenoidem poſticum. In his cryptis ille imprimis mador, qui ad latera radicis linguae et epiglottidis fortaſſe et ex tonſillis vtrinque depluit, coaceruatur, et compreſſis cartilaginis ſcutiformis alis ad latera cricoidis eructatur; qui tamen mador et humor a pituita laryngis diverſus eſt.

§. 14. Solae igitur epiglottidis glandulae, et, quas arytenoides produxit Morgagnus, reſtant, in quarum receſſibus pituitae huius glutinoſae ſcaturigo quaeri debet. Cui quidem ſententiae, quamuis illa nec a priori ex natura et fabrica glandularum, nec a poſteriori per experimenta indubitata demonſtrari queat, illi tamen imprimis fauet partim ſitus pituitae, cuius accumulationem potiſſimum circa ſuperiora laryngis perſentiſcere (§. 7.) diximus: partim ſitus glandularum ipſarum; fieri enim non poteſt, quin materia ex his glandulis copioſius ſecreta circa ipſam glottidem confluat, ventriculos occupet, et coarctata via celeritatem aeris tranſeuntis augeat: partim denique analogia, quae inter alios humores, in viis cartilagineis ad reſpirationem pertinentibus, generatos intercedit; e. gr. dum de muco narium diximus (§. 6), illum ad tenacitatem et incorruptibilitatem huius pituitae quam proxime accedere.

§. 15.

§. 15. Cognita pituitae glutinosae natura, quantum per obseruationes et experimenta licuit, et illius origine probabili, liceat aliquas conclusiones annectere, quarum vsus in physiologiam et pathologiam redundare forte poterit. Et primo quidem non praetereunda mihi videtur differentia duorum singularium characterum, qua humores, alii ad nares et laryngem, alii vero, ad os, palatum, et oesophagum pertinentes inter se distinguuntur. Isti quidem sibi relicti, simplices, tamquam inertia corpora paucissimis partibus heterogeneis, salinis oleosisue impraegnati esse videntur, vel saltim tales, quorum partes ob intimam misturam suam difficulter extricantur: hi contra talibus particulis vberrime scatentes tanto facilius ad corruptionem et putredinem tendunt. Cumque saliua et reliqui cognati humores in eum finem potissimum comparati sint, vt lubrica laeuitate sua viam transeuntibus cibis ac potionibus faciliorem reddant, et admistione sua partim saporem excitent, partim assumtorum molestam subinde acrimoniam obtundant: isti narium et laryngis muci e contrario glutinosa tenacitate sua effluuia olfacientia, aliaque corpora spiratione aeris vndecunque attracta adeo pertinaciter irretiunt, vt tuto caueatur, ne quidpiam pulmonum motui infestum facile illabatur.

§. 16. Alterum est, pituitam laryngis esse mere excrementitiam, id est, talem qualis ad corporis substantiam nutriendam non amplius apta est. Quamuis enim vsui supra memorato inseruiat: tamen, si diutius moraretur aut copiosius accumularetur, non nisi spiritus interclusionem, et aliorum osculorum exhalantium obstructionem tandem efficeret; cumque nulla via pateat per pul-

mones

mones effluendi, necessario respirationis ope expelli debet. Non solum vero excrementitia est, sed vbertim generata etiam semper morbosi quid subesse portendit; imo dubitari potest, num homo perfecte sanus, iuuenis imprimis et vegetus, in cuius corpore reliquae secretiones omnes rite procedunt, talem pituitam vmquam secernat? ex iunioribus illi potissimum hoc affectu laborant, quorum natura catarrhis adsueuit. Dantur quidem plures, plerumque senes huic screationi obnoxii, qui, excepto hoc incommodo prospera satis valetudine vtuntur; hinc si pituitae secretio intra modicos fines tam ratione quantitatis quam temporis cohibeatur, nondum propterea pro morboso affectu haberi debet, sed inter res non naturales merito refertur: at vero, quando illa debitos limites transgreditur, omnino status aliquis praeternaturalis suspicandus est. Primo enim iam hic ipse error naturae est, quod per talem copiosam et assiduam secretionem corpus a superfluis humiditatibus purgare assuescit in tali loco, vbi ob partium nobiliorum viciniam et connexionem actiones vitales facile damnum aliquod accipere possunt. Si coniecturis locum dare licet, caussa proxima quaerenda forte erit in ossificatione cartilaginum, in quarum latebris memoratae glandulae resident, dum enim illae propter solidiorem massam minus nutrimenti requirunt, humores superflui, accretioni illarum a natura destinati, ad glandulas redundant, ibique sub pituitae forma secernuntur. Deinde experientia docet, hunc affectum ingrauescentem anginam, raucedinem, tussim humidam, fluxionem ad pulmones, difficilem respirationem producere posse. Non autem mox pro phthisicis declarandi sunt, qui huius pitui-

tae

tae largiori secretione ita quidem saepe affliguntur, vt leuissimo quoque tussiendi aut screandi motu portionem eius haud exiguam extrudere queant; vt potius phthisin auerti per cordem crediderim; quippe accidere potest, vt, etsi copiosa, quam maxime salutaris tamen euadat, quando e. gr. raucedini, peripneumoniae, aliisque pectoris oppressionibus aliunde obortis succedit, et morbi per eam feliciter iudicantur. Fieri autem potest, vt ex glandularum huc pertinentium obstructione et statu scirrhoso, et pituitae secretione hinc dependente sufflaminata phthisis denique consequatur; quemadmodum in aliquibus expertus sum, qui principio solis doloribus punctoriis et constrictoriis corripiebantur, mox vero cum raucedine aspera, ariditate laryngis, siti nullo liquido compescenda, spiritus interclusione et suffocationis metu, febre denique hectica et totius corporis tabe per aliquot hebdomadas conflictabantur, donec vitam cum morte commutarunt.

DE CALORE AC FRIGORE EXPERIMENTA VARIA,

FACTA a

Georgio Wolffgango Krafft.

§. 1.

Cum natura huius regionis nostrae instituendis experimentis de frigore mirum in modum quandoque faveat: non neglexi acerbitatem hanc vertere in emolumentum, quantum potui, et quantum ratio virium circumstantiarumque mearum passa fuit. Quae hoc modo praestiti, exponam *Academiae* in praesente dissertatione, non enim in finem, vt iis, quae enarrabo, nihil amplius addi posse putem, sed vt ansam aliis praebeam haec aut confirmandi, aut augendi. Tanta enim adhuc hae qualitates obscuritate teguntur, vt ad eas illustrandas non aliquot annorum spatiolum, sed forsan plus quam integra aetas; neque vnus tantum, sed plures sagaciores requirantur.

§. 2. Quoniam in ipsa hac vrbe nostra mensibus Februario et Martio ex glacie, qua fluuius *Neua*, vrbem transfluens, quotannis constringitur, ingens numerus frustorum exciditur, ad potulenta per aestatem in cellis conseruanda destinatorum: optatissima haec mihi visa fuit occasio in rationem refractionis, quae in glacie obtinet, inquirendi. Sunt enim haec frusta glacialia, licet non semper, vt plurimum tamen ita pellucida, vt in crassitie aliquot pedum facillimam radiis lucis permittant viam. Selecta igitur in hunc finem massa glaciali aptissima, duos

pedes

pedes circiter alta et vnum lata, maxime pellucida et homogenea vbique, confici curaui machinam examinandae huic refractioni idoneam, constantem ex duobus asserculis F G et F B, quernis, bene dedolatis, et ad angulum rectum inter se iunctis. Horum asserculorum alterum F G, qui in experimento verticalis esse deberet, incidi iussi crena E G, pro lubitu longa et lata; sed huic admoui et clauiculis affixi laminam orichalceam G, tenui foramine pertusam, in loco crenae tali, quem commoditas experimento necessaria postulare videbatur. His ita praeparatis machinam hanc d. 17. Martii 1739, quo thermometrum *fahrenheitianum* ostendebat gradus 30, ita locaui, vt asserculus F G esset verticalis, et horizontali F B incumberet frustum informe glaciale, cuius sectio verticalis sit I C L K H A M. Quibus obtentis in glacie parti lateris C L, abrasis cultro eminentiis, planitiem induxi parallelam ipsi F G, eum in finem, vt deinde longitudo rectae C E, ad C L perpendicularis, eo exactius inueniri possit. Tum in loco arbitrario A foueolam effeci tenuem, sed quae tamen per foraminulum G intuenti appareret distincte; et, demisso perpendiculo A B in lineam horizontalem, hoc dimensus sum, ita vt fuerit A B = 550 partibus, quarum 1000. faciunt pedem londinensem; et recta F G = 922. part. Denique admouendo oculum foraminulo G, atque constanter intuendo notam in A factam, cuspidem tenuem, dextrae ope versus C porrectae, tamdiu hinc et inde moui, donec punctum refractionis inuenirem C, quod mihi notam in A factam obtegeret, atque adeo radium visorium A C G, refractum in C, interciperet. Puncto itaque C sollicite

 notato,

notato, dimensis porro sunt longitudines linearum, perpendicularis ad basin CD = 700. part. FD = 713, BD = 690. part. Vnde per se patet necesse esse, vt basis glaciei IM paullo sit angustior parte superiori, quo perpendicula CD, AB, eo tutius demitti et puncta D, B, notari queant.

§. 3. Ex his datis iam facile definiri poterit ratio refractionis in glacie. Erit enim, posito sinu toto = 1, sinus anguli inclinationis ECG ad sinum anguli refracti HCA, $= \frac{GE}{CG} : \frac{HA}{CA} = \frac{FG - CD}{\sqrt{(FG - CD^2 + FD^2)}} : \frac{CD - AB}{\sqrt{(CD - AB^2 + BD^2)}}$, vnde consequitur, requiri ad experimentum instituendum longitudines rectarum FG, CD, FD, AB, et BD, quas omnes modo recensitas habemus. Sit itaque secundum hanc regulam calculus ex datis numeris absoluatur: obtinetur in glacie ratio sinus anguli inclinationis ad sinum anguli refracti = 1000 : 713. Quae ratio cum sit in aqua pluuia vti 100 : 75, ex *Newtoni* optica, lib. II. parte 3. prop. X; apparet, confirmari hoc experimento ea, quae obseruauit solertissimus quondam *de la Hire* generaliter tantum, vsus frustulo paruo glaciei, in calice vitreo formatae, conico, in commentariis acad. scient. *parisinae*, ad annum 1693, pag. 252. edit. paris. nempe refractionem glaciei, qua deinde vsus est in explicandis parheliis, paullo diuersam esse ac aquae; quod idem etiam obseruauit Celeberr. *De Mairan*, in diario eruditorum gallico, ad annum 1719, pag. 580; rationem quoque addens, cur hoc ita fieri debeat, quam autem praetereo nunc, contentus confirmasse me sententiam Virorum celebrium, qui hyemes, huic experimento necessarias, adeo fauentes experti non fuerunt.

§. 4.

§. 4. Refert *Mariottus*, in commentar. acad. scient. paris. tomo X. pag. 511. se vasculum aqua repletum frigori exposuisse tamdiu, donec summa eius superficies crusta glaciali obducta fuisset. Quod cum contigisset, perfodit crustam glacialem acu grandiori, et vidit, hac celeriter extracta, insecutum fuisse per foraminulum factum iactum aquae duos pollices altum. Hoc experimentum, cum id d. 26. Ianuarii 1739. bis tentassem, mihi non successit. Suspicor itaque phaenomenum *mariottianum* ortum fuisse exinde, quod manibus calidioribus vasculum apprehenderit, atque sic ex hoc calore expansionem aquae, infra crustam glacialem contentae, conciliauerit, ex aquae congelatione superiori nullatenus oriundam.

§. 5. Inter primos philosophos, qui glaciem esse aquam rarefactam, non condensatam, opinati sunt, referendus esse videtur *Galilaeus*, cui haec sententia adscribitur in experimentis academiae *del Cimento*, latine editis a celeberr. *Musschenbroekio*, pag. 127. De hoc phaenomeno hodie inter omnes constat quidem, sed de mensura eius non conueniunt sententiae, vti apparet ex libri modo citati pag. 139. et 142.; neque etiam credi potest, glaciem omnis generis, modo magis modo minus bullis aëreis refertam, eandem habituram esse densitatem. Nec verisimile est, quod asseritur l. c. pag. 139, omnibus corporibus, excepta sola aqua, id conuenire, vt maius habeant volumen in fluiditate, quam in firmitate ipsorum; contrarium enim sedulo captis experimentis ostendit *Reaumurius*, in commentar. acad. scient. paris. ad annum 1726, vbi detexit, in firmitate augeri volumen non aquae solius, sed etiam ferri, bismuthi, et antimonii. Inueni igitur, aquam, in tubo vitreo cylindrico contentam, fluidam occupasse longitudinem 1168. part. congelatam vero penitus repleuisse longitudinem 1290. earundem partium; durante quidem congelatione ruptus fuit tubus hic aliquot in locis, sed mansit tamen cylindricus, et ad sensum eiusdem diametri cum priori, partibus ruptis sibi cohaerentibus; quare ex hoc experimento quamproxime concludi posse puto, esse densitatem aquae ad densitatem glaciei $= 1290 : 1168 = 1000 : 905$, vel circiter vti 9 ad 8, quae communis est sententia. Alio autem tempore magis exactum institui experimentum, capiendo frustum glaciei semilibrale circiter, sed purissimae instar crystalli, et plane carentis quacunque vel minima etiam bulla aërea, aut alia heterogeneitate; huic alligando frustum metalli vt submergeretur in aqua, et seligendo äeris temperiem talem, in qua nulla suspicio oriri posset, durante submersione in aquam glaciei aliquid potuisse accedere, aut decedere; abstinendo praeterea a manuum immediato vsu, subducto tandem calculo, in quo ratio metalli alligati habebatur, inueni densitatem aquae ad densitatem huius glaciei purissimae vti 1000. ad 916.

§. 6. Praecedenti quaestioni haud absimilis est, quantum voluminis occupent niues et aquae ex iis collectae. In vasculo igitur cubico aeneo compressi vi cuncta manuum niuem, quae recentissime ceciderat; atque sic altitudinem tenebat tandem partium 93, pondus vero, subtracto vasculi pondere, 225. gr. quorum 7680. faciunt libram Hollandicam. Nix haec per lenem calorem et obturato vasculo in aquas resoluta tenebat in eodem

vasculo

vasculo adhuc altitudinem 59. part. et pondus $224\frac{1}{4}$. gr. vnde satis patet, fere nihil niuis durante regelatione per euaporationem abiisse; atque hinc deducitur volumen niuis compressae ad volumen aquae inde exortae esse vti 93. ad 59, hoc est vti 1000. ad 634. Alio tempore niuibus cadentibus exposui vasculum cylindricum apertum, donec libero niuis illapsu hoc impletum fuisset ad partes 220; niuibus omni cautione regelatis, aquae exinde collectae non replebant nisi partes 80; vnde oritur volumen niuis recenter lapsae, et sibi relictae, ad volumen aquae ex illa generatae, vti 220. ad 80, vel vti 1000. ad 363. Patet ex his, quanta sit differentia raritatis inter niuem libere sibi ipsi accumulatam, et vi aliqua externa compressam. Discrepat vero vtrumque horum experimentorum ab iis, quae instituit *de la Hire*, in commentar. acad. scient. paris. ad annum 1711, pag 16, vbi dicitur, niuem fusam plerumque se reducere ad quintam aut sextam partem prioris suae altitudinis; quanquam ibidem etiam sermo sit de niue valde delicata et tenui alia, quae, libere lapsa, ad duodecimam prioris suae altitudinis partem, in aquas fusa, rediit. Neque etiam consentiunt haec mea experimenta cum illis, quae annotauit celeberr. *Celsius*, in actis lit. Sueciae, ad annum 1731. pag. 42, vbi ab ipso volumina niuis summe compressae et aquae exinde collectae reperta fuerunt vti 1000. ad 290, aut ad 362; niuis autem naturalis, sibi relictae ad aquae exinde generatae; vti 1000. ad 85. vel 94. Ex quibus videtur concludi posse, paucissimas, aut forsan nullas inueniri niues, quae eandem raritatem teneant.

§. 7.

§. 7. Extendi vero glaciem sensibiliter, durante aliqua congelatione, sequenti experimento ad oculum mihi patuit. Calici vitreo infudi aquam, exposuique frigori acerbo; post aliquot temporis minuta omnis aqua circumvestita fuit crusta glaciali; quod cum animaduerti, calicem moderato igni admoui, effecique facile, vt omnis crusta a superficie calicis interna liberaretur, eximique posset glacies calicis formam referens, et aquae quam plurimum adhuc, oui instar, intra se continens. Hoc glaciale ouum, si appellare id ita licet, statim iterum sub dio reposui, et vidi, antequam integra congelatio aquae reliquae inclusae perficeretur, disruptam fuisse crustam circumcirca, facta rima $\frac{1}{8}$ pollicis lata. Simile quid tentauit *Mariottus*, in Memoires de Paris, tomo X, pag. 512; et ego plura etiam alia pericula feci huius phaenomeni cum aquis destillatis menthae et tiliae, atque, post harum factam disruptionem, intra glaciem inueni locum ab aqua et glacie vacuum, nucis auellanae magnitudine. Ipsa igitur glacies per se extenditur dum generatur; neque adeo vasa illam continentia ex facta ipsorum per frigus constrictione, et nimia ad glaciem cedere nesciam facta tensione, diffringuntur, quae quorundam fuit opinio, in experimentis academiae *del Cimento* pag. 136; praecipue autem *Perralti*; vide *G. A. Hambergeri* dissertationem de frigore, pag. 96.

§. 8. Vasculum figulinum, intus encausto obductum, aqua repleui d. 11. Febr. 1739, quo die thermometrum *fahrenheitianum* 9 gradus infra o ostendebat; et libero aëri exposui, vt aqua in glaciem tota abiret; quod cum factum putarem, vasculo adhuc integro, illud reportaui

taui in museum, et glaciei superaffudi aquam nouam, quae aliquamdiu in museo calefacto seruata ante erat. Vix absolueram recentem hanc affusionem, cum subito, nec sine ingenti fragore, vasculum medium disrumpebatur; et in glacie, a vasculo libera, dissecta inueni adhuc locum, aqua spumosa refertum, nucis auellanae magnitudine. Videtur hoc phaenomenum eapropter accidisse, quod aqua, glaciei recens affusa, calidior, hanc ad ampliorem voluminis mensuram extendit; ex quo factum est, vt vas fictile, ob glaciem expansam satis iam extensum, et vix adhuc ruptioni resistens, hanc, modica accedente vlteriori dilatatione, tandem fuerit passum. Habet, vti arbitror, hoc experimentum cohaerentiam et connexum cum alio plane mirabili casu, quem obseruauit Illustris *Friewaldus*, anno 1730; qui, cum vas vitreum oblongum aqua repletum, diabolos *cartesianos* sic dictos continens, in conclaui non calefacto reliquisset, et iam a congelatione aquae periculum instrumento metueret, subito accessit, vt id museo calefacto inferret. Offendit aquam adhuc liquidam; sed cum vesicam superne alligatam digito premeret, vt subsiderent imagunculae: dicto citius omnis aqua abiit in lamellas tenues glaciales, atque sic initium congelationis fecit. Legitur hoc experimentum in transact. *anglican.* nro. 418, pag. 79, sine explicatione phaenomeni; quam demum adiecit Cel. *Hollmannus*, in nouis litterariis göttingensibus ad 10. Ianuarii 1743. Hic enim plurimis captis tentaminibus deprehendit tandem, solum calorem aut manuum, aut conclauis calidioris, accedentem ad aquam liquidam adhuc quidem, sed penitus frigefactam et congelationi proximam in caussam hic aduocari debere. Quam explicationem certe experimentum meum optime confirmare videtur. Aqua enim a frigore iam penetrata, et in limine quasi glaciei consistens, modica extensione opus habet, vt primitias congelationis referat; hoc extensionis supplementum largiri ipsi potest calor subito allapsus, qui citius congelationem efficit dilatando, quam calefaciendo ad statum liquidum reuocat. Apparet quidem paradoxum omnino, calore promoueri congelationem: sed permittit hoc natura aquae singularis, vtpote quae a statu intermedio, qui nempe congelationi proximus est, vtrinque volumine suo increscit, illinc, ad ebullitionem vsque, augetur voluminis sui parte $\frac{1}{26}$, vid. Celeb. *Musschenbroekii* elem. phys. §. 515.; hinc per gelationem idem volumen iterum incrementum capit parte $\frac{1}{9}$ voluminis, quod ex vulgari proportione densitatis aquae frigidae ad densitatem glaciei vti 8 ad 9 consequitur; vt igitur aqua congelationi proxima minimum voluminis habere censenda sit. Quicquid igitur extensionem aquae in statu intermedio positae promouet: potest eius etiam conglaciationem promouere; siue per calorem subitaneum affluentem id fiat, siue per aliam caussam.

§. 9. Vi aquae in glaciem abeuntis diffregerunt *Academici florentini* olim vasa variae figurae, argentea, cuprea, aurea, vitrea, orichalcea et ferrea, de quibus legi possunt experimenta academiae *del Cimento*. Eadem vi vt disrumperetur tubus ferreus, bombardarum vsui adhiberi solitus, effecerunt *Christianus Hugenius* anno 1667, et post eum Parisiis *Buottus*, anno 1670, tandemque etiam *Israel Conradi*, medicus gedanensis anno 1677. Tentaui igitur et ego idem perficere sequentibus circumstantiis. Cepi talem tubum ferreum, bombardae destinatum, sed

fonforamine incendiario nondum praeditum, cylindricum, cuius diameter anterior integra erat pedis rhenani partium millesimarum 77, diameter vero cauitatis 57. Ad eius extremum posterius, quod cochlea ferrea occludi ab artificibus solet, affudi insuper adhuc circumcirca metallum fusum, vt tuta hic redderentur omnia ab exitu aquae intromittendae. Maior vero cura adhibenda erat in parte anteriori; vbi igitur obturaculum ferreum, bene adaequatum, et clauo adhuc transuerso munitum, adaptaui. His ita praeparatis impleui integrum tubum aqua recenti, obturaculum supene intrusi, clauo transuerso muniui, atque tum demum adhuc integram hanc faciem anteriorem liquefacto metallo prolixe circumfudi. Tum die 9. Nouembris 1737, hora post meridiem quarta, exposui eum aëri libero, frigenti mediocriter, ad gradus scilicet 24. thermometri fahrenheitiani; atque hora vndecima nocturna eundem iam disruptum inueni, in loco eius, quantum colligere potui, debilissimo, in quo nempe ferrumine coniunctus erat, quales omnes eiusmodi tubi sunt. Fissurae longitudo fuit partium modo memoratarum 146, amplitudo autem maxima 15, extra quam multum glaciei prominuit, ad altitudinem circiter 16. partium; et fissurae quidem vna pars eleuata manifestoque extrorsum pressa apparebat, altera vero situm suum retinebat pristinum.

§. 10. Quomodo inuenienda sit tempesies duorum miscibilium, eiusdem consistentiae, sed diuersae temperiei, si inuicem misceantur, primus proposuit *Morinus*, in „astrologia gallica, pag. 158. dicit enim: hac de re, „quod sciam, nemo hactenus quidquam determinauit.

Methodum ipſius ſoluendi hoc problema hic apponam, quia ſingularis eſt, nec multum ab experimentis abludit. Ita autem ratiocinia ipſius valde obſcura et inuoluta reduxi ad calculum generalem ex ipſius numeris ſpecialibus, non ſine multa opera. Sint duo fluida, frigidius primum, cuius gradus caloris $= m$, quantitas materiae $= a$; et „quoniam philoſophorum communis eſt ſententia, inquit „*Morinus*, mixtum admittere duntaxat octo gradus con„trariarum qualitatum: erit in eodem hoc fluido ſimul gradus frigoris $= 8 - m$. Alterum fluidum ſit calidius, et quidem in eo gradus caloris $= n$, frigoris $= 8 - n$, quantitas materiae $= b$. Sit ergo ſecundum *Morinum* quantitas frigoris producti in calido $= x$, et quantitas caloris producti in frigido $= y$; ſtatuit is, eſſe primo $x : y = \overline{8 - m} . a : nb$, vnde $y = \frac{nbx}{(8-m)a}$; eſſe etiam ſecundo $x + y = (8 - m) - (8 - n) = n - m$, vnde $y = n - m - x$; ex quibus aequationibus combinatis inter ſe oritur $x = \frac{(8-m)(na-am)}{nb+8a-am}$. Erit ergo in mixto productus gradus frigoris $= x + 8 - n$, et conſequenter gradus caloris in mixto $= 8 - x - 8 + n = \frac{n^2 b + \overline{8-m} . ma}{nb + \overline{8-m} . a}$. Formula haec generalis duo exempla, ab ipſo *Morino* allata, perfecte producit. In primo eſt $a = b$, $m = 2$, $n = 4$, quibus ſubſtitutis fit caloris gradus in hoc mixto $= 2\frac{4}{5}$, et frigoris $= 8 - 2\frac{4}{5} = 5\frac{1}{5}$; in ſecundo habet $m = 1$, $a = 2$, $n = 6$, $b = 3$, ex quibus numeris fit in mixto gradus caloris $= 3\frac{13}{16}$, et gradus frigoris $= 4\frac{3}{16}$, vti habet auctor in loco adducto, vbi mirum ſane eſt haec inueniri in libro nugis aſtrologicis ceterum refertiſſimo.

§. 11.

§. 11. Sed vt eruere possim pro gradu caloris in aliquo mixto formulam generalem magis in natura rei fundatam, atque ad gradus caloris in thermometro *fahrenheitiano* accommodatam, sequenti modo hoc problema consideraui. Sint ingredientis vnius fluidi frigidioris, vt ante, caloris gradus $= m$, massa $= a$; alterius vero fluidi calidioris caloris gradus $= n$, massa $= b$, et gradus caloris in mixto $= x$, et sint indeterminatae α, β, γ, δ, postea determinandae. Ponam nunc esse $x = \frac{\alpha m + \beta n}{\gamma a + \delta b}$. Patet iam, si formula haec veritati congruere debet, requiri in ea, vt primo, posito $n = m$, fiat $x = m$; ex hac substitutione oritur $\beta = \gamma a + \delta b - \alpha$, et formula acquirit hunc statum, $x = \frac{\alpha m + \gamma a n + \delta b n - \alpha n}{\gamma a + \delta b}$; siue $x = \frac{(\gamma a + \delta b) n - (n - m) \alpha}{\gamma a + \delta b}$; secundo requiritur, vt posita $a = \infty$, fiat $x = m$; sed posita $a = \infty$, fit $\gamma a + \delta b = \gamma a$, quia b respectu ipsius a euanescit; manet autem $n - m$, quae differentia calorum infinito aeque competit ac finito; ergo deducetur hinc $m = \frac{\gamma a n - (n - m) \alpha}{\gamma a}$, hoc est, $\gamma a (n - m) = \alpha (n - m)$, aut $\gamma a = \alpha$, qui valor substitutus efficit $\beta = \delta b$, et formulam generalem mutat in hanc sequentem, $x = \frac{\gamma a m + \delta b n}{\gamma a + \delta b}$; tertio requiritur etiam vt posita $b = \infty$, fiat $x = n$; sed hoc formula modo determinata iam efficit; in qua igitur omnes respectus continentur, quos ratiocinium desiderare potest.

§. 12. Vt igitur iam determinentur etiam reliquae indeterminatarum γ et δ: feci omni cura experimentum sequens. Cepi aequales portiones aquae frigidioris ad 44. gradus Thermometri *Fahrenheitiani*, et calidioris ad 120.

 gradus

gradus; mixtae secum hae dederunt gradum 76. Alias duas aquae portiones aequales, frigidioris ad 64, calidioris ad $111\frac{1}{2}$, vidi producere gradum 84. In applicatione igitur ad formulam nostram est $a = b$, $m = 44$, $n = 120$ $x = 76$, quibus subrogatis existit $\gamma = \frac{11\delta}{8}$, et formula generalis nunc induit hanc faciem, $x = \frac{11am + 8bn}{11a + 8b}$, quia δ per divisionem eliminatur. Quae igitur formula cognoscendo gradui caloris in aliquo mixto fluido inseruiet. Est igitur ex his incrementum caloris, quod oritur in mixto $= x - m = \frac{8b(n-m)}{11a + 8b}$; et si massae vtrinque sint aequales, siue $a = b$, erit incrementum $= \frac{8}{19}(n - m)$, proportionale itaque differentiae calorum vtriusque ingredientis. Hoc corollarium autem ex formula prius reperta $x = \frac{\gamma am + \delta bn}{\gamma a + \delta b}$, quae ex principiis necessariis deducta est, iam consequitur; est enim, vi huius, incrementum caloris in mixto $= x - m = \frac{\delta b(n-m)}{\gamma a + \delta b}$, et, si $a = b$, idem incrementum est $\frac{\delta}{\gamma + \delta}(n - m)$; vnde veritas huius consectarii a priori, et necessario, constare potest.

§. 13. Deducuntur ex generali inuenta expressione hae satis egregie phaenomena sequentia, quae in experimentis ad hunc finem institutis obseruaui anno 1739. Accepi nempe primo aquae calidae ad gradus 42, mensuras 4, quae mensura continebat circiter $1\frac{1}{2}$ pollicem cubicum; huic affudi aquae feruentis ad gradus 212 mensuram vnam, deditque mixtum gradus 68; adiecta mensura secunda huic mixturae produxit gradus 80, reliqua docet sequens tabella:

Affusa mensura		1ª	dedit gradus	68	A
		2ª	- - - -	85	
		3ª	- - - -	98	
		4ª	- - - -	107	
		5ª	- - - -	113	
	A.	6ª	- - - -	118	
		7ª	- - - -	123	B.
		8ª	- - - -	128	
		9ª	- - -	130	
		10ª	- - -	134.	

Alio tempore, eadem vsus mensura, cepi aquae calidae ad gradus 38 mensuras 20, atque his affudi successiue singula paria aquae ebullientis; cumque affunderem par primum, obortus fuit calor 52 grad. et sic porro, vti tabella haec ostendit.

Affusum par	1mum	dedit gradus	52
	2um	- - - -	62
	3um	- - - -	72
	4um	- - - -	80
	5um	- - - -	85
	6um	- - - -	91
	7mum	- - - -	97
	8um	- - - -	103
	9um	- - - -	108
	10mum	- - - -	111
	11mum	- - - -	115
	12mum	- - - -	117
	13um	- - - -	119

A. 14^{um}	- - - - - 122	
15^{um}	- - - - - 124	B.
16^{um}	- - - - - 125	
17^{mum}	- - - - - 126	
18^{um}	- - - - - 128	
19^{um}	- - - - - $128\frac{1}{2}$	
20^{mum}	- - - - - 129.	

Vt hae obseruationes ad calculum nostrum reuocentur, consideretur ex. gr. in casu prioris tabulae, qui signatus est litera A, adfuisse mensuras aquae 10, calentis ad gradus 118, affusam autem fuisse mensuram vnam aquae calentis ad gradus 212, et prodiisse calorem B 123 graduum. Erunt igitur in hoc casu $a = 10$, $m = 118$, $b = 1$, $n = 212$, et prodit $x = \frac{11 \cdot 10 \cdot 118 + 8 \cdot 1 \cdot 212}{11 \cdot 10 + 8 \cdot 1} = 124$, qui gradus satis bene cum obseruatione congruunt. In tabula posteriori sumatur ex. gr. obseruatio notata A, atque erit ibi a 48, $m = 122$, $b = 2$, $n = 212$, vnde exsurgit $x = \frac{11 \cdot 48 \cdot 122 + 8 \cdot 2 \cdot 212}{11 \cdot 48 + 8 \cdot 2} = 124$, qui numerus exacte cum gradu obseruato conuenit.

§. 14. Videamus nunc, in quibus aestimatio caloris in mixto producti *moriniana* prius (§. 10.) adducta, discrepet a nostra. Est ibi huius caloris incrementum $= \frac{n^2 b + (8 - m) m a}{n b + (8 - m) a} - m = \frac{8 b (n - m)}{n b - m a + 8 a}$; vel, si portiones vtriusque ingredientium sint aequales, aut $a = b$, est dictum incrementum $\frac{n(n-m)}{n-m+8}$, ergo in hac aestimatione incrementum caloris in mixto non est in ratione simplici differentiae calorum ingredientium, quod tamen necessario esse debere antea demonstraui; vnde aestimatio *moriniana* fallit,

lit, sed ad verum tamen, quod mirandum est, vtcunque accedit. Facile perspici potest, fluidi massam, vt a, caloris m, mixtam cum fluidi massa, vt b, caloris n, eumdem producturam esse calorem, quem producit fluidi massa, vt pa, caloris n; sed idem etiam ostendit formula nostra, in qua si ponantur $a = pa$, et $b = p.b$, prodit $x = \frac{11pam + 8pbn}{11pa + 8pb} = \frac{11am + 8bn}{11a + 8b}$; quod idem etiam efficitur per *Morini* formulam. Superest vero formulae meae vnica adhuc difficultas, auctoritas nempe Viri merito suo etiam post fata illustris, *Boerhauii*, qui in elementor. chemiae tomo I. de igne, experim. XX, corol. 11. pag. 269, asserit, aquae duas portiones aequales, vnam caloris graduum 32, alteram graduum 212, illam scilicet gelascentem, et hanc bullientem, mistas inter se efficere calorem graduum 90, qui dimidius est differentiae vtriusque caloris; qui casus ad formulam nostram applicatus praebet $a = b$, $m = 32$, $n = 212$, vnde fit x, siue calor aquarum inter se mistarum, $= 107\frac{15}{19}$; sed, facto, die 21. Aprilis 1744, experimento, peculiariter huic fini destinato, deprehensum est, respondere huic mixtioni gradus 107 vel 108, vti calculus meus postulat.

§. 15. Inquisiturus in elasticitatem glaciei sequentia institui experimenta. Primo paraui, non sine multo labore, duos globos glaciales, diametri circiter duorum pollicum, ex aqua diu et multum cocta, aequalis inter se ponderis, et bene pellucidos; hos suspendi in machina *grauesandiana* collisionum, descripta in physices elementis mathematicis, editis 1725, pag. 126, atque effeci, vt in alterutrum quiescentem incurreret alter, celeritatibus

 suc-

successiue vt 16 et 20, quibus quiescens obtinuit celeritates respectiuas vt $9\frac{3}{4}$ et $11\frac{1}{2}$; et globus incurrens post collisionem paullo etiam resilit. Patet ex regulis collisionum generalibus, si glacies spectetur vt corpus molle, celeritates ortas ex collisione futuras fuisse, vt 8 et 10, cum igitur obseruatae fuerint paullo maiores: patet etiam, donatam esse quidem glaciem aliqua elasticitate, sed admodum parua; nam si consideretur vt perfecte elastica; ortae fuissent celeritates vt 16 et 20. Idem consequitur etiam ex aliis experimentis quae institui, cum nempe globo eburneo, cuius pondus 7 lothonum, quiescenti, immisi glacialem globum 5 lothonum, celeritatibus vt 10, 15, 20, quae produxerunt post collisionum celeritates respectiuas vt $5\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{4}$, et $9\frac{3}{4}$; aut cum iterum duos globos glaciales, quorum pondera erant vti 194 et 159, inter se commisi, quiescente maiori, et minori incurrente cum celeritatibus vt 5, 10, 15, 20, ex quibus ortae fuerunt post collisionem celeritates respectiuas maioris globi vt 3, 6, 9, $11\frac{1}{2}$.

