COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE.

TOMVS XIII.

AD ANNVM MDCCXLI - XLIII.

PETROPOLI.

TYPIS ACADEMIAE.

MDCCLI.

INDEX COMMENTARIORVM

In Classe Mathematica.

L.

In Classe Physica.

In Classe Historica.

Eiusdem

Obseruationes Astronomicae.

CLASSIS PRIMA

CONTINENS

MATHEMATICA.

EXCERPTA EX LITTERIS.

à

DANIELE BERNOVLLI

ad

Leonhardum Euler.

Egregia plane ſunt, Vir Celeberrime, quae mihi de nouo fere calculi integralis genere perſcribis: placet tuus quantitates a circulo pendentes notandi modus eoque pariter iam pridem vſus ſum: recte etiam huiusmodi quantitates conſtanter reducis ad circulum eundem, cuius radium ponis aequalem vnitati, non ſecus ac quantitates logarithmicae reduci ſolent ad logarithmicam, cuius ſubtangens ſit vnitate expreſſa: Tum vero admiratus ſum inſignem vſum, quem primus obſeruaſti huiusmodi quantitatibus ineſſe, ingentem aequationum differentialium altioris gradus ſegetem ad quantitates finitas reducendi. Habent quantitates ad logarithmicam et circulum pertinentes, quum continue differentiantur, multas inſignes proprietates, quibus te vſum eſſe video, tum etiam coniicio, te methodum integrandi hic adhibere indirectam, ſed ea tamen circumſpectione, quam in eiusmodi methodis indirectis alias negligunt, vt tot nouos quantitates conſtantes arbitrarias aequatio integralis contineat, quot methodo integrandi directa ab additione conſtantium prodire potuiſſent. Circumſpectum hic vtique esse oportet in diiudicandis et enumerandis diuersis quantitatibus constantibus ad institutum vtilibus, quia saepissime inutiles sunt, quae non nisi post serium examen tales esse iudicantur. Ita verbi gratia haec formula $me^{nx}\times S.A.\overline{a+bx}+fe^{nx}\times S.A.\overline{g-bx}$ quatuor tantum arbitrariis gaudere censenda est, cum prima fronte sex ipsi adiudicandos esse appareat: potest nempe praefata formula mutari in hanc alteram hoc confirmante $Me^{nx}\times S.A bx+Ne^{nx}\times \cos. A.bx$, vnde liquet quam facile in isto negotio nubes pro Iunone accipi possit. Operae pretium foret examinare, an et quales regulae pro omni formularum genere dari possint in aestimando vero quantitatum constantium ad propositum vtilium numero, vt certi esse possimus post integrationes indirectas, omnes problematis solutiones possibiles fuisse exhibitas; huc enim huiusmodi disquisitiones collimant: At vero propero ad calculi specimina, quae mihi proposuisti. Obseruaui ea non difficulter deduci ex forma quam habent differentialia sinuum arcubus circularibus variabilibus respondentium, sicut et differentialia quantitatum exponentialium ac denique quantitatum, quae oriuntur a multiplicatione vtriusque praefati generis. Sit dx constans intelligaturque per e numerus cuius logarithmus est vnitas, erit

I. $d^n.cS.A.(a+bx)=\pm cb^n dx^n\times S.A.(a+bx)$

vel $=\pm cb^n dx^n\times \cos. A.(a+bx)$

prouti n fuerit numerus vel multiplus quaternarii vel ab eodem vnitate, aut binario aut ternario deficiat.

II. $d^n\, ce^{fx}=cf^n dx^n\times e^{fx}$

III. $d^n.ce^{fx}\times S.A.(a+bx)=Mcdx^n e^{fx}\times S.A(a+bx)$

$+Ncdx^n e^{fx}\times \cos. A.(a+bx)$

vbi

vbi M et N denotant quantitates constantes diuersimode compositas ex litteris b et f secundum legem obseruatu facillimam. Potest itaque litteris f et b talis assignari valor (quod quidem fit aequatione ad tot dimensiones assurgente, quot habet numerus n vnitates) vt sit $N = o$ et M aequalis cuicunque numero dato. Et quia aequatio plurium dimensionum totidem habet radices diuersas, patet simul totidem modis huic conditioni satisfieri. Quid autem faciendum sit cum quaedam radices sunt imaginariae vel inter se aequales, ex sequentibus patebit. Haec omnia simpliciter deriuantur ex eo, quod $dS.A.z = dz \cos.A.z$ et $d\cos.A.z = -dzS.A.z$. Dubitare perrectis litteris tuis, Vir Clarissime, non licet, quin haec omnia tibi similiter fuerint obseruata, iisque integrationes formularum, quas perscripsisti, superinstruxeris. Iam itaque hasce formulas integrandas suscipio, vt videas an recte hoc argumentum fuerim assecutus et aliquas superaddam commentationes, quas te minime improbaturum esse confido.

I. Exemplum primum, quod allegas, hoc est posita dz constante.

$$nndds + sdz^2 = \alpha dz^2 S.A.z.$$

ad quod te argumento de aestu maris nuper ab Academia Regia Sc. Paris. Eruditis proposito perductum fuisse scribis.

Hic facile est praeuidere, quod si ponatur $s = \alpha S.A.z$, omnes aequationis termini hanc debeant induere formam $Mdz^2S.A.z$, ita vt possit valor litterae α assignari talis, vt omnes termini se destruant sicque aequationi perfecte satisfiat: hunc scilicet in finem facienda est

$a = \frac{-m}{nn-1}$. Igitur aequationi differentiali propositae iamiam satisfacit aequatio $s = \frac{-m}{nn-1}$ S. A. z, quae autem nimis adhuc est particularis. Huic vt occurram defectui pono $s = \frac{-m}{nn-1}$ S. A. $z + q$, et sic aequatio proposita abit in hanc $nnddq + qdz^2 = 0$

Haec vltima quidem aequatio modo solito directe potest integrari, quia vero animus est vsum ostendere integrationum indirectarum, vtor proprietatibus supra expositis, quas hic vtiliter adhiberi posse, ipsa aequationis huius forma indicat: pono itaque $q = f$S. A. $(bz + g)$ inquisiturus in valorem litterae b talem, vt desiderato satisfiat: docet autem calculus ponendum esse $b = \frac{1}{n}$. sic igitur fit $q = f$S. A. $(\frac{z}{n} + g)$

quae omnes problematis solutiones possibiles iam continere dicenda est, quia tot nouis gaudet quantitatibus arbitrariis vtilibus, nempe f et g, quot ab integratione directa oriri potuissent. Determinato valore q, eoque substituto in aequatione assumta $s = \frac{-m}{nn-1}$ S. A. $z + q$, prodit aequatio finalis $s = \frac{-m}{nn-1}$ S. A. $z + f$S. A. $(\frac{z}{n} + g)$

Ista quidem aequatio mea a tua prima fronte videtur diuersa: reuera tamen inter se egregie conueniunt. Invenisti nempe

$s = a$ S. A $\frac{z}{n} + b$ cos. A. $\frac{z}{n} + \frac{m}{nn-1}$ (n S. A. $\frac{z}{n}$ − S. A. z)

atque vt identitas aequationum nostrarum patefiat, notabimus esse S. A. $(\frac{z}{n} + g)$ = cos. A. g × S. A. $\frac{z}{n}$ + S. A. g × cos. A. $\frac{z}{n}$. Potest itaque aequationi meae haec dari forma

$s = \frac{-m}{nn-1}$ S. A. $z + f$cos. A. g × S. A. $\frac{z}{n} + f$S. A. g × cos. A $\frac{z}{n}$

tua

tua vero aequatio mutato terminorum ordine, haec est $s = \frac{-m}{nn-1}$ S. A. $z + \left(\frac{mn}{nn-1} + a\right)$ S. A. $\frac{z}{n} + b$ cof. A. $\frac{z}{n}$ Igitur conueniet aequatio tua cum mea, si posueris $a = f$ cof. A. $g - \frac{mn}{nn-1}$ et $b = f$ S. A. g, atque vides has substitutiones hoc modo adhibitas aequationem tuam reddere haud parum concinniorem. Lubet nunc addere problematis tui solutionem directam, vt appareat isto exemplo, tutissimum esse hunc integrandi modum indirectum. Sit ergo rursus integranda aequatio

$$nndds + sdz^2 = mdz^2 \text{ S. A. } z.$$

Ponatur S. A. $z = r$, erit $dz \frac{dr}{\sqrt{(1-rr)}}$ atque (ob $dz =$ constanti) $dr^2 = \frac{1-rr}{r} \times - ddr$; His substitutis valoribus mutatur aequatio proposita in hanc

$$nndds = \frac{s-m}{r} ddr$$

Ponatur, vt aequatio fiat simplicior, $s = \frac{-mr}{nn-1} + q$ et obtinebitur successiue $nnrddq = qddr$ vel $nnr ddq = \frac{-qrdr^2}{1-rr}$ vel $\frac{nnddq}{q} = \frac{-dr^2}{1-rr}$ vel denique $\frac{nnddq}{q} = -dz^2$ multiplicetur haec vltima aequatio per qdq et erit $nndqddq = -qdqdz^2$, quae integrata cum additione constantis dat $\frac{1}{2}nndq^2 = -\frac{1}{2}qqdz^2 + \frac{1}{2}ffdz^2$ siue

$$dz = \frac{ndq}{\sqrt{(ff-qq)}}$$

Est autem $\int \frac{ndq}{\sqrt{(ff-qq)}} = n$ A. S. $\frac{q}{f}$. Sic igitur facta secunda integratione cum addita constante ng fit $z + ng = n$ A. S. $\frac{q}{f}$. Potest autem signum A. S. si conuertatur in partem alteram transferri, hocque facto prodit $\frac{q}{f} =$ S. A. $\left(\frac{z}{n} + g\right)$ vel $q = f$ S. A. $\left(\frac{z}{n} + g\right)$. Iam quia posita fuit $s = \frac{-mr}{nn-1} + q$ atque $r =$ S. A. z, erit tandem

$$s = \frac{-m}{nn-1} \text{ S. A. } z + f \text{ S. A. } \left(\frac{z}{n} + g\right).$$

at-

atque haec aequatio eadem plane est cum priori, quam methodo eruimus indirecta.

Si iam signum termini primi mutetur in aequatione proposita atque integranda detur

$$-n n d d s + s d z^2 = m d z^2 \text{ S. A. } z$$

fit secundus aequationis integratae terminus imaginarius, nempe talis f S.A. $\left(\frac{z}{n\sqrt{-1}} + g\right)$: dico autem posse in hisce casibus sinui arcus circularis imaginarii semper substitui quantitates exponentiales, quae tunc fient reales: satisfaciet nempe, quod vtraque methodo liquet, nunc talis aequatio

$$s = \frac{m}{nn+1} \text{ S. A. } z + a e^{\frac{z}{n}} + b e^{\frac{-z}{n}}.$$

Caeterum potest aequatio proposita infinitis modis infinities generalior reddi atque etiamnum integrari: sed haec taceo, ne epistolae limites transgrediar.

II. Progredior ad exemplum alterum, quod praesertim amo, quia pertinet ad argumentum mechanicum iam pridem a me propositum et a nobis ambobus solutum, argumentum intelligo de figura, quam lamina elastica vniformis muro infixa et vibrata affectat, quae figura prius definienda est, quam numerus vibrationum dato tempori respondens, de quo imprimis quaestio erat, determinari possit. Hanc autem figuram posita abscissa v, applicata minima s factaque dv constante, conuenire inuenimus cum hac aequatione

$$d^4 s = f^4 s d v^4$$

quae quidem per series concinne tractatur, ita vt numerus vibrationum absolutus pro dato tempore inde rite definiri possit, si artificia quaedam mechanica adhibeantur. Methodus mea, quam nondum cum Academia communicare

nicare vacauit, talis est vt facto experimento, quantum extremitas laminae dato pondere a situ naturali distrahatur eoque pondere cum pondere laminae comparato, accurate numerus vibrationum definiatur: omnem etiam theoriam meam experimentis confirmaui. Equidem tum temporis etiam integrationem praefatae aequationis methodo directa tentaueram, sed ea vltra differentialia secundi ordinis peruenire non potui. Nunc vero tibi, vir eruditissime, hanc obseruationem debemus, quod ista aequatio plane ad quantitates finitas reduci possit. Nec ista reductio methodo indirecta obscura amplius est, quia non aliud requiritur, quam vt inueniatur quantitas expressa per v et quatuor nouas constantes talis, vt ipsius differentialis quarti ordinis sit ipsi quantitati quaesitae proportionalis, cui problemati quomodo satisfaciendum sit, ex praemissis iam luculenter patet. Videmus nempe statim, poni posse

$$s = a e^{fv} + b e^{-fv} + c e^{fv\sqrt{-1}} + g e^{-fv\sqrt{-1}}$$

Quia vero in ista aequatione duae sunt quantitates exponentiales imaginariae, oportet vi superioris annotationis ad sinus arcuum circularium recurrere; atque sic inuenitur vera aequatio talis

$$s = a e^{fv} + b e^{-fv} + g S.A (fv + h)$$

III. Progredior ad exemplum, quod proponis, generalius, nempe aequationem integrandam

$$d^n s = f^n s d v^n$$

quae concinnior paullo redditur ponendo $fv = q$: ita enim fit

$$d^n s = s d q^n$$

in qua aequatione dq etiamnum constans est.

Huic quidem aequationi semper satisfacit haec aequatio $s = a e^q$; quia vero aequatio generalissima tot gaudere debet nouis arbitrariis constantibus quot sunt vnitates in n, de aliis insuper cogitandum est terminis aequationi propositae pariter satisfacientibus. Huic postulato satisfieret ponendo

$$s = a e^q + b e^{Aq} + c e^{Bq} + f e^{Cq} + \text{etc.}$$

si scilicet per 1, A, B, C etc. intelliguntur radices huius aequationis $x^n = 1$, quoniam vero sola radix prima semper est realis et reliquae omnes sunt imaginariae (nisi n sit numerus par, vbi etiam satisfacit terminus $b e^{-q}$) colligo recurrendum esse ad huiusmodi terminos $m e^{gq} \times \text{S.A.}(b + bq)$, in quibus litterae g et b determinantur rursus aequationibus altioris gradus sic vt plures diuersi valores illis assignari possint, vnde liquet, si vnicus inuentus fuerit huiusmodi terminus, reliquos simul innotescere variando radices litterarum g et b. Problema itaque eo reductum est, vt aequationes exhibeantur, quibus praefatae litterae definiantur. Dico autem si vestigiis supra expositis insistatur, tales prodire aequationes

$$g^n - \frac{n.\overline{n-1}}{1.2} g^{n-2} bb + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3.4} g^{n-4} b^4 - \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}.\overline{n-5}}{1.2.3.4.5.6} g^{n-6} b^6 + \text{etc.} = 1 \text{ atque}$$

$$n g^{n-1} b - \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3} g^{n-3} b^3 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{1.2.3.4.5} g^{n-5} b^5 - \text{etc.} = 0.$$

Demonstrari autem potest vi harum aequationum litteram b exprimere sinum arcus circularis qui se habeat ad circumferentiam circuli vt 1 ad n et litteram g eiusdem arcus exhibere cosinum: si itaque indicetur circumferentia circili per C, erit $b = \text{S.A}\frac{C}{n}$ atque $g = \text{cos. A}.\frac{C}{n}$. Et cum tam sinus quam cosinus arcuum

$\frac{C}{n}$

$\frac{C}{n}, \frac{2C}{n}, \frac{3C}{n}$ etc. eadem exprimantur aequatione, poterit ſimul poni $b = S.A.\frac{2C}{n}$; $b = S.A.\frac{3C}{n}$ etc. pariterque $g =$ coſ. $A.\frac{2C}{n}$; $g =$ coſ. $A.\frac{3C}{n}$. Ex hiſce omnibus ſequitur aequationem quaeſitam ita ſe habere

$$s = \alpha e^{q} + \beta e^{q \cos. A.\frac{C}{n}} \times S.A.(c + q\,S.A.\tfrac{C}{n}) + \gamma e^{q \cos. A.\frac{2C}{n}}$$

$$\times (f + q\,S.A.\tfrac{2C}{n}) + \delta e^{q \cos. A.\frac{3C}{n}} \times (b + q\,S.A.\tfrac{3C}{n}) + \text{etc.}$$

quae aequatio poſtquam tot ſubminiſtrauit terminos, quot requirit numerus nouarum arbitrariarum obtinendarum, ſequentes omnes in priores recurrunt, atque haec aequatio plane eadem eſt cum tua, quam mihi etſi ſine calculo et methodo, perſcripſiſti. Quoniam vero de iſto problemate ante litteras tuas perlectas non cogitaui, affirmare nunc non poſſum, me ſingula perinde fuiſſe aſſecuturum, neque abs te exigere vt credas; videbis interim ex ſequenti exemplo, cuius nequidem minima ſolutionis veſtigia appoſuiſti, via recta me nequaquam aberrare. Nec enim quicquam eorum, quae cum Patre meo hac de re communicaſſe ſcribis, mihi vllo modo in notitiam venit.

IV. Requiris aequationem integralem adaequatam huic aequationi differentiali ordinis cuiuscunque, in qua ponitur dx conſtans,

$$y + \frac{\alpha\,dy}{dx} + \frac{\beta\,ddy}{dx^2} + \frac{\gamma\,d^3y}{dx^3} + \frac{\delta\,d^4y}{dx^4} + \text{etc.} = 0.$$

Solutioni generali huius problematis praemittam ſolutionem aliquot caſuum particularium:

Sit *primo* $y + \frac{\alpha\,dy}{dx} = 0$, iam notum eſt fore $y = a e^{\frac{-x}{\alpha}}$

Sit

Sit *secunda* $y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\beta ddy}{dx^2} = 0$; dico fore

$$y = a e^{\left(-\frac{\alpha}{2\beta} + \sqrt{(\alpha\alpha - 4\beta)}\right) x} + b e^{\left(-\frac{\alpha}{2\beta} - \sqrt{(\alpha\alpha - 4\beta)}\right) x}$$

Si vero 4β maior sit quam $\alpha\alpha$, ponendum esse

$$y = a e^{\frac{-\alpha x}{2\beta}} \times \text{S.A.}\left(b + \frac{x}{2\beta}\sqrt{4\beta - \alpha\alpha}\right)$$

Dico praeterea, si sit $4\beta = \alpha\alpha$, fore tunc mutata paullo aequationis forma,

$$y = (a + bx) e^{\frac{-2x}{\alpha}}$$

Ponatur *tertio* $y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\beta ddy}{dx^2} + \frac{\gamma d^3 y}{dx^3} = 0$, poterit aequatio integralis quatuor diuersas habere facies, eritque nominatim

$$y = a e^{fx} + b e^{gx} + c e^{hx}, \text{ aut}$$
$$y = a e^{fx} + (b + cx) e^{gx}, \text{ aut}$$
$$y = (a + bx + cxx) e^{fx}, \text{ aut denique}$$
$$y = a e^{fx} + b e^{gx} \times \text{S.A.}(c + hx)$$

in quibus singulis litterae a, b et c sunt arbitrariae constantes, dum litterae f, g et h aequationibus, quas calculus pro obtinenda identitate indicat, sunt determinandae; quaenam vero ex praefatis aequationibus sint seligendae, et quonam fundamento haec omnia innitantur, apparebit nunc ex solutione generali.

Sit igitur iam *generaliter*

$$y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\beta ddy}{dx^2} + \frac{\gamma d^3 y}{dx^3} + \frac{\delta d^4 y}{dx^4} + \text{etc.} = 0$$

Ad reductionem huius aequationis obtinendam, considerandam est talis aequatio

$$1 + \alpha s + \beta ss + \gamma s^3 + \delta s^4 + \text{etc.} = 0$$

Sintque radices huius aequationis, A, B, C, D etc., ita

ita vt sit $(s-A)\times(s-B)\times(s-C)\times(s-D)\times$ etc. $=0$;
dico fore $y = ae^{Ax} + be^{Bx} + ce^{Cx}\, de^{Dx} +$ etc.
vbi litterae a, b, c, d etc. exprimunt quantitates arbitrarias constantes: Demonstratio autem huius solutionis ex praemissis abunde patet.

Iam vero contingere potest vt aliquae aut etiam omnes radices A, B, C, D etc. sint imaginariae, quibus in casibus solutio esset imperfecta: Huic defectui ita occurretur. Sint verbi gratia C et D duae radices imaginariae (nec enim numero impares esse possunt) substituendus erit in aequatione integrali quaesita pro terminis binis $ce^{Cx} + de^{Dx}$ talis terminus $f.e^{\frac{C+D}{2}x} \times S.A.(g + \frac{C-D}{2\sqrt{-1}}x)$ qui semper erit realis, quoties litterae C et D inuoluunt radices quadratas alicuius quantitatis negatiuae, atque si plures quam duae sint huiusmodi radices imaginariae, pro singulis binis similis substitutio facienda est: Nondum tamen mihi satis exploratum est, an necessario alterutrum quantitatum genus problemati semper rite satisfaciat, etiamsi radices imaginariae sint altioris gradus: Haec et multa alia, quae nunc praetereo, aliquando paullo maturius examinabo: quae enim nunc scribo fere tumultuaria sunt.

Potest porro accidere, vt duae aut plures radices expresse per A, B, C, D etc. sint aequales, quod cum fit, confluunt aliqui termini in aequatione exhibita $y = ae^{Ax} + be^{Bx} + ce^{Cx} + de^{Dx} +$ etc. et sic aliquae arbitrariarum a, b, c, d etc. inutiles fiunt nec amplius aequatio ista totam suam habet extensionem. Huic nunc defectui occurretur multiplicando quantitatem exponentialem com-

 munem

munem per $a+bx+cxx+$ etc. sumendo tot terminos quot sunt radices aequales, idemque cum singulis quantitatibus exponentialibus, quae ita conflatae fuerunt ex pluribus aliis, faciendum est. Ita v. gr. huius aequationis $y+\frac{4dy}{dx}+\frac{4ddy}{dx^2}=0$, debita aequatio integralis haec est $y=(a+bx)e^{-\frac{1}{2}x}$: atque si proponatur aequatio integranda $y+\frac{3dy}{dx}+\frac{3ddy}{dx^2}+\frac{d^3y}{dx^3}=0$, dico fore

$$y=(a+bx+cxx)e^{-x}.$$

Nec plane omittendus est vsus huius methodi integrandi indirectae, qui in eo consistit, quod saepe aequationes differentiales siue substitutionibus siue praesertim vlteriori aequationis propositae differentiatione ad classes, quas exposuimus, reduci possint: In illustrationem atque confirmationem huius rei inseruiet sequens exemplum. Sit aequatio integranda.

$$\text{(A)}\quad 8dx^2+2yddy=dy^2+4yydx^2$$

Haec aequatio differentiata (ponimus autem dx constantem) dat (B) $d^3y=4dydx^2$

quae iam est ex classe aequationum, quarum integrationem docuimus: est nempe aequatio eius integralis vniversalissima talis (C) $y=a+be^{2x}+ce^{-2x}$

Haec vero aequatio (C) adaequata quidem est aequationi (B) sed nimiam habet extensionem ratione aequationis propositae (A) quam vtpote secundi ordinis comprehendit ceu aequationem particulariorem: igitur nunc rursus restringenda est aequatio hoc modo integrata (C) ex eademque casus inutiles sunt eliminandi: Id vero fit differentiando duabus vicibus aequationem (C) substituendoque valores y, dy et ddy sic inuentos in aequatione proposita

(A)

(A) tumque faciendo vt isti aequationi recte satisfiat, quod hic efficitur sumendo $c = \frac{aa-2}{4b}$: Est igitur vera aequatio quaesita talis $y = a + b e^{2x} + \frac{aa-2}{4b} e^{-2x}$

Atque similis methodus est adhibenda, quoties aequatio aliqua proposita prius fuit vlterius differentiata, quam ad ipsius aequationem integralem peruentum fuerit.

Difficile ergo non admodum est, vt vides, formas huiusmodi aequationum integralium assequi, modo quis cognitam prius habuerit legem, secundum quam differentialia quantitatum, quas considerauimus, progrediuntur. Eiusmodi quantitates alias non minus ad aequationum differentialium altioris gradus integrationem vtiles obseruaui et nullus dubito quin praeter circulum et logarithmicam, aliae adhuc sint curuae, in quibus variae lineae speciali signo denotatae similibus, quum differentiantur, gaudeant proprietatibus, quae nouum integrandi fontem suppeditare possint. Vide iam, Vir Celeberrime, an haec cum tuis conueniant: Ego quidem methodos nostras nihil differre coniicio nec ea, quae noua addidi, te minus probaturum esse spero etc.

DE

DE EXTRACTIONE RADICVM EX QVANTITATIBVS IRRATIONALIBVS.

AVCTORE

LEONH. EVLERO.

§. 1.

Veteres Analystae ingens studium impendere sunt soliti in doctrinam quantitatum irrationalium seu surdarum; atque in hoc genere potissimum occupati fuerant, quemadmedum ex dato binomio vel residuo radicem tam cubicam altiorisue gradus quam quadraticam extrahere queant. Cum enim extractio radicum ex numeris rationalibus nulla amplius difficultate laboraret, numeri irrationales eo maiorem molestiam pepererunt, quo minus nexus patebat inter radicem irrationalem ipsam eiusque potestates cuiusuis gradus. Maxima autem difficultas in hoc versabatur, vt dignoscere possent, vtrum propositum binomium admittat radicem pariter binomiam eius potestatis, quae quaeritur, an non? quod si enim compertum fuerit, dari eiusmodi radicem, ipsa huius radicis inuentio non amplius erit difficilis; Sin autem constiterit talem radicem omnino non dari, praefixione signi radicalis, vti in numeris rationalibus vsu venire solet, totum negotium absoluetur.

§. 2. In hac disquisitione potissimum considerari solent quantitates binomiae huius formae $A + B$, denotantibus litterarum A et B altera numerum rationalem altetera irrationalem, signo radicis quadratae contentum. Duplicis vero huius formae $A+\sqrt{B}$ altera $A+B$ nomen binomii, altera $A-B$ nomen residui obtinuit. Inter vtramque formam tam arctus intercedit nexus, vt inuenta alterius formae radice cuiusvis gradus, ex ea simul radix alterius formae facillime formari queat. Si enim radix cuiusque Potestatis ex binomio $A+B$ fuerit $x+y$, tum respondentis residui $A-B$ radix eiusdem potestatis erit $x-y$. Cuius nexus ratio ex formis, quas potestates quaecunque binomiorum ac residuorum induunt, facile perspicitur.

§. 3. Vtrum huiusmodi binomium $A+B$ vel residuum $A-B$ admittat radicem quadratam an secus, discerni solet ex differentia quadratorum vtriusque partis, quae est $AA-BB$, quae si fuerit numerus quadratus, puta $=CC$, erit radix quadrata ex binomio $A+B$ $=\sqrt{\frac{A+C}{2}}+\sqrt{\frac{A-C}{2}}$; residui autem $A-B$ radix quadrata erit $=\sqrt{\frac{A+C}{2}}-\sqrt{\frac{A-C}{2}}$. Haec ergo radicis quadratae extractio ex forma $A+B$ succedit, si quantitas A, quae maior censetur altera quantitate B, simul fuerit rationalis. Namque si A esset quantitas irrationalis, tum in radice $\sqrt{\frac{A+C}{2}}+\sqrt{\frac{A-C}{2}}$ post signa radicalia adhuc numeri surdi continerentur, foretque ista radicis expressio magis perplexa, quam si radix more solito hoc modo $\sqrt{(A+B)}$ exprimeretur.

§. 4. Regula haec pro extrahenda radice quadrata ex binomiis et residuis data, cum facilis est, tum etiam eius demonstratio ex sola inspectione perspicitur. Cum enim sit $\sqrt{(A+B)}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}+\sqrt{\frac{A-C}{2}}$, fiet vtrinque quadratis sumendis $A+B=\frac{A+C}{2}+\frac{A-C}{2}+2\sqrt{\frac{AA-CC}{4}}$ $=A+\sqrt{(AA-CC)}$. At cum sit $CC=AA-BB$,

 erit

signum radicale binomio proposito $4\sqrt{3}+3\sqrt{5}$ simpliciter praefigatur; facilius enim valor expressionis $\frac{\sqrt{15}+3}{\sqrt{12}}$ intelligitur quam huius $\sqrt{(4\sqrt{3}+3\sqrt{5})}$, ob irrationalitatem post signum radicale complicatam.

§. 7. Multo maiore difficultate laborat extractio radicis cubicae altiorisue potestatis ex huiusmodi binomiis; neque enim pro his certa criteria assignari possunt, ex quibus dignosci queat, vtrum radix in tali forma binomii detur an non? Quocirca eiusmodi operatione negotium perfici conueniet, quae manuducat ad veram radicem, si quidem talis detur; contra autem radicem falsam exhibeat. Eiusmodi igitur operatione peracta dispiciendum erit, vtrum expressio resultans sit vera binomii propositi radix quaesita, an secus: id quod plerumque primo intuitu sese prodere solet. Quod si enim in expressione inuenta eiusmodi quantitates surdae insint quae omnino discrepent ab iis, quae in binomio proposito continentur, id certo erit indicio radicem veram non resultasse. Sin autem forma expressionis inuentae ita sit comparata, vt possit esse vera radix, tum demum examen institui oportebit, ad diiudicandum, vtrum ea sit vera radix an minus. Hanc ob caussam plus in hoc negotio praestari non potest, nisi vt regula tradatur, quae certo praebeat veram radicem; si talis detur in forma binomii; etiamsi eadem regula in casu contrario perpetuo falsam exhibeat. Quae cum ab analyseos principiis vehementer abhorreant, quippe quae in sola veritate inuestiganda versantur: perspicuum est, inuentionem eiusmodi regulae ex alio fonte peti debere.

§. 8.

§. 8. In eiusmodi regula inuenienda, quae tantum radici cubicae extrahendae inseruiat, veteres multum erant occupati, neque tamen quisquam talem regulam protulit, quae certo veram radicem suppeditaret, siquidem talis detur. Newtonus vero hoc negotium penitus confecisse videtur in Arithmetica vniuersali, vbi tradit regulam pro radice cuiuscunque potestatis ex proposito binomio inuenienda; eamque eius indolis esse perhibet, vt, si binomium admittat radicem istius potestatis, regula illa hanc radicem certissime sit patefactura. Regula haec Newtoni ita se habet: Sit $A \pm B$ binomium propositum, ex quo radicem potestatis, cuius exponens sit $= c$ extrahi oporteat. Quaeratur primo minimus numerus integer n, cuius potestas exponentis c nempe n^c diuisibilis sit per $AA - BB$, quotusque qui oritur ex diuisione potestatis n^c per $AA - BB$ ponatur $= Q$. Deinde quaeratur valor huic expressioni $\sqrt[c]{(A+B)\sqrt{Q}}$ proxime conueniens in numeris integris, qui ponatur $= r$. Tertio diuidatur expressio $A\sqrt{Q}$ per maximum diuisorem rationalem integrum, vt supersit quotus irrationalis vlterius non reducibilis, qui ponatur $= s$. Quarto definiatur numerus integer, qui proxime accedat ad valorem huius expressionis, $\frac{rr+n}{2rs}$ qui sit $= t$. His praeparatis Newtonus asserit radicem desideratam, si quidem binomium propositum $A \pm B$ talem admittat, fore $= \frac{ts \pm \sqrt{(ttss+n)}}{\sqrt[2c]{Q}}$: vbi notandum est in binomio $A \pm B$ nullas inesse debere fractiones; et si tales insint, eas prius more solito tolli oportere.

§. 9. Bonitatem huius regulae, satis complicatae et analyseos principiis admodum aduersantis, pluribus exemplis pro variis radicibus allatis confirmare est conatus Newtonus; atque eius ope perpetuo in assumtis exemplis veram elicuit radicem, quod si semper vsu veniret, regula eius nulla amplius correctione egeret. Incidi autem nuper in binomium hoc $5\sqrt{5}+11$ cuius radix surdesolida mihi constabat esse $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[5]{16}}$; periculum igitur mihi facere visum est, an Newtoni regula hanc radicem praeberet. Erit igitur $5\sqrt{5}=A$; $11=B$; et quia radix potestatis quintae desideratur, fiet $c=5$. Iam erit $AA-BB=4$; ex quo minima potestas quinta diuisibilis per $AA-BB=4$ prodit $=32$, vnde fit $n=2$, et $\frac{n^c}{AA-BB}=\frac{32}{4}=8=Q$. Deinde abibit $\sqrt[c]{(A+B)\sqrt{Q}}$ in $\sqrt[5]{(5\sqrt{5}+11)\sqrt{8}}$ seu in $\sqrt[5]{(5\sqrt{40}+11\sqrt{8})}$, ad cuius valorem in numeris integris proximum inueniendum fit $5\sqrt{40}=31,622$, et $11\sqrt{8}=31,112$, ideoque $5\sqrt{40}+11\sqrt{8}=62,734$, cuius radix surdesolida est $=2,288$, hincque numerus integer proxime conueniens $r=2$. Tertio fit $A\sqrt{Q}=5\sqrt{40}=10\sqrt{10}$, cuius maximus diuisor rationalis est 10, et quotus $\sqrt{10}$, ex quo erit $s=\sqrt{10}$. Quarto fit $\frac{rr+n}{2rs}=\frac{6}{4\sqrt{10}}=\frac{3}{2\sqrt{10}}$, ad quam fractionem proxime accedit numerus integer $t=1$; ita vt sit $ts=\sqrt{10}$ et $\sqrt{(ttss+n)}=\sqrt{12}$, vnde radix quaesita, quia datur, esse deberet $=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{12}}{\sqrt[10]{8}}$ quae vehementer differt a vera quae est $=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[5]{16}}$

Hoc-

Hocque adeo casu Newtoni regula ostenderet binomium propositum $5\sqrt{5}+11$ omnino non admittere radicem sursolidam binomialem, eo quod in radice inuenta [illegible] seu [illegible] inest $\sqrt{2}$, quae in potestatem quintam necessario ingredi deberet.

§. 10. Regula ergo Newtoni hoc vitio, quod in isto negotio maximum est, laborat, vt saepe numero radicem veram, et si talis in forma binomia datur, non exhibeat: quamobrem in aliam regulam vitio hoc carentem inquirens sequentem inueni ex ipsa rei natura petitam, quae simul non solum perpetuo feliciori cum successu, sed etiam minori opera adhiberi queat. Ipsaque regula, cum modo, quo eam sum nactus, ita se habet. Sit $A+B$ binomium seu residuum ex quo radicem potestatis, cuius exponens sit $=n$ extrahere oporteat, in A vero et B nullae insint fractiones, ita vt sint A et B numeri integri siue ambo irrationales siue vnus duntaxat. Aliam vero irrationalitatem non inesse pono praeter simplicem signo radicali quadrato contentam. Ex quo vtriusque binomii $A+B$ partis quadratum erit numerus rationalis integer; scilicet AA erit numerus rationalis integer atque etiam BB; pono autem esse $AA > BB$.

§. 11. Quodsi iam hoc binomium vel residuum $A \pm B$ habeat radicem potestatis n binomiam, ea necesse est habeat huiusmodi formam $\frac{x \pm y}{\sqrt[2n]{p}}$. Huius enim formae potestas exponentis n talis erit $\frac{M \pm N}{\sqrt{p}}$, quae vtique si M et N sint diuisibiles per $\sqrt{p}$ abire potest in formam

mam integram $A \pm B$. In radice ergo assumta $\frac{x+y}{\sqrt[2n]{p}}$ debebit esse p numerus integer rationalis, atque x et y siue ambo sint numeri irrationales siue alteruter tantum eorum quadrata xx et yy numeros rationales fieri oportet. Quare ob affinitatem binomii cum residuo emergent statim hae duae aequationes:

$$\sqrt[n]{(A+B)} = \frac{x+y}{\sqrt[2n]{p}}$$

$$\sqrt[n]{(A-B)} = \frac{x-y}{\sqrt[2n]{p}}$$

His duabus aequationibus in se mutuo ductis prodibit $\sqrt[n]{(AA-BB)} = \frac{xx-yy}{\sqrt[n]{p}}$ hincque $xx - yy = \sqrt[n]{(AA-BB)p}$. Cum igitur tam $xx-yy$ quam $AA-BB$ et p sint numeri integri rationales, pro p talem numerum accipi oportet, vt productum $(AA-BB)p$ fiat potestas exponentis n. Quocirca quaeri debet eiusmodi potestas n puta r^n, quae sit diuisibilis per $AA-BB$, eaque minima, quae exhiberi queat, vt calculus ad minimos numeros redigatur. Cognoscentur ergo numeri p et r ex aequatione $p = \frac{r^n}{AA-BB}$ quibus inuentis erit $xx-yy = r$; ideoque iam differentia quadratorum partium x et y quibus radix constat, innotescit. Atque huc vsque conuenit operatio, cum ea, quam Newtonus in sua regula instituere iubet.

§. 12. Cognita differentia quadratorum radicis partium $xx-yy$, quae est rationalis, quaero summam quadratorum earundem partium, quae pariter esse debet numerus rationalis integer. Fiet autem addendis quadratis binarum

binarum aequationum propositarum:

$$\sqrt[n]{(A+B)^2}+\sqrt[n]{(A-B)^2}=\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{\sqrt[n]{p}}$$

hincque

$$xx+yy=\tfrac{1}{2}\sqrt[n]{(A+B)^2p}+\tfrac{1}{2}\sqrt[n]{(A-B)^2p}$$

Aequatur ergo $xx+yy$ summae duarum quantitatum irrationalium; vnde si radix exhiberi potest, necesse est vt summa binarum illarum quantitatum irrationalium fiat numerus rationalis integer. Hic itaque prodibit, si numeri integri quaerantur ptoxime accedentes ad valores irrationales:

$$\sqrt[n]{(A+B)^2p} \text{ et } \sqrt[n]{(A-B)^2p}.$$

sumendo alterum iusto maiorem, alterum iusto minorem. Sit igitur proxime

$$\sqrt[n]{(A+B)^2p}=s\pm\text{fractione}$$

$$\sqrt[n]{(A-B)^2p}=t\mp\text{fractione}$$

hincque numeri integri s et t ope consuetae radicum extractionionis reperientur, quibus inuentis, erit

$$xx+yy=\frac{s+t}{2}.$$

Ex hisque tandem resultabit

$xx=\frac{2r+s+t}{4}$ et $yy=\frac{s+t-2r}{4}$, atque radix quaesita tandem erit haec:

$$\frac{\sqrt{(2r+s+t)}\pm\sqrt{(s+t-2r)}}{2\sqrt[2n]{p}}$$

§. 13. Non solum regula haec minori opera quam Newtoniana ad calculum reuocatur. Sed etiam tutius operatur; nam cum secundum Newtoni regulam aliquoties valor alicuius quantitatis irrationalis proxime in numeris integris accipi debeat, neque praescribatur vtrum numeri integri iusto maiores esse debeant, an minores, saepe numero ambigere debemus, vtrum iusto maiores numeros an iusto minores capiamus. Nostra autem hic data regula ista ambiguitate caret; etsi enim bis radicis irrationalis cuiuspiam valor proximus accipi debet, tamen simul innuimus, alterum valorem iusto maiorem esse debere alterum iusto minorem, ita vt in binorum horum valorum summa nulla ambiguitas locum habere queat. Praeterea in hac operatione facili negotio inuestigari potest, vtrum radix proditura vera sit an falsa. Ad hoc scilicet dignoscendum valores quantitatum $\sqrt[n]{(A+B)^2 p}$ et $\sqrt[n]{(A-B)^2 p}$ non solum in numeris integris, sed etiam in fractionibus decimalibus ad aliquot figuras computentur, atque dum facile patebit, vtrum eorum valorum summa numerum integrum constituat an secus; quod si enim sensibiliter a numero integro aberret, hoc certum erit indicium, radicem penitus non dari, contrario autem casu de veritate radicis inuentae certi esse poterimus. Perpetuo ergo nostra regula veram radicem, siquidem talis datur, praebebit, et si non datur, facili labore id patefaciet.

§. 14. Ad vsum huius regulae monstrandum sumam superius exemplum, cui Newtoni regula impar est inuenta, et queratur radix surdesolida huius binomii $5\sqrt{5}+11$. Erit ergo $A=5\sqrt{5}$, $B=11$, et $n=5$. Porro est $AA-BB=4$, et vt valor fractionis $\frac{r^5}{4}$ fiat numerus integer, capi debet $r=2$ vnde fit $p=\frac{r^5}{4}=8$. Tertio habetur $(A+B)^2=246+110\sqrt{5}$ atque

$$(A-B)^2=246-110\sqrt{5}$$

Hinc

Hinc radicem $\sqrt{5}$ in fractionibus decimalibus exprimendo reperietur

$(A+B)^2 p = 3935, 7333$
$(A-B)^2 p = \quad 0, 2666$

Iam ex vtroque valore extrahatur radix surdesolida, reperieturque

$\sqrt[5]{(A+B)^2 p} = 5, 23$
$\sqrt[5]{(A-B)^2 p} = 0, 76$

summa $= 6 = s + t$

simulque videmus 6 esse veram summam, eadem autem prodiisset, si pro $\sqrt[5]{(A+B)^2 p}$ assumsissemus radicem iusto minorem 5, et pro $\sqrt[5]{(A-B)^2 p}$ radicem iusto maiorem 1. Litteris ergo r, s et t inuentis erit binomii propositi radix surdesolida haec.

$$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2\sqrt[10]{8}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}(\sqrt{5}+1)}{2^{\frac{13}{10}}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2^{\frac{4}{5}}}$$

ita vt hoc modo vera radix prodeat nempe $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[5]{16}}$ quam quidem iam a priori noueram.

§. 15. Sit vlterioris dilucidationis gratia propositum sequens binomium:

$$139\sqrt{3}+91\sqrt{7}$$

ex quo oporteat extrahi radicem potestatis septimae, fietque $n=7$, atque radix quaesita huiusmodi habebit formam $\frac{x+y}{\sqrt[14]{p}}$.

Cum iam sit $B = 139\sqrt{3} = \sqrt{57963}$
atque $A = 91\sqrt{7} = \sqrt{57967}$.
erit $AA - BB = 4$, et $p = \frac{r^7}{4}$. Ex quo fiet $r = 2$,
et $p = 32$; ideoque $xx - yy = 2$.
Porro est $(A+B)^2 = 115930 + 25298\sqrt{21}$
atque $(A-B)^2 = 115930 - 25298\sqrt{21}$
Hinc quantitatibus surdis in fractionibus decimalibus proxime exprimendis prodibit

$$(A+B)^2 p = 7419519,99760$$
$$(A-B)^2 p = 0,00240$$

ex quibus radices septimae potestatis erunt

$$\sqrt[7]{(A+B)^2 p} = 9,58;\ s = 9$$
$$\sqrt[7]{(A-B)^2 p} = 0,42;\ t = 1.$$

Quamobrem erit $xx + yy = 5$, hincque $xx = \frac{7}{2}$ et $yy = \frac{3}{2}$, ita vt radix quaesita futura sit $= \frac{\sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt[14]{32}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt[7]{64}}$

quam ex ipsa operatione iam veram esse radicem affirmare possumus, eo quod vidimus valorem $s + t$ reuera numero integro esse aequalem; neque tantum proxime sed reuera fieri $s + t = 10$.

§. 16. Quamuis haec methodus latissime patere videatur, ita vt perpetuo felici successu adhiberi queat, tamen vno laborat defectu, quod ea ad eiusmodi binomia, in quibus quantitates imaginariae insunt, adcommodari nequeat. Cum enim approximatione sit vtendum facile intelligitur, hanc operationis partem in imaginariis locum habere non posse. Idem hoc incommodum multo magis impedit regulam Newtonianam, in qua id tolli nullo modo potest; verum in nostra methodo huic in-

incommodo medela afferri poterit. Ope approximationis scilicet valorem huius expressionis

$$\frac{\sqrt[n]{(A+B)^2 p}+\sqrt[n]{(A-B)^2 p}}{2}$$

inuestigauimus; quare alia via erit tentanda ad hunc valorem inueniendum, si quantitates affuerint imaginariae in alterutra quantitatum A vel B. Ad hoc efficiendum pono $z=\sqrt[n]{(A+B)^2 p}+\sqrt[n]{(A-B)^2 p}$ atque hanc quantitatem z, cuius valor indagatur, considero tanquam radicem cuiusdam aequationis algebraicae, quae habebit n dimensiones. Neque vero hancobrem determinatio quantitatis z resolutionem aequationis n dimensionum requirere censenda est, quia enim quaestio in hoc tantum versatur, vtrum z hubeat valorem in numeris integris, et si habet, quis ille sit, haec inuestigatio per regulas notas in aequatione quotcunque dimensionum institui poterit.

§. 17. Ex resolutione aequationum altiorum graduum, quam Cel. Moiuraeus primus docuit, constat huius aequationis:

$$\alpha = z^n - n z^{n-2}\sqrt[n]{\beta} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2} z^{n-4}\sqrt[n]{\beta^2} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3} z^{n-6}\sqrt[n]{\beta^3} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} z^{n-8}\sqrt[n]{\beta^4} - \text{etc.}$$

radicem esse $z=\sqrt[n]{\frac{\alpha+\sqrt{(\alpha^2-4\beta)}}{2}}+\sqrt[n]{\frac{\alpha+\sqrt{(\alpha^2-4\beta)}}{2}}$. Cum iam in nostro casu sit $z=\sqrt[n]{((A^2+B^2)p+2pAB)}+\sqrt[n]{((A^2+B^2)p-2pAB)}$ fiet $\alpha=2p(AA+BB)$ et $\sqrt{(\alpha\alpha-4\beta)}=4pAB$, vnde $\beta=pp(AA-BB)^2=r^{2n}$

 ob

ob $p(AA-BB)=r^n$. Obtinebitur ergo ista aequatio: $z^n - nr^2 z^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2} r^4 z^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3} r^6 z^{n-6} + \text{etc.} = 2p(AA+BB)$. Ex qua si valor ipsius z innotuerit, erit $xx+yy=\frac{1}{2}z$, et cum sit $xx-yy=r$ fiet $x=\frac{\sqrt{(z+2r)}}{2}$ et $y=\frac{\sqrt{(z-2r)}}{2}$; adeoque radix potestatis n ex binomio $A \pm B$ erit $=\frac{\sqrt{(z+2r)} \pm \sqrt{(z-2r)}}{2\sqrt[2n]{p}}$. Valores hi p et r cognoscuntur ex aequatione $p(AA-BB)=r^n$ atque valor litterae z ex aequatione supra data n dimensionum. Ad hunc autem inueniendum tantum inquiri oportet, vtrum illa aequatio habeat radicem in numeris integris, et si habet, ea pro valore ipsius z capiatur.

§. 18. Inseruit hic modus non solum radicibus ex binomiis imaginariis inueniendis, sed etiam commode adhiberi potest ad radices ex binomiis realibus inuestigandas. Quodsi enim isto modo vti velimus tum citra approximationem primum dignoscere poterimus, vtrum radix detur in forma binomii, et si detur, quaenam ea sit: prius scilicet patebit, si aequatio n dimensionum habeat radicem realem, deinde ipsa radix inuenietur, si loco z scribatur illa aequationis radix. Vt si extrahenda sit radix potestatis quintae ex binomio $5\sqrt{5}+11$, quod exemplum iam supra tractatum est fiet $n=5$ et $A=5\sqrt{5}$ et $B=11$; hincque porro $AA-BB=4$ et $AA+BB=246$. Quare cum esse debeat $r^5=4p$, prodibit $p=8$ et $r=2$; aequatio vero resoluenda habebitur haec:

$$z^5 - 20z^3 + 80z = 16.246.$$

Pona-

Ponatur $z = 2u$, atque aequatio orietur haec: $u^5 - 5u^3 + 5u = 123$. quae si habet radicem realem, ea erit vel 3 vel 41: erit ea autem $= 3$, vnde fit $z = 6$, atque radix potestatis quintae ex binomio erit $= \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2\sqrt[10]{8}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[5]{16}}$, omnino vt ea supra est inuenta.

§. 19. Quemadmodum hic aequatio resoluenda simplicior est reddita posito $z = 2u$, ita generaliter poni potest $z = ru$, hocque pacto aequatio illa quae incognitam z inuoluebat transmutabitur in hanc incognitam u continentem:

$$u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}u^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}u^{n-6} + \text{etc.} = \frac{2(AA+BB)}{AA-BB}$$

ob $r^n = p(AA-BB)$. Plerumque autem terminus vltimus absolutus fiet numerus integer, si quidem extractio radicis succedit. Inuento autem valore ipsius u erit binomii $A + B$ radix potestatis n haec $\frac{\sqrt{r(u+2)}+\sqrt{r(u+2)}}{2\sqrt[2n]{p}}$

$$= \frac{(AA-BB)^{\frac{1}{2n}}(\sqrt{(u+2)}+\sqrt{(u2)})}{2} = \frac{\sqrt{(u+2)}+\sqrt{(u-2)}}{\sqrt[2n]{\frac{2^{2n}}{AA-BB}}}$$

Sic cum pro binomio $5\sqrt{5}+11$, ex quo radix surdesolida extrahi debet, sit $n = 5$, $AA - BB = 4$, atque inueniatur $u = 3$, statim prodibit radix quaesita $= \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[10]{\frac{2^{10}}{4}}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[5]{16}}$. Atque ita huius regulae beneficio facillime eruetur radix cuiuscunque potestatis ex dato binomio; dummodo radix datur habens formam binomialem.

§. 20.

§. 20 Alterum exemplum, quod supra attulimus, in radice potestatis septimae ex hoc binomio $139\sqrt{3} + 91\sqrt{7}$, versabatur; quod ergo secundum regulam modo datam ita tractabitur. Erit nempe $n = 7$, $A = 91\sqrt{7}$ et $B = 139\sqrt{3}$. Hinc fiet $AA - BB = 4$, atque $AA + BB = 115930$, vnde emergit $\frac{2(AA+BB)}{AA-BB} = 57965 = 5.11593$. Hancobrem habebitur ista aequatio $u^7 - 7u^5 + 14u^3 - 7u = 5.11593$ cuius radix, si quam habet, erit vel 5 vel 11593. Reperietur autem 5 esse vera radix istius aequationis, ex quo radix potestatis septimae ex proposito binomio erit $= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt[14]{\frac{2^{14}}{4}}}$ $= \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt[7]{64}}$, plane vt supra.

§. 21. Valebit igitur pariter haec methodus ad radices extrahendas ex binomiis imaginariis, eo quod aequatio resoluenda in §. 19 data perpetuo sit realis, propter quadrata AA et BB quantitates reales, etiamsi vel A vel B sit quantitas imaginaria. Attamen saepenumero vsu veniet incommodum parui quidem momenti, quod in hoc consistet, vt ambigere debeamus vtrum signa radicalia in radice:
$\sqrt{(u+2)}$ et $\sqrt{(u-2)}$, quae per se sunt ambigua, affirmatiue an negatiue assumere debeamus, quae dubitatio in quantitatibus affirmatiuis facile tollitur, non autem in imaginariis. Quare his casibus ipsa eleuatio inuentae radicis institui debebit, vt pateat, quaenam signa cum singulis radicalibus sint coniungenda. Ratio difficultatis in hoc potissimum est sita, quod quadrata partium radicis

A et

A et B tantum in calculum ingrediantur, quae a negatiuis aeque ac affirmatiuis oriri possunt. Interim tamen hoc constat, quod si fuerit $\sqrt[n]{(A+B)} = \frac{\sqrt{(u+2)}+\sqrt{(u-2)}}{\sqrt[2n]{2^{2n}:(AA-BB)}}$ fore $\sqrt[n]{(A-B)} = \frac{\sqrt{(u+2)}-\sqrt{(u-2)}}{\sqrt[2n]{2^{2n}:(AA-BB)}}$ hincque $\sqrt[n]{(-A+B)} = \frac{\sqrt{(u+2)}-\sqrt{(u-2)}}{\sqrt[2n]{2^{2n}:(AA-BB)}}.\sqrt[n]{-1}$ et $\sqrt[n]{(-A-B)} = \frac{\sqrt{(u+2)}+\sqrt{(u-2)}}{\sqrt[2n]{2^{2n}:(AA-BB)}}.\sqrt[n]{-1}$ ex quibus diiudicatio dubii saepe facilis reddetur. Saltem si radix ex vna harum formarum $A+B; A-B; -A+B; -A-B$ fuerit inuenta, reliquiarum formarum radices in promtu erunt; Dabitur tamen postea modus, qui hac dubitatione prorsus carebit.

§. 22. Sit nobis propositum hoc binomium imaginarium $+1-\sqrt{-3}$, ex quo radicem potestatis quintae extrahi oporteat. Erit ergo $n=5$; $A=-1$; $B=\sqrt{-3}$ hincque $AA+BB=-2$ et $AA+BB=4$; habebitur ergo haec aequatio: $u^5-5u^3+5u=-1$, ex qua prodit $u=-1$, ita vt radix quaesita futura sit $\frac{1+\sqrt{-3}}{\sqrt[10]{2^{10}:2^{2}}} = \frac{1+\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}}$; quae est vera radix. At si quaereretur radix potestatis quintae ex $+1+\sqrt{-3}$, pariter repe-

reperietur $\frac{\sqrt{1}+\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}}$, verum hoc casu signum ipsius $\sqrt{-3}$ inuerti debet, vt vera radix sit $\frac{1-\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}}$

Quamobrem erit vt sequitur

$$\sqrt[5]{(1+\sqrt{-3})} = \frac{1-\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}}$$

$$\sqrt[5]{(1-\sqrt{-3})} = \frac{1+\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}},$$

$$\sqrt[5]{(-1+\sqrt{-3})} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}}$$

$$\sqrt[5]{(-1-\sqrt{-3})} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{\sqrt[5]{16}}$$

similitudo radicum cum ipsis potestatibus hoc modo magis fiet manifesta

$$\sqrt[5]{\frac{1+\sqrt{-3}}{2}} = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}; \quad \sqrt[5]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$\sqrt[5]{\frac{1-\sqrt{-3}}{2}} = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}; \quad \sqrt[5]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

§. 23. Quaeratur radix potestatis septimae ex hoc binomio imaginario $13\sqrt{3}+\sqrt{-5}$. Erit ergo $n=7$, $A=13\sqrt{3}$ et $B=\sqrt{-5}$; vnde $AA+BB=502$ atque $AA-BB=512$; ex quibus conficitur $\frac{2(AA+BB)}{AA-BB} = \frac{251}{128}$. Proueniet ergo sequens aequatio:

$$u^7 - 7u^5 + 14u^3 - 7u = \frac{251}{128}$$

quae

quae si habet radicem rationalem erit ea vel ± 1 vel $\pm \frac{1}{2}$: reperitur autem radix $u = -\frac{1}{2}$, vnde radix quaesita habetur $= \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{-\frac{5}{2}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{-5}}{\sqrt{64}}$.

Neque circa hanc radicem vllum dubium manere potest, praeter signa radicalium vtrum ea debeant affirmatiue capi an negatiue; inquirenti autem patebit signa haec inventa recte se habere.