§. 16. Cum anno 1739. d. 8. Febr. aer liber esset frigidus ad 1. gradum, infra 0, exposui eidem fluida sequentia, omnia calida ad gradus 48. Et *aqua* quidem *salsa* mediocriter sale communi tenuem crustam glaciei, sed fortem tamen, contraxit spatio 1. horae 10. min. diu ante apparebat quasi coagulata, et mollis instar cerae, nec nisi post sex horas tota in glaciem mutata fuit albam, cui aliquid salis superne quasi aspersum erat, et opacam. Aqua multum ante *cocta* tenuem glaciei crustam, sed fortem, induxit post 19. minuta prima, et post tres horas integras in glaciem abiit paullo pellucidam. Idem acci-

accidit *aquae fluuiae*, et in eodem quidem tempore, sed haec produxit glaciem magis opacam et impuram. Falsum igitur esse puto, quod asserit *Hartsoekerus*, in physicae suae pag. 150. aquam coctam citius congelari quam non coctam, ob äeris in illa absentiam; falsum etiam videtur, quod statuitur in Memoires de Trevoux 1701. m. Ian. pag. 161, glaciem ex aqua äere orbata tardius formari, quam ex ordinaria. *Cereuisia domestica*, mediocris virtutis, glacie obtecta fuit post 1. hor. 25. min. et *vinum rubrum gallicum* post 1. hor. 45. min. vtrumque diu ante coagulatum erat instar cerae mollis; sed post 6. horas vtrumque integrum in glaciem abiisse obseruaui. *Spiritus vini gallicus* d. 5. Febr. 1739. duram glaciem induxit, sed tenuem, condensatus infra, post aliquot horarum spatium, in frigore äeris liberi 14. grad. infra 0. Alio tempore aquam fluuiam calentem ad gradus 48. exposui äeri libero, sed obtectam vitro maiori, quae crustam tenuem glacialem contraxit post 55. min. adeoque multo tardius, quam si non fuisset obtecta. Alio iterum tempore, quo äer calebat ad gradus 13, exposui ei aquam fluuiam, calentem ad gradus 45, quae post 14. min. tenui crusta obducta, et post 3. horas 35. min. integra in glaciem conuersa fuit; aequalis portio aquae eiusdem, et aeque calens, sed cui superaffusum erat oleum nucis ad altitudinem ⅜ poll. conglaciari coepit post 19. min. multis virgis et hastis deorsum tendentibus; post 3. horas 35. min. tota congelata erat, dum oleum superne interim adhuc esset pellucidum et illaesum plane a frigore; congelatio igitur aquae, dicto oleo obtectae, eodem tempore consecuta est, ac si libera fuisset, nec per 30. min tardius

dius folito accidit, vti refert *Gauteron*, in Memoires de l'Academ. des Sciences, 1709 pag. 454. In frigore faevissimo anni 1739. d. 7. Decemb. vbi aër frigebat ad 16. gradus infra 0, exposui libero aëri huic aquas destillatas tiliae, menthae, et cardui benedicti, in quibus crusta glacialis apparuit post 5 min. et quae post 42. min. integrae in glaciem versae erant.

§. 17. Examinaui etiam gradus caloris fluidorum aliquot ebullientium, hac cautela, vt vas, in quo coquebantur, obtectum esset assere querno satis amplo, per cuius foramen paruum aliquod factum bullam thermometri *fahrenheitiani*, ab optimo artifice *Prins* elaborati, et ad gradus 600. extensi, transmisi, vt ea sola calorem sentiret, nec vllus vapor calidus ascendens obseruationi nocere posset. In his circumstantiis inueni gradum caloris ebullientis *lactis* bubuli 210; *vini* rubri gallici 199; *spiritus vini* gallici 181; barometro tenente altitudinem mediocrem, scil. 29 $\frac{5}{100}$ poll. londinens. Alio tempore, quo idem barometrum eleuatum erat ad 29 $\frac{8}{100}$ poll. erat gradus ebullientis *vini* rhenani generosi, 200; et *cereuisiae* vulgaris 204.

§. 18. Aquae calentes, libero aëri expositae, sensim sensimque calorem perdunt suum, donec is reducatur ad eum gradum, qui aëri ambienti inhaeret. Non immerito itaque quaeritur, in qua proportione haec fiat refrigeratio. Institui igitur experimentum, et aquam calentem ad gradus 112. infudi vitreo calici, cui simul immisi thermometrum *fahrenheitianum*, cuius sola bulla aquis obtegebatur; gradus caloris in aëre libero erat tum 76. grad. cui exposui aquam hanc, et singulis minutis primis gradum aquae remissiorem obseruaui, quos vero omnes hic adscribere inutile est, vnde solos sequentes affero:

h.	'	grad.	h.	'	grad.	h.	'	grad.
2.	11. p. m.	112.	2.	27.	$94\frac{1}{2}$.	2.	53.	82.
	12. - -	110.		29.	93.		57.	81.
	13. - -	109.		34.	90.	3	0.	$80\frac{1}{2}$.
	15. - -	$106\frac{1}{2}$.	*	36.	89.		5.	79.
	17. - -	104.		38.	88.		12.	78.
	20. - -	101.		42.	86.		15.	$77\frac{1}{2}$.
	22. - -	99.		47.	$84\frac{1}{2}$.		19.	77.
	25. - -	96.		50.	83.		26.	$76\frac{1}{2}$.
							32.	76.

Absoluta vltima harum obseruationum, thermometrum aeri libero denuo expositum vidi adhuc monstrare gradus 76. In hoc experimento si ponamus tempus elapsum $= t$, gradum caloris aquae initialem $= i$, gradum caloris aëris ambientis $= g$, et constantem arbitrariam, ex casu aliquo experimenti determinandam $= \alpha$, videbimus omnes numeros satis bene prodire, si decrementum caloris pro quolibet casu statuatur $= \alpha(i-g)\sqrt{t}$. Sed vt determinetur arbitraria α, sumamus ex hoc Experimento casum, in quo, tempore $2^h\ 36'$ gradus caloris in aqua residuus erat 89. Est igitur in hoc casu $t = 25$, atque $i-g = 112-76 = 36$, et decrementum caloris praesentis ab initiali $= 112-89 = 23$, ergo debet esse $36\alpha\times 5 = 23$, vnde oritur $36\alpha = \frac{23}{5}$, et formula determinata fit $\frac{23}{5}\sqrt{t}$, quae reliquis casibus satis bene respondet; adeoque credi potest, generaliter esse in hoc experimento et similibus decrementa caloris in ratione subduplicata temporis elapsi.

 §. 19.

§. 19. Legitur in experimentis academiae *del Cimento* pag. 179, obseruatio valde memorabilis, frustum scilicet glaciei, pondus 500. libr. tenens, oppositum speculo cauo, repercussisse frigus ad thermometrum. Cupidus admodum spectandi hoc phaenomenum, curaui duo frusta glacialia, dura, et valde pellucida, ita locari, vt parietem quasi formarent altum 4. pedes lond. long. 5, et crassum 2, superficiem itaque tenentia simul 20. pedum quadratorum, et soliditatem 40. pedum cubicorum, qui pondus adeoque glaciale effecerunt 2280. librarum, positis densitatibus aquae et glaciei vt 9. ad 8, et pondere pedis cubici aquae 64. libr. Habui igitur massam glaciei purissimae maiorem quam quadruplam illius, quam habuerunt *Academici florentini*; cui opposui speculum causticum metallicum, in quo amplitudinis diameter est $2\frac{1}{4}$ pedum lond. In focum huius speculi collocaui bullam superiorem thermometri *drebbeliani*, quod genus thermometrorum in his et similibus casibus maxime se commendat ob insignem et summe conspicuam, ex minimo frigore vel calore, mobilitatem. His ita praeparatis integrum speculum obduxi velamento laneo, atque tamdiu expectaui, donec thermometrum in perfecto statu quietis esset; quo obtento reuelaui subito speculum, et solicite attendi ad mutationem thermometri, sed ne minimam quidem vnquam obseruaui, etiamsi in variis speculi a glacie distantiis variisque äeris caloribus experimentum repetitum fuerit; prima quidem vice mense Martio anni 1740, adspectantibus id Illustri *Ioh. Alberto Korfio*, Academiae tum temporis Praeside, et Academicorum praeterea multis. Cum vero Clariss. Professor *Heinsius* idem

idem hoc experimentum in peculiari hac circumstantia adhuc instituii cuperet, in qua calor äeris circumflui maior esset quam glaciei, qui 32. gradibus maior esse nequit: hinc operam dedi, vt die 10. Martii anni 1744. hora a. m. circiter 11., quo tempore äer circumfluus calorem tenebat 37. graduum thermometri *fahrenheitiani*, adhibitis praecedentibus cautelis, eadem denuo peragerentur, coram praesentibus Academiae Professoribus *C. N. De Winsheim*, *G. Heinsio*, et Academiae Adiuncto, *Gellerto*, vbi omnibus nobis varie hinc et inde rem tentantibus patuit tandem, ne in hoc quidem casu vllum frigus a glacie, mediante speculo, ad thermometrum repercuti.

OBSER-

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE, INSTITVTAE PETROPOLI ANNO 1742, AVCTORE *Georgio Wolffg. Krafft.*

§ 1.

Currente hoc anno 1742, obseruatae fuerunt a me altitudines barometri simplicis, et hucusque ad hos vsus vocati, singulis mensibus maximae et minimae, sequentes, in quibus, vti hucusque solitus sum, numeris ante punctum positis denoto partes duodecimas, siue pollices, pedis londinensis; numeris autem post punctum positis designo horum pollicum partes centesimas.

		max.	min.	diff.
1742.	Ianuarius	30. 25	29. 02	1. 23
	Februarius	30. 26	29. 02	1. 24
	Martius	30. 15	28. 66	1. 49
	Aprilis	30. 10	29. 40	0. 70
	Maius	30. 18	28. 88	1. 30
	Iunius	29. 98	29. 48	0. 50
	Iulius	30. 02	29. 27	0. 75
	Augustus	30. 05	29. 20	0. 85
	September	30. 25	29. 25	1. 00
	October	30. 30	29. 33	1. 97
	Nouember	30. 21	29. 30	0. 91
	December	30. 45	28. 94	1. 51

§. 2.

§. 2. Apparet ex his altitudinibus barometri, earum maximam hoc anno fuiſſe 30. 45, quae obſeruata fuit die 14 Decembris, circa meridiem, in ſerenitate coeli imperfecta, nebulis mane et veſperi aërem inuoluentibus; cum ſubſequente niue modica, ſpirante nullo vento ſenſibili, ſed frigore regnante acerbo, ad 13 gradus infra o thermometri fahrenheitiani. Quia autem haec altitudo maxima illam, quae anno 1737 obſeruata fuit 30. 95 non excedit, haec etiamnunc manet omnium hic loci obſeruatarum maxima. Minima barometri altitudo fuit hoc anno 28. 33, obſeruata die 24 Octobris, cadente copioſa niue, frigore leni, et flante fortiſſimo Auſtro-Zephyro. Quae igitur minima altitudo huius anni, cum inventam in praecedentibus annis, nempe 28. 18, ſuperet: manet adhuc idem ſpatium variationum barometricarum antea ſtabilitum, nimirum 2. 77; ſuntque etiam adhuc variationes menſtruae in primis et vltimis anni menſibus maiores, minores autem in mediis, exceptis ſolis menſibus duobus.

§. 3. Auroras boreales hoc anno obſeruaui ſequentes.

1742. Februarii 18. Lux borea, multis virgis et longis conſpicua, flante mediocri Euro.

Martii 1. Lux borea tranquilla, in ſerenitate perfecta; flante tenui Euro.

2. Lux borea tranquilla, in ſerenitate iterum perfecta; nullo flante vento.

14. Lux borea in arcu quieſcente, et coelo ſereno.

15. Lux borea magna, et irrequieta, coelo perfecte ſereno.

Martii 16. Lux borea debilis, aëre ſereno et quieto.

17. Lux borea humilis et tranquilla, flante mediocri Euro, et coelo ſereno.

24. Lux borea tranquilla, coelo ſereno, flante mediocri Borea-Euro.

29. Lux borea humilis, in qua pauci radii aſſurgebant, in ſerenitate perfecta, et lucente Luna.

30. Veſtigia lucis boreae.

Aprilis 1. Veſtigia lucis boreae, coelo ſereno.

2. Veſtigia lucis boreae; coelo iterum ſereno.

5. Lux borea in ſerenitate perfecta.

11. Lux borea alta et vaga, coelo ſereno.

12. Lux borea in arcu multum eleuato, et trabibus, ad eius extrema aſcendentibus, conſpicua.

Auguſti 15. Lux borea tranquilla, in ſerenitate perfecta.

19. Lux borea, emittens copioſas et longe protenſas virgas, in ſerenitate perfecta.

Septembris 15. Lux borea tranquilla, coelo ſereno, flante tenui Auſtro-Zephyro.

16. Lux borea tranquilla, coelo ſereno.

18. Lux borea tranquilla, in ſerenitate perfecta.

Sep-

Septembr. 27. Lux borea magna et diffuſa, coelo fere integro ſereno.

Octobris 15. Lux borea humilis et tranquilla, flante forti Borea-Zephyro, coelo ſereno.

16. Lux borea humilis et quieta, flante adhuc mediocriter praecedente vento, in ſerenitate perfecta.

18. Lux borea valde humilis, coelo ſereno, et aëre frigeſcente.

Nouembris 13. Veſtigia lucis boreae inter nubes.

15. Veſtigia lucis boreae inter nubes iterum.

Decembris 5. Lux borea inter nubes manifeſta, flante tenui Borea, frigore mediocri.

13. Lux borea tranquilla, in ſerenitate perfecta, et frigore intenſo, 12. graduum infra o, thermometri fahrenheitiani.

23. Veſtigia lucis boreae ortum verſus, inter nubes.

24. Radii tenues lucis boreae inter nubes.

§. 4. Prima congelatio facta eſt hoc anno die 17. Octobris, eaque vniuerſalis, poſt praecedentem lucem boream, in ſerenitate perfecta. Maximum frigus huius anni incidit in diem 14. Decembris, quo, poſt perfectam ſerenitatem mane hora 7. thermometrum fahrenheitianum deſcendit vsque ad 13 gradus infra o, flante forti Borea.

 Frigus

Frigus praeterea paullo minus acre experti sumus hoc anno diebus Ianuarii 2, 9, 11. Martii 2. Decembris 3, 13, 15, qui omnes dies thermometrum modo dictum ad minimum in gradu 0 depressum tenuerunt. Aprilis diebus 21, 22, et 23, post longam degelationem nouae inciderunt congelationes matutinae ad gradus 29 thermometri fahrenheitiani; idem accidit adhuc Maii diebus 2, 5 et 9, in quorum vltimo omnis tellus recenti niue tecta erat. Calorem aestati debitum vix sensimus ante diem 25 Iunii, quo thermometrum fahrenheitianum, aëri vmbroso expositum, monstrauit gradus 80. Idem ostendit quoque libero soli expositum, tempore postmeridiano sequentia:

Aprilis	6	- - - - -	68. gradus.
Maii	31.	- - - - -	107.
Iunii	26	- - - - -	101.
Iulii	13	- - - - -	105.

§. 5. Tonitrua audita fuerunt hoc anno, Aprilis 28. Iunii 8, 9, 15, 18, 19. Iulii 1, 2, 3, 10, 17, 21, 25. Fulgura sola visa sunt Februarii 12, hora 8 vespertina, ex relatione aliorum, coelo nubibus obducto, flante mediocri Austro-Zephyro; nec non Decembris 9, hora 10 nocturna; ipse vero talia vidi Decembris 18, hora 8 nocturna, coelo nubilo, et aëre quieto. Coruscationes porro apparuerunt Iunii 27, hora 11 nocturna, Austro-Eurum versus; et hac nocte circa Pragam in Bohemia grauis tempestas exorta fuit, qua duodecim Galli fulmine icti sunt, testibus nouis publicis; Iulii 21 hora 9 nocturna frequentes et amplae ortum versus; et Iulii 22 cum perfecta serenitas esset.

§. 6.

§. 6. Altitudines pluuiarum, et niuium liquefactarum, ex obseruationibus Clariss. *Richmanni* hoc anno fuerunt sequentes, in pollicibus et partibus centesimis pedis londinensis.

1742.	Ianuarius	- - -	1. 43.
	Februarius	- - -	0. 62.
	Martius	- - -	1. 25.
	Aprilis	- - -	0. 75.
	Maius	- - -	2. 57.
	Iunius	- - -	7. 85.
	Iulius	- - -	2. 99.
	Augustus	- - -	1. 52.
	September	- - -	1. 88.
	October	- - -	1. 55.
	Nouember	- - -	1. 64.
	December	- - -	1. 04.
		summa	25. 09.

§. 7. Ventos vehementes experti sumus hoc anno diebus sequentibus: Ianuarii 17, 18, 23, 24, 26, 28, 29. Februarii 3, 7. Martii 5, 6, 9, 10, 11, 13, 27, 28. Maii 1, 3, 4, 6, 13, 14, 15, 16, 17, 23, 24. Iunii 2, 5, 22. Iulii 7, 25. Augusti 12, 13, 31. Septembris 15. Octobris 2, 14, 15, 20, 21, 23, 24, 25, 28, 29. Nouembris 26, 27. Decembris 3, 4, 11, 13, 22, 23, 24, 30, 31. Inter hos procellae furentes fuerunt diebus Maii 3, 15. Iulii 25. Octobris 2, 15, 23, 24. Decembris 24. Nebulae insignes obortae sunt Ianuarii 1. Februarii 5, 10, 16. Martii 16. Augusti

12. Septembris 28. Octobris 8. Nouembris 5. Decembris 11, 14, 16. Primae denique hirundines visae sunt Maii 14.

§. 8. Halones circa Lunam conspectae fuerunt Ianuarii 11. Augusti 9. Nouembris 27, et Decembris 24. Iridis segmenta apparuerunt, sine pluuia, Iulii 13, integrae vero, et ordinariae Iulii 21, et Augusti 14. Grando praecipitans et horrida, qua omnis tellus obtecta fuit, cecidit Iunii 9, in qua magnum vidi numerum granorum, quae nucis auellanae magnitudinem superabant; cum per aliquot dies antecedentes venti omnes siluissent, durante grandine Boreas mediocris exortus est. *Aliae* minores grandines secutae sunt Augusti 14, sine vento comitante, et Septembris 15, flante mediocri Austro-Zephyro.

OBSER-

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE,

INSTITVTAE PETROPOLI ANNO 1743,

AVCTORE

Georgio Wolffg. Krafft.

§ 1.

Currente hoc anno 1743. obferuatae fuerunt a me altitudines barometri fimplicis, et hucusque ad hos vfus vocati, fingulis menfibus maximae et minimae, fequentes; in quibus, vti hucufque folitus fum, numeris ante punctum pofitis denoto partes duodecimas, fiue pollices pedis londinenfis; numeris autem poft punctum defigno horum pollicum partes centefimas.

			max.		min.		diff.
1743	Ianuar.	—	30. 06	—	28. 58	—	1. 48
	Febr.	—	30. 33	—	28. 95	—	1. 38
	Mart.	—	29. 93	—	28. 84	—	1. 09
	Aprilis.	—	30. 25	—	29. 30	—	1. 22
	Maius	—	30. 04	—	28. 94	—	1. 10
	Iunius	—	29. 70	—	29. 10	—	0. 60
	Iulius	—	29. 85	—	28. 98	—	0. 87
	Auguft	—	29. 92	—	29. 10	—	0. 82
	Sept.	—	29. 92	—	29. 09	—	0. 83
	Octob.	—	30. 60	—	29. 22	—	1. 38

Nov.

Nov.	—	30. 13	—	28. 64	—	1. 49
Dec.	—	30. 40	—	28. 66	—	1. 74

§. 2. Apparet ex his altitudinibus barometri, earum maximam hoc anno fuisse 30. 60, quae obseruata fuit die 13. Octobris, tempore matutino, in perfecta serenitate, cum nebulis, et leui congelatione, spirante mediocri Euro. Quia autem haec altitudo maxima illam, quae anno 1737. obseruata fuit 30. 95, non excedit: haec etiamnunc manet omnium hic loci obseruatarum maxima. Minima barometri altitudo fuit hoc anno 28. 58, obseruata die 28. Ianuarii, tempore matutino, cadente impetuosa niue, et flante fortissimo Austro-Zephyro, in frigore leuissimo. Quae igitur minima altitudo huius anni, cum inuentam in praecedentibus annis, nempe 28. 18, superet: manet adhuc idem spatium variationum barometricarum antea stabilitum, nimirum 2. 77; suntque etiam adhuc variationes menstruae in primis et vltimis anni mensibus maiores, minores autem in mediis.

§. 3. Auroras Boreales hoc anno obseruaui sequentes:

1743. Martii 9. Lux borealis constans inferne, sed superne multis variantibus faculis ludens.

10. Lux borealis humilis et quieta.

Aprilis 1. Lux borea, pluribus radiis ex oriente ascendentibus illustris.

9. Lux borealis humilis, et paucis radiis eminens.

17. Lux borealis eleuata, inordinata, et debilis.

Augusti 21. Lux borealis.

Nouemb. 2. Vestigia lucis borealis inter nubes paullo diuisas.

§. 4. Prima congelatio facta est hoc anno d. 19. Septembris, eaque vniuersalis, coelo nubilo. Maximum frigus huius anni incidit in diem 21. Decembris, quo in serenitate perfecta, mane, hora 9, thermometrum fahrenheit. descendit vsque ad gradus 8. infra 0, nullo flante vento. Frigus praeterea paullo minus acre experti sumus hoc anno diebus 28. Februarii, 5. 15. 17. 18. 19. 20. 22. 23. 27. 28. Decembris, qui omnes dies thermometrum modo dictum ad minimum in gradu 0. depressum tenuerunt. Maximus calor fuit d. 19. Iunii, ostendente thermometro fahrenh. gradus 86. in loco vmbroso.

§. 5. Tonitrua audita fuerunt hoc anno Aprilis 21. Maii 29. Iunii 7. 10. 14. 18. 19. 25. 29. Iulii 8. 26. Augusti 7.

§. 6. Altitudines pluuiarum et niuium liquefactarum ex obseruationibus Clar. *Richmanni* hoc anno fuerunt sequentes, in pollicibus et partibus centesimis pedis londinensis.

1743.	Ianuarius	- - - -	1. 28.
	Februarius	- - - -	0. 74.
	Martius	- - - -	1. 49.
	Aprilis	- - - -	2. 18.
	Maius	- - - -	0. 74.
	Iunius	- - - -	3. 43.
	Iulius	- - - -	1. 85.
	Augustus	- - - -	2. 33.
	September	- - - -	1. 58.
	October	- - - -	0. 86.
	Nouember	- - - -	1. 88.
	December	- - - -	2. 27.
		Summa	20. 63.

§. 7. Ventos vehementes experti fimus hoc anno diebus fequentibus. Ianuarii 3. 4. 7. 8. 13. 28. 30. Februarii 2. 12. 15. 16, 24. Martii 6. 16. 18. 20. 29. Aprilis 4. 9. 15. 21. 26. Maii 3. 10. 11. 12. 15. 16. 17. 18. 19. 25. Iulii 18. 26. Augusti 26. 28. Septembris 4. 5. 11. 15. 16. Octobris 4. 25. Nouembris 1. 2. 3. 4. 8. 14. 16. 23. 28. Decembris 1. 11. 24. 25. Inter hos procellae furentes fuerunt diebus Ianuarii 4. 7. 8. 28. Februarii 15. Martii 20. Maii 3. 10. 19. Augusti 26. 28. Nouembris 1. 2. Decembris 1. 24. Nebulae infignes obortae funt Maii 25. 26. 27. Septembris 30. Octobris 13. 14. Nouembris 7. 8. 23. 24. Decembris 8. 20. 22. Primae denique hirundines vifae funt Maii 2.

§. 8.

§. 8. Halones circa Lunam conspectae fuerunt Nouembris 16. Decembris 21. Irides apparuerunt Iunii 29, semihorii fere spatio, duplex, cum tertia valde debili, et ex vna tantum parte conspicua. Iulii 26. Grandines mediocres ceciderunt Februarii 16. sine vento, Iunii 29. flante mediocri vento. Cometes denique hoc anno apparuit, Viennae in Austria primum visus d. 23. Decembris, cuius cursum obseruatum Clariss. *Heinsius* in peculiari tractatu, germanice hic edito, descripsit.

DE DENSITATE METALLORVM SECVM PERMIXTORVM.

AVCTORE
G. W. Krafft.

§. 1.

Duo sunt *hydrostatices* problemata praecipua, quae et amoenitate, et singulari vtilitate, eminent; vnum *dati corporis cuiuscunque densitatem comparare cum densitate aquae, fluidiue alterius*; alterum *ex datis voluminibus et ponderibus simplicium duorum, aut pro lubitu plurium, in mixtum aliquod ingredientium, praedicere densitatem mixti futuram.* Vtrumque duplici nititur fundamento; primo, *pondera, seu massas, duorum quorumuis corporum esse in ratione composita densitatum atque voluminum*; altero, *corpus quodcunque solidum, immissum vasi aqua penitus repleto, expellere tantundem aquae ex hoc vase, quantum voluminis ipsum occupat.*

§. 2. Hoc vtroque principio adiutus, dicitur *Archimedes*, cui tota haec theoria debetur, subtili ratione detexisse argenti per fraudem auro admisti mensuram in corona votiua *Hieronis*, Syracusanorum regis, quod primus testatur *Vitruuius*, lib. IX. cap. 3. addens, regem primo aduertisse fraudem *ex indicio facto*, quae verba *Perraltus*, in notis ad suam versionem Gallicam *Vitruuii*, interpretatur per *lapidem lydium*. Sed inueniuntur plurimi auctores, *Marinus Ghetaldus*, in Archimede promoto, Prop. 1. *Galilaeus*; *Cabaeus*, *Ioh. Bapt. Hodierna*, in suo Archimechimede rediuiuo, et praecipue P. *Petit*, Burbonius, qui hanc praxin *Archimedis* in dubium vocarunt, immo negarunt; et hic vltimus quidem in libro anno 1634. edito, Parisiis, cui titulus: *L'usage, ou le moien, de pratiquer par une regle toutes les operations du compas de proportion*, &c. vtpote minus exactam, et diligentia tanti Geometrae indignam, ob insuperabilem difficultatem colligendi accurate aquae sic redundantis copiam; existimaueritque *Archimedem* coronae in media aqua suspensae pondus examinasse, neglecta aqua ex huius immersione effluente, aut altius ascendente; in testimonium suae sententiae adducens versus *Rhemnii Fannii*, poëtae, qui seculo quarto claruit, atque in Carmine, *de Ponderibus et Mensuris*, cap. 4, hoc *Archimedis* inuentum describens, ait:

Argentique meri par pondus, idemque sub vnda,
Lancibus impositum, specta.

§. 3. Cum igitur facile omnino credi possit, *Archimedem*, posthabito altero horum principiorum, selegisse aliud atque in vsum vocasse, quod liber ipsius, *de insidentibus humido*, superstes adhuc, abunde docet: subrogatur in huius locum tertium adhuc principium, hodie vsitatissimum, et, ob exactam sui mensuram, priori multo praeferendum, nempe, *iacturas, quas corpora quaecunque solida, eidem fluido immersa, patiuntur, tenere inter se rationem voluminum corporum immersorum*. Quod et ex principio priori secundo facile deducitur, et experimentis insuper, accurate institutis, perfecte comprobatur. Cum igitur, proportionibus in aequationes mutatis, et positis corporis alicuius pondere in vacuo $= P$, volumine $= V$, densitate $= D$, et iactura ponderis in aqua $= A$, sit per princip. I. $P = DV$; erit $\frac{P}{V} = D$; sed quia per princip. III. est $V = A$, erit etiam $\frac{P}{A} = D$. Quae methodus densitates corporum solidorum inuestigandi, hodie recepta, et, vt videtur, post *Archimedem* recens introducta, tribuenda putatur *Hauksbeio*, vid. *Harrisii Lexicon Technicum*, vol. II. tit. Hydrostatiks; qui nempe vir experientissimus commoda primus in hunc vsum instrumenta excogitauit, bilances scilicet, et reliquum apparatum, a celeberrimis *Grauesandio* et *Musschenbroekio* descriptum. Aliam vero viam ingressus est magnus ille scientiarum restaurator *Verulamius*, paratis sibi cubo aureo, vnciam pendente, et vasculo, cubum hunc exacte capiente; quod vasculum deinde impleuit, aut aliis cubis diuersorum corporum solidorum, aut infusis fluidis, et pulueribus; hasque materias omnes, ita sub vnum volumen reductas, bilance examinauit, sicque tabulam densitatum concinnauit in *Phaenomenorum vniuersi* pag. 694. Patet enim facile ex modo dictis, si V fuerit constans, esse $D = P$. Sed simul etiam perspectum est artificibus, quam difficulter parari possint et cubus, et vasculum cubicum, quae omni huc necessaria exactitudine ad amussim sint praedita; et quam anceps sit impleri tale vasculum fluido, sic, vt datum semper contineat volumen.

§. 4. Ex his itaque principiis soluuntur omnia problemata huc spectantia; et alterum quidem superius adductorum hunc in modum, quem, vt in subsequentibus exemplis nihil dubii supersit, paullo distinctius exponam. Sint tria simplicia X, Y, Z, ingredientia mistum aliquod M, et concipiatur simul aquae purae portio aliqua quaecunque; ponantur corporis densioris X pondus $= P$, volumen

men $= V$, iactura ponderis, quam in aqua patitur, $= A$, densitas $= D$; sintque his respectiue analoga in corpore Y, minus denso p, v, a, d, in corpore Z, adhuc minus denso, $\pi, \Phi, \alpha, \delta$, et in aqua e, f, g, b; atque erit ex his mixti pondus $= P + p + \pi$, volumen $= V + v + \Phi$; iactura, quam in aqua patitur, sit $= x$, densitas $= y$. Igitur per princip. I. erit $P + p + \pi : e = (V + v + \Phi) y : bf$; sed per princip. III. est $V + v + \Phi : f = x : g$; ergo erit $P + p + \pi : e = xy : gb$; aut $\frac{P+p+\pi}{x} : \frac{e}{g} = y : b$. (1.) Est vero etiam $V : V + v + \Phi = A : x$, per idem princip. III. hinc $x = \frac{AV + Av + A\Phi}{V}$; porro ex eodem principio sunt $Av = aV$; $A\Phi = \alpha V$; hinc, substitutis his, prodit $x = A + a + \alpha$, quod substitutum in proportione (1.) mutat eam in hanc sequentem $\frac{P+p+\pi}{A+a+\alpha} : \frac{e}{g} = y : b$; in hac assumitur densitas aquae $b = 1$; et quoniam iactura aquae intra aquam positae omne ipsius pondus exhaurit, erit $g = e$, aut $\frac{e}{g} = 1$; ex quo fit $\frac{P+p+\pi}{A+a+\alpha} : 1 = y : 1$, aut $y = \frac{P+p+\pi}{A+a+\alpha}$ = densitati corporis mixti. Sin igitur ingredientia tantum fuerint duo, erit densitas mixti $\frac{P+p}{A+a}$; vel etiam, si densitas aquae non assumatur pro vnitate, erit densitas mixti ex tribus ingredientibus $= \frac{b(P+p+\pi)}{A+a+\alpha}$, ex duobus $= \frac{b(P+p)}{A+a}$.

§. 5. Sed inuersum huius problematis solui nec in vnico quidem casu potest. Sint enim duo ingredientia, quorum pondera X, Y, et volumina x, y, quaerantur ex datis mixti pondere M, et volumine m; erunt in hac quaestione quatuor incognitae X, Y, x, y, sed non nisi

nisi duae aequationes quaestionis naturam exprimentes, nempe $X + Y = M$, et $x + y = m$; vnde patet, problema hoc esse indeterminatum; et multo magis tale, si quaestio instituatur de ingredientibus pluribus quam duobus. Sin autem adiiciatur noua aliqua conditio cognita, qualis ex. gr. sit, natura ingredientium, hoc est, ipsorum densitas, tunc problema in vnico tantum casu fit determinatum, sed in omnibus reliquis manet insolubile Sint enim ingredientium sex, pondera X, Y, Z, T, V, W; volumina respectiua x, y, z, t, v, w, naturae, vel densitates, cognitae relatiuae a, b, c, d, e, f; mixti dati pondus M, volumen m; non poterunt ex his erui plures aequationes quam octo, cum incognitae adsint duodecim, quae aequationes sunt,

$$X + Y + Z + T + V + W = M.$$
$$x + y + z + t + v + w = m.$$
$$\frac{X}{x} = a \cdot \frac{Y}{y} = b \cdot \frac{Z}{z} = c.$$
$$\frac{T}{t} = d \cdot \frac{V}{v} = e \cdot \frac{W}{w} = f.$$

Et leui quidem adhibita attentione patet in genere, si numerus incognitarum in tali problemate fuerit n, aequationum, ex natura quaestionis eruendarum, numerum fore $\frac{n+4}{2}$; vt igitur quaestio fiat determinata, ex Algebrae legibus debet esse $n = \frac{n+4}{2}$, hoc est, $n = 4$; quare hoc problema in eo solo casu acquirit circumstantias definitiuas, in quo adsunt quatuor incognitae, vel duo ingredientia, quorum cognita est natura; vtpote cui casui inseruiunt aequationes $X + Y = M$; $x + y = m$; $\frac{X}{x} = a$; $\frac{Y}{y} = b$; et quarum ope oriuntur valores sequentes, $X = \frac{a(M-bm)}{a-b}$, $x = \frac{M-bm}{a-b}$; $Y = \frac{b(am-M)}{a-b}$; $y = \frac{am-M}{a-b}$. In omnibus

aliis

aliis casibus vna, aut plures, nouae circumstantiae praesto esse debent, vt problema fiat determinatum; vti ex. gr. in casu trium ingredientium, data esse insuper possunt, aut pondus vnius ingredientis; aut volumen alterutrius; aut ratio duorum ponderum inter se. Vnde iure meritoque statuit *Tacquetus*, in arithmeticae lib. IV. cap. 4. pag. 395: *si detur mixtum ex metallis tribus aut pluribus: nullo artificio deprehendi poterit, qua proportione sint commixta; quod ea possint infinities variari*; subintellige autem artificio *hydrostatico*, non *chymico*.

§. 6. Est tamen methodus aliqua, determinandi pondera et volumina trium ingredientium, ex cognitis pondere et volumine mixti, naturaque ingredientium, tam speciosa, vt ea et mihi, et aliis perspicacioribus, aliquamdiu illuserit, et alios adhuc etiam in posterum sine dubio fallere possit, nisi fraus ipsius detegatur. Hanc, vti ab initio mihi in mentem venit, candide exponam. Statuam, esse mixtum aliquod ex metallis tribus, quae sint I. II. III. Sit mixti pondus $= P$; atque sint duo diuersa fluida M et N, in quibus iactura ponderis huius mixti examinetur; et sit quidem iactura haec in fluido $M = p$, in fluido $N = \pi$. Deinde metalli I. pondus P perdat in $M = a$, in $N = \alpha$; metalli II. pondus P perdat in M $= b$, in $N = \beta$; metalli III. pondus P perdat in M $= c$, in $N = \gamma$; atque insit mixto metalli I. pondus $= x$; $II = y$; $III = z$; quoniam ergo sunt iacturae ponderis, in eodem fluido, vti volumina ponderum; et volumina eiusdem ingredientis vti pondera: statui poterunt aequationes sequentes; in fluido M est pro metallo I, $P : a = x : \frac{ax}{P}$; pro metallo II. $P : b = y : \frac{by}{P}$; pro me-

 tallo

tallo III. $P : c = z : \frac{cz}{P}$; ſunt ergo omnes hae tres iacturae ſimul ſumtae $\frac{ax+by+cz}{P}$ aequales iacturae mixti p; vnde prodit aequatio prima talis, $ax+by+cz=Pp$. In fluido autem N pariter eſt pro metallo I, $P: \alpha = x : \frac{\alpha x}{P}$; pro metallo II. $P : \beta = y : \frac{\beta y}{P}$; pro metallo III. $P : \gamma = z : \frac{\gamma z}{P}$; vnde eodem iure fiet aequatio ſecunda $\alpha x + \beta y + \gamma z = P\pi$; tertia autem aequatio ſua ſponte fluit, nempe $x+y+z=P$; igitur ex his tribus aequationibus tres incognitae poterunt determinari ex regulis algebrae, conſequenter eſt problema propoſitum determinatum. Sed manifeſtae ſiunt hae offuciae, ſi perpendatur theorema *hydroſtaticum*, quo certum eſt, iacturas ponderis eiusdem maſſae, factas in diuerſis fluidis, eſſe in ratione denſitatum eorundem fluidorum. Sint ergo fluidorum M et N denſitates m et n; atque erit $a:\alpha=m:n$; $b:\beta=m:n$; $c:\gamma=m:n$; $p:\pi=m:n$; conſequenter erit $\alpha = \frac{na}{m}$; $\beta = \frac{nb}{m}$; $\gamma = \frac{nc}{m}$; $\pi = \frac{np}{m}$; qui valores ſubſtituti in aequatione $\alpha x + \beta y + \gamma z = P\pi$, reddunt primam ipſiſſimam $ax+by+cz=Pp$; ita vt duae hae aequationes, non re ipſa, ſed ſola ſimulatione alterius, appareant diuerſae; quare duae ſolum ſuperſunt aequationes reales, ex quibus adeo problema trium incognitarum manet indeterminatum.