§. 24. Haec radicum extractio, si binomium propositum fuerit imaginarium, absolui etiam potest ope multi sectionis angulorum, quippe quae in locum aequationis illius resoluendae substitui potest. Efficietur hoc autem ope sequentium lemmatum:

I. Si fuerit $u = \text{cos.}\ \frac{1}{n}\ \text{A sin.}\ a$ erit

$$u = \frac{\sqrt[n]{(\sqrt{(1-aa)} + a\sqrt{-1})} + \sqrt[n]{(\sqrt{(1-aa)} - a\sqrt{-1})}}{2}$$

II. Si fuerit $v = \text{sin.}\ \frac{1}{n}\ \text{A sin.}\ a$ erit

$$v = \frac{\sqrt[n]{(\sqrt{(1-aa)} + a\sqrt{-1})} - \sqrt[n]{(\sqrt{(1-aa)} - a\sqrt{-1})}}{2\sqrt{-1}}$$

Ponatur iam $a\sqrt{-1} = \frac{2AB}{AA-BB}$, fiet $\sqrt{(1-aa)} = \frac{AA+BB}{AA-BB}$

Hincque superiora lemmata sequentes praebebunt aequationes

$$\text{I. cos.}\ \frac{1}{n}\ \text{A sin.}\ \frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt[n]{(A+B)^2} + \sqrt[n]{(A-B)^2}}{2\sqrt[n]{(AA-BB)}}$$

$$\text{II. sin.}\ \frac{1}{n}\ \text{A sin.}\ \frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt[n]{(A+B)^2} - \sqrt[n]{(A-B)^2}}{2\sqrt{-1}.\sqrt[n]{(AA-BB)}}$$

 Quod

Quod si iam habeatur binomium $A + B$ ex quo radicem potestatis n extrahi oporteat, quae sit $= \frac{x \pm y}{\sqrt[2n]{p}}$; atque facto $p = \frac{r^n}{AA - BB}$, erit primo $xx - yy = r$. Deinde cum sit $\frac{2(xx + yy)}{\sqrt[n]{p}} = \sqrt[n]{(A+B)^2} + \sqrt[n]{(A-B)^2}$ fiet

$xx + yy = \sqrt[n]{p(AA-BB)}.\ \cos.\ \frac{1}{n}\ A\ \sin.\ \frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}}$.
seu $xx + yy = r\ \cos.\ \frac{1}{n}\ A\ \sin.\ \frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}}$. Porro est: $\frac{4xy}{\sqrt[n]{p}} = \sqrt[n]{(A+B)^2} - \sqrt[n]{(A-B)^2}$ unde fit $2xy = r\sqrt{-1}.\sin.\frac{1}{n}A.\sin.\frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}}$. Sit arcus cuius sinus est $= \frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}}$ vel cuius cos. $= \frac{AA+BB}{AA-BB}$; Sit inquam hic arcus $= \alpha$: fietque $x + y = \sqrt{r}(\cos.\frac{\alpha}{n} + \sqrt{-1}.\sin.\frac{\alpha}{n})$ et $x - y = \sqrt{r}(\cos.\frac{\alpha}{n} - \sqrt{-1}.\sin.\frac{\alpha}{n})$. Hinc porro reperietur

$$x + y = \frac{\sqrt{r(1 + \cos.\frac{\alpha}{n})} + \sqrt{r(-1 + \cos.\frac{\alpha}{n})}}{\sqrt{2}}$$

atque $\frac{x+y}{\sqrt[2n]{p}} = \frac{x+y}{\sqrt{r : \sqrt[2n]{(AA-BB)}}} =$

$\frac{\sqrt{(1 + \cos.\frac{\alpha}{n})} + \sqrt{(-1 + \cos.\frac{\alpha}{n})}}{\sqrt[2n]{\frac{2^n}{AA-BB}}}$. Ex his itaque elicitur binomii $A + B$ radix potestatis $n =$

$$\frac{\sqrt{(1 + \cos.\frac{\alpha}{n})} + \sqrt{-1 + \cos.\frac{\alpha}{2n}})}{\sqrt[2n]{\frac{2^n}{AA-BB}}}$$

Cum autem sit $\sqrt{(1 + \cos.\frac{\alpha}{n})} = \sqrt{2}.\cos.\frac{\alpha}{2n}$ et $\sqrt{(-1}$ $+ \cos.$

$+ \text{coſ.} \frac{\alpha}{n}) = \sqrt{-2} : \text{ſin.} \frac{\alpha}{2n}$. Atque tandem emerget binomii A $\pm$ B radix quaeſita $= (\text{coſ.} \frac{\alpha}{2n} \pm \text{ſin.} \frac{\alpha}{2n} . \sqrt{-1}) \sqrt[2n]{(AA-BB)}$, exiſtente α arcu cuius ſinus eſt $= \frac{2AB}{(AA-BB)\sqrt{-1}}$ vel cuius coſinus eſt $= \frac{AA+BB}{AA-BB}$. Hoc tantum eſt notandum ſubinde $\sqrt[2n]{(AA-BB)}$, cuius valor vtique eſt ambiguus, negatiue accipi debere, qua de re facile erit quouis caſu indicare. Huius igitur modi vſus erit potiſſimum quando A et B eiusmodi fuerit quantitates, vt angulus aſſignari queat, cuius coſinus $= \frac{AA+BB}{AA-BB}$.

§. 25. His expoſitis, quae ſpectant ad extractionem radicum ex propoſito binomio, pergo ad negotium multo latius patens, methodumque tradam, cuius ope non ſolum ex quantitatibus ſurdis, binomii forma contentis, ſed ex quantitatibus vtcunque irrationalibus radices dati ordinis extrahi queant. Hactenus enim tantum huiusmodi formas A $\pm$ B, ex duabus partibus conſtantes ſumus contemplati atque irrationalitatem ita comparatam poſuimus, vt partium quadrata fiant numeri rationales. Nunc igitur ipſum fontem aperiemus, quo non ſolum praecedens methodus vniuerſa contineatur, ſed ex quo etiam modum haurire liceat, ex quantitate irrationali quacunque propoſita radicem dati gradus extrahendi. Quo autem vis huius methodi quam ſum expoſiturus, clarius pateat, ſequens ſpecimen eius vſum declarare poterit. Inueni ſcilicet iſtius methodi beneficio, ſequentis quantitatis tam irrationalis quam imaginariae:

$$-\frac{7}{3} + \frac{1+\sqrt{-3}}{6} \sqrt[3]{\tfrac{7}{2}(-1-3\sqrt{-3})} + \frac{1-\sqrt{-3}}{6} \sqrt[3]{\tfrac{7}{2}(-1+3\sqrt{-3})}$$

radicem quadratam eſſe hanc:

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{-7}}{4}(-1+3\sqrt{-3})^2}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{-7}}{4}(-1-3\sqrt{-3})^2}$$

Ex quo exemplo ſatis intelligere licet, methodum hanc non ſolum eſſe nouam, verum etiam in abbreuiandis calculis ſaepe magnam habere vtilitatem.

§. 26. Pro quantitate igitur irrationali quacunque propoſita, ex qua radicem poteſtatis n extrahi oporteat, ſcribo litteram x; eritque haec littera x radix aequationis cuiusdam algebraicae, quae ex natura quantitatis x facile aſſignabitur. Sit iſta aequatio huius formae:

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} + \text{etc.} = 0.$$

Quaeſtio ergo huc reuocatur, vt ex valore ipſius x, qui ipſi vi huius aequationis conuenit, extrahatur radix poteſtatis n. Ponatur haec radix quaeſita $= y$, erit $y = \sqrt[n]{x}$, ideoque $x = y^n$; qui valor in illa aequatione ſubſtitutus, dabit hanc aequationem:

$$y^{mn} + ay^{mn-n} + by^{mn-2n} + cy^{mn-3n} + \text{etc.} = 0.$$

Quare ſi ex hac aequatione valor ipſius y aſſignari poterit, habebitur ipſa radix poteſtatis n ex quantitate propoſita x, quae quaeritur. Peruenitur quidem hoc modo ad reſolutionem aequationis multo plurium dimenſionum, quam eſt ea, per quam x definitur: verum quia in vtraque aequatione idem adeſt terminorum numerus, atque omnes ipſius y exponentes per n diuiſibiles ſunt, aequatio haec tantum m dimenſionum eſt cenſenda, ex quo ea in n aequationes ſimpliciores reſolui poterit, quarum ſingulae erunt huiusmodi

$$y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} + \text{etc.} = 0$$

quibus aequationibus inuentis, et deinceps reſolutis ſinguli valores ipſius y praebebunt totidem radices poteſtatis n

ex

ex quantitate x. Numerus igitur harum radicum seu valorum ipsius y erit $= mn$, id quod egregie conuenit quaestionis indoli. Reuera enim x habet ex aequatione m valores diuersos, quorum singulorum radices potestatis n hac methodo inueniri debent. Ex vnoquoque autem ipsius x valore tot radices potestatis n extrahi possunt, quot exponens n habet unitates, ex quo omnino y habere debebit mn valores diuersos.

§. 27. Ponamus valorem ipsius x definiri per hanc aequationem quadraticam:

$$xx + ax + b = 0$$

ita vt sit vel $x = -\frac{a + \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$ vel $x = -\frac{a - \sqrt{(aa - 4b)}}{2}$, atque ex vtroque horum valorum extrahi oportere radicem potestatis n. Cum igitur hic sit x binomium vel residuum, habemus hic illum ipsum casum, quem hactenus tractauimus vt scilicet ex binomio vel residuo radix datae potestatis extrahatur. Sit igitur radix potestatis n ex $x = y$, seu $x = y^n$ atque y definietur hac aequatione:

$$y^{2n} + ay^n + b = 0.$$

Quodsi iam ponamus hanc aequationem in factores simplices duarum dimensionum huius formae $yy + Ay + B = 0$ resolui, quorum numerus erit $= n$, reperiemus omnes has aequationes partiales contineri in hac

$$yy + uy\sqrt[2n]{b} + \sqrt[n]{b} = 0$$

sortiente u tot diuersos valores, quot exponens n habet unitates; qui valores definiuntur hac aequatione:

$$u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} u^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^{n-6} + \text{etc.} \pm \frac{a}{\sqrt{b}} = 0$$

vbi signorum ambiguorum superius $+$ est capiendum, si n fuerit numerus par, contra vero alterum signum $-$ valet

valet, si sit n numerus impar. Quare si huius aequationis n dimensionum vnica radix seu valor ipsius u constiterit, ex eo bini pro y inuenientur valores hi:

$$y = \frac{u\sqrt[2n]{b} \pm (uu-4)\sqrt[n]{b}}{2}$$

qui erunt radices potestatis n ex binis valoribus ipsius x, qui sunt $x = -\frac{a \pm \sqrt{(aa-4b)}}{2}$ Radices autem istae y, etiam hoc modo possunt exprimi, vt sit

$$y = -\frac{u \pm \sqrt{(uu-4)}}{2} \cdot \sqrt[2n]{b}$$

haecque regula consentire reperietur cum ea, quae supra §. 19 est data.

§. 28. Sit nobis propositum hoc binomium $41\sqrt{5} - 7\sqrt{-7}$, ex quo radicem potestatis septimae extrahi oporteat. Hoc comparato cum valore ipsius x fiet $a = -82\sqrt{5}$ et $b = 4 \cdot 3^7$, hincque $\frac{-a}{\sqrt{b}} = \frac{41\sqrt{5}}{\sqrt{3^7}}$. Quamobrem haec habebitur aequatio ordinis septimi:

$$u^7 - 7u^5 + 14u^3 - 7u + \frac{41\sqrt{5}}{\sqrt{3^7}} = 0$$

quae ad rationalitatem reducta ponendo $u = \frac{v\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$, reperietur esse $v = -1$, ita vt sit $u = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$, et $\sqrt{(uu-4)} = \frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{3}}$, atque $\sqrt[2n]{b} = \sqrt[14]{4 \cdot 3^7} = 2^{\frac{1}{7}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$

Quare radix potestatis septimae quaesita y erit haec:

$$y = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{-7}}{2\sqrt{3}} \cdot 2^{\frac{1}{7}}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{-7}}{\sqrt[7]{64}}$$

Examinanti autem patebit signum $+$ valere ita, vt futura sit $\sqrt[7]{(41\sqrt{5} - 7\sqrt{-7})} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{-7}}{\sqrt[7]{64}}$.

Hocque exemplum sufficiet ad vsum huius regulae, quae in in superioribus iam fusius est exposita, illustrandum. Pergo ergo ad quantitates irrationales magis compositas, methodumque exponam, cuius ope ex iis radices extrahi queant.

§. 29. Denotet ergo x valorem, qui ipsi ex hac aequatione cubica conuenit;

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0$$

et quaerenda sit radix quadrata ex ista quantitate x. Ponatur haec radix quadrata $= y$, ita vt sit $y = \sqrt{x}$ seu $x = yy$, atque y definietur per hanc aequationem:

$$y^6 + a y^4 + b y^2 + c = 0.$$

Quodsi iam y pariter sit radix ex aequatione aliqua cubica vti x, id quod pono: nam si y per aequationem cubicam exprimi nequeat, eius valor simplicius quam per $\sqrt{x}$ exhiberi non poterit. Quare videndum est, an inueniri queat aequatio cubica puta haec:

$$y^3 + p y^2 + q y + r = 0$$

quae in illa aequatione sextae potestatis contineatur. Quod vt fiat, multiplicetur haec aequatio per $y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma$, ac productum illi aequationi aequetur, quo facto reperietur

$$\alpha = -p$$
$$\beta = a - q + pp$$
$$\gamma = -r + 2pq - ap - p^3.$$

Deinde vero p, q, et r determinabuntur ita.

$$b + 2pr = aq - qq - app + 3ppq - p^4$$
$$0 = (a - 2q + pp)(r - pq)$$
$$0 = rr + c + pr(a - 2q + pp)$$

Si iam ponamus $a - 2q + pp = 0$ ex secunda aequatione fiet $rr = -c$ in tertia, atque ob $q = \frac{a+pp}{2}$ pri-

prima dabit hanc aequationem $p^4 + 2app - 8pV - c + aa - 4b = 0$ ob $r = V - c$.
Sin autem aequatio desideretur, per quam q determinetur, quia est $p = V(2q - a)$ aequatio prima abibit in hanc:

$$qq - b = 2V(ac - 2cq) \text{ seu}$$
$$q^4 - 2bqq + 8cq + bb - 4ac = 0$$

ex qua, si reperiri potuerit valor pro q erit $p = \frac{qq - b}{2r}$ atque $r = \pm V - C$. Deinde vero fit $\alpha = -p$, $\beta = q$, et $\gamma = -r$. Inuentis ergo valoribus pro p, q, et r, aequatio sex dimensionum: $y^6 + ay^4 + by^2 + c = 0$ resoluitur in binas has cubicas.

$$y^3 + py^2 + qy + r = 0$$
$$y^3 - py^2 + qy - r = 0$$

quarum radices singulae erunt radices quadratae ex radicibus huius aequationis $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.
Litterae autem p, q, et r a coëfficientibus cognitis a, b, et c ita pendent vt sit $a = -pp + 2q$; $b = qq - 2pr$ et $c = -rr$ ex quibus eliminando p et r nascitur aequatio superior:

$$q^4 - 2bqq + 8cq + bb - 4ac = 0.$$

§. 30. Vt vsus huius extractionis aliquo exemplo illustretur, pono x habere valorem ex hac aequatione:

$$x^3 + 3xx + 6x - 25 = 0.$$

Quare, vt forma ipsius x ob oculos ponatur, radices istius aequationis cubicae inuestigari oportebit; quae commodissime inuenientur ope sequentis regulae in Transact. Anglicanis traditae.

Si

Si fuerit haec aequatio cubica:

$$\begin{array}{l} x^3 - 3\alpha xx + 3\alpha^2 - \alpha^3 \\ \qquad - 3\beta x + 3\alpha\beta = 0 \\ \qquad\qquad - 2\gamma \end{array}$$

erunt eius tres radices sequentes:

$$x = \alpha + \sqrt[3]{(\gamma + \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})} + \sqrt[3]{(\gamma - \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})}$$

$$x = \alpha - \tfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(\gamma + \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})} - \tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(\gamma - \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})}$$

$$x = \alpha - \tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(\gamma + \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})} - \tfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(\gamma - \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})}$$

Quod si nunc hanc aequationem generalem ad nostrum exemplum $x^3 + 3x^2 + 6x - 25 = 0$ accommodemus, fiet:

$$\begin{array}{lll} -3\alpha = 3 & \text{seu} & \alpha = -1 \\ 3 - 3\beta = 6 & \text{seu} & \beta = -1 \\ 4 - 2\gamma = -25 & \text{seu} & \gamma = \tfrac{29}{2} \end{array}$$

hincque $\sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)} = \tfrac{13\sqrt{5}}{2}$; ex quibus terni ipsius x valores erunt sequentes:

$$x = -1 + \sqrt[3]{\tfrac{29+13\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\tfrac{29-13\sqrt{5}}{2}}$$

$$x = -1 - \tfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{29+13\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{29-13\sqrt{5}}{2}}$$

$$x = -1 - \tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{29+13\sqrt{5}}{2}} - \tfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{29-13\sqrt{5}}{2}}$$

Haec igitur nobis proposita est quaestio, vt ex singulis hisce ipsius x valoribus radices quadratas extrahamus.

§. 31. Comparetur ergo aequatio proposita $x^3 + 3xx + 6x - 25 = 0$ cum forma generali $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ fietque: $a = 3$, $b = 6$, et $c = -25$, atque ex his nascetur sequens aequatio biquadratica:

$$q^4 - 12q^2 - 200q + 336 = 0$$

 ad

ad quam eo facilius resoluendam pono $q = 2u$ oriturque:

$$u^4 - 3u^2 - 25u + 21 = 0$$

ita vt valor ipsius u sit vel $+3$ vel $+7$. Reperietur autem esse $u = 3$, ideoque $q = 6$. Porro ob $r = \sqrt{-c}$ fiet $r = 5$ atque $p = \frac{qq-b}{2r} = 3$. Quocirca radices quadratae ex valoribus ipsius x erunt radices sequentium binarum aequationum

$$y^3 + 3y^2 + 6y + 5 = 0$$
$$y^3 - 3y^2 + 6y - 5 = 0$$

quae duae aequationes ita inter se conueniunt vt radices vnius sint simul radices alterius sed negatiue sumtae: ideoque sufficiet alterius aequationis radices indagasse. Ex priori ergo fit

$$-3\alpha = 3 \quad \text{seu} \quad \alpha = -1$$
$$3 - 3\beta = 6 \quad \text{seu} \quad \beta = -1$$
$$4 - 2\gamma = 5 \quad \text{seu} \quad \gamma = -\tfrac{1}{2}$$

hincque $\sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; ex quibus sequentes valores ipsius y inueniuntur

$$y = -1 + \sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$y = -1 - \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$y = -1 - \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}.$$

Harum vnaquaeque cum sua negatiua constituet radices quadratas vnius ex valoribus ipsius x.

§. 32. Ac primi quidem ipsius x valoris, qui erat

$$-1 + \sqrt[3]{\frac{29+13\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{29-13\sqrt{5}}{2}}$$

radices binae quadratae erunt:

$$-1 + \sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$+1 - \sqrt[3]{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}.$$

Se-

Secundi ipsius x valoris, qui erat

$$-1-\tfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{29+13\sqrt{5}}{2}}-\tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{29-13\sqrt{5}}{2}}$$

radices binae quadratae erunt

$$-1-\tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}}-\tfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$+1+\tfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}}+\tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

Tertii denique ipsius x valoris, qui est

$$-1-\tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{29+13\sqrt{5}}{2}}-\tfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\tfrac{29-13\sqrt{5}}{2}}$$

binae radices quadratae sunt:

$$-1-\tfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}}-\tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$+1+\tfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}}+\tfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$$

quae omnia si cui volupe fuerit per calculum periculum facere, veritati consentanea reperietur. Nam quaenam ex inuentis radicibus cuique ipsius x valori competant, ob summum nexum inter se, nisi periculum faciendo definiri non potest.

§. 33. Progrediamur vltra, atque inuestigemus radicem cubicam ex valoribus ipsius x, quos obtinet vi aequationis huius cubicae: $x^3+ax^2+bx+c=0$. Ponatur radix cubica ex x seu $\sqrt[3]{x}=y$ erit $x=y^3$, atque valor radicis quaesitae y definietur per hanc aequationem.

$$y^9+ay^6+by^3+c=0$$

Hanc igitur diuisibilem esse pono per aequationem quandam cubicam:

$$y^3+py^2+qy+r=0$$

vt valor ipsius y pari expressione, vti x, possit exhibe-

 ri:

ri. Sit autem quotus huic diuifori affumto refpondens:

$$y^6 + \alpha y^5 + \beta y^4 + \gamma y^3 + \delta y^2 + \varepsilon y + \zeta = 0.$$

Quodfi iam productum aequale conftituatur illi aequationi nouem dimenfionum, fuperatis calculis fatis prolixis, tandem iftae emergent determinationes:

$$a = p^3 - 3pq + 3r$$
$$b = q^3 - 3pqr + 3rr$$
$$c = r^3$$

Vnde fit $r = \sqrt[3]{c}$; $q = \frac{p^3 + 3r - a}{3p}$
qui ipfius q valor in aequatione fecunda fubftitutus dat hanc aequationem, ex qua valor ipfius p erui debebit.

$$p^9 - 3p^6(6r + a) + 3p^3(9rr + 3ar + aa - 9b) + (3r - a)^3 = 0$$

Ex hac ergo aequatione fi erui poterit valor ipfius p, fimul valor radicis quaefitae y ex aequatione cubica poterit affignari.

§. 34. Cum igitur aequatio diuidens quaefita fit $y^3 + pyy + qy + r = 0$, atque inuento valore ipfius p fit $r = \sqrt[3]{c}$ et $q = \frac{p^3 + 3r - a}{3p}$, quotus ex diuifione ortus feu alter factor erit

$$y^6 - py^5 + (pp - q)y^4 - (pq - 2r)y^3 + (qq - pr)y^2 - qry + rr = 0$$

quae facile in binas fequentes aequationes cubicas refoluitur

$$y^3 \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} pyy \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} qy + r = 0$$
$$y^3 \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} pyy \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} qy + r = 0$$

Habemus ergo tres aequationes cubicas dummodo valor ipfius p fuerit cognitus ex quibus elicientur nouem valores pro y, quarum terni erunt totidem radices cubicae ex fingulis ipfius x valoribus. Omnis enim quantitas tres

tres habet radices cubicas, vti ex qualibet quantitate duae radices quadratae extrahi possunt. Simili scilicet modo, quo est tam $\sqrt{a^2} = +a$, quam $\sqrt{a^2} = -a$ triplicitet $\sqrt[3]{a^3}$ exprimi potest, erit nempe

I. $\sqrt[3]{a^3} = + a$

II. $\sqrt[3]{a^3} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} . a$

III. $\sqrt[3]{a^3} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} . a$

atque ex hoc fonte ingressae sunt istae coëfficientes imaginariae $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ in binas alteras aequationes inuentas.

§. 35. Potuissemus igitur ex hoc fonte assumto vno diuisore $y^3 + py^2 + qy + r = 0$ aequationis $y^9 + ay^6 + by^3 + c = 0$ statim reliquos binos diuisores formare. Cum enim in ista aequatione 9 dimensionum omnes ipsius y exponentes per 3 sint diuisibiles, manifestum est, si fuerit y radix ex illa aequatione, tum etiam omnes valores in $\sqrt[3]{y^3}$ contentos esse debere eius radices. Hoc est si y fuerit radix illius aequationis, pariter radices erunt $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} y$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} y$: qui si loco y in aequatione $y^3 + py^2 + qy + r = 0$ substituantur, statim praebent binos reliquos factores. Atque hac lege animaduersa poterimus facile ad radices altiorum ordinum progredi, quas ex radicibus aequationis cubicae propositae extrahi oporteat; qui labor, si eodem, modo quo pro radicibus quadratis et cubicis a nobis est institutus, susciperetur, omnino fieret insuperabilis. Quin etiam hac via procedere poterimus ad aequationes adhuc plurium dimensionum, per quas valor ipsius x determinetur.

§. 36.

ri. Sit autem quotus huic diuisori assumto respondens:

$$y^6 + \alpha y^5 + \beta y^4 + \gamma y^3 + \delta y^2 + \epsilon y + \zeta = 0.$$

Quodsi iam productum aequale constituatur illi aequationi nouem dimensionum, superatis calculis satis prolixis, tandem istae emergent determinationes:

$$a = p^3 - 3pq + 3r$$
$$b = q^3 - 3pqr + 3rr$$
$$c = r^3$$

Vnde fit $r = \sqrt[3]{c}$; $q = \frac{p^3 + 3r - a}{3p}$
qui ipsius q valor in aequatione secunda substitutus dat hanc aequationem, ex qua valor ipsius p erui debebit.

$$p^9 - 3p^6(6r + a) + 3p^3(9rr + 3ar + aa - 9b) + (3r - a)^3 = 0$$

Ex hac ergo aequatione si erui poterit valor ipsius p, simul valor radicis quaesitae y ex aequatione cubica poterit assignari.

§. 34. Cum igitur aequatio diuidens quaesita sit $y^3 + pyy + qy + r = 0$, atque inuento valore ipsius p sit $r = \sqrt[3]{c}$ et $q = \frac{p^3 + 3r - a}{3p}$, quotus ex diuisione ortus seu alter factor erit

$$y^6 - py^5 + (pp - q)y^4 - (pq - 2r)y^3 + (qq - pr)y^2 - qry + rr = 0$$

quae facile in binas sequentes aequationes cubicas resoluitur

$$y^3 + \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\, pyy + \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\, qy + r = 0$$
$$y^3 + \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\, pyy + \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\, qy + r = 0$$

Habemus ergo tres aequationes cubicas dummodo valor ipsius p fuerit cognitus ex quibus elicientur nouem valores pro y, quarum terni erunt totidem radices cubicae ex singulis ipsius x valoribus. Omnis enim quantitas tres

tres habet radices cubicas, vti ex qualibet quantitate duae radices quadratae extrahi possunt. Simili scilicet modo, quo est tam $\sqrt{a^2} = a$, quam $\sqrt{a^2} = -a$ tripliciter $\sqrt[3]{a^3}$ exprimi potest, erit nempe

$$\text{I. } \sqrt[3]{a^3} = +a.$$

$$\text{II. } \sqrt[3]{a^3} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.\, a$$

$$\text{III. } \sqrt[3]{a^3} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.\, a$$

atque ex hoc fonte ingressae sunt istae coëfficientes imaginariae $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ in binas alteras aequationes inuentas.

§. 35. Potuissemus igitur ex hoc fonte assumto vno diuisore $y^3 + py^2 + qy + r = 0$ aequationis $y^9 + ay^6 + by^3 + c = 0$ statim reliquos binos diuisores formare. Cum enim in ista aequatione 9 dimensionum omnes ipsius y exponentes per 3 sint diuisibiles, manifestum est, si fuerit y radix ex illa aequatione, tum etiam omnes valores in $\sqrt[3]{y^3}$ contentos esse debere eius radices. Hoc est si y fuerit radix illius aequationis, [illegible] radices erunt $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\, y$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\, y$: qui [illegible] y in aequatione $y^3 + py^2 + qy + r = 0$ [illegible] statim praebent binos reliquos factores. Atque [illegible] animaduersa poterimus facile ad radices [illegible] progredi, quas ex radicibus aequationis [illegible] tae extrahi oporteat; qui labor, si [illegible] pro radicibus quadratis et cubicis [illegible] susciperetur, omnino fieret insuperabilis [illegible] via procedere poterimus ad [illegible] dimensionum, per quas valor [illegible]

§. 36. Ex his ſcilicet, ſi debito modo applicentur, patebit, y fore radicem poteſtatis n ex x, poſito x dari per hanc aequationem cubicam:

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0.$$

Si coëfficientes huius aequationis

$$y^3 + p y^2 + q y + r = 0$$

ſequenti modo determinentur:

I. Caſu quo $n = 1$

$a = p$

$b = q$

$c = r$

II. Caſu quo $n = 2$

$a = - pp + 2q$

$b = qq - 2pr$

$c = - rr$

III. Caſu quo $n = 3$

$a = p^3 - 3pq + 3r$

$b = q^3 - 3pqr + 3rr$

$c = r^3$

IV. Caſu quo $n = 4$

$a = p^4 + 4pqq - 4pr - 2qq$

$b = q^4 - 4pqqr + 4qrr + 2pprr$

$c = - r^4$

V. Caſu quo $n = 5$

$a = p^5 - 5p^3q + 5pprr + 5pqq - 5qr$

$b = q^5 - 5pq^3r + 5qqrr + 5p^2qr^2 - 5pr^3$

$c = r^5$

VI. Caſu quo $n = 6$

$a = -p^6 + 6p^4q - 6p^3r - 9ppqq + 12pqr + 2q^3 - 3rr$

$b = q^6 - 6pq^4r + 6q^3rr + 9p^2q^2r^2 - 12pqr^3 - 2p^3r^3 + 3r^4$

$c = - r^6$

§. 37.

§. 37. Quodsi autem quantitas x definiatur per aequationem biquadraticam:

$$x^4 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

atque y denotet radicem potestatis n ex x vt sit $y = \sqrt[n]{x}$; haec radix y determinabitur pariter per aequationem biquadratam hanc:

$$y^4 + p y^3 + q y^2 + r y + s = 0$$

si quidem coefficientes p, q, r, et s definiantur vt sequitur:

I. Casu quo $n = 1$

$a = p$;
$b = q$;
$c = r$;
$d = s$;

II. Casu quo $n = 2$

$a = -pp + 2q$
$b = qq - 2pr + 2s$
$c = -rr + 2qs$
$d = ss$

III. Casu quo $n = 3$

$a = p^3 - 3pq + 3r$
$b = q^3 - 3pqr - 3qs + 3rr + 3pps$
$c = r_3 - 3qrs + 3pss$
$d = s_3$

IV. Casu quo $n = 4$

$a = -p^4 + 4ppq - 4pr - 2qq + 4s$
$b = q^4 - 4pqqr - 4qqs + 4qrr + 4ppqs + 2pprr - 8prs + 6ss$
$c = -r^4 + 4qrrs - 4prss - 2qqss + 4s^3$
$d = s^4$

Atque ſimili modo vlterius tam ad altiores poteſtates radicis y, quam ad aequationes magis compoſitas, quibus x definitur progredi licet.

§. 38. Quemadmodum autem ſupra §. 34. vidimus pro extrahenda radice cubica plurimum iuuare formulas $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, quae praeter vnitatem ſunt radices cubicae ex vnitate; ita ad extractionem radicum altiorum ordinum noſſe oportebit radices earundem poteſtatum ex vnitate. Quamobrem operae pretium erit radices cuiuscunque poteſtatis, earumque indolem indagare. At manifeſtum eſt radices poteſtatis n ex vnitate oriri debere ex reſolutione huius aequationis:

$$x^n - 1 = 0$$

omnis enim valor ipſius x huic aequationi conueniens ita eſt comparatus, vt eius poteſtas exponentis n aequetur vnitati. Si iam ponamus α eſſe eiusmodi valorem ipſius x erit $\alpha^n = 1$: hinc vero ſequitur fore etiam poteſtates α^{2n}, α^{3n}, α^{4n}, etc. aequales vnitati. Quae cum ſint poteſtates exponentis n ipſarum α^2, α^3, α^4, etc. neceſſe eſt, vt, ſi fuerit α radix aequationis $x^n - 1 = 0$ ſint etiam omnes ipſius α poteſtates, quales ſunt α^2, α^3, α^4, α^5, etc. radices ipſius x. Quocirca ſi aequationis $x^n - 1 = 0$ radices ponantur α, β, γ, δ, ε, etc. hae radices ita erunt comparatae, vt vniuscuiusque poteſtates ſingulae in iisdem quantitatibus occurrere debeant. Atque hinc reſoluetur ſequens problema, quo quaeruntur n quantitates diuerſae huius naturae, vt ſingularum poteſtates quaecunque ſimul ſint termini ex ea quantitatum ſerie.

§. 39.

§. 39. Sic si sit $n = 1$, aequatio $x - 1 = 0$ dat radicem 1, quae ita est comparata, vt eius omnes potestates ipsi sint aequales, qui est problematis casus primus.

Casus secundus quo $n = 2$. dat hanc aequationem:

$$x^2 - 1 = 0$$

cuius duae sunt radices hae

$$x = + 1$$
$$x = - 1$$

quarum binarum radicum omnes potestates sunt vel $+ 1$ vel $- 1$.

Casus tertius, quo $n = 3$, dat hanc aequationem: $x^3 - 1 = 0$. cuius vna radix cum sit $= 1$, si aequatio $x^3 - 1 = 0$ per $x - 1$ diuidatur prodibit:

$$xx + x + 1 = 0$$

quae duas reliquas radices aequationis $x^3 - 1 = 0$ praebebit, vnde tres aequationis propositae $x^3 - 1 = 0$ radices erunt

$$x = + 1$$
$$x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$
$$x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

Quae eadem proprietate commemorata gaudent, nam primae radicis 1 omnes potestates ipsi sunt aequales: deinde est

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \qquad \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$
$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = 1 \qquad \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^3 = 1$$
$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^4 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \qquad \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^4 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$
$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^5 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \qquad \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^5 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$

et ita porro

§. 40. Casus quartus quo $n = 4$ praebet hanc aequationem: $x^4 - 1 = 0$. cuius radicum singularum biquadrata aequantur vnitati. Resoluitur autem haec aequatio in has binas $xx - 1 = 0$ et $xx + 1 = 0$, ex quibus quatuor illae radices reperientur:

$$x = + 1$$
$$x = - 1$$
$$x = + \sqrt{-1}$$
$$x = - \sqrt{-1}$$

atque vnius cuiuscunque potestas quaecunque aequalis est vni ex his ipsis quatuor radicibus.

Casus quintus quo $n = 5$ dat aequationem hanc $x^5 - 1 = 0$, quae diuisa per $x - 1 = 0$, ex quo diuisore prima radix $x = 1$ innotescit, dat $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$; quae in duas quadraticas discerpitur huius formae

$$xx + px + 1 = 0$$
$$xx + qx + 1 = 0$$

in quibus p et q sunt radices huius aequationis $uu - u - 1 = 0$; ita vt sit

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } q = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Hinc iam quinque radices aequationis $x^5 - 1 = 0$ oriuntur sequentes:

$$x = 1$$
$$x = \frac{-1 - \sqrt{5} + \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}}{4} = \alpha$$
$$x = \frac{-1 - \sqrt{5} - \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}}{4} = \beta$$
$$x = \frac{-1 + \sqrt{5} + \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}}{4} = \gamma$$
$$x = \frac{-1 + \sqrt{5} - \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}}{4} = \delta$$

quae

quae ratione suarum potestatum ita sunt comparatae, vt sit:

$\alpha^2 = \delta$	$\beta^2 = \gamma$	$\gamma^2 = \alpha$	$\delta^2 = \beta$
$\alpha^3 = \gamma$	$\beta^3 = \delta$	$\gamma^3 = \beta$	$\delta^3 = \alpha$
$\alpha^4 = \beta$	$\beta^4 = \alpha$	$\gamma^4 = \delta$	$\delta^4 = \gamma$
$\alpha^5 = 1$	$\beta^5 = 1$	$\gamma^5 = 1$	$\delta^5 = 1$

§. 41. Casus sextus quo $n = 6$ praebet hanc aequationem $x^6 - 1 = 0$, cuius sex singularum radicum potestates sextae aequales erunt vnitati. Haec vero aequatio per $xx - 1$ diuisa, vnde iam duae radices ipsius x nempe $+1$ et -1 prodeunt, dat hanc

$$x^4 + x^2 + 1 = 0$$

quae vlterius resoluitur in has duas:

$$xx + x + 1 = 0$$
$$xx - x + 1 = 0$$

vnde tandem omnes sex radices quadratocubicae ex vnitate proueniunt:

$$x = +1$$
$$x = -1$$
$$x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$
$$x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$
$$x = \frac{+1 + \sqrt{-3}}{2}$$
$$x = \frac{+1 - \sqrt{-3}}{2}$$

quae statim inueniri potuissent ex tribus radicibus cubicis vnitatis; radices enim quadratocubicae primo sunt ipsae radices cubicae, ac deinde eaedem radices cubicae negatiue sumtae, id quod patet ex resolutione aequationis $x^6 - 1 = 0$ in has binas cubicas $x^3 - 1 = 0$ et $x^3 + 1 = 0$.

§ 42. Rosolutio casus septimi, quo $n = 7$ et $x^7 - 1 = 0$ maiori laborat difficuitate, et quia in eius resolutione plura exempla occurrunt; quibus doctrina hactenus tradita illustratur, hoc negotium absoluemus. Aequatio autem $x^7 - 1 = 0$ diuisa per $x - 1$, vnde prima radix $x = 1$ innotescit, dat

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

quae diuisores rationales non admittit, quia autem aequatio haec manet inuariata ponendo $\frac{1}{x}$ loco x, ex quo constat productum ex binis radicibus esse $= 1$ haec aequatio resolui poterit in ternas quadraticas:

$$x + px + 1 = 0$$
$$x + qx + 1 = 0$$
$$x + rx + 1 = 0$$

vbi p, q, r sunt tres radices ex ista aequatione cubica

$$u^3 - u^2 - 2u + 1 = 0$$

quibus inuentis erit praeter $x = 1$

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{(pp - 4)}}{2}$$
$$x = \frac{-q \pm \sqrt{(qq - 4)}}{2}$$
$$x = \frac{-r \pm \sqrt{(rr - 4)}}{2}$$

Primo igitur valores litterarum p, q, r inuestigari debent ex resolutione huius aequationis cubicae: $u^3 - u^2 - 2u + 1 = 0$ cuius tres valores ipsi u conuenientes dabunt valores litterarum p, q, et r

§. 43. Comparetur ergo haec aequatio cum aequatione cubica generali §. 30 data, eritque

$\alpha = +\frac{1}{3}$;

$3\beta - \frac{1}{3} = 2$; seu $\beta = \frac{7}{9}$

$-\frac{8}{27}+\frac{7}{9}-2\gamma=1$ seu $\gamma=\frac{-7}{54}$

vnde $\sqrt{(\gamma\gamma-\beta^3)}=\frac{7}{18}\sqrt{-3}$ atque $\sqrt[3]{(\gamma\pm\sqrt{(\gamma\gamma-\beta^3)})}$ $=\sqrt[3]{(\frac{-7}{54}\pm\frac{7}{18}\sqrt{-3})}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{7}{2}(-1\pm3\sqrt{-3})}$

Hinc ergo pro p, q, r sequentes prodibunt valores:

$$p=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{7\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{7\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

$$q=\frac{1}{3}\;\frac{-1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{7\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)}-\frac{1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{7\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

$$r=\frac{1}{3}\;\frac{-1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{7\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{6}\right)}-\frac{1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{7\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

Tres hae formulae in hac vna comprehendi possunt:

$$\frac{1}{3}+\frac{\alpha}{3}\sqrt[3]{7\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)}+\frac{\beta}{3}\sqrt[3]{7\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

quae abit in primam si fuerit $\alpha=1$ et $\beta=1$, in secundam si $\alpha=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\beta=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, atque in tertiam si $\alpha=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ et $\beta=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. In omni autem casu erit $\alpha\beta=1$, et $\alpha^2=\beta$, atque $\beta^2=\alpha$. Huius igitur triplicis formae in vnicam redactae quadratum quaternario minutum, vt prodeant formae $pp-4$, $qq-4$ et $rr-4$ erit:

$$-\frac{7}{3}+\frac{\alpha}{3}.\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{7\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)}+\frac{\beta}{3}.\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)}\right.$$

Est enim $\sqrt[3]{49\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}=\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7\left(\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\right)}$

et $\sqrt[3]{49\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2}=\frac{-1+3\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7\left(\frac{-1-3\sqrt{-3}}{2}\right)}$

quarum transformationum beneficio quadratum superius inuenitur, a quo 4 ablatus est.

§. 44. Quia nunc inuenimus ternas quantitates $pp-4$, $qq-4$, et $rr-4$ possemus statim iis signum radicale

$\sqrt{}$

$\sqrt{}$ praefigendo septem radices aequationis $x^7 - 1 = 0$ assignare. At si has radices in forma simplicissima exhibere velimus, indagare debemus, an ex illis quantitatibus $pp - 4$, $qq - 4$, $rr - 4$ actu radix quadrata extrahi possit. Cum igitur sint p, q et r valores ipsius u ex hac aequatione:

$$u^3 - u^2 - 2u + 1 = 0$$

ponamus $\sqrt{(uu-4)} = v$; atque hic valor v praebebit valores pro $\sqrt{(pp-4)}$; $\sqrt{(qq-4)}$ et $\sqrt{(rr-4)}$. Posito autem $\sqrt{(uu-4)} = v$ seu $uu = vv + 4$ habebimus:

$$(vv+2)\sqrt{(vv+4)} = vv + 3 \text{ hincque}$$
$$v^6 + 7v^4 + 14v^2 + 7 = 0.$$

Huius aequationis ponantur secundum §. 29 factores

$$v^3 + pv^2 + qv + r = 0$$
$$v^3 - pv^2 + qv - r = 0$$

atque ad determinandos coefficientes p, q, r prodibit aequatio:

$$q^4 - 28q^3 + 56q = 0$$

ex qua prodit $q = 0$, $r = \sqrt{-7}$, et $p = \sqrt{-7}$; ita vt v definiatur per has aequationes: $v^3 \pm v^2\sqrt{-7} \pm \sqrt{-7} = 0$

§. 45. Ex hac duplici aequatione sufficiet alteram tantum resoluisse, cum alterius radices sint negatiuae radicum alterius aequationis, atque iam supra signa radicalia $\sqrt{(pp-4)}$; $\sqrt{(qq-4)}$; $\sqrt{(rr-4)}$ signum habeant ambiguum. Quaeramus ergo radices aequationis huius:

$$v^3 - v^2\sqrt{-7} - \sqrt{-7} = 0;$$

quae

quae cum forma generali §. 39. comparata, dat:

$$\alpha = \frac{\sqrt{-7}}{3}$$

$$\beta = -\frac{7}{9}$$

$$+\frac{7\sqrt{-7}}{27} - \frac{21\sqrt{-7}}{27} - 2\gamma = -\sqrt{-7} \text{ seu } \gamma = \frac{13\sqrt{-7}}{54}$$

vnde fit $\sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)} = \frac{\sqrt{21}}{18}$ atque

$$\sqrt[3]{(\gamma \pm \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})} = \sqrt[3]{\left(\frac{13\sqrt{-7}}{54} \pm \frac{\sqrt{27}}{18}\right)} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{13 \pm 3\sqrt{-7}}{2}}$$

seu $\sqrt[3]{(\gamma \pm \sqrt{(\gamma\gamma - \beta^3)})} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(-\frac{1 \mp 3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7}$

Atque hinc scripto $-\sqrt{-7}$ loco $\sqrt{-7}$, prodibunt pro v tres sequentes valores:

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7}$$

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3} - \frac{1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7} - \frac{1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7}$$

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3} - \frac{1-\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7} - \frac{1+\sqrt{-3}}{6}\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7}$$

qui comprehendi possunt in hac vna forma:

$$-\frac{\sqrt{-7}}{3} + \frac{\mu}{3}\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7} + \frac{\nu}{3}\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7}$$

denotantibus μ et ν vel vtraque 1, vel altera $-\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ et altera $-\frac{1 \mp \sqrt{-3}}{2}$.

§. 46. Vt nunc appareat quomodo litterae μ et ν ad supra assumtas §. 43. nempe ad α et β comparatae esse debeant, sumamus huius valoris inuenti quadratum quod erit:

$$-\frac{7}{3} + \frac{\mu}{3}\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{7}\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right) + \frac{\nu}{3}\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{7}\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right) -$$

qui cum congruere debeat cum valore supra pro $pp-4$, seu $qq-4$, seu $rr-4$ inuento fiet

$$\alpha\left(\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right) = \mu\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right) \text{ et}$$

$$\beta\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right) = \nu\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)$$

 vnde

vnde erit $\mu = \alpha\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)$

atque $\nu = \beta\left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)$

His definitis pro valoribus ipsius x supra §. 43 inuentis,
si valeat p erit $\alpha = 1$, $\beta = 1$
si valeat q; erit $\alpha = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$; $\beta = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$
si valeat r; erit $\alpha = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$; $\beta = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$

Atque ex his prodibit formularum irrationalium $\sqrt{(pp-4)}$; $\sqrt{(qq-4)}$ et $\sqrt{(rr-4)}$ valor vnica expressione contentus hic:

$$-\frac{\sqrt{-7}}{6}+\frac{\alpha}{3}\left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{12}\right)^2\sqrt{-7}}+\frac{\beta}{3}\left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}$$

substitutis ergo loco α et β singulis casibus valoribus debitis reperientur sequentes septem radices aequationis

$$x^7-1=0$$

I. $x = 1$

II. III. $x = -\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\sqrt[3]{7\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)}-\frac{1}{6}\sqrt[3]{7\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)}$

$$\pm\frac{\sqrt{-7}}{6}\mp\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}\pm\left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}$$

IV. V. $x = -\frac{1}{6}-\left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)}-\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)}$

$$\pm\frac{\sqrt{-7}}{6}\mp\frac{1}{6}\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}\mp\frac{1}{6}\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}$$

VI. VII. $x = -\frac{1}{6}-\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)}-\left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)}$

$$\pm\frac{\sqrt{-7}}{6}\mp\left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}\mp\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{12}\right)\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2\sqrt{-7}}$$

§. 47. In vnaquaque harum formarum praeter primam, continentur quatuor signa radicalia cubica, at in qualibet bina eiusmodi signa in vnum colligi possunt. Cum enim sit vt supra ostendimus:

$$\sqrt[3]{49\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2} = -\frac{1-7\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

et $$\sqrt[3]{49\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2} = -\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{7\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

erit

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7} = \left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2\sqrt{-7}}\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

et $$\sqrt[3]{\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)^2}\sqrt{-7} = \left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2\sqrt{-7}}\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

His igitur valoribus substitutis septem illae ipsius x radices ex aequatione $x^7 - 1 = 0$, seu septem diuersae expressiones, quarum singularum potestates septimae vnitatem producunt erunt sequentes.

$$\mathrm{I} = 1.$$

$$\mathrm{II}\ \text{et}\ \mathrm{III} = -\frac{1\pm\sqrt{-7}}{6} - \frac{1}{6\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2+\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1+7\sqrt{-7}}{2}\right)} - \frac{1}{6\sqrt{-7}}$$
$$\left(\sqrt{-7}\pm(-2-\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

$$\mathrm{IV}\ \text{et}\ \mathrm{V} = -\frac{1\mp\sqrt{-7}}{6} - \frac{(-1+\sqrt{-3})}{12\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2+\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)}$$
$$-\frac{(-1-3\sqrt{-3})}{12\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2-\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

$$\mathrm{VI}\ \text{et}\ \mathrm{VII} = -\frac{1\mp\sqrt{-7}}{6} - \frac{(-1-\sqrt{-\ })}{12\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2+\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}\right)}$$
$$-\frac{(-1+\sqrt{-3})}{12\sqrt{-7}}\left(\sqrt{-7}\pm(-2-\sqrt{-3})\right)\sqrt[3]{7\left(-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right)}$$

§. 48. Si quis porro progredi voluerit, facile definiet octo radices huius aequationis $x^8 - 1 = 0$

$\mathrm{I} = +1$; $\mathrm{III} = +\sqrt{-1}$; $\mathrm{V} = +\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$; $\mathrm{VII} = -\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$

$\mathrm{II} = -1$; $\mathrm{IV} = -\sqrt{-1}$; $\mathrm{VI} = +\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$; $\mathrm{VIII} = -\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$:

simili modo ex tribus radicibus cubicis ex vnitate, reperientur nouem radices aequationis $x^9 - 1 = 0$ dum ex singulis radicibus cubicis denuo ternae radices cubicae

 extra-

extrahuntur eruntque ideo

$$\mathrm{I} = 1 \qquad \mathrm{IV} = \sqrt[3]{\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)}; \qquad \mathrm{VII} = \sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}}$$

$$\mathrm{II} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}; \quad \mathrm{V} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}; \quad \mathrm{VIII} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}}$$

$$\mathrm{III} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}; \quad \mathrm{VI} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}; \quad \mathrm{IX} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}}$$

Decem autem radices aequationis $x^{10} - 1 = 0$ erunt primo quinque radices aequationis $x^5 - 1 = 0$ ipsae §. 40. exhibitae, atque insuper eaedem per -1 multiplicatae. At vero radices undecim aequationis $x^{11} - 1 = 0$ exhiberi non possunt nisi ope aequationis quinque dimensionum, cuius resolutio cum adhuc lateat, hic subsistere debemus.

PRO-

PROBLEMA ANALYTICVM.

AVCTORE

I. BERNVOLLII.

Data sit aequatio differentialis cuiusuis gradus et terminorum quotcunque ex. gr. quatuor, eadem est enim regula pro pluribus, quae aequatio hanc habeat formam, vbi dx ponitur constans, $ydx + axdy + \frac{bxxddy}{dx} + \frac{cx^3d^3y}{dx^2} = 0$. Reducere hanc aequationem ad aliam vno gradu depressiorem.

Solutio. Multiplicetur per x^p, et fiet $yx^pdx + ax^{p+1}dy + \frac{bx^{p+2}ddy}{dx} + \frac{cx^{p+3}d^3y}{dx^2} = 0$. Termino primo adiungo terminum analogum secundo, ita vt ambo simul sint integrabiles, deinde huic analogo secundo sub signo contrario adiungo terminum analogum tertio, qui ambo simul sumti sint iterum integrabiles, atque ita procedo ad finem vsque, vt videre est ex sequenti laterculo

$$\int\left(yx^pdx + \frac{x^{p+1}dy}{p+1}\right) = \frac{x^{p+1}y}{p+1}$$

$$\int\left(-\frac{x^{p+1}dy}{p+1} - \frac{x^{p+2}ddy}{p+1.p+2.dx}\right) = -\frac{x^{p+2}dy}{p+1.p+2.dx}$$

$$\int\left(\frac{x^{p+2}ddy}{p+1.p+2.dx} + \frac{x^{p+3}d^3y}{p+1.p+2.p+3.dx^2}\right) = \frac{x^{p+3}ddy}{p+1.p+2.p+3.dx^2}$$

Nunc multiplico secundam et tertiam aequationem per coëfficientes constantes e et f, quorum valores vt et valor exponentis assumti p postea quaerendi sunt, quo facto laterculus erit vt sequitur:

$$\int\left(yx^p dx + \frac{x^{p+1}dy}{p+1}\right) = \frac{x^{p+1}y}{p+1}$$

$$e\int\left(-\frac{x^{p+1}dy}{p+1} - \frac{x^{p+2}ddy}{p+1.p+2.dx}\right) = -\frac{ex^{p+2}dy}{p+1.p+2.dx}$$

$$f\int\left(\frac{x^{p+2}ddy}{p+1.p+2.dx} + \frac{x^{p+3}d^3y}{p+1.p+2.p+3.dx^2}\right) = \frac{fx^{p+3}ddy}{p+1.p+2.p+3.dx^2}$$

Colligendo terminos analogos, nascetur aequatio sequens, $\int\left(yx^p dx + \frac{(1-e).x^{p+1}dy}{p+1} + \frac{(f-e).x^{p+2}ddy}{p+1.p+2.dx} + \frac{fx^{p+3}d^3y}{p+1.p+2.p+3.dx^2}\right) = \frac{x^{p+1}y}{p+1} + \frac{-ex^{p+2}dy}{p+1.p+2.dx} + \frac{fx^{p+3}ddy}{p+1.p+2.p+3.dx^2}$ $\pm$ A. Nota, quod A sit constans arbitraria, quae post integrationes peractas addi vel subtrahi solet.

Porro vt membrum prius identificetur cum differentiali proposito seu cum eius aequiualente $yx^p dx + ax^{p+1} dy + \frac{bx^{p+2}ddy}{dx} + \frac{cx^{p+3}d^3y}{dx^2}$, oportet coaequare coefficientes terminorum homogeneorum, nempe $a = \frac{1-e}{p+1}$, $b = \frac{f-e}{p+1.p+2}$, $c = \frac{f}{p+1.p+2.p+3}$, vnde lucrabimur $e = (p+1.p+2.p+3)c - (p+1.p+2)b$, et $f = (p+1.p+2.p+3)c$, ipsius vero p valor est radix huius aequationis $1-(p+1)a + (p+1.p+2)b - (p+1.p+2.p+3)c = 0$, quae erit trium dimensionum.

His igitur valoribus substitutis in altero membro, orietur quaesita aequatio differentialis reducta vno gradu simplicior quam proposita, quae scilicet haec erit:

$$\frac{x^{p+1}y}{p+1} + [b-(p+3)c]\frac{x^{p+2}dy}{dx} + \frac{cx^{p+3}ddy}{dx^2} \pm \text{A} = 0.$$

Reiecta arbitraria A, et tum diuidendo per x^{p+1}, prodibit aequatio minus quidem vniuersalis sed multo simplicior, $\frac{y}{p+1} + [b-(p+3)c]\frac{xdy}{dx} + \frac{cxxddy}{dx^2} = 0$.

Cae-

Caeterum vero, seruata licet arbitraria A, iam videmus formam, quam induit aequatio reducta ex differentiali tertii gradus ad differentialem gradus secundi; quae forma vtique similis est illi quam habet ipsa reducenda, ratione scilicet progressionis tam dimensionum ipsius x, quam graduum differentialium ipsius dy: Vnde statim concludere licebit, si iam vlterius reducatur, per hanc methodum, aequatio reducta differentialis secundi gradus, ad aliam primi gradus, quod habitura sit talem formam $\alpha x^q y + \frac{\beta x^{q+1} dy}{dx} \pm A x^r \pm B = o$. Quae ipsa post institutam reductionem tertiam, quae heic est finalis, abibit tandem in aequationem finitam sine differentialibus, huius formae $m x^n y \pm A x^s \pm B x^t \pm C = o$. Vbi cum A, B, C, sint assumtae arbitrariae, possunt illae omnino negligi, retenta sola C, ita vt pro aequatione quaesita sit tantum $m x^n y \pm C = o$, per consequens satisfaciat curua ex genere vel Hyperbolarum vel Parabolarum, prout exponens n est vel affirmatiuus vel negatiuus.

OB-

OBSERVATIONES ANALYTICAE VARIAE DE COMBINATIONIBVS

Auctore
L. Euler.

§. 1.

Propoſita nobis ſit ſeries quantitatum quarumcunque ſiue finita ſiue in infinitum excurrens haec:

$$a, b, c, d, e, f, g, h, \text{ etc.}$$

quae litterae denotent quantitates quascunque ſiue inter ſe aequales ſiue inaequales. Interim tamen quantitates, quae diuerſis litteris indicantur, inter ſe inaequales vocabo, etiamſi in exemplis earum loco numeros aequales ſubſtituere liceat.

§. 2. Nunc primo ex his quantitatibus formentur poteſtatibus ſumendis nouae ſeries, quarum ſummae deſignentur litteris maiuſculis A, B, C, D etc. vt ſequitur: ſit ſcilicet

$$A = a + b + c + d + e + \text{ etc.}$$
$$B = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \text{ etc.}$$
$$C = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + \text{ etc.}$$
$$D = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 + \text{ etc.}$$
$$E = a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 + \text{ etc.}$$
etc.

quae ſeries ſingulae erunt infinitae, ſi numerus quantitatum a, b, c, d, etc. aſſumtarum fuerit infinitus; ſin autem numerus harum quantitatum ſit finitus ac determinatus

natus puta $= n$, tum ſingulae iſtae ſeries totidem terminos complectentur.

§. 3. Deinde ſequenti modo ex quantitatibus aſſumtis a, b, c, d, etc. productis inaequalium ſumendis formentur ſeries. Primo ſcilicet colligantur quantitates ſingulae, tum facta ex binis inaequalibus; tertio ex ternis inaequalibus; quarto ex quaternis inaequalibus et ita porro; atque hae ſeries litteris graecis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. indicentur vt ſequitur.

$$\alpha = a + b + c + d + \text{etc.}$$
$$\beta = ab + ac + ad + ac + bd + \text{etc.}$$
$$\gamma = abc + abd + abe + bcd + \text{etc.}$$
$$\delta = abcd + abce + bcde + \text{etc.}$$
$$\epsilon = abcde + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

quae ſeries ſi quantitatum aſſumtarum a, b, c, d, etc. numerus fuerit infinitus, non ſolum omnes in infinitum excurrent, ſed etiam ipſarum ſerierum hoc modo formandarum numerus erit infinitus. Quodſi autem numerus quantitatum a, b, c, d, etc. fuerit finitus puta $= n$, tum ſeries α continebit n terminos, ſecunda ſeries β conſtabit ex $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ terminis, tertia γ ex $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ terminis, quarta δ ex $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ terminis, et ita porro, donec tandem ad ſeriem perueniatur ex vnico termino conſtantem, quam ſequentes omnes euaneſcent terminis omnino carentes. Perſpicuum autem eſt ſerierum, quae hoc modo generantur, numerum fore $= n$, earumque vltimam vnico conſtare termino, qui ſit pro-

 ductum

ductum ex omnibus quantitatibus assumtis a, b, c, d, e, etc.

§. 4. Quemadmodum autem hic producta ex quantitatibus inaequalibus tantum assumsimus, ex iisque series expositas formauimus; ita iisdem quantitatibus in productis quoties fieri poterit repetendis, nanciscemur nouas productorum ex singulis, binis, ternis, quaternis, etc. series, in quibus factores aequales non, vt ante excludantur; hae ergo series ita se habebunt.

$$\mathfrak{A} = a + b + c + d + e + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B} = a^2 + ab + b^2 + ac + bc + c^2 + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C} = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 + a^2c + abc + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{D} = a^4 + a^3b + a^2b^2 + a^2bc + abcd + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{E} = a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^3bc + a^2bcd + \text{etc.}$$
etc.

In his nempe seriebus omnes continentur quantitates, quae per multiplicationem ex quantitatibus assumtis a, b, c, d, etc. produci possunt. Ceterum notandum est si numerus quantitatum a, b, c, d, etc. fuerit finitus $= n$, tum seriem primam $\mathfrak{A}$ esse habituram n terminos, secunda autem $\mathfrak{B}$ habebit $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ terminos, tertia $\mathfrak{C}$ habebit $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ terminos, quarta $\mathfrak{D}$ vero $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ terminos, et ita porro.

§. 5. Tres hi serierum, quas ex quantitatibus assumtis a, b, c, d, etc. triplici modo composuimus, ordines multifariam inter se connectuntur, ita vt vno serierum ordine cognito, bini reliqui ordines inde possint determinari. Atque in hoc negotio ad connexionis legem et rationem inuestigandam obseruatio atque inductio plu plurimum adhiberi solet; hocque pacto primum quidem certissime constat esse $A - \alpha = \mathfrak{A}$; ac de reliquis compertum est esse:

$$\alpha = A$$
$$\beta = \frac{\alpha A - B}{2}$$
$$\gamma = \frac{\beta A - \alpha B + C}{3}$$
$$\delta = \frac{\gamma A - \beta B + \alpha C - D}{4}$$
$$\varepsilon = \frac{\delta A - \gamma B + \beta C - \alpha D + E}{5}$$

etc. item

$$\mathfrak{A} = A$$
$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A} A + B}{2}$$
$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B} A + \mathfrak{A} B + C}{2}$$
$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{C} A + \mathfrak{B} B + \mathfrak{A} C + D}{4}$$
$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{D} A + \mathfrak{C} B + \mathfrak{B} C + \mathfrak{A} D + E}{5}$$

etc.

praetereaque

$$\mathfrak{A} = \alpha$$
$$\mathfrak{B} = \alpha \mathfrak{A} - \beta$$
$$\mathfrak{C} = \alpha \mathfrak{B} - \beta \mathfrak{A} + \gamma$$
$$\mathfrak{D} = \alpha \mathfrak{C} - \beta \mathfrak{B} + \gamma \mathfrak{A} - \delta$$
$$\mathfrak{E} = \alpha \mathfrak{D} - \beta \mathfrak{C} + \gamma \mathfrak{B} - \delta \mathfrak{A} + \varepsilon$$

etc.

Harumque relationum ope ex datis summis serierum cuiuscunque classis definiri poterunt summae serierum, quae in duabus reliquis classibus continentur.

§. 6. Ad naturam atque indolem harum serierum diligentius attendenti facile quidem per obseruationem et inductionem veritas istius mutuae relationis patebit. Verum tamen quo magis de veritate huius nexus conuincamur, expediet sequenti modo totum hoc negotium considerare; quo simul aliae insuper proprietates nobis offerentur, ad quas sola inductio non tam facile viam aperit. Assumtis scilicet pro libitu quantitatibus

$$a, b, c, d, e, \text{ etc.}$$

ex iisque formatis trium classium seriebus supra memoratis, contemplemur hanc expressionem:

$$P = \frac{az}{1-az} + \frac{bz}{1-bz} + \frac{cz}{1-cz} + \frac{dz}{1-dz} + \frac{ez}{1-ez} + \text{ etc.}$$

cuius singuli termini in progressiones geometricas resoluti more solito, dabunt.

$$\begin{aligned} P = &+ z\,(a + b + c + d + e + \text{etc.}) \\ &+ z^2\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \text{etc.}) \\ &+ z^3\,(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + \text{etc.}) \\ &+ z^4\,(a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 + \text{etc.}) \end{aligned}$$

quae series omnes in prima classe continentur. Quare si earum loco summae supra (2) positae scribantur fiet:

$$P = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{ etc.}$$

cuius idcirco seriei summa erit, vti sumsimus

$$P = \frac{az}{1-az} + \frac{bz}{1-bz} + \frac{cz}{1-cz} + \frac{dz}{1-dz} + \text{ etc.}$$

Simili autem modo si fuerit:

$$Q = \frac{az}{1+az} + \frac{bz}{1+bz} + \frac{cz}{1+cz} + \frac{dz}{1+dz} + \text{ etc.}$$

erit per series primae classis:

$$Q = Az - Bz^2 + Cz^3 - Dz^4 + Ez^5 - \text{ etc.}$$

§. 7.

§. 7. Consideremus porro hanc expressionem:

$$R = (1+az)(1+bz)(1+cz)(1+dz)(1+ez) \text{ etc.}$$

cuius factores, si actu in se multiplicentur; ac termini secundum exponentes ipsius z disponantur fiet coëfficiens ipsius z aequalis summae quantitatum assumtarum a, b, c, d, etc. Coëfficiens ipsius z^2 erit aggregatum omnium productorum ex binis inaequalibus; coëfficiens ipsius z^3 erit aggregatum omnium productorum ex ternis inaequalibus et ita porro: ex quibus sequitur fore

$$R = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 + \text{etc.}$$

secundum definitiones supra (§. 3) datas.

Quodsi autem ponatur:

$$S(-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)(1-ez) \text{ etc.}$$

erit faciendo tantum z negatiuo

$$S = 1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4 - \varepsilon z^5 + \text{etc.}$$

§. 8. Vt series hae R et S cum praecedentibus P et Q comparentur, notandum est esse

$$lR = l(1+az) + l(1+bz) + l(1+cz) + l(1+dz) + \text{etc.}$$

vnde sumendis differentialibus erit:

$$\frac{dR}{Rdz} = \frac{a}{1+az} + \frac{b}{1+bz} + \frac{c}{1+cz} + \frac{d}{1+dz} + \text{etc.}$$

quae per z multiplicata dat illam ipsam expressionem quam supra Q vocauimus, ita vt sit: $Q = \frac{zdR}{Rdz}$. Simili autem modo erit $\frac{dS}{Sdz} = \frac{-a}{1-az} - \frac{b}{1-bz} - \frac{c}{1-cz} - \text{etc.}$ vnde habebitur $P = \frac{-zdS}{Sdz}$.

§. 9. Cum nunc sit $R = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 +$ etc. erit $\frac{zdR}{dz} = \alpha z + 2\beta z^2 + 3\gamma z^3 + 4\delta z^4 + 5\varepsilon z^5 +$ etc. ideoque $Q = Az - Bz^2 + Cz^3 - Dz^4 + Ez^5 -$ etc.

$$= \frac{\alpha z + 2 \beta z^2 + 3 \gamma z^3 + 4 \delta z^4 + 5 \epsilon z^5 + \text{etc.}}{1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \epsilon z^5 + \text{etc.}}$$

At ex aequalitate harum expressionum sequuntur sequentes relationes inter litteras A, B, C, D, E, etc. et α, β, γ, δ, ϵ, etc.

$$A = \alpha$$
$$\alpha A - B = 2 \beta$$
$$\beta A - \alpha B + C = 3 \gamma$$
$$\gamma A - \beta B + \alpha C - D = 4 \delta$$
$$\delta A - \gamma B + \beta C - \alpha D + E = 5 \epsilon$$
etc.

Simili vero modo ex altera aequatione $P = \frac{-z\,dS}{S\,dz}$ sequitur $P = A z + B z^2 + C z^3 + D z^4 + E z^5 +$ etc.

$$= \frac{\alpha z - 2 \beta z^2 + 3 \gamma z^3 - 4 \delta z^4 + 5 \epsilon z^5 - \text{etc.}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4 - \epsilon z^5 + \text{etc.}}$$

quae pariter easdem praebet determinationes, quas supra §. 5. tradidimus.

§. 10. Praeterea autem ex aequatione $Q = \frac{z\,dR}{R\,dz}$ consequimur integrando $\int \frac{Q\,dz}{z} = l R$. Quoniam vero est $Q = A z - B z^2 + C z^3 - D z^4 +$ etc. erit $\int \frac{Q\,dz}{z} = A z - \frac{Bz^2}{2} + \frac{Cz^3}{3} - \frac{Dz^4}{4} +$ etc. cuius seriei valor itaque exprimet logarithmum huius seriei $R = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 +$ etc.

Quemadmodum igitur est:

$$l(1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \text{etc.}) = A z - \tfrac{1}{2} B z^2 + \tfrac{1}{3} C z^3 - \tfrac{1}{4} D z^4 + \text{etc.}$$

ita etiam ex aequatione $\int \frac{P\,dz}{z} = - l S$ erit

$$l(1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \text{etc.}) = - A z - \tfrac{1}{2} B z^2 - \tfrac{1}{3} C z^3 - \tfrac{1}{4} D z^4 - \text{etc.}$$

Quare si k scribatur pro numero, cuius logarithmus hyperbolicus est $= 1$, habebitur:

$$1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma^3 + \delta z^4 + \text{etc.} = k^{A z - \frac{1}{2} B z^2 + \frac{1}{3} C z^3 - \frac{1}{4} D z^4 + \text{etc.}}$$

et

et

$$1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4-\text{etc}=k^{-Az-\frac{1}{2}Bz^2-\frac{1}{3}Cz^3-\frac{1}{4}Dz^4-\text{etc.}}$$

§. 11. Notatu praeterea dignae sunt expressiones harum R et S reciprocae nempe $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{S}$. Est vero $\frac{1}{S}=\frac{1}{(1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz)\ \text{etc.}}$ ad cuius fractionis valorem per seriem, cuius termini secundum potestates ipsius z progrediantur, exprimendum, perspicuum est in se inuicem multiplicari oportere cunctas has progressiones geometricas

$$\frac{1}{1-az}=1+az+a^2z^2+a^3z^3+a^4z^4+\text{etc.}$$
$$\frac{1}{1-bz}=1+bz+b^2z^2+b^3z^3+b^4z^4+\text{etc.}$$
$$\frac{1}{1-cz}=1+cz+c^2z^2+c^3z^3+c^4z^4+\text{etc.}$$
$$\frac{1}{1-dz}=1+dz+d^2z^2+d^3z^3+d^4z^4+\text{etc.}$$

In Producto autem post primum terminum 1 coëfficiens ipsius z erit summa quantitatum $a+b+c+d+$ etc. coëfficiens ipsius z erit summa factorum ex binis non excipiendo factores aequales in eodem facto; coëfficiens ipsius z^3 erit summa factorum ex ternis, et ita porro quas productorum summas supra (§. 4) litteris alphabethi geometrici $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, etc. designauimus.

His itaque litteris introductis habebimus:

$$\frac{1}{S}=1+\mathfrak{A}z+\mathfrak{B}z^2+\mathfrak{C}z^3+\mathfrak{D}z^4+\mathfrak{E}z^5+\text{etc.}$$

atque simili modo valorem ipsius R tractando erit:

$$\frac{1}{R}=1-\mathfrak{A}z+\mathfrak{B}z^2-\mathfrak{C}z^3+\mathfrak{D}z^4-\mathfrak{E}z^5+\text{etc.}$$

§. 12. Hae ergo series reciprocae sunt earum, quas supra sub litteris R et S (§. 7) protulimus. Atque hanc ob causam erit:

$$1 = (1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{etc.})\,(1 - \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 - \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \text{etc.})$$ pariterque
$$1 = (1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4 - \text{etc.})\,(1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \text{etc.})$$

Ex vtraque autem ſequitur vna eademque relatio inter valores litterum $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ etc. et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, erit ſcilicet:

$$\mathfrak{A} - \alpha = 0$$
$$\mathfrak{B} - \alpha\mathfrak{A} + \beta = 0$$
$$\mathfrak{C} - \alpha\mathfrak{B} + \beta\mathfrak{A} - \gamma = 0$$
$$\mathfrak{D} - \alpha\mathfrak{C} + \beta\mathfrak{B} - \gamma\mathfrak{A} + \delta = 0$$
etc.

quam eandem relationem iam ſupra (§. 5) tradidimus.

§. 13. Quodſi ponamus $\frac{1}{R} = T$ et $\frac{1}{S} = V$, vt ſit
$$T = 1 - \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 - \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 - \text{etc.}$$
et $V = 1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \text{etc.}$
erit $\frac{dR}{R} = -\frac{dT}{T}$ et $\frac{dS}{S} = -\frac{dV}{V}$; hincque
fiet $P = \frac{zdV}{Vdz}$ et $Q = -\frac{zdT}{Tdz}$. Quare cum
ſit $\frac{zdV}{dz} = \mathfrak{A}z + 2\mathfrak{B}z^2 + 3\mathfrak{C}z^3 + 4\mathfrak{D}z^4 + \text{etc.}$
et $-\frac{zdT}{dz} = \mathfrak{A}z - 2\mathfrak{B}z^2 + 3\mathfrak{C}z^3 - 4\mathfrak{D}z^4 + \text{etc.}$
habebimus loco P et Q valores debitos ex (§. 6.) ſcribendo has aequationes

$$Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.} = \frac{\mathfrak{A}z + 2\mathfrak{B}z^2 + 3\mathfrak{C}z^3 + 4\mathfrak{D}z^4 + \text{etc}}{1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \text{etc}}$$
et
$$Az - Bz^2 + Cz^3 - Dz^4 + \text{etc.} = \frac{\mathfrak{A}z - 2\mathfrak{B}z^2 + 3\mathfrak{C}z^3 - 4\mathfrak{D}z^4 + \text{etc.}}{1 - \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 - \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 - \text{etc.}}$$

ex quibus eadem ſequitur relatio inter litteras A, B, C, D, etc. et $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, etc. quam ſupra (§. 5.) dedimus. Erit ſcilicet

$\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} = A$$
$$2\mathfrak{B} = \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}$$
$$3\mathfrak{C} = \mathfrak{B}A + \mathfrak{A}B + C$$
$$4\mathfrak{D} = \mathfrak{C}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{A}C + D$$
$$5\mathfrak{E} = \mathfrak{D}A + \mathfrak{C}B + \mathfrak{B}C + AD + E$$
etc.

§. 14 Ex aequationibus (§. 12.) datis sequitur fore

$$l(1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \text{etc.}) = -l(1 - \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 - \mathfrak{C}z^3 + \text{etc.})$$
et
$$l(1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \text{etc.}) = -l(1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \text{etc.})$$

His igitur ad §. 10. accommodatis erit:

$$l(1 - \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 - \mathfrak{C}z^3 + \text{etc.}) = -Az + \tfrac{1}{2}Bz^2 - Cz^3 + \tfrac{1}{4}Dz^4 - \text{etc.}$$
et
$$l(1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \text{etc.}) = Az + \tfrac{1}{2}Bz^2 + \tfrac{1}{3}Cz^3 + \tfrac{1}{4}Dz^4 + \text{etc.}$$

Hincque sumto k pro numero, cuius logarithmus $= 1$ erit

$$1 - \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 - \mathfrak{C}z^3 + \text{etc.} = k^{-Az + \frac{1}{2}Bz^2 - \frac{1}{3}Cz^3 + \frac{1}{4}Dz^4 - \text{etc.}}$$
atque
$$1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \text{etc.} = k^{Az + \frac{1}{2}Bz^2 + \frac{1}{3}Cz^3 + \frac{1}{4}Dz^4 + \text{etc.}}$$

§. 15. Si iam litterae R et S retineant valores supra assumtos (§. 7.) erit

$$1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{etc.} = R$$
$$1 - \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 - \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 - \text{etc.} = \frac{1}{R}$$
et
$$1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4 - \text{etc.} = S$$
$$1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \text{etc.} = \frac{1}{S}$$

Ex quibus deducuntur sequentia consectaria.

$$1 + \beta z^2 + \delta z^4 + \zeta z^6 + \theta z^8 + \text{etc.} = \frac{R+S}{2}$$
$$\alpha z + \gamma z^3 + \varepsilon z^5 + \eta z^7 + \iota z^9 + \text{etc.} = \frac{R-S}{2}$$

$$1 + \mathfrak{B} z^2 + \mathfrak{D} z^4 + \mathfrak{F} z^6 + \mathfrak{H} z^8 + \text{etc.} = \frac{R+S}{2RS}$$

$$\mathfrak{A} z + \mathfrak{C} z^3 + \mathfrak{E} z^5 + \mathfrak{G} z^7 + \mathfrak{J} z^9 + \text{etc.} = \frac{R-S}{2RS}$$

hincque colligitur ista proportio:

$$1 + \beta z^2 + \delta z^4 + \zeta z^6 + \text{etc.} : \alpha z + \gamma z^3 + \varepsilon z^5 + \eta z^7 + \text{etc.} =$$
$$1 + \mathfrak{B} z^2 + \mathfrak{D} z^4 + \mathfrak{F} z^6 + \text{etc.} : \mathfrak{A} z + \mathfrak{C} z^3 + \mathfrak{E} z^5 + \mathfrak{G} z^7 + \text{etc.} =$$

Cum praeterea sit:

$$R - 1 = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{etc.}$$
$$1 - \frac{1}{R} = \mathfrak{A} z - \mathfrak{B} z^2 + \mathfrak{C} z^3 + \mathfrak{D} z^4 + \text{etc.}$$

erit

$$R = \frac{\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{etc.}}{\mathfrak{A} z - \mathfrak{B} z^2 + \mathfrak{C} z^3 - \mathfrak{D} z^4 + \text{etc.}}$$

similique modo propter

$$1 - S = \alpha z - \beta z^2 + \gamma z^3 - \delta z^4 + \text{etc.}$$
$$\frac{1}{S} - 1 = \mathfrak{A} z + \mathfrak{B} z^2 + \mathfrak{C} z^3 + \mathfrak{D} z^4 + \text{etc.}$$

erit

$$S = \frac{\alpha z - \beta z^2 + \gamma z^3 - \delta z^4 + \text{etc.}}{\mathfrak{A} z + \mathfrak{B} z^2 + \mathfrak{C} z^3 + \mathfrak{D} z^4 + \text{etc.}}$$

§. 16. Deinde vero si vt supra (§. 6.) ponamus

$$P = A z + B z^2 + C z^3 + D z^4 + \text{etc.}$$
$$Q = A z - B z^2 + C z^3 - D z^4 + \text{etc.}$$

erit ex paragr. 9.

$$\alpha z + 2\beta z^2 + 3\gamma z^3 + 4\delta z^4 + \text{etc.} = QR$$
$$\alpha z - 2\beta z^2 + 3\gamma z^3 - 4\delta z^4 + \text{etc.} = PS$$

similique modo ex paragr. 13 habebitur

$$\mathfrak{A} z + 2\mathfrak{B} z^2 + 3\mathfrak{C} z^3 + 4\mathfrak{D} z^4 + \text{etc.} = \frac{P}{S}$$
$$\mathfrak{A} z - 2\mathfrak{B} z^2 + 3\mathfrak{C} z^3 + 4\mathfrak{D} z^4 + \text{etc.} = \frac{Q}{R}$$

Exquibus sequentia corollaria facile deriuantur

$$\frac{\alpha z - 2\beta z^2 + 3\gamma z^3 + 4\delta z^4 + \text{etc.}}{A z + B z^2 + C z^3 + D z^4 + \text{etc.}} = S = \frac{A z + B z^2 + C z^3 + D z^4 + \text{etc.}}{\mathfrak{A} z + 2\mathfrak{B} z^2 + 3\mathfrak{C} z^3 + 4\mathfrak{D} z^4 + \text{etc.}}$$

$$\frac{\alpha z + 2\beta z^2 + \gamma z^3 + 4 d z^4 + \text{etc.}}{A z - B z^2 + C z^3 - D z^4 + \text{etc.}} = R = \frac{A z - B z^2 + C z^3 - D z^4 + \text{etc.}}{\mathfrak{A} z - 2\mathfrak{B} z^2 + 3\mathfrak{C} z^3 - 4\mathfrak{D} z^4 + \text{etc.}}$$

Pro

Pro litteris igitur R et S habemus quintuplices valores hos:

$$R = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{etc.}$$

$$R = \frac{1}{1 - \mathfrak{A} z + \mathfrak{B} z^2 - \mathfrak{C} z^3 + \mathfrak{D} z^4 - \text{etc.}}$$

$$R = \frac{\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{etc.}}{\mathfrak{A} z - \mathfrak{B} z^2 + \mathfrak{C} z^3 - \mathfrak{D} z^4 + \text{etc.}}$$

$$R = \frac{\alpha z + 2\beta z^2 + 3\gamma z^3 + 4\delta z^4 + \text{etc.}}{Az - Bz^2 + Cz^3 - Dz^4 + \text{etc.}}$$

$$R = \frac{Az - Bz^2 + Cz^3 - Dz^4 + \text{etc.}}{\mathfrak{A} z - 2\mathfrak{B} z^2 + 3\mathfrak{C} z^3 - 4\mathfrak{D} z^4 + \text{etc.}}$$

qui posito $-z$ loco z totidem praebent valores pro S. Atque ex horum quinque valorum multiplici combinatione quam plurimae proprietates elici possunt, quas terni litterarum nostrarum ordines, scilicet: A, B, C, D etc. α, β, γ, δ, etc. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. inter se tenent, quibus autem euoluendis hic supersedemus.

§. 17. His, quae latissime ptent, paraemissis atque expositis ad magis particularia descendamus, ac primo quidem pro serie litterarum a, b, c, d, etc. accipiatur progressio geometrica infinita haec: $n, n^2, n^3, n^4, n^5, n^6$, etc. qua in formulas superiores successiue introducta habebimus:

$$A = n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + \text{etc.} = \frac{n}{1-n}$$

$$B = n^2 + n^4 + n^6 + n^8 + n^{10} + \text{etc.} = \frac{nn}{1-nn}$$

$$C = n^3 + n^6 + n^9 + n^{12} + n^{15} + \text{etc.} = \frac{n^3}{1-n^3}$$

$$D = n^4 + n^8 + n^{12} + n^{16} + n^{20} + \text{etc.} = \frac{n^4}{1-n^4}$$

etc.

Iam ex §. 6 duplices pro litteris P et Q nanciscimur vares, qui erunt:

$$P = \frac{nz}{1-nz} + \frac{n^2 z}{1-n^2 z} + \frac{n^3 z}{1-n^3 z} + \frac{n^4 z}{1-n^4 z} + \text{etc.}$$

 Q =

$$Q = \frac{nz}{1-nz} + \frac{n^2z}{1+n^2z} + \frac{n^3z}{1+n^3z} + \frac{n^4z}{1+n^4z} + \text{etc.}$$

hincque ex inuentis litterarum A, B, C, D, etc. valoribus nafcentur hi alteri:

$$P = \frac{nz}{1-n} + \frac{nnz^2}{1-nn} + \frac{n^3z^3}{1-n^3} + \frac{n^4z^4}{1-n^4} + \text{etc.}$$

$$Q = \frac{nz}{1-n} - \frac{n^2z^2}{1-nn} + \frac{n^3z^3}{1-n^3} - \frac{n^4z^4}{1-n^4} + \text{etc.}$$

§. 18. Ex paragr. porro 7 habebimus pro R et S fequentes expreffiones:

$$R = (1+nz)(1+n^2z)(1+n^3z)(1+n^4z) \text{ etc.}$$

$$S = (1-nz)(1-n^2z)(1-n^3z)(1-n^4z) \text{ etc.}$$

qui factores actu in fe multiplicati, et producta fecundum dimenfiones ipfius z ordinata praebebunt pro R et S has feries:

$$R = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{etc.}$$

$$S = 1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4 - \text{etc.}$$

vbi litterae α, β, γ, δ, etc ex ferie affumta

$$n,\ n^2,\ n^3,\ n^4,\ n^5,\ n^6,\ n^7, \text{ etc.}$$

ita determinabuntur, vt fit:

I. $\alpha =$ fummae fingulorum terminorum; vnde erit:

$$\alpha = n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + n^6 + n^7 + \text{etc.}$$

quae eft ipfa progreffio geometrica affumta in qua quaevis poteftas ipfius n occurrit, atque coëfficientem habet $+1$.

II. $\beta =$ fummae factorum ex binis terminis: vnde erit:

$$\beta = n^3 + n^4 + 2n^5 + 2n^6 + 3n^7 + 3n^8 + 4n^9 + 4n^{10} + \text{etc.}$$

in qua ferie poft poteftatem tertiam omnes fequentes ipfius n poteftates occurrunt: quaelibet autem poteftas toties occurrit, quoties ex multiplicatione binorum terminorum feriei α oriri poteft. Cum autem multiplicatio poteftatum confiftat in exponentium additione, coëfficiens cuiusque poteftatis ipfius n in ferie β oftendet, quot va-

riis modis exponens ipsius n possit in duas partes inaequales distribui, seu quoties iste exponens ex additione duorum numerorum integrorum inaequalium produci queat. Sic potestatis decimae n^{10} coëfficiens est 4, quia 10 quatuor modis in duas partes inaequales distribui potest nempe $10 = 1 + 9$; $10 = 3 + 7$;
$10 = 2 + 8$; $10 = 4 + 6$.

III. $\gamma =$ summae factorum ex ternis terminis seriei α inaequalibus; vnde erit:

$\gamma = n^6 + n^7 + 2n^8 + 3n^9 + 4n^{10} + 5n^{11} + 7n^{12} + 8n^{13} +$ etc.

in qua post potestatem sextam omnes sequentes ipsius n potestates occurrunt. Cuiuslibet autem potestatis coëfficiens indicat, quot variis modis exponens distribui possit in tres partes inaequales, seu quoties idem exponens produci queat ex additione trium numerorum integrorum inter se inaequalium. Sic potestas n^{12} coëfficientem habet 7, quia exponens 12 septem modis in tres partes inaequales partiri potest: vti

$12 = 1 + 2 + 9$; $12 = 2 + 3 + 7$
$12 = 1 + 3 + 8$; $12 = 2 + 4 + 6$
$12 = 1 + 4 + 7$; $12 = 3 + 4 + 5$
$12 = 1 + 5 + 6$;

IV. $\delta =$ summae factorum ex quatuor terminis seriei α inaequalibus inter se, vnde erit

$\delta = n^{10} + n^{11} + 2n^{12} + 3n^{13} + 5n^{14} + 6n^{15} + 9n^{16} +$ etc.

cuius prima potestas est n^{10}, quippe cuius exponens est $1 + 2 + 3 + 4$ seu numerus trigonalis quartus. Sequentium potestatum quaelibet toties adest, quoties eius exponens oriri potest ex additione quatuor numerorum integrorum inter se inaequalium. Sic potestas sexta decima ma n^{16} coëfficientem habet 9, quia 16 nouem modis in quatuor partes inter se inaequales dispertiri potest, quae nouem partitiones sunt:

$$16 = 1 + 2 + 3 + 10; \quad 16 = 1 + 3 + 4 + 8$$
$$16 = 1 + 2 + 4 + 9; \quad 16 = 1 + 3 + 5 + 7$$
$$16 = 1 + 2 + 5 + 8; \quad 16 = 1 + 4 + 5 + 6$$
$$16 = 1 + 2 + 6 + 7; \quad 16 = 2 + 3 + 4 + 7$$
$$16 = 2 + 3 + 5 + 6$$

Simili modo res se habet in sequentium litterarum ϵ, ζ, η, etc. valoribus qui erunt

$$\epsilon = n^{15} + n^{16} + 2n^{17} + 3n^{18} + 5n^{19} + 7n^{20} + 10n^{21} + \text{etc.}$$
$$\zeta = n^{21} + n^{22} + 2n^{23} + 3n^{24} + 5n^{25} + 7n^{26} + 11n^{27} + \text{etc.}$$
$$\eta = n^{28} + n^{29} + 2n^{30} + 3n^{31} + 5n^{32} + 7n^{33} + 11n^{34} + \text{etc.}$$
etc.

in quibus seriebus omnibus cuiusuis ipsius n potestatis coëfficiens indicat, quot variis modis exponens ipsius n possit resolui in tot partes inaequales, quota series est a principio numerata. Seu coëfficiens cuiusque termini declarat, quoties exponens ipsius n oriri queat ex additione tot numerorum integrorum inter se inaequalium quota ipsa series, ex qua terminus desumitur, est, numerando a prima α. Sic in serie septima coëfficiens potestatis n^{34} est 11, quia numerus 34 vndecim modis distribui potest in septem partes inaequales, quae distributiones sunt:

$$34 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 13$$
$$34 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 12$$
$$34 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8 + 11$$
$$34 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 9 + 10$$
$$34 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 11$$
$$34 = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 10$$

34 =

$34 = 1 + 2 + 3 + 4 + 7 + 8 + 9$
$34 = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 10$
$34 = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 8 + 9$
$34 = 1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9$
$34 = 1 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$

Atque ex his natura ſerierum, quae hoc pacto pro litteris α, β, γ, δ, etc. prodeunt, facile perſpicitur.

§. 19. Inueſtigando igitur, quot variis modis quisque numerus in partes inaequales numero datas diſtribui poſſit, ſeries iſtae litteris α, β, γ, δ, etc. ſignatae formari poterunt: quod autem opus foret ſummopere moleſtum. Viciſſim autem ex his ſeriebus aliunde cognitis et formatis reſolui poterit problema hoc non ineleganς, quod mihi a Viro Clar. Naudaeo propoſitum ita ſe habet: „Definire, quot variis modis datus numerus produci queat ex additione aliquot numerorum integrorum inter ſe „inaequalium; quorum numerus detur.

Sic Clariſſ. Propoſitor quaerit, quot variis modis numerus 50 oriri poſſit ex additione ſeptem numerorrm integrorum inaequalium. Ad quam quaeſtionem reſoluendam manifeſtum eſt in ſubſidium vocari debere ſeriem η in qua coëfficiens cuiusque termini indicat, quot variis modis exponens ipſius n reſolui poſſit in 7 partes inaequales. Quare ſeries illa

$$\eta = n^{28} + n^{29} + 2n^{30} + 3n^{31} + 5n^{32} + 7n^{33} + 11n^{34} + \text{etc.}$$

cotninuari debebit vsque ad terminum, in quo poteſtas quinquageſima ipſius n continetur, cuius coëfficiens qui erit 522 oſtendet numerum 50 omnino 522 modis diverſis ex additione ſeptem numerorum integrorum inter ſe inaequalium produci poſſe. Ex quo perſpicuum eſt,

ſi

si modus habeatur commodus et facilis formandi illas series α, β, γ, δ, etc. eo ipso problema istud Naudaeanum perfectissime solutum iri.

§. 20. Cum igitur supra §. §. 5 et 9. modus traditus sit inueniendi valores litterarum α, β, γ, δ, etc. ex cognitis valoribus litterarum A, B, C, D, etc. in praesenti negotio resolutionem facile expedire poterimus propterea quod ex §. 17 cognitos habemus valores A, B, C, D, etc. atque praeterea est, vt sequitur

$$\alpha = A$$
$$\beta = \frac{\alpha A - B}{2}$$
$$\gamma = \frac{\beta A - \alpha B + C}{3}$$
$$\delta = \frac{\gamma A - \beta B + \alpha C - D}{4}$$
$$\varepsilon = \frac{\delta A - \gamma B + \beta C - \alpha D + E}{5}$$

etc.

Ex his igitur obtinebimus:

$$\alpha = \frac{n}{1-n}$$
$$2\beta = \frac{\alpha n}{1-n} - \frac{nn}{1-nn}$$
$$3\gamma = \frac{\beta n}{1-n} - \frac{\alpha n^2}{1-n^2} + \frac{n^3}{1-n^3}$$
$$4\delta = \frac{\gamma n}{1-n} - \frac{\beta n^2}{1-n^2} + \frac{\alpha n^3}{1-n^3} - \frac{n^4}{1-n^4}$$

etc.

Quod si autem loco α, β, γ, etc. successiue substituantur valores ante reperti, prodibunt:

$$\alpha = \frac{n}{1-n}$$
$$\beta = \frac{n^3}{(1-n)(1-nn)}$$
$$\gamma = \frac{n^6}{(1-n)(1-nn)(1-n^3)}$$
$$\delta = \frac{n^{10}}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)}$$
$$\varepsilon = \frac{n^{15}}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)(1-n^5)}$$

etc.

Ex

Ex his itaque intelligitur esse in hoc casu:

$\alpha = A$

$\beta = A\,B$

$\gamma = A\,B\,C$

$\delta = A\,B\,C\,D$

$\varepsilon = A\,B\,C\,D\,E$

etc.

§. 21. Lex haec, qua valores litterarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. progredi sunt inuenti, compluribus formulis euolutis obseruatur, eiusque veritas nisi per inductionem adhuc non constat. Quo igitur haec veritas firmius confirmetur, conueniet eandem progressionis legem alio modo planissimo, in quo inductioni nullus locus relinquatur, elicere. Cum itaque nobis propositum sit valores literarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. indagare, quas sortiuntur in serie

$R = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 +$ etc.

Si fuerit vti initio assumsimus.

$R = (1 + nz)(1 + n^2 z)(1 + n^3 z)(1 + n^4 z) \ldots$

notandum est si loco z scribatur $n z$, expressionem, cui modo R erat aequalis, mutari in hanc formam

$(1 + n^2 z)(1 + n^3 z)(1 + n^4 z)(1 + n^5 z) \ldots$

quae multiplicata per $1 + nz$ ipsam priorem expressionem producit. Quamobrem recte concludimus, si in serie

$1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 +$ etc.

loco z scribamus $n z$ vt habeamus,

$1 + \alpha n z + \beta n^2 z^2 + \gamma n^3 z^3 + \delta n^4 z^4 + \varepsilon n^5 z^5 +$ etc.

hancque expressionem per $1 + nz$ multiplicemus, tum productum, quod erit

$1 + \alpha n z + \beta n^2 z^2 + \gamma n^3 z^3 + \delta n^4 z^4 + \varepsilon n^5 z^5 +$ etc.

$+ \; n z + \alpha n^2 z^2 + \beta n^3 z^3 + \gamma n^4 z^4 + \delta n^5 z^5 +$ etc.

aequale esse debere illi ipsi priori seriei

$$1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 + \text{etc.}$$

Quodsi ergo actu coëfficientes trrminorum homologorum coëquemus, nanciscemur sequentes pro α, β, γ, etc determinationes.

$$\alpha = \frac{n}{1-n} = \frac{n}{1-n}$$
$$\beta = \frac{\alpha n^2}{1-n^2} = \frac{n^3}{(1-n)(1-n^2)}$$
$$\gamma = \frac{\beta n^3}{1-n^3} = \frac{n^6}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)}$$
$$\delta = \frac{\gamma n^4}{1-n^4} = \frac{n^{10}}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)}$$
etc.

§. 22. Hoc igitur modo inuenimus summas serierum illarum α, β, γ, δ etc. satis commode expressas, ex quibus vicissim ipsae illae series formari poterunt. Nam cum illae series secundum potestates ipsius n progrediantur eae prodire debebunt, si istae expressiones summarum per diuisionem more consueto euoluantur atque in series infinitas secundum potestates ipsius n procedentes conuertantur. Quae operatio cum diuisione absoluatur manifestum est omnes illas series α, β, γ, δ, etc. ad id genus pertinere, quod nomine serierum recurrentium indicari solet; atque adeo quilibet terminus ex aliquot praecedentibus determinabitur. Vt autem pateat, quomodo in singulis his seriebus quisque terminus ex praecedentibus sit formandus, denominatores illarum expressionum pro litteris α, β, γ, δ, etc. inuentarum per multiplicationem actu euolui debent, quo facto habebitur:

$$\alpha = \frac{n}{1-n}$$
$$\beta = \frac{n^3}{1-n-n^2+n^3}$$
$$\gamma = \frac{n^6}{1-n-n^2+n^4+n^5-n^6}$$
$$\delta = \frac{n^{10}}{1-n-n^2+2n^5-n^8-n^9+n^{10}}$$

$\varepsilon =$

$$\varepsilon = \frac{n^{15}}{1-n-n^2+n^5+n^6+n^7-n^8-n^9-n^{10}+n^{13}+n^{14}-n^{15}}$$

$$\zeta = \frac{n^{21}}{1-n-n^2+n^5+2n^7-n^9-n^{10}-n^{11}-n^{12}+2n^{14}+n^{16}-n^{19}-n^{20}+n^{21}}$$

etc.

Atque ex his denominatoribus intelligitur, quomodo in singulis seriebus quisque terminus ex praecedentibus componi debeat, si praecepta, quae de formatione serierum recurrentium habentur, in subsidium vocentur.

§. 23. At ex forma expressionum pro litteris α, β, γ, δ, etc. inuentarum, qua quaelibet est productum ex praecedente in nouum quempiam factorem, alius deducitur modus satis idoneus ex quauis sirie iam inuenta seriem sequentem inueniendi. Sic, cum series $\alpha = \frac{n}{1-n}$ sit progressio geometrica

$\alpha = n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + n^6 + n^7 +$ etc.

ex hac reperietur series β, si ea multiplicetur per $\frac{n^2}{1-n^2}$, vel si multiplicetur per hanc progressionem geometricam: $n^2 + n^4 + n^6 + n^8 + n^{10} + n^{12} + n^{14} +$ etc.

Ex serie porro β hoc pacto inuenta, si ea multiplicetur per $\frac{n^3}{1-n^3} = n^3 + n^6 + n^9 + n^{12} + n^{15} + n^{18} +$ etc. producetur series γ. Haecque multiplicata per $\frac{n^4}{1-n^4} = n^4 + n^8 + n^{12} + n^{16} + n^{20} + n^{24} +$ etc. producet seriem δ. Atque ita porro seriem cuiusque ordinis multiplicando per certam quamdam progressionem geometricam reperietur series sequens. Hocque pacto non difficulter has series quousque libuerit, continuare licebit: atque sic problema supra memoratum a Clar. Naudaeo propositum resoluetur.

§. 24. Facilius autem quaelibet series ex se ipsa ope praecedentis poterit continuari, si ad modum respeciamus quo valor cuiusque litterarum α, β, γ, δ, etc. ex praecedente determinatur. Sic cum sit $\beta = \frac{\alpha n^2}{1-n^2}$ erit $\beta = \beta nn + \alpha nn$; quare si ad seriem β per nn mutiplicatam addatur series α per nn multiplicata, ipsa series β oriri debebit. Cum igitur constet seriei β primum terminum esse n^3 ponamus:

$$\beta = \mathfrak{a}n^3 + \mathfrak{b}n^4 + \mathfrak{c}n^5 + \mathfrak{d}n^6 + \mathfrak{e}n^7 + \mathfrak{f}n^8 + \mathfrak{g}n^9 + \text{etc.}$$

eritque

$$\beta n^2 = \qquad + \mathfrak{a}n^5 + \mathfrak{b}n^6 + \mathfrak{c}n^7 + \mathfrak{d}n^8 + \mathfrak{e}n^9 + \text{etc.}$$

$$\alpha n^2 = n^3 + n^4 + n^5 + n^6 + n^7 + n^8 + n^9 + \text{etc.}$$

Aequatis iam terminis propter $\beta = \beta nn + \alpha nn$ habebimus:

$\mathfrak{a} = 1$	$\mathfrak{e} = \mathfrak{c} + 1 = 3$
$\mathfrak{b} = 1$	$\mathfrak{f} = \mathfrak{d} + 1 = 3$
$\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + 1 = 2$	$\mathfrak{g} = \mathfrak{e} + 1 = 4$
$\mathfrak{d} = \mathfrak{b} + 1 = 2$	$\mathfrak{h} = \mathfrak{f} + 1 = 4$

etc.

Simili modo cum sit $\gamma = \frac{\beta n^3}{1-n^3}$ seu $\gamma = \gamma n^3 + \beta n^3$, ex serie β formabitur series γ, atque porro ex serie γ ope aequationis $\delta = \delta n^4 + \gamma n^4$ producetur series δ; pariterque sequentes omnes conficientur.

§. 25. Quoniam in expressione

$$R = 1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{etc.}$$

valores litterarum α, β, γ, δ, etc inuenimus, sitque

$$R = (1+nz)(1+n^2z)(1+n^3z)(1+n^4z)\ldots.$$

conuertetur productum hoc ex infinitis factoribus constans:

$$(1+nz)(1+n^2z)(1+n^3z)(1+n^4z)\ldots.$$

in seriem hanc secundum potestates ipsius z procedentem

$$1 + \frac{nz}{1-n} + \frac{n^3z^2}{(1-n)(1-n^2)} + \frac{n^6z^3}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)} + \frac{n^{10}z^4}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)} + \text{etc}$$

Atque summae huius seriei logarithmus hyperbolicus ex §. 10 erit $= \frac{nz}{1-n} - \frac{nnz^2}{2(1-n^2)} + \frac{n^3z^3}{3(1-n^3)} - \frac{n^4z^4}{4(1-n^4)} + \text{etc.}$

Vel si k scribatur pro numero, cuius logar. $= 1$. erit

k

$$k^{\frac{nz}{1-n} - \frac{n^2 z^2}{2(1-n^2)} + \frac{n^3 z^3}{3(1-n^3)} - \frac{n^4 z^4}{4(1-n^4)} + \text{etc.}} = R$$

seu ista expressio exponentialis est aequalis summae illius seriei, in quam valorem ipsius R transmutauimus.

§. 26. Verum vt ad propositum problema reuertamur quo definiendum sit, quot variis modis datus numerus m, partiri queat in μ partes inaequales inter se et integras; indicemus hunc modorum numerum, quem quaerimus, huiusmodi scriptione $m^{(\mu)i}$ qua nobis perpetuo numerus modorum indicetur, quibus numerus m per additionem produci queat ex μ numeris integris inter se inaequalibus; atque ad hanc partium inaequalitatem denotandam supra litteram i adiunximus; quae omittetur si quaestio formabitur de numero modorum inueniendo, quibus datus numerus m omnino in μ partes tam aequales quam inaequales distribui queat. Quod problema postea pari facilitate solutum exhibebitur.

§. 27. Iste ergo modorum numerus $m^{(\mu)i}$ erit coefficiens potestatis n^m in illa serierum $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, etc. quae a prima α numerata in ordine est tota, quot μ continet vnitates. Huius autem seriei summa est =

$$\frac{n^{\frac{\mu(\mu+1)}{1 \cdot 2}}}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4) \ldots \ldots (1-n^\mu)}$$

ideoque seriei, quae ex hac forma nanscitur terminus generalis est $= m^{(\mu)i} n^m$. Seriei autem quae nascitur ex hac forma

$$\frac{n^{\frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2}}}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4) \ldots \ldots (1-n^\mu)}$$

terminus generalis erit $= m^{(\mu)i} n^{m-\mu}$, seu pro eadem ipsius n potestate erit terminus generalis $= (m+\mu)^{(\mu)i} n^m$. Subtrahatur prior expressio a posteriore, atque residuae expressionis

 a

Productum $(1 + nz)(1 + n^2z)(1 + n^3z)(1 + n^4z)$ etc.
Sit $s = (1 - nz)(1 - n^2z)(1 - n^3z)(1 - n^4z)$ etc.
Intelligitur autem hinc seriem

$$\frac{1}{s} = 1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \text{etc.}$$

oriri, si innumerabiles istae progressiones geometricae in se inuicem multiplicentur.

$$\frac{1}{1-nz} = 1 + nz + n^2z^2 + n^3z^3 + n^4z^4 + \text{etc.}$$
$$\frac{1}{1-n^2z} = 1 + n^2z + n^4z^2 + n^6z^3 + n^8z^4 + \text{etc.}$$
$$\frac{1}{1-n^3z} = 1 + n^3z + n^6z^2 + n^9z^3 + n^{12}z^4 + \text{etc.}$$
$$\frac{1}{1-n^4z} = 1 + n^4z + n^8z^2 + n^{12}z^3 + n^{16}z^4 + \text{etc.}$$
etc.

Posito autem loco z prodit simili modo series

§. 30. Ex ista harum serierum generatione manifestum est esse

I. $\mathfrak{A} = n + n^2 + n^3 + n^4 + \text{etc.}$

quae est progressio geometrica omnes ipsius n potestates complectens singulis per coefficientem unitatem multiplicatas.

II. $\mathfrak{B} = n^3 + n^4 + 2n^5 + 2n^6 + 3n^7 + 3n^8 + 4n^9 + 4n^{10} + \text{etc.}$

in qua coefficiens cuiusque ipsius n potestatis tot continet unitates, quot variis modis exponens ipsius n in duas partes siue aequales siue inaequales partiri potest. Sic potestatis n^8 coefficiens est 4, quia 8 quatuor modis in 2 partes partitur

$$8 = 1 + 7;\quad 8 = 2 + 6;\quad 8 = 3 + 5;\quad 8 = 4 + 4$$

III. $\mathfrak{C} = n^6 + n^7 + 2n^8 + 3n^9 + 4n^{10} + 5n^{11} + 7n^{12} + \text{etc.}$

in qua cuiusque potestatis ipsius n coefficiens continet unitates, quot variis modis exponens ipsius n in tres

R

tres partes siue aequales siue inaequales distribui potest, sic n^9 coëfficientem habet 7, quia 7 modis 9 in tres partes dispertiri se patitur.

$$9 = 1 + 1 + 7; \quad 9 = 2 + 2 + 5$$
$$9 = 1 + 2 + 6; \quad 9 = 2 + 3 + 4$$
$$9 = 1 + 3 + 5; \quad 9 = 3 + 3 + 3$$
$$9 = 1 + 4 + 4;$$

IV. $\mathfrak{D} = n^4 + n^5 + 2n^6 + 3n^7 + 5n^8 + 6n^9 + 9n^{10} +$ etc. vbi cuiusque potestatis ipsius n coëfficiens tot continet vnitates, quot variis modis exponens ipsius n in quatuor partes siue aequales siue inaequales resolui potest. Atque similis est ratio sequentium serierum; quae pro litteris $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, etc. reperiuntur.

§. 31. Harum ergo serierum ope alterum problema, quod simul cum praecedente Vir Cl. Naudaeus mihi proposuit, resolui potest, quot ita se habet.

„Inuenire quot variis modis datus numers m partiri „possit in μ partes tam aequales quam inaequales:

„Siue inueniri quot variis modis datus numerus m „per additionem μ numerorum integrorum siue aequa„lium siue inaequalium produci queat

Quod problema a praecedente eo tantum discrepat, quod in praecedente partitio ad partes tantum inter se inaequales sit restricta, haec autem partes quoque aequales admittat. Ad numerum autem omnium modorum in hoc problemate quaesitum signo exprimendum vtamur hac forma:

$$m^{(\mu)}$$

quae scilicet declaret, quot variis modis numerus m partiri queat in μ partes integras, partium aliquot aequalitate non exclusa: quamobrem in signo supra affixo (μ) ante adnexa littera i, qua inaequalitas partium indicabatur, hic est praetermissa.

§. 32. Solutio ergo huius problematis ad formationem serierum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, etc. reducitur, at supra iam ostendimus (§. 5) quomodo harum litterarum valores ex valoribus litterarum α, β, γ, δ, etc. iam cognitis definiantur. Quanquam autem iste modus est generalis et ex rei natura petitus, tamen non satis dilucide legem, qua hi valores progrediuntur, ob oculos ponit. Quamobrem valores harum litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, etc. via huic casui propria inuestigabo, simili ei, qua supra (§. 21) vsus sum.

Quoniam est

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{(1-nz)(1-n^2z)(1-n^3z)(1-n^4z)\text{etc.}}$$

perspicuum est, si in hac forma loco z scribatur nz, tum prodituram esse hanc formam

$$\frac{1}{(1-n^2z)(1-n^3z)(1-n^4z)(1-n^5z)\text{etc.}}$$

Ad ipsam autem hanc formam prior $\frac{1}{s}$ perducitur, si ea multiplicetur per $1-nz$. Hancobrem cum assumserimus esse

$$\frac{1}{s} = 1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \mathfrak{E}z^5 + \text{etc.}$$

ponamus in hac nz loco z, habebimusque

$$1 + \mathfrak{A}nz + \mathfrak{B}n^2z^2 + \mathfrak{C}n^3z^3 + \mathfrak{D}n^4z^4 + \text{etc.}$$

Iam priorem seriem $\frac{1}{s}$ multiplicemus per $1-nz$

$$\begin{aligned} &1 + \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}z^2 + \mathfrak{C}z^3 + \mathfrak{D}z^4 + \text{etc.} \\ &\quad - nz - \mathfrak{A}nz^2 - \mathfrak{B}nz^3 + \mathfrak{C}nz^4 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Quae forma cum illi esse debeat aequalis, erit

$\mathfrak{A} =$

$$\mathfrak{A} = \frac{n}{1-n} = \frac{n}{1-n}$$
$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}\,n}{1-n^2} = \frac{n^2}{(1-n)(1-n^2)}$$
$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}\,n}{1-n^3} = \frac{n^3}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)}$$
$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{C}\,n}{1-n^4} = \frac{n^4}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)}$$
etc.

§. 33. Hinc igitur noua percipitur relatio inter valores litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. et litterarum α, β, γ, δ, etc. quae eo magis est notatu digna quo minus hi valores a se inuicem discrepant Collato enim (§. 21) intelligitur esse:

$$\alpha = \mathfrak{A}$$
$$\beta = n\,\mathfrak{B}$$
$$\gamma = n^3\,\mathfrak{C}$$
$$\delta = n^6\,\mathfrak{D}$$
$$\varepsilon = n^{10}\,\mathfrak{E}$$
etc.

Manifestum ergo est ratione coëfficientium series $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. omnino cum seriebus α, β, γ, δ, etc. congruere, totumque discrimen in exponentibus ipsius n situm esse. In serie quidem $\mathfrak{A}$, exponentes quoque aequales sunt exponentibus in serie α; at in serie $\mathfrak{B}$ exponentes vnitate deficiunt ab exponentibus seriei β: in serie $\mathfrak{C}$ exponentes ternario deficiunt ab exponentibus seriei γ: et ita porro defectus secundum numeros trigonales progrediuntur.

§. 34. Ex seriebus ergo α, β, γ, δ, etc. quas supra formare docuimus, et quibus prius problema Naudaeanum resoluitur, simul hoc posterius problema a Naudaeo propositum ita resolui potest, vt eius solutio reducatur ad solutionem prioris. Erit nempe

$$m^{(1)} = m^{(1)i}$$
$$m^{(2)} = (m+1)^{(2)i}$$
$$m^{(3)} = (m+3)^{(3)i}$$
$$m^{(4)} = (m+6)^{(4)i}$$

et generaliter

$$m^{(\mu)} = \left(m+\frac{\mu(\mu-1)}{2}\right)^{(\mu)i}$$

et vicissim

$$m^{(\mu)i} = \left(m-\frac{\mu(\mu-1)}{2}\right)^{(\mu)}$$

Quoniam autem porro inuenimus esse:

$$(m+\mu)^{(\mu)i} = m^{(\mu)i} + m^{(\mu-1)i}$$

erit reductione ad casum praesentem facta:

$$\left(m-\frac{\mu(\mu-3)}{2}\right)^{(\mu)} = \left(m-\frac{\mu(\mu-1)}{2}\right)^{(\mu)} + \left(m-\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}\right)^{(\mu-1)}$$

seu commodius

$$m^{(\mu)} = (m-\mu)^{(\mu)} + (m-1)^{(\mu-1)}$$

ex qua proprietate etiam facile series litterarum 𝔄, 𝔅, ℭ, etc. formabuntur, sicque hoc alterum problema resoluetur.

§. 35. Ad exemplum huius problematis quaestionem Vir Clar. affert, vt determinetur, quot variis modis numerus 50 in septem omnino partes siue aequales siue inaequales dispertiri queat. Haec ergo quaestio ad prius problema reducetur, ob $m=50$ et $\mu=7$, si quaeratur quot variis modis numerus $50+21$, seu numerus 71, in septem partes inaequales partiri queat. Vtrumque autem fieri posse 8946 modis diuersis. Praeterea vero hic idem numerus 8946 indicat (§. 28), quot variis modis $71-28=43$ per additionem produci queat ex his numeris 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Atque generaliter numerus modorum $m^{(\mu)}$, quibus numerus m in μ partes siue aequales siue in-

inaequales resoluitur, simul ostendit, quot variis modis numerus $m-\mu$ produci queat per additionem ex his numeris definitis

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ \mu.$$

§. 36. Finem huic dissertationi faciat obseruatio notatu digna, quam quidem rigore geometrico demostrare mihi nondum licuit. Obseruaui scilicet hoc infinitorum factorum productum

$$(1-n)\,(1-n^2)\,(1-n^3)\,(1-n^4)\,(1-n^5)\ \text{etc.}$$

si per multiplicationem actu euoluatur, praebere hanc seriem:

$$1-n-n^2+n^5+n^7-n^{12}-n^{15}+n^{22}+n^{26}-n^{35}-n^{40}+n^{51}+\text{etc.}$$

vbi eae tantum ipsius n potestates occurrunt, quarum exponentes continentur hac forma: $\frac{3xx\pm x}{2}$. At si x sit numerus impar, potestates ipsius n, quae sunt $n^{\frac{3xx\pm x}{2}}$ coëfficientem habent -1; si autem x sit numerus par, tum potestates $n^{\frac{3xx\pm x}{2}}$ coëfficientem habent $+1$.

§. 37. Praeterea notari meretur series huius reciproca, quae oritur ex euolutione huius fractionis

$$\frac{1}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)(1-n^5)\ \text{etc.}}$$

prodibit scilicet ista series recurrens:

$$1+1n+2n^2+3n^3+5n^4+7n^5+11n^6+15n^7+22n^8+\text{etc.}$$

quippe quae per seriem superioem

$$1-n-n^2+n^5+n^7-n^{12}-n^{15}+n^{22}+n^{26}-\text{etc.}$$

multiplicata producit vnitatem. In illa autem serie coëfficiens cuiusque potestatis ipsius n tot continet vnitates, quot variis modis exponens ipsius n in partes dispertiri potest; sic 5 septem modis in partes resolui potest, vti

$5 = 5$ | $5 = 3+2$ | $5 = 2+2+1$
$5 = 4+1$, | $5 = 3+1+1$ | $5 = 2+1+1+1$
$5 = 1+1+1+1+1$

nec numerus scilicet partium hic praescribitur nec inaequalitas.

DE MOTV MIXTO, QVO CORPORA SPHAEROIDICA SVPER PLANO INCLINATO DESCENDVNT.

AVCTORE
DANIELE BERNOULLI.

Excerpt. ex Epistola data ad Georg. Wolffg. Krafft, Basileae d. 15 Aprilis st. n. 1741.

§. 1.

Lemma

Tab. I. Fig. I. Sit A E D F Circulus, cuius centrum B; ducatur Diameter A D et Tangens A G; sit C centrum oscillationis, quod circulo proposito competeret, si suspenderetur ex puncto A. Sit massa totius circuli $= M$, et putetur centrum grauitatis in ipso centro circuli positum: tum concipiatur in A applicata potentia tangentialis expressa per A G; dico huius effectum fore vt sequitur: 1.) Rotatio fiet, non in centro B, sed in puncto C supra definito, quod adeo durante rotatione minima immotum manebit, dum punctum D progredietur versus F, et punctum A versus G. 2.) Deinde punctum A eam velocitatem acquiret a potentia A G, ac si circulus omni massa esset destitutus, et in puncto A massa esset concentrata, quae sit $= \frac{BC}{AC} \times M$. Demonstrationem huius propositionis colligere est ex propositione multo generaliori, quam demonstraui in Dissertatione: *De Motu corporum a percussione excentrica, &c.* §. 10.

§. 2.

§. 2. Sit iam planum inclinatum MP, ducatur verticalis MN, et horizontalis NP; sit circulus AEDF super plano MP, cuius massa rursus $= M =$ BH verticali. Compleatur rectangulum ABLH; puncta B et C eadem sint quae in superiori paragrapho. Resoluatur potentia BH (M) in BA et BL, eritque $BL = \frac{MN}{MP} \times M$. Hic vero iam patet, si omnis frictio abesset, centrumque B iam velocitatem v acquisiuisse, ponatur, fore $dv = \frac{MN}{MP} \times dt$ intelligendo per dt elementum temporis; designetur nunc frictio circuli per AG; haec faciet, vt punctum A retrorsum trahatur versus M; designetur velocitas puncti A ratione huius motus per V, et erit (per Prop. praec.) Fig. 2.

$$dV = \frac{AG \times dt}{\frac{BC}{AC} \times M} = \frac{AG \times AC \times dt}{BC \times M},$$

quia incrementum velocitatis habetur multiplicando potentiam per tempusculum, et diuidendo per massam. Porro cum ratione huius motus punctum C quiescat: erit velocitas centri B ratione motus posterioris $= \frac{BC}{AC} \times V$, et velocitas absoluta centri B, (quae ex vtroque motu composita oritur,) erit $= v - \frac{BC}{AC} \times V$. Sed ex aequatione differentiali $dv = \frac{MN}{MP} \times dt$ sequitur $v = \frac{MN}{MP} \times t$, et ex altera aequatione differentiali, (si modo frictio constanter eadem sit; vti poni solet), fluit $V = \frac{AG \times AC}{BC \times M} \times t$. Est igitur velocitas absoluta centri $B = \left(\frac{MN}{MP} - \frac{AG}{M}\right) \times t$.