§. 7. Supereſt alia adhuc conſideratio, quae iubere videtur vt et aëris, in quo corpora ponderamus, ratio habeatur, ſi denſitatem eorum, quantum licet, exactam obtinere velimus. Amittunt enim in äere quoque aliquid ſui ponderis corpora, quod facile ad calculum reuocari poteſt. Sit igitur corporis alicuius pondus abſolutum, quod

quod nempe habiturum esset in vacuo, $= P$; volumen $= V$; pondus in äere $= f$; densitas äeris $= \alpha$; pondus in aqua $= g$, densitas aquae $= 1$; atque erit iactura ponderis in äere $= \alpha V$, in aqua $= V$; et consequenter $f = P - \alpha V$; $g = P - V$; ex quibus duabus aequationibus eruitur $P = \frac{f - \alpha g}{1 - \alpha}$, et $V = \frac{f - g}{1 - \alpha}$; posita autem densitate aquae $= 1$, et iactura ponderis in aqua $= A$, est densitas corporis $= \frac{P}{A}$, et hic est $A = V = \frac{f - g}{1 - \alpha}$; hinc correcta corporis cuiusuis densitas erit $= \frac{f - \alpha g}{f - g} = \frac{f - \frac{1}{800} g}{f - g}$, quia densitas aquae est ad densitatem äeris $= 800 : 1$. Sed cum animaduertissem, differentiam densitatum hinc oriundarum, in corporibus minutis qualia adhibuimus, vix esse sensibilem: hanc methodum non adhibui, sed ordinariam secutus sum, negligendo illud ponduſculum, quod in äere amittunt corpora.

§. 8. Cum itaque nobis liceat haec duo facile efficere, *praedicere quaenam densitas oritura sit ex datis quibusdam ingredientibus*; et deinde, *densitam hanc ipsam, in mixto ortam, explorare ex regulis hydrostaticis*; vt pateat, an praedictioni respondeat euentus, nec ne: hinc campus latissimus hic aperitur *theoriam* hanc cum *experientia* comparandi, praesertim in metallis et semimetallis. Quem laborem, mihi quidem iucundissimum, cum ex parte aliqua in me recepi, feci id hortatu viri Perillustris, *Vincenti Raiseri*, Augustae redituum metallicorum Vice-Praesidis, scientiarum patroni, et rerum naturae sagacissimi. Versatus autem in solis metallis, illisque occupatus fui fere per totam aestatem anni 1742. Ingredientia mihi paraui tam pura ac licuit, eorumque, an-

 tequam

tequam colliquefacta fuerint, pondera sollicite examinaui in bilance exactissima tali, quam celeberrimus, dum viueret, *Grauesandius* descripsit in *Physices Elementis mathematicis*, pag. 201. Edit. 1725, vocauitque *bilancem hydrostaticam*; et haec pondera expressi in granis eiusmodi, quorum 7680 faciunt libram amstelodamensem; vbi quidem mihi satis facile licuit etiam quadrantem talis grani in bilance annotare. Praeter caeteras circumstantias, harum rerum peritis abunde notas, adhibui aquam, fluuialem quidem, sed eam semper fere ad eundem gradum thermometri calentem, nempe ad 48 *fahrenheitianum*; quanquam hanc cautelam non adeo necessariam deprehendi, cum aucto ex industria aquae huius aliquando calore, vsque ad gradum 56, vix sensibilem ponderis mutationem obseruaui in corpore intra talem aquam suspenso. Deinde, vt ne aëris bullae adhaereant corporibus submersis, quae multum nocere possunt vero ponderi inueniendo, ea quidem non calefeci, quod aliqui suadent, cum periculum exinde aucti voluminis exoriri possit; sed ea intra aquam tamdiu celeriter hinc et inde agitaui, donec nihil amplius aëris contigui deprehendi posset. Frusta ita praeparata tradidi postea Clarissimo Dom. *Gellert*, Academiae Adiuncto, qui supellectile chymica sua domestica effecit, singulari industria et diligentia, vt partes separatae in vnam colliquescerent, et commiscerentur. At vero mixta illa, quorum alterum ingrediens fuit ferrum, ideo non bene successerunt, quod ferrum impurius, multo sulphure scatens, adhibitum fuit; id quod Clariss. *Cramerus*, in sua Docimastica, aliique, iam annotauerunt.

§. 9.

§. 9. Pondus frustuli aurei erat in aëre $208\frac{3}{4}$ gr. in aqua vero 197 gr. vnde eius densitas 17, 766. Plumbi pondus erat in aëre $278\frac{1}{4}$ gr. in aqua $253\frac{3}{4}$, vnde eius densitas 11, 357. Mixtura exinde orta erat fragilis, coloris fusci, et plumbeo aliquantum nigrioris, sed ponderis 478 gr. vnde decrementum ponderis passa fuit 9 gr. quam cum in duo tantum frusta dissecare voluissem, dissiluit in plura, praecipue vero in duo reliquis maiora, quorum vnum pondus tenebat in aëre $200\frac{3}{4}$ gr. in aqua 186 gr. vnde mixti densitas 13, 610; alterius pondus in aëre erat 102 gr. in aqua $94\frac{1}{2}$ gr. vnde huius densitas 13, 600; ex quibus concludo mixturae densitatem mediam 13, 605 per experimenta; praedicenda autem ea fuisset 13, 434; quare haec duo metalla secum permixta maiorem acquirunt densitatem, quam regulae et theoria iubent. Experim. I. ☉ et ♄

§. 10. Pondus frustuli aurei erat in aëre $189\frac{1}{4}$ gr. in aqua vero $179\frac{1}{4}$ gr. siue densitas 18, 975; pondus autem frustuli argentei in aëre $273\frac{3}{4}$ gr. in aqua $247\frac{3}{4}$ gr. et densitas 10, 528. Haec dederunt mixturam plane candidam, pro argento habendam, nisi pondus obstitisset; huius pondus erat in aëre $460\frac{1}{4}$ gr. in aqua 425 gr. et densitas 12, 888, quae per theoriam debuisset esse 12, 875, decrementum ponderis in mixto est $2\frac{3}{4}$ gr. Patet ergo, quantum ex his colligere licet, aurum et argentum inter se permixta densitatem augere, sed adeo parum; vt differentia negligi possit. Neque adeo *Archimedes* sensibiliter errare potuit, dum ex huius vtriusque metalli colliquefacti explorata densitate conclusit ad vtriusque ingredientium pondera. Exper. II. ☉ et ☾

 §. 11.

Exper. III. ☉ et ♀

§ 11. Auri alia portio pondus habebat in aëre $131\frac{1}{2}$ gr. in aqua 124 gr. et densitatem 17, 533. Cupri vero iaponici frustum tenebat pondus in aëre 281 gr. in aqua 249 gr. vnde densitas eius 8, 781. Mixtum ex his facta coloris erat fere purpurei, et ponderis in aëre $409\frac{3}{4}$ gr. adeoque detrimentum ponderis ex fusione ortum $2\frac{3}{4}$ gr. pondus in aqua erat 370 gr. adeoque densitas 10, 308, quae per theoriam debuisset esse 10, 443; neque adeo haec mixtura densitatem regulae assecuta est.

Exper. IV. ☉ et ♂

§. 12. Non sine difficultate obtinuimus mixturam ex auro et ferro compositam, neque tamen eam satis aequabiliter permistam, quod color ferrugineus, in flauum sensim decrescens, indicabat in mixti interioribus. Auri tamen pondus erat in aëre $94\frac{1}{4}$ gr. in aqua $89\frac{3}{4}$ gr. et hinc densitas 20, 944. Ferrum tenebat pondus in aëre $676\frac{1}{2}$ gr. in aqua $589\frac{3}{4}$ gr. et hinc densitatem 7, 798; huius accepi scobem ponderis 120 gr. quae cum auro permista massam dedit, cuius pondus in aëre 183 gr. vnde decrementum $41\frac{1}{4}$ gr. in aqua pondus seruabat adhuc $165\frac{1}{2}$ gr. hinc densitas 10, 451, quae per regulas deberet esse 10, 802. Tenebatur hoc mixtum a magnete, vbicunque ipsi porrigebatur, ex omnibus lateribus.

Exper. V. ☉ et ♃

§. 13. Pondus frustuli aurei erat in äere 114. gr. in aqua 108, et densitas 19, 000. Stanni pondus in äere fuit 249. gr. in aqua 215. gr. vnde densitas 7, 323. Mixtum erat coloris plane argentei, sine vllo indicio auri externo, et ponderis in äere 357. gr. in aqua 317. gr. ex quo oritur decrementum ponderis 6. gr. et densitas 8, 925, quae secundum regulas deberet esse 9, 075.

§. 14

§. 14. Pondus frustuli plumbei erat in äere 146. gr. in aqua 133½ gr. vnde densitas 11,680; Argenti pondus in äere fuit 44½ gr. in aqua 40¾ gr. vnde densitas huius 10,470. Mixtum exinde ortum erat coloris ferrei paullo albicantis, cuius pondus in äere 91½ gr. in aqua 83¾ gr. et consequenter densitas 11,806, quae ex regulis deberet esse 11,373; decrementum ponderis magnum est, plumbo sine dubio adscribendum, nempe 99. gr. **Exper. VI.** ♄ et ☾

§. 15. Pondus plumbi fuit in äere 1256. gr. in aqua 1144. gr. hinc densitas 11,214. Cupri iaponici pondus fuit in äere 953. gr. in aqua 843. gr. vnde densitas 8,663. Mixti pondus inueni in äere 1813. gr. in aqua 1630. gr. vnde densitas 9,907, quae debuisset esse secundum regulas 9,950; decrementum ponderis fuit 396. gr. sed quia ingredientia bis liquefacta fuerunt, vt melius commiscerentur; sumo huius decrementi dimidium, quod est 198. gr. Mixtura, parte sui aliqua abrasa, visa est subrutila. Plumbum et ferrum, quae nunc ordine suo sequi deberent, ob difficilem horum metallorum permixtionem, non tentauimus. **Exper. VII.** ♄ et ♀ ♄ et ♂

§. 16. Pondus plumbi fuit in äere 1007. gr. in aqua 919. gr. vnde densitas 11,443. Stanni autem in äere 701½ gr. in aqua 605½ gr. hinc densitas 7,307. Mixtorum pondus erat in äere 1675¾ gr. in aqua 1494. gr. vnde densitas mixti 9,220, quae ex regulis deberet esse 9,285; color mixturae videbatur albicans, fere vt argenti; decrementum ponderis est 32¾ gr. Consentit hoc experimentum cum eo, quod instituit in Italia *Montanarius*, et relatum legitur in oratione celeberrimi *van Musschen-* **Exper. VIII.** ♄ et ♃

broek

broek praemissa experimentis Academiae del Cimento, ab ipso latine editis, pag. XXXI.

Exper. IX. ☾ et ♀ §. 17. Pondus argenti erat in äere $528\frac{3}{4}$ gr. in aqua 478. gr. hinc densitas eius 10,418.. Cupri iaponici pondus in äere 340. gr. in aqua 301. gr. vnde densitas 8,718. Mixtura exinde orta pondus tenuit in äere 858 gr. in aqua 770. gr. et consequenter densitatem 9,750, quae per regulam elicitur 9,679. Caeterum dissecta haec massa, et limae ope paullo adaequata, coloris apparuit aurei. Decrementum ponderis est $10\frac{3}{4}$. gr.

Exper. X. ☾ et ♂ §. 18. Argentum et ferrum commisceri inter se non potuerunt, etiamsi bis experimentum tentatum, et ferrum in limaturam conuersum fuit. Videbatur enim post fusionem vtramque argentum modo quasi agglutinatum ferro, termino valde distincto et tenui, sic vt vnum compositi latus magneti adhaereret optime, alterum vero oppositum plane non.

Exper. XI. ☾ et ♃ §. 19. Argenti frustum pondus habebat in äere $315\frac{1}{4}$ gr. in aqua $285\frac{1}{2}$ gr. et hinc densitatem 10,596. Stanni pondus in äere fuit $700\frac{3}{4}$ gr. in aqua $605\frac{1}{4}$, et hinc densitas 7,338. Mixti pondus erat in äere 984. gr. in aqua 863. gr. vnde eruitur densitas 8,132, quae regularum ductu deberet esse 8,111. Mixtura coloris erat magis stannei quam argentei, et sub dentium morsu paullo adhuc stridens; decrementum ponderis est 32. gr.

Exper. XII. ♀ et ♂ §. 20. Cuprum et Ferrum non potuimus permiscere, experimento bis repetito; nam magnes generosissimus, ad indicium vocatus, vnum compositi latus attrahebat, alterum vero intactum relinquebat.

§. 21.

§. 21. Cupri suecici pondus in aere fuit 465½. gr. in aqua 410. gr. et densitas 8,3870. Stanni vero pondus in aere 419¾ gr. in aqua 363¾ gr. vnde densitas 7,4573. Mixtum, bene vnitum, exinde factum, et cura summa praeparatum, praesente et dirigente Perillustri Domino *Raisero*, in laboratorio chymico collegii metallici, tenebat pondus in aere 860¾ gr. in aqua 762¼, et consequenter densitatem 8,530, quae secundum regulam deberet esse 7,919; vnde patet, decrementum ponderis fuisse 21. gr. et mixtum densius fuisse ipso cupro, ingredientium densiore; adeoque hic densitatem, quam experientia dedit, omnium maxime excedere densitatem, quam regula exhibet. Atque idem hoc etiam aliis adhuc captis experimentis comprobatum nobis fuit. Hoc augmentum densitatis in cupro et stanno, secum permistis, tam insigniter conspicuum, in caussa sine dubio est, cur id ab aliquibus chymicorum excellentium singulariter fuerit annotatum, neglectum quamuis hucusque in libris *hydrostaticis*, qui horum mistorum examina sibi vindicant, sed in solo problemate *Archimedis* explicando et enarrando acquiescunt. Ita legimus in *lexico technico Harrisii*, Tomo II. tit. Transmutatio: *Hookium*, Anglum, ex cupro et stanno secum permistis produxisse metallum cupro specifice grauius, ita quidem, vt positis grauitate specifica aquae $= 1$, cupri $= 8\frac{1}{3}$, stanni $= 7\frac{17}{35}$, esset mixti grauitas $= 8\frac{2}{5}$, quae non male congruunt cum experimento nostro. Ibidem adiicitur quoque, plura talia experimenta de mixtione metallorum descripta esse in vita *Hookii*, ipsius *Operibus posthumis* praemissa. Eiusdem huius phaenomeni meminerunt etiam *Becherus*, in tractatu germanico,

Exper. XIII. ♀ et ♃

nico, cui titulus: der Chymische Glücks-Hafen, edito anno 1682. pag. 109, sed nimium extendere videtur hoc augmentum, dum duos globulos, cupreum et stanneum, vtrumque eiusdem voluminis, fusione ad vnum praecedentium horum voluminum commixtos, summam vtriusque ponderis exaequare asserit; et Clariss. *Ioh. Iunckerus*, in *Conspectu Chymiae*, pag. 958, vbi de hac re *Glauberum* allegat.

Exper. XIV. ♂ et ♃ §. 22. Ferrum et stannum inter se non fuerunt commista; erant enim latera extrema ita heterogenea, vt eorum alterum magnes teneret fortissime, alterum vero plane non attraheret; quam quidem heterogeneitatem ipse etiam oculorum aspectus edocuit.

Exper. XV. ♄ ♀ et ♃ §. 23. Commiscuimus etiam metalla tria; atque erat in his pondus plumbi in aëre $1470\frac{1}{4}$ gr. in aqua $1339\frac{1}{2}$ gr. hinc densitas 11,205. Cupri iaponici pondus in aëre 604. gr. in aqua $534\frac{3}{8}$ gr. vnde densitas 8,690. Stanni pondus in aëre 529. gr. in aqua $456\frac{3}{4}$ gr. cuius ergo densitas 7,271. Massae huius bene permixtae totius pondus erat in aëre 2143. gr. vnde decrementum $460\frac{3}{4}$ gr. Erat autem mixtum diuisum in frusta duo, quorum vnum accepi, et obseruaui eius pondus in aëre 1016. gr. in aqua 913. gr. vnde densitas misti fuit 9,864, quam regula praebet 9,520. Multum ergo superat densitas haec actualis illam, quae secundum regulam deberet locum habere.

§. 24. Euentus hucusque descriptos breuius exponam in sequenti tabula:

Combi-

Combinationes metallorum.	Densitates ingredientium.	Densitates per regulam.	Densitates per experiment.	Differentia	Decrementum ponderis.	Experimentum.
☉ et ♄	17.766 11.357	13.434	13.605	+0.171	9 gr.	I.
☉ et ☽	18.975 10.528	12.875	12.888	+0.013	2¾	II.
♄ et ☽	11.680 10.470	11.373	11.806	+0.433	99	VI.
☽ et ♀	10.418 8.718	9.679	9.750	+0.071	10¾	IX.
☽ et ♃	10.596 7.338	8.111	8.132	+0.021	32	XI.
♀ et ♃	8.387 7.457	7.919	8.530	+0.611	21	XIII.
☉ et ♀	1[illegible].533 8.781	10.443	10.308	−0.135	2¾	III.
☉ et ♂	20.544 7.798	10.802	10.451	−0.351	31¼	IV.
☉ et ♃	19.000 7.323	9.075	8.925	−0.150	6	V.
♄ et ♀	11.214 8.663	9.950	9.907	−0.043	198	VII.
♄ et ♃	11.443 7.307	9.285	9.220	−0.065	32¾	VIII.

ex qua generalissime apparet, 1. Ferrum videri posse reddere mixturam rariorem, quia id in sola parte posteriore tabulae occurrit; 2. Argentum reddere mixturas densiores, quia id in sola parte anteriore tabulae conspicitur.

§. 25. Caussas harum secessionum a regula indicata admodum difficiles esse credo, cum requirant cognitionem metallorum intimam, et talem, qualem de ferro exposuit sagacissimus *Reaumurius*, qua deinde feliciter vsus est in explicando problemate *kempiano*, de scintillarum subito ortu, quae chalybi, silicis ope, excutiuntur; in *Commentariis Academiae scientiarum regiae parisiensis*, ad annum 1736. Id tamen agam, vt aliquot caussas excludam, de quibus facilis suspicio oriri posset, euentum hunc ipsis esse adscribendum.

§. 26. Experti ſumus, mixtum ſemper minoris fuiſſe ponderis, quam quod tenebat ſumma vtriusque ingredientium; et aurum quidem, cum argento miſtum, quam minimum detrimenti huius dediſſe, ſimulque etiam quam minimum a denſitate regulari deuiaſſe. Conſtat deinde etiam experimentis certiſſimis, et multa cura inſtitutis, metalla, in fuſione aliquamdiu ſeruata, ſtannum praecipue, cuprum, et plumbum, ponderis augmentum acquirere ſenſibile. Non itaque ſine ratione in opinionem adducimur, ex ſolo ingredientium orto incremento vel decremento ponderis omnes effectus hucusque enumeratos explicari poſſe. Quam ſententiam vt examinare queam, pono metallorum ingredientium pondus, volumen, et denſitatem, denſioris quidem P, V, D, rarioris p, v, d, decrementa ponderum in denſiore m, in rariore n. Facta igitur commixtione, erit in compoſito metalli pondus denſioris $= P - m$; rarioris $= p - n$; quorum illud ſibi expoſcit volumen $V - \frac{mV}{P}$; hoc vero $v - \frac{nv}{p}$; ex his deducitur denſitas mixti $= \frac{P + p - m - n}{V + v - \frac{mV}{P} - \frac{nv}{p}}$.

Sit igitur denſitas mixti actualis obſeruata $= a$, detrimentum ponderis in mixto, etiam obſeruatum, $= b$; habebuntur hae duae aequationes, $\frac{P + p - m - n}{V + v - \frac{mV}{P} - \frac{nv}{p}} = a$, et $m + n = b$. Ex quibus elicitur valor ipſius $m = \frac{P + p - b - aV - av + \frac{abv}{p}}{\frac{av}{p} - \frac{aV}{P}}$; eſt autem $P = DV$; $p = dv$; $\frac{v}{p} = \frac{1}{d}$; $\frac{V}{P} = \frac{1}{D}$; ergo elicitur ex factis ſubſtitutionibus his valor ipſius $m = \frac{(D - a) DVd + (a - d)(bD - Ddv)}{a (D - d)}$; ſubſtituantur

antur hic rurſus valores ipſorum DV et dv, qui ſunt P et p, atque obtinebitur ſic $m = \frac{(D-a)Pd-(a-d)(p-b)D}{a(D-a)}$. Applicando nunc hanc expreſſionem ad experim. XI. de ☽ et ♃ fit $D = 10.596$, $a = 8,132$; $P = 315\frac{1}{4}$; $d = 7.338$; $p = 700\frac{3}{4}$; $b = 32$; atque ex his deducitur quamproxime $m = 3.07$ gr. $n = 28.93$. gr. Sin itaque in hoc caſu ſtatuatur argentum paſſum fuiſſe decrementum 3.07. gr. et ſtannum 28.93. gr. explicari poterit et denſitas mixti aucta, et detrimentum ponderis in eo factum, per hypotheſin hanc ſatis probabilem. Sed applicando eandem hanc formulam ad caſum experimenti XIII. de ♀ et ♃; oriuntur $m = -473$. gr. $n = 494$. gr. quod detrimentum ponderis negatiuum in cupro indicat, ipſi augmentum acceſſiſſe ponderis 473. gr. ſtannum vero paſſum fuiſſe detrimentum 494. gr. Cum itaque ſtanni ingredientis pondus tantum fuit $419\frac{1}{2}$. gr. debuiſſet in mixto adfuiſſe pondus ſtanni $-74\frac{1}{2}$. gr. quod abſurdum eſt; vt praeteream, augmentum cupri ex $465\frac{1}{2}$. gr. ad $938\frac{1}{2}$. gr. eſſe incredibile. Quoniam igitur haec explicatio vni ſoli phaenomeno manifeſtiſſime contrariatur: nulli recte explicando ſufficiet.

§. 27. Altera ratio, quae in ſubſidium vocari poſſe videtur, haec eſt: metalli denſioris aliquid ſubintrare, durante fuſione, poros metalli rarioris, ita tamen, vt exinde huius volumen non augeatur, ſed accepta ponduſcula libere, et ſine facta extenſione ſui, intra ſe contineat. Sint igitur denuo eaedem denominationes, quae ante; atque inſuper illa portio metalli denſioris, quae rarioris poros ingreſſa eſt, ſit $= \alpha$; erit igitur iam mixtum compoſitum ex metallo denſiori, cuius pondus $= P - \alpha$ volumen

lumen $= V - \frac{\alpha V}{P}$; et rariori, cuius pondus $= p + \alpha$, et volumen pristinum $= v$; vnde densitas mixti oritur $\frac{P+p}{V+v-\frac{\alpha V}{P}}$, quae semper erit maior quam densitas regulae ordinariae $\frac{P+p}{V+v}$, quoniam ibi denominator fractionis minor est quam hic, et numeratores vtrinque sunt iidem. Ergo hinc explicari nequit, quo pacto metalla quaedam, post fusionem permista, fiant rariora. Idem inconueniens prodit, si portio α transire ponatur ex rariori in densius; fit enim sic densitas mixti $= \frac{P+p}{V+v-\frac{\alpha v}{p}}$, quae eodem incommodo premitur ac praecedens.

§. 28. Videamus igitur quid exspectandum sit ab vtriusque huius explicationis combinatione. Sint hunc in finem denominationes adhuc eaedem, quae antea; atque erit in composito pondus metalli densioris $= P - m + \alpha$, sub volumine $V - \frac{m+\alpha}{P} V$; pondus metalli rarioris $P - n + \alpha$, sub volumine $v - \frac{nv}{p}$, quia α supponitur non mutare volumen metalli rarioris; igitur densitas huius mixti erit $\frac{P+p-m-n}{V+v-\frac{m+\alpha}{P}V-\frac{nv}{p}} = a$, vnde eadem methodo, qua prius, (§. 26.) deducitur $m = \frac{(D-a)Pd-(a-d)(p-b)D}{a(D-d)} + \frac{\alpha d}{D-d}$; sin autem statuatur pondus α transire ex metallo rariori in densius, eruetur, methodo hucusque adhibita, $n = \frac{(D-a)Pd-(a-d)(p-b)D}{a(D-d)} + \frac{\alpha D}{D-d}$; sed primum membrum vtriusque huius valoris plane idem est cum illo valore ipsius m, qui antea (§. 26.) inuentus fuit. Vnde patet,

pro

pro determinanda m, in hoc casu, adiici adhuc debere valori ipsius m prius inuento quantitatem aut $\frac{\alpha d}{D-d}$, aut $\frac{\alpha D}{D-d}$; in casu ergo experimenti XIII, in quo erat $m = -473$ gr, erit eadem nunc hac hypothesi $= -473 + \frac{\alpha d}{D-d} = -743 + \frac{7457 \cdot \alpha}{930} = -473 + 481 = 8$ gr. si ponatur $\alpha = 60$ gr. Satis commode igitur per hanc hypothesin phaenomena, et hoc, et reliqua, explicantur.

§. 29. Perpendamus autem hypothesin adhuc quartam, et statuamus, 1. vtrique ingredientium metallorum aliquid ponderis decedere fusione durante; 2. ex metallo densiori transire portionem quandam in poros rarioris; et 3. hanc portionem transeuntem augere aliquantum etiam volumen metalli rarioris. Sint igitur omnes appellationes adhuc eaedem, quae ante fuerunt; atque erit iam in mixto metalli densioris pondus $= P - m - \alpha$, quod exposcit sibi volumen $= V - \frac{m+\alpha}{P} V$; metalli vero rarioris aderit pondus $= p - n + \alpha$, cuius pars $p < n$ habebit volumen $v - \frac{nv}{p}$, pars vero α augebit volumen, extensione facta, parte Φ, ita vt volumen metalli rarioris sit $= v - \frac{nv}{p} + \Phi$; erit ergo densitas mixti actualis $=$

$$\frac{P + p - m - n}{V + v - \frac{mV}{P} - \frac{\alpha V}{P} - \frac{nv}{p} + \Phi} = a,$$

quae aequatio eodem modo, vti praecedentes, tractata praebet $m = \frac{(D-a)Pd - (a-d)(p-b)D}{a(D-d)} + \frac{\alpha - \Phi D}{D-d} \times d$. In hoc igitur valore ipsius m valores ipsarum α et Φ tales assumi multis modis possunt, vt et ipsi fidem inuenire queant, et deinde ipsam m producant credibilem. Ita in experim.

XIII.

XIII. Si numeris rotundis assumantur data $P = 465$ gr. $D = 8\frac{2}{5}$, $p = 419$ gr. $d = 7\frac{2}{5}$; $b = 21$ gr. $a = 8\frac{1}{2}$; et statuantur $\alpha = 65$ gr. $\Phi = \frac{1}{2}$, ita vt sit $\phi : v = \frac{1}{2} : \frac{p}{d} = d : 2\,p = 7\frac{2}{5} : 838 = 1 : 114$, aut vero $\Phi = \frac{1}{114}\,v$; prodibit $m = 1$ gr. quae omnia satis commode assumi possunt; vnde haec explicatio latius adhuc patet quam praecedens.

QVA

QVA RATIONE INSTRVMENTVM, QVO QVANTITAS AQVAE, CALORE ATMOSPHAERAE NATVRALI EX SVPERFICIE AQVAE CERTA IN AEREM ELEVATAE, COMMODE MENSVRATVR, CONSTRVI DEBEAT.

AVCTORE
G. W. Richmann.

1.

Fiat vas ligneum cylindricum robustis annulis ferreis compaginatum, cuius sectio verticalis sit C A O B D, vel instar doliorum in medio in ventrem abiens. Vas quidem cuiusuis figurae etiam quadrangularis eligi potest, figura tamen cylindrica vel quomodocunque rotunda ligneis praesertim vasis magis conuenit. Vasa einim talia durabiliora esse, quadrangnlarium vero compagem facile solvi, vsu compertum est. Tab. III. Fig. 2.

2. Diameter cauitatis vasis A B sit 20 digitorum, plus vel minus et altitudo A C cauitatis quinque circiter digitorum plus vel minus.

3. Interna et externa vasis superficies pice bene obducatur, instar doliorum quibus cereuisia asseruatur, talique ratione contra aëris iniurias defendatur. Potest etiam interna superficies plumbeis laminis loco picis obduci.

4. Vas circa basin pertusum et Epistomio C praeditum sit, vt aquae, si requiratur, exitus concedi possit.

5. Operculum A O B construatur, quod in medio sit eleuatum ita, vt pluuia commode defluere possit, et im-

ponatur vasi. In *q* perforetur, vt aëri liber aditus et exitus per foramen pateat.

6. In medio operculi A O B sit foramen quadrangulare, quod canalem plumbeum quadrangularem O P S R cuius lumen 25 digitorum quadratorum sit et altitudo quinque digitorum ferme, recipiat. Canalis huius extremitas vna O R habeat marginem, ne foramini quadrangulari operculi immissus, cadat, sed operculo bene fulciatur, altera extremitas tantum non attingat fundum vasis.

Vt pateat, descriptum instrumentum vsui desiderato accommodatum esse.

1.) Exponatur aëri aperto in fulcimento quodam.

2.) Fac infundatur quantitas aquae prius mensurata per lumen canalis quadrangularis, sic vt circa mediam vasis altitudinem stagnet.

3.) Stet per mensem vnum expositum ita aëri vt dictum et vltimo mensis die aqua in vase remanens mensuretur.

Cum ne siccissimo quidem mense ex superficie 25 digit. quadrat. vnquam 300 dig. cub. aquae in vapores resoluantur, vt ex obseruationibus variis constitit, et summa aquae in vase contentae ferme 800 digit. cub. sit, quantitas haec aquae mensis vnius interuallo vt in vapores abeat, non est metuendum, si vel ne gutta quidem pluuiae toto isto temporis interuallo, aquam instrumento contentam augeret. At auget pluuia quantitatem huius aquae, pluuiaeque quantitas vase hyetometrico determinatur, data superficie, in quam pluuia cadit. Haec tamen quantitas si toto mensis spatio nihil exhalaret, nunquam tanta esse potest, vt oras vasis attingens defluere valeat; per varias enim obseruationes constitit, nunquam vnius mensis interuallo vallo 300 digitos cubicos pluuiae in superficiem 25 dig. quadratorum cecidisse, quae, si omnis in vase stagnaret, ne vnius quidem digiti altitudinem obtineret. Hinc simul patet altitudinem capacitatis vasis duorum tantum digitorum esse posse. Ast ne fabro lignario negotium facessat, maior altitudo vasi tribui potest.

Cum igitur aquam initio mensis infusam mensurare possimus, antequam infundimus, et pluuiae quantitatem per vas hyetom: determinare; facili negotio quantitas aquae exhalatae innotescit, si a summa ex quantitate pluuiae, per vas hyetom: determinatae et aquae initio mensis infusae, aquae quantitas, quae sub finem mensis in vase remanet, subtrahatur. Differentia enim inter istam summam et aquam in fine mensis residuam erit quantitas aquae euaporatae ex superficie 25 degit. quadrat. quae erat determinanda.

Facile patet si tali instrumento ad inquirendam euaporationis aquae quantitatem, vtimur, non necesse esse, vt quotidie noua aqua infundatur, hinc commodum esse instrumentum.

DE VERA SIGNIFICATIONE PROCESSVVM MAMILLARIVM CEREBRI.

AVCTORE

Iosia Weitbrecht.

§. 1.

Quamuis nemo negauerit, ad distinctam rerum cognitionem, et euitandam idearum confusionem plurimum conferre, vt res quaelibet proprio nomine suo designetur; tumque, perinde esse, qualecunque nomen fuerit, dummodo, quid per illud intelligi debeat, stricte definiatur: tamen simul cauendum est, ne nomina sint incongrua aut falsa; quia saepe accidere potest, vt istiusmodi falsae denominationes falsam quoque rei ipsius ideam animis ingenerent. Sufficiat nunc ex pluribus huius peccati exemplis, qua Anatomia nobis suppeditat, allegare Processus mamillares cerebri; per quod nomen quid veteres intellexerint, et quatenus illud neruis odoratus in homine competat, partim ex historiae anatomicae fontibus, partim ex ipsa naturae contemplatione distincte explicare conabor.

§. 2. In aprico est, processuum cerebri mamillarium denominationem originem suam brutorum sectioni debere, cui certae quaedam cerebri extuberantes appendices occasionem dederant. Galenus * eas ita describit: „Cerebrum „germina (αποφυσεις) duo ad haec ipsa loca (*nares*) „spectantia habet, eaque oblonga et concaua, quae ex „anterioribus cerebri ventriculis ortum habent, et ad eam „caluariae partem, vnde nasus oritur descendunt, quo loco ossa

* Libr. de instrumento odoratus.

„ossa colatoria posita sint„. Qua quidem descriptione, vtut incompleta, siquidem illa, cum, vitulorum ouiumque cerebris conferatur, nihil verius dici potest. In his enim brutis omnino tales distincti processus (ita enim veteres anatomici latini apophyses graecorum nominare amant) a lobis cerebri anterioribus diuersi, ab anterioribus ventriculis oborti, in basi cerebri decumbentes deprehenduntur.

§. 3. Quis vero hos processus primum mamillares et papillares appellauerit, non aeque constat. Probabile est autem, temporibus Vesalii demum hoc nomen inualuisse, cum ne Guntherus * quidem Andernacensis, Vesalii Praeceptor illius meminerit, Vesalius autem iam ad consuetudinem * prouocet. Quisquis autem huius denominationis auctor fuerit; concedendum est, illam omnino cum processuum figura satis apte congruere; quippe in vitulis crassitudinem digiti indicis aequantes, vaccarum iuniorum papillis, queis Vesalio * placet aequiparare, perquam similes sunt.

* in Institut. Anatom.

* C. H. Fabr. L. IV. c. 3.

* in Examine obseru. Fallop.

§. 4. Origo, directio et terminus horum processuum effecere, vt veteres illos pro olfactus organo habuerint, et praeterea cerebri pituitam per eosdem expurgari crediderint; qua methodo autem vtrumque hoc officium praestarent, ex systemate Aristotelico quod Galenus adsciuerat, vti in eius Libro VIII. de vsu partium ampliter legi potest, explicare conati sunt. Fauebat huic opinioni interna cauitas, quae cum ventriculis ipsis per meatus singulares, quos Vesalius in Examine obseruationum Fallopianarum describit, manifesto communicant. Quae cauitas et communio vti negari nequit, ita illi expurgationi obstat, quod illa cauitas in ipsas nares non pateat; neque etiam per siphonem inflando manifestasse. Porro alii olfactus organa, vti in homine sunt, et agnouerunt, et satis diligenter descripserunt: tamen, quia ex ipsorum opinione caluariam non excederent, inter neruorum seriem referre non ausi sunt, vt Vesalius, Columbus; quod tamen iam ante illorum tempora Theophilus Protospatarius, * neglecto processuum nomine, fecerat. Alii denique non totum neruum, sed tantummodo extremitatem eius tumidulam, primum a Columbo indicatam processus mamillaris et papillaris nomine insignire maluerunt, vt Veslingius, * Bartholinus, Willisius.

* de H. C. fabrica L. IV. c. 12.

* Syntagm. Anat. c. XIV

§. 8. Ex his dissensionibus vt emergamus: liceat mentem nostram paullo distinctius exponere. Processus Galeni, quando cranio ablato aspectantur, in brutis sunt verae productiones ipsius cerebri, in huius basi anteriori caluariae incumbentes, a loborum anteriorum apicibus retusis distinctae, et vltra hos ad os cribriforme vsque exporrectae, in vitulis et ouibus crassitudinem digiti indicis aequantes, substantia medullari et corticali anfractuosa praeditae, intus cauae, cum ventriculis sui lateris singulae communicantes, sed nares versus occlusae et coecae, et vbi a loborum apicibus, elatiore loco positis, recedunt, per piam matrem in circulum fortiter reuinctae. In auersa autem facie, sublata caluariae basi nulla talis apophysis a cerebro interstincta cernitur. Sed ex sulco transuerso, qui lobum cerebri medium et anteriorem vtrinque diuidit, basis cerebri paullum emergens in corpus quoddam pyramidale efformatur, quod primo magis compressum mox vero subturgidum anteriora versus progreditur, et paullatim angustius redditum, absque vlla superficiei aequabilis distin-

distinctione terminatur, non in apophysin quandam mamillarem vti in latere auerso, sed potius in obtusam quendam et crassum apicem, qui dum in ossis ethmoidis cauitatem se insinuat, ob huius marginem recuruum, similiter adunca quadam curuitate ad latus externum flectitur. Hoc corpus quod non inepte pro radice processus mamillaris haberi potest, etiamsi in exteriori latere per leuem sulcum a lobo anteriore ceu singularis massa distinguatur, re ipsa tamen non nisi lobi anterioris basis, extremitas autem eius vera totius cerebri substantiae excrescentia est.