§ 3. Atque sic iam recte determinatum puto motum centri: superest vt etiam definiatur motus angularis circa centrum. Vidimus autem frictionem facere $V = \frac{AG \times AC}{BC \times M} \times t$; ab hac velocitate subtrahenda est velocitas centri

centri B, quae pariter a frictione oritur, nempe $\frac{AG}{M} \times t$, eritque residuum $\frac{AC \times AC}{BC \times M} \times t - \frac{AG}{M} \times t$, seu $\frac{AC \times AB}{BC \times M} \times t$, velocitas angularis, qua quoduis peripheriae punctum circa centrum B rotatur versus M, dum ipsum centrum descendit velocitate absoluta $[\frac{MN}{MP} - \frac{AG}{M}] \times t$.

§. 4. Corollarium 1. Ex formulis, quas pro vtriusque motus velocitatibus dedimus, sequitur vtrumque motum vniformiter accelerari, sicut corpora libere cadentia; et erit quidem velocitas angularis puncti in peripheria sumti ad velocitatem absolutam centri, vt $\frac{AC \times AB}{BC \times M}$ ad $\frac{MN}{MP} - \frac{AG}{M}$; siue (ponendo BH loco massae M,) vt $\frac{AC \times AB}{BC \times BH}$ ad $\frac{MN}{MP} - \frac{AG}{BH}$.

§. 5. Coroll. 2. Si frictio horizontalis corporis designetur per m, dum massa corporis M expressa fuit per BH, erit $AG = \frac{NP}{MP} \times m$; hisque valoribus substitutis pro AG et BH, erunt praefatae velocitates in ratione vt $NP \times AB \times m$ ad $MN \times BC \times M - NP \times BC \times m$; ergo rotatio nulla erit, si frictio sit nulla, aut si planum sit verticale.

§. 6. Coroll. 3. In rotatione perfecta, in qua scilicet motus reptorius nullus est, fit velocitas angularis aequalis velocitati absolutae centri, atque adeo oportet in hoc casu vt sit $NP \times AB \times m = MN \times BC \times M - NP \times BC \times m$, siue $NP \times AC \times m = MN \times BC \times M$, seu $m = \frac{MN \times BC}{NP \times AC} \times M$. Igitur, posita frictione horizontali $= \frac{MN \times BC}{MP \times AC} \times M$, corpus perfecte rotabitur; et si fuerit praefata frictio maior quam $\frac{MN \times BC}{NP \times AC} \times M$, corpus adhucdum perfecte rotabitur, nec aliter mouebitur, quam si huic quantitati frictio esset aequalis, quod probe notandum est in aequationibus quas de-

dedimus pro vtraque velocitate; hae ſcilicet aequationes non valent niſi cum frictio horizontalis eſt aut aequalis, aut minor, quantitate $\frac{MN \times BC}{NP \times AC} \times M$. Solutio huius paradoxi ex eo eſt petenda, quod frictio nulla fingi poteſt, vbi nullus eſt motus reptorius; et motus reptorius demum adeſſe incipit vbi frictio horizontalis incipit eſſe minor quantitate $\frac{MN \times BC}{NP \times AC} \times M$.

§. 7. Ecce iam phaenomena omnia, quae ad experimenta reuocari poſſunt facile, et quae, vt inſtituas, rogo. Inquiratur primo frictio horizontalis accurate, quantum fieri poteſt; fiat ſtatim inclinatio plani valde parua, et obſeruabitur corpus perfecte rotari; deinde ſenſim magis inclinetur planum, et adhucdum corpus perfecte rotari obſeruabitur, resque perinde ſe habebit, donec fiat $m = \frac{MN \times BC}{NP \times AC} \times M$, aut donec fiat $\frac{MN}{NP} = \frac{AC}{BC} \times \frac{m}{M}$, qui erit vltimus perfectae rotationis limes, quique probe ad experimenta erit reuocandus, vt appareat, an cum theoria conueniat. Haec dum ita ſunt, frictio nihil de Vi viua demit, et motus plane eodem modo fiet ac ſi planum eſſet perfecte politum pariter atque ſuperficies corporis, haec vero filum haberet circumuolutum ordine literarum E, D, F, A, cuius extremitas plano ſit affixa, quem motum Pater meus definiuit in *Commentarior. Tomo II. pag.* 203.

§. 8. Iam vero magis eleuari planum ponamus, ita vt nunc ſit $\frac{MN}{NP}$ maior quam $\frac{AC}{BC} \times \frac{m}{M}$; dico motum fore compoſitum ex reptorio et rotatorio, et vtrumque recte per aequationes noſtras definitum eſſe puto. Hac de re experimenta hunc in modum inſtitui poterunt. Fuerit MP aequalis peripheriae circuli, et tangat ab initio circulus planum in puncto M, sitque aliquod obstaculum, quod circulum in situ suo retineat, quum iam tangit punctum P. Notentur probe in peripheria circuli puncta contactus cum punctis M et P; puta haec puncta posita in E et Q; sic patet fore arcum EAFQ mensuram motus rotatorii, peripheriam integram vero mensuram motus centri B, quando quidem vi formularum nostrarum hi duo motus perpetuo eandem inter se rationem seruant. Si autem theoria nostra recte se habet, oportet vt sit arcus EAFQ ad peripheriam circuli vt $NP \times AB \times m$ ad $NN \times BC \times M - NP \times BC \times m$. Hoc solo experimento conficientur omnia. Si vero circulus semper perfecte rotaretur, oporteret vt arcus EAFQ semper totam peripheriam exhauriret, quod certissime non erit. Equidem non crediderim experimenta accuratissime theoriam confirmatum iri, ob multas rationes, quas breuitatis causa taceo: consensum tamen non mediocrem expecto.

§. 9. Monui supra, nihil de Vi viua perdi, quamdiu corpus perfecte rotetur: at vero, cum motus mixtus est, aliquid de Vi viua perit, quia scilicet frictio tunc nonsolum *potentialiter*, sed et *actualiter*, adest. Id interim paradoxum prima fronte apparet, quod fieri possit, vt aucta frictione nihil de Vi viua pereat, dum aliquid perit manente frictione.

§. 10. Potest corporibus sphaeroidicis, quae considerauimus, substitui corpus quodcunque; modo pars illa corporis, quae plano est contigua, cylindrica sit, vt sic motus vniformis fiat. Centrum tamen grauitatis totius corporis semper esse debet in axe cylindri super plano descen-

descendentis, atque punctum C semper significabit centrum oscillationis corporis ex puncto A suspensi.

§. 11. Descendamus nunc ad exempla quaedam particulariora. 1. Si pro corpore sumatur superficies cylindrica, fiat BC = radio AB, eritque velocitas rotatoria, ad velocitatem absolutam centri, vt $NP \times m$ ad $MN \times M - NP \times m$, neque prius motum descendendo acquiret reptorium, quam $\frac{MN}{NP}$ fuerit maior quantitate $\frac{2m}{M}$. 2. Si sumatur corpus cylindricum, fiet BC = dimidio radio AB; tumque erit velocitas, qua punctum in supeficie circa axem rotatur, ad velocitatem qua axis descendit, vt $2NP \times m$ ad $MN \times M - NPm$, iamque motus reptorius aderit, cum fit $\frac{MN}{NP}$ maior quantitate $\frac{3m}{M}$; igitur difficilius motum reptorium acquirit, ceteris paribus, corpus cylindricum, quam cortex cylindricus. 3. Si accipiatur corpus sphaericum, fit $BC = \frac{2}{5} AB$, eruntque praefatae velocitates in ratione $5NP \times m$ ad $2MN \times M - 2NP \times m$, requiriturque ad motum reptorium vt fit $\frac{MN}{NP}$ maior quantitate $\frac{7m}{2M}$. Notari etiam potest, quodsi BC sit admodum parua, quod fit cum materia corporis non est homogenea, sed fere tota circa axem concentrata, corpus difficillime motum reptorium acquirat, ita vt planum fere in situm verticalem eleuari possit, priusquam id fiat.

ADDITAMENTVM DISSERTATIONIS PRAECEDENTIS,

DE CORPORVM PLANO IMPOSITORVM DESCENSV:

AVCTORE
G. W. Krafft.

§. 1.

Vt haec Theoria conuolutionis corporum ſuper plano inclinato rectius intelligatur, et vlterius luce perfundatur ſua: operae praetium omnino erit ad haec ſequentia attendere, quorum mentio in praecedentibus aut plane nulla, aut minus diſtincta, facta eſt. Primo omni cura diſcernenda eſt Rotatio, corporis alicuius deſcendentis in plano inclinato, *Continua*, ab illa, quam *Inchoatam* tantum dico. Illa adeſt, ſi durante toto corporis deſcenſu ſemper diuerſa puncta corporis cum plano congruunt; adeoque obtinet, et corpus vertit, quamdiu hoc deſcendit: haec vero datur, cum corpus in primo motus ſui initio rotatorium motum inchoat quidem, at continuare eum nequit, ob impedimentum aliquod obortum, vnde accidit, vt corpus tale prolabatur tantum, et reliquum poſtea viae motu reptorio abſoluat; quae poſterior Rotatio inchoata *Simplex procidentia* corporis vocari poteſt. Veluti ſi ex. gr. plano inclinato ABD ſemicirculus FLH ſitu valde obliquo inſiſtat, vt ex centro grauitatis C perpendicularis CE, demiſſa in planum DB, cadat extra F verſus B; patet ex diſſertationis meae praecedentis §. 8. futurum eſſe, vt ſemicirculus

Tab. I. Fig. 3.

ita

ita positus rotetur; at haec rotatio non erit continua, sed inchoata tantum, aut vero simplex procidentia, qua absoluta idem semicirculus acquiret situm FNM, ex cuius natura deinde denuo iudicandum erit per leges indicatas, an rotando, vel rependo, reliquum viae sit absoluturus.

§. 2. Secundo, si rotatio fuerit continua: erit ea iterum pro varia plani inclinatione, et diuersa corporis natura, vel rotatio *perfecta* vel tantum *mixta*. Illa est, quando durante toto descensu, post singula momenta temporis, nouo elemento plani nouum elementum corporis descendentis contiguum fit; haec vero, quando contrarium accidit. Igitur in omni rotatione corporis peripheria circulari dotati, duplex adest motus, *Progressiuus* vnus, quo centrum iuxta directionem plani descendit; alter *Rotatorius*, siue *Angularis*, quo quodlibet peripheriae punctum circa centrum fertur. Sin itaque accidat, vt motus progressiuus sit aequalis angulari: tum rotatio est perfecta; si vero progressiuus sit maior: tunc adest motus rotatorius *retardatus*; si progressiuus sit minor: existit motus rotatorius *acceleratus*; quorum duorum posteriorum vterque est rotatorius mixtus.

§. 3. Attendit ad hoc rotationis discrimen Celeber. *Bernoullius*, in praecedentis Dissertationis suae §. 6. deditque regulas, ex theoria ibidem stabilita deductas, quarum ope vnum rotationis casum ab altero distinguere licet a priori quam facillime. Cum quibus plane consentiunt, quae Celeberr. *Eulerus* mecum de hac re communicauit, cuius verba huc redeunt: „Motus cylindri ABD Fig. 4.
„ex materia homogenea confecti, super plano inclinato

„FH erit quidem rotatorius, verum tamen plerumque „mixtus ex repente motu et rotante; donec ſi planum „FH fiat verticale, motus rotatorius omnino euaneſcat; „atque cylindrus ſolo motu reptorio deſcendat. Fieri ta„men poteſt, vt motus cylindri ſit rotatorius tantum, „motusque reptorius prorſus euaneſcat; id quod diiudicabi„tur ex hac regula: Sit frictio horizontalis ſuper plano „FH = ponderi f, ſit porro pondus cylindri proprium „$= p$; dico, ſi fuerit $\frac{FG}{GH} > \frac{3f}{p}$, rotationem cylindri fore „perfectam, motumque ab omni reptione liberum. Sin „autem loco cylindri quaeſtio formetur de globo, tum „globi motus perfecte erit rotatorius, ſi fuerit $\frac{FG}{GH} < \frac{7f}{2p}$. Qui valores ſtatim ex *Bernoullianis* fluunt, ſi conſideretur, poſito puncto ſuſpenſionis in A, et centro oſcillationis in E, eſſe in circulo, ſeu cylindro, $AE = \frac{3}{2} AC$; in ſphaera autem eſſe idem $AE = \frac{7}{5} AC$.

§. 4. Experimentis itaque limitem hunc rotationis perfectae, et mixtae, explorare ſtudui, et quantum haec perficere potui, inueni conſenſum cum natura optimum; ſed dolui me tum temporis experimenta eouſque extendere non potuiſſe, vt motum mixtum prodire cernerem. Die enim 9 Iunii huius anni 1741, ad vſum vocaui aſſerem abietinum, optime dedolatum, 9 pedes longum, quem ſucceſſiue ad varias altitudines eleuaui, vt totidem planorum inclinatorum vices ſubiret. Huic impoſui diſcum pariter abietinum, cuius peripheria erat exacte 22 poll. Londinenſ. craſſities $1\frac{1}{18}$ poll. pondus proprium 5343 gran. quorum 7680 efficiunt libram Amſtelodamenſem. Frictio horizontalis, in loco aliquo ſcabritiei mediae, 1833 gran. Tum in plano inclinato dimen-

dimensus sum longitudinem periphaeriae disci triplam, hoc est 66. poll. vt eo exactius perspicere possim an punctum in disco notatum metam, linea transuersa signatam, egrederetur, vel accurate attingeret, vel secus faceret. Ab eleuatione igitur plani 3° vsque ad 21° summa cura nihil aliud animaduertere potui, quam punctum in disco notatum, et superiori prius lineae transuersae plani inclinati impositum, post tres circumuolutiones peractas, et absolutum spatium 66 poll. praecise adhuc inferiori lineae transuersae insedisse, atque sic in omnibus his inclinationibus plani motu rotatorio perfecto descendisse. Cum vero in maioribus inclinationibus tentare idem cuperem, parem succesum obtinere non potui, ob celeritatem disci descendentis nimis magnam, et incursum in obstaculum oppositum nimis violentum, quo factum est, vt discus semper resiliret, obseruationesque turbaret, cui malo remedium afferre non potui. Calculo deinde facto, ad quamnam altitudinem eleuandum esset hoc planum, vt motus mixtus incipiat sensibilis reddi: inueni eam 48 poll. siue 4 pedibus, minorem esse non posse, et consequenter angulum inclinationis requiri circiter 50 graduum, in quo, ob nimium disci descendentis impetum, exacte nihil definiri potuisset. Sed cum primi hi euentus Theoriam perfecte confirment: fateor, de reliquis me ita certum esse, vt de experimento, et machina, emendandis vix sim sollicitus.

§. 5. Cum itaque in motu rotatorio perfecto punctum peripheriae circularis quodlibet describat Cycloidem ordinariam, describet tale punctum in motu mixto *Cycloidem protractam*, cuius aequatio sequenti modo eruitur.

Pono

Fig. 5. Pono semicirculum ABD progredi voluendo aequabiliter motu mixto; atque sic punctum A describere Cycloidem protractam AMc, dum descripsisset Cycloidem ordinariam ANC, si motu rotatorio perfecto moueretur. Quia igitur punctum A promouetur per Cc (a) quo tempore percurrit arcum ANC (2), posita diametro $AD = 1$, promouebitur per NM ($a\sqrt{x}$), quo tempore percurrit arcum AN; ponendo $AP = x$, et $PM = y$. Erit igitur, ex natura Cycloidis ordinariae, $y - NM - PB = BN$ = arcui circulari AB, vnde oritur aequatio ad Cycloidem protractam AMc, haec $dy = \frac{(a + 2\sqrt{1-x})dx}{2\sqrt{x}}$.

§. 6. Sequitur denique, ex formulis in Dissertationis meae §. 8. allegatis, Rotationem nullam esse, et consequenter Reptionem obtinere, si aut frictio sit nulla, aut planum fiat verticale. Nam si frictio sit nulla, aderit reptio, quia $0 < \frac{EF}{CE} \times P$, nisi EF simul sit negatiua quo casu simplex procidentia locum habet, et post hanc factam reliquus motus denuo his regulis examinari debet, qualis sit futurus. Si vero planum sit verticale: facile patet, corpus iuxta illud delabens nulla frictione affici, sed celeritate vniformiter accelerata, et naturali, descendere, sine vllo frictionis impedimento; quare hic casus cum priori coincidit.

DE

DE VIBRATIONIBVS ET SONO LAMINARVM ELASTICARVM

Commentationes Physico - Geometricae.

A. DANIELE BERNOVLLI.

I. De Vibrationibus.

§. 1.

Tot cuiuis quotidie occurrunt oscillationum quas hic examinare constitui, exempla, vt fere mirari possimus, neminem adhuc ansam inde arripuisse vt Galileus quondam ab lampade suspensa oscillationes pendulorum, illud argumenti genus secundum leges mechanicas disquirendi, praesertim cum iam eousque mechanica sublimior prouecta sit, vt pauca tentare non audeat. Equidem anni sunt complures, quo id negotii in me suscepi optatissimoque successu absolui inuentorumque summam Cel. Eulero duobus indicaui verbis; verum non licuit tunc singula in ordinem redigere atque cum Academia communicare, nolui tamen id vlterius differre, spe fretus pristinas hasce lucubrationes meas nec Academiae ingratas nec publico plane inutiles fore.

§. 2. Argumentum nostrum multis quaestionibus fertilissimum est non inelegantibus; quia vero vna eademque methodus omnibus sufficit, non puto singulas esse pertractandas; problematum nimia extensio (quam multi tantopere amant) plerumque argumenti elegantiae non parum derogat, nec rei ipsi quicquam ponderis addit,

 quin

quin saepius nescio quid ridiculi inspergit; nemo igitur vitio vertat, cum laminas tantum considerabo naturaliter rectas easque per totam suam longitudinem vniformiter crassas atque elasticas. Eadem ratione inductus nolui rationem habere virium acceleratricium, quae a partium grauitate oriuntur, quam prae vi elasticitatis veluti infinite paruam hic censemus; hunc in finem laminas considerabo horizontaliter positas solaque elasticitate sua vibratas: hypotheses hasce calculi facilitandi causa vnice instituam, nec enim methodus in quaestionibus magis intricatis deficeret.

Tab. II. Fig. 1. §. 3. Sit igitur murus verticalis AC cui perpendiculariter infixa putetur lamina elastica recta BD, tota sua longitudine plane vniformis: ponatur lamina oscilationes perficere minimas atque oscillando assumere figuram BE; erit nobis ante omnia ista figura determinanda: hunc in finem notabimus statim, laminam inter oscillandum in omni situ similem curuaturam affectare, quia distantiae singulorum punctorum ab axe BD eam quam semel inter se habent rationem perpetuo seruant, quod iam diu de oscillationibus vniformibus demonstratum fuit: vnde consequens est, curuaturam laminae in quouis situ innotescere, cum est in situ vnico determinata: considerabimus igitur situm laminae extremum, ceu in quo ad temporis punctum quiescit. Sit itaque BGE situs laminae extremus: efficiet tunc laminae elasticitas, vt quodvis elementum Gg sollicitetur versus BD, et ita quidem vt vis accelerans sit proportionalis elementi Gg distantiae a linea BD, sicut isochronimus postulat: hinc sequitur, si singula elementa Gg in partem contrariam trahantur

hantur eadem vi, qua versus BD sollicitantur, sic fore, vt lamina in statu curuaturae BGE sit perseueratura: hinc apparet curuam BGE nouam constituere elasticae speciem, quae nempe oritur, cum cuiuis puncto G potentia applicatur extrorsum trahens, quae distantiae eiusdem puncti ab axe sit proportionalis: sufficit haec consideratio ad genus curuae determinandum: quia vero ad institutum nostrum omnia *specifice* determinare oportet, hae quoque potentiae recte erunt determinandae. Sit vis grauitatis $=g$: vis, quae singula puncta elementi vltimi in E extrorsum trahit, $=G$, poteritque curuatura BGE determinari vt sequitur.

§. 4. Sint puncta G, g, I, i et E in situ laminae incuruatae eadem quae puncta F, f, H, h, D in situ laminae rectae ducanturque rectae minimae FG, fg, HI, hi et DE, quae singulae poterunt censeri ad axem BD perpendiculares; ponanturque puncta F et f infinite propinqua, sitque $Df = x$; $fF = dx$, sitque elementum dx constantis vbique magnitudinis; ponantur insuper rectae hi et HI transire per centra grauitatis spatiorum $EDfg$ et EDFG, tumque ponatur $Dh = \xi$ et $hH = d\xi$: Denique fiat $ED = c$; $gf = y$; $GF = y - dy$. His ita positis, erit potentia elementum Gg extrorsum trahens $= \frac{y}{c} \times G \times dx$ et potentiae omnes arcui EG applicatae erunt $= \frac{G}{c}\int y\,dx$ atque sic proportionales spatio EDFG: istas vero potentias considerare licet tanquam vnitas in puncto I, cum quaestio est de determinanda curuatura in puncto G seu inclinatione duorum elementorum contiguorum: hanc curuaturam exprimemus per angulum contactus, qui ob paruitatem infinitam applicatae y poni potest simpliciter $= \frac{ddy}{dx}$; atque iste angulus contactus faciendus est secundum hypothesin communem proportionalis momento potentiarum omnium arcui GE applicatarum, id est summae potentiarum ($\frac{G}{c}\int y dx$) multiplicatae per GI seu FH$(x-\xi)$ tanquam per vectem. Inde oritur sequens aequatio:

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{dx}{m^4} \times (x-\xi) \times \frac{G}{c} \int y dx,$$

vbi per $\frac{dx}{m^4}$ intelligitur quantitas constans, quae vtrumque aequationis membrum homogeneum reddit, et quae a virtute elastica pendet: docebimus autem in sequentibus, quemadmodum quantitas m^4 pro quauis lamina facili experimento explorari atque determinari possit, in qua disquisitione non minimum rei momentum positum est, quia alias numerus verus vibrationum dato tempori respondens definiri nequit. Nunc vero vlterius pergimus. Differentietur itaque praemissa aequatio et erit

$$\frac{m^4 d^3y}{dx^2} = \frac{G dx}{c} \int y dx + \frac{G}{c} xy dx - \frac{G d\xi}{c} \int y dx - \frac{G}{c} \xi y dx.$$

Superest vt variabiles incognitas ξ et $d\xi$ ex ista aequatione eliminemus: hunc in finem notabimus, quod in mechanicis demonstratum est, esse spatiolum HFfg multiplicatum per FH aequale spatio GFDE multiplicato per Hb, id est, $ydx \times (x-\xi) = d\xi \int y dx$, vnde sequitur

$$\frac{G}{c} xydx - \frac{G}{c} \xi y dx - \frac{G d\xi}{c} \int y dx = 0;$$

possunt itaque in priori aequatione tres vltimi termini deleri, hocque facto oritur $\frac{m^4 d^3y}{dx^2} = \frac{G dx}{c} \int y dx$, quae iterum differentiata tandem dat vltimam aequationem desideratam, nempe $d^4y = \frac{G}{m^4 c} y dx^4$.

§. 5. Priusquam ostendam, quomodo haec aequatio pertractanda et ad institutum nostrum applicanda sit, indicabo viam, qua iamiam longitudo penduli simplicis iso-

isochroni cum vibrationibus laminae inueniri possit. Est nimium potentia elemento Gg applicata $= \frac{y}{c} \times G\,dx$, pondusculum autem eiusdem elementi est $= g\,dx$: si iam fingatur subito euanescere omnes potentias laminam extrorsum trahentes, erit vtique vis elementum Gg in situm Ff restituens $= \frac{y}{c} \times G\,dx$, quae si diuidatur per pondusculum, seu massulam elementi, id est, per $g\,dx$, habebitur vis accelerans huius elementi, quae proinde erit $= \frac{Gy}{gc}$: vnde si longitudo quaesita penduli isochroni simplicis dicatur L, ponaturque huius penduli distantia a linea verticali pariter $= GF = y$, oportet vt vtrobique vires accelerantes sint inter se aequales: est autem tunc vis pendulum simplex accelerans $= \frac{y}{L}$: ergo habetur $\frac{Gy}{gc} = \frac{y}{L}$, seu $L = \frac{gc}{G}$.

§. 6. Haec iam sufficerent ad plures proprietates, quibus oscillationes istae gaudent, determinandas, verum omnia erui nequeunt, nisi prius aequatio pro curua ad quantitates finitas fuerit reducta, simulque vis elasticitatis *absoluta* experimento fuerit explorata: In hoc momentum rei totum positum est: Incipiam ab aequationis, quae quidem quarti ordinis est, reductione ad quantitates finitas: nec enim potest aequatio nostra generalissima ad quosuis casus particulares applicari, nisi cognitis prius quantitatibus constantibus, quae post quamuis integrationem adiiciuntur: praeuia igitur aequationis reductione ad quantitates finitas omnino opus est. Duplex autem mihi modus est hancce istituendi reductionem: alter per series, quem ob calculi commoditatem fere praefero, alter pure geometricus, qui in integratione absoluta consistit. Reductionem hanc pofteriorem nequidem tentaturus fuiſſem, niſi prius a perſpicaciſſimo Eulero intellexiſſem, quod eam in poteſtate habeat. Modum vtrumque apponam, cum vterque ſua ſecum ferat commoda.

§. 7. Ponatur breuitatis ergo $\frac{G}{m^4 c} = \frac{1}{f^4}$, isque valor ſubſtituatur in aequatione $d^4 y = \frac{G y d x^4}{m^4 c}$; ſic erit $d^4 y = \frac{y d x^4}{f^4}$: Dico autem, ſi in *abſtracto* aequatio iſta conſideretur, fore

$$y = \begin{cases} \alpha\left(1 + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4 f^4} + \frac{x^8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 f^8} + \text{etc.}\right) \\ + \beta\left(\frac{x}{f} + \frac{x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot f^5} + \frac{x^9}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9 f^9} + \text{etc.}\right. \\ + \gamma\left(\frac{xx}{ff} + \frac{x^6}{3\cdot4\cdot5\cdot6 f^6} + \frac{x^{10}}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10 f^{10}} + \text{etc.}\right) \\ + \delta\left(\frac{x^3}{f^3} + \frac{x^7}{4\cdot5\cdot6\cdot7 f^7} + \frac{x^{11}}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11 f^{11}} + \text{etc.}\right) \end{cases}$$

vbi per α, β, γ, δ quatuor intelliguntur conſtantes arbitrariae, quarum ope aequatio generaliſſima, cuiuis caſui propoſito accommodari poteſt, vt et cuiuis oſcillationum generi; poſſunt enim oſcillationes varii generis inſtitui: Nunc autem applicabimus aequationem hoc modo integratam ad oſcillationes ſimpliciſſimas, quas ipſa figura prima repraeſentat, idque ſequentem in modum.

Ex natura problematis et ex methodo §. 4. expoſita ſequitur, quod poſita Df ſeu $x = 0$, ſit $\frac{ddy}{dx} = 0$, ſimulque $\frac{d^3 y}{d x^3} = 0$, quia quantitas $\frac{d^3 y}{d x^3}$ proportionalis eſt ſpatio $EGFD$; vnde iam concludo, faciendam eſſe $\gamma = 0$ et $\delta = 0$: praeterea poſita $x = 0$, fit $y = DE = c$ et conſequenter $\alpha = c$: ſubſtitutis itaque in aequatione generali praedictis valoribus pro γ, δ et α, habebimus iam talem aequationem

$y =$

$$y = \begin{cases} c\left(1 + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4 f^4} + \frac{x^8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 f^8} + \text{etc.}\right) \\ + \mathfrak{C}\left(\frac{x}{f} + \frac{x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5 f^5} + \frac{x^9}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9 f^9} + \text{etc.}\right)\end{cases}$$

in qua ſupereſt determinandus valor conſtantis quantitatis $\mathfrak{C}$: hunc in finem notabimus, quod facta $x = DB = l$, fiat $y = 0$, ex quo ſequitur.

$$\mathfrak{C} = -c\times\left(1 + \frac{l^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4 f^4} + \frac{l^8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 f^8} + \text{etc.}\right) :$$
$$\left(\frac{l}{f} + \frac{l^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5 f^5} + \frac{l^9}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9 f^9} + \text{etc.}\right)$$

Denique faciendum eſt, vt ipſa quoque quantitas f eliminetur: id vero efficitur eo, quod poſita rurſus $x = DB = l$, fit $dy = 0$; hinc ſcilicet fit

$$\mathfrak{C} = -c\times\left(\frac{l^3}{1\cdot2\cdot3 f^3} + \frac{l^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7 f^7} + \text{etc.}\right) :$$
$$\left(1 + \frac{l^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4 f^4} + \frac{l^8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 f^8} + \text{etc.}\right)$$

Quod ſi itaque ambae aequationes inter ſe comparentur, noua inde orietur, cuius ope littera f determinari poterit per methodum conſuetam approximationum; erit nimirum

$$\left(1 + \frac{l^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4 f^4} + \frac{l^8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 f^8} + \text{etc.}\right) :$$
$$\left(1 + \frac{l^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5 f^4} + \frac{l^8}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9 f^8} + \text{etc.}\right) =$$
$$\left(\frac{l^4}{2\cdot3 f^4} + \frac{l^8}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7 f^8} + \frac{l^{12}}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11 f^{12}} + \text{etc.}\right) :$$
$$\left(1 + \frac{l^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4 f^4} + \frac{l^8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 f^8} + \text{etc.}\right),$$

ſiue proxime $1 - \frac{l^4}{12 f^4} + \frac{l^8}{5040 f^8} = 0$ aut rurſus proxime $f^4 = \frac{4}{49} l^4$ atque adeo $f = l\sqrt{\frac{2}{7}}$. Sic igitur omnes quantitates arbitrariae iam ſunt determinatae ſimulque curua omni qua lubet accuratione deſcripta. Progrediamur nunc ad longitudinem penduli iſochroni determinandam, qui ſcopus noſter eſt praecipuus.

§. 8

§. 8. Indicauimus in fine paragraphi quinti esse longitudinem penduli simplicis isochroni $= \frac{gc}{G}$: posuimus autem ab initio paragraphi septimi breuitatis ergo $\frac{G}{m^4 c} = \frac{1}{f^4}$; est igitur praefata longitudo $\frac{gc}{G} = \frac{gf^4}{m^4} =$ (substituto pro f^4 valore in fine superioris paragraphi inuento) $\frac{4\, l^4\, g}{49\, m^4}$, quae proinde quantitas exprimit quaesitam penduli longitudinem: quantitas autem m^4 definienda est ab elasticitate laminae, quae proinde experimento praeuio exploranda est, istudque negotium hunc in modum expediri poterit.

§. 9. Laminam BD, cuius vibrationes sunt determinandae, verticaliter infixi lacunari horizontali, ne scilicet lamina proprio se incuruaret pondere; Extremitati pondus P appendi, vt ostendit figura secunda, quod mediante trochlea R et funiculo ERP laminam horizontaliter tendens eandem incuruabat in situm BGE: tumque distantiae DE mensuram exacte accipiebam; hanc distantiam, quae experimento cognosci potest, vocabo C. Reliquae experimenti hypotheses figuraeque denominationes analogae sunt cum iis, quibus in figura prima vsi sumus, praesertim respectu paruitatis veluti infinitae applicatarum FG. Si vero mutatis mutandis idem hic fiat raciocinium, quod §. 4 fecimus, pro curuatura laminae determinanda, reperietur, quod nemini difficile erit, talis aequatio ad curuam

$$\frac{ddy}{dx} = P \times x \times \frac{dx}{m^4}$$

in qua, vt supra §. 4, denotat $\frac{ddy}{dx}$ angulum contactus in G; et P est potentia, quae hic tota puncto extremo E applicata est: x denotat abscissam Df, quae ratione

puncti

puncti g vectis est ac denique $\frac{dx}{m^4}$ est constans, quae eadem est vt §. 4, quia in vtroque problemate de vna eademque lamina sermo est: ista vero aequatio, si cum additione debitarum constantium integretur facit.

$$y = C - \frac{Pllx}{2m^4} + \frac{Px^3}{6m^4}$$

Constantes addendae reperiuntur ex eo quod posita $x = D B = l$ fiat $dy = 0$, tum quod facta $x = 0$ sit $y = D E = C$. Videmus autem praeterea quod facta $x = l$ sit $y = 0$ atque adeo $C - \frac{Pl^3}{3m^4} = 0$ siue

$$m^4 = \frac{Pl^3}{3C}.$$

Atque sic iam attigimus scopum nostrum, qui fuit experimento explorare, valorem substituendum quo quantitate m^4 in formula $\frac{4l^4g}{49m^4}$ quaesitam penduli longitudinem exprimente, quae adeoque longitudo iam fit $= \frac{12glC}{49P}$; exprimit autem gl pondus totius laminae DB, quod proinde si indicetur littera p et dicatur longitudo quaesita penduli cum vibrationibus laminae isochroni L, erit tandem

$$L = \frac{12p}{49P}C.$$

§. 10. Priusquam inuentorum vsum faciam, paucis indicabo verbis methodum alteram, quam habeo, aequationem differentialem quarti ordinis (§. 4.) $d^4y = \frac{C}{m^4c}y\,dx^4$ siue abbreuiatam $d^4y = \frac{y\,dx^4}{f^4}$ pertractandi problematisque nostris applicandi. Sit igitur e numerus cuius logarithmus hyperbolicus est vnitas, sintque a, b, b et n quantitates constantes arbitrariae, dico praefatae aequationi $d^4y = \frac{y\,dx^4}{f^4}$ conuenire eamque plenissime exhaurire hanc, quae puris quantitatibus finitis expressa est, nempe

$$y = a\, e^{\frac{x}{f}} + b\, e^{\frac{-x}{f}} + \mathfrak{b}\ \mathit{Sin.\ Arc.}\left(\tfrac{x}{f} + n\right)$$

in qua *Sin. Arc.* $(\frac{x}{f} + n)$ indicat ſinum arcus $(\frac{x}{f}+n)$ in circulo, cuius radius ponitur aequalis vnitati; Huiusmodi aequationum methodum generalem alibi expoſui nullusque dubito quin etiam ſuam cum publico communicauerit Cel. Eulerus. Iam vero ſi rurſus conditionibus §. 7. ſatisfiat, reperientur re recte pertractata ſequentes valores pro arbitrariis conſtantibus aſſumtis a, b, $\mathfrak{b}$, et n, ſcilicet

$a = \frac{c}{2 + 2e^{l:f}}$ atque $b = \frac{e^{l:f}c}{2 + 2e^{l:f}}$, tum

$\mathfrak{b} = \frac{c\sqrt{(2+2e^{2l:f})}}{2 + 2e^{l:f}}$ ac denique $n = \mathit{Arc.Sin.} \frac{1 + e^{l:f}}{\sqrt{(2 + 2e^{2l:f})}}$

valor autem quantitatis f reperietur, ſi ſatisfiat huic aequationi

$$\frac{l}{f} = 2\ \mathit{Arc.\ Sin.} \frac{1 + e^{l:f}}{\sqrt{(2 + 2e^{2l:f})}}$$

ad cuius aequationis radicem proxime inueniendam methodus adhiberi poteſt, quam tradidi in Comment. Tom. II. pag. 333. reperietur autem (vt §. 7.) $f = 0,535\ l = l\sqrt{\tfrac{2}{7}}$ proxime. Reliqua ſe habent, vt ſupra §. §. 8 et 9. indicatum fuit, rurſusque inuenitur $L = \frac{12\,p}{49\,P} \times C$ proxime.

§. 11. Poſtquam ſic duplici methodo longitudinem penduli ſimplicis cum vibrationibus laminae iſochroni inueniſſem in numeris magnitudinibusque facili experimento eruendis, volui etiam inuenta mea ad experimenta reuocare, quae ſingula ſucceſſum habuere calculis, et theore-

theorematis nostris conformem; vsus autem sum tignis teretibus, structurae et crassitiei vniformis atque praelongis, in quibus oscillationum numerum in dato tempore cognoscere poteram.

§. 12. Notabilem habent proprietatem oscillationes laminarum sola longitudine a se inuicem differentium, nempe quod earum numerus in dato tempore sit in ratione reciproca duplicata laminae longitudinis: id apparet ex formula §. 8. $\frac{gf^4}{m^4}$, quae longitudinem penduli isochroni exhibet: quia enim g constans est vt et quantitas m^4, quando nempe laminae sola longitudine differunt, sequitur longitudinem penduli isochroni se habere vt f^4; est autem f semper proportionalis longitudini laminae l (per aequationem vltimam §. 10.); igitur longitudo penduli isochroni est in ratione biquadrata longitudinis l et numerus oscillationum laminae in ratione reciproca duplicata eiusdem longitudinis: aliter itaque se habent huiusmodi oscillationes quam in chordis tensis sola longitudine diuersis: in his enim longitudines pendulorum isochronorum sunt in ratione quadrata longitudinum chordarum et numerus vibrationum sequitur rationem reciprocam chordae longitudinis.

II. *De sono laminarum vibratarum.*

§. 13. Nemo adhuc, quantum scio, de sono quem laminae elasticae descripto modo vibratae edunt diserte sermonem fecit aut saltem aliquas dedit obseruationes, cuiusmodi plurimae datae fuerunt circa sonos chordarum musicarum tensarum, priusquam perfecta earum theoria a Cel. Taylero, Patre meo aliisque inuenta fuit: scilicet ante hanc theoriam calculo analytico erutam ex obseruationibus iam constiterat, numerum vibrationum in chordis tensis infra datum tempus esse in ratione composita 1°. ex reciproca longitudinis chordae 2do. ex reciproca ponderis chordae et 3° ex ratione directa subduplicata ponderis chordam tendentis: numerum ipsum vero ex his datis absolute definire, id soli theoriae sublimi relictum fuit, quamuis multis artificiis a longo tempore vsi fuerint, vt id quoque experimentis inuenirent et quidem successu tali, vt non multum admodum a vero aberrauerint. Tandem vero eo prouecta res fuit, vt cognitis pondere chordae, pondere chordam tendente et longitudine chordae verus vibrationum numerus pro dato tempore indicari posset, atque sic edocti sumus, cum praesita cognita ita fuerunt temperata vt a chorda vibrata sonus choralis infimo C designatus ederetur, tunc chorda intra minutum secundum 116 vibrationes faciat, vnde iam numerus vibrationum pro reliquis sonis omnibus innotescit. Haec quae de chordis vibratis inuenta sunt, iam etiam pro laminis elasticis eruimus, vtut indoles earum demum circumscribatur, differentialibus quarti ordinis. Id vero nunc vberius explicabo.

§. 14. Dixi laminas quantacunque elasticitate praeditas longitudine tantas accipi posse, vt cum vibrantur, earum itus reditusque distincte percipere atque numerare liceat; atque sic numerum vibrationum, acceptis prius ponderibus atque mensuris ad id necessariis, quem theoria indicat accuratissime ad experimenta reuocare potui: at cum laminae breuiores fiunt, mire accelerantur vibrationes mox aciem oculorum effugientes; distinctum tamen

men ſonum nondum edunt, niſi minimum 60 aut 70 vibrationes intra minutum ſecundum perficiantur; hunc autem accelerationis terminum poſtquam transgreſſae ſunt, ſonus iam percipitur; qualis in crembalis vibratis oritur: hinc anſam cepi theoriam hanc a theoria ſonorum confirmare, iſtudque negotii hoc modo aggreſſus ſum.

§. 15. *Experimentum.* Acum adhibui ferream, quibus in texendis tibialibus vtuntur, craſſitiei dimidiae lineae proxime: longitudo erat 327 particularum, quarum 3166 efficiunt longitudinem penduli ſimplicis ad minuta ſecunda oſcillantis: pondus acus erat 17 granorum: acum hanc parieti firmiter et horizontaliter infixi ita vt longitudo reſidua extra parietem prominens eſſet 297 partium haberetque pondus circiter $15\frac{1}{2}$ granorum: extremitati acus ita firmatae appendi pondus duarum vnciarum cum ſcrupulis duobus ſeu 1000 granorum: extremitas acus ab hoc pondere inferiora verſus tracta fuit 27 particulis: pondus autem acus ipſius hic attendi non meretur, praeſertim cum iam ante pondus appenſum incuruando paululum acum exererit effectum ſuum.

Vt iam videamus numerum vibrationum, quas acus vibrata intra minuuum ſecundum perficere debeat, adhibebimus formulam, quam §. 9. dedimus pro longitudine penduli iſochroni, nempe $L = \frac{12p}{49P}C$, in qua vi experimenti ponendum eſt $p = 15\frac{1}{2}$ gran. $P = 1000$ gran. et $C = 27$ part. quibus ſubſtitutis numeris fit $L = 0,1025$ part. pendulum autem ſimplex longitudinis $0,1025$ part. facit 175 vibrationes intra minutum ſecundum, hicque vibrationum numerus proxime conuenit ſono chorali qui littera G deſignatur. Tum demum vibrata acu ſonum vnifonum in cymbalo exploraui, hicque reuera fuit fonus G.

§. 16. Post hoc experimentum fundamentale tentare porro volui an experimenta quoque confirmatura essent theorema nostrum, *quod soni sint in ratione reciproca duplicata acus longitudinum* §. 11 indicatum; nec euentus expectationem fefellit: ita V. gr. cum acus eiusdem quantum prominebat longitudo prioris esset dimidia, nempe $148\frac{1}{2}$ part. soni prioris obtinui octauam duplicem seu disdiapason; octauamque simplicem siue diapason habui cum acus longitudo esset 210 part. Huic legi etiam subiicitur instrumentum quod Gallis dicitur *carillon* quum id conficitur ex prismatibus chalybeis sola longitudine a se inuicem discrepantibus, qualia horologiis domesticis quandoque applicantur, quamuis huiusmodi prismata vibrationes suas minimas non eodem modo perficiant, quippe non muro inifixa sed libera; constitui autem hoc alterum vibrationum genus alia occasione prosequi, a quibus disquisitionibus rem acusticam non parum perfici posse crediderim.

§. 17. Redeamus nunc vnde digressi sumus. Exposui in fine § 7. aequationem per seriem, cuius ope determinari possit valor rationis $\frac{l}{f}$, aliamque dedi aequationem eidem fini inseruientem in fine §. 10. et vtraque inuenimus $\frac{l}{f} = \sqrt{\frac{7}{2}}$ quam proxime. Verum si attentius perpendamus vtriusque aequationis indolem, facile intelligemus infinitos alios valores quantitati $\frac{l}{f}$ assignari posse, qui omnes aequationibus §. §. 7. et 10. accurate satisfaciant, hae quidem radices non possunt nisi taediosissimo labore in aequatione §. 7. nequidem per approximationes definiri, at ope alterius aequationis §. 10 quamuis non nisi forma a priori diuersae, proxime determiterminari possunt concinne admodum et eleganter, quae potissimum ratio me commouit vt eam alteri superadderem: hanc itaque aequationem hic rursus transcribam, inueni

$$\frac{l}{f} = 2\ Arc.\ sin.\ \frac{1 + e^{l:f}}{\pm V(2 + 2e^{2l:f})}$$

Iam vero notandum est, valores quantitatis $\frac{l}{f}$ post illum quem iam indicaui admodum crescere, ita vt valor proximus quantitatis $\frac{l}{f}$ sit fere $=5$ triploque priori maior: potest adeoque sine vllo sensibili errore negligi vnitas in numeratore atque binarius in denominatore atque sic simpliciter poni

$$\frac{l}{f} = 2\ Arc.\ sin.\ \frac{1}{\pm V 2}.$$

Sit nunc quadrans circuli, cuius radius vnitate exprimitur, $= q$, erunt radices praefatae aequationis omnes contentae in hac progressione

q, $3q$, $5q$, $7q$ etc. quae generaliter indicatur per $(2r-1)q$ si per r intelligitur numerus integer qualiscunque; sola radix prima paullo notabiliter a vera aberrat; reliquae omnes sensibilem errorem non inuoluunt: quaeuis harum radicum aliam atque aliam, et quidem continue minorem dat longitudinem penduli isochroni: cum enim (per §§. 8 et 9) haec longitudo sit generaliter $= \frac{3p}{P} \times \frac{f^4}{l^4} \times C$ [est enim $L = \frac{gc}{G}$ (per §. 4) $= \frac{f^4 g}{m^4}$ (per §. 7) $= \frac{3f^4 gC}{Pl^3}$ (per §. 8) $= \frac{3f^4 glC}{Pl^4} = \frac{3p}{P} \times \frac{f^4}{l^4} \times C$] si igitur successiue substituantur inuenti valores quantitatis $\frac{l}{f}$, inueniuntur tales valores pro longitudine penduli isochroni L

$$\frac{3p}{P} \times \left(\frac{1}{q}\right)^4 \times C;\ \frac{3p}{P} \times \left(\frac{1}{3q}\right)^4 \times C;\ \frac{3p}{P} \times \left(\frac{1}{5q}\right)^4 \times C \text{ etc.}$$

siue generaliter $L = \frac{3p}{P} \times \left(\frac{1}{(2r-1)q}\right)^4 \times C$ posito pro r numero integro qualicunque, vbi tamen notandum quod posito

$r =$

$r = 1$, valor ipsius L hoc modo inuentus a vero nimis deficiat quam vt admitti possit: reliqui autem tam cito ad verum valorem conuergunt, vt sine scrupulo vllo abhiberi queant et mereantur.

§. 18. Quaeritur nunc, quemadmodum hi diuersi valores locum habere possint? notandum igitur est, laminam B E vibratam infinitis modis se incuruare posse: modus simplicissimus est, quem figura prima sistit et de quo plus satis egimus; modus secundus figura 3tia illustratur, in qua DL seu nodi distantia a puncto D circitur quintam totius longitudinis DB partem efficit: pro hisce vibrationibus ponendum est $\frac{l}{f} = 3q$ sitque $L = \frac{3p}{r} \times (\frac{1}{3q})^4 \times C$. Hinc fit vt si lamina BD veluti hypomochlio in definito puncto L suffulciatur atque sic vibretur, vibrationes fiant regulariones diutiusque durent, imo et sonus si quis est clarior percipiatur, quam si hypomochlium alii puncto applicetur, tertium oscillationum genus indicatur figura
Tab. II. 4ta et pro hoc genere fit $\frac{l}{f} = 5q$ atque $L = \frac{3p}{r} (\frac{1}{5q})^4 \times C$ et sic deinceps. Atque ex his exemplis patet, quo sensu annotationes nostrae accipi debeant: Hae autem oscillationum variationes suo quoque modo fiunt in chordis musicis nec non in catenis verticaliter suspensis, vt alibi demostraui et fere vbique locum habent.

PERI-

PERIPHERIA CIRCVLI MECHANICE DVPLICITER RECTIFICATA.

AVCTORE
G. W. Krafft.

§. 1.

Dum Geometrica periphaeriae circularis rectificatione caremus: mechanica tantisper vtendum est, quae, si ad verum exacte non accedat, haud tamen longe ab eo absit. Receptae igitur iamdiu sunt inter Geometras plurimae solutiones, quibus cito, atque etiam satis tuto, datam circuli peripheriam in lineam rectam exdendere licet, quoniam in praxi Geometriae frequentior huius problematis vsus occurrere solet. Tales celebrantur *Vietae*, Cardinalis *Cusani*, *Augustini Hirschuogellii*, *Caroli de Bouelles*, *Hugenii*, *Comiersii*, et aliorum, quas expositas legimus in *Dan. Schwenteri* Geometria Practica pag. 133. 136. 137. in *Actis Lips.* 1685 m. Augusto; *Geometrie pratique*, à Paris 1542; *Iournal des Sauans* Tomo II. pag. 441. nec non ad annum 1676 pag. 114. Sin autem in nodo hoc Gordio rectificationis circuli, atque pendentis ex ea Quadraturae, secando, cui soluendo hucusque impares fuerunt omnes, occupari quis cupiat: ad haec duo imprimis respicere debet, vt primo ad numeros *Ludolphianos* accedatur quam proxime id fieri potest, atque secundo quam paucissimis operationibus absoluatur problema, vt ne instrumentorum ineuitabili errore a praefixo scopo abduci facile possimus.

§ 2. Communicauit mecum literis humanissimis ante aliquot menses talem mechanicam solutionem, Clariss. *Henricus Kühn*, Professor Mathes. Gedanensis, ex eo praecipue commendabilem, quod breuissima praxi quaesitum eruat, quam pace Clarissimi Authoris hic adiungam. In circulo proposito ADBE ducatur diameter AB, radius AC transferatur ex A in E, et ducatur recta indefinita EBF; tum chordae quadrantis BD capiatur aequalis BF; eritque recta EF quamproxime aequalis semiperipheriae circuli propositi. Vt appareat quam prope absit a proportione *Ludolphiana* diametri ad peripheriam $1 : \frac{31\,415\,926}{10\,000\,000}$ haec constructio, patet rectam EF esse summam ex chorda 120°, et chorda 90°, vel summam ex sinu 60°, et sinu 45°, assumta diametro AB pro sinu toto. Posita itaque diametro $AB = 1$, erit $AE = AC = \frac{1}{2}$, consequenter $EB = = \frac{\sqrt{3}}{2}$; porro est $BF = BD = \frac{\sqrt{2}}{2}$ vnde fit semiperipheria $EF = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$, et oritur proportio diametri ad peripheriam $= 1 : \sqrt{3} + \sqrt{2} = 1 : \frac{31\,462\,643}{10\,000\,000}$, quae *Ludolphianam* excedit quantitate $\frac{46717}{10000000}$.

§. 3. Occasione huius praecedentis constructionis incidi, post varias de hac re meditationes, in duas sequentes solutiones eiusdem problematis, quae et a vero propius absunt, et parum difficiliori enchiresi finiuntur, quarum prima haec est. In circulo propsito ADB ducatur diameter AB, et bisectis, semiperipheria in D, radioque CB in E, capiatur $EF = ED$; tum applicata CF in BG, et bisecto arcu BG in H, ducantur chordae BH et BD, eritque $2\,BD + BH =$ semiperipheriae quamproxime. Vt eruam quam prope absit haec constructio a proportione *Ludolphiana*, patet ex elementis,

tis, radium CA media et extrema ratione sectum esse in F, consequenter partem maiorem radii ita secti CF ($=$BG) esse latus Decagoni regularis circulo inscribendi hinc arcus BG erit 36°, et arcus BH 18°; atque adeo erit semiperipheria $= 2$ chordae $90^\circ +$ chordae 18° $= 2$ sinus $45^\circ +$ sinu 9°, assumta iterum diametro pro sinu toto. Summa haec ex tabulis sinuum deprehenditur esse 15 706 481; erit ergo ex hac constructione proportio diametri ad peripheriam $= 1 : \frac{31\,412\,962}{10\,000\,000}$, quae a *Ludolphiana* deficit hac quantitate $\frac{2\,964}{10\,000\,000}$.

§. 4. Secunda constructio multo adhuc propius ad verum pertingit, sed dependet a trisectione anguli; quam vero exercitata manus haud adeo difficulter tentando perficere potest. Nempe ducta in circulo proposito diametro AB, applicetur AD chorda 90°, et capiatur arcus BE 60°, applicatione radii; hic arcus BE diuidatur in partes aequales nouem, quarum sumantur septem BF, et ex F in diametrum demittatur perpendicularis FG, sinus futura arcus BF; eritque $AC + AD + FG =$ semiperipheriae quamproxime. *Est* enim, assumto iam radio AC pro sinu toto, $AC + AD + FG =$ sinui toti $+$ chorda $90^\circ +$ sinu $46^\circ\,40' =$ sinui toti $+ 2$ sin. $45^\circ +$ sinu $46^\circ\,40'$, quae summa ex tabulis est 31 415 872 $=$ semiperipheriae, vnde prodit, ratio diametri ad peripheriam $= 2\,AC : 2 \times 31\,415\,872 = 1 : \frac{31\,415\,872}{10\,000\,000}$ quae a *Ludolphiano* numero non differt nisi quantitate $\frac{54}{10\,000\,000}$ in defectu; qua quidem constructione nullam exactiorem hucusque vidi. Fig. 7.

DE MOTV OSCILLATORIO CORPORVM FLEXIBILIVM.

AVCTORE
LEONH. EVLERO.

§. 1.

Doctrina de oscillationibus corporum tanto studio a longo iam tempore est peruestigata, vt ea omnino exhausta esse videatur. Postquam enim Hugenius caepisset motum oscillatorium corporum rigidorum ex axe fixo suspensorum ad calculum reuocare: plurima alia oscillationum genera a Mathematicis sunt tractata ac determinata tam pro corporibus rigidis, quam flexibilibus atque etiam fluidis: neque solum in vacuo, sed etiam in medio resistente hos motus oscillatorios sunt perscrutati. Dedi quoque in Comment. Acad. Imper. Petrolitanae Tom. VIII. dissertationem de hoc eodem argumento latissime patentem, in qua methodi perquam facilis et expeditae ope innumerabilia oscillationum genera, cuiusmodi sunt chordarum vibrantium, laminarum elasticarum altero termino fixarum, funium seu catenarum suspensarum etc. definiui, ac pro quouis casu longitudinem penduli simplicis isochroni assignaui. Quamuis autem haec doctrina penitus absoluta videatur, occurrunt tamen nonnunquam eiusmodi oscilationum casus, qui peculiari explicatione indigent; hocque adeo euenit in iis generibus, quae prae ceteris amplissime euoluta videntur.

§. 2.

§. 2. Huiusmodi ſcilicet quaeſtionem mihi propoſuit Vir Celeber. Dan. Bernoullius, circa corpora rigida de puncto fixo ope fili ſuſpenſa, qui caſus primo intuitu ille ipſe eſſe videtur, quem Hugenius in ipſo initio expediuit; filum enim in hac quaeſtione ſubtiliſſimum ponitur, ita vt perpetuo in lineam rectam maneat extenſum. Hoc tamen non obſtante ingens deprehendetur diſcrimen inter hunc et Hugeneii caſum, qui vulgo per inuentionem centri oſcillationis reſolui ſolet. Namque in caſu Hugeniano corpus non aliter mobile ſtatuitur, niſi circa axem, ex quo eſt ſuſpenſum, ſaltem actu alium motum in corpore non exiſtere ponitur praeter angularem circa axem ſuſpenſionis: atque in hoc negotio corpus cum filo, cuius ope ſuſpenditur, tanquam rigidum omnisque flexionis incapax ſpectatur. Quamuis autem in caſu Bernoulliano animum a flexibilitate fili abſtrahamus ſeu eius loco virgam rigidam ſubſtituamus; tamen iſte motus more conſueto definiri nequit, niſi ſimul iunctura, qua corpus cum filo ſeu virga connectitur, omnis mobilitatis ſit expers. Quod ſi autem corpus circa hanc iuncturam motum recipere queat: tum durantibus oſcillationibus corpus non ſolum circa axem fixum feretur motu angulari, ſed etiam circa iuncturam aliquantum vacillabit; hocque duplici motu fit, vt methodo vſitata per centri oſcillationis iueſtigationem verus motus oſcillatorius determinari nequeat. Atque circa hunc caſum verſabatur quaeſtio, quam Celeb. Bernoullius mihi propoſuerat.

§. 3. Ad hanc ſimilesque alias quaeſtiones cum diſtincte intelligendas tum expedite reſoluendas naturam motus oſcillatorii ex ipſis principiis altius repetemus. Ac primo mo quidem in omni motu oſcillatorio ſpectandus eſt ſtatus quietis ſeu aequilibri, in quo corpus, ſi ſemel fuerit conſtitutum, acquieſcat: ſunt enim oſcillationes nil aliud niſi alternae acceſſiones ac receſſiones a ſtatu aequilibrii. Sic penduli ex puncto fixo ſuſpenſi ſtatus quietis eſt, quo recta per punctum iſtud fixum et centrum grauitatis corporis ducta ſitum tenet verticalem; dum autem oſcillationes peragit, cis et vltra hunc ſtatum alternatim excurrit, donec tandem in hoc ſtatu quieſcat. Sic quoque in chorda tenſa datur ſtatus quietis, e quo ſi chorda deturbetur, vibrationes peragendo alternatim cis et vltra hunc ſitum digreditur. Ac ſimili modo in omni motu oſcillatorio obſeruantur eiusmodi reciprocationes, quibus corpora alternatim accedunt ac recedunt in eadem via ſemperque in huius viae medio exiſtit ſtatus quietis, in quo corpus tandem, excurſionibus penitus extinctis, quieſcat. Oſcillatio autem vocatur vna huiumodi motus reciproci periodus, qua corpus e ſtatu quietis digreſſum iterum ad eum accedit, indeque vlterius recedit, donec denuo in eadem via reuerti incipiat: ex quo vna quaeque oſcillatio duabus conſtat partibus, quarum priori ad ſtatum quietis accedit, poſteriore ab eo recedit. Oſcillatio ergo finitur cum corpus maxime a ſtatu quietis receſſerit: ibique incipit noua ſequens oſcillatio, quae pariter abſoluetur acceſſione ad ſtatum quietis, ac ſubſequente receſſione ab eodem termino.

§. 4. Primum igitur natura ſtatus quietis, qui in omni motu oſcillatorio ineſt diligentius perſcrutari oportet, cum ex eo motus oſcillatorius potiſſimum pendeat, ac determinetur. Duplici autem modo corpus in quiete verſa-

versari potest: primum scilicet si a nullis omnino potentiis sollicitetur tum enim vi primae motus legis in eodem statu perpetuo perseuerabit: deinde vero corpus etiamsi a potentiis sollicitetur, tamen in quiete persistere potest, si potentiae se mutuo destruant, atque in aequilibrio sint constitutae: atque hinc iste quietis status, vt a priori distinguatur, status aequilibrii vocari solet. Prior quietis status, quo corpus a nullis vrgetur potentiis omnino ad motum oscillatorium producendum est ineptus; licet enim hoc corpus ex hoc statu remoueatur, tamen ob defectum virium id sollicitantium, non in pristinum statum reuertetur, sed in statu remoto pariter quiescet. Quodsi autem potentiarum corpus sollicitantium, dum corpus ex statu quietis deturbatur, aequilibrium rumpitur, tum vtique aderunt vires corpus in statum quietis repellentes; et quoniam ab his viribus corpori motus imprimitur, corpus cum quadam celeritate in statum aequilibrii appellet, proinde vlterius excurret in plagam oppositam donec eius motus a viribus contra nitentibus absumatur, tum vero ob similem causam rursus ad statum aequilibrii vrgebitur, sicque motu reciproco accedendo et recedendo oscillationes peraget.

§. 5. Motus igitur oscillatorius existit, si vires corpus sollicitantes ita fuerint comparatae, vt, cum corpus extra statum quietis constituitur, eae corpus versus hunc quietis statum propellant. Consideremus primum corpus instar puncti sitque C eius locus quietis, in quo potentiae id sollicitantes in aequilibrio sint constitutae. Concipiatur iam corpus ex C in A transferri, et quia in A non est status aequilibrii, corpus ex A in directione Tab. III. fig. 1.

A C

AC sollicitabitur atque si sibi relinquatur actu per spatium AC promouebitur; continuo autem in hoc motu accelerabitur, quia in singulis spatii AC punctis P p vis adest corpus versus C propellens, ideoque maxima cum celeritate in C appellet, qua, etsi in C est status quietis quoniam tamen ibi nullam virium actionem patitur, vltra in directione CB perget. Quamprimum autem vltra C pertingit, subibit actionem virium id retro versus C pellentium, quibus propterea eius motus iterum retardabitur, donec tandem in B omnis motus ab his viribus reluctantibus destruatur. Ex B igitur ab iisdem viribus reuerti cogetur in via BC, hocque in motu pariter usque in C accelerabitur, ita vt motu concepto iterum versus A excurrere debeat; donec omnem motum amiserit. Absoluet ergo corpus oscillationes tamdiu, quoad propter resistentiam aeris aliaque obstacula omnem motum amittat, atque in C quiescat.

§. 6. Ad motum ergo istiusmodi oscillationum determinandum nosse oportet vim; qua corpus in quauis a puncto C distantia positum eo vrgetur. Quae vis, si in se spectetur, vtique quamcunque legem elongationis a puncto C sequi potest, hincque innumerabilia oscillationum genera orirentur; interim tamen, quoniam ista vis euanescit, si corpus in ipso puncto C versatur, necesse est, vt haec vis eo maior euadat, quo longius corpus a puncto C remoueatur: Sicque corpore in P existente quantitas vis, quae id versus C vrgebit, proportionalis erit functioni cuipiam distantiae CP, quae sit $= x$, quae euanescat posito $x = 0$. Si igitur haec functio, cui vis corpus in distantia CP $= x$ versus C sollicitans est proportioportionalis ponatur, $= \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 +$ etc. manifestum est si elongationes a puncto C fuerint minimae, tum vires corpus in quauis distantia $CP = x$ versus C sollicitantes fore his ipsis distantiis proportionales: vis igitur, quae corpus in A constitutum versus C pellit, est ad vim corpus in P existens versus C pellentem vt AC ad PC. Atque simili modo in altera parte CB, vbi x fit negatiua, in quauis distantia CQ corpus in directione QC sollicitabitur vi ipsi distantiae CQ proportionali. Haec autem virium sollicitantium lex distantiis a situ aequilibrii proportionalis, siquidem distantiae fuerint quam minimae, in omnibus oscillationum generibus, quae quidem in mundo obseruantur, locum habet, ita vt ea instar principii omnis motus oscillatorii vti possimus.

§. 7. Hoc principio stabilito sequitur omnes oscillationes eiusdem corporis, siue inter oscillandum maiora siue minora spatia percurrat, dummodo in se spectata sint minima, eodem tempore absolui debere seu fore isochronas. Sit enim initio corpus ex C in A vsque deductum ex quo loco motum oscillatorium coeperit, perueneritque iam in P ac ponatur $AC = a$, $CP = x$, et celeritas, qua corpus elementum spatii $Pp = dx$ percurrit debita sit altitudini v. Sit iam g vis acceleratrix, qua corpus in data distantia c a situ C versus C sollicitatur, erit vis qua in P actu per Pp acceleratur $= \frac{gx}{c}$; vnde fiet $dv = \frac{-gxdx}{c}$, hincque $v = \frac{g}{2c}(aa - xx)$. Ipsa ergo celeritas in P erit $= \sqrt{v} = \sqrt{\frac{g}{2c}(aa - xx)}$; ideoque corpus in C adueniet celeritate $= a\sqrt{\frac{g}{2c}}$. Tempusculum vero, quo per spatiolum $Pp = -dx$ transibit

 erit

erit $= \frac{-dx}{\sqrt{\frac{g}{2c}(aa-xx)}}$: ex quo tempus per ſpatium AP erit $= \frac{A\, \mathrm{coſ.}\, \frac{x}{a}}{\sqrt{\frac{g}{2c}}}$. Tempus ergo totius acceſſus per ſpatium AC erit $= \frac{\pi\sqrt{c}}{\sqrt{2g}}$: denotante $1:\pi$ rationem diametri ad peripheriam.

§. 8. Hac acceſſione autem ſemiſſis primae oſcillationis abſoluitur, quae adeo fit tempore $\frac{\pi\sqrt{c}}{\sqrt{2g}}$, in qua expreſſione cum non inſit quantitas ſpatii percurſi AC $= a$, perſpicuum eſt acceſſionem corporis ad C perpetuo aequali tempore abſolui, ſiue maius ſiue minus ſpatium AC conficiat. Simili autem modo intelligetur receſſum per ſpatium CB, qui alteram oſcillationis partem conſtituit, eodem tempore abſolui, ita vt totum vnius oſcillationis tempus futurum ſit $= \frac{\pi\sqrt{2c}}{\sqrt{g}}$. Cum enim corpus in C veniat celeritate debita altitudini $\frac{gaa}{2c}$, ponamus hoc motu iam perueniſſe in Q, poſito CQ $= y$, vbi celeritas eius, qua per elementum $Qq = dy$ pergit, debita ſit altitudini u, in hoc ergo loco corpus retrahetur ac retardabitur vi $= \frac{gy}{c}$, vnde fit $du = \frac{-gydy}{c}$ ergo $u = \frac{g}{2c}(aa-yy)$. Excurret itaque antequam omnem motum amittat per ſpatium CB $= a$, ita vt ſit CB $=$ AC. Tempus autem per ſpatium CQ $= y$ erit $=$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\frac{g}{2c}(aa-yy)}} = \frac{A\, \mathrm{ſin.}\, \frac{y}{a}}{\sqrt{\frac{g}{2c}}}.$$ Fiat $y = a$, ac prodibit tempus receſſionis integrae per ſpatium CB, $= \frac{\pi\sqrt{c}}{\sqrt{2g}}$; quod vtique aequale eſt tempori acceſſionis per AC, ita

ita vt tempus totius oſcillationis per ACB factae futurum ſit $= \frac{\pi\sqrt{2c}}{\sqrt{g}}$, huicque aequalia erunt tempora omnium ſequentium oſcillationum.

§. 9. Commodiſſime autem tempora huiusmodi oſcillationum menſurari ſolent per pendula ſimplicia eodem tempore oſcillationes ſuas abſoluentia. Cum enim pendulum ſimplex, cuius longitudo eſt 3, 166 pedum Rhen. ſingulis minutis ſecundis oſcillationes peragat, atque tempora diuerſorum pendulorum ſequantur longitudinum rationem ſubduplicatam, manifeſtum eſt, ſi cognoſcamus longitudinem penduli ſimplicis iſochroni cum motu quopiam oſcillatorio propoſito, tum ſimul veram oſcillationum durationem innoteſcere. Pendulum quidem ſimplex eſt res mere imaginaria, cum per id intelligatur corpus infinite paruum ope fili infinite tenuis et inertia deſtituti ex puncto fixo ſuſpenſum: attamen eiusmodi pendulum etſi imaginarium commode pro menſura quarumcunque oſcillationum adhibetur, cum per id non ſolum ratio, quam diuerſae oſcillationes inter ſe tenent, cognoſcatur, ſed etiam duratio oſcillationum per cognitas temporis particulas, veluti minuta ſecunda aſſignari queat. Atque huc quoque referenda eſt centri oſcillationis inueſtigatio, aequatur enim ſemper diſtantia centri oſcillationis ab axe ſuſpenſionis longitudini penduli ſimplicis iſochroni.

§. 10. Vt igitur motum oſcillatorium quemcunque cum pendulo ſimplici comparare queamus, contemplemur pendulum ſimplex OC, quod conſtet ex corpuſculo infinite paruo C cuius pondus ſit $= p$, ope fili OC cum inertiae tum grauitatis expertis ex polo fixo O ſuſpenſo; ſit longitudo huius penduli OC $= f$; eritque hoc pendulum in ſtatu quietis, ſi recta OC fuerit verticalis. Deducatur hoc Fig. 4.

 pen-

pendulum OC infinite parum in situm OA, in quo vtique cessabit aequilibrium; cum enim ponduſculum p in A positum sollicitetur deorsum in directione verticali AE, quae non amplius cum directione fili OA congruit, resoluatur vis AE, quae aequalis est ponderi corpusculi p, in laterales AN et AM, quarum illa AN in tensione fili consumitur, haec vero AM corpusculum in directione AMC ad spatium AC percurrendum sollicitabit. Erit vero ob triangula similia OAC et EAM, vis AM $= \frac{p.AC}{OC}$, ita vt corpusculum in A sollicitetur secundum directionem AC vi $= \frac{p.AC}{OC}$, quae vtique distantiae corpusculi AC a situ quietis est proportionalis, quamobrem omnes oscillationes huius penduli aequalibus absoluentur temporibus, dummodo spatiola AC fuerint minima. Quoniam vero massa corpusculi est pariter $= p$, erit vis acceleratrix corpusculum in A sollicitans $= \frac{AC}{OC} = \frac{AC}{f}$.

§. 11. Vis igitur acceleratrix, qua corpusculum C ad quamcunque distantiam AC a situ quietis C deductum versus C sollicitatur aequalis est ipsi distantiae AC diuisae per longitudinem penduli OC $= f$, seu haec vis acceleratrix est ad vim acceleratricem grauitatis naturalis vti spatium AC ad longitudinem penduli OC. Quodsi igitur in praecedente casu, quo corpusculum ex C in A deductum ad motum oscillatorium impellitur vis acceleratrix in quauis distantia CP $= x$, fuerit aequalis vi acceleratrici, qua pendulum simplex in eadem distantia versus statum quietis vrgetur, tum oscillationes in vtroque casu absoluentur aequalibus temporibus, atque longitudo OC $= f$ dabit pendulum simplex isochronum cum motu oscillatorio fig. 1. In fig. 2 autem est in distan-

Fig. 1 et 2.

tia CP $= x$ vis acceleratrix $= \frac{gx}{c}$; in pendulo autem pro eadem distantia est vis acceleratrix $= \frac{x}{f}$; ex quarum aequalitate sequitur $f = \frac{c}{g}$. Statim ergo pro quouis motu oscillatorio ex sola vi acceleratrice innotescit longitudo penduli simplicis isochroni, quae prodit, si spatium CP per vim acceleratricem, quam corpus in hac distantia sentit diuidatur, hic enim quotus vbique podit eiusdem quantitatis.

§. 12. Vicissim igitur si constet longitudo penduli simplicis isochroni, quae sit $= f$, pro motu quopiam oscillatorio, definire poterimus vim acceleratricem in quauis a statu quietis distantia. Si nimirum punctum C per spatium AB vti ante exposuimus, oscillationes absoluat paribus temporibus vti pendulum simplex longitudinis f; necesse est, vt vis acceleratrix, qua corpusculum in quauis elongatione CP $= x$ a statu quietis C impellitur sit $= \frac{x}{f}$; siquidem, vti in sequentibus semper assumimus, oscillationes fiant per spatia quam minima. Quodsi autem longitudo penduli simplicis non fuerit cognita, tamen, si ea quasi cognita tractetur, quemadmodum in analysi quantitates incognitae, tanquam essent cognitae tractari solent, expressio pro vi acceleratrice in quauis a statu quietis distantia reperietur; quae proinde si comparetur cum vi, qua corpus actu sollicitatur, dabit aequationem, ex qua longitudo penduli simplicis isochroni determinabitur. Posita nimirum pro motu oscillatorio corpusculi C per spatium AB, longitudine penduli simplicis isochroni etsi ad huc incognita $= f$, erit corpusculi in P positi vis acceleratrix $= \frac{PC}{f}$; at ex huius aequilibrii natura nouimus vim acceleratricem, qua corpus in eadem distantia P C actu sollicitetur, esse $= \frac{g.PC}{c}$, vnde concludimus fore $\frac{PC}{f} = \frac{g.PC}{c}$, hincque $f = \frac{c}{g}$, simili igitur ratiocinio in quouis casu longitudo penduli simplicis isochroni satis expedite determinari poterit.

§ 13. Plana quidem haec sunt, si corpus, quod oscillationes peragit, instar puncti considerari potest, at si corpus finitam habeat extensionem ratiocinium aliquanto magis fiet complicatum, interim tamen eodem modo expedietur. Primo enim probe notari debet situs, quem quaelibet corporis particula in statu aequilibrii occupat, deinde corpus extra statum aequilibrii infinite parum declinari concipiatur, vt obtineat situm ad oscillationes producendas idoneum. Tum igitur quaeratur distantia cuiusvis corporis particulae in hoc statu, a loco, quem in statu aequilibrii obtinet; quae distantia simul viam cuique particulae percurrendam praebebit, donec ad statum aequilibrii perueniat; quo motu prior vnius oscillationis semissis absoluitur. Cognita iam vniuscuiusque particulae distantia a suo situ quietis, et longitudine penduli simplicis isochroni tanquam cognita assumta, innotescet vis acceleratrix vnamquamque particulam sollicitans, quae in massam particulae ducta dabit vim motricem. Hinc ergo colligetur vis motrix totalis corpus sollicitans, quae aequiualere debet viribus corpus actu vrgentibus, atque ex hac aequiualentia elicietur longitudo penduli simplicis isochroni.

§. 14. Consideremus ergo corpus quodcunque AB CD rigidum, nullius mutationis in figura sua capax, quod vel per se solum oscillationes peragat, vel cum aliis corporibus coniunctum oscilletur; dum enim vires inuesti-

inuestigamus ad hoc requisitas, vt oscillationes dato tempore absoluantur, quamuis corporis oscillantis partem seorsim contemplari conuenit; et, si totum corpus oscillans inflexiones admittat, constabit partibus vel finitae magnitudinis vel infinite paruae quae nullam mutationem recipiunt. Sit igitur ABCD eiusmodi corpus vel pars corporis oscillantis omnis mutationis in figura sua expers, sitque situs, quem figura repraesentat, eius status aequilibrii, in quo vel quiescit, vel in quem peruenit in cuiuslibet oscillationis medio. Dum igitur hoc corpus oscillationes facit, alternatim de hoc situ aequilibrii vel versus P vel Q recedit, hicque duo occurrunt casus considerandi. Vel enim singulae corporis partes aequaliter a situ suo quietis recedunt, vel aliae magis aliae minus, quod posterius euenit, si corpus in motu oscillatorio circa axem quempiam fixum motu angulari fertur, tum enim corporis partes axi viciniores minus a loco quietis recedunt, quam eae, quae magis sunt remotae.

§. 15. Ponamus primum in motu oscillatorio omnes corporis partes aequaliter a suo aequilibrii situ digredi, ita vt corpus solo motu progressiuo feratur, quo singulae eius partes motu inter se parallello, et aequalibus eodem tempore celeritatibus mouentur. Dum igitur corporis centrum grauitatis G per interuallum Gg in g transfertur, quaelibet corporis particula M per interuallum Mm ipsi Gg aequale et parallelum procedet. Quodsi ergo longitudo penduli simplicis isochroni siue cognita sit, siue incognita, ponatur $= f$, vis acceleratrix qua particula M in m posita secundum directionem mM sollicitatur erit $= \frac{Mm}{f} = \frac{Gg}{f}$. Ponatur distantia $Gg = \omega$, quam per-

perpetuo quasi infinite paruam vel saltem minimam assumo, erit vis acceleratrix vrgens particulam M in directione $mM = \frac{\omega}{f}$. Multiplicetur haec per massam seu pondus ipsius particulae M, quod sit $= p$, atque prodibit vis motrix particulam M sollicitans $= \frac{\omega p}{f}$, quae exprimatur linea Mp in huius vis directione lineolae Gg parallela. Sic igitur innotescunt vires singulas corporis particulas sollicitantes, cum centrum grauitatis corporis atque adeo singula elementa per spatiola ω a suis locis, quae in statu aequilibrii tenent, recesserunt.

§. 16. Quoniam directiones singularum harum virium sollicitantium sunt inter se parallelae, vis ipsis omnibus aequiualens earum summae aequabitur, eritque ideo $= \int \frac{\omega p}{f} = \frac{\omega}{f} \int p$, ob ω et f quantitates in hac summatione constantes. At cum p sit massa vniuscuiusque corporis elementi, M denotabit $\int p$ massam seu pondus totius corporis. Quare si corporis massa seu pondus ponatur $= P$, erit vis motrix totalis ex singulis viribus sollicitantibus resultans $= \frac{\omega P}{f}$, huiusque directio parallela erit directionibus singularum virium, hoc est directioni gG. Ceterum cum iste calculus omnino similis sit ei, quo centrum grauitatis cuiusque corporis inuestigari solet, perspicuum est mediam directionem omnium istarum virium partialium transire per corporis centrum grauitatis G; cum enim vires singulas corporis particulas sollicitantes sint ipsarum massis proportionales, ac directiones habeant inter se parallelas, necesse est, vt earum media directio per centrum grauitatis transeat. Quod si ergo per centrum grauitatis G ducatur recta $GP = \frac{\omega P}{f}$ in directione gG, haec recta exhibebit vim motricem totalem ad

hoc

hoc requiſitam, vt corpus ABCD motu ſibi parallelo oſcillationes peragendo eodem tempore oſcillationes abſoluat, quo pendulum ſimplex longitudinis f.

§. 17. Quo citius huius inueſtigationis vſus appareat, ponamus corpus A C B D inter duo elaſtra A E et B F tenſa eſſe conſtitutum, ita vt in aequilibrio verſetur, vbi vires elaſtrorum ſunt inter ſe aequales; cum enim ſibi directe ſint contrariae, atque earum directiones per centrum grauitatis corporis G tranſeant, corpus vtique quieſcet, vbi vires elaſtrorum inter ſe ſunt aequales, quod in ſitu, quem figura praeſentat, euenire ponamus. Sit A vis, quam vtrumque elaſtrum in corpus interiectum exerit: ac pendebit eius quantitas a magnitudine interualli A E et C F, ita vt diminuto interuallo vis A creſcat, aucto vero interuallo decreſcat. Moueatur iam corpus motu ſibi parallelo verſus F, ita vt eius centrum grauitatis G per ſpatiolum $Gg = \omega$ progrediatur: hocque motu vis elaſtri B F intendetur, alterius vero A E tantundem remittetur. Fiat in hoc ſtatu vis elaſtri $BF = A + E\omega$, et elaſtri A E vis $= A - E\omega$: atque manifeſtum eſt vim, qua corpus verſus ſtatum aequilibrii vrgebitur fore $= 2E\omega$: quae vis vtique corpori motum oſcillatorium inducet. Ad hunc inueniendum ſit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= f$, et pondus corporis $= P$; hincque vis corpus, cum per interuallum $Gg = \omega$ de ſtatu aeqnilibrii receſſerit erit $= \frac{P\omega}{f}$: fiat haec vis aequalis ei, qua actu ſollicitatur, $2E\omega$, atque reperietur longitudo penduli ſimplicis iſochroni $f = \frac{P}{2E}$. Aſſumimus autem elaſtra inertiae expertia, vt nulla vi opus ſit ad ipſa elaſtra mouenda. Fig. 4.

§. 18. Inuestigemus iam vires ad motum oscillatorium dato tempore producendum requisitas, si corpus non
Fig. 5. motu sibi parallelo ex statu quietis recedat, ad eundemque accedat, sed interea circa axem quempiam fixum gyretur, ita vt spatia, quae singulae corporis particulae percurrunt, sint ipsarum distantiis ab axe proportionalia. Sit igitur corpus ABCD in statu aequilibrii, quod dum oscillationes peragit, circa axem fixum O, quem ad planum chartae normalem concipi oportet, motu angulari fertur. Planum chartae repraesentet sectionem ad axem O normalem per centrum grauitatis corporis G factam. Remoueatur iam hoc corpus aliquantillum ex statu aequilibrii, ita vt eius centrum grauitatis G transferatur per arculum Gg centro O descriptum in g, atque quaelibet corporis particula M interea procedet per arculum Mm pariter centro O descriptum, ita vt sit angulus MOm aequalis angulo GOg seu $Mm : Gg = OM : OG$. Hoc idem non solum in hac corporis sectione per centrum grauitatis facta eueniet, sed in omni sectione corporis illi parallela seu ad axem O normali, ita vt de omnibus corporis particulis constet, per quaenam spatia transferantur dum centrum grauitatis G per arculum Gg promouetur: atque sic distantia cuiusuis corporis particulae a situ, quem in statu aequilibri tenebat, definiri poterit.

§. 19. Vocetur distantia $OG = a$, et spatiolum $Gg = \omega$, tum ex particula M in planum ad chartam normale ac per axem O et centrum grauitatis ductum ducatur perpendiculum ML, ponatur $OL = x$ et $LM = y$ erit $OM = \sqrt{(xx + yy}$ et per analogiam

giam datam $Mm = \frac{\omega\surd(xx+yy)}{a}$. Quodsi iam longitudo penduli simplicis isochroni sit $= f$, erit vis acceleratrix particulae M in m translatae per spatium mM $= \frac{Mm}{f} = \frac{\omega\surd(xx+yy)}{af}$, et denotante p massam elementi M erit vis motrix $= \frac{\omega p\surd(xx+yy)}{af}$ cuius directio erit Mp ad OM normalis. Resoluatur haec vis in laterales ML et MI, erit vis in directione ML vrgens $= \frac{\omega px}{af}$, et vis in directione MN vrgens $= \frac{\omega py}{af}$. Summa autem omnium harum posteriorum virium in directione MN est $= \frac{\omega}{af}\int yp$, at est yp momentum pondusculi p ad axem OG relatum, qui axis cum per centrum grauitatis G transeat, erit ex natura centri grauitatis summa omnium horum momentorum nihilo aequalis; et hancobrem earum media directio prodiret infinita, ita vt positio vis omnibus aequiualentis determinari nequeat.

§. 20. Incommodum hoc tolletur, si omnes has vires MN in eandem directionem incidere faciamus. Cum enim perinde sit, in quonam directionis suae Mp puncto vim $\frac{\omega p\surd(xx+yy)}{af}$ applicatam concipiamus, concipiamus eam applicatam in puncto p, vbi haec directio plano ad chartam normali atque per O et G ducto ocurrit, haecque resoluta dabit vim lateralem in directione pq vrgentem $= \frac{\omega px}{af}$, et alteram vim lateralem in directione pC sollicitantem $= \frac{\omega py}{af}$, quae posteriores adeo vires omnes sitae erunt in plano ad OC normali. Quarum summa cum sit aequalis nihilo eae nihil ad motum conferent, sed tantum conabuntur corpus circa axem BD inclinare, nisi earum momenta ad vtramque axis huius partem se mutuo destruant. Siquidem totum corpus

pus in planum ABCD esset explanatum, tum momenta harum virium respectu axis BD nulla existerent, at si elementum M non in plano chartae sit situm sed ab eo remotum sit interuallo $= z$, tum momentum ad corpus circa axem BD conuertendum tendens foret $= \frac{\omega p y z}{a f}$; horum autem omnium momentorum summa plerumque est vehementer exigua, nam si vel sectio ABCD, vel sectio ad eam normalis per AC ducta corpus in duas partes similes diuidat, tum omnio haec momenta elementaria se mutuo destruunt.

§. 21. Cum igitur ob hanc causam effectum, qui ab his viribus in directione pC agentibus vnquam oriri potest, negligere queamus, supersunt tantum vires $\frac{\omega p x}{a f}$ in directione pq applicatae, quarum summa est $= \frac{\omega}{a f} \int p x$. At px est momentum particulae M respectu axis O, ideoque ex natura centri grauitatis summa omnium istorum momentorum aequatur ponderi totius corporis, quod sit $=$ P per distantiam centri grauitatis G ab axe O nempe $OG = a$ multiplicato, ita vt sit $\int p x = Pa$. ideoque summa virium $\frac{\omega}{af} \int p x = \frac{\omega P}{f}$, quae simul est vis aequiualens omnibus viribus $\frac{\omega p x}{a f}$. Quod autem ad earum mediam directionem attinet, quae vtique parallela erit directionibus singularum pq, eius distantia ab axe O reperietur, si summa momentorum harum virium ad axem O relatorum, quae est $= \frac{\omega}{af} \int p x . Op$, diuidatur per summam ipsarum virium, quam vidimus esse $= \frac{\omega P}{f}$. Capiatur ergo $OS = \frac{\int p x . Op}{P a}$, erit OS distantia vis aequiualentis ab axe O, at-

atque si in S applicetur vis $SP = \frac{\omega P}{f}$, indirectione SP ipsi pq parallela, haec vis aequiualebit singulis viribus particulas corporis sollicitantibus simul sumtis.

§. 22. Cum igitur in cognitione distantiae OS cardo rei versetur, eam dilucide definiri conuenit; quoniam ergo OM est media proportionalis inter OL et Op fiet $x. Op = OM^2 = xx + yy$; ita vt futura sit distantia $OS = \frac{\int p. OM^2}{Pa} = \frac{\int p(xx+yy)}{Pa}$. Singula igitur corporis elementa multiplicari debent per quadrata distantiarum suarum ab axe O, ac summa horum productorum diuisa per Pa dabit distantiam OS, haecque est regula nota pro centro oscillationis inueniendo. Vel si per G ductus concipiatur axis axi O parallelus, ad eumque ex M perpendicularis ducatur MG erit $OM^2 = MG^2 + OG^2 - 2\, OG.\ GL$; ideoque $\int p. OM^2 = \int p\, MG^2 + \int p. OG^2 - 2 \int p. OG.\ GL$: at est $\int p. OG^2 = Pa^2$, ob $\int p = P$, et $\int p. OG.\ GL = a \int p. GL$, quae summa ob G centrum grauitatis euanescit, superest ergo $\int p. MG^2$, quae designat summam omnium productorum ex singulis corporis particulis in quadrata distantiarum suarum ab axe per centrum grauitatis corporis G ducto atque axi O parallelo. Quodsi ergo haec summa quam momentum inertiae corporis respectu huius axis vocare soleo, ponatur $= Pbb$ fiet $\int p. OM^2 = Pbb + Paa$, ideoque distantia quaesita $OS = a + \frac{bb}{a}$.

§. 23. Haec linea OS tantum dat distantiam vis sollicitantis totalis $SP = \frac{\omega P}{f}$ ab axe O, neque etiamnum constat, vtrum ea in planum OBD per centrum gravitatis G normaliter ad axem O ductum cadat an non. Sit igitur ad hoc inuestigandum particulae M distantia ab hoc plano $= z$, eritque vis $pq = \frac{\omega p x}{af}$ momentum ad hoc planum relatum $= \frac{\omega p x z}{af}$: horum igitur momentorum omnium summa $\int \frac{\omega p x z}{af}$ seu $\frac{\omega}{af} \int p x z$ per summam virium $\frac{\omega P}{f}$ diuisa dabit distantiam puncti S a plano ODB vel sursum accipiendam vel deorsum, prout summa $\int p x z$ affirmatiuum vel negatiuum obtineat valorem. Sit $GL = a - x = t$, erit $\int p x z = \int a p z - \int p t z = -\int p t z$ ob $\int a p z = 0$, quia planum OBD per centrum grauitatis transit, eritque distantia puncti S ab hoc plano $- \frac{\int p t z}{a P}$. Recipuunt vero tam t quam z valores cum affirmatiuos tum negatiuos, ita vt haec expressio plerumque sit vehementer parua; omnino autem nulla erit si vel planum ABCD vel planum ad hoc normale per BD ductum corpus in duas partes similes secet. Hancque ob rem in praesenti instituto istam puncti S a plano OBD distantiam, si quam habet, negligemus.

§. 24. Si igitur corpus ABCD ita oscilletur, vt inter oscillandum circa axem fixum O moueatur, atque eius oscillationibus isochronum sit pendulum longitudin f, vis motrix ad motum hunc oscillatotium producendum requisita sequenti modo determinabitur. Ponamus centrum grauitatis corporis G inter oscillandum peruenisse in g, ita vt eius distantia a loco quietis G sit $Gg = \omega$: sitque totius corporis massa seu pondus $= P$. Tum per centrum grauitatis G ductus concipiatur axis axi illi O parallelus, ac quaeratur corporis momentum inertiae respectu huius axis per centrum grauitatis ducti, quod sit $= P b b$; re-

pe-

periturque, si singula corporis elementa per quadrata distantiarum suarum ab hoc axe multiplicentur, atque omnia producta in vnam summam coniiciantur. Quo facto ducatur per centrum grauitatis corporis G planum ad axem O normale, atque in recta OG sumatur $GS = \frac{bb}{c} = \frac{bb}{a}$ ob $OG = a$; in puncto S applicata concipiatur vis $SP = \frac{\omega P}{f}$ in directione SP ad OS in plano OBD normali, eritque haec vis illa ipsa, quae requiritur ad motum hunc oscillatorium producendum. Ceterum patet, si axis O infinite distet, ita vt corpus motu sibi parallelo feratur, tum punctum S in centrum grauitatis G incidere ob $a = \infty$, prorsus vti ante inuenimus.

§. 25. Proposito igitur corpore quocunque rigido, quod a potentiis sollicitatum oscillationes peragat, eius motus oscillatorius sequenti modo determinabitur. Assumatur tanquam cognita longitudo penduli simplicis isochroni f, ac dispiciatur quonam modo corpus inter oscillandum a statu suo quietis digrediatur, vtrum motu sibi parallelo an motu angulari circa axem quempiam fixum. Tum secundum praecepta pro vtroque casu data quaeratur vis motrix ad hunc motum oscillatorium producendum requisita. Denique haec vis quia ob f incognitam est indeterminata aequiualens reddatur viribus corpus actu sollicitantibus, hincque nascetur aequatio longitudinem penduli simplicis isochroni f determinans. Ista autem aequiualentia obtinetur, si in locum vis motricis inuentae applicata concipiatur vis ipsi aequalis et contraria, tum enim haec vis cum viribus corpus actu sollicitantibus in aequilibrio consistere debet. Quoties namque vna vis

aliis

aliis viribus aequiualet, toties eius contraria cum his iisdem viribus aequilibrium constituet: ideoque ex natura aequilibrii deriuabitur aequatio longitudinem penduli simplicis isochroni f determinans.

§. 26. Ex his iam statim oscillationes corporum inflexibilium ex axe fixo suspensorum a grauitate oriundae [illegible] notauimus per inuentionem centri oscillationis expediri solitus. Sit igitur corpus ABCD ope virgae rigidae OAB ex axe fixo horizontali O ita suspensum, vt alium motum praeter angularem circa hunc axem recipere nequeat, quod fiet, si virga OA non solum ipsa fuerit inflexilis, sed etiam corpus traiiciat ipsiue tam firmiter infigatur, vt iunctura nullam inflexionem admittat: hanc enim conditionem absolute necessariam esse, vt more consueto per centrum oscillationis motus recte definiatur ex sequentibus clarius elucebit. Repraesentet ergo planum chartae sectionem corporis verticalem per eius centrum grauitatis G factam atque ad axem horizontalem O normalem, ita vt axis normaliter plano chartae in O infixus concipi debeat. Hoc ergo corpus in statu aequilibrii erit situm, si recta OG in ista sectione ab axe O per centrum grauitatis G ducta fuerit verticalis puta Og, ita vt in figura centrum grauitatis G interuallo Gg, a suo aequilibrii situ distet. Notari hic vero oportet, punctum G non tam pro corporis ABCD, quam pro totius massae oscillantis ex corpore ac virga OA compositae centro grauitatis accipiendum esse.

§. 27. Cum igitur centrum grauitatis G interuallo Gg a suo aequilibrii loco sit remotum, ac totius corporis

poris motus fiat circa axem O, distantia cuiusque corporis elementi a suo situ aequilibrii erit cognita. Si ergo vocetur pondus corporis cum virga coniunctim $= P$, eiusque momentum inertiae respectu axis horizontalis per centrum grauitatis G ducti et axi O paralleli sit $= Pbb$; atque longitudo penduli simplicis isochroni ponatur $= f$ cognoscetur vis ad hunc motum producendum requisita. Scilicet cum spatium Gg sit minimum, ita vt recta OG a situ verticali infinite parum discrepet, capiatur $GS = \frac{bb}{OG}$, et in S secundum directionem Ss ipsi Gg parallelam applicetur vis $= \frac{P \cdot Gg}{f}$, quae ad hunc motum oscillatorium producendum requiretur. Quanquam enim ante corpus in statu aequilibrii positum sumus contemplati, hic vero corpus in figura extra statum aequilibrii repraesentetur; tamen vtrinque ratiocinium idem est; ob declinationem a situ aequilibrii infinite parvam, de qua tantum spatiolum Gg in computum ingreditur.

§. 28. Haec igitur vis $\frac{P \cdot Gg}{f}$ in directione Ss applicata, existente $GS = \frac{bb}{OG}$, eundem motum oscillatorium producere valet, quem vis corpus actu sollicitans nempe eius pondus, producit. Corpus autem actu sollicitatur a vi, ponderi ipsius P aequali in directione verticali GP: ex quo vis P in directione GP aequiualebit vi $\frac{P \cdot Gg}{f}$ in directione Ss. Quodsi ergo loco huius vis applicetur ipsi aequalis $\frac{P \cdot Gg}{f}$ at in directione contraria SQ, haec vis cum vi P in directione GP coniuncta corpus in aequilibrio continebit. Cum autem corpus alium motum praeter angularem circa axem O recipere nequeat, in aequilibrio erit, si momenta harum duarum virium respectu axis O

 se

§. 31. In hac inuestigatione, quemadmodum in resolutione plerorumque problematum fieri solet, ita versabimur, vt statum corporis extra situm aequilibrii, quem quaerimus, tamquam cognitum spectemus, ac simul longitudinem penduli simplicis isochroni quasi cognitam assumamus. Tum igitur, quia cuiusuis partis motus, quo ad statum aequilibrii peruenit, est cognitus, vis ad motum oscillatorium producendum requisita determinari poterit. Inuentis autem viribus, quibus omnes corporis partes sollicitari oportet, vt simul atque illo ipso tempore, quod assumta penduli simplicis isochroni longitudo postulat, ad statum aequilibrii appellant, efficiendum est, vt istae vires viribus, quibus corpus actu sollicitatur, aequivaleant. Loco illarum igitur virium corpori concipiantur applicatae aequales in directionibus contrariis, haeque cum viribus, quibus corpus actu sollicitatur, in aequilibrio consistere debebunt. Quoniam igitur corpus est flexile primo eius inflexio est indaganda ab his viribus sese in aequilibrio tenentibus resultans, sicque status corporis extra aequilibrii situm determinabitur, tum vero simul longitudo penduli simplicis isochroni innotescet.

§. 32. Quo autem corpus flexile a potentiis quibuscunque sollicitatum in aequilibrio versetur, necesse est, vt in quauis flexura momenta potentiarum se mutuo destruant. In casu igitur proposito momenta virium sollicitantium respectu cuiusuis flexurae corporis inuestigari debebunt, quae cum se mutuo destruant, orientur tot aequationes, quot corpus habet flexuras, ex quibus inflexio corporis, quam in singulis flexuris patietur, definietur. Tum vero etiam, si corpus fuerit mobile circa axem fixum, xuin, ipse hic axis flexurae vicem sustinet, eiusque adeo respectu omnium potentiarum sollicitantium momenta se destruere debent, ex qua aequatione longitudo penduli simplicis isochroni determinabitur. Poterit itaque haec methodus adhiberi ad oscillationes regulares corporum flexibilium quorumcunque determinandas, siue corpus aliquot tantum habeat flexuras, siue infinitas quemadmodum euenit in fune seu catena perfecte flexili. Casum autem hunc posteriorem iam alibi fusius sum persecutus, quare hic potissimum casum priorem, vbi numerus flexurarum est finitus, euoluam; quippe in quo consistit quaestio initio memorata, quam Celeb. Bernoullius mihi resoluendam proposuit; et quae eiusmodi implicatur difficultatibus, quae in altero casu non deprehenduntur.

§. 33. Sit igitur ex axe horizontali O, quem ad planum chartae normalem concipi oportet, ita vt charta planum verticale repraesentet, suspensa virga rigida O A, quam tum inertiae tum etiam grauitatis expertem assumamus: hincque virgae in A alligatum sit corpus A C B D ita, vt non solum corpus cum virga circa axem O, sed etiam ipsum corpus circa flexuram in A liberrime inflecti queat. Corporis igitur ita suspensi status aequilibrii erit, dum centrum grauitatis eius G in recta verticali O b, hoc est in puncto g versatur, atque in hoc situ aequilibrii etiam punctum A in eadem recta verticali O b puta in puncto a situm erit; alioquin enim corpus, quia flexile est, circa punctum A in aequilibrio persistere non posset. Cognito iam statu aequilibrii, manifestum est corpus ex eo cum rotando circa O tum circa A declinari Fig. 7.

 posse.

posse. Ponamus ergo corpus ex statu aequilibrii ita deturbari, vt circa axem O per angulum A O α, simul vero circa flexuram A per angulum B A β inclinetur: flexuram enim in A ita concipimus, vt corpus circa eam tanquam circa axem horizontalem axi O parallelum gyrari queat. Hoc igitur situ punctum A a statu quietis elongatur interuallo A a, centrum grauitatis autem G interuallo Gg, quod componitur ex binis partibus G γ et γ g, quarum illa a motu circa flexuram A, haec vero a motu circa axem O resultat: vtramque autem elongationem a situ naturali infinite paruam assumimus.

§. 34. Ponamus iam corpus sibi relictum ex hoc statu ita ad lineam verticalem O b accedere, vt singulae eius partes simul ad eum situm, quem in statu aequilibrii obtinent, perueniant, quod cum euenerit, motu concepto similiter in alteram regionem corpus excurret, atque oscillationes aequabiles absoluet, sit ergo longitudo penduli simplicis isochroni $= f$. Dum igitur punctum A in a peruenit percurrendo spatiolum A a, centrum grauitatis corporis G in g pertinget, et conficiet spatium Gg quae spatia etsi sunt curuilinea, tamen instar linearum rectarum considerari possunt. Corpus ergo A C B D perinde in statum aequilibrii perueniet, ac si motu angulari ferretur circa axem horizontalem fixum axi O parallelum in puncto V existentem, quod punctum determinatur intersectione rectae G A productae cum verticali O b; tali enim motu puncto A percurrendum est spatium A a, centro grauitatis G autem spatium Gg; prorsus vti simultanea appulsio corporis ad statum aequilibrii postulat. Spatiola igitur a singulis corporis elementis percurrenda

sunt

sunt distantiis ab axe isto imaginario per V ducto proportionalia: Hincque vis ad corpus mouendum requisita ex principiis ante datis determinari poterit.

§. 35. Sit igitur corporis ACBD pondus simulque massa $= P$, atque per eius centrum grauitatis G traiici concipiatur axis horizontalis ad planum chartae normalis qui proinde cum axi O tum axi imaginario in V erit parallelus; huius respectu axis quaeratur momentum inertiae corporis quod sit $= Pbb$, atque in recta VAG producta capiatur $GS = \frac{bb}{VG}$. Tum in S normaliter applicata concipiatur vis $= \frac{P.Gg}{f}$ secundum directionem Ss, erit haec illa ipsa vis ad motum propositum producendum requisita; quae ergo aequiualens esse debet vi grauitatis, qua corpus actu sollicitatur. At directio vis grauitatis est recta verticalis GP per corporis centrum grauitatis G ducta, eiusque quantitas aequatur ipsi corporis ponderi $= P$. Hancobrem necesse est vt vis $\frac{P.Gg}{f}$ in directione Ss applicata aequiualeat vi P in directione GP applicata. Quodsi ergo illa vis animo in sui contrariam mutari, eiusque loco in directione SQ applicari concipiatur vis $= \frac{P.Gg}{f}$, haec vis cum vi grauitatis P corpus in aequilibrio ita conseruare debebit, vt neque circa axem O neque circa flexuram in A quicquam inflectatur: ex quo harum duarum virium momenta tam respectu axis O quam respectu flexurae in A se mutuo destruant, necesse est.

§. 36. Consideremus primo flexuram in A, eritque vis P in directione GP agentis momentum ad hanc flexuram relatum $= P. AG. \sin. AGP = PAG \sin. GVg =$

P.

$\frac{P.AG.Gg}{VG}$; vis autem $\frac{P.Gg}{f}$ in directione SQ vrgentis momentum ad eandem flexuram relatum est $= \frac{P.Gg}{f}.AS = \frac{P.Gg}{f}(AG + \frac{bb}{VG})$, quae duo momenta vti sunt contraria, ita etiam aequalia esse debent, erit ergo $\frac{P.AG.Gg}{VG} = \frac{P.Gg}{f}(AG + \frac{bb}{VG})$ seu $AG.f = AG.VG + bb$. Deinde respectu axis fixi in O momentum ex vi P ortum est $= P.Gg$, at momentum ex vi $\frac{P.Gg}{f}$ resultans erit $= \frac{P.Gg}{f}.OAS = \frac{P.Gg}{f}(OA + AG + \frac{bb}{VG})$, ob angulos enim ad O et A infinite paruos directio SQ quoque ad OA productam normalis est censenda. Ex horum ergo momentorum aequalitate sequitur $VG.f = OA.VG + AG.VG + bb$. Duae igitur habentur aequationes, quarum altera determinabit rationem inter vtrumque motum rotatorium tam circa O quam circa A faciendum, vt corpus ad oscillationes aequabiles peragendas accommodetur, hocque fiet determinatione puncti V, altera vero aequatio inseruiet longitudini penduli simplicis isochroni f inueniendae.

§. 37. Si prior aequatio a posteriori subtrahatur, excedet ratio momenti inertiae corporis seu quantitas bb ex calculo eritque $f(VG - AG) = OA.VG$, seu $f = \frac{OA.VG}{VA} = OA + \frac{AG}{VA}.OA$. Quodsi ergo ex puncto G ducatur rectae OA parallela, donec verticali Qb productae occurrat, exhibebit haec longitudinem penduli simplicis isochroni f. Ceterum ex hac aequatione prodit $VA = \frac{OA.AG}{f - OA}$; prima autem aequatio praebet $VG = \frac{AG.f - bb}{AG} = VA + AG$, ita vt sit $VA = f - AG - \frac{bb}{AG}$

vnde

vnde eliminanda VA, habebitur $ff = \frac{(OA.AC + AC^2 + bb)f - OA.bb}{AG}$. Ad hanc facilius resoluendam ponamus $OA = a$; $AG = b$; eritque $ff = \frac{2(ab + bb + bb)f - 2abb}{2b}$ et $f = \frac{ab + bb + bb \pm \surd((ab + bb)^2 - 2(ab - bb)bb + b^4)}{2b}$. Duplicem igitur valorem pro pendulo f inuenimus, quod indicat duplici modo corpus ita de statu aequilibrii remoueri posse, vt oscillationes regulares efficiat. Erit autem pro hoc duplici valore distantia $VA = \frac{ab - bb - bb \pm \surd((ab + bb)^2 - 2(ab - bb)bb + b^4)}{2b}$ vnde reperitur $OV = OA - AV = \frac{ab + bb + bb \mp \surd((ab + bb)^2 - 2(ab - bb)bb + b^4)}{2b}$. Ex quibus colligitur fore $f + OV = a + b + \frac{bb}{b}$ et $f - OV = \frac{\pm \surd((ab + bb)^2 - 2(ab - bb)bb + b^4)}{b}$.

§. 38. Commoda hinc deducitur constructio, ex Fig. 8. qua cum corporis duplex motus oscillatorius, tum pro vtroque pendulum simplex isochronum definietur. Consideretur corpus ACBD in statu quietis, ita vt virga OA et recta AGB situm verticalem teneant, eritque $OA = a$, et $AG = b$; super OG tanquam diametro describatur semicirculus OFG, et per A ducatur recta AF normalis ad OG erit $AF = \surd ab$. Iam existente momento inertiae corporis vt ante $= Pbb$ sumatur $GR = \frac{bb}{b}$ ita vt R futurum sit corporis centrum oscillationis, si ex puncto A suspenderetur, ac bifariam secetur recta OR in puncto E, erit $OE = RE = \frac{a+b}{2} + \frac{bb}{2b} = \frac{ab + bb + bb}{2b}$, et $AE = \frac{ab - bb - bb}{2b}$ tum ducatur recta EF erit $EF = \frac{\surd((ab + bb - bb)^2 + 4ab^3)}{2b} =$

$= \frac{\surd((ab+bb)^2 - 2(ab-bb)bb + b^4)}{2b}$. Quod si ergo centro E radio EF ducatur circulus VFv, eius intersectiones V et v, binos valores rectae OV in praecedente figura exhibebit; simul vero hinc longitudo penduli simplicis isochroni f, definitur. Scilicet si corpus vel circa V vel v de statu quietis deturbatur vtroque casu oscillationes regulares conficiet, ac priori casu longitudo penduli simplicis isochroni erit $f = Ov$, posteriori casu erit $f = OV$.

§. 39. Sit corpus virga recta AB ex materia vniformi facta, erit eius centrum grauitatis in puncto medio G, ita vt longitudo virgae futura sit $AB = 2b$, tum autem erit $bb = \frac{1}{3}bb$; ideoque $f = \frac{a}{2} + \frac{2}{3}b \pm \surd(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{3}ab + \frac{4}{9}bb)$ et $OV = \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b \mp \surd(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{3}ab + \frac{4}{9}bb)$. Ex his manifestum est, si longitudo virgae AB fuerit valde exigua respectu longitudinis $OA = a$, fore vel $f = a + b + \frac{bb}{3a}$ et $OV = \frac{1}{3}b - \frac{bb}{3a}$, vel in altero casu $f = \frac{1}{3}b - \frac{bb}{3a}$ et $OV = a + b + \frac{bb}{3a}$; priori ergo casu corpus circa O quasi corpus rigidum oscillabitur, posteriori vero circa suum centrum oscillationis, quod habet respectu axis O, quae adeo oscillationes celerrime absoluentur. Sit autem $AB = \frac{12}{7}OA$, seu $b = \frac{6}{7}a$, erit vel $f = 2a$ et $OV = \frac{1}{7}a$; vel $f = \frac{1}{7}a$ et OV
Fig. 9. $= 2a$. Priori igitur casu virga AB inter oscillandum eum situm tenebit, quem figura indicat, rotabitur scilicet circa punctum V existente $OV = \frac{1}{7}Oa$; eritque penduli simplicis isochroni longitudo $= OF = 2Oa$.
Fig. 10. Posteriori casu virga AB inter oscillandum eum tenebit situm, quem figura 10 indicat, gyrabitur nimirum circa pun-

punctum V existente $OV = 2\,Oa$ et longitudo penduli simplicis isochroni erit $OF = \frac{4}{3}\,Oa$. Quod si autem virga AB cum filo Oa tanquam corpus rigidum oscillaretur foret longitudo penduli simplicis isochroni $= a + b + \frac{bb}{a+b} = \frac{181}{91}\,Oa$ quae vna parte $\frac{1}{91}$ minor est quam casu priori.

§. 40. Sit corpus ACBD globus ex materia vniformi confectus, qui in puncto A virgae seu filo rigido grauitatis experti OA ita sit alligatus vt circa flexuram in A rotari possit. Erit ergo centrum grauitatis G in centro globi, et globi radius $AG = b$; porro autem momentum inertiae globi ita est comparatum, vt sit $bb = \frac{2}{5}\,bb$. Erit itaque $f + OV = a + b + \frac{bb}{b} = a + \frac{7}{5}b$ et $f - OV = \pm \surd (aa + \frac{6}{5}ab + \frac{49}{25}bb)$ ergo $f = \frac{1}{2}a + \frac{7}{15}b \pm \frac{1}{10}\surd(25\,aa + 30\,ab + 49\,bb)$ et $OV = \frac{1}{2}a + \frac{7}{10}b \mp \frac{1}{10}\surd(25\,aa + 30\,ab + 49\,bb)$ Sin autem globus filo OA firmiter esset affixus, vt in A nulla inflexio fieri queat, tum foret longitudo penduli simplicis isochroni $= a + b + \frac{bb}{a+b} = a + b + \frac{2\,bb}{5\,(a+b)}$; atque si radius globi b respectu a fuerit valde paruus, erit istud pendulum $= a + b + \frac{2\,bb}{5\,a} - \frac{2\,b^3}{5\,aa}$. Casu autem quo flexura in A existit erit longitudo penduli pro superiori signo $f = a + b + \frac{2\,bb}{5a} - \frac{6\,b^3}{25\,aa}$; at pro inferiori erit $f = \frac{2}{5}b - \frac{2\,bb}{5a} + \frac{6\,b^3}{25\,aa}$; atque hoc posteriori casu circa punctum in ipso globo sumtum gyrabitur. Priori autem casu oscillationes fere congruunt cum iis, quae fierent, si in A nulla esset flexura; lentiores tamen erunt paulisper, quoniam pendulum isochronum longius est parte $\frac{4\,b^3}{25\,aa}$; quod discrimen in experimentis capien- Fig. 7.

 dis

dis probe notari debet. Ceterum etsi filum OA est flexile, dummodo sit tenuissimum, inter oscillandum in directum manebit extensum.

Fig. 11. §. 41 Quo hoc clarius pateat substituamus loco fili rigidi OV, cui corpus est alligatum, funem seu catenam OA perfecte flexilem, simulque naturaliter grauem. Manifestum ergo est hunc funem inter oscillandum incurvatum iri, cuius proinde curuatura ante inuestigari debet, quam motum oscillatorium definire liceat. Sit igitur OMA illa curua quam funis inter oscillandum format, atque corpus AB gyretur circa punctum V. Ponatur corporis AB pondus $= P$, eiusque momentum respectu axis horizontalis per centrum grauitatis G ducti atque axi O paralleli $= Pbb$. Quod si iam capiatur $GS = \frac{bb}{VG}$, vis requisita ad motum oscillatorium in corpore AB generandum erit $= \frac{P.Gg}{f}$, applicanda in puncto S normaliter ad AB scilicet in directione S s. At ob rationes supra allegatas hanc eandem vim in directione contraria SQ applicatam concipiamus. Deinde quaeuis funis particula x, cuius massa sit $= dp$ percurrere debet spatiolum xt tempore longitudini penduli simplicis f conformi, ideoque necesse est, vt in directione xt vrgeatur vi $= \frac{xt.dp}{f}$; hanc vero pariter in directione contraria xz applicatam ponemus; vt omnes istae vires cum viribus corpus et funem actu sollicitantibus in aequilibrio consistere debeant.

§ 42. Incipiamus a flexura A in quam agunt vis grauitatis corporis P in directione GP et vis $\frac{P.Gg}{f}$ in directione SQ, illius momentum est $= \frac{P.AG.Gg}{VG}$, huius vero momentum est $= \frac{P.Gg}{f} AS = \frac{P.Gg}{f}(AG + \frac{bb}{VG})$ vnde erit

erit $AG : f = AG . VG + bb$. Cum iam funis in ſingulis punctis ſit flexilis, conſideremus eius punctum quodcunque M, in quod non ſolum vires corpus AB ſollicitantes agunt, ſed etiam vires, quibus ſingula elementa portionis funis MA vrgentur. A vi quidem P in directione GP oritur momentum reſpectu flexurae in M $= P(Gg - Mm)$; a vi autem $\frac{P.Gg}{f}$ in directione SQ oritur momentum in contrariam plagam tendens $= \frac{P.Gg}{f}\left(MA + AG + \frac{bb}{VG}\right)$. Conſideretur iam funis elementum quoduis $x = dp$, a cuius pondusculo naſcitur momentum pro $M = dp(tx - Mm) = xy . dp$; quarum omnium per MA ſumma eſt $= \int tx . dp - Mm . \int dp$. Ex vi autem $xz = \frac{xt . dp}{f}$, oritur momentum $= \frac{xt . Mx . dp}{f} = \frac{xt . dp}{f}(AM - Ax)$ quorum omnium ſumma eſt $= \frac{AM}{f} \int xt . dp - \frac{1}{f} \int xt . at . dp$, quae integralia ab A vſque ad M ſumi debent. Quia igitur omnia momenta pro flexura M orta ſe deſtruere debent erit $P(Gg - Mm) + \int tx . dp - Mm . \int dp = \frac{P.Gg}{f}\left(MA + AG + \frac{bb}{VG}\right) + \frac{AM}{f} \int xt . dp - \frac{1}{f} \int xt . at . dp$, ſumimus autem hic promiſcue am loco curuae AM, quia aberratio a linea recta eſt infinite parua.

§. 43. Cum autem ex flexura in A ſit $\frac{P . AG . Gg}{VG} = P(Gg - Aa) = \frac{P.Gg}{f}\left(AG + \frac{bb}{VG}\right)$ erit pro flexura in M, $P(Aa - Mm) + \int tx . dp - Mm \int dp = \frac{P . MA . Gg}{f} + \frac{AM}{f} \int xt . dp - \frac{1}{f} \int xt . at . dp$. Ponamus iam $am = x$; $Mm = y$, pondus funis $MA = p$; $Oa = a$, $Aa = c$; erit $AM = am = x$; $\int dp = p$; $\int xt . dp = \int y dp$; et $\int xt . at . dp = \int xy dp$. Ponatur porro VA

$= Va = k$, et $AG = b$; erit $VG = b + k$ et $Gg = \frac{e(b+k)}{k}$; eritque primo pro flexura in A; $bf = bb + bk + bb$; atque pro flexura M erit $Pc - Py + \int y\, dp - yp = \frac{Pcx(b+k)}{fk} + \frac{x}{f}\int y\, dp - \frac{1}{f}\int xy\, dp$; seu $P(c-y) - \int p\, dy = \frac{Pcx(b+k)}{fk} + \int \frac{dx}{f}\int y\, dp$, vbi notandum est, si $x = 0$ fieri $y = c$ et si $x = a$, fit $y = 0$. Sumantur autem differentialia vt prodeat $-P\,dy - p\,dy = \frac{Pc\,dx(b+k)}{fk} + \frac{dx}{f}\int y\, dp$. Sumtisque denuo differentialibus posito dx constante habebimus: $-P\,ddy - p\,ddy - dy\,dp = \frac{y\,dx\,dp}{f}$; quae est aequatio pro curuatura funis Q M A.