§. 9. Et hi quidem processus omni iure mamillares, ob rationem supra (§. 3.) ex Vesalio allatam dici queunt. At vero qui cum Galeno hanc processuum massam pro organo olfactus solo et immediato inter nares et cerebrum neruorum instar communicante habet; ille ni me omnia fallunt, a veritate aberrat.

§. 10. Nam in ista (§. 8.) cerebri basi, in corporum praedictorum pyramidalium superficie fere media veri nerui olfactorii sub habitu fasciolae medullaris, albae, lineam circiter geometricam latae, non turgidae sed planae, compressae, mollissimi excurrunt, ex pluribus radiculis medullaribus, quae e corporibus striatis emergunt, et in illo sulco transuersali quo lobum anteriorem et medium diuidi dixeram, directione opposita concurrunt, apparenter coalescentes; qui cum ad eum circiter locum peruenerunt, vbi processus in auerso latere a lobis cerebri discedunt, in illorum substantia corticali tuberosa immiscentur, ac sepeliuntur. Sunt igitur etiam in brutis nerui singulares olfactorii, a processibus Galeni, et neruis Diemerbroekianis distincti, quos, cum nec a veteribus, nec e recen-

Tab. V. fig. 1 tiorum quopiam obſeruati, vel ſaltim indicati ſint, figura exprimere tentauimus.

§ 11. Contra vero *in homine* tales cerebri productiones non dantur, quae proceſſuum mamillarium nomen ſimili modo mererentur. Nam illi anfractuum reuolutionumque apices, queis anteriores cerebri lobi ſuper oculorum-orbitis terminantur, etſi quodammodo protuberent, tamen proceſſus aut apophyſes dici nequeant, quippe illorum figura a cranii cancellis, et durae matris productionibus vnice dependet, neque locus aſſignari poteſt, quo ex cerebro excreſcant; ne dicam praeter iſtas productiones, etiam haec ipſa cerebri tubera anteriora in brutis adeſſe. Multo minus pro olfactus organo haberi queunt, dum cum naribus neutiquam communicent, et oſſi cribriformi absque vlla cohaeſione nude incumbant.

§. 12. Vera autem olfactus organa, intra cranium hominis, ſunt funiculi molles, colore, formaque tenui, et prolongata, omnino neruis reliquis maximam partem reſpondentes, hinc inter ipſos neruos merito relati, medullares, albi, vix lineolam geometricam lati, plani tamen, et latiores quam profundiores. Quorum origines, progreſſus, termini, nexus et habitus, quamnis a Veſalio * Vieuſſenio, † et Winslowio †† adeo diligenter expoſiti ſint, vt lectorem illuc ablegare, et vlteriori deſcriptione ſuperſedere queam: non poſſum tamen, quin duo admoneam.

§. 13. Primum: hos neruos non ita paullatim et ſenſim, vti Williſius, * Blancardus, † Winslowius, †† inquiunt, et Veslingius, * atque ex eo Bartholinus, † item Williſius, * Vieuſſenius † figuris ſuis exprimunt, in ma-

idem

* C. H. F. L. IV. c. 3.
† Neyrograp. L. III. c. II.
†† Exp. anat. Traité de la tête, v. 132. 133.
* l. c. C. XXI
† Anat. ref. c. XI.
†† l. c.
* C. XIV T. III. fig. 3.
† L. III. c. II. T. I.
* Cap. 1. f. 1.
† L. I. Tab. IV. V.

iorem molem et crassitudinem excrescere, sed vbi primum ex suis fibris medullaribus coaluerunt, toto itinere eandem ferme latitudinem seruare; tum vero, vbi ossi cribroso ad latera cristae galli incumbunt; mox in extremitatem illam turgidulam oualem et bulbosam (Fig. III.) intumescere; quas extremitates si quis (§. 7.) papillares aut mamillares dicere velit, me quidem facile assentientem habebit, dummodo res non ita accipiatur, ac si totus neruus istiusmodi figura gaudeat.

§. 14. Alterum neruos hos non adeo perfecte medullares esse, quin vnus et alter tractus cinereus in media longitudine transpareat, et extremum tuber ipsum faciem magis corticalem, et subcineream, fere glandulae pinealis in modum, prae se ferat.

§. 15. Haec extremitas autem tumida, oualis (§. 12.) et subcinerea (§. 13.) non nisi in cadaueribus recentissimis facile detegitur. Quin enim singulari piae membranae tunica obuoluitur, quae vna cum nerulis in ossis cribriformis foramina descendit: hinc illius membranae vasculis irretita, et accedente leuissima putredine diffluens, etiam minima vi in eleuando cerebro adhibita, a reliquo neruo abrumpitur.

§. 16. Si quaeras, quem igitur vsum isti processus in brutis praestent, et quare illis sola bruta gaudeant, homo autem destituatur, haec ratio mihi valde probabilis videtur. Suppono substantiam neruorum olfactilium adeo mollem et teneram esse, vt absque sustentaculo in longitudinem protendi nequeant. Atqui os frontis in homine iuxta cristam galli vtrinque in laquearis formam elatum, propter oculorum orbitas, vltra ossis ethmoidis laminam

 perfo-

perforatam, quae ad laquearis basin in medio complecandam concurrit, prominet; vnde euenit, vt loborum cerebri apices quoque super hac basi in anteriora exporrecti, ipsum os cribriforme obtegant. Nerui igitur molles ad haec loca pertingentes in his cerebri lobis anterioribus commodam sedem nacti sunt, in qua molliter quiescerent, et tenuis membranae interuentu ab omni rupturae metu tuti et foti colligerentur; si quidem et propter neruorum bulbos ouales singularis foueola inter anfractus cerebri vtrinque exsculpta est. At vero in brutis alia est cranii conformatio. Nam orbitae oculorum non priori caluariae loco, sed lateraliter positae sunt, et quidem paullo altius et posterius quam os ethmoides. Neque ossa cribrosa in basi calvariae horizontalem situm habent, sed ad latera intersepti medii ossis frontis angusta cauitas ossea nares versus producitur, cuius fundum respectu baseos caluariae perpendiculare foraminibus pertunditur, quibus ex altero narium latere canaliculi cartilaginei arcuati, pectinatim in orbem dispositi respondent. Hinc anterior frontis ossium sedes principio non in altum eminet, sed propter insignes sinus lamina cranii interior valde depressa, post quam ad formandam dictam cauitatem concurrit, tum demum paullatim assurgit, et turgentibus cerebri haemisphaeriis locum concedit. Propter hanc igitur singularem ossium conformationem non tota cerebri anterioris massa ad nares vsque pertingit, sed ad marginem cauitatis illius superiorem, retusis apicibus subsistit, et sola portio aliqua sub habitu brevium processuum exporrecta, cauitatem istam adimplet, quae mollem et medullarem neruum olfactilem ob amplitudinem ossis cribrosi in minutissima fila dispersum substantia

tia corticali amplecteretur, inuolueret, et tuto ad cribri foramina deferret.

Explicatio figurarum.

Figura prima monstrat processus mamillares vituli cranio ablato spectatos. Tab. IV. fig. 1.

Figura secunda exhibet eosdem processus, eorumque radices in basi cerebri spectatos. Tab. V. fig. 2.

Figura tertia neruos olfactiles ex homine sistit. Tab. V. fig. 3.

§. 6. Verum si alicuius corporis particulae mixti, nempe quae ratione qualitatum particularium et mixtionis integro corpori sint, similes, vi ignis vel alia quacunque ratione detrahuntur, corpus nullam mutationem qualitatum suarum patitur, sed solum diminuitur eius massa. Quod fit, vbi destillamus Mercurium, aut sulphur sublimamus. Ast calcinatione et vitrificatione forma metallorum ignobilium immutatur. (§. 3.) Patet igitur ea esse corpora mixta atque calcinationis et vitrificationis tempore miscibile aliquod volatile iisdem subtrahi.

§. 7. Quamdiu volatile hoc ignobilium metallorum miscibile iisdem inheret, fulgor metallicus et ductilitas manent incolumes; at quam primum ignis violentia abigitur, metalla haec in cineres fatiscunt et tandem in massam fragilem minus fulgentem conflantur. Vnde perspicuum est, fulgorem et ductilitatem metallorum ignobilium a volatili illo principio pendere.

§. 8. Quamuis autem nobilia metalla per menses validissimo igne exagitata vim eius eludunt; ex analogia tamen fortissimum adfertur argumentum, fulgoris et ductilitatis eorum rationem sufficientem in volatili quodam miscibili positam, quod fixo eorundem miscibili multo strictius adheret. Nec desunt etiam celebrium Chymicorum testimonia, quae doceant, aurum et argentum leni et diuturna calcinatione in cineres conuerti posse (*). Ex inferius tamen dicendis erit hoc magis perspicuum (§. 14. 15. 19.)

§. 9. Quoniam memoratum miscibile metallorum volatile formam metallicam illis conciliat, eaque fulgido colore

(*) Stahlius in Tractatu de salibus Cap. 32.

lore quasi tingit, quare non incongrue tincturae nomine salutari potest.

§. 10. Nitrum quamuis ad candescentiam vsque in puro crucibulo igne vrgetur, flammam tamen minime concipit, nisi corpus inflammabili materia praeditum illi ingeratur: tum enim pernici flammam detonare solet. Metalla ignobilia in scobem limata, cum dicto sale in igne etiam fulminant. Vnde facile apparet, metallis ignobilibus inflammabilem quandam materiam inesse. Quoniam autem ea per detonationem excussa, reliquum metalli in massam vitrescentem redigitur. Manifesto igitur patet tincturam metallorum ignobilium ex inflammabili substantia, quae alias apud Chymicos Phlogiston audit, praecipue constare.

§. 11. Asserti veritatem adstruit ipsa metallorum reductio, qua vitris et calcibus metallicis fulgor et ductilitas restaurantur. Etenim ad metalla reducenda phlogiston necessario requiritur. Fluor niger sic dictus qui ad hoc opus adhiberi saepius solet, nil aliud est, quam carbo tartari cum nitro detonati. Vitrum plumbi cum carbonibus lignorum puluerisatis, stannum calcinatum cum carbone sebi vsti, cum sulphure vero tostum adiecta herba Nicotiana, in igne metallicam formam recuperant. Omnia autem haec corpora inflammabili materia referta sunt.

§. 12. Nec aliae quoque operationes Chymicae idem non probant. Siquidem spiritibus acidis metallum aliquod ignobile praesertim ferrum soluentibus, ex orificio vitri vapor prorumpit inflammabilis, qui nil aliud est, quam phlogiston, frictione Menstrui ad metalli moleculas facta (*) absumtum, et cum tenuioribus spiritus partibus

 etiam-

(*) Dissertatio nostra de actione Menstruorum §. 14. et 31. Nou. Comm. T. i.

erumpente aere raptam. Nam 1) vapores spirituum acidorum puri inflammabiles non sunt. 2) Calces metallorum, quae emissis ardentibus vaporibus soluta sunt, sine adiecto corpore aliquo, quod inflammabili materia satis abundat, reduci prorsus nequeunt.

§. 13. Quando ferrum in oleo vitrioli concentratissimo soluitur, puluis niger fundum petit, qui tandem verum sulphur esse deprachenditur (*). Hoc autem constat ex phlogisto et acido sulphureo, quod cum Vitriolico eiusdem est indolis. Acido igitur Vitrioli ferrum soluenti phlogiston Martis iungitur, indeque sulphur componitur.

§. 14. Becherus Author est (**) ex limo, oleo lini impraegnato et in globulos formato, deinde tosto et a terra leuiore eluto puluerem nigrum produci, indeque magnetis virtute ferrum extrahi, cui aurum inest; id ipsum tamen sine oleo lini haud vnquam succedere. Ad orichalcum ex cupro conficiendum adhibetur lapis calaminaris, cui carbones triti adduntur, eum in finem, vt partes lapidis, quae metallicae sunt indolis, reductae cum cupro coniungi possint (***).

§. 15. Ex allatis hactenus documentis satis constat id, quod §. 10. proposuimus. Quae omnia licet ad ignobilia metalla potius referenda sunt; facilis tamen eorundem cum nobilibus per fusionem coniunctio, homogeneitatem, quae in eorum tincturis est, haud obscure arguit; praesertim cum phlogisto ignobilium color nobilissimi metallorum exaltari soleat. Siquidem Regulus Antimonii Martialis aut Venereus, qui phlogisto ferri aut cupri perfusionem im-

prae-

(*) Stahlius in Tractatu de sulphure.
(**) In Minera arenaria, lit. A.
(***) Stahlius in Tractatu de Sulphure.

praegnatus est, pulchriorem auro colorem inducit. Qui aquas gradatorias parant, subtiles vapores inter soluendum egredientes (nempe illos inflammabiles §. 12.) cohibere solent, metallum menstruo parcissime ingerendo (*) vt nempe horum auxilio ex mero argento aurum extrahant.

§. 16. Metalla in telluris gremio tingi non solum aurum, argentum et cuprum, quae saepe defaecata reperiuntur, euidentissime ostendunt; sed et ea, quae aliis mineralibus inuoluta prodeunt, idem loquuntur. Siquidem pyrites non nullos, ferri feraces spiritus nitri soluit, sulphure, quod eosdem cum metallo iunctum componit, sub forma pulueris fundum petente, (**) manifesto indicio, etiam ferrum, dum inuenis adhuc heret, suo phlogisto non destitui: cum metallum hoc phlogisto priuatum spiritus nitri minime adoriri soleat. Adde, quod sulphur cum metallis calcinatis in mineras conflari nequeat, id, quod cum integris facit.

§. 17. Supremi Numinis prouidentia ita comparatum est, vt humanum genus per telluris superficiem diffusum, quamcunque eius partem incolat, vbiuis metalla ad vsum suum necessaria reperiat. Ad haec autem progenerandа cum ingens copia tingentis phlogisti requiratur, eiusdem Numinis sapientia pinguis mineralis, quod sulphur appellamus, abundantia imas montium latebras adimpleuit, quo factum est, vt non olim duntaxat, et a mundi incunabulis metalla fuerint producta, verum etiam hunc vsque in diem abunde generentur. (***)

Oo 2 §. 18.

(*) Kunkelius in Lab. Chym. P. III. cap. 26.

(**) Stahlius de sulphure.

(***) Quamuis non desunt, qui sibi persuasum habent, metalla omnia a mundi exordio ita fuisse a Deo creata, prout nunc fossorum opera deteguntur.

§. 18. Tantam vero copiam sulphuris terra in sinu suo continet, vt non solum cryptae eius illo refertae sint [nulla fodina aut metalli genus sine sulphure reperitur (*)] sed etiam super eius superficiem hoc fossile prorumpat. Montes insularum aestuosae Indiae et gelidae Islandiae, tantum sulphuris fundunt, vt quidam eo delibuti tanquam auro inducti eminus spectentur. Fontes minerales plurimi flores sulphuris natiuos proferunt. Praereliquis vero montium vulcaniorum incendia, vbi sulphur per plurima saecula vastissima flamma consumi non potest, id testantur.

§. 19. Quod vero sulphuris phlogiston metalla in tellure tingat, sequentia probant. 1) Sulphur *in* puluerem

Verum luculentissima documenta non desunt, quae partem contrariam tuentur, quorum quaedam hic recensere lubet. In Angermannia Sweciae prouincia, venam ferri infundo lacuum incolae piscantur, quumque fundum euacuatur materia, adeo vt nil amplius residuum sit, post elapsos 20 aut 30 annos rursus renascitur et colligitur (1). In ducatu Hetruriae mons Vesulanus minera plumbi refertus est, vbi putei et cuniculi gleba metallica euacuati tandem post 10 annos nouo implentur et denuo exhauriuntur (2). Insula Ilua maris Tusci ferri est feracissima, in qua exhaustum metallum post 10 annos rursus regeneratur (3) quod etiam antiquis temporibus fuisse patet exillo Maronis (4)

- - - - - Ast Ilua

Insula inexhaustis chalybum generosa metallis.

Abrahamsiae in fodina sancti Laurentii, quae ante 20 annos exhausta fuit, argentum purum inuentum est fulcro ligneo innatum (5). Omnium autem argumentorum fortissimum est saepe obseruata a fossoribus sterilium venarum per halitum impraegnatio, et diuitum destructio, quod Germani Wettern vocant.

(1) Swedenborgius operum Phil. et Met. Tom. II. classe 1. §. 4.
(2) Bruckmanni Magnalia Dei Tom. 1. Cap. 10. (3) id. ibid.
(4) Aeneid. lib. X v. 174.
(5) Löhnheiß Bericht von Bergwercken 1. Theil.

(*) Löhnheiß Bericht von Bergwercken 1. Theil.

rem redactum et cum arena aut limo tritum, et tandem eadem ratione tractatum; prout §. 14. de limo et oleo lini dictum est, metallum largitur (*). 2) Idem minerale metalla viuidiore colore tingit, quod videre est in minera plumbi splendida, vt et in pyrite sulphureo Martiali aut Venereo. 3) Aurum cum saliua et aqua leniter tritum odorem sulphureum emittit (**). 4) Maius tamen firmamentum affert dicti phlogisti identitas. Enimuero prout metalla ex calcibus et vitris plerumque vegetabilium carbonibus reducuntur, vt supra §. 11 monuimus; ita quoque et sulphur regeneratur ex oleo vitrioli, quod cum alcali fixo combinatum et adiecto puluere carbonum in hepar colliquatum, denique aqua solutum et transcolatum aceto destillato in lac sulphuris praecipitatur.

§. 20. Ceterum metalla cum fulgore tum etiam ductilitate multum inter se differunt; cuius discrepantiae ratio sufficiens quaerenda est in reliquis metallorum miscibilibus, quae phlogisto varia proportione admixta simul cum illo in superficie cuiuslibet corpusculi metallici mixti herent. Etenim cum fulgor et ductilitas a phlogisto proficiscantur, sequitur metalla, quae magis fulgida et ductilia sunt, horum superficiem densius phlogiston occupare, quam eorum, quae minus fulgent, minusque ductilia sunt; adeoque, vbi inflammabile minus stipatum superficiei corpusculorum mixti adheret, ibi necesse est, vt particulae aliorum miscibilium illis sint interpositae, vel per eius interstitiola prospiciant.

§. 21. Acidum principium tincturae quorundam metallorum admisceri, et quidem diuersa quantitate, haud le-

(*) Stahlii Fund. Chym. p. 102 §. 14.

(**) Stahlius in Fund. Chym. Capide de auro.

vibus documentis conuincimur. Etenim metalla phlogiston suum ex sulphure recipiunt (§. 17, 18.) adeo igitur probabile est, etiam acidum sulphuris cum ipsis metallis iungi. Denique metalla ignobilia cuprum nempe et ferrum, quae minus ductilia sunt minusque fulgent, quam nobilia, minore quantitate phlogisti praedita sunt (§. 20.) ad stringente tamen virtute gaudent, quae acidorum corporum est propria. Porro omnia metalla acidis spiritibus soluuntur, et quidem eo promptius, quo magis stiptica sunt. Cum vero ad corpora in menstruis soluenda homogeneitas eorum multum conferat (*), dubitandum sane non est, quin metallis, praesertim vero stipticis, cum phlogisto etiam acidum inhereat. Hinc non sine ratione sulphur crudum ferro a Swedenborgio adscribitur, (**) nempe acidum sulphuris cum phlogisto coniunctum. Confer experimentum apud Cel. Pott descriptum. (***) qui ex metallis solutis in spiritu nitri et sale communi aut eius spiritu praecipitatis et cum Mercurio destillatis, veram cinnabarim obtineri asserit. Huc quoque pertinet, quod argentum cum sulphure confusum conuertitur in mineram mollem, Glaß-Erß, plumbo non absimilem: nempe adiecto sulphure, nobile et adeo ductile atque fulgidum metallum ad ignobile accedit.

§. 22. Arsencium metalla tingendi virtutem possidet: stanno duritiem sonumque conciliat, et ipsum compactius reddit; cuprum et ferrum dealbat, atque cum ignobilibus metallis per fusionem vnitum et diutius tractatum partem

eorum

(*) Dissertatio Nostra de actione Menstruorum §. 10, Nou. Comm. T. I.
(**) Operum phil. et Metall. Tom. II. de ferro. Classis 1. §. 1.
(***) Dissertatio de sulphuribus metallorum §. 4.

eorum nobilitat (*). Vnde maxime probabile est, partem quandam arsenicalem tincturam metallorum ingredi, [praesertim vero eorum, quae frequentius cum arsenico, quam cum sulphure ex venis eruuntur] eaque ab aliis fulgore et tenacitate distinguere. Quod prae reliquis de stanno non sine sufficiente ratione affirmari potest. Siquidem, 1) hoc metallum semper ingleba arsenicali reperitur. 2) Ductilitas eius non solum nobilium verum etiam quorundam ignobilium metallorum tenacitati multum cedit; haec vero aliquo principio, inflammabili materiae heterogeneo, tincturae admixto, infringitur. (§. 19.) Quod tamen acido tribuere non audemus, cum stannum sit minus stipticum, quam alia metalla ductiliora. 3) Stannum lubentius in eis spiritibus soluitur, quibus acidum salis inest. Hoc autem quam analogum arsenico sit, inde perspici potest, quod cum argento in corneam substantiam fusum et sublimatum materiam exhibeat venenosam, et quo ad formam externam, arsenico non absimilem.

§. 23. Nec parua suspicio est etiam argenti et cupri phlogisto arsenicale aliquod miscibile inherere, cum vtrumque saepius cum arsenico ex terra eruatur. Vena cupri arsenicalis, quando in cumulos congesta igne per mensem et amplius torretur et ad fusionem praeparatur, in filamenta cuprea splendidissima et coloribus iridis ludentia excrescit, quae adeo congrue arbor veneris salutari possunt. Quod etiam cum minera argenti rubea, Rothgülden Erz, dicta, factum apud Cel. Henkelium, videre mihi aliquoties licuit. Nempe laudatus Auctor dictam gle-

(*) Pott in dissert. de Anat. Auripigmenti §. 13.

bam argenti arſenicalem per menſes in arena digeſſerat; ignis gradum eiusmodi ſubminiſtrans, quo arſenicum, aegerrime quidem ſublimari poteſt. Tum argentum, volatili illo corpore in auras recedente, in tenuia filamenta diſtractum eſt. Vtraque experientia homogeneitatem arſenici cum argento et cupro non obſcure indicat.

§. 24. Non exiguum firmamentum aſſertis (§. 20-23) inde affertur, quod ſulphur et arſenicum largius metallis per fuſionem addita, ductilitatem eorum prorſus infringunt. Et hinc Regulum Antimonii, Zincum et Wismutum nil aliud eſſe ſuſpicamur, quam metalla nimio ſulphure vel arſenico, aut vtroque ſimul intimius cum iis iuncto, onerata et fragilia facta.

§. 25. Quoniam autem ad fulgorem conciliandum non parum confert, etiam aequabilis partium diſpoſitio, qua radii ſolis paralleli reflectuntur, magisque fulgent, quam confuſi; vnde mirum non eſt ſupradictis ſemimetallis fulgorem vtcunque conſeruari, quamuis nulla ductilitate amplius gaudeant.

§. 26. Ad haec omnia dilucidius exponenda atque firmius demonſtranda plura quidem, et forte non alias vnquam tentata, conferre poſſemus, quae iam ante aliquot annos animo concepta habemus; verum quoniam laboratorio Chymico deſtituimur (*), ideo cum ab ipſis experimentis inſtituendis prohibemur, tum etiam deducendis inde argumentis caremus.

§. 27. Quamuis autem nos haud lateat, plurima proſtare experimenta, quibus oſtenditur modus ſulphura et tincturas metallorum extrahendi, quod videre eſt in ſcriptis Is. Hollandi et in Diſſ. Clar. Pott. de ſulphuribus metallorum.

(*) Nempe quando ſcripta eſt haec diſſertatio An. 1745. Quod tamen An. 1748, dirigente Academiam Praeſide Excellentiſſimo Comite Razumowsky, exſtructum eſt.

tallorum. Verum gemina et sincera haec metallorum mixtibilia separatim sisti posse non facile credendum est, cum ad ea elicienda salina et sulfurea corpora praescribantur; quae dicet specioso nomine aperientium obuelantur, non tamen suspicari non possumus, quin eadem, quae ad metalla aperienda adhibentur, cum mixtis metallorum corpusculis combinata, saepius, si non semper, pro quaesitis venditentur.

§. 27. Finem verbis imposituri non inutile fore arbitramur, si analogicam aliquam coniecturam de metallorum transmutatione adiiciamus, quam a trasmutandis eorum tincturis, de quibus nunc egimus, proficisci posse existimamus.

§. 28. Qui artem spagiricam vel a limine salutauerunt, haud iam ignorant, acida debiliora ex alcalinis per fortiora expelli et quasi praecipitari. Sic acetum affuso spiritu salis ex cineribus clauellatis extruditur; ipse vero nitroso spiritui locum cedit, per acidorum fortissimum, quod sulfreum est, expellendo. Acidum sulfreum omnium purissimum et ab heterogeneis partibus defaecatissimum esse a Chymicis censetur: nam nitroso spiritui inflammabile, salino autem arsenicale aliquid in esse affirmant; acetum empyreumate inquinatum esse destillatio eius ex arena prodit. Quibus singulis acidae particulae magis magisque debilitantur, minusque aptae redduntur ad alcalia firmiter sibi adiungenda. Quo cum etiam grauitas eorum specifica conuenit: etenim spiritus acidus sulfuris quo concentratior est, eo etiam specifice grauior; vnde patet, grauitatem spirituum ab acidis particulis augeri. Hinc quoque spiritus acidi, quo fortiores sunt et cum alkali arctius iunguntur, eo sunt etiam specifice grauiores. Quippe pollex cubicus olei vitrioli, quod cum spiritu sulfuris est eiusdem indolis, ponderat drachmas 7 et grana 59, Spiritus Nitri dr. 6, gr. 24; Spiritus salis dr. 5. gr. 49, acetum destillatum dr. 5. gr. 11. (*)

§. 29. Non absimili ratione intransmutandis metallis naturam, artificum industria opem ferente, procedere posse arbitramur. Si quidem phlogiston concentratius, quod metalla nobiliora tingit, iisdem firmius adheret. Itaque si quis in arte Chymica versatissimus phlogiston concentratissimum et ab heterogeneis solertissime defaecatum possidet, eum metalla ignobiliora, tinctura impuriore expulsa, in nobilissimum metallum praecipitare et conuertere posse credimus.

(*) Eisenschmidius in disquisitione noua de ponderibus et mensuris p. 174.

DE ELECTRICITATE IN CORPORIBVS PRODVCENDA NOVA TENTAMINA.

AVCTORE
G. W. Richmann.

I.

Iam diu notum eſt arte in corporibus produci poſſe proprietatem, vel ſi dicere mauis, vim, virtutem qua alia leuiora corpuſcula diſtantia, vel maiora pendula et aequilibrata attrahere et repellere etiam ſaepius valent, ſimulque in tenebris et crepuſculo admotis corporibus, hac virtute non imbutis facile tamen illa imbuendis, lucent, ignemque ſiſtunt, qui tandem materiis inflammabilibus accendendis aptus obſeruatus eſt. Hanc virtutem electricitatem appellant philoſophi, et eſt vel originaria, quae ſolo tritu corporum certorum ſolidorum, e. g. vitri, reſinae, ſulphuris, laccae ſigillatoriae produci poteſt, vel deriuatiua, quae a corporibus electricitate originaria donatis propagatur e. g. in metalla, corpus animale, aquam, glaciem, ligna, plantas etc. Reſina vero, Sulphur, Colophonium, Lacca ſigillatoria ſola frigefactione poſt fuſionem adipiſcuntur virtutem attrahendi corpuſcula leuiora et ſi defendantur ab humiditate aëris per annua ſpatia conſeruant. Derivatiuae vero electricitatis minimo gradu capacia corpora, non ſolum ſunt omnia ea, quae electricitatem originariam admittunt,

 ſed

ſed et ea, quae eam, quia tritu emolliuntur, non admittunt, ſimulque a corporibus originaria electricitate donatis electricitate imbui ſenſibiliter haud poſſunt e. g. ſebum.

§. 2. Occupatus inſtituendis et imitandis experimentis de hac dicta proprietate corporum offendi

1) Quaedam phaenomena, quae ab autoribus, qui de electricitate varia annotarunt et inueſtigauerunt, non obſeruata inueni.

2) Nouam methodum commode inſtituendi experimenta et examinandi corpora, quae originariae et alia, quae deriuatiuae electricitatis ſolum capacia ſunt.

3) Sub menſuram etiam aliquatenus productam electricitatem reuocare anniſus ſum.

Haec qualiacunque tentamina cum ſocietate communicare animus eſt.

§. 3. Primo ea experimenta imitari conſultum duxi, quae admirationem orbis eruditi non ſolum, ſed et principum perſonarum meruerunt, e. g. illud, quo ex metallis et homine ignis et lux concrepans elicitur, quo ſpiritus vini calefactus accenditur; quod cum feliciter perfecerim, ſimulque ex aqua et niue et glacie eundem ignem cum concrepatione coniunctum elicuerim, etiam alia, quae licet non ita in admirationem rapiunt obſeruatorem, fortaſſis tamen plus faciunt ad doctrinam de electricitate amplificandam et explicandam inſtitui optimo cum ſucceſſu.

§. 4. Menſis Februarii huius anni 1745 initio tentaminum initium feci in domo lignea et primo vſus ſum tubis vitreis ad excitandam electricitatem, manibus vero et brachiis frequenti tuborum tritu langueſcentibus et dolentibus, ſedulo cogitaui, qua ratione Machina electrica

quam

quam Gravesande in Elem. physices mathematicis descri-bit sic instrui posset, vt illa commode vti valerem. Quia conclaue, quo instituere volebam experimenta, cellae im-minebat, sphaera per machinam celeriter circumgirata, concutiebantur ferme omnia supellectilia, quin ipsi parie-tes lignei domus; et resina, qua axes firmati erant, in-calescentibus celeri motu axibus, mollis reddebatur, vt po-li situm mutarent et motus oriretur vacillans, electricitati, vt quidam asserunt noxius e. g. Clarif. Bose in Com-mentariis de electricitate. In machina electrica id mihi etiam eximiam molestiam creabat, quod saepius cogebar funes detritos et laceratos mutare, vel laxatos arctius li-gare, quod dimidiae horae labor erat. Omnibus his in commodis medelam afferre volebam. Paucis enarrabo, quomodo machinam vsui accommodauerim. Loco funis 10. pedum Lond. rotam circumdantis, elegi funem 28. ped. qui ferme ter diutius in aequali motu durare debet, duxi illum circa axin spharae vitreae, rotam machinae et trochleam, extrema filo lineo bene ligaui. Trochle-am vero cum alio fune iunxi et deinde adduxi funem, et firmaui, circa clauum robustum ferreum immobilem. Cum sphaeram circumagerem, rota in duobus minutis secun-dis semel circumacta, sphaera duodecim vicibus circumibat. Hanc celeritatem obseruaui sufficere experimentis, sphae-ramque sine concussione machinae circa axin sine motu nimium vacillante ferri. Postquam hoc animaduertissem tubos vitreos plane neglexi et experimenta cum tubo vi-treo moleste instituta, machina dicta repetii felicissime et alia multa addidi.

§. 5. Antequam vero experimenta instituta enarro, sequentibus describam totum apparatum ex quo methodus ea instituendi, quam adhibui, patebit.

Tab. VI. 1) A machina Grauesandiana A filum ferreum 24. ped. Lond. B. C. D. E. F fulcitum funibus ex serico coerulei coloris, B *a*, C *b*, D *c*, E *d*, duxi et coniunxi cum fulcimento ferreo G, et ex filo ferreo B, C, D, E, F appendi filum ferreum incuruatum, sphaeram cum conuexo latere tangens et eam circumradens *e f*.

2) Fulcimentum ferreum G, erat in resina positum, qua vas conicum H farctum erat simulque externa vasis superficies resina obducta. Minima ferri electrificandi distantia a parietibus vasis ligneis erat vnius dig. Lond. et dimidii.

3) Cum Fulcimento ferreo G, cuius pondus erat 20. libr. Russ. coniunxi regulam ferream I K $\frac{3}{4}$ libr. Russ. mediante fune, vt extremitas K, a fulcimento ferreo G, distaret 19 $\frac{1}{2}$ poll. Lond: Cum hoc ferro regulam ferream L M ponderis dimidiae librae Russ. Longitudinis 20 $\frac{1}{2}$ dig. Lond; in K mediante filo ferreo coniunxi.

4) Prope laminam K ligaui filum lineum K O, longitudinis duorum pedum Londinensium, eius tenuitatis, vt 456. digitos Lond. longum, ponderaret 16. grana, qua propter filum ex lino K O ponderatum exhibere debuit $\frac{384}{456}$ vnius grani. Filum dictum hoc ita ligaui, vt incumberet laminae K et penderet in situ cum regula B M parallelo, in distantia $\frac{4}{10}$. dig. a regula L. M.

5) Cum mensa in qua vas resina fartum collocatum erat coniunxi arcum circuli MOP ligneum 40. graduum. Diuisi arcum

hunc

hunc in gradus, et quemlibet gradum in quatuor aequales partes. Extremitas fili linei distabat ab arcu circuli duas lineas.

Fulcimento ferreo G, electricitate donato filum lineum K C propellitur a ferro inprimis regula ferrea L M et ostendit in arcu M O P, gradum, qui si maior est, indicat maiorem electricitatis gradum, nondum vero assero electricitatem hoc indice accurate mensurari posse, nisi perfectior reddatur, et ipsa theoria vorticis electrici amplificetur, ad quam perficiendam initium fecit B. Hausenius in Historia electricitatis.

6) Ex altera parte fulcimenti ferrei G cum fulcimento regulam ferream Q R S ponderis dimidiae librae Russ. coniunxi, R. distabat a fulcimento ferreo 15 $\frac{1}{2}$ dig. Lond. et

7) Ex puncto R regulae Q R S filum ferreum coniunxi, cum quo mediante filo lineo malleum ferreum quadrangularem longit: 6 $\frac{1}{2}$ dig. Lond. pond. $\frac{1}{32}$ lib. R. ligaui, sic vt extremitas (b) distaret a filo ferreo dimidiam lineam, altera vero incuruata esset planum diagonale versus, Hoc facto

8) In mensa fulcimi in distantia semidigiti a malleo ferreo pendulo in sustentaculo vitreo campanam metallicam T, ponderis $\frac{3}{4}$ librae Russ. sic vt malleus *b e* feriens campanam T, eam cum parte, a superiori extremitate quatuor et dimidium dig: distanti tangeret.

9) Aliam campanam V appendi ex regula ferrea Q R S mediante filo ferreo, ponderis dimidiae librae Russ. sic, vt tres lineas distaret a baculo quadrangulari.

10) Prope Campanam V ex regula Q R S pendulam alium malleum *f g* similem appendi ex filo ferreo, vt

non

non connexus esset cum apparatu electrificando, in distantia duarum linearum a campana pendula.

11) Ex medio regulae ferreae Q R S appendi ex filo ferreo ferrum *m* ponderis duarum drachmarum, cuius extremitas in sphaericam figuram abibat.

12) Ex parte regulae Q R S fulcimento ferreo G propinqua appendi filum ferreum, *b k*, vt cum eo possem sphaeras coniungere corpusculis leuioribus e. g. foliis auri attrahendis et repellendis aptas.

13) Ex fulcimento ferreo duxi filum ferreum 24. pedum Londinensium 1. 2. 3. ad pondera 300. librarum Russ. in resina posita. Filum ferreum B C D E F et 1. 2. 3. ponderatum vnam et dimidiam libram Russ. exhibebat sic vt totus apparatus electrificatus esset ferme 324 librarum Russ. Ponderum ferreorum in resina collocatorum distantia minima a parietibus vasis ligneis erat 2 dig. Lond.

14) Suspendi ex fune serico coerulei coloris Bilancem magnam W cuius pondus erat 12 librarum Russ. funem hunc sericum in distantia vnius pedis cum fune cannabino iunxi, quem super trochleas ad lacunar firmatas, X Y duxi et ex extremitate Z appendi pondus aequale ponderi Bilancis. Imminebat bilanx ponderibus ferreis (13) in resina positis. Extremum pondus ferreum erat lamina ferrea Longit. duorum pedum et latitudinis 26 dig. L. crassitiei quatuor linearum. Haec lamina ita fulcita erat, vt ad sensum esset horizontalis.

15) Firmaui ad parietem regulam ligneam $\alpha\,\beta$ prope pondus Z, vt in ea notarem distantiam lancis γ a lamina ferrea.

16)

16) Prope Bilancem et pondera ferrea in resina posita collocaui fulcimentum ligneum, quod ope forcipis cum bilance iungere potui. His ordinatis sequentia exprimenta commode instituere licuit.

Experim. I.

§. 6. Si homo resinae insistens ad sphaeram vitream cauam diametri 10 dig. Lond. et cum axibus orichalceis ponderis 9 librarum Russic. per machinam Grauesandianam circumactam adplicat manum, ipse electrificatur et per filum BCDEF electricitatem communicat cum toto apparatu electrificando in resina collocato. Si homo sic electrificatus tangit filum ferreum electrificatum BCDEF elacilatur ignis concrepans vehementissimus die visibilis spiritum vini accendens etc. et index electricitatis recedit et applicat se regulae ferreae pendulae. Homo tali ratione electrificatus si tangitur dat ignem concrepantem, vel si tangitur ab alio in resina stante et ex altera parte sphaerae manum adplicante ad sphaeram. *

Experim. II.

Si homo resinae insistens adplicat manum ad sphaeram et altera tenet filum ferreum, cuius altera extremitas tenetur ab homine, stante in resina prope pondera ferrea (13) in resina collocata, et tangente pondera, nulla electricitas oritur, et index semper ostendit gr. 0. Nihilque ex toto apparatu electricitate donatum obseruatur. * Si idem homo iisdem positis circumstantiis non tangit, pondera ferrea, homo et pondera electrificantur, indexque ad 35. gr. eleuari potest. Si hac electricitate excitata adplicat digitum

(*) Corpus ergo electrificatum agit in electrificatum si non connexum est cum aliis per corpora deriuatiuae electricitatis.

tum ponderibus electricitate donatis, oritur ignis vehemens concrepans die visibilis et index recedit et adplicat se regulae ferreae pendulae.

Experim. III.

Si homo in resina stans et adplicans manum sphaerae altera manu tenet tubum vitreum *a b*, qui per duo orichalcea prismata *c* et *d* transit, quorum *d* mobile est, et adplicat prisma *d* filo ferreo deriuanti electricitatem, digito prisma *c* tangens electricitateque producta et indice ostendente gradum 35, premit parallelepipedum *d* versus alterum *c* sensim, in distantia quatuor linearum interdum octo oritur scintilla concrepans vehemens et index obseruatur recedere ad gr. 16. obseruatur etiam saepe lux radiata coerulei coloris continuo fluens ex corpore electrificato inter prismata, cum stridore et sussuro, odoris, phosphori Brandii similis. Cessante motu rotae, si propinquius redditur prisma *d* prismati *c*, vt distantia sit e. g. trium linearum ferme, iterum oritur scintilla sed imbecillior et index recedit ad minorem gradum e. gr. 7. tandem prismate *c* prisma *d* contingente electricitas tota aufertur et index redit ad gr. o. quin ipsi regulae L M se adplicat. Si cochlea foemina ex metallo ambit cochleam marem ex vitro, ex numero reuolutionum melius distantia iudicatur, vel si in propinquitate corporis electrificandi fulcitur cochlea foemina, per quam cohlea mas transit, pariter ex numero reuolutionum distantia a corpore electrificando innotescit.

Experim.

Experim. IV.

Si positis circumstantiis experimenti II. homo in resina iuxta pondera (3) stans, adplicat prisma *d* ad pondera ferrea, electricitate producta et indice ostendente gr. 25. in distantia trium linearum prismatis *c* a prismate *d* oritur scintilla vehemens concrepans et index recedit a 25. gradu ad 18. gr. motu rotae cessante si propinquius redditur prisma *c* prismati *d* iterum oritur in distantia vnius et dimidiae lineae scintilla sed imbecillior, tandem contingentibus se prismatibus, tota electricitas aufertur et index ostendit gr. o. quin regulae L M se adplicat.

Experim. V.

Si homo adplicans manum ad sphaeram non insistit resinae sed solo ex asseribus compaginato et electricitas excitatur indicem eleuans ad gr. 25. prismate *d* adplicato ad filum ferreum electrificatum ab homine solo ex asseribus compaginato insistenti; et prismate *c* prismati *d* sic appropinquato vt tres tantum lineas distet, oritur scintilla concrepans vehemens et index redit ad gr. 16. Si prisma *c* adhuc propinquius redditur primati *d* vt 2. lineas distet, oritur iterum scintilla concrepans indice recedente ad gr. minorem e. g. 11. Prismate *c* magis appropinquato prismati *d* oritur scintilla concrepans debilior praecedenti, et index minorem gradum adhuc ostendit e. g. 7. tangentibus vero se mutuo prismatibus *c* et *d* tota electricitas aufertur et index ostendit gradum o, quin applicat se regulae ferreae.

Experim. VI.

Si electricitate indicem eleuante ad gr. 25. tangitur filum ferreum ab homine, solo ex asseribus compaginato insistenti, cessat tota electricitas, et index sese adplicat regulae ferreae.

Experim. VII.

Si electricitate indicem eleuante ad 20. gr. tangitur filum ferreum ab homine in resina stante, index adhuc ostendit gr. 10. Si ab alio non stante in resina tangitur tota electricitas aufertur et index ostendit gr. 0. quin sese adplicat regulae ferreae.

Experim. VIII.

Si electricitate indicem eleuante ad gr. 20. prisma *d* admouetur filo ferreo electrificato ab homine in resina stante et alterum prisma *c* sensim appropinquatur prismati *d*, in distantia duarum linearum oritur scintilla concrepans et index recedit a gr. 20. ad gr. 16. deinde ne quidem contigentibus sese prismatibus *c* et *d* scintilla oritur, nec index mutatur. Si vero electricitas homini in resina stanti aufertur, denuo adplicans prisma elicit iterum scintillam concrepantem ast debiliorem, prismate *c* a prismate *d* minus distante quam priori casu. Et tali ratione electricitas auferri potest, vt residua non sit sensibilis.

Experim. IX.

Massa 324. librarum electrificata et indice ostendente gr. 20. index primo minuto primo temporis recessit ad gr. 19.

2do

2do min. pr. - -	$18\frac{1}{2}$
3 - - - - -	18
4 - - - - -	17
5 - - - - -	$16\frac{1}{2}$
6 - - - - -	$15\frac{1}{4}$
7 - - - - -	14
8 - - - - -	$13\frac{1}{2}$
9 - - - - -	13
10 - - - - -	12
11 - - - - -	$11\frac{1}{2}$
12 - - - - -	11
13 - - - - -	$10\frac{1}{2}$
14 - - - - -	10
15 - - - - -	$9\frac{1}{4}$
16 - - - - -	9
17 - - - - -	$8\frac{1}{2}$
18 - - - - -	8
19 - - - - -	$7\frac{3}{4}$
20 - - - - -	7
21 - - - - -	$6\frac{1}{2}$
22 - - - - -	6
23 - - - - -	$5\frac{1}{2}$
24 - - - - -	$5\frac{1}{4}$
25 - - - - -	5
26 - - - - -	$4\frac{3}{4}$
27 - - - - -	$4\frac{1}{2}$
28 - - - - -	$4\frac{1}{4}$
29 - - - - -	4
39 - - - - -	$2\frac{3}{4}$
40 - - - - -	2

45 - - - - - - - 1½
50 - - - - - - - 1.

Durauit hinc electricitas, massae 324. libr. Russ. communicata, a gr. 20. ad gr. 1. per 50. min. pr. et index per gradus vltimos lentius recessit, quam per gradus priores. In palatio imperatorio lapideo electricitas durauit tantum duo minuta prima a gr. 25. ad gr. 1.

Experim. X.

Idem experim. 9. alio tempore institutum est, massa 324. libr. Russ. electrificata et indice ostendente gr. 25. index recessit

5 primis min. prim. ad gradum 15
16 min. prim. - - - - - - 8
25 min. prim. - - - - - - 5

durauit hic electricitas, massae 324. libr. Russ. communicata a gr. 25. ad gr. 1. per 25. min. pr. et rursus index per gradus vltimos lentius motus obseruatus est.

Experim. XI.

Eodem tempore institutum quo praecedens.

Massa 24. libr. Russ. electrificata et indice ostendente gr. 25.

5 prim. minutis primis index recessit ad gr. 11½
10 - - - - - - - - - - 4
15 - - - - - - - - - - 1.

Ergo si minor massa electrificatur electricitas citius cessat s. annihilatur.

Experim. XII.

Massa 24. libr. Russ. electrificata et fasciola serica pollicem lata et 3. pollices longa, rubri coloris, firmata ad filum ferreum electrificatum, electricitatis index, manu ad alteram extremitatem fasciolae adplicata recessit per 5. min. prim. a gr. 25. ad gr. 6. Fasciola purpurea, aurantia, violacea, eadem ratione examinata idem obseruatum est, nimirum indicem a gr. 25. ad gr. 6. 5. minutis primis recessisse. Fasciola alba, coerulea, viridi et flaua eadem ratione examinata, 5. minutis primis index a gr. 25. ad gr. 8. recessit. Nigra vero fasciola examinata, 3. minutis primis electricitas prorsus euanuisse obseruata est. Index per se a gr. 25. ad gr. 6. quinque minutis primis recedebat. Hinc iudicare licet fasciolam sericam nigram vnicam deriuasse electricitatem sensibiliter, alias vero non item. Si humectabantur fasciolae statim omnis electricitas adplicata manu cessabat.

Experim. XIII.

Filum lineum candidum humectatum eius tenuitatis vt 24. fila longit: 19. dig. Lond. pondus 16. granorum efficerent, imponebatur ferreo filo et electricitate ad gr. 25. excitata, manus adplicabatur ad filum humidum statim electricitas tota cessauit, nec restitui potuit per continuatum sphaerae motum. Electricitas vero non cessabat, si funis, ex 108. filis talibus compositus siccus ferreo filo imponebatur et manu trahebatur. Cessante tamen sphaerae motu, interuallo vnius minuti primi index a gr. 25. ad gr. 1. recedebat. Hinc iudicare licet funes ex serico, fulciendis corporibus electrificandis, aptiores esse, quam funes ex lino confecti.

Ex-

Experim. XIV.

Omnia corpora humectata, admota manu filo ferreo electrificato, electricitatem statim omnem tollunt, vt index ostendat gr. 0. et sese adplicet regulae ferreae pendulae e g. etiam sulphur, vitrum, porcellana, resina, lacca sigillatoria, cera, funes ex serico, quae omnia sunt deriuatiuae electricitatis incapacia, si sunt sicca.

Experim. XV.

Si malleus ferreus est pendulus in distantia semidigiti a campana T et electricitas excitatur, vt index ostendat gr. 12. campanarum percussio a malleo incipit et crescente electricitate, percussiones celerius se excipiunt, cessante vero sphaerae motu et electricitate decrescente, percussiones lentius se excipiunt et tandem indice recedente ad gr. 11. campanarum percussiones plane cessant. Si index ostendit gr. 25 - 20. percussiones sunt efficaces, ignis enim concrepans elicitur (1) tam in puncto *e* vbi campana percutitur a malleo, quam 2) in puncto *b*, vbi malleus cum filo ferreo mediante filo lineo coniunctus est, et si multa fila ferrea dicta ratione filo lineo coniuncta sunt, multae stellae lucidae coeruleae cernuntur qualibet percussione. 3) in puncto *n*; malleus enim *nb* distributa electricitate sua per campanam T et non electricus redditus vel saltem minus electricus redire debet et percutere etiam campanam electrificatam V cum incuruata extremitate, vnde lux. 4) Malleus *f g* non electricus etiam ferire debet campanam electrificatam V et scintillam concrepantem elicere. Si sphaera adplicata manu continuo circumagitur, continuo cernuntur fulgura in dictis punctis.

Schol.

Schol. Non dubito instrumentum musicum diuersis campanis et malleis rite prope apparatum electrificatum ordinatis, vel cum apparatu connexis, condi posse, quod vi electricitatis animari possit.

Experim. XVI.

Remota campana T et electricitate ad gr. 25. excitata, non excitatur sonitus malleo *b e* et campana V quia ambo haec corpora electricitate aequali sunt donata. Malleus tamen non electrificatus *f g* percutit campanam V et elicit ignem concrepantem.

Experim. XVII.

Si campana T iterum admouetur electritasque excitatur, campana T quidem vna atque altera vice percutitur a malleo *b e*, ast non continuantur percussiones, licet index ostendat summum electricitatis gradum. Distribuitur electricitas per campanam T ipsam vitreo sustentaculo incumbentem, hinc campana ipsa fit electrica, hinc phaenomenon electricitatis cessare debet. Statim vero, cum admouetur digitus sustentaculo ferreo campanae T, cum vitro coniuncto, sonitus cum concrepatione et luce exoritur. Notandum hic

1) Admoto digito ad sustentaculum ferreum campanae sentiri ictum, indicem electricitatis per campanam distributae et per manum hominis deriuatae in infinite multa corpora.

2) Hoc ipso campanam perdere electricitatem suam et fieri corpus non electrificatum, hinc malleum electrificatum attrahi debere.

Experim. XVIII.

Si homo resinae insistens adplicat manum ad sustentaculum ferreum campanae vitro fulcitae diutius campanarum sonitus durat, quam si campana sola T vitro fulcita agit in malleum *b e*, tandem tamen cessat, licet index ostendat gradum electricitatis maiorem 12. gradibus. Si vero tangitur talis homo in resina stans, statim campanarum sonitus producitur. Finitae hinc molis corpus non est aptum ad sonitum campanarum conseruandum, infinitae aptissimum, quale est campana connexa cum homine, non stante in materia deriuatiuae electricitatis incapaci, vel cum aliis corporibus deriuatiuae electricitatis, non collocatis in materiis deriuatiuae electricitatis incapacibus.

Experim. XIX.

Corporibus humectatis adplicatis ad filum ferreum, campanarum sonitus statim cessat, tollitur enim sic omnis electricitas. Exper. 14.

Experim. XX.

§. 9. Aqua in vase metallico laminae ferreae 3) imposita et sphaera circumacta manu ad sphaeram adplicata, digitum appropinquaui superficiei aquae et scintillas elicui valde concrepantes ex aqua, easdem etiam ex niue glacie, mercurio viuo, aceto, spiritu vini, lacte, spiritibus acidis produxi etc. de scintillis talibus aquae B. Hausenius dubitat, B. du Fay affirmat. et Clariss. Bosius confirmat et alii.

Ex-

Experim. XXI.

Massam glaciei in orbe stanneo posui et in lamina ferrea 3) collocaui, naphtam deinde albam infudi in cochleare metallicum paruum, calefactum, et electricitate 25. gr. excitata tenui cochleare in distantia digiti a superficie glaciei verticali et accensa est naphta.

Experim. XXII.

Suffulciui bene cochleare metallicum in lamina ferrea 3) calefactum prius, infudi cochleari naphtam electricitateque 25. gr. excitata, continuataque circumactione sphaerae, appropinquaui massam glaciei, vt distaret a parietibus cochlearis digitum ferme, et accensa est naphta.

Experim. XXIII.

Spiritum vini calefactum electrificatum, naphtam calefactam, spiritum Forbenii frigidum electrificatos, digito vel metallo non electrificato accendi. Non electrificatos accendi cum digito vel metallo electrificato.

Experim. XXIV.

Aquam in patina stannea in mensa sub stilo ferreo *l m* ex regula ferrea Q R S pendente posui, vt superficies aquae distaret 3. circiter lineas, electricitateque excitata obseruaui aquam eleuari attingentemque ferrum elicere lucem, dein resilire et rursus eleuari et eandem lucem excitari etc. In spiritu vini, mercurio, aceto, spiritu nitri aqua diluto idem obseruaui, si in aptis vasis stilo ferreo *l m* propinqua erant.

Experim. XXV.

Vas metallicum, laminae ferreae 3. inposui et siphonem aquae in vase stagnanti immersi, et suctione effeci, vt sipho fluere inciperet, electricitate deinde excitata appropinquaui fluentis aquae cursui digitum et aqua cursum mutauit, digitumque versus se dirigens dispergebatur, digito contingente radium aquae, lux caerulea in tenebris obseruabatur in superficie radii sine concrepatione.

Experim. XXVI.

Si admouebam laminae ferreae electrificatae 3) baculum ferreum non electrificatum, in distantia trium saepius pollicum oriebatur lumen absque sono in extremitate ferri, ferreo baculo sensim propius admoto cum luce hac etiam sibilus vel potius susurrus instar susurri muscarum audiebatur, in distantia trium vel quatuor linearum vero interdum octo ignis concrepans et simul index recedere obseruabatur. Si ergo corpus fulcitur resina altitudinis quinque vel octo linearum et vndique saltem quinque vel octo lineas remotum est a corporibus deriuatiuae electricitatis capacibus, non metuendum est electricitatis decrementum sensibile, quod etiam experientia ipsa me docuit. Quia tamen in distantia trium pollicum a lamina ferrea lux oritur corpore electricitatis deriuatiuae valde capaci, e. g. metallo appropinquato, cauendum esse videtur, vt ferrum vel aliud metallum, vel aqua homo etc. a corpore electrificato tres saltem digitos distet. Hinc consultius esse videtur, si resinae, quae inseruire debet corporibus electrifi-

can-

candis fulciendis, altitudo trium minimum digitorum concedatur.

Experim. XXVII.

Stante homine in resina prope pondera 3) iuncto baculo ligneo quatuor pedes longo cum massa ferrea 3), electricitate 25. gr. excitata, et digito homini in resina stanti admoto scintilla concrepans imbecillis orta est indice electricitatis recedente ad gr. 22. reliquus apparatus ergo electrificatus possidebat adhuc gr. electricitatis 22. Si lignum tangebatur manu non electrificata lumen absque sono in tenebris in puncto contactus obseruabatur sine sensibili indicis recessione. Si lignum humidum adhibetur, ignis concrepans vehemens tacto homine electrificato oritur et electricitas tota subictu omni apparatui electrificato aufertur. Lignum hinc siccum non est aptum electricitati fortiori deriuandae. Idem in funibus siccis ex lino et cannabinis, in funibus sericis coloratis vero maxime obseruatur.

Experim. XXVIII.

Phiala vitrea cum collo pedem Lond. et dimidium longo, si in fulcimento ferreo laminae ferreae 3) ponebatur, et deinde electricitas gr. 25. excitabatur, orificio eius admotum ferrum lumen exhibebat cum sono quem aqua edit si coquitur. Post bene exsiccatam phialam neque lumen neque stridor obseruabatur examine iterum instituto. In vasis metallicis angusti colli idem stridor et eadem lux obseruatur, ast corpus metallicum 5. vel sex lineas a parietibus vasis remotum esse debet ne ignis concrepans excitetur.

Experim. XXIX.

§. 10. Electrificaui 24. libras Russ. vsque dum index electricitatis ostenderet gr. 13. et deinde in resina stans, vt minima distantia extremitatum pedum a parietibus vasis lignei esset vnius digiti, tetigi filum ferreum deriuans electricitatem et recessit index ad gr. 9. Deinde manu a filo ferreo remota tetigi corpus deriuatiuae electricitatis infinitae connexionis et postea rursus tetigi filum ferreum et recessit index ad gr. 6. remoui vt prius manum a filo ferreo et tetigi rursus corpus deriuatiuae electricitatis infinitae virtutis et rursus adplicaui digitum ad filum ferreum et recessit index ad gr. 3. hoc continuaui, vsque dum index recederet ad gr. o. et adplicaret se regulae ferreae quod, repetens saepius experimentum, quarto tactu eueniebat.

Schol. Corpus deriuatiuae electricitatis infinitae connexionis est mihi corpus deriuatiuae electricitatis fortioris connexum cum aliis deriuatiuae electricitatis capacibus in infinitum.

Experim. XXX.

Quadraginta libris Russ. simul resinae impositis repetii experimentum, primo tactu recessit index a gr. 13. ad gr. 8

2° - - - - - - - - - - - - - 5

3° - - - - - - - - - - - - - 2

4 - - - - - - - - - - - - - 1

5 - - - - - - - - - - - - - 0

Ex-

Experim. XXXI.

Electrificaui 324. libras Ruff. donec index iterum ostenderet gr. 13 simili que vt antea ratione procedens, obseruaui

1	tactu recedere indicem ad gr.	10
2	- - - - - - - - - -	8
3	- - - - - - - - - -	6
4	- - - - - - - - - -	4
5	- - - - - - - - - -	2
6	- - - - - - - - - -	0

repetii experimentum et recessit index

1	tactu fili ferrei ad gr.	10
2	- - - - - - - - - -	8
3	- - - - - - - - - -	6
4	- - - - - - - - - -	5
5	- - - - - - - - - -	1
6	- - - - - - - - - -	0.

et adhaesit regulae ferreae

Experim. XXXII.

Quadraginta libris simul resinae impositis et eas resinae insistens tangens

1mo	tactu fili ferrei index recessit ad gr.	9
2	- - - - - - - - - -	6
3	- - - - - - - - - -	4
4	- - - - - - - - - -	2
5	- - - - - - - - - -	0.

repe-

repetito experimento recessit index

1 tactu fili ferrei ad gradum	10
2 - - - - - - - - -	7
3 - - - - - - - - -	5
4 - - - - - - - - -	3
5 - - - - - - - - -	2
6 - - - - - - - - -	1
7 - - - - - - - - -	0.

repetito eodem experimento recessit index

1mo tactu ad gr. - - - -	10
2 - - - - - - - - - -	$7\frac{1}{2}$
3 - - - - - - - - - -	5
4 - - - - - - - - - -	$3\frac{1}{2}$
5 - - - - - - - - - -	2
6 - - - - - - - - - -	1
7 - - - - - - - - - -	0.

§. 11. Ex his exper. 29. 30. 31. 32. videre est.

Maiorem massam difficilius eodem corpore adplicato perdere electricitatem minorem massam facilius. Quater enim meo corpore adplicato i. e. adplicatis circiter 640. libris massa electrificata 24. libr. perdidit electricitatem. Massa vero 324. libr. electrificata perdidit electrificatem sexies adplicato meo corpore i. e. 960. libris circiter.

Vt magis vtilia fiant talia experimenta corpora regularia sunt adhibenda.

Experim. XXXIII.

§. 12. Si felis in lamina ferrea 3) collocatur et manu tenetur, electricitate producta sentiuntur ictus dolorosi et et pulſus animalis etiam fortior et celerior obſeruatur cum inſigni impatientia.

Experim. XXXIV.

Si gallus in lamina ferrea electrificatur admoto extremitatibus pedis eius manu exit ignis ſibilans coeruleus, ſaepius lux dilutior longitudinis duorum ferme digitorum.

Experim. XXXV.

Brachio filo ferreo electrificato admoto ſentitur ictus per veſtimenta nec index ſtatim recedit, quia veſtimenta ex lana parata non ſunt corpora deriuatiuae electricitatis valde capacia, ſi veſtimenta ſunt ex ſerico et colorata index non mutatur ſenſibiliter.

Experim. XXXVI.

Capite crinibus gaudente nec glabro filo ferreo electrificato admoto ſentiuntur ſimiliter ictus doloroſi.

Schol. In reſina altitudinis trium linearum ſtans et applicans manum ſphaerae electrificatae vt experimento 11 ſenſi ictus ſub planta pedis vix ferendos; hoc vero non ſemper euenit.

Experim. XXXVII.

Spiritum vini in cochleari admouens corpori electrificato ad accendendum, ſcintilla eiaculata ſenſi ictum doloroſiſſimum praeſertim ſi cochleare tenerem inter muccinum ex ſerico. Aliqui aſſeruerunt ſe ſentire ictum conſtrictiuum per totam palmam manus, alii per totum brachium. Qui spiritum digito accendit eundem ictum vix ferendum observat.

Experim. XXXVIII.

Si spiritus vel naphta electrificati accendendi fiunt digito non electrificato, idem sentitur ictus.

Experim. XXXIX.

Si prisma circa tubum vitreum mobile (fig.) adplicatur ad ferrum electrificatum in dist. duar. lin. et alterum prisma, quod digitus contingit, ab illo remotum est tres lineas et saepius quatuor, et homo tenens prisma electrificatur vt experim. 1. oritur ignis concrepans die visibilis, propagatus a prismate *c*, et eiaculatus ad prisma *d* et inde ad filum ferreum electrificatum BCDEF.

Experim. XXXX.

Si bilanx electrificatur, post filum ferreum (1. 2. 3.) adplicatum circa a, pondera non electrificata 3) attrahunt lancem ex distantia duorum pollicum, et oritur in lamina ferrea flamma ingens concrepans valde, at cessat phaenomenon continuata electrificatione, massis ferreis ipsis electricitate imbutis, si connectuntur massae ferreae cum corpore destitutae electricitatis infinitae virtutis, continuae attractiones, flammae et concrepationes fiunt.

Ex-

Experim. XXXXI.

Si pondera ferrea 3) electrificantur filo ferreo (1. 2. 3.) ad pondera ferrea adplicato attrahunt lancem et eadem phaenomena exoriuntur: ſed ceſſant etiam phaenomena, niſi bilanx cum corpore deriuatiuae electricitatis infinitae virtutis connectatur.

Schol. Bilance vſus ſum etiam ad ponderandam vim electricitatis electricitate enim ſumma, quam mea ſphaera excitare potui eleuaui drachmam vnam cum dimidia per duos dig. Lond. ſed de experimentis ipſis impoſterum.

Experim. XXXXII.

§. 14. Si homo electrificatus diſtat ab indice ferreo 3. pedes Londinenſes, index electrificatus fugit hominem, ſi homo diſtribuit electricitatem per corpora deriuatiuae electricitatis infinitae virtutis, index electrificatus accedit ad hominem paululum.

Schol. Ne ergo turbetur index ad hoc phaenomenon attendendum eſt.

Experim. XXXXIII.

Si laminae ferreae 3) tabulam ligneam craſſitiei pollicis imponebam et electricitatem in eam deriuabam lanx etiam attrahebatur ex diſtantia duorum digitorum, ſed lux abſque ſono oriebatur tantum, inſignis tamen ſplen-

 doris,

doris, lanx in contactu manebat cum tabula lignea, et nec ſic quidem ſtatim reliquo apparatui electricitatas aufe- rebatur, ſed filum ferreum tactum dedit adhuc lucem cum exiguo ſufumo.

CLAS-

CLASSIS TERTIA

CONTINENS

HISTORICA.

ΓΕΛΩΙΩΝ : alteri, illam faciei oppositam, totidem litteris adscriptum idem nomen. Aduersa pagina vtrobique sistit Herculis caput, leoninis exuuiis obtectum, sub maxillis in nodum quasi constrictis. Istud tamen discrepat, quod maior faciem aperte barbatam exhibeat; minor autem omnino imberbem, iuuenilem, glabram.

Nihil esse singulare in capitibus nominibusque, quae [illegible] numi ostendunt, facile largior; neque quidquam habeo, quod de ipsis afferam, nisi. Id autem credo [illegible] esse praeteritum, quod hinc licet discere τὸ ἐθνικὸν, seu formam [illegible] nominis, quo ciues Gelae se ipsos antiquissimo aeuo signauerunt. [illegible] simi-les numos [illegible] inciso [illegible] descripserit, equidem nec certo negare audeo, neque affirmare valeo. Certe apud GOLTZIVM et PROSP. PARVSIVM eos non deprehendo: neque IO. HARDVINVS, qui numos populorum et vrbium ex instituto illustrauit, eos vel ipse vidit, vel apud PARVTAM, quem ego frustra requisiui, ille se inspexisse testatur, inuenit. Vero enim est simillimum illum non fuisse neglecturum, quod sibi sententiae repugnantia in ipsis aperte cognouisset. Etiam Cl. IO. IAC. GESNERVS in numism. Graec. popul. et vrbium, quae nouissime prodierunt, nullum affert, qui nostris sit similis; quin nec vnicum habet, in quo nomen gentile inueniatur. Sed licet iam pridem docti viri animaduerterunt, fieri non posse, vt integer iudicetur locus STEPHANI BYZANTINI, quando in voce ΓΕΛΑ sic scribitur: τὸ ἐθνικὸν ΓΕΛΑΙΟΣ, ἢ Γελῷος. Nam quum tot classici auctores Graeci, et inter hos antiquissimi, HERODOTVS ac THVCYDIDES illo Γελῷος semper vsi sint, quod hic

hic grammaticus improbare videtur: pridem adducti sunt, vt transposita verba agnoscerent, eademque sic ordinanda: τὸ ἐθνικὸν Γελῷος, οὐ Γελαῖος. Ita statuentibus LVC. HOLSTENIVS non quidem repugnat: sed aliam tamen et mitiorem medicinam videtur suadere, quando vnica syllaba mutata sic legendum existimat: τὸ ἐθνικὸν Γελαῖος, ϰ [vel ἢ] Γελῷος.

Fateor mihi valde arridere hanc sententiam doctissimi viri: quippe cui sequentia optime quadrant. Subiicit enim: ὡς Ἄβρων ϰ ἡ συνήθεια. Quibus innuit sibi non esse ignotum, quod Abronis auctoritate, atque vsu tyranno, nitatur illa denominatio, qua ciues huius vrbis Geloi solent appellari. Mirum autem videri possit, quid in mentem venerit Stephano, cur Γελαῖος, quod forte in nullo superstite monumento legitur, quam Γελῷος, maluerit formare gentile nomen. Forte incolae vrbis Gelae posterioribus temporibus auersari coeperunt τὸ Γελῷος aut Γελώϊος, quod *ridiculum* denotat: sibique potius aptauerunt nomen gentile Γελαῖος, cui nihil ambigui sensus subest. Sic Hallenses nostri, quando vernaculo sermone scribunt, non facile adhibent adiectiuum hällisch, sed satis constanter ponunt hallisch: quamquam illud prius vicinorum plurimis vulgatissimo vsu tritum est; cui maleuoli quidam, diphthongo leuiter mutata, odiosam significationem subiiciunt.

Id suspicantibus non leui adiumento est CICERO, rerum Siciliae, si quisquam alius, probe gnarus, quippe, cum quaestor esset, in ea versatus; eiusdemque prouinciae in accusatione C. Verris patronus. Hic abstinet se a Geloorum nomine, et, quoties eo vtendum fuisset, potius

Gelenses vocat. Enimuero quicquid ab hoc praesidii speratur, eripere videtur DIODORVS SICVLVS, rerum patriae suae non minus gnarus, apud quem semper Geloos inuenimus. PLINIVS Gelanos appellat: si non omnino Gelaeos scripsit, et librariorum vitio N pro E surrepsit.

Fatendum tamen est, fuisse omnino tempus, quo haec ciuitas non refugiebat gentile Geloorum nomen, ab euentu siue fabuloso, si BOCHARTO credimus, siue vero, quondam impositum: sed propriis monumentis suis inscripsit ad omnem posteritatem propagandum. FAZELLVS, quem in notis ad Stephanum video laudatum, citat numismata cum oppidanorum inscriptione ΓΕΛΩΩΝ. Si recte et acute videt, oportet illos esse a nostris diuersos, in quibus perspicue legitur ΓΕΛΩΙΩΝ. Quamquam fatendum est, eodem rem redire, siue prius Ω nudum exstet, siue iota ei subiungatur, siue subscribatur. Est enim hic grammaticorum dissensus; quorum aliis hoc, illud aliis videtur: quem qui noscere cupit, adeat ETYMOLOGVM, EVSTATHIVM, THEOD. GAZAM, alios, qui ipsum opinionibus suis explebunt inque partes trahent. Antiquius puto ΓΕΛΩΙΩΝ; et antiqui moris crebra sunt exempla, vt πατρώϊος, ἡρώϊος, ὀλοφώϊος, pluraque eiusdem generis, poetis praecipue familiaria.

Oportet autem antiquissimos esse hos numos et bis mille annorum aetatem forte satis longe superare. Docent enim vetustissima monumenta Gelam sui iuris esse pridem desiisse, quum Gelonem, tyrannum potentissimum, iam varios dominos antea experta, acciperet: hoc autem Syracusis iam potito, Hieroni, fratri eius, tradita fuerit. Vero autem simile, et exemplis multis consentaneum est, numis

numis, qui a ciuitatibus sub vnius imperium redactis cusi fuerunt, nomina principum fuisse sola inscripta, aut vna cum populi mentione.

Sic apud GOLZIVM *tab. XI*, prostant duo, in quibus praeter ΓΕΛΑΣ nihil legitur; hisque Hieronis et Gelae mentionem facientes sex subiunguntur; cum solo autem Hieronis nomine *tabula XIII*. quatuor visuntur. Puto autem illos omnes, in quibus tantum ΓΕΛΑΣ, ΓΕΛΩΙΩΝ aut ΓΕΛΩΩΝ mentio fit, ante Gelonis Hieronisue imperium fuisse procusos. Quum vero ante Salaminiam pugnam Gelo iam Syracusis potitus esset; illa autem tam celebris pugna, ex PETAVII calculo, ante initium aerae Christianae annis CCCCLXXX. acciderit; erunt ex hac hypothesi certissime maiores aetate XXII. saeculorum. Incertum autem relinquo, quantum vltra id tempus excurrant: quum ante Gelonem iam commemorentur tyranni Gelensium.

Vnquamne postea plenam libertatem, cum pristino flore, recuperauerit Gela; haud expeditum est dicere. Inuenio sane Gelenses aliquid virium exseruisse Agathoclis temporibus, Atheniensium ope subnixos. Videtur autem hic tyrannus omnium grauissime Gelam deiecisse, eamque deinceps sub Poenis numquam conualuisse. Horum autem rebus primo statim bello Punico tantum attritis, vt Siciliam Romanis permittere deberent: non est vero simile ab illo tempore numos ibi fuisse conflatos. Vnde si minimam aetatem computemus, duo annorum millia iam effluxerunt ad nostra tempora.

Sub Romanis vero Gela numquam magnopere fulsit. STRABO miseram eius conditionem describit. ὄυτε γὰρ

Ἱμέραν ἔτι συνοικουμένην ἴσμεν, οὔτε Γέλαν. Subiit scilicet sortem plurium in eadem insula olim florentissimarum vrbium, quae pleraeque tunc erant pastorum domicilia; quum montes et campestres regiones equorum boumque greges pascentibus Romani tradidissent.

Mirum quam inique Siculorum, olim tam potentium, rebus consuluerunt: vnde nummi coloniarum et vrbium, in Augustorum honorem cusi, de Siculis minimum trahunt, et, si recte memini, vna tantum Panormus in illa serie, nec frequens, conspicitur. Quod tanto magis admirandum videtur, si Hispaniarum, Asiae, Aegypti, Thraciae, Moesiae, Ponti, aliarumque remotissimarum vrbium sortem feliciorem cogitamus: quarum multae tam obscurae sunt et historicorum monumentis praeteritae, vt numquam in orbe fuisse noscerentur, nisi vilibus metallis Augustorum vultus et nomina, vna cum suis nominibus et insignioribus fatis, commisissent; quae memoriam earum quotidie renouant et ad omnem, quae litterarum amatura et cultura est, posteritatem propagant.

NVMMI

NVMI TRAIANI ET IVSTINIANI AVGG. QVIBVS BARBATI EXHIBENTVR

I. H. Schulze.

Numus aereus in museo meo. Caput laureatum et barbatum. IMP. CAES. TRAIAN. AVG. GERM. = Verres vitta redimitus. S. C. Tab. VII. Fig. 3.

Numus aereus in museo meo. Caput, cum parte pectoris, diademate ornatum et barbatum. DN. IVSTNIANVS P. P AVG = In area M, ad cuius vtrumque crus stella, supra crux, infra CON. Fig. 4.

Ante quatuor annos, cum aliis valde mihi gratis numis, ex Dacia ad me missus fuit hic, quem produco, Traianus exigui moduli, qui faciem optimi principis barbatam exhibet, cum hac epigraphe: IMPerator CAESar TRAIANus AVGustus GERManicus. Auersa pagina nihil habet praeter verrem vitta redimitum, et litteras S. C. Integerrimus est et aerugine fusca obtectus, genuinus.