§. 44. Si funis grauitas euanescat, vel corpus P sit quasi infinitum respectu ponderis funis p, tum fiet $ddy = 0$, funique in directum extendetur, ita vt sit $y = \frac{c(a-x)}{a}$, vti supra notauimus. Sin autem funis ad corpus finitam habeat rationem, ponamus funem vniformis crassitiei, vt sit p ipsi x proportionale, sitque $p = nx$: atque habebimus $0 = P\,ddy + nx\,ddy + n\,dx\,dy + = \frac{ny\,dx^2}{f} = 0$. Sumatur pro aequatione integrali

$$y = c + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \zeta x^6 + \text{etc. erit}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\beta P + 6\gamma Px + 12\delta Px^2 + 20\varepsilon Px^3 + 30\zeta Px^4 + 42\eta Px^5 \text{ etc.} \\ \quad + 2\beta nx + 6\gamma nxx + 12\delta nx^3 + 20\varepsilon nx^4 + 30\zeta nx^5 \text{ etc.} \\ + \alpha n + 2\beta nx + 3\gamma nx^2 + 4\delta nx^3 + 5\varepsilon nx^4 + 6\zeta nx^5 \text{ etc.} \\ + \frac{nc}{f} + \frac{\alpha nx}{f} + \frac{\beta nx^2}{f} + \frac{\gamma nx^3}{f} + \frac{\delta nx^4}{f} + \frac{\varepsilon nx^5}{f} \text{ etc.} \end{array}\right\} = 0$$

hinc ergo erit $2\beta P = -\alpha n - \frac{nc}{f}$; $6\gamma P = -4\beta n - \frac{\alpha n}{f}$; $12\delta P = -9\gamma n - \frac{\beta n}{f}$; $20\varepsilon P = -16\delta n - \frac{\gamma n}{f}$ etc. At ex aequatione $-P\,dy - p\,dy = \frac{Pc\,dx(b+k)}{fk} + \frac{dx}{f}\int y\,dx$ intelligitur, sin $x = 0$, fore ob $p = 0$ et $\int y\,dx = 0$; $dy = -$

cdx

$\frac{c\,dx(b+k)}{fk} = \alpha dx$; ita vt sit $\alpha = -\frac{c(b+k)}{fk}$; hinc erit $\beta = \frac{bcn}{2Pfk}$; $\gamma = -\frac{bcnn}{3PPfk} + \frac{nc(b+k)}{6Pffk}$, etc. Inuentis coefficientibus ponatur $x = a$, et $y = o$, habebiturque aequatio inuoluens incognitas f et k, quae cum aequatione $bf = bb + bk + bb$ coniuncta vtramque determinabit.

§. 45. Sit pondus corporis P valde magnum, vt termini, in quorum denominatoribus P plures vna habet dimensiones reiici queant, eritque $y = c - \frac{cx(b+k)}{fk} + \frac{nbcxx}{2Pfk} + \frac{ncx^3(b+k)}{6Pffk}$; ponatur $x = a$, vt fiat $y = o$ erit $1 - \frac{a(b+k)}{fk} + \frac{naab}{2Pfk} + \frac{na^3(b+k)}{6Pffk} = o$. Sit funis pondus $na = F$ erit $6Pffk - 6Paf(b+k) + 3Fabf + Fa^2(b+k) = o$; vnde ob P valde magnum $f = \frac{a(b+k)}{k} + \frac{Fa(3b+k)}{6Pk} = b + k + \frac{bb}{o}$ ex qua aequatione k indeque f definientur. Cum autem in puncto A sit $\frac{c\,dx}{dy} = -\frac{fk}{b+k}$, erit ob $Aa = c$ subtangens curuae in $A = \frac{fk}{b+k}$: ex subtangente ergo curuae in A cognita cum aequatione $f = b + k + \frac{bb}{b}$ innotescunt f et k. Si corpus appensum P penitus euanescat prodibunt oscillationes funis suspensi perfecte flexilis, quae eaedem deprehendentur, quas iam ante aliquot annos in Comment. Acad. Petropolitanae Cel. Bernoulli et ego inuenimus.

§. 46. Quemadmodum filum OA primum inertiae et grauitatis expers deinde graue quidem at perfecte flexile posuimus, ita nunc loco OA substituamus corpus quodcunque graue et rigidum, quod circa O liberrime rotari queat, in A autem aliud corpus pariter rigidum et graue AB ita habeat connexum, vt id quoque circa flexuram in A liberrime inflecti queat. Sit corporis O Fig. 12.

A

A centrum grauitatis in E, corporis AB autem in F eritque vtrumque corpus in aequilibrio, si centra grauitatis E et F fuerint in recta verticali Ob in punctis e et f sita. Habeat hoc corpus inter oscillandum situm quem figura repraesentat, ita vt corpus OA circa axem O per angulum AOa, corpus autem AB circa axem imaginarium L per angulum BLb a statu aequilibrii sit remotum: e quo situ vi grauitatis ita descendat, vt corpus OA circa axem O, corpus vero AB circa L rotando simul ad situm aequilibrii perueniant; sitque longigitudo penduli simplicis isochroni $= f$. Ponatur corporis OA pondus, quo in directione verticali El vrgetur $= P$, corporis vero AB pondus, quo in directione verticali Fm sollicitatur, $= Q$; atque exprimente P et Q simul massas horum corporum.

§. 47. Per vtriusque corporis centrum grauitatis transire concipiatur axis horizontalis axi O parallelus, atque sit corporis OA momentum inertiae respectu axis $E = Pbb$; corporis autem AB momentum inertiae respectu axis F sit $= Qii$. Quia iam corpus OA circa axem O rotatur, eiusque centrum grauitatis E interuallo Ee a statu aequilibrii distat, erit vis ad motum oscillatorium in eo producendum requisita $= \frac{P.Ee}{f}$, quae normaliter ad BA in directione Rr est applicanda existente $ER = \frac{bb}{OE}$; hanc vero vim $\frac{P.Ee}{f}$ in directione opposita $R\varrho$ applicatam concipiemus. Simili modo cum corporis AB centrum grauitatis F distet a suo aequilibrii situ f interuallo Ff, erit vis ad motum oscillatorium in eo producendum requisita $= \frac{Q.Ff}{f}$, et quoniam hoc corpus circa axem imaginarium L oscillando rotatur, vis

ista

ista in puncto S secundum directionem ad AB normalem $S s$ est applicanda, sumto interuallo $FS = \frac{ii}{LF}$, hanc ergo vim in directione opposita $S\sigma$ applicatam concipiemus. Hic quantitates incognitae ergo sunt longitudo penduli simplicis isochroni f et positio puncti L.

§. 48. Vires igitur quibus corpus hoc oscillans in aequilibrio conseruari debet sunt primo pondera P et Q in directionibus El et Fm sollicitantia, deinde vires $\frac{P.Ee}{f}$ et $\frac{Q.Ff}{f}$ in directionibus $R\varrho$ et $S\sigma$ vrgentes. Momenta ergo harum virium cum respectu flexurae A tum respectu axis O se inuicem destruere debebunt. In flexuram A autem agunt vires Fm et $S\sigma$, quarum momenta sunt $Q(Ff - Aa)$ et $\frac{Q.Ff}{f}.AS = \frac{Q.Ff}{f}(AF + \frac{ii}{LF})$, eritque ideo $f(Ff - Aa) = Ff(AF + \frac{ii}{LF})$. Cum autem sit $Ff : Aa = LF : LA$ erit $f.AF = AF.LF + ii$. In axem O autem agunt omnes vires Fm, El, $S\sigma$ et $R\varrho$: eritque momentum vis $Fm = Q.Ff$; vis $El = P.Ee$; vis $S\sigma = \frac{Q.Ff}{f}(OA + AS) = \frac{Q.Ff}{f}(OA + AF + \frac{ii}{LF})$; vis $R\varrho = \frac{P.Ee}{f} OR = \frac{P.Ee}{f}(OE + \frac{bb}{OE})$. Ex his ergo nascetur aequatio $Q.Ff + P.Ee = \frac{Q.Ff}{f}(OA + AF + \frac{ii}{LF}) + \frac{P.Ee}{f}(OE + \frac{bb}{OE})$. Cum autem sit $Ff : Aa = LF : LA$ et $Aa : Ee = OA : OE$ erit componendo $Ff : Ee = OA.LF : OE.LA$: eritque ideo $Q.OA.LF.f + P.OE.LA.f = Q.OA^2.LF + Q.OA.AF.LF + Q.OA.ii + P.OE^2.LA + P.LA.bb$.

§. 49. Ponamus $OA = a$; $OE = \alpha$; $AB = b$; $AF = \beta$; et $OL = x$ erit ob angulos ad O et L minimos, $AL = a - x$; $LF = a + \beta - x$: qui valores in prima aequatione ſubſtituti dant $\beta f = a\beta + \beta^2 - \beta x + ii$ in altera vero $Qa^2 f + Qa\beta f - Qafx + Pa\alpha f - P\alpha fx = Qa^3 + 2Qa^2\beta - Qa^2 x + Qa\beta^2 - Qa\beta x + Qaii + Pa\alpha^2 - P\alpha^2 x + Pabb - Pbbx$. Ex priori aequatione habetur $f = a + \beta - x + \frac{ii}{\beta}$; qui valor in poſteriori ſubſtitutus dat $P\alpha xx + Qaxx + P\alpha^2 x - 2Pa\alpha x - P\alpha\beta x - \frac{P\alpha iix}{\beta} + Pbbx - Qa^2 x - Qa\beta x - \frac{Qaiix}{\beta} + Pa^2\alpha - Pa\alpha^2 + Pa\alpha\beta + \frac{Pa\alpha ii}{\beta} - Pabb + \frac{Qa^2 ii}{\beta} = 0$. Quae aequatio, cum duas radices contineat, indicat corpus duplici modo ad oſcillationes aequabiles abſoluendas impelli poſſe; hincque vterque modus non ſolum cognoſcitur, ſed etiam pro vtroque longitudo penduli ſimplicis iſochroni reperitur. Si ponatur $P = 0$, tum prodibit caſus ante pertractatus, vbi virgam OA inertiae ac grauitatis expertem aſſumſimus; ſin autem ſit $Q = 0$, ita vt corpus inferius AB vel euaneſcat vel ſuam inertiam ſimulque grauitatem amittat, fiet vel $x = a$ vel $x = a - \alpha + \beta + \frac{ii}{\beta} - \frac{bb}{\alpha}$, priori caſu nullus fit motas circa axem O, poſteriori vero exhibetur motus oſcillatorius ordinarius, ſitque longitudo penduli ſimplicis iſochroni $f = \alpha + \frac{bb}{\alpha}$.

Fig. 13. §. 50. Simili modo intelligitur, quemadmodum ratiocinium ſit inſtituendum, ſi plura corpora rigida ita ſint connexa, vt circa quamque flexuram motus exiſtere poſſit. Ponamus ergo tria corpora OA, AB, et BC hoc modo eſſe connexa, quorum ſupremum OA circa axem horizontalem O immediate mobile ſit, ſeu quod eodem redit habeat corpus OABC duas flexuras in A et B, circa quas eius partes inferiores ſint mobiles. Repraeſentet

tet figura eum situm, ex quo corporis singulae partes ad statum aequilibrii simul perueniant, sitque longitudo penduli simplicis isochroni $= f$. Suprema quidem pars OA aliter nisi circa axem O moueri nequit; at partem secundam AB gyrari ponamus circa axem horizontalem imaginarium in L: eruntque distantiae OL, OM cum longitudine penduli simplicis isochroni f tres quantitates incognitae per aequationes determinandae. Ponamus porro partis OA pondus $= P$ eiusque centrum grauitatis in E: partis AB pondus sit $= Q$, eiusque centrum grauitatis in F, partis autem BC pondus sit $= R$, eiusque centrum gravitatis in G: ducantur verticales El, Fm, Gn quae exprimant sollicitationes ab his ponderibus ortas.

§. 51. Per singularum harum partium centra grauitatis transire concipiantur axes horizontales axi in O paralléli: eorumque respectu quaerantur momenta inertiae: sit igitur partis OA momentum inertiae respectu axis $F = Qii$, et partis BC momentum inertiae respectu axis $E = Pbb$; AB momentum inertiae respectu $G = Rkk$. His cognitis capiantur $ER = \frac{bb}{OE}$; $FS = \frac{ii}{LF}$; $GT = \frac{kk}{MG}$; erunt puncta R, S, T illa loca, vbi applicatae concipi debent vires $R\varrho$; $S\sigma$; $T\tau$, quae ex acceleratione corporis oriuntur Cum autem centrum grauitatis E interuallo Ee distet a statu aequilibrii, centrum grauitatis G interuallo Gg, erit vis $R\varrho = \frac{P \cdot Ee}{f}$; vis $S\sigma = \frac{Q \cdot Ff}{f}$ et vis $T\tau = \frac{R \cdot Gg}{f}$. Istae igitur tres vires effectum trium praecedentium virium El, Fm, et Gn destruere, atque corpus in aequilibrio conseruare debent; Hinc momenta quae ex illis viribus pro flexuris B, A et O nascuntur aequalia esse debent momentis quae ex istis viribus resultant.

§. 52. Ex viribus autem El, Fm, et Gn sequentia emergunt momenta: Scilicet pro flextura B est momentum $= R(Gg - Bb) = \frac{R.Gg.BG}{MG}$, pro flexura A est momentum $= R(Gg - Aa) + Q(Ff - Aa)$; et pro ipso axe O est momentum $= R.Gg + Q.Ff + P.Ee$. At ex viribus $R\rho$, $S\sigma$, et $T\tau$ oriuntur momenta in partem contrariam vrgentia; erit autem pro flexura B momentum $= \frac{R.Gg}{f}(Bg + \frac{kk}{MG})$; pro flexura A momentum est $= \frac{R.Gg}{f}(AB + BG + \frac{kk}{MG}) + \frac{Q.Ff}{f}(AF + \frac{ii}{LF})$ denique pro axe ipso O est momentum $= \frac{R.Gg}{f}(OA + AB + BG + \frac{kk}{MG}) + \frac{Q.Ff}{f}(OA + AF + \frac{ii}{LF}) + \frac{P.Ee}{f}(OE + \frac{bb}{OE})$. Hinc igitur orientur tres sequentes aequationes

$$R(Gg - Bb) = \frac{R.Gg}{f}(BG + \frac{kk}{MG})$$

$$R(Gg - Aa) + Q(Ff - Aa) = \frac{R.Gg}{f}(AB + BG + \frac{kk}{MG}) + \frac{Q.Ff}{f}(AF + \frac{ii}{LF})$$

$$R.Gg + Q.Ff + P.Ee = \frac{R.Gg}{f}(OA + AB + BG + \frac{kk}{MG}) + \frac{Q.Ff}{f}(OA + AF + \frac{ii}{LF}) + \frac{P.Ee}{f}(OE + \frac{bb}{OE})$$

Ex quibus tribus aequationibus primum puncta L et M ac deinceps longitudo penduli simplicis isochroni f determinabitur.

§. 53. Prima aequatio ob $Gg : Bb = MG : MB$ abit in hanc $BG.f = BG.MG + kk$: Atque si a secunda prima auferatur remanebit ista $R(Bb - Aa) + Q(Ff - Aa) = \frac{R.AB.Gg}{f} + \frac{Q.Ff}{f}(AF + \frac{ii}{LF})$. Est autem $Bb - Aa = \frac{AB.Aa}{LA}$; $Ff - Aa = \frac{AF.Aa}{LA}$; et $Ff = \frac{LF.Aa}{LA}$; $Bb = \frac{LB.Aa}{LA}$ atque $Gg = \frac{LB.MG.Aa}{LA.MB}$, ex quibus haec secunda aequatio resultat, $R.AB.f + Q.AF.f = \frac{R.AB.LB.MG}{MB} + Q.AF.LF$

$+ Q.$

$+ Q.ii$. Subtrahatur ſecunda aequatio a tertia ac remanebit: $R.Aa + Q.Aa + P.Ee = \frac{R.OA.Gg}{f} + \frac{Q.OA.Ff}{f} + \frac{P.Ee}{f}(OE + \frac{bb}{OE})$. Verum eſt $Aa = \frac{OA.Ee}{OE}$, $Ff = \frac{OA.LF.Ee}{OE.LA}$, et $Gg = \frac{OA.LB.MC.Ee}{OE.LA.MB}$, ex quibus naſcitur ſequens aequatio tertia; $R.OA.f + Q.OA.f + P.OE.f = \frac{R.OA^2.LB.MC}{LA.MB} + \frac{Q.OA^2.LF}{LA} + P.OE^2 + P.bb$. Habemus ergo tres aequationes inter quantitates finitas tam cognitas quam incognitas, quoniam eliminauimus quantitates infinite paruas Ee, Aa, Ff, Bb, et Gg, ex quibus formari poterit aequatio inter f et cognitas, quae erit trium dimenſionum atque indicat, triplici modo corpus OABC duabus flexuris praeditum ad oſcillationes aequabiles peragendas incitari poſſe.

§. 54. Quodſi corpus oſcillans plures quam duas habeat flexuras, circa quae aeque ac circa axem O motus rotatorius exiſtere queat. Simili modo tam inflexio ad oſcillationes aequabiles producendas neceſſaria, quam longitudo penduli ſimplicis iſochroni definiri poterit. Obtinentur enim tot aequationes, quot ſunt flexurae ipſo axe O quoque pro flexura computato, ex quibus primo axes imaginarii, circa quae partes inferiores gyrantur definiri poterunt, quorum numerus vnitate minor eſt, quam numerus aequationum; ita vt vna aequatio ſuperſit longitudinem penduli ſimplicis iſochroni exhibens. Haec autem aequatio eliminatis poſitionibus axium illorum imaginariorum aſcendet ad tot dimenſiones, quot fuerint flexurae axe O quoque pro vna flexura computato, vnde colligendum eſt, eiusmodi corpus tot variis modis ad oſcillationes vniformes abſoluendas impelli poſſe, quot contineat

tineat partes flexuris inter se iunctas. Pariter scilicet haec oscillationum ratio est comparata, acsi filo inertiae et grauitatis experti plura corpuscula fuerint alligata; quae etiam tot variis modis oscillationes vniformes peragere possunt, quot fuerit ponduscula. Neque vero iste casus ab eo, quem hic tractauimus, aliter discrepat, nisi quod hic corpora flexuris inuicem connexa finitae magnitudinis assumsimus, dum ea ibi infinite parua posuimus: ex quo necesse est, vt ille casus in hoc comprehendatur: formulae autem atque aequationes hic inuentae ad hyppothesin corpusculorum infinitae paruorum accommodabuntur, si quantitates bb, ii, kk euanescant.

DE

DE SONIS MVLTIFARIIS QVOS LAMINAE ELASTICAE DIVERSIMODE EDVNT DISQVISITIONES MECHANICO-GEOMETRICAE EXPERIMENTIS ACVSTICIS ILLVSTRATAE ET CONFIRMATAE.

AVCTORE
Daniele Bernoulli.

§. 1.

Postquam haud ita pridem cum Academia communicaui, quae circa vibrationes et ſonos laminarum elaſticarum iam a multis annis meditatus fueram (*), non deſii hoc argumentum ruminari et ſub alia atque alia facie conſiderare, hisque inquiſitionibus intento, tot egregiae ſe mihi obtulerunt proprietates, vt operae praetium duxerim, ſingulas ad experimenta reuocare, vti vel ii, qui calculos noſtros proſequi non valent, noua tamen theoremata noſtra recte intelligere queant, praeſertim cum fieri non poſſit, quin in huiuscemodi argumentis ad phyſicas quandoque ducamur hypotheſes, de quarum veritate ſola teſtatur experientia. Phyſici eſt primo modum excogitare mechanicum, quo phaenomenon cuius explicatio deſideratur, fieri poſſit, tum demum ex intimis Geometriae et Mechanicae penetralibus rerum ſingularum menſuras deducere ac denique menſuras calculo inuentas cum menſuris quas experimenta indicant comparare, quae ſi inter ſe conueniant, vltimum certitudinis

(*) vid. ſupra diſſ. *De vibrationibus et ſono laminarum elaſticarum.*

tudinis gradum, qui in physica haberi potest, theoriae addunt, idque non solum in rebus, quas experimenta confirmarunt, sed in omnibus etiam reliquis, quae ratiocinio geometrico ex theoria defluunt, etiamsi saepe talis sunt indolis, vt experimenta non admittant.

§. II. Vibrationes in genere in duas classes reduco, eas scilicet, quae ita lente fiunt, vt eas visu distinguere atque sic ad datum tempus numerare liceat, et eas quae ita sunt celeres, vt solo auditu distingui possint ex sono quem generant: theoria nostra omnes et singulas definit, vti ex prima nostra dissertatione apparet, vbi etiam circa vtramqre vibrationum classem experimenta attuli. In sequentibus vero dicam tantum de vibrationibus quae sonum faciunt, quia maior inde vtilitas provenit, eaque physicae pars, quae acustica dicitur, haud parum perficitur.

§. III. Plurimi sunt modi, quibus a lamina elastica sonus elici potest: Praecipuos hic exponam:

Modus primus est, quum lamina elastica muro vel alii obiecto firmo altera sui extremitate infigitur atque sic vibratur. Hunc vero prosecutus sum in prima dissertatione.

Modus secundus est, cum laminae elasticae e filo suspensae percutiuntur; ad hunc vero modum infinitos pertinere alios ex infra dicendis patebit. Notandum autem est in antecessum laminas percussas sonum distinctum non edere, nisi sint crassiusculae.

Modus tertius est, cum laminae ambabus suis extremitatibus duobus planis parallelis perpendiculariter infixae vibrantur aut percutiuntur.

Modus

Modus quartus est, cum ambae extremitates praedictis planis non quidem sunt infixae sed innituntur saltem.

Denique *Modi mixti* dantur quam plurimi.

§. IV. Laminae elasticae dum oscillationes suas perficiunt incuruantur, quae curuatura ante omnia determinanda est: quocunque autem modo vibrentur, quamuis infinitis modis inter oscillandum inflectantur, attamen curuatura earundem perpetuo vna eademque aequatione definitur: aequatio nempe inter abscissas x et applicatas y haec est posita dx constante:

$$d^4 y = \frac{G}{m^4 c} y\, dx^4 \text{ siue breuius } f^4 d^4 y = y\, dx^4$$

hancque aequationem in prima dissertatione §. IV. ex principiis mechanicis deduxi, quod si autem calculus loco citato institutus examinetur, apparebit eundem valere pro omnibus oscillationum modis. Quia vero praefata aequatio est quarti ordinis, ideo quatuor inuoluit arbitrarias constantes, quae vero pro quouis oscillationum exemplo ita sunt seligendae vt problematis conditionibus satisfiat.

§. V. Prouti curuatura laminarum pro omni oscillationum genere vniuersalissime definiri potest, ita et expressio generalissima pro pendulo simplici cum oscillationibus laminae isochronis vbique eadem inseruit: hanc expressionem §. VIII. superioris dissertationis inuenimus, si scilicet desiderata longitudo penduli dicatur L, ostendimus fore semper

$$L = \frac{g f^4}{m^4}$$

in qua expressione littera g denotat vim grauitatis, quae proinde si multiplicetur per longitudinem laminae l exprimat pondus eiusdem laminae; atque si pondus laminae longitudinis l dicatur p erit $g\,l = p$. Tum vero insuper ostendi §. VII. litteram f proportionalem esse longitudini laminae l et rationem inter f et l esse posse ope alicuius aequationis, quae tamen radices infinitas contineat, quarum quaelibet pro alio atque alio casu eiusdem generis oscillationum inseruiat. Denique quantitatem m^4 indicaui pendere ab elasticitate absoluta laminae elasticae. Haec postquam ita erueram, sollicitus fui de modo quo quantitas m^4 experimento definiri possit: nec enim notio clara aequationum haberi potest priusquam quantitates omnes specifice determinatae fuerint, ita vt solae res homogeneae inter se comparentur; huic itaque disquisitioni indulgens sequens mentem subiit experimentum, quod hic ex praemissa dissertatione describam.

Tab. IV. fig. 2. *Experimentum.* Laminam BD longitudinis l infixi verticaliter lacunari eiusque extremitati pondus P appendi, quod mediante trochlea R et funiculo E R P laminam horizontaliter trahens eandem incuruabat in situm BGE; tumque distantiam D E exacte mensurabam; quod si nunc dicatur distantia D E $=$ C, pondus appensum P, inueni §. IX primae dissertationis

$$m^4 = \frac{P\,l^3}{3\,C}$$

atque hoc valore substituto in expressione penduli simplicis inuenitur $L = \frac{3\,g\,f^4}{P\,l^3} \times C$, atque si porro pondus laminae longitudinis B D sit $= p$, erit $g\,l = p$ et $g = \frac{p}{l}$ hocque valore rursus substituto, habetur

$$L = \frac{3\,p}{P} \times \frac{f^4}{l^4} \times C$$

quae iam expressio quantitates pure homogeneas inuoluit,

cum

cum ratio $\frac{f}{l}$ deinceps aequatione pure numerica definiri posse, ostendetur.

§. VI. Redeamus nunc ad aequationem differentialem quarti ordinis qua curuatura laminarum vibratarum in omni casu exprimitur: aequatio nempe haec est

$$f^4 d^4 y = y\, dx^4$$

quae ante omnia ad quantitates finitas reducenda est. Id vero fieri potest duobus modis, integratione nimirum per series et integratione absoluta; aequatio per series resultans vi §. VII. primae dissertationis talis est

$$y = \begin{array}{l} \alpha\left(1 + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4 f^4} + \frac{x^8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot f^8} + \text{etc.}\right) \\ + \beta\left(\frac{x}{f} + \frac{x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5 f^5} + \frac{x^9}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9 f^9} + \text{etc.}\right) \\ + \gamma\left(\frac{xx}{ff} + \frac{x^6}{3\cdot4\cdot5\cdot6 f^6} + \frac{x^{10}}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot f^{10}} + \text{etc.}\right) \\ + \delta\left(\frac{x^3}{f^3} + \frac{x^7}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot f^7} + \frac{x^{11}}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot f^{11}} + \text{etc.}\right) \end{array}$$

intelligo per α, β et δ quatuor arbitrarias constantes quarum ope aequatio generalissima cuiuis oscillationum generi adaequari potest; aequatio absolute integrata vi §. X. praecedentis dissertationis ita se habet

$$y = a\, e^{\frac{x}{f}} + b\, e^{\frac{-x}{f}} + b \text{ Sin. Arc. } \left(\frac{x}{f} + n\right)$$

in qua e denotat numerum, qui pro logarithmo hyperbolico dat vnitatem, dum rursus a, b, b et n quatuor sunt arbitrariae constantes. Signum autem Sin. Arc. denotat sinum arcus in circulo, cuius radius ponitur aequalis vnitati, in quo adeoque circulo sumendus est arcus $\frac{x}{f} + n$; posteaque sinus huic arcui respondens multiplicandus est per b.

Veras esse hasce aequationes integratas patebit ex differentiatione earundem, vbi quidem ratione posterioris aequationis obseruandum erit, quod sit d. Sin. Arc.

$(\frac{x}{f}$

$(\frac{x}{f} + n) = \pm \frac{dx}{f} \times$ Cof. Arc. $(\frac{x}{f} + n)$;
dd Sin. Arc. $(\frac{x}{f} + n) = \frac{-dx^2}{ff} \times$ Sin. Arc. $(\frac{x}{f} + n)$, deinde
d^3 Sin. Arc. $(\frac{x}{f} + n) = \frac{\mp dx^3}{f^3} \times$ Cof. Arc. $(\frac{x}{f} + n)$ ac denique
d^4 Sin. Arc. $(\frac{x}{f} + n) = \frac{dx^4}{f^4} \times$ Sin. Arc. $(\frac{x}{f} + n)$.
Tum etiam patet, easdem aequationes omnem, quam poffunt, habere extenfionem ex eo quod vtraque quatuor gaudeat quantitatibus conftantibus arbitrariis quarum nulla fit fuperflua.

§. VII. His peractis id nunc requiritur vt pro quouis ofcillationum exemplo litterae arbitrariae debito modo defignentur atque tandem aequatio finalis exhibeatur inter f et l; Ifta vero omnia perficientur ad modum §. VII. primae differtationis pro aequatione ad curuam per feries et §. X. pro aequatione altera, ita vt nihil fuperfit quam vt mente recte affequamur modum, quo ofcillationes perficiuntur, vt hinc examinetur, quaenam puncta, quaenam tangentes, quinam radii ofculi etc. ex ipfa ofcillationum natura fine calculo cognita fint, hisque deinde cognitis quantitates arbitrariae accommodentur; Poftquam haec omnia ita peracta fuerint, vltima quae prodibit aequatio inter f et l femper infinitas radices continebit reales; inde colligere eft, laminam eandem fimili plane modo adhibitam, infinitas et diuerfiformes curuaturas inter ofcillandum induere poffe, ita vt vel nullus, vel vnus, vel duo etc. forment nodi; cum nullus formatur nodus, formabitur fonus obtufiffimus; acutior fit fonus, cum nodus vnus eft, deinde cum duo funt nodi et fic porro: Hanc rem illuftrant figura I. II. III. differtationis primae, pro quibus fimul determinaui longitudines nis pendulorum isochronorum sonorumque proportionem: Monstraui scilicet §. XVII. valores rationis l ad f esse proxime vt quadrans vel tres quadrantes vel quinque quadrantes circuli etc. ad radium, vbi tamen sola ratio primi quadrantis simplicis ad radium paullo nimis a vera aberret, quippe quae accuratius multo se habet vt $\sqrt{7}$ ad $\sqrt{2}$; praefatarum autem rationum quadrata dant rationem sonorum, sunt igitur v. gr. in lamina elastica altera sui extremitate muro infixa duo soni infimi proxime vt $\frac{7}{2}$ ad $9qq$, si sit q quadrans circuli, cuius radius est vnitas, siue fere vt 1 ad $6\frac{1}{4}$; ergo sonus secundus erit primi proxime decima nona seu duplicis octauae quinta aut potius duplicis octauae sexta minor, ex qua magna sonorum differentia facile colligitur, reliquos sonos omnes fore imperceptibiles; Duo autem soni infimi cum distincte percipi possint, volui huius corollarii veritatem experimento cognoscere, quod sic institui:

Experimentum. Acum chalybeam vnam fere lineam crassam et 5 pollices longam parieti firmiter infixi, tum obseruaui, si acus tota a situ naturali deturbetur, sonum valde obtusum oriri, si vero extremitas libera eius leniter perstringatur, sonum generari acutum, qui prioris est duplicis octauae circiter quinta, vt habet theoria: plerumque autem ambo soni simul existunt atque distinctissime percipiuntur.

§. VIII. In hoc experimento dixi, ambos saepe sonos simul coexistere et percipi, nec id mirum est; cum neutra oscillatio neutram officiat vel impedimento sit; vtcunque enim lamina ratione vnius oscillationis incuruetur, poterit tamen semper vt recta considerari, ratione al-

alterius oscillationis, quia oscillationes sint et valde infinite plurimae. Ergo oscillationes cuiusuis speciei possunt fieri, sic lamina omni alia oscillatione destituta sit, sin aliis simul oscillationes perficiat. In laminis liberis, quarum oscillationes iamiam examinabimus, saepe tres quatuorque sonos simul percepi.

§. IX. Haec sunt, quae argumento nostro praemonenda esse putaui; iam igitur progredimur ad secundum oscillationum et sonorum inde formatorum genus, cuius mentionem feci in §. II. quaeritur nempe, quae oscillationes fiant et quis sonus generetur, si lamina chalybea paulo crassior e filo suspensa percutiatur; huic examini ansam mihi dederunt experimenta, quae cum prismatibus chalybeis, cuiusmodi in horologiis pro variis cantilenis ab automatis formandis adhibent (Gallis vocantur Carillons) institueram. Haec prismata crassitie tres circiter lineas, latitudine 6 lin. aequabant et longitudine a quatuor usque ad 8. vel 9. pollices exurgebant. Haec dum e filo suspensa percuterem, in longioribus sonos simul plures, in breuioribus vnicum admodum acutum percepi. His vero non statim apparet modus quo laminae oscillationes perficiant, cum nullum adsit punctum fixum, cuius situs per se pateat nec in lamina inflexa tangens alibi innotescat. Primaria igitur mihi cura fuit modum inquirere, quo singulae laminae percussae partes vibrentur, moxque rem totam detexi; tum vero animum subiit in laminis longioribus sonos ex se inuicem separare, ita ut sonus nec aliis mixtus oriretur, sonis singulis veras suas mensuras assignare, denique omnia phaenomena rite explicare.

§. X. Statim atque de hisce nostris oscillationibus cogitare coepi, mente concepi eas hunc in modum fieri:

Sit

Sit nempe (Fig. 1) BD lamina elastica recta per totam suam longitudinem uniformis, quam vt lineam mathematicam considerabimus: patetur lamina percuti; e loco suo a percussione turbabitur quidem lamina, sed quo autem modo [illegible], id nihil ad institutum nostrum facit: mentem abstrahemus a effectu percussionis; unice hic considerandus consistit in motu tremulo intestino ad sonum formandum apto: Hic motus tremulus ita fit, vt lamina recta BCD assumat figuram bcd, idque alternis vicibus ad vnam alteramque partem. Hanc vero oscillationum tremularum ideam ipsa rei natura plane conuenire, luculenter ex infra dicendis elucescet. Hac itaque admissa, licebit *a priori* curuaturae bcd multas proprietates assignare, quarum praecipuas hic enumerabimus.

1°. Si recta BD bifariam secetur in C ducaturque ad BD minima perpendicularis Cc, erit ramus ceb similis et aequalis ramo cfd et vterque ad eandem partem positus ratione lineae BD.

2°. Tangens in c erit lineae BD perfecte parallela.

3°. Radii osculi in extremitatibus b et d sunt infiniti, quia ibi vis inflectens nulla est: sequitur hinc, cum applicatae y ceu infinite paruae considerentur, esse in punctis b et d, $ddy = 0$.

4°. In iisdem punctis b et d etiam fit $d^3y = 0$: Hae duae vltimae proprietates seu corollaria sequuntur ex methodo quam §. IV. primae dissertationis adhibuimus pro inuenienda aequatione ad curuam, ad quam laminae in omni oscillationum genere incuruantur.

5°. Notari etiam potest (quamuis ista notatione non vtemur in sequentibus) centrum grauitatis totius laminae

minae in quemcunque situm inflexae durante tota vibratione constanter permanere in eodem puncto C.

6°. Summas omnium virium accelerantium ad opposítas partes lineae BD esse aequales et contrarias.

7°. Spatia comprehensa inter rectas Be, fD et arcus be, fd simul sumta esse aequalia spatio $ecf e$ ad contrariam partem posito.

Hae sunt proprietates curuae, ad quam lamina elastica vniformis naturaliter recta et percussa, dum oscillationes minimas perficit, incuruatur; harum proprietatum ope poterimus deinceps arbitrarias constantes ad propositum nostrum vtiles definire; aequatio autem curuae $becfd$ eadem semper est nempe $f^4 d^4 y = y dx^4$ pariterque eadem expressio pro longitudine L penduli simplicis isochroni cum vibrationibus laminae, nempe $L = \frac{2p}{P} \times \frac{f^4}{l^4} \times C$.

§. XI. Omnes vero praedictae proprietates etiam subsistere possunt, si lamina vibrari ponatur ad modum figurae secundae vel figurae tertiae et sic porro, ita vt curuatura laminae lineam BD vel in duobus vel in quatuor vel in sex punctis et sic in infinitum intersecet; quo maior autem est numerus intersectionum eo acutior fit sonus: has vero curuaturas sonosque respondentes dicam pertinere ad primam classem. Iam enim monstrabo secundam superesse classem, in qua numerus praefatarum intersectionum similiter in infinitum progredi potest, sed impariter. Seorsim hanc classem indicandam putaui, quia nouo calculo opus habet quamuis parum diuerso.

§. XII. Secundam classem constituunt oscillationes quae fiunt ad normam figurae 4^{tae} et 5^{tae} quarum numerus in infinitum progreditur; differunt curuaturae primae classis a curuaturis secundae, quod numerus intersectiodionum in prima fit, par in secunda impar, et in hac posteriore classe intersectio media C est in ipsa medietate laminae: Vtrique classi singulae proprietates §. X. expositae sunt communes excepta prima et secunda proprietate; ista secunda proprietas nihil ad scopum nostrum facit; diuersitatem autem pro vtraque classe vel ipsae figurae indicant, quod vero ad primam proprietatem attinet, haec nunc ita immutanda est, vt dicamus *ramum* C *e b in figura* 4. *equidem similem et aequalem esse ramo* C *f d sed ad partem contrariam positum ratione lineae* BD: Ita quoque res se habet in figura 5. et in omnibus reliquis, quae mente concipiende sunt. Caeterum intersectines curuaturae cum linea BD deinceps nodos vocabimus, qui plane sunt immobiles, quandoquidem distantiae cuiusuis curuae puncti ab axe BD eandem semper et vbique inter se rationem seruent, ita vt si haec distantia semel nulla fuerit, durante tota oscillatione semper nulla maneat.

§. XIII. His omnibus probe perpensis iam calculos nostros ponemus. Vidimus in prima dissertatione, quod si abscissae x sumantur in axe BD et applicatae minimae y ad BD sint perpendiculares fore $f^4 d^4 y = y dx^4$ et saepe monuimus hanc aequationem pro omni oscillationum genere valere; quia vero quantitas x aequationem non ingreditur et dimensio ipsius dx est par, ideo licet initium abscissarum vbiuis ponere; aptissime autem in praesenti negotio ponitur in puncto C pro vtraque oscillationem classe. Quia vero in classe prima pro figuris I. II. III. etc. valor ipsius y idem est mutata x in $-x$ ob proprietatem 1. §. X. ideo in aequatione

§. VII. faciemus $\varepsilon = 0$ et $\delta = 0$, vt sic solae dimensiones pares litterae x remaneant: tuncque habebimus pro *classe prima*

$$y = \begin{array}{l} \alpha\left(1 + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4 f^4} + \frac{x^8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 f^8} + \text{etc.}\right) \\ + \gamma\left(\frac{xx}{ff} + \frac{x^6}{3\cdot4\cdot5\cdot6 f^6} + \frac{x^{10}}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10 f^{10}} + \text{etc.}\right) \end{array}$$

Similiter in classe secunda pro figuris IV. V. etc. mutata x in $-x$, mutatur y in $-y$ (per §. XII.), atque adeo faciemus $\alpha = 0$ et $\gamma = 0$, vt solae dimensiones impares litterae x remaneant: habebimns igitur *pro classe secunda*

$$y = \begin{array}{l} \varepsilon\left(\frac{x}{f} + \frac{x^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5 f^5} + \frac{x^9}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9 f^9} + \text{etc.}\right) \\ + \delta\left(\frac{x^3}{f^3} + \frac{x^7}{4\cdot5\cdot6\cdot7 f^7} + \frac{x^{11}}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11 f^{11}} + \text{etc.}\right) \end{array}$$

Deinde in vtraque classe (per annotation: 3 et 4. §. X.) posita $x = CD = \frac{1}{2}l$ fit $ddy = 0$ et $d^3y = 0$; Estque autem ob dx constans *in classe prima*

$$ddy = \begin{cases} \alpha dx^2\left(\frac{xx}{1\cdot2 f^4} + \frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 f^8} + \text{etc.}\right) \\ + \gamma dx^2\left(\frac{2}{ff} + \frac{x^4}{3\cdot4 f^6} + \frac{x^8}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 f^{10}} + \text{etc.}\right) \end{cases}$$

$$\text{atque } d^3y = \begin{cases} \alpha dx^3\left(\frac{x}{f^4} + \frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 f^8} + \text{etc.}\right) \\ + \gamma dx^3\left(\frac{x^3}{3 f^6} + \frac{x^7}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7 f^{10}} + \text{etc.}\right) \end{cases}$$

Pariter *in classe secunda* fit

$$ddy = \begin{cases} \varepsilon dx^2\left(\frac{x^3}{2\cdot3 f^5} + \frac{x^7}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7 f^9} + \text{etc.}\right) \\ + \delta dx^2\left(\frac{2\cdot3\,x}{f^3} + \frac{x^5}{4\cdot5 f^7} + \frac{x^9}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9 f^{11}} + \text{etc.}\right) \end{cases}$$

$$\text{atque } d^3y = \begin{cases} \varepsilon dx^3\left(\frac{xx}{2 f^5} + \frac{x^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 f^9} + \text{etc.}\right) \\ + \delta dx^3\left(\frac{2\cdot3}{f^3} + \frac{x^4}{4 f^7} + \frac{x^8}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 f^{11}} + \text{etc.}\right) \end{cases}$$

Iam vero in vtraque classe facta $x = \frac{1}{2}l$ debent elementa ddy et d^3y euanescere; hinc duplici modo tam $\frac{\alpha}{\gamma}$ quam $\frac{\varepsilon}{\delta}$ per aequationem habetur et sic vtrobique ae-

quatio

quatio finalis inuenitur inter l et f. Hisce vestigiis insistendo reperietur recte ordinatis terminis *pro classe prima.*

$$\left(2+\frac{l^4}{3\cdot4\cdot2^4f^4}+\frac{l^8}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot2^8f^8}+\text{etc.}\right):\left(\frac{ll}{1\cdot2\cdot2^2ff}+\frac{l^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot2^6f^6}+\text{etc.}\right)$$
$$=\left(\frac{ll}{3\cdot2^2ff}+\frac{l^6}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot2^6f^6}+\text{etc.}\right):\left(1+\frac{l^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot2^4f^4}+\text{etc.}\right)$$

pariterque habebitur *pro classe secunda.*

$$\left(2\cdot3+\frac{l^4}{4\cdot5\cdot2^4f^4}+\frac{l^8}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot2^8f^8}+\text{etc.}\right):\left(\frac{ll}{2\cdot3\cdot2^2ff}+\frac{l^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot2^6f^6}+\text{etc.}\right)$$
$$=\left(2\cdot3+\frac{l^4}{4\cdot2^4f^4}+\frac{l^8}{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot2^8f^8}+\text{etc.}\right)\cdot\left(\frac{ll}{2\cdot2^2ff}+\frac{l^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot2^6f^6}+\text{etc.}\right)$$

Ex istis duabus aequationibus inueniuntur pro quauis oscillationum classe omnes valores rationis $\frac{l}{f}$, vtraque enim aequatio infinitas dat radices reales. In prima classe valor minimus rationis $\frac{l}{f}$ inseruit pro figura prima; radix sequens pro figura secunda et sic porro: In secunda classe radix minima rationis $\frac{l}{f}$ respondet figurae quartae, radix sequens figurae quintae sicque deinceps. Non licet autem nisi operoso calculo ad radices appropinquare, isteque calculus fit fere insuperabilis, cum figuram tertiam vel quintam transgredimur. At si methodo altera, quae aequatione absolute integrata §. VI. innititur, vtamur, istud negotium expedite absoluitur eoque accuratius, quo plures nodos lamina vibrata format. Volui tamen hac priori etiam methodo calculum inire, vt viderem vtriusque methodi conformitatem sicque altera methodus altera confirmaretur. Inueni itaque

pro figura prima pro x. $\frac{l^4}{f^4}=496$

pro figura secunda pro x. $\frac{l^4}{f^4}=14608$

pro figura quarta pro x. $\frac{l^4}{f^4}=3824$

His addo ex priori dissertatione casum simplicissimum, quo lamina eiusdem longitudinis l seu BD muro infixa vibratur (vid. §. VII. superioris dissertationis) atque sic habebimus

pro figura sexta pro x. $\frac{l^4}{f^4} = 12, 25$.

Ista vero quia nunc breuius et acuratius beneficio alterius aequationis absolute integratae absoluam, eorum applicationem deinceps dabo.

§. XIV. Iam itaque considerabimus aequationem generalissimam integratam §. VI. expositam et explicatam, nempe

$$y = a e^{\frac{x}{f}} + b e^{\frac{-x}{f}} + b \text{ Sin. Arc } \left(\frac{x}{f} + n\right)$$

quae rursus omnes omnino oscillationes continet nunque ad praesentes oscillationum species ope proprietatum §. X. indicatarum applicanda est. Obseruabimus autem proprietati primae §. X. satisfieri, si fiat $b = a$ et $n =$ quadranti circuli cuius radius est vnitas, quem quadrantem indicabimus littera q: proprietati autem §. XII. expositae satis fit ponendo $b = -a$ et $n = 0$, ergo habebimus *pro classe prima*

$$y = a e^{\frac{x}{f}} + a e^{\frac{-x}{f}} + b \text{ Sin. Arc.} \left(\frac{x}{f} + q\right)$$

et *pro classe secunda*

$$y = a e^{\frac{x}{f}} - a e^{\frac{-x}{f}} + b \text{ Sin. Arc.} \frac{x}{f}$$

In hisce ambabus aequationibus supersunt determinandae litterae a et b, quod rursus fiet ope 3. et 4. annotationis §. X. quae iubent, vt fiat $ddy = 0$ et $d^3y = 0$, cum ponitur $x = \pm \frac{1}{2} l$. Habebitur itaque *pro classe prima*

$$a e^{\frac{l}{2f}} + a e^{\frac{-l}{2f}} - b \text{ Sin. Arc.} \left(\frac{l}{2f} + q\right) = 0$$

atque $$a e^{\frac{l}{2f}} - a e^{\frac{-l}{2f}} + b \text{Cosin. Arc.} \left(\frac{l}{2f} + q\right) = 0$$

harum-

harumque duarum aequationum beneficio tandem aequatio pura habetur inter l et f, exprimendo duplici modo valorem $\frac{a}{b}$, erit nempe

$$\frac{\text{Sin. Arc.}\left(\frac{l}{2f}+q\right)}{e^{\frac{l}{2f}}+e^{\frac{-l}{2f}}}=\frac{-\text{Cosin. Arc.}\left(\frac{l}{2f}+q\right)}{e^{\frac{l}{2f}}-e^{\frac{-l}{2f}}}$$

Pariterque fiet *pro secunda classe*

$$a e^{\frac{l}{2f}}-a e^{\frac{-l}{2f}}-b \text{ Sin. Arc. } \frac{l}{2f}=0$$

atque $$a e^{\frac{l}{2f}}+a e^{\frac{-l}{2f}}-b \text{ Cosin. Arc. } \frac{l}{2f}=0$$

quae ambae aequationes inter se combinatae dant

$$\frac{\text{Sin. Arc. } \frac{l}{2f}}{e^{\frac{l}{2f}}-e^{\frac{-l}{2f}}}=\frac{\text{Cosin. Arc. } \frac{l}{2f}}{e^{\frac{l}{2f}}+e^{\frac{-l}{2f}}}$$

In hisce vero ambabus aequationibus, quas pro ratione $\frac{l}{f}$ pure determinanda dedimus, reiiciamus statim terminum $e^{\frac{-l}{2f}}$, qui prae termino socio $e^{\frac{l}{2f}}$ valde paruus est statim atque $\frac{l}{2f}$ vix binarium excedit: In hac hypothesi habebimus simpliciter *pro prima classe*

$$\text{Sin. Arc. }\left(\frac{l}{2f}+q\right)=-\text{Cosin. Arc. }\left(\frac{l}{2f}+q\right)$$

et *pro secunda classe*

$$\text{Sin. Arc. } \frac{l}{2f}=\text{Cosin. Arc. } \frac{l}{2f}$$

aequatio prior dat, si per n intelligatur qualiscunque numerus integer affirmatiuus,

$$\frac{l}{2f}=\frac{4n-1}{2}q \text{ siue } \frac{l}{f}=(4n-1)q$$

secunda autem aequatio facit

$$\frac{l}{2f}=\frac{4n-3}{2}q \text{ siue } \frac{l}{f}=(4n-3)q$$

vtraque aequatio continetur in hac generaliori

$$\frac{l}{f}=mq$$

si per m intelligatur qualiscunque numerus impar affirmatiuus. Vt vero iam intelligamus, quisnam numerus m in quouis casu sit accipiendus, notabimus quod crescente numero nodorum, oscillationes fiant citiores, simulque adeo pendulum isochronum §. V. determinatum fiat breuius, sicque quantitas $\frac{f}{l}$ decrescat, id est, quantitas $\frac{l}{f}$ crescat: ergo quo maior est numerus nodorum eo maior continue numerus m accipiendus erit; vnde sequitur si vel in vnico casu appareat, quisnam numerus m respondeat numero cuicunque nodorum, idem de omnibus reliquis patescere: perspicuum autem est, minimo nodorum numero respondere valorem minimum quantitatis $\frac{l}{f}$; iam vero in classe prima oscillationum nodi ad minimum duo sunt, tumque fit $4n-1$ seu $m=3$; si itaque generaliter numerus nodorum dicatur N, erit respondens valor $\frac{l}{f} = (2N-1)q$.

Notetur autem hosce praefatos valores rationis l ad f non omnino exactos esse quidem, sed tamen vero proximos imo insensibiliter a veris aberrare, modo tres sint nodi, et cum nunquam pauciores duobus sint nodi, ideo nunc examinabimus correctionem adhibendam pro duobus nodis.

Cum itaque duo sint nodi, diximus esse proxime $\frac{l}{f} = 3q$; verum autem valorem exprimi aequatione

$$\frac{\text{Sin. Arc.}\left(\frac{l}{2f}+q\right)}{e^{\frac{l}{2f}}+e^{\frac{-l}{2f}}} = \frac{-\text{Cosin. Arc.}\left(\frac{l}{2f}+q\right)}{e^{\frac{l}{2f}}-e^{\frac{-l}{2f}}}$$

: ponamus iam $\frac{l}{f} = 3q+2\alpha$ et consideremus quantitatem α vt valde paruam; Sic erit

Sin.

$$\text{Sin. Arc.}\left(\frac{l}{2f}+q\right)=\text{Sin. Arc.}\left(\tfrac{3}{2}q+\alpha\right)=-V\tfrac{1}{2}-\alpha V\tfrac{1}{2}$$

$$\text{Cosin. Arc.}\left(\frac{l}{2f}+q\right)=\text{Cosin. Arc.}\left(\tfrac{3}{2}q+\alpha\right)=V\tfrac{1}{2}+\alpha V\tfrac{1}{2}$$

$$e^{\frac{l}{2f}}=e^{\frac{3}{2}q+\alpha}=e^{\frac{3}{2}q}+\alpha e^{\frac{3}{2}q}$$

$$e^{\frac{-l}{2f}}=e^{-\frac{3}{2}q-\alpha}=e^{-\frac{3}{2}q}-\alpha e^{-\frac{3}{2}q}$$

His substitutis valoribus in nostra aequatione prodit

$$\frac{-V\tfrac{1}{2}-\alpha V\tfrac{1}{2}}{e^{\frac{3}{2}q}+\alpha e^{\frac{3}{2}q}+e^{-\frac{3}{2}q}+\alpha e^{-\frac{3}{2}q}}=\frac{-V\tfrac{1}{2}+\alpha V\tfrac{1}{2}}{e^{\frac{3}{2}q}+\alpha e^{\frac{3}{2}q}-e^{-\frac{3}{2}q}+\alpha e^{-\frac{3}{2}q}}$$

quae recte reducta dat tandem $\alpha = e^{\frac{1}{3}q}+1 =$ proxime 0, 0089 et consequenter $\frac{l}{f}=4,7213$ atque $\frac{l^4}{f^4}=497$, qui numerus fere non differt ab altero quem §. XIII. circa finem methodo plane diversa eruimus. Simul autem liquet, ex allato exemplo, quam parum aequatio $\frac{l}{f}=(2N-1)q$ a vera abludat; poterit igitur ista correctio in reliquis casibus omnibus, vbi multo minoris momenti fit, tuto negligi. Hinc vero nunc talia deduco corollaria.

1°. Sit numerus nodorum N, erit vt iam dictum est proxime

$$\frac{l}{f}=(2N-1)q.$$

2°. Pendulum isochronum $L=\frac{3p}{P}\times\frac{f^4}{l^4}\times C$ (per §. V.) $=\frac{3p}{P}\times\frac{1}{(2N-1)^4 q^4}C$ et quia quantitates p, P, C eadem sunt pro vna eademque lamina, erunt pendula isochrona in ratione reciproca biquadrata dupli nodorum numeri vnitate diminuti.

3°. Cum ex data penduli simplicis longitudine innotescat numerus oscillationum intra minutum secundum et cum etiam experimentis constet in instrumento musico ad tonum choralem composito sono infimo C respondere 116 vibrationes intra minutum secundum, apparet in singulis

 casi-

casibus. sonum laminae definiri posse numeris absolutis. Erunt autem soni proxime in ratione quadrata nodorum numeri dupli vnitate diminuti, id est, vt $(2N-1)^2$

4°. Cum vi §. XV. superioris dissertationis sit pro figura sexta longitudo penduli isochroni $= \frac{12}{49} \times \frac{l}{p} \times C$, licebit sonos praefatos ad hunc tanquam fundamentalem referre, quem designabimus per vnitatem tuncque erit quam proxime

I. Sonus pro figura sexta 1, 000
II. Sonus pro figura prima 6, 345
III. Sonus pro figura quarta 17, 627
IV. Sonus pro figura secunda 34, 545
V. Sonus pro figura quinta 57, 105
VI. Sonus pro figura tertia 86, 308

Numerus secundo loco positus iusto paullo maior est, correctionem eius supra dedimus eaque adhibita prodit 6, 317, tantilla autem sonorum differentia, cum multum absit vt auribus percipi possit, legem generalem infringere nolui. Sonus secundus est primi circiter octauae duplicis sexta minor: tertius secundi est octauae quarta maior quartus tertii fere est octaua: tum sequitur sexta maior et tandem vltimus penultimi efficit propemodum quintam.

§. XV. Atque sic tandem determinauimus omnia et singula, quae sonos eorumque diuersitates spectant: Superest, vt dicamus de locis nodorum, siue vt determinemus loca, in quibus applicata y euanescat. Id vero non nisi taedioso satis calculo perficitur attamen cum istud argumentum necessario ad institutum nostrum pertineat, iniquum foret istud, quicquid sit laboris, plane recusare. Potest res ista perfici rursus tum ope aequationum §. XIII.

tum

tum etiam ope aequationum absolute integratarum §. XIV. vtraque methodo pro exemplis aliquibus vsus fui et eadem proxime nodorum loca vtraque inueni: Hic vero relicta methodo priori ad alteram refugiemus et conueniet rursus ambas oscillationum classes seorsim considerare.

§. XVI. Inuenimus §. XIV *pro classe prima* hanc aequationem

$$y = a e^{\frac{x}{f}} + a e^{\frac{-x}{f}} + b \,\text{Sin. Arc.} \left(\frac{x}{f} + q\right)$$

tum etiam ostendimus in eodem paragrapho versus finem esse proxime $\frac{l}{f} = (2N-1)q$ siue $f = \frac{l}{(2N-1)q}$: Substituatur iam iste valor quantitatis f et habebitur talis aequatio

$$y = a e^{\frac{(2N-1)qx}{l}} + a e^{\frac{-(2N-1)qx}{l}} + b \,\text{Sin. Arc.} \left(\frac{(2N-1)qx}{l} + q\right)$$

et quia in nodis fit $y = 0$, habebitur

$$(A)\ a e^{\frac{(2N-1)qx}{l}} + a e^{\frac{-(2N-1)qx}{l}} + b \,\text{Sin. Arc.} \frac{(2N-1)qx + ql}{l} = 0$$

vbi $b = \left(a e^{\frac{(2N-1)q}{2}} + a e^{\frac{-(2N-1)q}{2}}\right)$; Sin. Arc. $\left(\frac{2N+1}{2}\right)q$ et N est numerus quicunque par: At vero simul est Sin. Arc. $\left(\frac{2N-1}{2}\right) q = \mp \sqrt{\frac{1}{2}}$; est igitur $b = \mp \left(e^{\frac{(2N-1)q}{2}} + e^{\frac{-2(N-1)}{2}q}\right) a\sqrt{2}$; substituto isto valore in aequatione (A) factaque diuisione terminorum per a, habebitur

$$(B)\ e^{\frac{(2N-1)qx}{l}} + e^{\frac{-(2N-1)qx}{l}} = \mp \left(e^{\frac{(2N-1)q}{2}} + e^{\frac{-(2N-1)q}{2}}\right) \sqrt{2} \times \text{Sin. Ar} \frac{(2N-1)qx + ql}{l}.$$

In hac vltima aequatione potest terminus $e^{\frac{-(2N-1)q}{2}}$ tuto negligi prae termino socio $e^{\frac{(2N-1)q}{2}}$ praesertim si numerus N, qui quidem par est, binarium excedat et caſus, in quo $N = 2$, ſeorſim ſupputetur; admiſſa iſta reiectione tanquam nullius momenti, mutatur aequatio (B) in hanc

(C) $e^{\frac{(2N-1)qx}{l}} + e^{\frac{-(2N-1)qx}{l}} = \pm e^{\frac{(2N-1)q}{2}}$ $\sqrt{2} \times$ ſin. Arc. $\frac{(2N-1)qx+ql}{l}$. Antequam in reductione huius aequationis vlterius progrediamur, e re erit, quaedam monere de ambiguitate ſigni $\pm$ membri ad dextram poſiti; orta iſta ambiguitas fuit ex aequatione ſupra adhibita, vbi poſuimus Sin. Arc. $\frac{2N+1}{2} q = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$, ex quo patet ſigna ſuperiora valere ſi ſit N numerus impariter par, et ſigna inferiora, cum N eſt numerus pariter par, vel etiam notari poterit, quantitatem $\pm e^{(\frac{2N-1}{2})q} \sqrt{2} \times$ Sin. Arc. $\frac{(2N-1)qx+ql}{l}$ in omni caſu eſſe affirmatiuam, ita vt ſignum ſuperius ſeligendum, cum quantitas Sin. Arc. $\frac{(2N-1)qx+ql}{l}$ eſt affirmatiua, inferius ſi ſit negatiua.

Nunc vero aequationi (C) talis concilietur forma

(D) $\pm$ Sin. Arc. $\frac{(2N-1)qx+ql}{l} = e^{\frac{(2N-1)\times(2qx+ql)}{2l}}$ $\sqrt{\frac{1}{2}} + e^{\frac{(2N-1)\times(-2qx-ql)}{2l}}$ $\sqrt{\frac{1}{2}}$, deinde ponatur $\frac{(2N-1)qx+ql}{l} = 2mq + \alpha$, intelligendo per m numerum quemcunque integrum; ita vt $2mq$ exprimat vel ſemicirculum vel circulum integrum vel ſeſquicirculum et ſic porro; quoties autem α arcum exprimet non admodum magnum, erit proxime Sin. Arc. $(2mq + \alpha)$ $= \mp (\alpha - \frac{\alpha^3}{6})$, vbi ſignum ſuperius valet vel inferius, prouti m fuerit numerus impar vel par. Hiſce factis ſubſtitutionibus mutabitur aequatio (D) in hanc

(E)

$$(E)\ \pm(\mp)\left(\alpha-\tfrac{\alpha^3}{6}\right)=e^{(2m-1)q+\alpha-\left(\frac{2N-1}{2}\right)q}$$

$\sqrt{\tfrac{1}{2}}+e^{-(2m-1)q-\alpha-\left(\frac{2N-1}{2}\right)q}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ quia vero in hypotheſi verſamur eſſe α arcum partiulum, licebit ponere $e^{\alpha}=1+\alpha$ et $e^{-\alpha}=1-\alpha$, ſimulque licebit ſimpliciter ponere α loco $\alpha-\frac{\alpha^3}{6}$: Sub hiſce hypotheſibus mutabitur aequatio (E) in hanc

$$(F)\ \pm(\mp)\alpha=e^{(2m-1)q-\left(\frac{2N-1}{2}\right)q}\times(1+\alpha)\sqrt{\tfrac{1}{2}}+e^{(2m-1)q-\left(\frac{2N-1}{2}\right)}$$

$\times(1-\alpha)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, haecque vltima aequatio dat

$$(G)\ \alpha=\frac{e^{(2m-1)q-\left(\frac{2N-1}{2}\right)q}\sqrt{\tfrac{1}{2}}+e^{-(2m-1)q-\left(\frac{2N-1}{2}\right)q}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}{\pm(\mp)1-e^{(2m-1)q-\left(\frac{2N-1}{2}\right)q}\sqrt{\tfrac{1}{2}}+e^{-(2m-1)q-\left(\frac{2N-1}{2}\right)q}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}$$

atque haec tandem proxime erit vera, eoque propius, quo numerus nodorum N maior eſt, numerusque m e contrario minor: notandum autem eſt, ſi ſumatur $m=1$, determinari nodum puncto medio C proximum, ſi $m=2$ oriri nodum ſequentem et ſic porro, vnde liquet maximum numerum m eſſe dimidium numerum nodorum, tum etiam attendenti facile patebit in numeratore et denominatore terminum vltimum non mereri vt eius ratio habeatur, hoc igitur reiecto vtrobique, multiplicatoque tam numeratore quam denominatore per $e^{-(2m-1)q}$ $+\left(\frac{2N-1}{2}\right)^q\sqrt{2}$, fiet tandem

$$(H)\ \alpha=\frac{1}{\pm(\mp)\,e^{\left(\frac{2N-4m+1}{2}\right)q}\sqrt{2}-1}$$

vnde iam videmus recte a nobis tractatam fuiſſe α tan-

 quam

quam admodum exiguam, quippe nunquam ad $\frac{1}{4}$ assurgentem. Inde vero statim eruitur valor quaesitus ipsius x, cum enim possuimus supra $\frac{(2N-1)qx+ql}{l} = 2mq + \alpha$, erit $x = \frac{2m-1}{2N-1} l + \frac{\alpha l}{2Nq-q}$, siue

$$x = \frac{2m-1}{2N-1} l + \frac{l}{(2Nq-q) \times \left(\pm (\mp) e^{\frac{2N-4m+1}{2} q \sqrt{2-1}}\right)}$$

videbitur fortasse ista methodus nodorum positiones determinandi et nimis operosa et minus accurata. Ego vero, concinniorem methodum nec video nec expecto velimque adeo vt hic perpendatur ad naturam huius problematis quo requiritur formula generalis, quae nunc vnam, nunc duas, nunc tres radices et sic porro quousque libuerit exhibeat, quod concinniori formula praestari posse non crediderim: Docuit me quoque et experientia et calculus specialis exemplorum, in quibus formulae nostrae vel maxime aberrare deberent, eas esse plusquam credi posset, accuratas, nec profecto vllos sine praeuio examine rigoroso reieci terminos. Sic itaque tuto formulis nostris vtemur in examine experimentorum quae hac de re institui posse deinceps docebimur; Nunc vero aliquas notas hic adiiciam.

I. In formulis nostris signa adsunt dupliciter ambigua; notabitur igitur, quod iam monui, attendendum primo esse an numerus N sit vel impariter par vel pariter par, si prius inter signa ambigua anteriora superius est seligendum, si posterius, signum valebit inferius. tum ratione signorum ambiguorum parenthesi inclusorum obseruandum est, superius valere si m est numerus impar, id est, si nodus a puncto medio c vel primus vel tertius vel quintus

tus etc. desideratur, inferius autem signum adhibendum erit, si m sit numerus par siue si nodus vel secundus, vel quartus, vel sextus quaeratur.

II. Nodi singuli fere aequaliter a se inuicem distant, praesertim nodi circa medium positi, accuratius autem rem considerando nodorum interualla alternis vicibus tantillum crescunt et decrescunt a medio versus extremitates; interuallorum autem proximorum bigae continuo decrescunt.

III. Vt habeatur distantia vltimi nodi ab extremitate; faciendum est $2m = N$; sicque primo reperitur $x = \frac{N-1}{2N-1}$

$$l - \frac{l}{(2Nq-q)(e^{\frac{1}{2}q}\sqrt{2}+1)} = \text{proxime } \frac{N-1}{2N-1}\,l -$$

$\frac{12\,l}{41(2Nq-q)} = $ proxime $\frac{129N-149}{235N-129}\,l$; si haec quantitas subtrahatur ab $\frac{1}{2}\,l$, reperietur distantia quaesita $= \frac{169}{510N-258}\,l$.

§. XVII. Quod in superiori paragrapho praestitimus pro prima oscillationum classe, in quibus numerus nodorum par est, simili modo pro secunda classe seu numero nodorum impari efficitur. Tunc autem, si numerus nodorum ad vtramque partem rursus dicatur N, et exponens nodi, cuius positio determinanda est, sit m incipiendo a puncto medio C, ita vt nodus primus dicatur ille qui puncto C est proximus, secundus qui hunc sequitur et ita porro; his, inquam, factis denominationibus, dico fore pro secunda oscillationum classe:

$$x = \frac{2ml}{2N-1} + \frac{l}{(2Nq-q)\times\left(\pm(\mp)e^{\frac{(2N-4m-1)q}{2}}\sqrt{2}-1\right)}$$

quae quidem formula altera pro prima oscillationum clas-

se

ſe data non differt, niſi quod hic habeatur $m + \frac{1}{2}$, quod ibi eſt m; neque id difficulter praeuideri potuiſſet, ſi animum attendiſſemus, quod cum nodus ſit in ipſo puncto medio C, qui aequaliter pertinet ad vtramque partem CB et CD, poſſit exponens nodi reſpectu figurarum ad primam claſſem pertinentium cenſeri $m + \frac{1}{2}$. Caeterum hic inter ſigna ambigua priora $\pm$ ſuperius ſeligendum eſt, cum numerus $N + 1$ eſt pariter par, inferius cum eſt impariter par, et inter ſigna ambigua poſteriora ($\mp$) ſuperius accipiendum eſt cum m eſt numerus impar et inferius cum m eſt numerus par.

§. XVIII. Ex comparatione vtriusque formulae, qua determinauimus diſtantias nodorum a puncto medio C, apparet poſſe vtramque eadem aequatione comprehendi; ſit ſcilicet N qualiscunque numerus integer, erit

$$x = \frac{Ml}{2N-1} + \frac{l}{(2Nq-q)\times\left(\pm(\mp)e^{\frac{2N-2M-1}{2}q\sqrt{2}} - 1\right)}$$

Pro hac autem formula notandum erit M exprimere duplum nodi exponentem, ſi numerus omnium nodorum eſt impar, et ſi iſte numerus par ſit tunc M exprimemere duplum nodi exponentem vnitate diminutum; quia vero ſignorum ambiguorum diiudicatio non ita concinna eſt, vtemur potius formulis praecedentium paragraphorum. En igitur nodorum tabellam pro figuris hic appoſitis, in qua tota laminae longitudo ponitur 1000 partium.

Pro figura prima

Cf vel Ce = 280

fD vel eB = 220

Pro

Pro figura quarta
Cf vel $Ce = 369$
fD vel $eB = 131$
Pro figura secunda
Cb vel $Cg = 144$
Cf vel $Ce = 407$
bf vel $ge = 263$
fD vel $eB = 93$
Pro figura quinta
Cb vel $Cg = 223$
Cf vel $Ce = 427$
bf vel $ge = 204$
fD vel $eB = 73$
Pro figura tertia
Cm vel $Cl = 91$
Cb vel $Cg = 274$
mb vel $mg = 183$
Cf vel $Ce = 440$
bf vel $ge = 166$
fD vel $eB = 60$

§. XIX. Atque sic apparet locos nodorum pro quouis nodorum numero siue pari siue impari quanta sufficit accuratione determinari posse, quae res potissimum ad institutum nostrum pertinebat.

Nihil vero addo de aliis modis, quibus soni a lamina elastica elici possunt, quorum aliquos §. III. exposui, cum nunc manifestum sit, quemadmodum vibrationes animo sint vbique concipiendae et quomodo deinceps calculus earum sit instituendus. Iam itaque manum de tabula remouebo, postquam ea, quae in hoc nostro argu-

argumento physica sunt, experimentis confirmauero. Duplici enim ratiocinio hactenus dicta eruimus, altero physico, quo statuimus vibrationes laminae liberae et percussae iis fieri modis, quos figurae nostrae indicant; altero pure geometrico, supra omnem dubitationem posito. Ratiocinium autem physicum quamuis non dubitem, quin vni cuique statim sit plane probabile, non poterit tamen pro certo haberi, priusquam id experimentis fuerit confirmatum; Spero itaque non ingratum fore, si hic apposuero experimenta, quae institui et obseruationes quas feci circa diuersos sonos diuersimode e laminis elicitos, iis praesertim, quibus geometria non satis imbutis experimenta instar demonstrationum sunt.

Experimenta et Corollaria Physica.

Virgis vsus sum cylindricis vitreis diuersarum longitudinum et crassitierum: crassissimae diameter quatuor lineis paullo maior erat; At vero qui nostra imitari volet experimenta melius faciet virgas adhibendo chalybeas; cylindricas vero prismaticis praefero, quod in illis oscillationes eaedem sint in quocunque plano fiant: Atque cum talibus virgis cylindricis sequentia institui experimenta.

I. Virgam duobus extremis digitis in certo loco apprehendi pendulamque sustinui, tumque eam claue, quam altera detinebam manu percussi: Sonum edidit virga percussa vel obscurum, oppressum, ilico extinctum, vel clarum, liberum, diutiusque durantem; haecce duo sonorum genera ab inuicem differunt, vt soni campanae medio diffissae a Sonis campanae integrae

Ex

Ex hac obſeruatione ſtatim iudicaui, ſonum diſtinctum et clarum tunc eſſe, cum virga in nodo aliquo digitis apprehenderetur, obſcurum vero et ſuppreſſum fieri, cum locus attactus nodo nulli reſponderet. In hac ſententia mox confirmatus fui.

II. Deinde ſucceſſiue virgam a medio verſus extremitatem alterutram per omnia loca apprehendi totiesque altera manu percuſſi; tum vero loca illa, quibus ſonum clarum ſonorumque percipiebam notaui, eorumque diſtantiis ab extremitate acceptis iisdemque collatis cum menſuris in tabula XVIII. exhibitis, conſenſum egregium deprehendi: hic tamen notandum eſt, loca iſta latitudinem aliquam habere, cum ſoni poſt minimam digitorum mutationem non ſtatim totam ſuam plenitudinem vel accipiant vel deperdat.

III. Dum experimentum ita inſtituerem, vt modo dictum eſt, obſeruaui ſonos praefatos nunc fieri acutiores; cuius rei rationem intelliges, ſi primo fingas virgam digitis apprehenſam in *l* figurae tertiae, ſumta ſcilicet C*l* 91 part. (vid. tabell. §. XVIII.) tuncque ſonus exprimetur numero 86, 305 vid. §. XIV. Deinde ſi ſumas diſtantiam a puncto medio C 144 part. habebis punctum *g* figurae ſecundae, ſonusque reſpondebit numero 34, 545; tum vero fac diſtantiam a puncto medio C 223 part. reſpondebit iſte locus puncto *g* figurae quintae, ſonusque erit vt 57, 105: Poſtea diſtantiam illam ſume 274 part. habebis punctum *g* figurae tertiae, rurſusque ſonum 86, 305 et ſic porro.

Nota Sonos fieri poſſe a nimia virgae longitudine vel nimis breui ita graues aut acutos vt percipi amplius non possint: Sonus autem maxime grauis, qui a virga percussa edi potest, respondet figurae primae sumta B*e* vel D*f* = 220 partium: obseruaui porro virgam vitream, cuius diameter erat 3 lin. longitudo 8. poll. sonum edidisse *f*, qui intra minutum secundum facit circiter 600 vibrationes; quod si igitur statuamus sonum acutissimum qui distingui possit, soni *f* esse octauam triplicem, seu efficere oscillationes 4800 intra minutum secundum, sequitur virgulam vitream 3 lineas in diametro habentem sonum distinctum nullo modo edere, cum est breuior duobus pollicibus cum decem lineis. Si deinde assumatur sonus grauissimus perceptilis esse sub octauam triplicem soni *f*, dicendum erit virgam vitream tres lineas crassam, 22 poll. longiorem etsi in puncto debito *e* vel *f* figurae primae apprehensum sonum amplius non edere: Quia vero positio puncti *g* figurae tertiae non differt notabiliter a positione puncti *e* figurae primae, ideo tunc potius auditur sonus figurae tertiae respondens, qui se habet ad sonum figurae primae vt 86305 ad 6345 seu proxime vt $13\frac{1}{2}$ ad 1.

IV. In virgis longioribus saepe fit vt duo soni simul distincte percipiantur: quamuis vnus altero paullulum distinctiot et clarior; Id vero oritur a proximitate nodorum ad diuersas figuras relatorum quae proximitas nodorum, quorum numerus senarium transcendit, facile contingit.

V. Praefatum phaenomenon semper contingit cum virga puncto medio C apprehenditur, quia punctum istud medium commune est figurae quartae, quintae et reliquis omnibus ad classem secundam pertinentibus, adeo vt vt simul infiniti soni producantur, quorum autem communiter duo tantum aut tres sunt perceptibiles ob nimiam acutiem vel grauitatem reliquorum.

Haec ita se habent cum virga vnico in puncto detinetur; sequuntur nunc experimenta, cum virga simul duobis vel pluribus in locis cohibetur.

VI. Si virga in duobus, tribus, vel quot quot adsunt nodis simul cohibeatur, semper orietur sonus clarus, et si vel vnico in loco extra positionem nodi detineatur, sonus illico suffocabitur ita v. gr. in figura quinta notentur puncta e, g, C, b, f, ad normam tabellae §. XVIII. atque in singulis punctis virga detineatur, ita tamen vt obices appositi angulo acuto virgam coërceant, sonus clarus percipietur talisque et idem permanebit si obicem vnum alterumue remoueas; sed opprimetur sonus si locus obicis cuiuscunque notabiliter mutetur. Notandum tamen hic est, postquam nodi ex tabella notati in virga fuerint, tum demum loca vera experimentis accuratius esse exploranda, quod facile fiet, si nodum vnum post alterum inquiras; haecque tantilla correctio necessaria est, quia virgae raro sunt plane vniformiter crassae et elasticae, tum etiam quod tabellae numeri non sint ita accurrati, quin vna alteraue particula deficere possint; Denique virgarum crassities, cuius nullam rationem fecimus, tum sonos tum nodorum loca aliquantillum mutare possunt.

VII. Denique experimenta feci circa sonos laminae diuersis modis vibratae: primo nempe exploratis nodis e et f in figura prima siue calculo siue tentando, virgam in nodis istis detentam percussi sonumque quantum potui

 con-

consonum in clauicymbalo obseruaui; idemque deinde feci ratione nodorum et sonorum reliquis figuris respondentium; tum collatos inter se sonos numeris expressi et mihi sane visum est post crebra tentamina, sonos istos quam proxime se habere vt indicatur §. XIV. ita v. gr. distincte percepi sonum figurae quartae esse soni figurae primae vndecimam minorem plusquam completam, quod idem et indicat tabella sonorum exhibita §. XIV.

Fateor tamen quod in virgis chalybeis crassiusculis aliquando soni progrediendo a grauissimis sonis ad acutiores, hi in ratione paullo maiori creuerint quam tabella indicat, quod maximam partem crassitiei virgae, ad quam nullam attentionem fecimus, adscribo: quo enim sunt virgae crassiores, eo acutiorem sonum edunt; crassities autem quamvis eadem sit in eadem virga, tamen in minoribus nodorum distantiis sonum magis intendere potest, quam cum nodi maiori interuallo a se inuicem distant.

DE

DE DESCENSV CORPORVM SVPER PLANO INCLINATO ASPERO

AVCTORE
L. Euler.

§. 1.

Eadem principia, ex quibus in superiori dissertatione motum corporum super plano horizontali aspero, quatenus is a frictione turbatur, determinaui atque explicaui, multo latius patent, eorumque ope plurima alia phaenomena motuum corporum exponi et euolui possint. In hac quidem dissertatione constitui vsum istorum principiorum ante stabilitorum ostendere in motu corporum super plano inclinato descendentium definiendo, in quo negotio pariter frictionis rationem maxime spectari oportet. Singularia autem in hoc motu phaenomena deprehenduntur, quorum consensus cum conclusionibus ex memoratis principiis deductis vniuersae theoriae veritatem maxime corroborabit, quae confirmatio respectu eorum, qui nexum veritatum tam distincte intueri non valent, haud exigui momenti est existimanda. Etsi enim leges motus, vnde haec deducuntur, aeque sunt necessario verae, ac regulae quibus in arithmetica et geometria vtimur, tamen quemadmodum in arithmeticis operationibus probationes adhiberi solent, ita in mechanicis conclusiones ex principiis deriuatas per experimenta comprobari conuenit. Tab. IV.

§. 2. Phaenomena, quae in descensu corporum super plano inclinato occurrunt, potissimum huc redeunt, sari putandum est, quam confectio eiusmodi plani laeuigatissimi, omni frictione carentis.

§. 5. Consideremus ergo corpus ELMD plano inclinato immobili ita impositum, vt basi ED planum contingat, sit autem hoc corpus adhuc in quiete, in quo statu perpetuo esset permansurum, nisi a vi externa, cuiusmodi est grauitas ad motum impelleretur. Accedat igitur grauitas, qua corpus in directione verticali GP deorsum sollicitatur, erit haec vis vtique aequalis ponderi corporis, quod sit $= P$, eiusque directio GP transibit per centrum grauitatis corporis G. Resoluatur haec vis P corpus in directione GP sollicitans in duas laterales, quarum alterius directio sit recta GH parallela plano AB, alterius vero GFN normalis ad AB, erit, vti constat, illa vis $\frac{AC}{AB}$. P haec vero $= \frac{BC}{AB}.P$, ducta BC horizontali, ac AC verticali. Effectus ergo grauitatis in hoc consistet, vt corpus primum sollicitetur in directione GH a vi $= \frac{AC}{AB}.P$, ac praeterea in directione GN a vi $= \frac{BC}{AB}.P$. Harum virium si posterior $\frac{BC}{AB}$P in directione ad planum AB normali agens sola adesset, tum vtique corpus in suo situ perpetuo quiesceret, si quidem recta GF intra basin DE, qua corpus planum contingit cadat, hocque casu effectus vis $\frac{BC}{AB}$P in sola pressione consumetur, qua corpus in planum AB normaliter aget premendo vi $= \frac{BC}{AB}$P; idque actu ad motum cieret, nisi esset immobile: Sin autem normalis GF extra basin DE cadat, tum corpus in eam partem procumbet in quam recta GF cadit.

Fig. 7.

§. 6.

§. 6. Altera autem vis $\frac{AC}{AB}.P$, cuius directio est GH, quia planum AB eius actioni non obstat, corpus actu promouebit in directione GH eique motum progressiuum inducet. Quamdiu enim corpus est in quiete frictio plani, quantacunque ea sit, nullum effectum exerit, at statim ac corpus ELMD a vi $\frac{AC}{AB}.P$ moueri incipit, resistentia frictionis subito aderit, corpusque in directione opposita DA retrahet. Quamobrem nisi vis promouens $\frac{AC}{AB}P$ maior fuerit, quam frictio, corpus in directione GH promoueri non poterit. Neque vero frictio soli motui progressiuo quem vis $\frac{AC}{AB}P$ in corpore producere conatur, reluctatur sed etiam, quoniam eius directio DA non per centrum grauitatis corporis G transit, corpori motum rotatorium circa axem per centrum grauitatis eius G transeuntem atque ad planum ACB normalem, imprimere annitetur, actuque imprimet, nisi magnitudo basis DE, aliaeque circumstantiae post exponendae hunc effectum impediant. Quoniam enim corpus non est liberum, sed plano immobili AB incumbit, non sufficit ad motum rotatorium generandum vim rotatorium adesse, sed etiam tantam esse oportet, vt obstacula ab immobilitate plani AB oriunda superare valeat.

§. 7. Ante omnia igitur quantitatem frictionis, quam corpus, statim ac motu suo planum radere incipit, sentit, determinari oportet. In praecedente quidem dissertatione exposui, quemadmodum frictionem super plano horizontali aspero per experimenta explorare oporteat, neque autem hanc frictionem in praesenti casu adhibere licet, eo quod corpus non toto suo pondere plano inclinato incumbit, hincque minorem frictionem patiatur necesse est. Tam ratio enim quam experientia docet, quo maiori vi idem corpus contra idem planum asperum apprimatur, frictionem in eadem ratione augeri debere. Quare cum vis, qua corpus ad planum inclinatum apprimetur, constet sitque $= \frac{BC}{AB} . P$, poterimus huius principii ope ex frictione corporis super plano AB secundum horizontem disposito, quantitatem frictionis inferre, quam idem corpus super eodem plano inclinato patietur. Sit igitur F frictio, quam planum AB horizontale factum corpori ELMD sibi imposito obiicit, quod frictio horizontalis appellari solet: quoniam hoc casu pressio aequalis est ponderi toti P, erit frictio eiusdem corporis super plano inclinato $AB = \frac{BC}{AB} . F$.

§. 8. Antequam inuestigemus vnde motus rotatorius proueniat, atque an corpus ELMD motum rotatorium sit concepturum? ponamus corpus hoc solo motu progressiuo super plano inclinato descendere seu ad corporum classem pertinere in quibus vis frictionis nullum motum rotatorium producat, etsi ad huc ignoramus, in quo ratio huius rei sit posita. Primum igitur manifestum est hoc corpus ad motum incitari non posse, nisi vis vrgens $\frac{AC}{AB} . P$ maior sit frictione $\frac{BC}{AB} . F$, hoc est nisi sit $\frac{AC}{BC} > \frac{F}{P}$. Quoniam igitur $\frac{AC}{BC}$ exponit tangentem anguli eleuationis plani ABC, posito sinu toto $= 1$, patet quamdiu anguli ABC tangens minor fuerit quam $\frac{F}{P}$, tum corpus perpetuo in quiete esse permansurum: simulac vero inclinatio plani AB tanta statuatur, vt eius tangens excedat valorem $\frac{F}{P}$ corpus descendere incipere. Hinc deducitur

tur facilis modus frictionem horizontalem F per planum inclinatum explorandi, ab Illustri Bilfingero adhibitus: notetur enim angulus B, quo corpus tantum non super plano inclinato descendere incipit, quo per experimenta inuento erit frictio horizontalis $F = \frac{AC}{BC} . P$.

§. 9. Ponamus itaque esse $\frac{AC}{BC} > \frac{F}{P}$, atque corpus super plano inclinato actu descendet. Inceperit ergo corpus descensum suum ex puncto summo A, atque iam peruenerit in M absoluto spatio $AM = x$. Ponatur eius celeritas in M debita altitudini v, et quia in directione MB sollicitatur vi $= \frac{AC}{AB} P$, in eadem vero retardatur vi $= \frac{BC}{AB} . F$, erit vis acceleratrix corporis in directione $MB = \frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} . \frac{F}{P}$, propter massam corporis simulque pondus $= P$. Ex his dum corpus per elementum dx progreditur erit $dv = (\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB} . \frac{F}{P}) dx$ hincque $v = \frac{(AC.P - BC.F) x}{AB.P}$. Descendet igitur corpus frictione non obstante motu vniformiter accelerato, et aequalibus temporibus aequalia celeritatis incrementa capiet. Cui phaenomeno si experientia aduersari videatur, caussa aberrationis aperte in resistentia aeris deprehenditur, quae cum sit quadrato celeritatis proportionalis vniformem accelerationem maxime perturbat. Sublata autem resistentia aeris, corpus absoluto spatio A B celeritatem acquiret tantam, quantam in vacuo, libero lapsu adipisceretur per altitudinem $= AC - BC . \frac{F}{P}$. Fig. 8.

§. 10. Videamus iam quid requiratur ad hoc, vt corpus motum progressiuum, quem determinauimus, purum prosequi possit neque rotationi seu prouolutioni sit obnoxium. Videmus autem a frictione oriri momentum Fig. 9.

tendens ad corpus in sensum MDE conuertendum circa axem horizontalem per centrum grauitatis G transeuntem et ad planum ACBG normalem, hocque momentum esse $= \frac{BC}{AB} F. GF$; quare corpus sine prouolutione progredietur secundam directionem GMH, si istud momentum impeditur, quominus in effectum deducatur. Ponamus per hoc momentum corpus iam ita procliue ad voluendum esse factum, vt soli baseos extremitati D innitatur, atque tantum non incipiat circa D circumagi. In hoc statu, tota pressio $\frac{BC}{AB}. P$, quam corpus in planum AB exerit in vnicum punctum D colligetur, ita corpus in solo puncto D planum AB premat normaliter tota sua vi $\frac{BC}{AB} P$, et nisi planum resisteret, hac vi corpus actu ad motum impelleretur. Cum igitur plani firmitas hanc vim destruat, idem est acsi, sublato plano, corpus indirectione DQ ad AB normali vrgeretur vi $= \frac{BC}{AB}. P$, cuius momentum respectu axis per centrum grauitatis G transeuntis est $= \frac{BC}{AB} P. GQ = \frac{BC.DF}{AB}. P$, atque directe repugnat momento superiori ex frictione orto.

§. 11. In hoc igitur corpus versabitur statu, vt a quatuor viribus sollicitetur, quarum prima in directione GH est $= \frac{AC}{AB}. P$, secunda in directione GF est $= \frac{BC}{AB} P$ tertia in directione DA est $= \frac{BC}{AB}. F$, et quarta in directione DQ est $= \frac{BC}{AB}. P$. Binae priores quia earum directiones per centrum grauitatis transeunt ad motum rotatorium nihil conferunt; tertia autem conatur corpus in eam ipsam plagam rotare, in quam rotari debet, si

vllus

vllus motus rotatorius actu subsequitur, eiusque momentum est $= \frac{BC.GF}{AB}.F$. Quartae vis effectus huic motui rotatorio est contrarius, eiusque momentum est $= \frac{BC.DF}{AB}.P$. Quamobrem nisi illud momentum maius sit quam hoc, motus rotatorius nullus producetur; hincque corpus motu radente seu motu progressiuo puro secundum directionem GH progredietur, si fuerit $\frac{BC.DF}{AB}.P > \frac{BC.GF}{AB}.F$ hoc est si sit $\frac{DF}{GF} > \frac{F}{P}$. Ducta autem ex centro grauitatis G ad basis extremitatem infimam D recta GD, erit $\frac{DF}{GF}$ tangens anguli DGF; quoties itaque tangens anguli DGF maior fuerit quam $\frac{F}{P}$ posito sinu toto $= 1$, toties corpus motu progressiuo solo super plano inclinato descendet, dummodo fuerit $\frac{AC}{BC} > \frac{F}{P}$, alioquin enim corpus perpetuo in quiete persisteret.

§. 12. Facillime itaque iudicare poterimus, vtrum datum corpus super plano inclinato descensurum sit motu radente puro, an vero voluendo: ad hoc scilicet tantum attendere debemus, vtrum $\frac{DF}{GF}$ seu tangens anguli DGF maior sit an minor fractione $\frac{F}{P}$. Priori enim casu, quo $\frac{DF}{GF} > \frac{F}{P}$ corpus motu progressiuo puro descendet; casuque posteriore, quo $\frac{DF}{GF} < \frac{F}{P}$ simul motum rotatorium recipiet. Quoniam in hoc criterio eleuatio plani inclinati seu angulus ABC non inesse deprehenditur, perspicuum est, quod corpus in vna plani eleuatione sine prouolutione descendat, idem in omni alia eleuatione quacunque sine prouolutione esse descensurum; hocque plurima experimenta a Cel. Professore Krafft instituta constanter comprobauerunt. Neque igitur in iudicio hac de-

 re-

re ferendo ſpectari oportet rectam verticalem ex centro grauitatis corporis ductam, vtrum ea extra baſin an intra cadat; vti aliquibus auctoribus placuit; ſed ex ſolo angulo D G F totum iudicium eſt petendum.

§. 13 Si igitur frictio horizontalis F adaequet pondus corporis abſolutum P, tum fit fractio $\frac{F}{P} = 1$ quae eſt tangens anguli 45°. Hoc igitur caſu corpus ELMD motu progreſſiuo puro deſcendet, ſi angulus DGF maior fuerit ſemi recto. Si frictio horizontalis F fuerit ad pondus P vti 1 ad 2, ideoque $\frac{F}{P} = \frac{1}{2}$, quae fractio eſt tangens anguli 26°, 34′; in hac ergo hypotheſi, niſi angulus DGF maior fuerit angulo 26°, 34′, corpus ſine prouolutione deſcendere nequit. Sin autem frictio horizontalis F ſubtripla ponderis P. quae ratio vulgo in lignis obſeruari ſolet, erit $\frac{F}{P} = \frac{1}{3}$, et angulus taugentem habens $= \frac{1}{3}$ erit $=$ 18°, 26′: ex quo angulum DGF maiorem eſſe oportet 18°, 26′, ſi quidem corpus ſine rotatione daſcendere debeat. Si planum AB data opera fuerit politum, pariter ac baſis corporis DE tum fere deprehenditur $\frac{F}{P} = \frac{1}{4}$, eritque adeo $\frac{F}{P}$ tangens anguli 14°, 2′, corpus igitur ſolo motu radente deſcendet ſi angulus DGF maior fuerit quam 14°, 2′. Ex his facile erit de parallelepipedo iudicare, vtrum motu radente, an voluente ſuper plano inclinato ſit deſcenſurum; et ſi figura fuerit minus regularis cognito loco centri grauitatis totum iudicium abſoluetur.

§. 14 Operae autem praetium erit corpora prismatica, quorum ſectiones ad axem normales ſint polygona regularia ſeorſim perpendere; quae vel ex materia vniformi conſtent, vel ſaltem ſuum grauitatis centrum in medio

dio

dio axis positum habeant. Huiusmodi igitur prisma ita imponatur plano inclinato, vt eius axis situm teneat horizontalem. Repraesentet figura DHIKLE eiusmodi prisma, cuius singulae sectiones sint polygona regularia n laterum. Erit ergo angulus $DGF = \frac{180}{n}$ graduum. ex quo eiusmodi prisma sine prouolutione descendet si fuerit tangens anguli $\frac{180°}{n}$ maior quam $\frac{F}{P}$. Casu itaque quo $\frac{F}{P} = 1$, prisma triangulare tantum sine rotatione descendet; quadrangulare enim iam in ipso termino prouolutionis versatur. Sin $\frac{F}{P} = \frac{1}{2}$. numerus laterum minor esse debet quam 7, vt descensus sine prouolutione absoluatur. At si $\frac{F}{P} = \frac{1}{3}$ prisma polygonum 9 laterum adhuc radendo descendet, quae autem plura habent latera voluentur. Sit denique $\frac{F}{P} = \frac{1}{4}$, atque ex superioribus cocluditur, prismata polygona pauciorum quam 13 laterum omnia sine motu rotatorio esse descensura. Fig. 10.

§. 15. Quoniam igitur inuenimus, quomodo corpus comparatum esse oporteat, vt motu progressiuo solo descensum absoluat; simul intelligimus, quibus casibus motus rotatorius corpori descendenti inferatur. Quoties scilicet fractio $\frac{DF}{GF}$ minor fuerit fractione $\frac{F}{P}$, corpus descendere non poterit, quin simul voluatur. Quod si ergo perpendiculum GF, quod ex centro grauitatis G in planum inclinatum AB demittitur, in ipsam basis extremitatem deorsum spectantem D cadit, tum ob $DF = 0$, corpus semper motum rotatorium recipiet, nisi ipsa frictio F fuerit nulla: quo tamen casu in ipso rotationis termino erit constitutum. Sin autem perpendiculum GF adeo extra basin infra D cadat, tum ob $\frac{DF}{GF}$ negatiuum Fig. 9.

ide-

ideoque nihilo minus, corpus voluetur, etiamsi frictio omnino euanuerit. In hoc autem statu corpus ne quidem super plano horizontali consistere poterit, propterea quod perpendiculum ex centro grauitatis demissum extra basin cadit: sed statim prolabetur; quod quidem ex primis staticae principiis est manifestum. Super plano inclinato autem accedit momentum vis prosternentis $\frac{BC.DF}{AB}.P$, quod quia fit negatiuum, solum motum rotatorium generabit.

§. 16. Perspicuum autem est, nisi corpus fuerit rotundum, eiusque axis situm horizontalem teneat, motum rotatorium vehementer fore irregularem. Statim enim ac motus rotatorius incipit, tum corpus in solo puncto

Fig. 10. D plano innitetur, et circa hoc punctum conuertetur, donec alia facies puta DH plano inclinato applicuerit; hocque, quia cum impetu euenit, simul ex percussione mutatio in corporis motu orietur; rotatio vero circa angulum D subito sistetur, et corpus vel sine motu rotatorio moueri perget, vel circa sequentis basis extremitatem H motum rotatorium nanciscetur. Turbabitur ergo descensus huiusmodi corporum continuis saltibus, atque adeo percussionibus, ita vt motus nullo modo ad expressiones algebraicas vniformes reuocari queat; sed continuo dum alia basis plano inclinato se aplicat, nouo calculo erit opus; haecque operatio eo erit difficilior, quo magis corpus a figura rotunda recedat.

Fig. 11. §. 17. Persequamur igitur praecipue corpora rotunda, in quibus motus rotarorius sine subitaneis alterationibus locum habere potest. Incumbat scilicet huiusmodi corpus rotundo ita plano inclinato AB vt eius axis sit ho-

horizontalis, atque ad planum verticale ACB normalis; huius porro corporis rotundi centrum grauitatis G positum in medio axis puncto, partesque corporis vtrinque sitae sint inter se aequales et similes; praeterea vero axis sit permanens, vt corpus circa eum libere rotari possit, quemadmodum in praecedente dissertatione exposuimus. Exponat circulus LMD vel sectionem axi normalem per centrum grauitatis G factam, vel aliam quamcunque maximam, qua corpus planum contingit. Sit igitur huius sectionis radius $GD = c$, et pondus corporis maneat vt ante $= P$ eiusque momentum inertiae respectu axis sit $= Pbb$. Vidimus autem supra huius momenti valorem pro praecipuis speciebus corporum rotundorum: si nempe corpus fuerit cylindrus ex materia vniformi constans, tum erit $bb = \frac{1}{2}cc$; et si corpus fuerit vel globus, vel sphaeroides ellipticum pariter vniforme erit $bb = \frac{2}{5}cc$. Denique sit F frictio horizontalis huius corporis rotundi, quam sentiret super plano AB horizontali motu radente solo promotum.

§. 18. Inceperit hoc corpus descensum suum super plano inclinato AB ex A. vbi initio in quiete fuerit constitutum, perpendiculo GD in A incidente: absolueritque iam spatium $AD = x$. In statu hoc praesente duplicem habebit motum, progressiuum et rotatorium: sit igitur celeritas motus progressiui, qua centrum grauitatis G indirectione GH parallela plano AB progreditur debita altitudini v: celeritas vero rotatoria, qua punctum quoduis periphaeriae M circa axem G in plagam Mm D circumfertur, debita sit altitudini u. Dum igitur corpus motu progressiuo pergit per elementum spatii Gg

$=dx$, punctum M motu angulari in m perueniet, vt sit $Mm = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$. Celeritas autem puncti D, qua planum in directione DB radet, erit $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$; ideoque interea radet per elementum $= (1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})dx$. Quoniam igitur effectus frictionis, quae est $= \frac{BC}{AB}F$, dato tempusculo proportionalis est spatiolo, per quod frictio exercetur, erit frictionis vis, dum corpus per elementum dx progreditur, non $\frac{BC}{AB}.Fdx$ sed $= \frac{BC}{AB}(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})Fdx$; qua corpus in directione DA retrahetur.

§. 19. A pondere autem corporis P corpus in directione GH sollicitatur vi $= \frac{AC}{AB}.P$, ad planum vero apprimitur in directione GD vi $= \frac{BC}{AB}P$, quam planum ita absorbet, vt inde nulla vis ad corpus rotandum resultet eo quod interuallum DF euanescit. Accelerabitur igitur corpus in directione GH vi acceleratrice $\frac{AC}{AB} - \frac{BC}{AB}(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\frac{F}{P}$. Motus autem rotatorius a sola frictione accelerabitur, eritque vis acceleratrix, qua punctum M dum per Mm rotatur, $= \frac{BC}{AB}(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\frac{Fcc}{Pbb}$. Ponatur anguli ABC sinus $= m$, cosinus $= n$, ita vt sit $mm + nn = 1$ posito sinu toto $= 1$; erit $\frac{AC}{AB} = m$ et $\frac{BC}{AB} = n$. Per effectum igitur sollicitationum momentanearum habebimus has duas aequationes

$$dv = mdx - n(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\frac{Fdx}{P}$$
$$du = n(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\frac{Fccdx\sqrt{u}}{Pbb\sqrt{v}}$$

Ex quibus aequationibus integrando colligi poterit corporis in quouis loco tam motus rotatorius quam progressiuus: integratio autem ita perfici debet vt posito $x = 0$ tam $\sqrt{v}$ quam $\sqrt{u}$ euanescat; quoniam corpus in A motum ex quiete inchoasse ponimus.

§. 20.

§. 20. Quia tres habemus variabiles x, u, et v, earum vnam eliminari oportet: commodissime autem x eliminatur, quoniam in vtraque aequatione tantum dx inest. Prior autem aequatio dat $dx = \frac{Pdv\sqrt{v}}{mI\sqrt{v} - uF\sqrt{v} + nF\sqrt{u}}$; posterior vero aequatio dat $dx = \frac{Pbbvdu}{nFcc\sqrt{vu} - nFccu}$; vnde inter v et u hanc acquirimus aequationem $\frac{dv}{mP\sqrt{v} - nF\sqrt{v} + nF\sqrt{u}} = \frac{bbdu\sqrt{v}}{nFcc\sqrt{vu} - nFccu}$, quae posito $\frac{bb}{cc} = k$ abit in $nFdv\sqrt{vu} - nFudv = kmPvdu - knFvdu + knFdu\sqrt{vu}$. Cum haec aequatio sit homogenea ponamus $v = ttu$, vt sit $dv = ttdu + 2tudt$, factaque substitutione habebimus istam aequationem: $nFut^3du + 2nFt^2u^2dt - nFttudu - 2Fnstuudt = kmPttuduk - nFtttudu + knFtudu$, quae peracta variabilium separatione transit in hanc: $\frac{2nFttdt - 2nFtdt}{kmPtt - knFtt + knFt - nFt^3 + nFtt} = \frac{du}{u}$, siue diuisione per t instituta in hanc $\frac{du}{u} = \frac{2nFtdt - 2nFdt}{-nFtt + (kmP - knF + nF)t + knF}$.

§. 21. Ad hanc aequationem integrandam ponamus breuitatis gratia $kmP - knF + nF = 2gnF$, ita vt sit $g = \frac{kmP - knF + nF}{2nF}$ eritque $\frac{du}{u} = \frac{2dt - 2tdt}{tt - 2gt - k}$, quae ob $tt - 2gt - k = (t - g + \sqrt{(gg + k)})(t - g - \sqrt{(gg + k)})$, abit in $\frac{du}{u} = \frac{\frac{g - 1 - \sqrt{(gg+k)}}{\sqrt{(gg+k)}}dt}{t - g + \sqrt{(gg+k)}} - \frac{\frac{g + 1 - \sqrt{(gg+k)}}{\sqrt{(gg+k)}}dt}{t - g - \sqrt{(gg+k)}}$ cuius integrale est $lu = lC + \frac{g - 1 - \sqrt{(gg+k)}}{\sqrt{(gg+k)}}l(t - g + \sqrt{(gg + k)}) - \frac{g + 1 - \sqrt{(gg+k)}}{\sqrt{(gg+k)}}l(t - g - \sqrt{(gg + k)}) = lC + \frac{g - 1}{\sqrt{(gg+k)}}l\frac{t - g + \sqrt{(gg+k)}}{t - g + \sqrt{(gg+k)}} - l(tt - 2gt - k)$. Alogarithmis iam ad numeros concludendo erit $u(tt - 2gt - k) = C\left(\frac{t - g + \sqrt{(gg+k)}}{t - g + \sqrt{(gg+k)}}\right)^{\frac{g-1}{\sqrt{(gg+k)}}}$ atque loco t restituendo $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$ erit $v - 2g\sqrt{vu} - ku = C\left(\frac{\sqrt{v} - g\sqrt{u} + \sqrt{u(gg+k)}}{\sqrt{v} - g\sqrt{u} - \sqrt{u(gg+k)}}\right)^{\frac{g-1}{\sqrt{(gg+k)}}}$. Ad constantem C ad nostrum

strum casum accommodandam, ponamus $u = 0$ quod initio motus euenit, eritque $v = C$; quoniam vero et hoc casu est $v = 0$, erit $C = 0$; ideoque $v - 2g\sqrt{vu} - ku = 0$. Ex qua aequatione oritur vel $\sqrt{v} = (g + \sqrt{(gg + k)})\sqrt{u}$ vel $\sqrt{v} = (g - \sqrt{(gg + k)})\sqrt{u}$. Manifestum autem est priorem tantum aequationem locum habere posse, quia in descensu vtraque celeritas $\sqrt{v}$ et $\sqrt{u}$ est affirmatiua.

§. 22. Cum igitur posito $g = \frac{kmP - knF + nF}{2nF} = \frac{mbbP - nbbF + nccF}{2nccF}$ sit $\sqrt{v} = (g + \sqrt{(gg + k)})\sqrt{u}$: perpetuo in descensu corporis super plano AB motus progressiuus ad motum rotatorium eandem conseruabit rationem: eritque in singulis locis celeritas corporis progressiua $\sqrt{v}$ ad celeritatem rotatoriam $\sqrt{u}$ vti $g + \sqrt{(gg + k)}$ ad 1 seu vti k ad $\sqrt{(gg + k)} - g$, existente $k = \frac{bb}{cc}$. Si igitur fuerit $\frac{F}{P} = \frac{1}{3}$ pro cylindro ob $k = \frac{1}{2}$ erit $g = \frac{3m + n}{4n}$ et $\sqrt{(gg + k)} = \frac{\sqrt{(9mm + 6mn + 9nn)}}{4n}$; ideoque $\sqrt{v} : \sqrt{u} = 3m + n + \sqrt{(9mm + 6mn + 9nn)} : 4n$. Eadem vero hypothesi pro globo vel sphaeroide elliptico, ob $k = \frac{2}{5}$ erit $g = \frac{6m + 3n}{10n}$ et $\sqrt{(gg + k)} = \frac{\sqrt{(36mm + 36mn + 49nn)}}{10n}$ hincque fiet $\sqrt{v} : \sqrt{u} = 6m + 3n + \sqrt{(36mm + 36mn + 49nn)} : 10n$. Quod si ergo eleuatio plani fuerit angulus semirectus, erit $m = n$; hocque casu fiet $\sqrt{v} : \sqrt{u} = 20 : 10 = 2 : 1$. Globus igitur super plano ad angulum semirectum eleuato ita descendet, vt eius celeritas progressiua vbique duplo maior sit celeritate rotatoria, siquidem sit $\frac{F}{P} = \frac{1}{3}$.

§. 23. Perpetuo autem corporis rotundi super plano inclinato descendentis celeritas progressiua maior erit quam

celeri-

celeritas rotatoria; eoque maior erit differentia, quo magis planum ad horizontem inclinatur, ſeu quo maior fiat angulus ABC. Nam ſi angulus B omnino euaneſcat ſeu planum AB fiat horizontale, erit $m = 0$ et $n = 1$, ideoque $g = \frac{1-k}{2}$, et $\surd(gg+k) = \frac{1+k}{2}$ ex quo oritur $\surd v : \surd u = 1 : 1$, nempe hoc caſu corpus perfecte quieſcet, et vterque motus erit nullus. Si angulus B ſit infinite paruus, ita vt ſit m quantitas infinite parua manente $n = 1$ erit $g = \frac{1-k}{2} + \frac{kmP}{2F}$ ideoque $\surd(gg+k) = \frac{1+k}{2} + \frac{(1-k)kmP}{2(1+k)F}$; et $g + \surd(gg+k) = 1 + \frac{kmP}{(1+k)F}$; quare fiet $\surd v : \surd u = 1 + \frac{kmP}{(1+k)F} : 1$. Quando autem planum AB in ſitum verticalem eleuatur, tum ob $n = 0$ fit $g = \infty$, ideoque celeritas progreſſiua $\surd v$ infinities erit celeritate rotatoria maior: hoc ſcilicet caſu corpus ſolo motu progreſſiuo deſcendet. Nullo autem caſu inter medio fieri poteſt $\surd u = \surd v$, ad hoc enim requiritur vt ſit $k = 1 - 2g$ ſiue $\frac{kmP}{nF} = 0$, quod nusquam niſi in ſitu horizontali euenit.

§. 24. Comparatis binis celeritatibus inter ſe poterimus quoque ad quoduis ſpatium abſolutum $AD = x$ motum corporis aſſignare: Cum enim ſit $\frac{\surd u}{\surd v} = \frac{\surd(gg+k)-g}{k}$ fiet ex prima aequatione $dv = m\,dx - n\left(\frac{g+k-\surd(gg+k)}{k}\right)\frac{F\,dx}{P}$ quae integrata dat $v = mx - \frac{n(g+k-\surd(gg+k))Fx}{kP} = \frac{x}{kP}(kmP - ngF - knF + nF\surd(gg+k))$ ſeu $v =$

$$\frac{x(kmP - (1+k)nF + \surd(k^2m^2P^2 + 2(1-k)kmnFP + (1+k)^2nnF^2))}{2kP}$$

cognita autem pro ſpatio percurſo x celeritate progreſſiva $\surd v$, ſimul innoteſcit celeritas rotatoria $\surd u$ ex aequatione.

$$\surd u = \frac{\surd(gg+k)-g}{k}\surd v = \frac{\surd(k^2m^2P^2 + 2(1-k)kmnFP + (1+k)^2nnF^2) - (1-k)nF - kmP}{2knF}\surd v$$

 Hinc

Hinc perspicitur dum angulus B euanescit ob $m = o$ fore $v = o$, hocque casu solo corpus non descendet, nam quamprimum planum tantillum eleuatur, prodit $v = \frac{mx}{1+k}$. Hincque adeo constat frictione motuque rotatorio non obstante, corpus motu vniformiter accelerato esse descensurum.

§. 25. Determinato corporum rotundorum motu mixto ex progressiuo et rotatorio, quo super plano inclinato descendunt, pauca quaedam de motu corporum non rotundorum sed superficiebus planis terminatorum afferamus, non vt totum motum prosequamur, quod opus esset fere insuperabile, sed tantum vt initium motus cognoscamus. Quemadmodum enim corpora rotunda statim descendere incipiunt ac planum AB ad horizontem minimum inclinatur; corpora vero motus rotatorii expertia ante non descendunt, quam $\frac{AC}{BC}$ maior fiat quam $\frac{F}{P}$; ita in reliquis corporibus certus ac determinatus dabitur terminus eleuationis plani in quo corpus descendere incipiat. Sit igitur corpus DELK, quod initio plano inclinato AB ita insedit, vt eius facies DE plano esset applicata, iam autem percurso spatio $AD = x$, peruenerit in situm quem figura repraesentat. Scilicet basis DE, quae initio planum AB tangebat, ab eo remota sit angulo ADE, qui angulus continuo fiet maior, donec alia superficies sequens DK plano applicetur, quod cum euenit motus rotatorius prior subito sistetur, corpusque vel motu radente solo progredietur, vel motum angularem circa sequentem angulum K concipiet. Per sequemur autem hic tantum motum rotatorium primum natum, qui eousque durat, quoad facies DK se plano applicet.

§. 26.

§. 26. Sit igitur angulus $ADE = s$, qui simul ostendit, quantum corpus iam ab initio motus circa axem horizontalem per centrum grauitatis G ductum sit circumactum: at demisso ex centro grauitatis G in basin DE perpendiculo GF sit angulus $DGF = f$. Quodsi iam ex G in planum AB demittatur perpendiculum Gf, erit angulus $FGf = s$, ideoque angulus $DGf = f - s$, ex quo erit $\frac{Df}{DG} = \sin.(f - s)$ et $\frac{Gf}{DG} = \cos.(f - s)$. Ponatur $DG = c$, sitque celeritas corporis progressiua, qua centrum grauitatis G in recta GH parallela plano AB progreditur debita altitudini v, celeritas vero qua punctum D circa axem corporis per centrum grauitatis G ductum rotatur, debita altitudini u. Dum autem corpus hac celeritate rotatur centrum grauitatis G a plano AB recedere debet, hocque fiet celeritate $= \sin.(f-s)\sqrt{u}$; quem centri grauitatis motum seorsim contemplabimur, cum eius motum progressiuum secundum directionem GH non afficiat. Erit igitur porro celeritas, qua punctum D versus B progreditur $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$; ideoque si frictio horizontalis fuerit $= F$ erit frictio quam corpus in hoc statu sentiet $= (1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\frac{BC}{AB}.F$, qua corpus in directione DA retrahetur. Ponamus autem vt ante $\frac{AC}{AB} = m$, et $\frac{BC}{AB} = n$, ita vt sit $mm + nn = 1$.

§. 27. Sit corporis massa seu pondus $= P$ eiusque momentum inertiae respectu axis G, circa quem gyratur $= Pbb$, erit vis qua corpus in directione GH vrgetur $= mP$, vis autem in directione normali $Gf = nP$. Hinc itaque corpus in directione GH accelerabitur vi acceleratrice $= m - n(1 - \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\frac{F}{P}$. Atque si simul vim plani, quae corpus a plano repellit, quoniam punctum

D

D non intra planum AB ingredi potest, in computum ducamus, qua vtique reactio plani in D, quae per se est $=nP$, augetur idemque ratiocinium adhibeamus quo vsi sumus in praecedente dissertatione, oportebit ibi loco F scribi $nF(1-\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})$ et loco P, nP; quibus surrogatis erit vis accelerans motum rotatorium in D $=$

$$\frac{n.DG(F(1-\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})Gf-P.Df)}{P(bb+Df^2)} = \frac{nc^2(F(1-\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\cos.(f-s)-P.\sin.(f-s))}{P(bb+cc(\sin.(f-s))^2)}$$

Dum autem centrum grauitatis G in directione GH per spatiolum dx progreditur, punctum D motu angulari absoluet spatium $=\frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$ verum quia interea angulus ADE $=s$ elemento ds augetur: fiet $cds=\frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$; ideoque $dx=\frac{cds\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$.

§. 28. Ex effectu iam sollicitationum momentanearum cosequuntur binae sequentes aequationes.

$$dv = mdx - n(1-\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\frac{Fdx}{P} = \frac{mcds\sqrt{v}}{\sqrt{u}} - \frac{nFcds\sqrt{v}}{P\sqrt{u}} + \frac{nFcds}{P}$$

$$du = \frac{nc^3(F\,1-\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}})\cos.(f-s)-P\sin.(f-s))ds}{P(bb+cc(\sin.(f-s))^2)}$$

Prior aequatio in hanc transmutatur $dv = mdx - \frac{nFdx}{P} + \frac{nFcds}{P})$ cuius integrale est $v = mx - \frac{nFx}{P} + \frac{nFcs}{P}$, Hae autem aequationes etsi in se intractabiles videntur, tamen pro ipso motus initio ex iis idoneae conclusiones formari poterunt. Ponamus ad hoc $v=\alpha s+\beta ss$ et $u=\gamma s+\delta ss$ erit $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}} = \sqrt{\frac{\gamma+\delta s}{\alpha+\beta s}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} + \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)s}{2\alpha\sqrt{\alpha\gamma}}f$ erit porro ob s minimum $\cos.(f-s) = \cos.f + s\sin.$ et $\sin.(f-s) = \sin.f - s\cos.f$: quibus in prima aequatione substitutis fit $dv = \alpha ds + 2\beta sds = cds(m-\frac{nF}{P})$

(√

$\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} + \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)s}{2\gamma\sqrt{\alpha\gamma}}\right) + \frac{nFcds}{P}$ ex quo erit $\alpha = (m - \frac{nF}{P}) c\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} + \frac{nFc}{P}$. Posterior vero aequatio neglecto etiam s dabit $\gamma ds = \frac{nc^3(F(1-\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}})\,\text{cos.} f - P.\,\text{sin.} f)ds}{P(bb + cc(\text{sin.} f)^2)}$ seu $Pbb\gamma + Pcc\gamma(\text{sin} f)^2 = nFc^3 \,\text{cos.} f - nFc^3\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}.\,\text{cos.} f - nPc^3.\,\text{sin.} f$.