Limis, fateor, oculis adspiciebam insolitam faciem, diuque inter reiiculos iacentem relinquebam, donec accedebat Iustinianus barbatus, qui me initio etiam ancipitem tenebat, Augustumne salutarem, an laruatum et reprobum abiicerem. Impellebat me haec aestuatio, vt de barbis Romanorum accuratius dispicerem, et tam per historicorum volumina lucem requirerem, quam praecipue ex numorum inconcussa fide certam aliquam rationem elicerem, qua diiudicari haec res debeat.

Nec fructu caruit impensus huic disquisitioni labor: quin potius illud nunc certum teneo, non esse repudiandos eos numos, qui Augustos alioque illustres viros, quos frequentissime imberbes adspicimus, cum barba spectandos offerunt: verum potius illos, si cetera antiquitatis et genuinitatis signa addicant, inter pretiosiores esse reponendos: quum nulli sine graui ratione procusi sint: quam vbique reperiremus, si illorum temporum historiae pleniores ad nos peruenissent; quemadmodum in aliquibus dare licet omnino irrefragabilem.

Dabo dictorum probationem et illustrationem, quae sufficere possit: deinde ad propositum Traiani nummum progrediar. Nemo dubitat, quin Augusti aeuo Romani barbas sibi radendas curauerint. Quod vero laudatus princeps ab hoc more non alienus fuerit, insuper certos nos reddit PLINIVS, qui *lib. VII. cap.* 59. scribit: *primus omnium radi quotidie instituit Africanus: sequens diuus Augustus cultris semper vsus est.* Fuisse tamen dies, immo continuos menses, quibus cultris non vteretur, testem luculentum habemus SVETONIVM in *August. cap.* XXIII. quando ita clade Variana consternatum eum scribit, vt per continuos menses barbam capillumque submitteret. Apparet vna caussa, magnus luctus, quo detenti in squallore manebant.

At, inquis, probandum est, quod luctus significatio vsque ad publica monumenta manauerit. Equidem non subterfugio illam probationem, si mihi concedatur exemplis aliis, quam quae in hanc cladem congruant, eam praestare. Vero enim simile est, non voluisse aut principem memoriam huius calamitatis aeternam reddere, aut senatum vulnera rei publicae tanta propalare. Dabo itaque Augustum vna cum Lepido et Antonio, collegis triumviris

viris rei publicae constituendae, huius moris testes, vt spero, idoneos. Inspiciamus apud FVLV. VRSINVM Antoniae familiae tabulam VI. offerentque se nobis *num.* 5. Augustus, et *num.* 6. Antonius barbati. Si quaerimus caussam: ea quidem manifesta est inspicientibus priorem nummum, cuius aduersae parti CAESAR IMP. adscribitur, auersa autem caduceum alatum pingit, cui subscribitur ANTONIVS IMP. Iam vero nescio aliud in historia tempus inuenire, cui conciliatae inter Antonium et Augustum pacis, luctusque communis notae quadrent, praeter illud, quo Antonius Fuluiam coniugem extulerat, quam socrum quondam Augustus habuerat: vt decori ratio signa luctus publica ab ipso requireret. Quod autem statim ab eius discessu pax inter ambo coaluerit, testibus DIONE CASSIO et PLVTARCHO constat. Sed et Lepidum barbatum videas apud eundem VRSINVM familiae Aemiliae *tab.* III. *num.* 2. et Vibiae *tab.* I. *num.* 2. quos nimos docti viri ad Antonium suam Fuluiam lugentem et concordiam reparatam pridem traxerunt. Quae vero alia necessitudo inter Lepidum ac Antonium, praeter collegii societatem, fuerit, iam non succurrit, neque vacat requirere.

Aliud exemplum Augusti conspicue barbati dat laudatus auctor, quod in Iuliae, familiae *tab.* VII. sexto loco conspicitur, habetque adscriptam temporis notam: COS. ITER. ET TER. DESIG. Conueniunt haec in A. V. DCCXX. cui in fastis adscribitur: SEX. POMPEIVS MAGN. F. CN. N. MAGNVS IN INSEQ. ANNVM DESIGN. ERAT ANTEQVAM INIRET HOSTIS IVDICATVS OCCISVS E. IN EIVS LOCVM F.

EST

EST L. VOLCATIVS L. F. TVLLVS. Hanc itaque Sextum si lugere occisum, quod hostis fuerat, non debuit; putauit tamen lugendum, quod, teste SVETONIO, a matre Magnum Pompeium arctissimo contingebat gradu. Scilicet tunc iam in more fuit positum, vt principes etiam illorum mortem lugere se significent, quibuscum bella gerunt.

Sed non vnica barbam alendi caussa luctus fuisse videtur apud Romanos. Docet enim PLVTARCHVS, etiam in bello, si non omnes, certe aliquos eam aluisse, quo magis viriles viderentur. Cognoscet hoc, quisquis leget ipsum de Antonio referentem, qualem se iuuenis praestiterit, quum Gabinium proconsulem in Syriam et Aegyptum comitaretur, eiusque auspiciis praeclara multa gereret. Inter alia commemorat, quod fuerit ipsi πώγων τις ὐκ ἀγεννὴς, *barba non ignobilis*; quod Dacerius vertit: *la barbe fort epaisse*, et ante ipsum Amyotus reddiderat: *la barbe forte et espesse*. Hanc eum etiam reliquo tempore, quoties in castris degebat, aluisse, eodem auctore colligo: quia ad Mutinam ab Caesare Augusto victus, inque celerem fugam coniectus, Lepidi castra, perfugium ibi quaerens, accessit, miserationemque militibus mouit coma inculta et barba prolixa, quam mox ab infelici praelio coeperat promittere. Significanter dicitur βαθὺς πώγων, μετὰ τὴν ἧτταν εὐθὺς καθειμένος. Sed prolixam barbam paucis diebus nemo producit, cui non antea est mediocris, quam forfice detondendo aut praecidendo intra limites decori continet: de quo memini HADR. IVNIVM copiosius disputare.

Iam

Iam vt propius ad Traiani numum accedamus, caret ille quidem indubia temporis nota: quum nec consulatus nec tribuniciae potestatis numerum adscriptum habeat: sed ipsum illud, quod non alio quam Germanici titulo fulget, argumento est, eum inter initia imperii esse cusum, ante acceptum patris patriae honorem. Eódemque relatum hunc numum video a Comite MEDIOBARBO, qui ipsum indicat *pag.* 148. simulque refert, alium ei similem exstare, qui in auersa parte clauam Herculis sistat.

Credo autem plures omnino procusos exstare Traianos, quibus nomen non adscriptum est: vnde ad alios Augustos fuere relati. Iudicem hic faciam beneuolum lectorem, an multum a veri similitudine absit, quod dicturus sum. Vir quondam illustris et numariae rei peritissimus PETRVS SEGVINVS in *select. numism. pag.* 47. primus refert iconem aurei didrachmi, cui tamen simillimum etiam aereum se in Italia olim vidisse indicat. Eius vna parte videtur caput laureatum et barbatum, nullo adiecto nomine; quod Sept. Seueri esse nihil dubitat Seguinus: altera regis caput diadematum visitur, cum litteris ΒΑCΙΛΕΩC CΑΥΡΟΜΑΤΟΥ. Subiungit vir praestantissimus, apud illustrem LAMONIVM a se conspectum itidem aureum fuisse numum, in cuius altero latere facies Traiani sine inscriptione quidem, sed cognitu facillimum, fulserit: alterum autem regis Sauromatae caput et nomen praetulerit.

Eosdem numos ex thesauro regis Galliae, in quem peruenerunt, delineatos dedit MORELLVS *specim. rei numm. antiq. tab. VII.* vbi caput imperatoris, quod in Seguiniano est, tam exacte refert Sept. Seuerum, vt vix possit aliquid dari similius. Tanto autem magis recedit ab delineatione Seguiniana: prorsus vt suspicionem moueat, optimum virum intempestiua philocalia veritati aliquid detraxisse, vt indulgeret receptae opinioni. Eiusdem studio debemus ectypum alterius aurei numismatis Lamoniani, in quo caput Traiani cognitu facillimum Seguinus scribit, cum notis numeralibus Η Υ a Seguino praetermissis.

Sed numum Seguinianum se vidisse testatur perillustris EZ. SPANHEMIVS *de praest. et vsu numism. dissert. V*. Digna sunt, quae attente considerentur, eius verba: „Regem Sauromaten eruere mihi liceat ex insigni numo „aureo, quem videre licuit haud ita pridem in illustri mu„seo humanissimi reique antiquariae peritissimi Seguini. „Numus est, qui hinc Seueri Aug. caput exhibet cum „stella, ac BARBARIS QVIBVSDAM LITTERIS: il„linc autem caput barbatum, cum diademate ac inscripti„one ΒΑCΙΛΕΩC CΑΥΡΟΜΑΤΟΥ. De hoc autem „Sauromate magnum apud auctores in rebus Seueri silen„tium.

Apparet hinc, Spanhemium αὐτόπτην litteras isti capiti, quod Seuerum referre cum Seguino putabat, subiectas, barbaras agnouisse, id est tales, vnde non posset eruere vllum significatum. Sed id dissimulauit Seguinus, satisque distinctas et cognitu faciles notas exhibuit Δ Ϙ V. quas valere CCCXCIV. manifesto quidem errore typographico, pro CCCCXCIV. subiicitur.

Seguinum sequutus IO. HARDVINVS in *histor. August. p. m.* 799. numum hunc assignat anno Seueri quarto: aeraeque Pontii Paphlagonici regum initia reiicit ad A. V. CCCCLVI. Quod si satis firmum est, „ omni-

noque

noque Seuerus in illo numo fignatus fuit: non possunt vtique sollicitari illae numerorum notae. Vereor autem magnopere ne potius illatae fint, quam ex numo Seguiniano erutae.

Ab Harduino non multum diuersus est IOAN. VAILLANTIVS in notis et obseruationibus ad Petr. Seguini selecta numismata *pag*. 396: vbi Bospori seu Sarmatiae regum aeram ab anno V. C. CCCCLIII. orditur. Atque ex huius calculo ille, qui cum Seueri capite iungi creditur, ad A. V. C. DCCCCXLVII. erit referendus. Enimuero in medio hanc omnem de ista aera quaestionem relinquo positam: illud autem puto non temere me monere, quod Sauromates iste, qui Seuero coaeuus ex fide Seguiniani numi creditur, duplici iure suspectus esse debeat: quod et Traiani barbati ac Seueri magna similitudo est, praesertim si quis in numo non optime elaborato aliquid rudiori et barbarae fabricae condonet: et quod numeri, quos Seguinus dedit, omnesque secuti sunt, non iniuria, vt quidem spero, in dubium reuocari possunt. Tantoque securius puto inhaereri hic Traiano, cuius temporibus Sauromaten vixisse PLINIVS testatur; quum illius imago, atque in altera facie Sauromates rex, in numo Lamoniano, cum litteris H Υ clare exstet; atque eius successor etiam Hadrianus cum eodem visatur apud HAYMIVM *thes. Britann. part. II. pag.* 53. cum numeris ΓΙΥ: sed Sauromatae, qui cum Seuero vixerit, nec vola exstet nec vestigium, si ab numo Seguiniano, admodum multis dubiis subiacente, discesseris.

Cur in altera numi huius pagina verres exstet, isque vitta exornatus, vix aliam rationem dare possumus, quam quod sacrificium aliquod solemne denotetur. Forte exercitus lustrationem intelligere debemus: ad quam peragendam verrem fuisse sacrificatum ex ipsa columna Traiani hodieque superstite probat STVCKIVS *sacr. et sacrific. gentilium descript. p. m. 66.* Quoniam autem in illo sacro bos etiam immolandus erat, qui hic non signatus est; videndum erit annon iustius de foedere quodam icto hic cogitetur. Quid si innuat cum rege Sauromate initum, cuius opera ad bellum cum Dacis suscipiendum vsi Romani videri possint. Vero haec similia existimo: sed certissime nemo aliquid de his dixerit, ob auctorum historiae romanae deficiens suffragium.

Subiicio pauca de Iustiniano barbato. Debeo praestantissimum numum, omnibus genuinae bonitatis characteribus praeditum, humanitati illustris academiae Fridericianae Senioris et academiae Imperialis Petriburgensis socii FRIDERICI HOFMANNI, qui etiam amborum Gelensium, quos modo produxi, me possessorem voluit, vt ad publici boni emolumentum eos protraherem.

Multae sane prostant icones numismatum augustali vultu diui Iustiniani ornatorum: vt videri potest in tabulis vitae huius imperatoris a magnifico academiae Fridericianae Cancellario IO. PETR. de LVDWIG descriptae magno numero adiectis. Res autem ipsa loquitur, quam sint infrequentes icones barbatae, et quam paucissimae inter has barbae vestigium in mento offerant. In nostro omnia senem produnt: vnde videant eruditi, annon rectissime coniici possit, apparere hic Iustinianum, qualis fuit, quum iam LXVII. annorum aetatem adeptus morte ereptam sibi Theodoram Augustam lugeret. Monogramma auersae partis non moror, quum sit frequentissimum, et et multorum coniecturis tentatum, quibus certiora dare non possum.

Quum haec scripsissem, perueniunt ad me ampla volumina, quibus PAVL. PEDRVSIVS musei Farnesiani diuitias exposuit. Dum ceteris tantisper sepositis tomum secundum, argenteis vsque ad Traianum, hoc est ad finem aeui imberbis, auide perlustro, inuenio *tab. IV.* duos Augustos barbatos, qui in ea tertium et quartum locum occupant. Mihi vtique omnium primi hi videntur, qui in Octauii Augusti honorem vmquam fuere cusi: aut si non primi sunt, repraesentare ipsum ad magnas res gerendas tunc primum accedentem. Caput nudum est, cui in altero nihil, in altero autem C. CAES. IMP. adscriptum. In huius aduersa est equo stanti insidens persona, cuius vestimenta non sunt clarissime expressa, cum litteris S. C. In alterius postica pagina est persona equo insidens ad cursum incitato. Subscriptum est POPVL. IVSSV. Significari autem hisce typis statuas ipsi positas ex Vell. Paterculo bene docet doctus commentator. Eam autem rem decretam fuisse non post longum a Iulio interemto tempus, clarissime edocet SVETONIVS. Vnde Oct. Caesarem, quem Augustum postea vocauerunt, patrem adhuc inultum luxisse clarissime intelligitur.

Progressus hinc ad tomum quintum, tabula eius V. binos maximi moduli numos Domitianum exhibentes inveni conspicue barbatos, quorum alter consulatu VII. alter XV. signatus est. Quod ad priorem pertinet, videtur is inter initia ad se delati imperii, post obitum TITI fratris, percussus: adeoque squallori et luctui, in quo tunc fuit, attribuenda barba fuerit. Posteriorem vero annum inter laeta et honorifica, quantum constat, totum consumsit: nulla vt cogitari aut indicari possit vel publica vel priuata calamitas, quae luctus signa requireret.

Forte DIO CASSIVS, qui Hadrianum Augustum primum fuisse docet, cui barbam nutrire visum sit, nimiam apud aliquos venerationem et fidem suo hoc adserto meruit. Vere enim video aliquos, qui Hadrianum numquam non barbatum exhibent: quum me vsus docuerit, vix vicesimum quemque Hadriani numum vere barbatum obtingere. Annon iusta sit suspicio, quod in imperatoribus ipsum praegressis barbam obuiam saepe neglexerint, qui numismata delinearunt aut delineanda dederunt; vel inter suspectos et apocryphos reposuerint tales; decidendum illis relinquo, qui rem numismaticam non ex elegantibus tabulis tractare satis ducant, sed ipsos comparare ac tractare numos adsueuerunt.

GALE-

GALERIAE VALERIAE AVG.
NVMI ILLVSTRATI.
a
I. H. Schulze.

Numus aeneus in museo meo. Caput Augustae capillis ita comtis, vt ad similitudinem exuuiarum leonis accedere videatur, a temporibus surgente ornamento, lauri foliis simili. GAL. VALERIA AVG. Tab. VII. Fig. 5.
= Figura feminina stans dextra pomum, sinistra stolam eleuat: hinc stella, illinc luna. VENERI VICTRICI. Sub pedibus litterarum detritarum euanida vestigia.

Numus itidem aeneus ex museo meo. Caput Augustae ad pectus cum stola: capillis in modum galeae compositis. GAL. VALERIA AVG. Fig. 6.
= Figura stolata stans, vt in praecedenti. Eadem epigraphe. a dextris in area stella, a sinistris Γ. Sub pedibus sunt litterae SM. TS.

Obiter adducitur

Numus aeneus musei mei, exigui moduli. Caput Augustae cum parte pectoris. Capillus in modum exuuiarum leonis comtus, cinctus monili baccato. FL. HELENA AVGVSTA. Fig. 7.
= Femina stans stolata dextra ramum. SECVRITAS REIPVBLICE. Sub pedibus litterae B S intermedio serto.

Si amplissime patentem antiquitatum doctrinam magno oceano comparare licet: syrtibus vadosisque locis conferre debe-

debemus illam ex eius ambitu partem, quae de re vestiaria, deque ceteris ad cultum et ornatum corporis pertinentibus, solet praecipere. Nam quum talia lege nulla, nisi in sacro ordini adscriptis, continerentur: factum esse obseruamus, vt labentibus annis multa paulatim immutarentur: aliquando autem, si principes exemplum praeirent, subita conuersione anno vertente placerent, quae ineunte nemini in mentem forte venerant.

Fit inde, vt quisquis de his velit praecepta tradere, nisi seipsum certo alicui et determinato tempori adstringat, necessario debeat impingere et lectorem suum male confundere. Non dicam nunc de aliis; sed quia modo de barba attigi aliqua, de capillitio et coma paucula subiungam. Neque tamen nunc virorum in hoc genere morem tantopere respiciendum duco; etsi de hoc argumento plura suppetunt: sed de matronis potissimum dispiciam.

Si quis velit inde ab Augusti excessu, quo primum mulieres signari in numis coeperunt, vsque ad Iustiniani M. initia, quod tempus quingentos annos exiguo excessu superat, comparare Augustarum in numis superstitum capita: mirabitur vtique, comae cultum non solum in plerisque diuersum, sed nec in vna eademque Augusta ita perpetuum, vt non notabiles differentiae intercedant. Illas autem a sculptorum arbitrio semper prouenisse, vix mihi persuadere possum; etsi magno et in his litteris summa cum laude versato viro placuisse intelligo, „moueri nos „non debere, quod varia sunt interdum capitis tegumen„ta: haec enim non aetatis esse sed officinarum discrimina.

Exemplo autem esto Galeria Valeria Augusta, cuius nomine inscriptos binos numos aereos, ad genuina archetypa diligen-

diligenter designatos, exhibemus. Numismatum his nominibus inscriptorum indicem dat celeberrimus ANSELMVS BANDVRIVS in *numismat. imp. Rom. tom. II. p.* 146. ibidemque aeri incisum vnum exhibet. Ante ipsum singulos typos dederunt BEGERVS *thes. Brandenb. Vol. II. p.* 790. MEDIOBARBVS *p.* 444. et PATINVS *imp. Rom. numism. ex aere p.* Alibine prostent alii, mihi non exploratum est: certe in supellectile libraria, quae ad manus est, nullum inuenio.

Iam vero insignis exoritur dubitatio, quum GALERIAE VALERIAE binae Augustae eodem fere tempore vixerint; vtri earum hi numi debeant tribui: et, si vtraque signata fuit, quibus notis dignoscere eas liceat, vt suum cuique vultum, suumque monumentum adsignemus. Scilicet vnam M. Aur. Val. Maximiano, quem Herculeum vocant, coniugem fuisse scribunt Comes Mediobarbus et illustris Abbas Bandurius, qui simul addit, fuisse eandem matrem Maxentii, qui postea Augustus fuit, et Faustae, quae Constantino coniux obtigit. Patriam ei Syriam omnes adiungunt. Quumque is Augustus, quo marito vsa illa est, imperium annis fere viginti tenuerit; cur in tanta aeris suo nomine signati copia vxorem non etiam curauerit signandam? Porro etiam, quum is Augustus in Gallia et Germania potissimum res gesserit; vero vtique simile est, illos, si quos in memoriam Galeriae Valeriae suae cudendos curauit, facilius potuisse in his tractibus superesse, quam alterius, de qua mox dicemus.

Sed altera Galeria Valeria, quae Diocletiani Augusti filia et coniux Galerii Valerii Maximiani fuit, auctoris libelli de mortibus persecutorum elogio cognita, consequuta est vt ipsi omnes illi numi cum Latina epigraphe et Veneris victricis typo tribuerentur. Haec cum marito Caesare per XIII. annos vixit: quibus eam Augustae titulo vsam fuisse, quum coniux Caesaris appellatione contentus esset, vero simile non videtur. Quibus autem sex annis ille Augustus fuit, in orientalibus prouinciis versatum ipsum maxime inuenimus: vnde non sine iusta ratione existimamus, non nisi paucos ad nos penetrare potuisse numos Augustae huius, si quos omnino procudendos in honorem eius Augustus curauerit.

Si mihi venia detur liberrime, quod sentio, expromendi, fateor, mihi ob modo dictas rationes probabile videri, quod hi omnes numi potius ad illam Galeriam Valeriam, quae Herculei coniux fuit, referendi sint, quam ad alteram, quae Diocletiani Augusti erat filia. Vt vero id tanto confidentius faciam, suppetit ratio singularis, quam ea conditione ediseram, vt lectoris, antiquitatum et historiarum periti, iudicio permissa sit.

Quantopere is Maximianus, qui Diocletiani collega fuit, Herculem aemulatus sit, vel agnomen Herculei docet: magis autem confirmant tot numismata, in quibus HERCVLES CONSERVATOR, INVICTVS, PACIFER, VICTOR celebratur, vel virtus Augusti Herculis variis laboribus occupati typo adumbratur. Quae quum ita sint, quis non vero putet simillimum, in illa aula, quae principem habebat praeter reliquos deos Herculi addictissimum, plura fuisse sic comparata, vt Herculeum quid redolerent. Non itaque mirandum est, si seruitia Augusti Augustaeue cogitationes eo contenderunt, vt ea, quae ad cultum corporis eorum efficere debebant, proxime ad Hercu-

Herculem prodendum accederent. Comtricum igitur ingenio inuenta et perfecta est illa comam implicandi frangendique ratio, vt super frontem nares leoninae prominere viderentur, pendulique cincinnuli dentes mentirentur.

Atque haec puto ita clare in altero numo, qui primum locum occupat, conspici, vt nulli possit superesse dubium. Parco autem operae conquirendi prisca vocabula, quibus istiusmodi ornatum, omnesque eius partes, designauerint: ingenue enim fateor, me nondum inuenisse auctorem vel Graecum vel Romanum, qui me haec doceret. Nam quae antiquiores de comae capillorumue cultu passim disseruerunt, quaeque de suggestu, tutulo, aliisque dixerunt, non videntur secure huc trahi posse; quum non nisi inter huius aeui Augustas id studium comam ad similitudinem Herculei capitis concinnandi fuerit: neque exemplum eiusdem post huius generationis tempora deinceps obtingat.

In eodem primo numo conspicue assurgit aliquis apex ab auris regione emergens: quem identidem accurate considerans, ad foliorum lauri similitudinem accedere cognosco: cum eo tamen, vt mihi videar in eis animaduertere quaedam puncta; quae dubito an lauri flores fructusue debeam dicere, an gemmas, laminae cuidam in similitudinem foliorum lauri elaboratae, insertas.

Non multum dissimile ingenium est, vt mihi quidem videtur, in illa capilli concinnatione, qua Flauiam Helenam Augustam in adiecto numulo comtam videmus. Quae diuersa sint, oculus facilius arbitrabitur, quam calamus ad describendum valebit. Illud puto manifestum esse, quod haec Augusta baccatum monile circa temporum regionem ostendat, sed comae tam apte innexum, vt tamen Tab. fig.

men eluceat. In quo maxime differt ab ornatu Galeriae Valeriae, quae monile in altum ſurrectum et ample exſtans oſtentat.

Tab. fig. Sed alter Galeriae Valeriae Auguſtae, quem pariter accuratiſſime delineatum damus, numus, nihil omnino ſiſtit, quod ad Herculeum ornatum referre poſſis: etſi fortitudinis aliquam denotationem habet manifeſta galeae ſimilitudo. Etiam hic exſurgens ab auris regione aliquis apex conſpicitur, ſed oculus, etiam vitris adiutus, nihil diſtincte potuit in eo cognoſcere.

Auerſum vtriusque numi latus in eo, quod rei ſummam efficit, conſpirat. Scilicet ſiſtit Venerem victricem. Stat dea ſtolata, dextraque pomum praeſert, ſiniſtra ſtolae fluentem partem eleuat. Quid ſibi velint in area alterius, hinc ſtella, illinc luna creſcens; in alterius autem hinc ſtella illinc Γ: et vtrum officinarum tantum notae ſint, an aliquid altiori indagine requirendum includant, non audeo determinare. Litterae pedibus deae ſubiectae in altero non ſatis patent: in altero omnino conſpicuae ſunt S M. T S. Ex Harduini interpretandi regula exponi debent: SOCIETAS MERCATORVM TREVERENSIS SECVNDA. In medio haec poſita relinquo: illud tamec moneo, punctum inter ſecundam et tertiam litteram conſpicue exſtare in archetypo.

Non vtique rara eſt in numis Romanis VENVS VICTRIX; ſed vt typo diuerſa proſtat, ſic ratio eam ſignandi varia et diuerſa diuerſis principibus fuit. Omnes nouimus, quam ſaepe eam vel ſtantem vel ſedentem inveniamus in iis, quos ad Iulii Caeſaris honorem Aemilius Buca, Sepullius Macer, C. Maridianus, alii, cudendos

dos procurauerunt. Omnes autem consentiunt in eo, quod principi huic hoc maxime argumento antiquitatem et nobilitatem suae gentis ostendere placuerit, quippe ab Aenea per Venerem et Julum deductae. Atque in his dea hastam, maiestatis suae indicium, plerumque tenet, dextra autem victoriam sertum ligantem praefert. Victoriam non solum ab orbis terrarum maxima parte per Romanos reportatam illa praedicat: verum maximam illam Iulii Caesaris, qua orbis totius victorem populum in Cn. Pompeio vicerat, imperiumque sub dictatoris perpetui nomine administrabat. Id vero potissimum, comitate et consiliis mitioribus, quibus omnium ordinum beneuolentiam sibi compararet et conseruaret, securum reddere se cupere, Veneris symbolo significare voluisse merito videtur.

Quando autem Venus victrix in Augustarum numis exhibetur, commendare hoc symbolum videtur non solum venustatem earum, qua sibi amorem Augustorum conciliaverint: verum etiam affabilitatem et mitem ac clementem indolem, qua erga subiectos populos et ipsae vterentur, quamque maritis imperatoribus inspirarent. Atque haec ratio talis videtur, quam sibi arrogare omnes Augustae possent: sed illi tamen ante ceteras placere hic typus debuerat, quae se notis Herculeis terribilem fecerat, vt metum hunc eximeret, clementemque se et benignam venditaret.

Peruenio tandem ad illud, quod meae sententiae vel maxime aduersari videtur. Scilicet illam Galeriam Valeriam, quae ad Maximianum Herculeum pertinet, omnes vno ore EVTROPIAM tertio nomine appellant: citaturque a Mediobarbo et Bandurio numus, seu potius pars

 numi,

numi, cui haec fuerit epigraphe: VAL. EVTROPIA AVG. Nititur id omne vnius fide GOLTZII. Sed, vt libere dicam, suspectus est mihi testis; non tamquam fidem viri meritissimi in dubium temere reuocem: sed quod in veteribus numismatibus, non optime conseruatis, pronos nos ad lapsum esse, vbi opinione aliqua occupatam mentem afferimus, ipsemet saepe in me expertus fui. Inspice quaeso accuratissime delineatos numos meos, et obserua inscriptas aduersae parti litteras. Ab vna capitis parte legimus GAL. VAL: intermisso deinde spatio satis magno in parte faciei obuersa leguntur ERIA AVG. Ponamus iam, quod fieri facile potuit, litteras ER non fuisse conspicue integras: Goltzium autem, aut quisquis alius delineauit vel delineandum curauit, memorem fuisse nominis EVTROPIAE apud auctores lecti, ad quod vltimae litterae IA belle quadrant: eundemque considerasse interiectum spatium: an magnopere mirandum videri debet, si, quod voluit, facile credidit, coniecturae suae indulsit et litteras suppleuit, quas, securus auctorum fide, inserendas putatitio spatio firmiter credidit. Non laudo factum: sed Goltzii aeuo nondum tam religiose versabantur in hoc negotio, quam par fuerat, verum iuuari lectores coniecturis ingenio suo consentaneis pulcrum et corona ciuica dignum credebant.

Praeter hunc Goltzianum laudari alium video, diligentissimo Bandurio praetermissum; quem quidem delineatum aut accurate descriptum videre magnopere opto. Inscriptio haec refertur ΓΑΛ. ΟΥΑΛ. ΕΥΤΡΩΠΙΑ CΕΒ. Auctorem habeo virum illustrem D. D. RINKIVM, academiae Altorfinae antecessorem et seniorem meritissimum, num, in serie imperatorum, quae tractatui *de vet. numism. pot. et qual.* subiecta, et, vt ipse nos docet, a BAVDELOTIO de DAIRVAL potissimum accepta est: cuius *tom. II. pag.* 375. totidem apicibus exstat. Si de hoc Graeco omnia omnino certissima sint, non poterit tamen efficere, vt Latini, sine hoc tertio nomine, non pertinere ad illam iudicentur. Crispinam, Commodi vxorem, nemo, quod nouerim, in Latino numismate vidit cum BRVTTIAE nomine. Eandem tamen IO. HARDVINVS ex gaza sui regis vno exemplo; sed pluribus deinde NIC. FR. HAYMIVS *in thes. Britann.* comprobauit, omnibus quidem Graecis, hoc nomine fuisse visam. Sic Fuluiam Plautillam et Anniam Etruscillam ex Graecis duntaxat nouimus, quum Latinis numis tantum Plautillam et Herenniam Etruscillam nouissemus. Plura huius generis sponte sese ingerent gnauis rei numismaticae cultoribus: vt hic cumulandis iis superfedere liceat.

Tandem illud etiam adiicio, me illam Galeriam Valeriam, quae Herculeum ornatum praefert, dono illustr. FRID. HOFMANNI debere; cui gratiam habebunt, si quos eximii et praestantissimi numismatis conspectus delectauerit.

NVMVS

NVMVS MARCIANOPOLITARVM DESCRIPTVS

a

I. H. Schulze.

Tab. VII. Fig. 8. Capita aduersa GORDIANI PII et TRANQVILLINAE AVGG. ΑΥΤοκράτωρ Καῖσαρ Μάρκος ΑΝΤώνιος ΓΟΡΔΙΑΝΟϹ ΑΥΓουστος. СЕΒ. ΤΡΑΝΚΥΛΛΕΙΝΑ.

= Femina ſtans, dextra ſpicas tenet, ſiniſtra ſcutum. ΥΠ. ΤΕΡΤΥΛΛΙΑΝΟΥ ΜΑΡΚΙΑΝΟΠΟΛΕΙΤΩΝ. In area ſeorſum E.

Eſt ex aere medio in muſeo meo.

Niſi mihi videretur NICOLAI FRANCISCI HAYMII induſtria et accuratum in typis numorum fideliter exhibendis ſtudium omni dubio carere, potuiſſem hunc meum pro iam edito habere per laudatum virum, leuiter tamen ex ingenio ſuppleto et adiuto; adeoque omnino transmittendum ducere. Nam paucula ſunt, quae diſcrepant ab illo, quem theſauri Britannici *volumine II. pag.* 263. ex muſeo Deuonshiriano delineatum et deſcriptum dedit. Quum vero et in aduerſa non integram ex ſuo dare potuerit inſcriptionem, et in auerſa parte nonnulla magis, quam vt male conſeruatum archetypon arguant, diuerſa videam: putaui ex meo integerrimo factam delineationem haud eſſe lectori diſplicituram.

De Gordiano et Tranquillina Augg. quod dicam, noui nihil habeo. Leue eſt, quod Haymius praetermiſit, V et Γ in AVΓ coaluiſſe: vt delineatio accurate oſtendet: illa autem non niſi AV exhibet.

In

In parte auersa Haymius exhibet feminam arae succensae adstantem, quae dextra pateram tenet, sinistra autem cornu copiae. Haec si ita clare is in suo archetypo vidit, efficiunt vt debeat esse diuersus a meo numus, in quo spicae ex protensa manu dextra propendentes sunt indubiae; vt et clarissime demittit sinistram ad scutum; quum cornu copiae nec minima adsit significatio. Porro etiam ductus litterarum in nomine ciuium, a quibus hic numus cusus est, aliter apud me visuntur, quam Haymius depinxit. Nam tres litterae ΟΠΙΟ singulari modo, quem delineatio accurata ostendit, contractae sunt. In area autem ante feminam ibi stantem E conspicitur; quod forte quintum annum imperii denotat.

Tandem etiam coalitum binarum litterarum ΩΝ neglexit, aut forte in suo numo non inuenit. Ille autem hoc saeculo minime infrequens est, vt apparet ex compluribus delineationibus in appendicula ad numos vrbium Graece loquentium a R. P. ERASMO FROELICH edita exstantibus: Cui doctissimo viro maximae debentur gratiae, quod tot praeclara vetustatis monumenta in lucem protraxit; infinitae autem summe reuerendo P. CAROLO GRANELLI, qui incomparabilem suum thesaurum patere ipsi voluit, vt inde produceret, quae quidem delectarent et iuuarent, sed sitim potius incenderent, quam exstinguere valerent. Quantis enim in ceteris numismatum generibus abundare debeat opibus, qui in coloniis et vrbibus tantum excellit, coniecturam facile faciunt, qui experti sciunt quam raro in retia sua incidere hi thynni soleant.

De Marcianopoli addere parum opus est. Conditam eam in honorem Marcianae, quae Traiani soror putatur, accepi-

accepimus. Vnicum huius vrbis numum, cum Marcianae nomine, dedit HAYMIVS laudati thesauri *vol. II. pag.* 209. Inde ad Septimii Seueri tempora, ad quae VAILLANTIVS primum notauit, hiatus est. Ab hoc demum complures, et apud solum Froelichium viginti non ante eum publicati obueniunt. Vltimus, ni fallor, Philippi iunioris exstat a IO. HARDVINO notatus. Superfuisse tamen vrbem saluam adhuc Claudii Gothici temporibus nouimus. Forte inuenientur aliqui vsque ad tempus illud cusi, quo vrbes ab excudendis suo nomine numis feriari omnes iussae fuerunt.

Qualem denominare feminam in area depictam debeamus, non determinare ausim. Mihi tamen videtur vrbis esse symbolum, quae exercendae agriculturae et patriae defendendae aeque strenue inuigilabat. Puto autem scutum id esse, quod sinistra manu tenet; etsi aliquantulum me dubium reddit figura rhomboides magis quam rotunda aut ouata, quali plerumque scuta exhiberi solent.

NVMVS

NVMVS CYRENAEORVM PTOLEMAEO INSCRIPTVS.

a

I. H. Schulze.

Numus aereus musei mei. Caput dei Hammonis = Aquila stans, fulmen Iouis vngulis tenens: inter vtrumque pedem monogramma, illi, quod Christianis post multa saecula placuit ad nomen Christi designandum, admodum simile. Ante aquilam cornu copiae. ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ΒΑΣΙΛΕΩΣ. Tab. VII. Fig. 9.

Numus, quem exhibeo, est integerrimus, et qui se antiquum et genuinum firma et nobili aerugine fusca cuiuis exploranti comprobabit. Magnitudinem totumque eius habitum delineatio accuratissima docebit. Non autem exhibeo illum tamquam nouum. Probe enim scio multos de eo, et monogrammate, quod exhibet, sententiam dixisse: quas ante hos XLIV. annos singulari dissertatione complexus est vir celeberrimus et de omni litterarum republica optime meritus IO. BVRC. MENCKENIVS, qui et iconem, ad nostram proxime accedentem, adiecit. Postea etiam R. P. IO. HARDVINVS ad PLINIVM *lib. V. cap. XXXI. sect. 36.* dedit ectypon numi auersa parte haud adeo dissimilis, et de eo haec disseruit: „Est ex aere maximae molis numus eximius, qui Iouis „vultum parte priore exhibet: altera titulum ΠΤΟΛΕ„ΜΑΙΟΥ ΒΑΣΙΛΕΩΣ cum aquila, quae fulmini in„sistit, et inter aquilae pedes est monogramma, quod ibi „arbitramur Χαλκὸς Ροδίων, aes Rhodiorum.

Caput

Caput in aduersa parte Menckeniani meique numi est Iouis Ammonis, diademate et cornu a temporibus prominente conspicuum; simillimum, si diadema excipias, illi Mitylenaeorum, quod MORELLIVS *specim.* XXV. exhibuit cum epigraphe ΘΕΟC ΑΜΜΩΝ. Sed Harduiniana delineatio Iouis Ammonis maximam notam, cornu, omittit: omninoque videtur ille numus aut alium Iouem exhibere, aut aduersam partem detritam vel aerugine exesam habuisse, quia reliqua etiam imago multum discrepat. Sed de Ioue Ammone nihil habeo quod nunc addam toties iam dictis et vbique obuiis.

In auersa pagina sistitur nobis aquila stans, alis demissis, quieta et otiosa, Iouis fulmen vngulis suis tenens. Quantopere Ptolemaeis haec volucris placuerit, docent plurimi eorum numi, qui illam praeferunt. Sed videas in aliquibus eandem non quiescentem, verum alas ad volatum pandentem, quia omnino volantem. Tam diuersi habitus rationem aliquam subesse valde probabile videtur, et, nisi me omnia fallunt, optime eam docet PINDARVS, quando eximiam suam Citharam, Apollinis inuentum, quod iure communicationis Musae etiam possident, ita commendat:

Καὶ τὸν αἰχματὰν κεραυνὸν σβεννύεις
Ἀενάου πυρός. Εὔ-
δει δ' ἀνὰ σκάπτῳ Διὸς αἰετὸς, ὠ-
κεῖαν πτέρυγ' ἀμφοτέρω-
θεν χαλάξαις,
ἀρχὸς οἰωνῶν, κελαινῶ-
πιν δ' ἐπί οἱ νεφέλαν

ἀγκύλᾳ

ἀγκύλῳ κρατὶ, βλεφάρων
ἀδὺ κλαΐστρον κατέχευας, ὁ δὲ κνώσσων
ὑγρὸν νῶτον αἰωρεῖ, τεαῖς
ῥιπαῖσι κατασχόμενος.

Quae liberiori paraphrasi sic redduntur in Oxoniensi editione: „trisulci fulminis inexstinctum ignem, Iouis iram „placans, exstinguis, et Iouis aui, aquilae oscinum prin„cipi super eius sceptro somnum concilias: quo fit vt re„missis et laxatis vtrimque alis dormiat, quum nubem „obscuram soporis super aduncum eius rostrum, qua sua„viter clauduntur palpebrae, oculis affudisti. Tum vero „illa dormiens diffusu facile et flexibile dorsum attollit, „tamquam tuae harmoniae iaculis superata et oppressa.

Apparet et hac antiquarum rerum callentissimi magistri institutione, quod aquila fulmini quidem, sed exstincto, insidens otiosa et quasi dormitans, signum sit Iouis placati et benigni. Accedit ARTEMIDORVS *onirocrit. II. cap.* 20. qui aquilam desidentem fausta significare docet. Quumque Cyrenaei Ptolemaeum ipsum Iouis Ammonis habitu in numis exhibuerint: qualem Ill. SPANHEMIVS proposuit *tom. I. pag.* 296. ecquid aliud aquila ferias agens, fulmini tamen insistens, designabit, quam exercitum eius, ad propulsandas quidem et vindicandas iniurias continuo paratum, nunc autem, domi et cum vicinis pace parta, quietum et feriatum? Pacis porro bona, abundantiam omnium rerum, denotat cornu copiae ad latus aquilae positum. Atque haec videntur satis iam expedita.

Superest autem nunc alia quaestio, saepius agitata iam a variis doctrina et laude praestantissimis viris; quid nempe pe sibi velit monogramma illud inter aquilae pedes et trisulcum fulmen positum? Equidem suo loco repositas, quae antea prolatae sunt, sententias doctorum virorum relinquo: pro ea autem libertate, quae ciuibus litterariae reipublicae permissa est, attingam pauculis, cur mihi aliqua videantur non satis probabilia: deinde quid mihi in mentem venerit, subiungam.

In Harduiniana quidem expositione illud merito desiderandum videtur, quod nullo argumento constat, hunc numum ad Rhodios pertinere. Certe nihil illorum, quibus alii huius vrbis numi cognoscuntur, hic apparet: nec vir doctissimus vllum aliud suppeditat criterium: videturque adeo totum fundamentum explicationis esse P litteram. Deinde placere non potest, quod in litterarum compendio latitare credidit Χαλκὸς Ροδίων, aes Rhodiorum. Quid, quaeso, opus erat homines monere, hoc, quod omnes sine dubio oculis suis credere poterant, aes esse. Neque enim licet cogitare de altero significatu vocis Χαλκὸς, quo oboli octauam partem denotat: nam maximae molis numus hanc explicationem illico respuit.

Sed forte hoc sensit Harduinus, numum conflatum esse ex aere Rhodiis domestico, et ex insulae fodinis eruto, non aliunde allato. Enimuero Rhodum non memini metallorum prouentu celebrari. Nam quod STRABO lib. XIV. scribit vrbem Rhodum a Telchinibus conditam, qui primi dicantur ἐργάσασθαι σίδηρόν τε καὶ χαλκὸν; non illico probat, eos in hac vrbe aut insula haec metalla e terrae visceribus extraxisse. Nam praecedit ibi, venisse hos homines primum ex Creta in Cyprum, deinde in Rhodum.

Scilicet

Scilicet in Cypro aes fossum et excoctum videtur, Rhodi autem fuisse artifices, qui ex ferro et aere varia ad vsum pararent. Sic Norimberga plurimos habet ciues ἐργαζομένους χαλκόν: sed propterea nullam libram aeris in sua ipsi regione effodiunt, a mercatoribus autem aliunde importatum accipiunt.

Prostant sane antiqui numi, qui metallorum prouentu diuites tractus notant: quales sub Hadriano cusi, quibus MET. NOR. et METAL. DELM. inscribitur, pridem noti: quibus adiiciendus est, quem ANDR. MORELLIVS publicauit in specim. rei numar. antiq. *tab.* XXI. METALLI VLPIANI PANN., et alius pag. 215. indicatus, cui METAL. AVRELIANIS inscriptum est. Sed ipsa laudatorum numorum perspicuitas, quae lectores plena inscriptione instruit, dubitare nos facit de Rhodiis, elegantium et cultorum virorum copia semper adfluentibus, quod suae prudentiae conuenire putauerint, si patriae diuitias iactaturi, id facerent obscuro monogrammate. Ne dicam, quam indecens videatur vrbi, quae regem honorare cupit, in eodem numo suam ostentare abundantiam.

Aduersus illos, qni hic latitare initium alicuius epitheti ad Ptolemaeum regem pertinentis, suspicati sunt, inuictum puto esse argumentum, quod doctissimus Menckenius in dissertatione laudata attulit: nullum vmquam scriptorem meminisse vllius agnominis alicui Ptolemao tributi, in quo litterae huius monogrammatis initium faciant. Neque probari vllo exemplo posse, quod huius generis adiicialia verba litterarum compendio exhibita fuerint, praesertim in magnis numis, vbi abunde multum est spatii capiendis integris vocibus, quae regibus honorem afferant.

Dicam

Dicam nunc, quid mihi videatur, sed ea conditione, vt magis exercitatorum iudicio liberrimo et aequissimo subiectas hasce suspiciones meas cupiam. Ipsemet locus, quo positum hoc monogramma videmus, non videtur permittere, vt aliquid cogitemus, quod ad principis personam priuatim pertineat. Quis enim non putet indecens, si pedibus ministri sui subiiciendus aut admouendus esset princeps. Iam vero aquila, si ad Iouem refertur, est ipsius minister. Et vbi Iouis imagine principem aliquis exhibuit, aquila eidem adiuncta denotabit illum ordinem, per quem fulmina sua mittit in eos, qui se proterue gerendo indignationem suam concitarunt. Pedibus igitur aquilae tutantis et protegentis nomen suum merito adponunt, qui vel subiecti sunt imperio, vel socii, quorum securitas ab aquilae tutela dependet, quique ipsa subiectione se tutos a fulmine, quod in promtu est, sentiunt.

Ita cogitantem confirmauerunt numi, quos inter Lysimachi nomen praeferentes non paucos inuenimus, vbi sellae, cui Pallas in auersa parte insidet, subscripta inuenimus, prioribus saltem litteris suis, nomina vrbium. Tales sunt bini aurei in commentariis Regiae academiae elegantiorum litterarum Parisiensis tom. IX. pag. 270. quibus Byzantini subscripserunt. Lysimacho autem Pallas non minus, quam aquila Ptolemaeo, placuit: tamquam significare voluisset, sibi potius videri consilio, quam armata vi, tutari gentes subiectas.

Quid, quod ipsi imperatores Romani Iouis, colossea magnitudine exhibiti, pedibus se apponendos curauerunt. Insignes sunt numi aurei in Arschotanis, tab. XVI. num.

5. et

5. et tab. XVII. num. 9. quibus Traianum Auguſtum ſub pallio Iouis et fulmine eius conſiſtentem adſpicimus: quorum priori circumſcribitur, ne de ſenſu dubitemus: CONSERVATORI PATRIS PATRIAE.

Quaerenti autem mihi vel vrbem Aegyptiam, vel Aegypto ſalutis ſuae cauſa ſociatam gentem, quae in huius monogrammatis ductibus contineatur, obuii fuerunt Cyrenaei, in quos omnia aptiſſime conuenire arbitror. Tres enim priores litterae K. Y. P. plane conſpicuae adſunt. Tamquam baſis eſt P, cuius cruri a latere dextro adhaereſcunt illae in angulum coeuntes lineae, quae cum eo efficiunt K. Iam his Y ita iungitur vt iaceat in huncce modum ≻, atque crus eius decuſſet crus τοῦ P, ſeque a dextris coniungat cum ſuperiori illa linea, quae ad K denotandum iam aderat. Et ſane in numo clariſſime video illum ductum non valde obliquum, ſed fere horizontalem.

Sed et poſſumus litteras ſibi implicatas alio modo, qui ad eundem tamen ſenſum redit, extricare, vt manentibus omnibus, quae de P et K diximus, alteras duas in angulum coniunctas lineas, cruri τοῦ P ad ſiniſtram applicatas, pro K inuerſo accipamus, et pro Y illos binos in angulum coeuntes ductus, inter quos ſemicirculus τοῦ P ponitur. Sic K duplicatum habemus et ſcriptura integra erit K. KYP. id eſt Κοινὸν Κυρηνάιων.

Duxit me ad hanc omnem coniecturam numus, quem illuſtris SPANHEMIVS publicauit: cuius altero latere imago regis Ptolemaei cornuta, ad exemplum Iouis Hammonis, ſiſtitur, cum epigraphe ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ΒΑΣΙΛΕΩΣ: ex altera parte ſilphium exhibetur, cum litteris ΚΥΡ. ΚΟΙΝ. qua inscriptione omnem pentapolin Cyrenaeorum comprehendi existimo.

Neque historia, spero equidem, mihi hic repugnat. Docet enim DIODOR. SICVLVS *libr. XVIII.* ad quem modum, quoque tempore Cyrenae, vrbesque vicinae, amissa libertate Ptolemaico regno subiectae fuerint. Id vero quum primis statim ab Alexandri M. obitu annis acciderit; nullo sane negotio conficitur, numum hunc, subiectionem Cyrenaicae gentis describentem, referendum esse ad Ptolemaeum primum, conditorem Ptolemaicae gentis, quae imperium Aegypti vsque ad illud tempus tenuit, quo Romanis tam nobile regnum, sub ipsa nascente monarchia, penitus subiectum fuit.

Atque haec habui de monogrammate in numis Ptolemaeo inscriptis occurrente. Nolim tamen contendere hanc explicationem, hisce numis accommodatam, ceteris monumentis vetustis, ante susceptam religionem Christianam elaboratis, si qua certae fidei cum hoc monogrammate supersunt, debere applicari, eaque ad eundem sensum cogi. Sufficiat mihi, si idoneis arbitris visus fuero non improbabilia de his numis attulisse.

Prostant etiam numi Ptolemaeorum, vbi in area visuntur litterae ΚΙ, quas manifestum est ibi non posse designare aeram aliquam, quum illa seorsum exstet. Videant, quibus manibus propriis tractare tales licet, annon forte pro Ι in illis exstet Υ, quod in detritis et aeruginosis numis delineantium oculos fefellerit.

De cornu copiae in hoc numo nihil volebam initio adiicere. Nolo tamen reticere, me dubium esse, quid illud esse dicam, quod ipsi, tamquam fulcrum aut scala adiectum est. Consideraui multorum aliorum delineationes,

nes, quarum aliae videbantur taeniam aliquam, illud vincientem, exhibere, aliae potius aliquam machinam, qua ſuſtentetur. Quumque ſciam ſaepe accidere, vt talia pictores, pro ſuo quisque ſenſu, ſtudeant clariora delineando reddere: de meo teſtor, quod fideliſſime curauerim exprimenda, nec quicquam ab archetypo diuerſum fuerit admiſſum.

NVMVS NEAPOLITARVM EXPLICATVS.

a

I. H. Schulze.

Tab. VII. fig. 10. Caput iuuenile comatum et laureatum ΝΕΟΠΟΛΙΤΩΝ. = Minotaurus, supra quem rosa et littera Π., infra monogramma, litteras AP exhibens.

Est ex aere paruo in museo meo.

Appendicis loco subiungitur

fig. 11. Caput laureatum, VIRGILIVS MARO.
= Sol. Est argenteus in museo meo.

Quoniam numum ad Rhodios nullo iure relatum antea rationibus, vt spero, idoneis ab ipsis reuocaui, suisque auctoribus restitui: idem nunc faciam in alio, vbi non tam coniecturis, quam omnino indubiis rationibus licebit agere.

Hic autem praestantissimus et nobili aerugine viridescente totus obtectus, beneficio viri maxime reuerendi et eleganter docti theologi Regiomontani, MICHAELIS LILIENTHALII ad me peruenit: inuentus autem fuit cIɔ Iɔcc VII. Tierenbergae in Porussiae regno, tractus autem Sambiensis praefectura Fischhausensi. Illum quum ante complures annos vidisset vir de omni antiqua doctrina praeclarissime meritus THEOPHILVS SIGEFRIDVS BAYERVS, ratus fuit illum Rhodiis deberi, suamque de hac re sententiam exposuit singulari dissertatione, quam nobilissimo et antiquitatum studiosissimo viro, NICOLAO KEDERO cIɔ Iɔcc XXIII. inscripsit. Inserta haec com-

men-

mentatio deinde fuit *Actor. Poruffic. Vol. II. sect. V.* quod indicandum censui, vt facilius inuenire explicationem antea datam, a qua mihi discedendum putaui, vnusquisque possit.

Vtar autem illa moderatione, vt simpliciter exponam, in quo meae rationes dissideant ab illis, quae viro optimo, cuius tranquillos manes veneror, vero visae fuerunt similes: quod vbi fecero, arbitrium totius causae peritis lectoribus permittam.

Primo omnium me mouet adscriptum nomen ΝΕΟΠΟΛΙΤΩΝ; ex quo tres priores litterae omnino integrae exstant, duae autem postremae satis conspicuae sunt. Certe Ω dimidia sui parte, N autem integrum nudo oculo, tanto autem certius armato, cognoscitur. Quartum in hoc nomine elementum maiori sui parte quoque apparet. Intermedias non satis clare recepit metalli haud exquisite rotundi defectus.

Quum haec oculis meis arbitratus essem, euolui auctores qui ectypa numorum dederunt. Primum adibam LAVR. BEGERVM, qui *Vol. I. pag.* 530. *num.* 2. exhibet aereum meo per omnia, quoad aduersam partem, tam similem, vt est ouum ouo. Caput enim lineamentis posituque iisdem videas, capillos coronamque similes, ipsamque scripturam, loco tractuque simillimam. Vnica littera T quae est in ectypo Begeriano pone caput solitaria, quod ad rem parum facit, in nostro deest. Eiusdem auctoris alius est *pag.* 352. *num.* 4. qui aeque similis videtur, si hoc vnum excipias, quod vultus in dextram partem conuersus, eique inscriptio obiecta est.

Postquam haec ita apud BEGERVM videram, adibam GOLZIVM atque GESNERVM, qui similes aut ex prioribus repetitos dabant. Iuuabat me haec considerasse, quum apud eosdem auctores per Rhodiorum numos accurate irem, omninoque nullum caput illi, quod in nostro est, simile, et, quod maius, nullum, quod Apollinis caput habet, non radiatum, nullum quoque vlla littera inscriptum cognoscerem. Iam si totus habitus numorum vnius eiusdemque ciuitatis aliquid valet ad eos cognoscendos et discernendos; eoque argumento summi in re numaria auctores potissimum vtuntur: quam haec omnia vehementer faciant ad hunc nostrum Neapolitanis vindicandum, et a Rhodiis reuocandum, omnes, ni fallor, cognoscunt.

Poterant haec sufficere ad omnam hanc caussam diiudicandam: sed vtile puto etiam de reliquis dicere, quae meam sententiam penitus confirmant. In altera scilicet numi parte est minotaurus, quo nomine vocant animal cetera tauro simile, sed facie virili barbata. Non repetam fabulam omnibus notissimam: neque nunc sollicitabo eorum assertum, qui ciuitates hoc animal signare solitas eodem ipso vltimam originem a Cretensibus denotare asserunt. Iam vero inter tot numos Rhodiorum indubios neque vnicus visus vel adductus est, in quo minotaurus conspiceretur: inter triginta Neapolitarum numismata, quae CL. GESNERVS collegit, tria et viginti videas, in quorum postica vel integer vel dimidiatus ille exhibetur. De Rhodiis autem ipsemet ille vir doctus, a quo dissentire me profiteor, sufficienter probat, quod omnium, qui in Asia consederunt, maxime genuinum genus Doricum fuerint,

rint, neque promiscuam externorum populorum communionem vmquam admiſerint.

Atque hoc argumentum tanti apud ipſum fuit ponderis, vt tandem non auderet Rhodiis in inſula habitantibus hunc numum tribuere, ſed Cauniis, qui in continente inſulae obiecta habitabant, et Rhodiis parebant, eum maluerit tribuere. Qui cum eſſent Rhodiorum ſubiecti, atque, vt STRABONE docente ſcimus, a Cretenſibus originem duxiſſent, numum hunc ita ſignauerint, vt figura primaria oſtenderent ſuos proauos, roſa autem Rhodia faterentur dominos; quorum praetorem aduerſae parti adſcripſiſſent. Putat enim illud nomen ſorte legendum eſſe ΝΕΟΠΤΟΛΕΜΟΣ.

Apparet quam parum ſuae explicationi fiſus ſit vir doctus: laudandaque eſt ingenua indoles, quae dubium non ſuppreſſit. Iam vero ſi Cauniorum eſt numus, vt ſupponit; quo iure in titulo adſcribebatur Rhodiis? mirum, qui potuerit Cauniis, libertate non gaudentibus, ſed obnoxiis, ius numos cudendi tam facile concedere: quum nulla exſtet probatio, id vllis tali conditione viuentibus licuiſſe.

Quid itaque ſupereſt, quod argumento ſit, Rhodiis hunc numum debere aut poſſe adſcribi? Roſa eſt, minotauro ſuperpoſita, illi ſimilis, quae in plerisque Rhodiorum numis alteram paginam exornat. Ita autem exſtans eſt in illis roſa, vt aream fere omnem ſola impleat: ſi qua autem alia figura, vt nauis, aquila, ſerpens, caduceus, athleta, botrus, delphinus inſuper adiecta ſit, illa minutiſſima exhibeatur. Cuius quidem contrarium eſt in noſtro, vbi minotaurus aream implet, roſula ſuperponitur. Ex quo conſequitur, quod hic numus non ſit Rhodiorum,

diorum, quoniam ex parte consitentem habemus doctissimum virum: verba de hoc argumento plura non faciam.

Quoniam autem inter Neapolitarum viginti numos Gesnerianos, qui minotaurum integrum in auersa parte exhibent, neque vnicus est nostri similis; omnesque isti victoriam superuolitantem et coronam animali imponentem exhibent: ex eo sane apparet eximia nostri numi raritas et singularitas. Nam quod rosam, aliaque Rhodiorum insignia consueta, Neapolitae exhibent, minus mihi admirandum videtur, quam cur non in pluribus illa hodie obtingant visenda.

Rhodii enim, quod STRABO aperte prodit *libr.* XIV. ἔκλισαν ἐν τοῖς Ὀπικοῖς τὴν Παρθενόπην. Parthenopen, Rhodiorum vetustum opus, postea ex Chalcidensibus, Pithecusaeis, Atheniensibusque; immo sero tandem Campanis, superadditi prioribus noui incolae auxerunt: ex quo tempore Neapoleos nomine celebrari coepit: vt eodem Strabone docente nouimus. Horum postremos inuitis prioribus admitti debuisse, certum est: quam volentes susceperint ceteros, equidem non reperio. Sed Atheniensium in noua vrbe regenda et constituenda voluntatem in primis valuisse, multa persuadent: praecipue quod Apollinem atque Dianam conseruatores, (Οὐλίους,) Athenarum antiquissima numina, praecipuo cultu in numis suis prosequuntur.

Videntur autem facile inter se consensisse ex Euboea adducti Chalcidenses atque Athenienses in taurum numis suis imprimendum; quoniam illi patrium in eo morem sequebantur; quippe Euboeae numi bouis caput aut protomen exhibent: hi autem Cretensium tyrannidis atque excussi

cussi eorum imperii, quod beneficio Dianae ac Apollinis tribuebant, admonebantur. Hinc minotaurum apud Neapolitas, et forte apud plures ciuitates, non existimo memoriam originis Creticae renouare, sed contumeliarum et iniuriae ab illis acceptarum aliquando monumentum esse. Sed et aliam causam huius symboli facile inuenient, qui obseruauerint ad ostia magnorum fluuiorum sitas vrbes complures, praesertim illas quae portus et naualia habuerunt, bouem vario modo posituque exhibuisse: ex quo factum puto in Sicilia et magna Graecia vt nihil sit minotauro frequentius.

Neque tamen propterea desierunt etiam Rhodi meminisse, praecipue illi magistratus, qui genus ex illa insula ducebant. Hinc factum est vt in nostro numo rosa Rhodia minotauro imponeretur: in alio apud BEGERVM *pag.* 350. solis imaginem post caput deae in aduersa parte collocatam notamus. Veroque simile est factum hoc fuisse posterioribus temporibus aliquanto rarius, quum familiae antiquissimae, e Rhodo huc primum deductae, tandem ad paucitatem redigerentur aut exstinguerentur. Quare existimo inde deducendam esse eximiam raritatem numorum Neapolitanorum cum rosa vel sole: quum illorum, in quibus minotaurus est cum victoria superuolitante, crebriorem notemus occursum.

Potest alia videri causa, eaque non ex Rhodo petita, sed plene domestica, cur rosam Neapolitae numis suis impresserint. Scilicet iactare voluerunt vrbis tractusque sui praerogatiuam in praestantissimis rosis progignendis. Legatur de eo PLINIVS *hist. nat.* lib. XXI. *cap.* 4. et res satis erit confecta. Genera, inquit, eius nostri fe-

 cero

„tere celeberrima Praenestinam et Campanam. Est genus etiam, „quam centifoliam dicunt, quae est in Campania Italiae. Quae autem de Campanis rosis in genere dicuntur; eadem omnia ad Neapolitanas iure eodem referri, non potest vlli dubium videri.

Enimuero quemadmodum de Campanis rosis nullum esse potest dubium: ita de rosa Rhodia videtur res nimis dubia et controuersa, quam vt de ea olim scripta ad nostras rosas illico transferamus. Aliqui enim ab isto genere, quod ob floris elegantissimam fragrantiam hodie celebramus, Rhodiam longe disiungunt, quam balaustii seu mali Punicae florem existimant, tingendisque lanis adhibitam docent: dum alii certant, eminentem aliquam rosae odoratae et coronariae speciem illam fuisse, atque in hanc rem allegant DIDYMI ALEXANDRINI testimonium ex geoponicis, quae scribenti non ad manus sunt, quo rosis diuinior natura vindicatur: quod vtrum de illis, quae in Rhodiorum insula nascebantur, seorsum dictum, an de praestantissimis omnibus intelligendum sit, diiudicare nunc non possum.

Quum vero PLINIVS Alabandicas rosas inter praestantissimas recenseat, quarum patria est in Caria Rhodo obiecta: nondum audeo accipere illorum sententiam, qui rosas Rhodiorum in punicae mali florem transformant. Certe pictura in nummis obuia talis videtur vt ad rosas nostras flore non pleno facilius trahi posse videatur, quam ad punicae florem. Maxime quidem offendet botanicum ille apud BEGERVM vnicus *pag.* 412. *num.* 1. vbi aperte sistitur flos hexapetalus; quum omnium consensu rosa sit pentapetala. Sed quis in talibus praestabit antiquissimorum

pictorum

pictorum et sculptorum accuratissimam diligentiam? Et si nihil illi defecerunt: puto in gentium ac regnorum insignibus aliquid tribuendum esse antiquitati; quam sequuntur posteriores, etiam vbi vident priores potuisse accuratius pingere. Sic lilia Francici regni quis ausit nunc ad botanicas leges reformare? quis infinita alia in re heraldica? Scilicet alia est lex in horto et agris nascentium florum, alia inscriptorum nominibus regum.

Quanta sit aetas huius numi, quoniam indubiis nullis signis cognoscitur, coniectando eruere vix quisquam audebit aut valebit. Illud mihi satis certum videtur, cusum eum esse felicissimis temporibus vrbis libertate sua adhuc gaudentis. Nam postquam semel magnae Graeciae vrbes Romanis subiectae fuerunt, suis vti numis desierunt. Ipse typus elegantissima arte elaboratus de vrbis felicitate, et adiectum integrum nomen de libertate testimonium dicunt. Neminem me reprehensurum existimo, si dixero, aetatem bis mille annorum posse eum sustinere, immo aliquantum maiorem potius, quam minorem.

Quo pacto in Porussiam deferri potuerit, non minori industria, quam doctrinae apparatu, disputat CL. BAYERVS. Equidem ita cum iucunditate illa me legisse profiteor, vt optauerim posse reddi certa. Illa sane coniectura de succinaria negotiatione fabulam antiquissimam de Phaetonte et sorore eius Electryone ad historiam satis probabiliter reuocat. Enimuero quicquid praesidii haec explicatio habere debet ab eo, quod numus Rhodius in Porussia inuentus sit; id nunc valde vacillat, postquam apparet numum non esse Rhodium, sed Neapolitanum.

Adeo igitur mutabimus vrbes, atque Neapoleos incolas nauigasse vel pedestri itinere huc profectos dicemus.

Equidem non ausim id vel negare vel affirmare: quum quotidie videamus ad fora profectos mercatores omnis generis et commatis nummos secum ferre; nec adstringi possint vel soleant vt suae quisque patriae propriis nundinetur.

Superesset nunc, vt dicerem de litteris in postica parte obuiis. Sed quum non habeam certum, quod adferam: ipsi beneuolo lectori et spectatori diiudicandum permittam, debeatne Π, quod super minotaurum clare intelligitur, coniungi cum litteris AP, quae sub eodem visuntur, an superiori adiungendae, ad integram vocem efficiendam, videantur quaedam litterae: τὸ AP autem initium alius vocabuli habendum sit.

Equidem in vllo Neapolitarum nummo adhuc edito non potui conspicere hominis cuiusdam integrum nomen. In multis singularem aliquam litteram, aut binas vel ternas video pedibus minotauri interpositas. Complures capiti feminino in anteriori facie nummi expresso, subiiciunt APT. vel plene APTEMIΣ: cuius exempla apud GOLZIVM videantur. Quid si accipiamus τὸ Π pro Πρύλανις, aut pluratiuo numero Πρυλάνεις, vt denotet praefectum vel praefectos sacrorum in honorem APτέμιδος faciundorum? Sed nihil determino, quum me maxime retineat, quod non Dianae, sed Apollinis caput in aduersa conspicitur. Insuper etiam me detinet, quod deae tam honoratae nomen minotauri, qui vrbis symbolum est, subiicere pedibus, semperque virginem ad tauri virilia collocare nimis indecens fuisset.

Quum beneuolum lectorem hactenus Neapoli detinuerim, antequam illinc discedamus, subiiciam eius oculis nummulum argenteum: de quo ipsemet edoceri vehementur vestem, annon Neapoli sit tribuendus. Exstat in altera parte caput laurea circumdatum, cum litteris VIRGILIVS MARO. Sub capite floriger ramus rosae, vt videtur, expressus fuit: sed temporis iniuria hac potissimum parte detritus est. Alteram faciem totam implet Solis caput ample radiatum. Ambitum delineatio accurate sistit: est autem minime crassus et appendit grana, medicorum quidem ponderis, decem.

Neapolin spirat Solis imago, quam alibi in numis huius vrbis conspici antea dicebam. Eodem conspirat rosa sub capite Virgilii, vt mihi quidem plane videtur, iacens. In hac autem vrbe sepultum esse magnum hunc vatem, monumentumque habuisse, sunt magni multique, qui affirmant, testes, quibus fidem nemo derogat, praeter IO. HARDVINVM, et quibus ille persuadere potuit. Equidem nolim contendere hunc numum esse publica auctoritate, et vel viuo vel nuper mortuo Virgilio cusum: neque audeo tamen ipsum nuperis numorum antiquorum fabris illico tribuere. Iudicent liberrime eruditi. Mihi propterea visum fuit illum proferre, quoniam video in nupera collectione Tigurina illum non comparere, quum tamen in illis tabulis, vbi illustrium ac celebrium personarum numi proponuntur, etiam ficti quidam non omnino repudiati sint. Ex quo plane adducor vt credam meum hunc nunquam fuisse in lucem protractum, qua non indignus mihi videtur, quoniam certe aliquam non inuenusti saeculi aut inficeti magistri significationem praebet.

Tanto autem libentius adieci Neapolitano indubio et antiquissimo hunc, quem Neapolitanum, sed incertioris aeui, existimo, quoniam ab eodem celeberrimo LILIENTHALIO, cui me priorem debere professus sum, hunc etiam accepi eodem tempore: adeoque ipsi gratias me debere publice profitendi occasionem non putaui dimittendam.

Quum haec pridem scripsissem, ipsumque numum amicis ad me venientibus identidem ostendissem, allatus ad me fuit a curioso numorum inuestigatore aliquis Mantuanus aereus admodum recens, cuius alteram faciem sol illustrat et circumscriptum CAR. IMP. DVX MAN. 1731. in altera legitur SOLDO DI MANTOVA. Hoc indicio excitatus coepi de huius principatus numis amplius dispicere, facileque cognoui exstare vnciales etiam, seu, vt loqui solent, scutatos a Mantuae ducibus cusos, in quorum parte auersa sol impressus est.

Fateor me nescire a quam longo tempore Mantua solis emblemate in suis numis vtatur. Sed quod Mantuani ciuem suum recensere solent magnum Maronem; non video cur improbabile ducam alicui Mantuano venisse in animum cogitare quam aequum sit tam honorifico vrbi suae ciui aliquod monumentum condere.

Quanto itaque iustius ad Neapolitanos, quam ad Mantuanos hic numus pertineat, et an omnino ad alterutram vrbem referri debeat; quo tempore, quoue consilio, et quibus auspiciis sit cusus; et quae sunt alia ad notitiam eius plenam scitu necessaria, si quis cum publico communicare velit, efficiet ne quem forte post longius tempus ille vel suspensum teneat, vel in errorem deducat.

DE-

DENARIVS ARGENTEVS ARABICVS EXPLICATVS

a

I. H. Schulze.

Magnam apud philologiae orientalis amatores gratiam iniit clarissimus KEHRIVS, quum ante hos XVII. annos luci publicae exponeret decem et octo numos Arabicos vetusta scriptura Cufica insignitos, prope Gedanum forte inuentos. Non enim solum istius scripturae, quae non multis apud nos monumentis conseruatur, intelligentiam planiorem reddidit: verum illud maxime consequutus est, vt ipsi multum debituri sint posteri, qui in colligendis numis Arabicis, eorumque adornanda serie, aliquando collocaturi sint industriam. Tab. VII. Fig. 12.

Nam quum seriem imperatoriorum numorum plerique claudant cum Heraclio, sub cuius imperio deus permisit, vt Muhammedes sua impietate orbem fascinaret: atque ab eo tempore parum elegans et praeclarum, quodque colligenti magnum operae pretium afferat, apud Graecos Latinosue occurrat: commode sane accidit, vt paucis ab initio Muhammedis interiectis annis prodirent sane nitidi et cognitione eruditae Europae haud indigni numi Arabici, quorum forte maior, quam creditur, multitudo prostat.

Quoniam autem legendis illis et intelligendis non exiguus vsus Arabicae linguae necessarius est: euenit fere, vt quos nullus labor fatigare potuit in Graecis Romanisue inuestigandis et perscrutandis, iidem ab his deterreantur, non solum ductuum multiplici varietate, verum etiam characterum eandem figuram habentium aequiuoco et multiplici

valore

valore in hoc antiquiſſimo ſcribendi genere notis, quae poſterius aeuum adinuenit, deſtituto.

Enimuero nihil tam arduum eſt, quod non vinca aſſidua induſtria: atque vſus quotidianus non longiſſimo tempore ex tironibus facit promtos artifices. Spero autem futurum, vt multum adiuuetur eorum, qui ad hoc ſtudium acceſſuri ſunt, induſtria, ſi in lucem protrahantur, ac omnium vſibus accommodentur ſatis multa Cuficae ſcripturae ſpecimina, quae in bibliothecis aſſeruantur. Equidem nec ſtudio nec ſumtibus parco, vt complura comparem vndiquaque ſpecimina, quae a peritis delineanda curo, vt artis chalcographicae ſubſidio poſſim in lucem proferre: iamque omnino non contemnendam copiam conſequutum me gaudeo, quam omnem vſibus publicis, vt deſtinaui, ita indies expolio et exorno, vt ampliſſimis vſibus accommodata emittam.

Nunc autem viſum fuit numariam ſupellectilem augere ectypo numi argentei integerrimi et nitidiſſime expreſſi et optime conſeruati. Peruenerunt ad meas manus complures, ſed fere omnes aliqua ſui parte euanidas litteras abſcondentes, vetuſtate detriti, vel fracti mancique: quos vel oculatiſſimus non poſſet legere et explicare, niſi integriora exempla docerent, quid in detritis deeſſe intelligendum ſit.

Tanto autem libentius hunc in Pomerania inuentum et ab excell. profeſſore ANDR. WESTPHALO mihi donatum et Gryphiswaldia transmiſſum, cum publico communico, quoniam inter multos a doctiſſimo KEHRIO publicatos, luculentos certe illos, nullus eſt, qui duplicem in parte aduerſa circulum habet, eamque ſententiam, quam

in

in tribus aliis, quos museum meum asseruat, itidem invenio. Sed ad ipsum venio numum, cuius magnitudo ea est, qua depictum sisto.

Facies aduersa illa merito iudicatur, qua primarium religionis Muhammedicae symbolum conspicitur. Illud autem in media area legitur:

لا اله الا الله وحده لا شريك له

Non est deus, praeter illum vnicum: non est ipsi socius.

Vocant id Moslemi كلمة التقوى: quasi dicas confessionem pietatis breuissimam: itemque كلمة التوحيد: quasi vnificationis symbolum.

Circulus exterior hanc habet sententiam:

لله الامر من قبل ومن بعد ويومئذ يفرح المومنون بنصر الله

Dei est negotium ante et post: et die illa laetabuntur fideles in auxilio Dei.

Notabilis haec sententia desumta est ex Corani Surat. XXX. vers. 4. 5. Inscribitur illud caput *Roma*, quia imperatoris Constantinopolitani exercitum a Persis victum commemorat; sed intra paucos annos futurum praedicit, vt Romani vicissim deuincant Persas. Quantopere hinc prophetae sui veracitatem confirmare Moslemi contendant: legi potest apud Maraccium et nouissimum Corani interpretem et commentatorem Anglum. Verborum autem sensui explicando nihil opus est immorari: quoniam omnia sunt planissima.

Circulus interior haec legenda exhibet:

بسم الله ضرب هذا الدرهم بمدينة السلام

سنة ثمان ومائتين

In nomine Dei percussus est hic denarius in vrbe pacis (Bagdado) anno octauo et ducentesimo.

Annus hic Hegirae CCVIII. respondet anno aerae nostrae DCCCXXII, quo Chalifatui praeerat Almamon Raschidi filius.

Denarium reddidi Arabicam vocem Dirham, non sine exemplo aut ratione. Manifestum enim mihi videtur id nomen esse ex Graeco δραχμή: quam Romani denarium constanter vocant. Ponderis tamen rationes non debent accurate exigi. Disputauit de iis EDVARDVS BERNARDVS in doctissimis libris de mensuris et ponderibus antiquis. Hic, qui delineatus est, aequat grana medici ponderis L. Sed sunt ad manus quinque alii, singuli nomine eodem Arabico inscripti, quorum is, qui grauissimus est, grana LIII. aequat, leuissimus XLIV. Ceteri inter haec pondera vario discrimine versantur.

Quando autem denarium argenteum vocaui, iuuabit admonuisse, quod in Arabum ore multum discrepent Dirham et Dinari: hocque vltimum nomen aureo numo proprie tribuatur. Estque pondus τοῦ Dinari maius, quam τοῦ Dirham. Pretii autem proportio fere illa est, vt XX. aut XXV. argentei denarii vno aureo permutentur; quod, vt ego existimo, pendebit ex multum et fere in singulis diuerso pondere.

Ceterum cogitari potest, tantillum puri argenti, tam ample extensum, crassitiem numo valde modicam concessisse.

cessisse. Vnde non mirum videri debet, si plerosque eorum, qui ad nostram aetatem perdurarunt, fissuris laborare deprehendimus; quas vel crebram agitationem illorum, qui metalli probitatem inflectendo explorare voluerunt, induxisse reor, vel rudius impactos et adactos ligones istorum, quibus terram effodientibus obuii fuerunt facti. Tantoque magis merentur hi nummi honorem et diligentem custodiam, qui per tantum tempus incolumes ad nos delati sunt. Atque vtinam omnes incidant in dignas manus, qui eos a conflatoribus tueantur, atque condendis et locupletandis seriebus adhibeant.

Sed progredimur ad partem auersam, cuius area includit alterum articulum religionis Moslemicae;

لله

محمد رسول الله

Deo. Muhammed est legatus Dei.

Quid sibi velit repetitio illa nominis Dei in casu tertio, fateor me satis non capere. Sunt autem ad manus tres alii, vbi idem factum video. An forte se refert ad verba areae prioris: non est ipsi socius: vt sit quasi explicatio, ipsi, scilicet Deo? An eodem sensu, quo Romani monumentis suis inscribebant D. O. M. S. Sed de eo statuant eruditi. Cetera satis aperta sunt.

Circulus aream cingens habet sententiam sequentem;

محمد رسول الله ارسله بالهدى ودين
الحق ليظهره على الدين كله ولو
كره المشركون .

Muhammed est legatus dei, quem misit cum directione et religione veritatis, vt apparere faciat eam supra religionem quamcunque aliam, etiamsi renuant associatores.

Quae totidem fere verbis leguntur in Corano, Sur. LXII. vers. 9. nulloque declaratione opus habent.

Ceterum hoc pertinet ad commendationem propositi numi, quod elegantiam scripturae Cuficae, omnesque eius leges, accurate obseruat. Apparuit id mihi maxime comparanti illam cum fragmento Corani Cufici manu elegantissima in praegrandibus membranis exarati, quod augusta serenissimi ducis Brunsuicensis bibliotheca, quae Guelpherbyti est, asseruat: vt et cum chartaceo fragmento satis magno, quod in celsissimorum Hassiae Landgrafiorum Cassellana exstat.

Facit ad lectionis facilitatem, quod litterae illigabiles sunt a sequentibus rite separatae; quodque finales figurae singulas voces finiunt. Enimuero dantur alii numi huius etiam antiquae aetatis, in quibus hae leges non obseruantur, sed omnia serie continua sese subsequuntur: ipsi autem ductus tam minuti sunt, vt vix bene dignosci possint. Quod genus, ad Kirmathicum proxime accedens, difficultatem maiorem lectori obiicit. Enimuero facile adsuescet etiam huic studiosus lector, si se ante omnia exerceat in eruenda scriptura, quae aream circuli instar ambit. Quantum enim mihi adhuc videre licuit, in omnibus, qui duplicem circulum in aduersa habent, exterior exhibet sententiam ex Surata XXX. in auersa autem illam ex LXI. His itaque tamquam claue vsus, cetera, praesertim quae areae faciei auersae inscripta sunt, facilius assequetur. Illa autem plerumque habet nomen et titulos principis quo

iubente

iubente numus cusus fuit. Vbi simplex est circulus circa aream aduersae partis, ille semper dat nomen vrbis, ex qua numus prodiit, cum nota temporis. Vbi vero ille duplex visitur, ex interiori haec eruenda sunt. Aestimanda itaque numi bonitas inde praecipue fuerit, si scripturae his binis locis nihil acciderit, quod lecturi studium frustretur.

OBSERVATIONES

ASTRONOMICAE.

DE

DE SITV GEOGRAPHICO IAKVTI (IAKVTSK) VRBIS SIBIRIAE AD FLVVIVM LENAM SITAE

AVCTORE
G. Heinsio.

Transmissae nuper sunt ad Academiam obseruationes astronomicae, quas Krassilnikow, Geodaeta expeditionis in Kamtschatkam, vir in praxi astronomica exercitatissimus, Iakuti habuit, pro determinando huius loci situ geographico. Latitudinem eius borealem ex altitudinibus meridianis Solis et fixarum ipse definiuit 62°. 2′; ad longitudinem vero cognoscendam varias instituit obseruationes Eclipsium Lunae et Satellitum Iouis, occultationum fixarum a Luna, ex quibus vero ob defectum obseruationum respondentium aliorumque requisitorum nullam deduxit conclusionem. Elegi ex istis aliquas eclipsium Satellitum Iouis obseruationes, quas cum similibus obseruationibus Petropoli habitis comparari posse praeuidebam, vt inde demum differentia meridianorum inter Petropolitanum et Iakutensem erui posset. Ad hunc finem assequendum tempora vera Eclipsium Iakuti obseruatarum requirebantur. Krassilnikow in diario suo tempora eclipsium tantummodo iuxta horologium, oscillatorium notauit, cuius vero statum singulis diebus, si coelum fauerit, per altitudines Solis respondentes explorauit. Exinde igitur, adhibitis debitis correctionibus, tempora, quibus singulis diebus meridies verus contigit, et tandem tempora vera eclipsium Satellitum Iouis determinaui. Tabulae subiunctae eclipses tum Iakuti, tum Petropoli obseruatas, quarum comparatio conceditur, exponunt; quas deinceps ipsae deductiones excipiunt, in quibus, cum propter differentiam meridianorum inter Petropolitanum et Iakutensem nimis magnam rarissime obseruationes immediate sibi respondentes occurrant (quemadmodum in nostro negotio vnica tantum eiusmodi comparatio locum habet) saepissime reuolutiones Satellitum tum ex tabulis depromtas, tum ex obseruationibus non multum a se inuicem remotis deductas adhibere, et ope istarum obseruationes ita accommodare debui, ac si in vtroque loco istae die eodem institutae fuissent. Inde demum constitit quaesita meridianorum differentia 6. hor. 37.′ 40″ in tempore, prout ex sequentibus fusius patet.

ECLIPSES SATELLITVM IOVIS
Iakuti obseruatae a Geodaeta Krassilnikow tubo 14. ped. Londinens.

Stylo veteri	tempore vero astronomico	Conditiones obseruationum
an: 1737		
Nouembr. 16.	7^h. 13′. 0″	Emersio Sat. 1^mi coelo quidem sereno, Iupiter tamen per nubes tenues lumine debilis apparebat.
an: 1738		
Iulii 25.	12. 46. 7	Immersio Sat: 1^mi obseruatio propter nubes et viciniam Lunae dubia.
August 31.	11. 44. 24.	Immersio Sat: 2^di coelo sereno.

Augusti

Augusti	31^d 16. 54. 1	Immersio Sat: 1mi observ. dubia ob nimium crespusculum.
Octobr:	2. 11. 42. 31.	Immersio Sat: 2di obseruatio est dubia, quia Satelles proxime ad Iouem vmbram ingressus est; quam ob caussam minuta tantum prima temporis in horologio annotata fuerunt.
	13. 37. 25.	Immersio Sat: 1mi Obseruatio ob easdem circumstantias dubia.
	27. 10. 29. 22.	Emersio Sat: 1mi tempestate placida.
Nouembr:	5. 6. 52. 1	Emersio Sat: 1mi coelo sereno.
Decembr:	14 5. 10. 20.	Emersio Sat: 1mi Obseruatio exacta, coelo sereno.
	21. 7^h. $2'$. $3''$.	Emersio Sat: 1mi coelo sereno.
an: 1739.		
Ianuar:	6. 5. 15. 46.	Emersio Sat: 1mi coelo sereno,
	13. 7. 8. 58.	Emersio Sat: 1mi tempestate placida.

OBSERVATIONES

Eclipsium Satellitum Iouis Petropoli habitae, quae cum praecedentibus conferri possunt, vbi simul ratio habetur diuersitatis tuborum, supponendo differentiam temporis in eclipsi Satellitis 1mi vel 2di per tubos, Newtonianum 5. ped et Astronomicum 14. vel 15. ped. visa, $= 15''$; ita tamen vt ad circumstantias obseruationum in hac reductioue simul attendatur.

 Stylo

Stylo veteri.	Tempore vero aſtronomico	Conditiones obſeruationum	Tempus verum, quo eclipſis obſeruari debuiſſet tubo 14. ped.
an: 1737.			
Nouembr: 14.	6^h 7'. 35''.	Emerſ. 1^{mi} tubo, Newt: 5. ped, quae tamen circiter 15'' citius contingere potuit, quia obſeruatio per nebulam peracta eſt.	6^h. 7'. 50''.
an: 1738.			
Iulii 23.	11. 39. 28.	Immerſ. 1^{mi} tubo 15. ped. coelo pauliſper vaporoſo.	11. 39. 28
Auguſt: 22.	13^b.50'. 44''.	Immerſ. 1^{mi} tubo 15. ped.	13^b.50'.44''.
27.	15. 46. 7	Immerſ. 2^{di} tubo 15. ped. coelo ſereno.	15. 46. 7
Septembr: 7	7. 44. 55.	Immerſ. 2^{di} tubo 15. ped. ♃ in vicinia horizontis.	7. 44. 55
	12. 12. 23.	Immerſ. 1^{mi} tubo 15. ped.	12. 12. 23
28.	15. 47. 2	Immerſ. 2^{di} tubo Newt: 5. ped. ventus hanc obſerv. pauliſper turbauit.	15. 46. 47

Octobr:

Octobr:	2.	6.59.22.	Immerſ. Sat: 1mi tubo Newt: 5. ped. Obſerv. dubia quia Satelles, proxime ad Iovem eclipſin paſſus eſt.	6.59. 7.
Nouembr:	1.	11.18. 8.	Emerſ: 1mi tubo Newt: 5. ped. quae vero cum per nebulam obſeruata fuerit 8″ vel 10″ citius contingere potuit.	11.18.15
Decembr:	19.	5.56.19.	Emerſ: 1mi tubo Newt: 5. ped. Obſeruatio accurata.	5.56.34
an. 1739.				
Ianuar:	11.	6. 3.15.	Emerſ: 1mi tubo 15. ped.	6. 3.15

DEDVCTIONES

pro determinanda meridianorum differentia inter Petropolitanum et Iakutenſem.

Emerſ. 1. Petropoli obſerv. Nov. 14. 1737.	6^h.	$7'$.	$50''$
Si addatur vna Satellitis Reuolutio ex tabulis.	1^d. 18.	28.	36
Em: 1. obſeruari debuiſſet Petropoli Nov. 16.	0. 36.	26	
quae vero obſeruata eſt Iakuti	7.	13.	0
a) differentia meridianorum	6.	36.	34
Im: 1. Petropoli obſeruata 1738. Iulii 23.	11^h.	$39'$.	$28''$
Si addatur vna Satellitis Reuol. ex tab.	1^d. 18.	28.	36

Im: 1. obseruari debuisset Petropoli Iulii 25.	6.	8.	4
quae vero obseruata est Iakuti	12.	46.	7
b) differentia meridianorum	6.	38.	3

Im: 1. Petropoli observ. 1738. Sept. 7.	12^b.	$12'$.	$23''$
- - - - - - - - - - - Aug. 22.	13.	50.	40
interuallum, quod 9. reuolutiones efficit. 15^c.	22.	$21'$.	$39''$
hinc 4. reuolutiones Satellitis 7.	1.	56.	17
quare cum Petropoli obseruata sit Im: 1. Sept. 7.	12.	12.	23
Im: Petropoli obseruari debuisset Aug. 31.	10.	16.	6
ista vero Iakuti obseruata est	16.	54.	1
c) differentia meridianorum	6.	37.	55

In comparatione obseruationum Petropolitanarum d. 22. Aug. et 7. Septembr. tempora vera adhibuimus, adeoque hoc interuallo dies Solares eiusdem magnitudinis supposuimus. Etiamsi vero dies Solares inaequales statuantur et per aequationes temporis emendentur; calculo absoluto discrepantia vix 2. secundorum prodit, ita vt inaequalitates dierum Solarium in hoc negotio solicite curare non opus sit.

Im: 2. Petropoli observ. 1738. Sept. 7.		7^b.	$44'$.	$55''$
- - - - - - - - - - - Aug. 27.		15.	46.	7
Interuallum, quod efficit 3. Reuol. Satell.	10^d.	15^b.	$58'$.	$48''$
vnde reuolutio vna	3.	13.	19.	36
quare cum Im: 2^{di} observ. sit Petrop. Aug. 27.		15.	46.	7

Im

Im: 2 Petropoli obſeruari debuiſſet Aug. 31.	5.	5.	43
quo die Im: 2. obſeruata eſt Iakuti	11.	44.	24
d) differentia meridianorum	6.	38.	41
Im: 2. Petropoli obſerv. 1738. Sept. 28.	15.	46.	47
Si addatur reuol. vna Satellitis ex tab.	3^d. 13.	17.	54
Im: 2. Petropoli obſerv. debuiſſet Octobr. 2.	5.	4.	41
quo die Im: 2. obſeruata eſt Iakuti	11.	42.	31
e) differentia meridianorum	6.	37.	50
Im: 1. Iakuti obſeruata 1738. Octobr. 2.	13.	37.	25
Im: 1. Petropoli obſeruata die eodem	6.	59.	7.
f) differentia medianorum	6.	38.	18
Em: 1. Iakuti obſerv. 1738. Nov. 5.	6.	52.	1
- - - - - - - - - Octobr. 27.	10.	29.	22
Interuallum, quod 5. reuol. efficit	8^d. 20.	22.	39
hinc 3. reuolutiones Satellitis	5. 7.	25.	35
quae ſi addantur Em: 1. Iakuti obſ. Octobr. 27.	10.	29.	22
Em: 1. Iakuti obſeruari debuiſſet Nov. 1.	17.	54.	57
quo tempore Petropoli obſeruata eſt	11.	18.	15
g) differentia meridianorum	6.	36.	42
Em: 1. Iakuti obſerv. 1738. Dec. 21.	7^h.	$2'$.	$3''$
- - - - - - - - - - Dec. 14.	5.	10.	20
Interuallum, quod 4. reuol. efficit	7^d. 1.	51.	43
hinc vna Satellitis reuolutio	1. 18.	27.	56
quae ſi ſubtr. ab Em: 1. Iakuti obſ. Dec. 21.	7.	2.	3

Em:

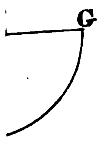
Em: 1. Iakuti obſerv. debuiſſet Dec. 19.	12.	34.	7
quo die iſta Petropoli obſeruata eſt	5.	56.	34
h) differentia meridianorum	6.	37.	33
Em: 1. Iakuti obſerv. 1739. Ianuar. 13.	7.	8.	58
- - - - - - - - Ianuar. 6.	5.	15.	46
Interuallum, quod 4. reuol. efficit	7^d. 1.	53.	12
inde reuolutio vna	1 18.	28.	18
quae ſi ſubtr. ab Em: 1. Iakuti obſ. Ian. 13.	7.	8.	58
Em: 1. Iakuti obſeruari debuiſſet Ian. 11.	12.	40.	40.
quo die iſta Petropoli obſeruata eſt	6.	3.	15
i) differentia meridianorum	6.	37.	25

Igitur differentia meridianorum inter Petropolitanum et Iakutenſem

	a)	6^h.	$36'$.	$34''$
Pleraeque concluſiones	b)	—	38.	3
dubiae ſunt ex circum-	c)	—	37.	55
ſtantiis obſeruationum	d)	—	38.	41
et non nullae etiam	e)	—	37.	50
ex methodo deducen-	f)	—	38.	18
di iſtas, vnde medium	g)	—	36.	42
eligendo, erit differen-	h)	—	37.	33
tia meridianorum me-	i)	—	37.	25
dia		6^h.	$37'$.	$40''$

quae in Aequatore efficit	99°. $25'$
vnde ſi Longitudo Petropoli ab inſula Ferro	47. 49 ſtatuatur
erit Longitudo Iakuti	147. 14

FINIS.



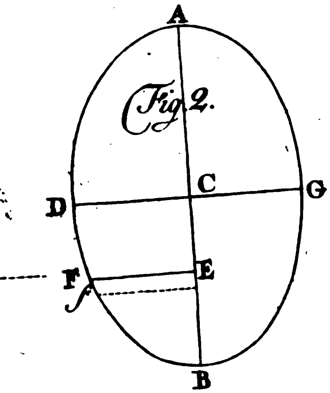


Fig. 2.

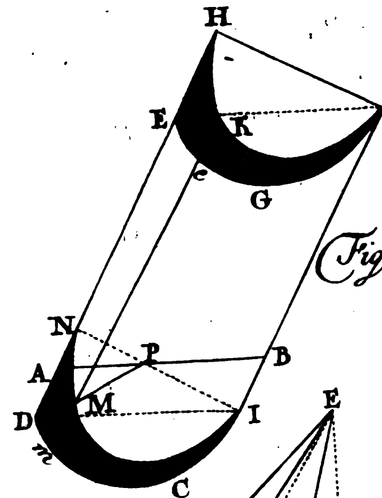
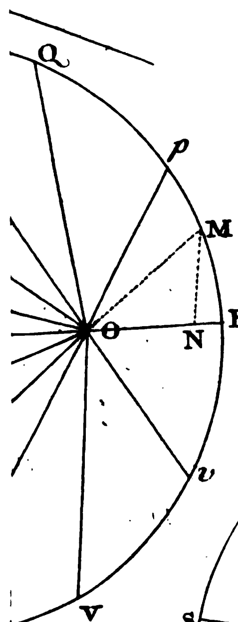


Fig. 3.



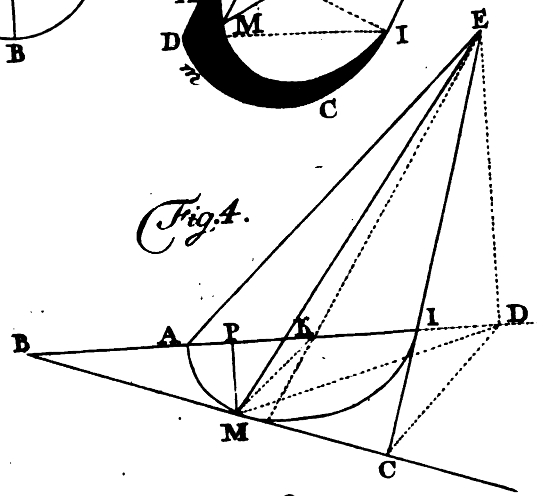


Fig. 4.

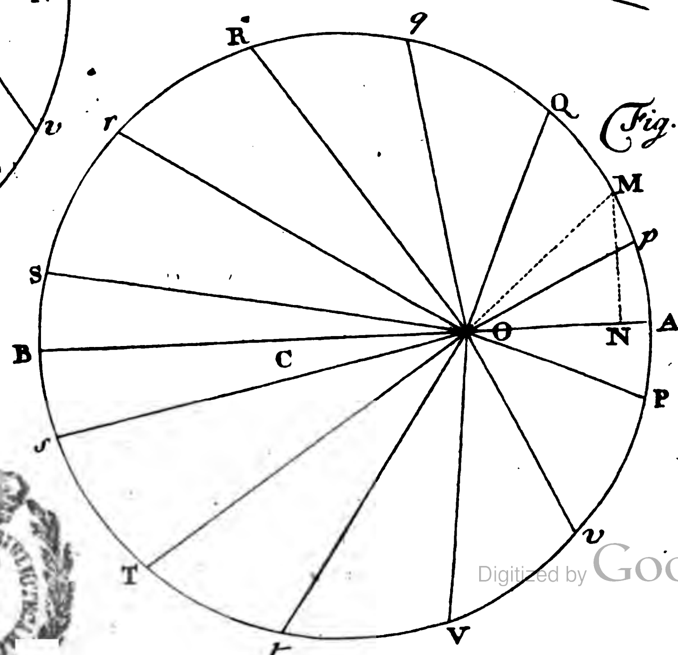


Fig. 6.

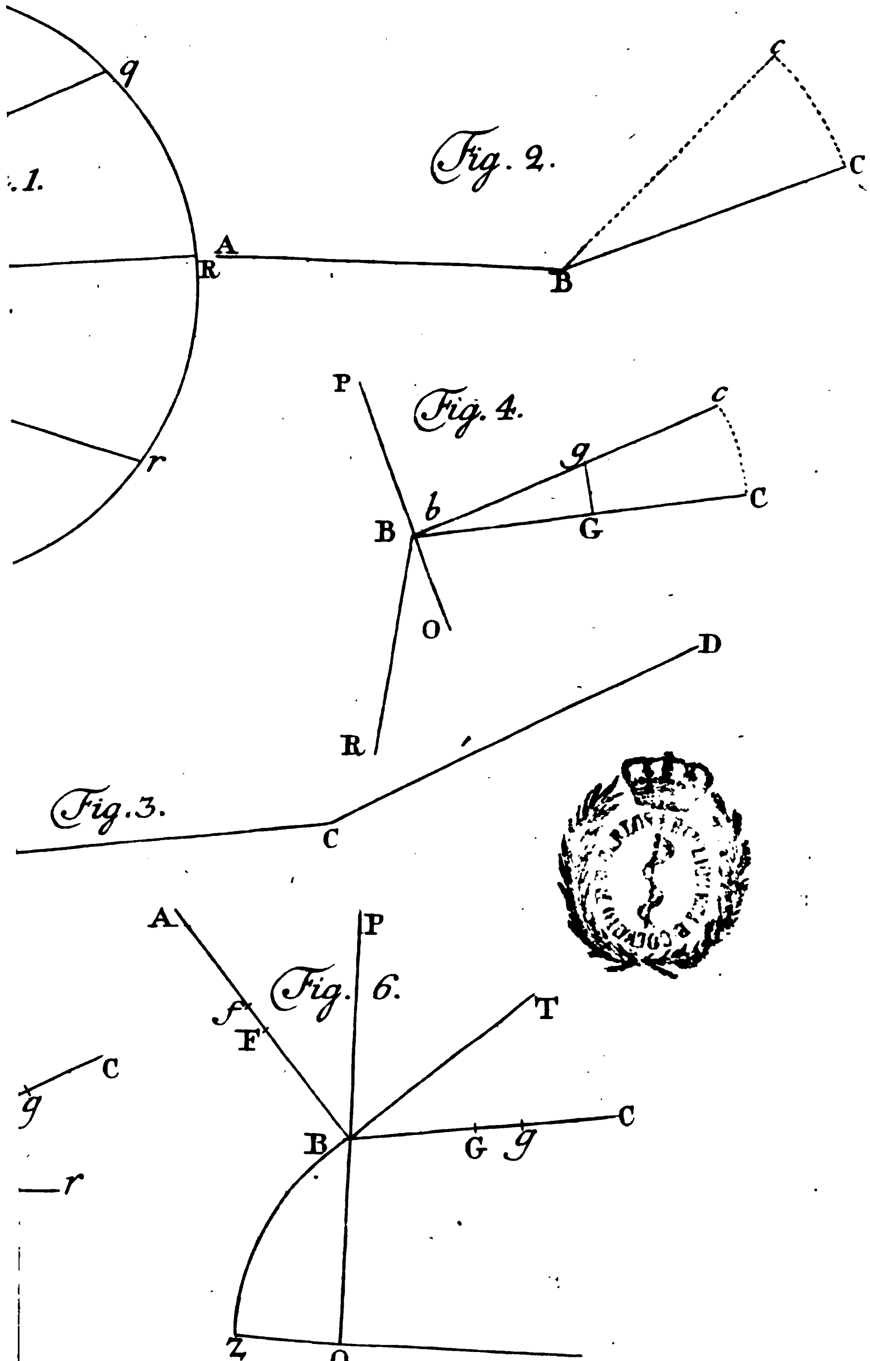
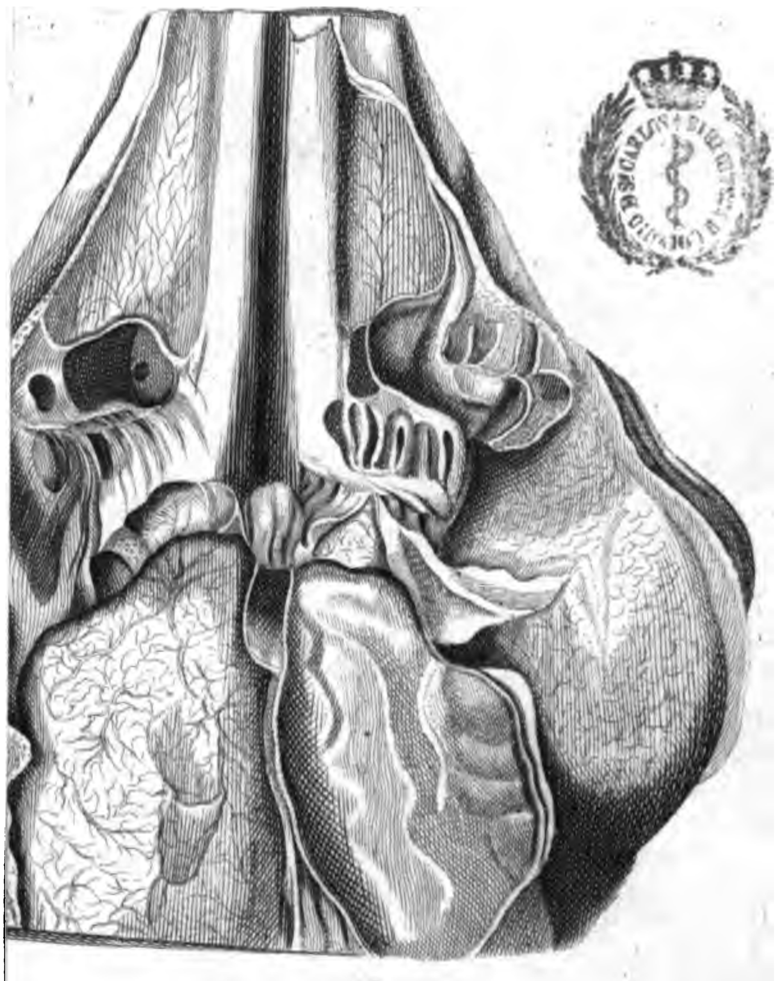
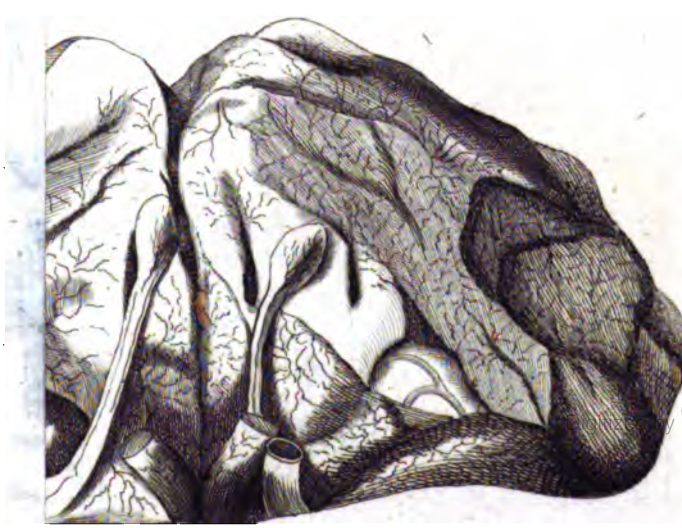
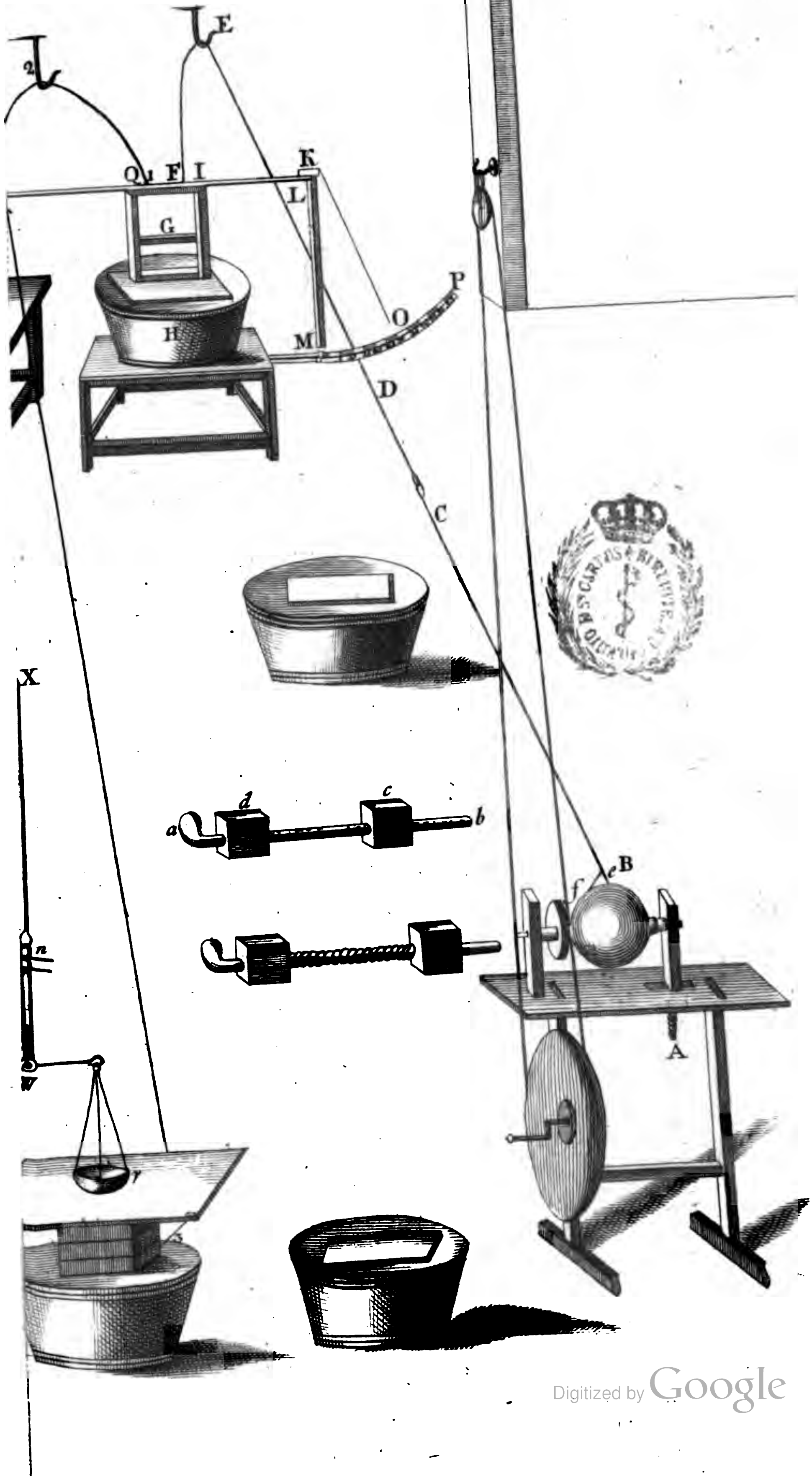


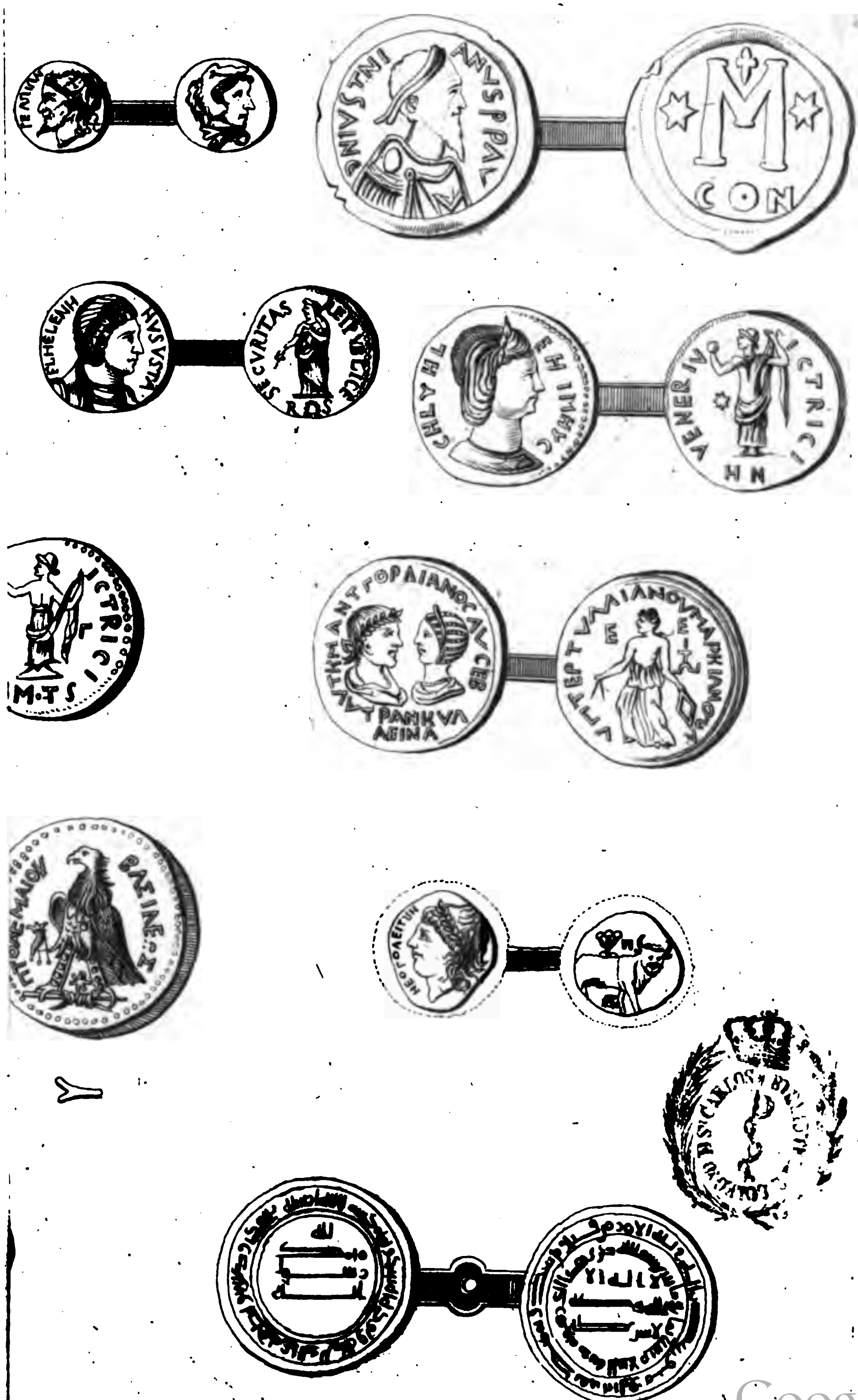
Fig. 1.
q
r
A
R
B
c
C
Fig. 2.
Fig. 4.
P
b
B
g
G
c
C
O
R
D
Fig. 3.
C
Fig. 6.
A
P
f
F
T
B
G
g
C
q
C
r
Z
O

Fig. 1.






E
2
Q
F
I
K
L
G
H
M
O
P
D
C
d
c
a
b
e
B
f
A
X
n
W
r
3


CON
VENERI VICTRICI
HN