§. 29. Prior aequatio dat $\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} = \frac{\alpha P - nFc}{(mP - nF)c}$, seu $\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{(mP - nF)c}{\alpha P - nFc}$ vnde fit $\gamma = \frac{(mP - nF)^2 cc\alpha}{(\alpha P - nFc)^2}$; qui valor in altera aequatione substitutus dabit $\frac{P(bb + cc(\text{sin.} f)^2)\alpha cc(mP - nF)^2}{(\alpha P - nFc)^2} = nFc^3 \,\text{cos.} f - nPc^3 \,\text{sin.} f - \frac{nFc^4(mP - nF)\,\text{cos.} f}{\alpha P - nFc}$. Sit $\alpha P - nFc = z$ fiet $(bb + cc(\text{sin.} f)^2)(mP - nF)^2 nFc + (bb + cc(\text{sin.} f)^2)(mP - nF)^2 z = nFczz\,\text{cos.} f - nPczz\,\text{sin.} f - nFcc(mP - nF)z\,\text{cos.} f$. Ponatur porro $z = (mP - nF)t$ fiet $tt = \frac{nFcct\,\text{cos.} f + (bb + cc(\text{sin.} f)^2)(mP - nF)t + (bb + cc(\text{sin.} f)^2)nFc}{nFc\,\text{cos.} f - nPc\,\text{sin.} f}$

Ex hac aequatione valor ipsius t inuentus praebebit valorem ipsius z, hocque cognito innotescet α, indeque porro β. Sin autem statim ponamus $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = r$, atque c. sin. $f = DF = p$, et cos. $f = GF = q$, ita vt sit $pp + qq = cc$, fiet primo initio $\frac{dv}{du} = rr$ hincque reperietur

$$r = \frac{mP(bb+pp) - nF(bb+pp-cq) + \sqrt{(nnF^2(bb+pp+cq)^2 - 2mnFP(bb+pp)(bb+pp-cp) + m^2P^2(bb+pp)^2) - 4nnFP(bb+pp)cp}}{2nFcq - 2nPcp}$$

quamprimum ergo $(mP - 2nF)r + nF$ incipit maius esse quam o, tum corpus descendere incipiet, et si fuerit $Fqr - Ppr > Fq$ corpus quoque rotari incipiet. Est autem $Fq > Pp$, quia alioquin corpus solo motu progressiuo descendit, quem casum ante euoluimus.

§. 30 Ex eadem aequatione pro r inuenta si ponatur $\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = \omega$ ita vt sit $dv = \frac{(mP - nF)dx + nF\omega dx}{P}$ ac primo quidem motus initio $du = \frac{nc^{3}(Fq - F\omega Pp)dx}{P(bb+pp)}$; reperietur inuertendo $\omega =$

$$\frac{nF(bb+pp-cq) - mP(bb+pp) + \sqrt{(nnF^2(bb+pp+cq)^2 - 2mnFP(bb+pp)(bb+pp-cq) + m^2P^2(bb+pp)^2) - 4nnFP(bb+pp)cp)}}{2nF(bb+pp)}$$

Ex hac aequatione intelligitur fore $dv = 0$, si sit $mq = np$ seu angulus ABC = ang. DGF, hoc ergo casu corpus quiescet, si quidem fuerit $\frac{p}{q} < \frac{F}{P}$. Statim vero ac angulus ABC incipiet superare angulum DGF, corpus motum adipiscetur progressiuum simulque rotatorium ad progressiuum datam rationem tenentem. Si enim ponatur $mq = np$ oritur $\omega = \frac{nF - mF}{nF}$, ex quo fit $dv = 0$ et $du = 0$. Quibus igitur casibus quodvis corpus, quo motu radente solo descendere nequit, motu mixto descendere incipiat, ex his facile colligitur.

§. 31. Omnis ergo quaestio de motu corporum super plano inclinato bipartita erit, primum enim quaeritur, vtrum corpus sit descensurum, an vero in quiete permansurum, tum vero, si constet corpus descendere debere, formabitur altera quaestio, quomodo descensus fiat, vtrum motu radente puro, an motu mixto ex radente et voluente. Hae igitur quaestiones pro quouis casu oblato facile decidentur. Impositum enim sit plano inclinato ABC corpus DKLE, cuius frictio horizontalis sit ad proprium pondus vt PR ad RQ, sicque constituatur angulus PQR cuius tangens erit $\frac{F}{P}$. Deinde ex corporis centro grauitatis G in basin DE, qua incumbit plano, demittatur perpendiculum GF, atque ab extremitate basis infima D ad G ducatur recta DG vt obtineatur

Fig. 13 et 14.

tur angulus DGF. His duobus angulis PQR et DGF cognitis, qui ab eleuatione plani inclinati nullo modo pendent, duos casus contemplari oportet: qui sunt.

I. *Si angulus* DGF *maior fuerit angulo* PQR: corpus super plano inclinato quiescet, quamdiu angulus ABC minor fuerit angulo PQR: quod si autem angulus ABC maior constituatur quam angulus PQR, tum corpus descendet motu progressiuo puro, neque vllum motum rotatorium recipiet.

II. *Si angulus* DGF *minor fuerit angulo* PQR, corpus tamdiu tantum super plano inclinato quiescet, quamdiu angulus ABC minor fuerit angulo DGF: quamprimum vero angulus eleuationis plani ABC excedet angulum DGF, tum corpus descendet idque motu mixto ex radente et voluente, nisi planum AB verticaliter erigatur, quo casu motus rotatorius prae progressiuo euanescit. In hoc ergo posteriori casu quo angulus DGF $<$ PQR motus nullus subsequetur, nisi recta verticalis ex centro grauitatis G demissa extra basin ED cadat. Atque si in casu posteriori ista recta verticalis extra basin cadat, corpus tam radendo quam voluendo descendet. Secus autem res se habet in casu priori, tum enim corpus descendere potest, etiamsi recta verticalis ex corporis centro grauitatis G demissa non extra basin cadat: ac licet haec recta verticalis extra basin cadat, tamen nullus subsequetur motus rotatorius.

DE MOTV CORPORVM SVPER PLANO HORIZONTALI ASPERO.

AVCTORE
L. Euler.

§. 1.

Tab. V. In omni corpore duplicem inesse posse motum, alterum progressiuum alterum rotatorium tam experientia quam ipsa rei natura luculenter euincit; omnisque motus quem quidem corpus suscipere potest, vel est progressiuus tantum, vel rotatorius tantum, vel ex vtroque mixtus. Hinc vnius cuiusque corporis motum distincte cognoscit is, qui tam quantitatem vtriusque motus, qui in illo corpore inest, quam rationem determinationis perfecte assignare valet. Loquor hic autem de corporibus *solidis* seu rigidis, quae nullius motus intestini, quo partes corporis situm inter se mutuum mutant, sunt capaces, vel saltem de talibus corporibus mihi sermo est, in quibus eiusmodi motus intestinus vel actu non datur vel non spectatur. Quodsi enim corpora vel fluida, vel mollia, vel flexibilia proponantur, tum ad eorum motum distincte intelligendum vniuscuiusque partis motum cognosci oportet, donec perueniatur ad partes tam minutas, in quibus motus intestinus amplius omnino non est. Hocque pacto omnis motus cognitio perducitur ad duo illa motus in corpora solida cadentis genera, quae initio commemoraui.

§. 2. In quolibet vero corpore motus progressiuus tantum inesse dicitur, si omnes corporis partes aequali ve velocitatis gradu secundum eandem directionem quouis temporis puncto ferantur. In istum motum duplex cadit mutatio cum ratione celeritatis, tum ratione directionis, et quamdiu celeritas non mutatur, motus vocatur aequabilis seu vniformis; quamdiu autem directio manet eadem, motus est rectilineus, quo singulae corporis partes in lineis rectis progrediuntur. Sin autem tam celeritas quam directio iugiter immutetur, nascitur motus inaequabilis curuilineus. Atque ex his perspicitur natura motus aequabilis in directum facti, quippe in quo tam celeritas quam directio manet eadem. Huiusmodi motum respicit prima lex Mechanicae, qua motus huiusmodi aequabilis et in directum tendens ex ipsa corporum natura perpetuo inuariatus conseruari statuitur ita vt vi huius legis nulla mutatio tam in celeritate quam in directione euenire queat, nisi quae a caussis externis proficiscatur.

§. 3. Praecipuum autem ad quod hic attendi conuenit, est quod ista haec prima mechanicae lex ad omnis generis corpora siue solida siue fluida ac situs partium mutui mutationem patientia aeque pateat. Si enim corpus fluidum motum habeat progressiuum vniformiter in directum tendentem, tum eius singulae particulae aequalibus celeritatibus in directionibus inter se parallelis progrediuntur, atque vnaquaeque particula istum motum propter vim insitam inertiae perpetuo inuariatum conseruare annititur. Neque vero reliquae corporis particulae ambientes isti conseruationi status aduersabuntur, cum ipsae aequali velocitate et in eadem directione vel praecedant vel sequantur vel vtrinque ad latera incedant.

si ergo partes corporis sint dissolutae, singulas quasi ope fili satis fortis ad axem alligatas esse oporteret, sin autem corpus fuerit solidum, ita vt eius partes inter se omnes firmiter sint connexae, tum sufficit vt totum corpus vnico filo cum axe sit connexum, quod omnibus viribus, quibus singulae eius partes ab axe recedere conantur, aequiualeat. His igitur filis motus partium circularis conseruabitur, celeritas autem nullo modo afficietur. Ex quo per primam mechanicae legem sequitur, in eiusmodi motu rotatorio celeritatem, qua corpus rotatur, perpetuo eandem conseruari debere, neque in celeritate mutationem vllam oriri posse nisi a causa externa.

§. 7. Si igitur corpus solidum, cuius partes firmiter inter se cohaerent, axi cuipiam fixo fuerit alligatum, hocque corpus circa istum axim a causa quacunque impetrauerit motum rotatorium; tum vi propria inertiae hunc motum rotatorium perpetuo eadem cum celeritate conseruabit, nisi a viribus externis eius celeritas vel augeatur vel diminuatur. Interea vero corpus ob vim centrifugam ex motu omnium partium curuilineo resultantem vim exeret in axem, eumque vel promouere vel inclinare conabitur, hancobrem axem tanta vi in situ suo detineri oportet, vt promotioni seu inclinationi satis resistere valeat. Pendet ista vis, quam axis sustinet, partim ab eius positione respectu corporis partim ab ipsa corporis celeritate, hincque vel multo maior vel multo minor fieri potest. Fit autem calculo docente minima haec vis, si axis per centrum grauitatis corporis transeat, in quo situ si vllam vim sentit, ea non ad promouendum sed tantum ad inclinandum axem tendit. Fieri autem adeo potest,

vt

vt haec vis inclinans, si axis per centrum grauitatis corporis transit, prorsus euanescat, hocque casu nulla vi opus erit ad axem in situ suo detinendum, sed etiam si non sit fixus, suo sponte in eodem perpetuo situ perseuerabit.

§. 8. Apparet ergo quid requiratur, vt corpus solidum circa axem quempiam, qui nulla vi in situ suo detineatur, libere gyrari queat. Primum scilicet necesse est, vt axis ille per centrum grauitatis corporis transeat: deinde etiam insuper opus est: vt vires inclinantes, quae ex viribus centrifugis partium corporis oriuntur, se mutuo prorsus destruant. Quodsi ergo corpus circa talem axem conceperit motum rotatorium, tum hunc motum eadem velocitate perpetuo conseruabit, neque vlla opus erit vi externa quae axem rotationis in situ suo retineat. Sic globus ex materia homogenea confectus circa quemuis axem per centrum grauitatis transeuntem libere gyrabitur, quia ob perfectam vndique similitudinem nulla vis extat, quae axem inclinare conetur. Axem hac proprietate praeditum vocabo axem permanentem, atque huiusmodi axium inuestigatio plerumque est maxime difficilis: primarium casum notasse sufficiat, quo axis per centrum grauitatis ductus simul per singularum corporis sectionum ad axem normalium centra grauitatis transit: tum enim ea gaudebit proprietate, quae ad axem permanentem requiritur.

§. 9. Corpus igitur, quod circa huiusmodi axem permanentem semel adeptum est motum rotatorium, hunc ipsum motum perpetuo conseruabit vniformem, neque vllam patietur siue in celeritate siue in positione axis alterationem, si quidem a nulla vi externa sollicitetur. Interea vero axis iste, circa quem fit rotatio in perfecta quiete perseuerabit, ob vires centrifugas partium corporis se inuicem penitus destruentes. Corpus igitur per vim inertiae duplicem motum constanter in se suscipere ac perpetuo retinere valet, alterum progressiuum aequabilem in directum, atque alterum rotatorium circa axem per centrum grauitatis transeuntem ac permanentem. Intelligitur autem corpus non solum seorsim vtrumque motum recipere posse, verum etiam coniunctim, ex quo sequitur haec lex mechanicae maximi momenti: *Omne corpus, cuius partes cunctae firmiter inter se cohaerent, praeter motum progressiuum aequabilem in directum etiam motum rotatorium circa axem permanentem in se suscipere, et constanter conseruare valet.* Eiusmodi motus ergo erit mixtus ex progressiuo et rotatorio, axisque motus rotatorii motu sibi parallelo vniformiter in directum promouebitur.

§. 10. Quemadmodum hoc casu vterque motus tam progressiuus quam rotatorius seorsim, sese in statu vniformitatis conseruat, ita etiam vterque seorsim potest considerari ac mensurari, perinde ac si alter omnino abesset. Sic ad motum progressiuum dimetiendum animum a rotatorio abducere licet, quasi prorsus non adesset, atque tum celeritas atque directio vnius corporis puncti declarabit totum corporis motum. Ad hoc autem conuenit motum centri grauitatis maxime spectari, eo quod eius motus progressiuus a motu rotatorio penitus non afficitur; quare cognita centri grauitatis tam celeritate, quam directione motus progressiuus perfecte innotescit.

Si-

simili modo motum rotatorium cognoscemus abstrahendo mentem a motu progressiuo, seu quod eodem redit fingendo motum progressiuo contrarium atque aequalem, quo pacto solus motus rotatorius supererit, qui cognoscetur ex celeritate, qua punctum corporis dato interuallo ab axe distans circa axem rotatur, adiici tantum debet, in vtram duarum illarum plagarum, in quas motus rotatorius aeque fieri potest, actu corpus rotationem absoluat.

§. 11. His expositis quae ad statum corporum, in quo vi propria perseuerare possunt, pertinent, videndum est breuiter, quemadmodum tam motus progressiuus quam rotatorius a viribus sollicitantibus afficiatur atque immutetur. Quod primum quidem ad motum progressiuum attinet effectus, quem vires quaecunquae sollicitantes exerunt cognoscetur, si primo totum corpus in centro grauitatis concipiatur concentratum, vt instar puncti spectari queat, ac deinde omnes vires sollicitantes in directionibus sibi parallelis in centrum grauitatis mente transferantur. Tum enim hae vires translatae in corpus in centro grauitatis collectum eundem exerent effectum ratione motus progressiui, qui proinde ex primis mechanicae principiis colligi poterit. Effectus scilicet vel in celeritatis vel directionis vel vtriusque simul mutatione consistet. Scilicet si omnes vires resoluantur in tangentiales et normales ad directionem motus, atque summa tangentialium ponatur $= T$. summa normalium $= N$. Tum vero massa corporis sit $= M$. eiusque celeritas debita altitudini v. ac tempusculo minimo spatium ds absoluatur: erit vti constat $dv = \pm \frac{T ds}{M}$ atque radius osculi

 lin-

lineae curuae, ad quam describendam corpus cogitur erit $= \frac{2 M v}{N}$.

§. 12. Ad motus rotatorii autem mutationem a viribus sollicitantibus prouenientem cognoscendam, momentum inertiae corporis respectu axis rotationis cognitum esse debet, quod est summa omnium productorum, quae oriuntur si singula corporis elementa multiplicentur respectiue per quadrata distantiarum suarum ab axe rotationis, momentum ergo inertiae hoc erit productum ex massa corporis M in quadratum cuiuspiam lineae rectae quae sit $= b$ ita vt momentum inertiae futurum sit $= M b^2$. Deinde virium sollicitantium momentum, tendens ad corpus circa axem rotationis conuertendum quaeri oportet, quod erit productum ex vi P in lineam quandam k seu erit $= P k$. Tum si fuerit puncti corporis ab axe rotationis distantis interuallo $= c$ celeritas debita altitudini u fiet $d u = + \frac{P k c d q}{M b b}$, dum hoc punctum motu suo arculum $d q$ radio c circa axem absoluit. Si vires sollicitantes tendant ad axem rotationis ipsum mutandum, isque non firmiter in situ suo detineatur, tum vtique axis rotationis inclinabitur, qua autem lege hoc fiat, etiamnum non est definitum.

§. 13. His legibus motus ad praesens institutum necessariis praemissis pergo ad motum corporum super plano horizontali aspero factum tam progressiuum quam rotatorium considerandum, quem in hac dissertatione ex primis principiis eruere constitui. Ac primo quidem perspicuum est grauitatem ad motum neque accelerandum nec retardandum quicquam conferre; quoniam enim eius directio ad planum horizontale normalis est, tota in ap-pressione corporis contra planum consumetur. Ob hunc ipsum autem effectum grauitas in hoc negotio maxime spectari debet, cum ex eo quantitas frictionis determinetur, a qua, quemadmodum motus corporum super plano horizontali turbetur inuestigaturus sum. Plura autem sunt impedimenta, quibus motus corporum super plano horizontali retardatur; namque praeter frictionem, quae ab asperitate superficiei horizontalis oritur, hirsutia superficiei ideo quoque motum diminuit, quod corpus filamenta, quibus planum est obsitum, deprimere cogitur, id quod sine motus diminutione fieri nequit. Praeterea vero resistentia aeris motui corporis non parum obest, tam propter inertiam, ex qua resistentia quadrato celeritatis proportionalis resultat, quam propter tenacitatem, qua aeris particulae inter se cohaerent, vnde resistentia gignitur constans seu momentis temporum proportionalis.

§. 14. Quo igitur facilius retardationem motus, quae ab his impedimentis tam singulis seorsim consideratis quam omnibus coniunctis producitur, primum mentem ab omnibus abstrahamus, vt intelligamus, cuiusmodi motus corporis esse debeat, si neque scabrities neque hirsutia plani, neque etiam resistentia aeris vllum obstaculum motui obiiciat. Concipiamus itaque planum horizontale perfectissime politum, atque spatium ab aere prorsus vacuum. Sic igitur dubium erit nullum, quin corpus motum progressiuum, quem semel est adeptum perpetuo eundem sit conseruaturum, ac motu aequabili in directum sine vlla retardatione progressurum. Sin autem corpus habuerit motum rotatorium circa axem per centrum grauitatis transeuntem ac permanentem, tum tatis. Ad hoc explorandum corpori ADB super plano quiescenti in basi A alligetur filum quod in directione horizontali AV tendatur dato pondere, quod ope trochleae in V firmatae commodissime fieri potest. Quo iam corpus ADB ab hoc pondere protrahatur, necesse est vt pondus vim frictionis superet; hincque manifestum est, quamdiu pondus minus sit frictione, corpus in quiete esse permansurum. Quamobrem filum AV a minimo ponderculo incipiendo continuo maioribus tendatur, donec corpus moueri incipiat; quod eueniet, quam primum pondus quo filum AV tenditur tantillum frictionem superabit. Hoc ergo pacto satis exacte pondus determinari poterit frictioni aequale, quo cognito effectus frictionis ad calculum reuocari poterit. Sit igitur F pondus frictioni aequiualens, atque corpus ADB dum super plano OV motu radente incedit, continuo retro trahetur vi $= F$, quae corpori in ipsa basi applicata concipienda est. Simili porro modo frictio cuiuscunque alius corporis per experimenta explorari potest; expedit autem ad hoc filum AV in corporis loco infimo applicari, vel monui, quam in sublimiori, vt per hanc vim simul conatus frictionis corpus subuertendi destruatur.

§. 18. Quod ad quantitatem frictionis F attinet, ea primum ab asperitate cum plani OV tum basis corporis AB plurimum pendet, ita vt, quo asperius fuerit vel alterutrum vel vtrumque, eo maior euadat frictio: hoc autem a priori commode mensurare non licet. Deinde frictio potissimum appressioni corporis ad planum respondet, ita vt quo maior fuerit pressio corporis in planum, in eadem ratione frictio augeatur. Apprimitur autem corpus ad planum vi proprii ponderis, quo deorsum nititur in directione GC; quare, si corporis pondus vel minuatur vel augeatur manente eadem basi, eademque plani asperitate, tum frictio in eadem ratione vel minuetur, vel augebitur. Hincque explorata per experimenta vnius corporis frictione super dato plano per solum ratiocinium infinitorum aliorum corporum frictiones colligi poterunt. Denique videatur magnitudo basis non parum ad frictionem siue augendam siue minuendam conferre: interim tamen experimenta nullum sensibile discrimen a magnitudine basis oriundum demonstrant. Quodsi autem perpendamus pressionem corporis per totam basin distribui, facile percipimus singula basis elementa eo minus planum premere, quo maior fuerit basis, ideoque eo minorem frictionem sustinere; ex quo sequitur, magnitudinem basis quantitatem frictionis prorsus non afficere debere.

§. 19. His de frictionis mensura expositis, facile foret retardationem motus progressiui, qui corpori ADB initio fuit impressus, pro quouis momento assignare, si modo constaret, corpus a frictione non prostratum iri. Quamobrem ante nobis definiendum est, quibus casibus corpus motum progressiuum impressum vsque ad quietem conseruare queat, quibusque casibus frictio corpus circa A subuertere valeat; hoc enim casu motus resultaret perquam irregularis. Ponamus ergo frictionem sufficiere ad corpus prosternendum, atque corpus iam procliue esse ad lapsum: hoc igitur casu corpus in sola extremitate A plano innitetur, cum reliqua basis pars iam incipiat elevari, et circa A conuerti. In hoc igitur statu corpus totam pressionem in solo puncto A exeret, et quia pressio aequalis est ponderi corporis, quod ponamus $= P$, planum a corpore in puncto A deorsum premetur vi $=$P. Cum autem planum sit immobile, per reactionem corpus tantandem vi $=$P sursum vrgebit, ita vt corpus actu sollicitetur in directione verticali sursum AE vi $=$P; atque per hanc vim firmitas plani ex computo extruditur, quoniam ea aeque ac planum impedit, quominus corpus infra lineam horizontalem OV descendat.

§. 20. Hic ergo reductus est praesens corporis status, vt plano praeter frictionem omnino sublato corpus ADB a tribus sollicitetur viribus, primum nempe propter grauitatem a vi P in directione DC; deinde iterum vi $=p$ in directione AE, ac tertio propter frictionem a vi $=$F in directione CO. Videamus igitur an ab his viribus generari queat motus rotatorius circa centrum grauitatis G seu potius circa axem horizontalem eo transeuntem et normalem ad motus directionem GF, in sensum DHAB. Ac primo quidem vis GC$=$P nihil confert ad motum rotatorium, quia eius directio per centrum grauitatis G transit; altera vero vis AE$=$P huic motui rotatorio in sensum DHAB reluctatur, eandem scilicet reluctantiam exerceret firmitas plani OV, cuius loco vim illam P substituimus; momentum vero huius vis P ad motum rotatorium impediendum est $=$P.GE$=$P.AC. Frictio igitur sola F in directione CO agens conabitur eiusmodi motum rotatorium corpori inducere, eiusque momentum pro hoc effectu erit $=$F.GC. Momentum igitur actuale ad motum rotatorium gignendum erit $=$F.GC$-$P.AC.

§. 21. Nisi igitur hoc momentum F.GC$-$P.AC affirmatiuum habeat valorem hoc est nisi $\frac{F}{P} > \frac{AC}{GC}$, motus rotatorius a frictione non producetur, sed corpus solo lo motu progressiuo mouebitur, donec ad quietem reducatur. Ponamus scilicet corpus initio, vbi perpendiculum GC in O inciderat, motum progressiuum nactum esse celeritate debita altitudini $= a$, nunc vero absoluto spatio $OC = x$, celeritatem eius residuam esse debitam altitudini v. Cum iam inter vires corpus sollicitantes nulla praeter frictionem F motum progressiuum afficiat, haecque motum retardet, erit $dv = -\frac{F\,dx}{P}$, denotante P massam simulque pondus corporis, ex quo fiet $v = a - \frac{Fx}{P}$. Hancobrem corpus ad quietem redigetur absoluto spatio $x = \frac{aP}{F}$. Hic igitur erit motus corporis pro casu, quo $\frac{F}{P} < \frac{AC}{GC}$; atque vt corpus, postquam nactum est motum progressiuum, non procumbat, necesse est, vt frictio F ad pondus P minorem habeat rationem, quam AC ad GC. Plerumque autem super plano ligneo est $\frac{F}{P} = \frac{1}{3}$, his itaque casibus requiritur, vt sit $\frac{AC}{GC} > \frac{1}{3}$, seu angulus $AGC > 18^\circ\, 26'$. Quae proprietas quibus in corporibus locum habeat, ex positione centri grauitatis et basi corporis facile intelligi potest.

§. 22. Ex his intelligitur nullum corpus, in quo sit $\frac{AC}{GC} > \frac{F}{P}$, motu progressiuo solo super plano OV incedere posse, sed eiusmodi corpora simulac ipsis motus imprimitur, procumbere, motumque rotatorium cum progressiuo permiscere. Quo propius ergo perpendiculum GC ex centro grauitatis corporis in planum horizontale demissum ad extremitatem basis A cadit eo magis procliue erit corpus ad prolabendum, hicque conatus prolabendi eo fiet maior, quo altius centrum grauitatis G fuerit situm. Hinc si corpus fuerit prisma ex materia homogenea confectum $AabB$, cuius altitudo Aa sit $= A$, Fig. 2.

 et

et diamter basis $AB = B$ erit perpendiculum $GC = \frac{1}{2}A$ et interuallum $AC = \frac{1}{2}B$. Hoc igitur corpus motu progressiuo super plano OV incedere nequit, si fuerit $\frac{B}{A} < \frac{F}{P}$ hoc est si diameter basis ad altitudinem minorem habeat rationem, quam frictio F ad pondus prismatis P. Quod si ergo frictio F aequalis fuerit tertiae parti ponderis P, tum nullum prisma cuius altitudo plus quam triplo maior est diametro basis AB motu progressiuo super plano incedere potest. Similique modo pyramis vel conus, cuius altitudo ad diametrum basis maiorem habet rationem quam 9 ad 2 super plano moueri non poterit, quin statim procumbat.

§. 23. Videamus iam quomodo corpora prismatica, quae horizontaliter super plano iacent, sint comparata ratione motus cum progressiui tum rotatorii. Sumamus autem bases huiusmodi prismatum esse figuras polygonas regulares, atque eiusmodi prisma in directione ad axem normali ad motum impelli. Sit numerus laterum polygoni basin constituentis $= n$, eritque angulus $AGC = \frac{180^\circ}{n}$; atque $\frac{AC}{GC} = \text{tang.} \frac{180^\circ}{n}$ posito sinu toto $= 1$. Quod si ergo fuerit tang. $\frac{180^\circ}{n} > \frac{F}{P}$. tum eiusmodi corpus prismaticum motu progressiuo super plano OV propelli poterit; sin autem sit tang. $\frac{180^\circ}{n} < \frac{F}{P}$, tum statim, ac impellitur, procidet, simulque voluendo se mouebitur. Si igitur frictio F aequalis fuerit ponderi P, tum prismata triangularia sola sine prolapsu progredientur, quae autem bases habent quadratas indifferentia erunt ad lapsum, quorum bases autem sint plurium laterum, ea simul voluendo promouebuntur. Si $\frac{F}{P} = \frac{1}{2}$, tum prismata, quorum bases plura habent latera, quam 6, motum rotorium recipient, et si $\frac{F}{P} = \frac{1}{3}$, tum ea tantum prisma-

ta

ta voluentur, quorum bases plura quam 9 habent latera. Sin porro $\frac{F}{P} = \frac{1}{4}$, tum ea prismata sine prouolutione moueri non poterunt, in quibus laterum numerus maior est quam 12.

§. 24. Quoniam igitur nouimus, quibus casibus corpus, cui tantum motus progressiuus imprimitur, ob frictionem simul motum volutorium recipere debeat, inuestigemus, quo pacto iste motus rotatorius generetur et continuetur. Vidimus autem tam ex frictione quam ex reactione plani prodire momentum ad motum rotatorium circa axem per centrum grauitatis ductum producendum $= F.GC - P.AC$. Si iam ponamus corporis momentum inertiae respectu huius axis esse $= Pbb$, erit vis, qua motus angularis circa centrum grauitatis actu producitur $= \frac{F.GC - P.AC}{Pbb}$. Ad motum igitur angularem definiendum, abstrahamus cogitationes ab motu progressiuo, concipiamusque centrum grauitatis corporis G in quiete, Fig. 3. atque corpus circa G ita rotari incipiet, vt punctum A radio AG moueatur per arculum $A\alpha$, perueniet igitur punctum A infra horizontalem OV, etiamsi loco firmitatis plani vim illam P sursum vrgentem substituerimus. Hic igitur motus propter planum impenetrabile isto modo perfici non poterit, neque vnquam admitti potest motus, quo vlla corporis pars infra OV perducatur.

§. 25. Punctum igitur A motu rotatorio circa centrum grauitatis G infra planum OV demergi non potest, nisi planum liberrime cedat. Ponamus igitur planum cedere atque punctum A vtique in α descendet; statim autem tribuamus plano vim sese in pristinum statum restituendi, hincque punctum α sursum pellitur vi quapiam per spatiolum $\alpha\beta$,

 atque

atque hoc eodem tempore eueniat necesse est, quo arculum $A\alpha$ absoluit; hoc enim modo ab hac vi statim in principio motus rotatorii agente punctum A perpetuo in recta OV conseruabitur. Sit vis ista plani $= p$ ita vt punctum A seu α sursum vrgeatur vi $= p$: hac igitur vi totum corpus sursum sollicitabitur vi acceleratrice $= \frac{p}{P}$. Per hanc vero eandem vim p motus rotatorius diminuetur, eritque momentum non amplius FGC–P.AC sed $F.GC-(P+p)AC$, quod diuisum per momentum inertiae corporis respectu axis, circa quem fit rotatio, quod momentum inertiae sit $= Pbb$ dat vim acceleratricem motus rotatorii $\frac{F.GC-(P+p)AC}{Pbb}$, haec vero ducta in AG dat vim acceleratricem puncti A per arculum $A\alpha$. Cum igitur spatia simul descripta sint viribus accelleratricibus proportionalia erit $\alpha\beta : A\alpha = \frac{p}{P} : \frac{F.GC-(P+p)AC}{Pbb} AG = AC : AG$.

§. 26. Ex hac analogia adipiscimur hanc aequationem $pbb = AC(F.GC-P.AC)-p.AC^2$. quae praebet vim, qua totum corpus eleuatur, ad id, vt in rotatione extremitas corporis A non infra horizontalem OV descendat, nempe fit haec vis $p = \frac{AC(F.GC-P.AC)}{bb+AC^2}$. Atque ista vis non solum initio motus rotatorii locum obtinet, sed etiam pro quolibet momento, dum motus rotatorius durat, est enim ista expressio durante motu rotatorio variabilis, cum propter perpendiculi GC tum interualli AC variabilitatem. Augetur autem primo momento perpendiculum GC elemento $\alpha\beta$, interuallum vero AC diminuitur elemento $A\beta$. Quoniam igitur initio motus rotatorii est $F.GC > P.AC$, multo magis durante

te

te motu manebit $F.GC > P.AC$, ideoque vis p affirmatiuum obtinet valorem, quamdiu interuallum AC verſus O cadit; tamdiu enim centrum grauitatis G eleuari debet, donec recta GA fiat verticalis; hoc autem caſu ob $AC = 0$, etiam vis p euaneſcit. Deinceps vero, quando recta GA verſus V inclinabitur, ob AC negatiuum, vis p negatiuum induet valorem, eaque centrum grauitatis G rurſus deprimetur, donec alia corporis facies ſeſe plano OV applicet, vicemque baſis ſuſtineat. quodcum euenerit videndum eſt, vtrum ſuper noua baſi motus rotatorius de nouo generetur an ſecus.

§. 27. Ob iſtam autem vim p, quae requiritur ad centrum grauitatis corporis G cum eleuandum tum rurſus deprimendum, vis rotatoria corporis diminuetur. Eſt enim vis acceleratrix, qua extremitas A circa G circum agitur non amplius $= \frac{F.GC - P.AC}{Pbb}.AG$, ſed $= \frac{F.GC - (P + p)AC}{Pbb}$ AG, quae propter $p = \frac{AC(F.GC - P.AC)}{bb + AC^2}$ abit in $\frac{AG(F.GC - P.AC}{P(bb + AC^2)}$ Quanquam igitur ob vim p ad corpus eleuandum requiſitam vis rotatoria diminuitur, tamen corpus motum rotatorium recipiet, dummodo ſit $F.GC - P.AC > 0$. ex quo, non obſtante motus rotatorii difficultate ob lineae AG obliquitatem, tamen idem criterium, quod ſupra inuenimus, nempe ſi $F.GC > P.AC$ locum retinet ex quo intelligi queat, vtrum motus rotatorius ſubſequatur an ſecus. Durante autem motu rotatorio punctum A verſus O ſuper plano OV incedet, celeritate, quae ſe habeat ad ſuam celeritatem gyratoriam, vti $A\beta$ ad $A\alpha$ hoc eſt vti GC ad AC; hic autem tantum primum generationis momentum, quo motus rotatorius producitur

con-

consideramus, ita vt sit motus rotatorius infinite paruus respectu motus progressiui: ex quo punctum A planum eadem celeritate radet, ac si nullus adhuc adesset motus rotatorius.

§. 28. Ex his tamen intelligitur, motum corporum ex progressiuo et rotatorio mixtum admodum fore irregularem, ideoque determinatu difficilem. Motus enim rotatorius primum conceptus tam diu tantum durabit, quoad alia corporis facies sese plano OV applicet, id quodcum percussione fiet, hocque casu motus continuatio etiam ex percussionis regulis definiri debet. Hoc igitur cum euenerit motus rotatorius, si quidem subsistet, subito immutabitur, dum corpus alio angulo in planum *innititur*, neque ad hunc nouum motum rotatorium determinandum sufficiet vti in primo ad criterium ante datum solum respexisse, sed etiam ad motum rotatorium ante *iam* conceptum attendi oportet, quatenus per eum corpus *incitatur* ad nouum motum rotatorium recipiendum. Haecque cautela toties est repetenda, quoties alia basis plano applicatur, vbi semper quasi per saltum in motu mutatio subitanea producitur. Tametsi autem motus rotatorius sine respectu ad progressiuum habito calculo subiici potest, tamen perpetuo simul ad motum progressiuum respici oportet, vt pateat quamdiu basis, qua corpus plano innititur in directione AV progrediatur et quanta celeritate planum radat, si enim ista basis quiescat, tum frictio omnino cessat, si autem antecedentia versus incedat, tum subito frictio fit negatiua, motumque progressiuum accelerabit.

§ 29. Ob haec igitur obstacula eiusmodi tantum corpora examini subiiciemus, quorum motus super plano OV

O V fine faltibus fecundum vnam certam continuitatis legem abfolui queat, ac de reliquis corporibus fufficiat annotaffe, vti eft factum, quibus cafibus motus progreffiuus fine prouolutione fieri poffit. Inter huiusmodi autem corpora primum omnium deprehenditur globus, cuius centrum grauitatis in ipfo globi centro verfatur, globus enim talis motu continuo fine faltu fuper plano O V rotando progredi poteft. Deinde etiam ad hanc claffem pertinent cylindri, qui centrum grauitatis in medio axis fui puncto fitum habeant, fi fecundum directionem ad axem normalem moueantur. Praeterea huc referri poffunt omnia corpora rotunda, quae vtrinque circa fectionem per centrum grauitatis factam et ad axem normalem ex partibus aequalibus et fimilibus conftent, cuiusmodi corpora formantur ex conuerfione figurae planae diametro orthogonali praeditae circa ordinatam diametro normamalem. Eiusmodi enim corpus rotundum fuper plano O V pofitum, et motum in directione horizontali ad fuum axem normali tam progrediendo quam rotando fine fubitaneo faltu moueri poterit. Id tantum eft tenendum vt axis corporis ad quem omnes fectiones normaliter factae funt circuli fimul per omnium fectionum centra grauitatis tranfeat, quo proprietate axis permanentis fit praeditus.

§. 30. Incumbat igitur eiusmodi corpus rotundum plano O V ita vt eius axis fit horizontalis, atque repraefentet circulus D H C eius fectionem mediam, in cuius Fig. 4. centro G pofitum erit totius corporis centrum grauitatis, eius axis autem erit recta horizontalis per G tranfiens atque ad planum fectionis DHC normalis. Tanget igitur hoc corpus planum fubiectum OV vel in vnico puncto C si reliquae eius sectiones omnes axi normales minores fuerint sectione DHC, vel in pluribus punctis, si plures sectiones maximae fuerint aequales vel contactus erit linea recta, si corpus fuerit cylindrus. Perpetuo autem perpendiculum GC quod in planum OV demittitur simul in rectam per omnia contactus puncta transeuntem erit normalis, haecque recta plano DHC simul normaliter insistet. Sit iam totius corporis pondus $= P$, eiusque frictio, dum motu progressiuo in directione horizontali GF ad axem corporis normali mouetur $= F$. Atque ob rationes supra allegatas habebit F ad P constantem rationem pro omnibus corporibus ex materia aeque laeui confectis, si quidem eadem maneat plani OV asperitas.

§. 31. Cum igitur in his corporibus basis, qua plano insistunt secundum directionem motus OV non sit extensa, interuallum CA omnino euanescit, eritque momentum virium sollicitantium ad motum rotatorium generandum $= F.GC$: quod cum semper affirmatiuum habeat valorem, dummodo frictio F non prorsus sit nulla, apparet eiusmodi corpora motum progressiuum recipere non posse, quin simul in ipsis statim motus rotatorius generetur. Quare si corpori impressus fuerit motus progressiuus in directione GF a frictione statim generabitur motus rotatorius circa axem corporis in plagam DHC, qui ob vim rotatoriam perpetuo eandem, quamdiu scilicet frictio adest, continuo accelerabitur, donec vis rotatoria $F.GC$ euanescat. Frictio autem tamdiu aliquem retinebit valorem, quamdiu corpus motu suo planum radet, hocque euenit, quamdiu puncti C celeritas rotatoria

ria circa axem minor eſt, quam celeritas motus progreſſiui. Quam primum autem inter hos duos motus aequalitas intercedit, tum frictio ſubito ceſſabit, motusque tam progreſſiuus, quam rotatorius manebit vniformis, niſi quatenus a reſiſtentia aëris ac villoſitate plani diminuitur.

§. 32. Datur ſcilicet ſuper plano aspero non obſtante frictione motus vniformis mixtus ex progreſſiuo et rotatorio, quo cum corpus perpetuo ſine vlla diminutione progredietur, ſi quidem nec reſiſtentia aeris nec plani villoſitas impedimentum afferat. Exiſtit autem iſte motus vniformis tum cum frictio F penitus ceſſat, id quod euenit, quam primum punctum C planum radere deſinit, provenit enim frictio a motu baſis, qua corpus planum tangit, ſuper plano OV. Quodſi ergo ponamus celeritatem motus progreſſiui in directione $GF = \surd v$ ſeu debitam altitudini v, tum niſi motus rotatorius adeſſet ſingula corporis puncta, ideoque etiam punctum C eadem celeritate $\surd v$ in directione CV moueretur. Sin autem ponamus motum rotatorium ſolum adeſſe, quo punctum C circa axem moueatur celeritate $= \surd u$ in plagam DHC, tum punctum C dum planum tangit mouebitur in directione CO celeritate $= \surd u$. Quare ſi vterque motus tum progreſſiuus quam rotatorius ſimul inſit in corpore, tum puncti C celeritas in directione CV erit $= \surd v - \surd u$: ex quo ſi fiat $\surd u = \surd v$, motus puncti C ſuper plano penitus ceſſabit, ſimulque frictio euaneſcet. Corpus ergo, poſtquam hunc motum fuerit adeptum, perpetuo aequabiliter progredi perget.

§. 33. Quoniam autem ad motum rotatorium definiendum noſſe oportet momentum inertiae corporis reſpectu

ſpectu axis rotationis, pro quo hactenus ſcripſimus Pbb, conueniet pro corporibus ſaltem rotundis, qualia hic tractare ſtatuimus, iſtud momentum inertiae calculo inueſtigare. Sit igitur figura ACB, quae circa axem AB rotata praebeat ſolidum rotundum, cuius motum ſumus exploraturi; atque ſit medietas figurae BGC perfecte aequalis ac ſimilis alteri medietati AGC. Ponamus autem ſolidum ex materia vniformi conſtare, quo calculus facilior euadat; cadet ergo vtique centrum grauitatis corporis geniti ſponte in G. Ducatur ad axem applicata quaecunque PM ipſique proxima pm; ac vocetur $GP = x$; $PM = y$ erit $Pp = dx$. Sumatur in elemento $PMmp$ particula Xx, quae poſito $PX = z$ erit $= dx\,dz$. Ab hac particula per rotationem generabitur annulus, cuius maſſa erit $= \pi z dz dx$ denotante $1 : \pi$ rationem radii ad peripheriam: et cum huius annuli ſingulae partes aequaliter ab axe diſtent, erit eius momentum inertiae $= \pi z^3 dz dx$, integretur vtraque formula, fiatque $z = y$; dabit $\frac{\pi yy\,dx}{2}$ maſſam elementi ſolidi ex elemento plano Pm orti, et $\frac{\pi y^4\,dx}{4}$ eius momentum inertiae. Hinc cum pars CGB ſimilis ſit parti CGA erit volumen ſeu pondus corporis $P = \pi \int yy\,x$; et momentum inertiae $Pbb = \frac{\pi}{2}\int y^4\,dx$, ex quo fit $bb = \frac{\int y^4\,dx}{2\int yy\,dx}$ poſito poſt integrationem $x = GA$.

Fig. 5.

§. 34. Ponamus primo corpus eſſe cylindrum ex materia homogenea confectum, erit vbique $y = CG = c$, hincque $bb = \frac{\int c^4\,dx}{2\int cc\,dx} = \frac{cc}{2}$; ita vt momentum inertiae Pbb futurum ſit $= P.\frac{cc}{2} = \frac{1}{2}P.CG^2$. Sit porro corpus noſtrum rotundum globus homogeneus cuius radius CG

$= c$,

$= c$, fiet $yy = cc - xx$, et $\int yy\,dx = ccx - \frac{1}{3}x^3$ et $\int y^4\,dx = c^4 x - \frac{2}{3}ccx^3 + \frac{1}{5}x^5$. Ponatur $x = c$; fietque pro toto globo $\int yy\,dx = \frac{2}{3}c^3$ et $\int y^4\,dx = \frac{8}{15}c^5$, ex quibus ſequitur $bb = \frac{2}{5}cc$, ideoque momentum inertiae $Pbb = \frac{2}{5}Pcc = \frac{2}{5}P.CG^2$. Simili modo ſi corpus fuerit ſphaeroides ellipticum, ex conuerſione ſemiellipſis A CB circa axem AB genitum, ponatur ſemiaxis $AG = a$, et $CG = c$, erit $yy = cc - \frac{ccxx}{aa}$; et $y^4 = c^4 - \frac{2c^4xx}{aa} + \frac{c^4x^4}{a^4}$: vnde fit $\int yy\,dx = ccx - \frac{ccx^3}{3aa}$, et $\int y^4\,dx = c^4x - \frac{2c^4x^3}{3aa} + \frac{c^4x^5}{5a^4}$. Ponatur $x = AG = a$, fiet $\int yy\,dx = \frac{2}{3}acc$ et $\int y^4\,dx = \frac{8}{15}ac^4$, ex quo ſequitur $bb = \frac{2}{5}cc$, prorſus vti pro globo. Erit ergo pro omni ſphaeroide elliptico homogeneo, quantuscunque fuerit axis AB, perpetuo momentum inertiae reſpectu axis $AB = \frac{2}{5}Pcc = \frac{2}{5}P.CG^2$.

§. 35. Ponamus iam eiusmodi ſolido rotundo in initio dum eius centrum grauitatis puncto O imminebat, impreſſum eſſe motum progreſſiuum in directione ad axem normali cum celeritate debita altitudini a ſimul vero, vt caſum in latiſſimo ſenſu accipiamus, eidem corpori impreſſus ſit motus rotatorius in plagam DHC, quo ſingulae peripheriae DHC puncta M circa axem circumferantur celeritate debita altitudini b. Hoc duplici motu impreſſo corpus iam confecerit ſpatium $OC = x$, ſitque nunc celeritas progreſſiua, qua centrum grauitatis G in directione horizontali GF progreditur, debita altitudini v, celeritas vero, qua punctum M etiamnum circa axem rotatur, debita altitudini u: vtrumque ſcilicet motum ſeorſim conſideramus ac metimur, perinde ac ſi alter non Fig. 6.

 adeſſet

adesset. Progrediatur iam puncto temporis corpus motu progressiuo per spatiolum $Gg = dx$, atque interea punctum M motu angulari feretur per arculum Mm, vt sit $Gg : Mm = \sqrt{v} : \sqrt{u}$, vnde oritur $Mm = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$. Puncti C vero celeritas in directione CV ex vtroque motu resultans erit $= \sqrt{v} - \sqrt{u}$.

§. 36. Dum igitur corpus progreditur per spatiolum $Gg = dx$, punctum C super plano OV feretur per spatiolum $Cc = \frac{(\sqrt{v} - \sqrt{u})dx}{\sqrt{v}}$ intereaque tantum spatium Cc motu suo radet. Quodsi autem motus rotatorius abesset, tum punctum C raderet eodem tempusculo spatiolum dx hocque casu foret frictio, quam corpus sentiret $= F$, illa ipsa scilicet, quam experimenta monstrant. Quoniam igitur frictio oritur ab asperitate, quam corpus dato tempusculo radendo superare debet, manifestum est praesente casu, quo punctum C tantum per spatiolum $Cc = \frac{(\sqrt{v} - \sqrt{u})dx}{\sqrt{v}}$ planum subiectum OV radit, dum corpus ipsum per spatiolum dx progreditur, frictionem tanto minorem fore debere quam F, quanto spatiolum Cc minus est spatiolo dx erit ergo frictio, qua corpus retrahitur in directione CO non amplius F sed tantum $= \frac{(\sqrt{v} - \sqrt{u})F}{\sqrt{v}}$. Ex quo perspicuum est, quod iam ante innuimus, si motus rotatorius $\sqrt{u}$ aequalis sit motui progressiuo $\sqrt{v}$, tum frictionem penitus cessare: atque si fuerit $\sqrt{u} > \sqrt{v}$, tum frictio etiam fiet negatiua, atque corpus in directione CV sollicitabit: ita vt haec expressio perpetuo effectum frictionis exhibeat, dummodo corpus non quiescat, quippe quo casu frictio semper est nulla.

§. 37.

§. 37. Cum igitur corpus a frictione in directione CO retrahatur vi $= \frac{(\sqrt{v} - \sqrt{u})F}{\sqrt{v}}$, ab hac vi motus progressiuus retardabitur vnde fiet $dv = \frac{-(\sqrt{v} - \sqrt{u})F\,dx}{P\sqrt{v}}$. Quod vero ad motum rotatorium attinet, is a frictione accelerabitur, eritque eius vis acceleratrix $= \frac{(\sqrt{v} - \sqrt{u})Fce}{Pbb\sqrt{v}}$ denotante Pbb momentum inertiae corporis respectu axis, et posito $GC = c$. Reactio autem plani hoc casu ad motum rotatorium alterandum nihil confert, cum eius directio CG per ipsum centrum grauitatis G transeat. Quare dum punctum M per elementum $Mm = \frac{dx\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$ rotatur, eius motus rotatorius accelerabitur, fietque $du = \frac{(\sqrt{v} - \sqrt{u})Fccdx\sqrt{u}}{Pbbv}$. Ex quibus duabus aequationibus corporis motus tum progressiuus quam rotatorius in quouis spatii OV loco poterit determinari. Primum autem perspicitur, si semel fuerit $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, tum vtrumque corporis motum perpetuo invariatum permanere; quare si initio fuerit $\sqrt{b} = \sqrt{a}$, tum corpus motu impresso sine vlla variatione in infinitum progredietur, neque in motu suo vllum decrementum patietur, nisi quatenus a resistentia aeris ac villositate plani retardatur; a quibus impedimentis adhuc mentem abstrahimus.

§. 38. Vt iam ex duabus inuentis aequationibus quicquam concludamus, ante omnia vnam ex tribus variabilibus v, u et x eliminari oportet, facillime autem elementum dx eliminatur. Fit autem ex prima aequatione $\frac{(\sqrt{v} - \sqrt{u})F\,dx}{P\sqrt{v}} = -dv$, ex altera autem $\frac{(\sqrt{v} - \sqrt{u})F\,dx}{P\sqrt{v}} = \frac{bb\,du\sqrt{v}}{cc\sqrt{u}}$; vnde colligimus $\frac{dv}{\sqrt{v}} + \frac{bb\,du}{cc\sqrt{u}} = 0$, quae aequatio integrata dat $cc\sqrt{v} + bb\sqrt{u} = cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b}$ constante ad initium motus accomodata. Hinc erit $\sqrt{u} =$

$\frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}-cc\sqrt{v}}{bb}$ et $\frac{\sqrt{u}-\sqrt{v}}{\sqrt{v}} = \frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}-cc\sqrt{v}-bb\sqrt{v}}{bb\sqrt{v}}$. Cum autem ex prima aequatione sit $\frac{Fdx}{P} = \frac{dv\sqrt{v}}{\sqrt{u}-\sqrt{v}}$ fiet $\frac{Fdx}{P} = \frac{bbdv\sqrt{v}}{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}-cc\sqrt{v}-bb\sqrt{v}}$. Ponatur $\sqrt{v}=t$, et $cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}=m$ atque $cc+bb=n$, fiet $\frac{Fdx}{P} = \frac{2bbttdt}{m-nt} = -\frac{2bbtdt}{n} - \frac{2mbbdt}{nn} + \frac{2mmbbdt}{nn(m-nt)}$, cuius integrale est $\frac{Fx}{P} = C - \frac{bbtt}{n} - \frac{2mbbt}{nn} - \frac{2mmbb}{n^3} l(m-nt)$ restitutis ergo valoribus pro m, n, et t, et constante C ad casum accommodata erit $\frac{Fx}{P} = \frac{2ccbba+b^4a+2b^4\sqrt{ab}}{(cc+bb)^2} - \frac{bbv}{cc+bb} - \frac{2(cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b})bb\sqrt{v}}{(cc+bb)^2} - \frac{2(cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b})^2bb}{(cc+bb)^3} l \frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}-cc\sqrt{v}-bb\sqrt{v}}{bb\sqrt{b}-bb\sqrt{a}}$

§. 39. Primum autem omnium intelligitur, si in loco quocunque cognitus fuerit corporis motus progressiuus seu celeritas $\sqrt{v}$, tum expedite assignari posse motum rotatorium seu celeritatem $\sqrt{u}$ atque vicissim simili modo ex cognito motu rotatorio indicabitur motus progressiuus. Ex aequatione enim $cc\sqrt{v}+bb\sqrt{u}=cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}$, si cognita fuerit celeritas progressiua $\sqrt{v}$, tum erit celeritas rotatoria $\sqrt{u} = \frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}-cc\sqrt{v}}{bb}$, et si cognita fuerit celeritas rotatoria $\sqrt{u}$, erit celeritas progressiua $\sqrt{v} = \frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}-bb\sqrt{u}}{cc}$. Quodsi ergo eueniat, vt motus progressiuus cesset, tum erit celeritas rotatoria $\sqrt{u} = \frac{cc\sqrt{b}+bb\sqrt{b}}{bb}$; et si celeritas rotatoria alicubi euanescat, tum motus progressiuus supererit celeritate $\sqrt{v} = \frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}}{cc}$. Generatim autem perspicitur frictione non obstante, semper in motu corporis quantitatem quandam eiusdem magnitudinis constanter conseruari, quae est $cc\sqrt{v}+bb\sqrt{u}$; ex quo intelligitur corpus nunquam ad quietem a frictione redigi posse, nisi sit $cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}=0$.

§. 40.

§. 40. Quo autem facilius singula phaenomena, quae aequationes inuentae in se complectuntur, euoluamus, casus particulares perpendamus. Ponamus igitur corpori initio in O motum tantum progressiuum celeritate $\sqrt{a}$ esse impressum, ita vt sit $\sqrt{b} = 0$, fiet ergo vbique $cc\sqrt{v} + bb\sqrt{u} = cc\sqrt{a}$; quae est vna aequatio; altera vero erit $\frac{Fx}{P} = \frac{(3cc+bb)bba}{(cc+bb)^2} - \frac{bbv}{cc+bb} + \frac{2ccbb\sqrt{av}}{(cc+bb)^2} - \frac{2c^4bba}{(cc+bb)^3} l \frac{(cc+bb)\sqrt{v} - cc\sqrt{a}}{bb\sqrt{a}}$. Quoniam igitur logarithmi quantitatum negatiuarum sunt imaginarii, apparet semper fore $\sqrt{v} > \frac{cc\sqrt{a}}{cc+bb}$, neque ante, quam corpus emensum sit spatium infinitum fiet $\sqrt{v} = \frac{cc\sqrt{a}}{cc+bb}$; tum vero fiet $\sqrt{u} = \sqrt{v}$, corpusque motu aequabili feretur. Celeritas ergo progressiua $\sqrt{a}$ corporis continuo diminuitur, donec tandem spatio percurso infinito sui partem $\frac{bb\sqrt{a}}{cc+bb}$ amittat. Cylindrus igitur, in quo est $bb = \frac{1}{2}cc$, spatio absoluto infinito, retinebit celeritatem $= \frac{2}{3}\sqrt{a}$. Globus vero vel sphaeroides ellipticum in quo est $bb = \frac{2}{5}cc$, de motu suo progressiuo primum impresso $\sqrt{a}$ continuo amittet, donec post tempus infinitum retineat motum progressiuum celeritate $= \frac{5}{7}\sqrt{a}$, simulque tantum motum rotatorium adipiscatur.

§. 41. Ponamus iam corpori initio in O nullum motum progressiuum sed tantummodo motum rotatorium in plagam DHC cum celeritate $\sqrt{b}$ esse impressum, ita vt sit $\sqrt{a} = 0$. Generabitur igitur mox motus progressiuus, ac semper inter motum progressiuum et rotatorium haec intercedet ratio vt sit $cc\sqrt{v} + bb\sqrt{u} = bb\sqrt{b}$. Praeterea vero erit $\frac{Fx}{P} = \frac{bbv}{cc+bb} - \frac{2b^4\sqrt{bv}}{(cc+bb)^2} - \frac{2b^6 b}{(cc+bb)^3} l \frac{bb\sqrt{b} - (cc+bb)\sqrt{v}}{bb\sqrt{b}}$ ex qua aequatione apparet, si spatium x ponatur infinitum, esse oportere $\sqrt{v} = \frac{bb\sqrt{b}}{cc+bb}$, quo casu quoque fit

$\sqrt{u} = \frac{bb\sqrt{b}}{cc+bb}$. Motus ergo progressiuus continuo crescit rotatorius vero decrescit, donec spatio emenso infinito inter se fiant aequales. Ad sensum autem ista aequalitas mox obtinetur, si enim ponamus $\sqrt{v} = \frac{99bb\sqrt{b}}{100(cc+bb)}$ fiet $\frac{Fx}{P} = 6,1501 \cdot \frac{b^6 b}{(cc+bb)^3}$: et si $bb = \frac{2}{5}cc$ vti in globo erit $\frac{Fx}{P} = 0,1434b$. Statim igitur ab initio motus tum prope ad vniformitatem redigitur, vt ne centessima quidem parte a perfecta vniformitate discrepet. Si enim $\frac{F}{P}$ sit $= \frac{1}{4}$, quae est frictio iam satis parua, tum antequam corpus spatium $x = b$ absoluit, celeritatem habebit ne centesima quidem parte a celeritate vniformi et vltima discrepantem.

§. 42. Si igitur corpori initio in O duplex motus nempe progressiuus celeritate $\sqrt{a}$ ac rotatorius celeritate $\sqrt{b}$ imprimatur, facile indicare poterimus, quomodo corpus in infinitum sit processurum, scilicet si fuerit $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, tum corpus motu vtroque vniformiter in infinitum progredietur. Sin autem sit $\sqrt{a} > \sqrt{b}$, tum corporis motus progressiuus diminuetur, rotatorius vero augetur, donec emenso spatio infinito ambo inter se fiant aequales, eritque tum $\sqrt{v} = \sqrt{u} = \frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}}{cc+bb}$. At si fuerit $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ tum celeritas motus progressiui crescet, rotatorius motus vero diminuetur, donec percurso spatio infinito vtriusque celeritas fit $= \frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}}{cc+bb}$. Ad hanc vero motus aequabilitatem corpus satis cito ita perueniet, vt sensibus descrimen percipere non valeamus. Cum enim spatium x fiat infinitum, si quantitas logarithmica

$\frac{cc\sqrt{a}+bb\sqrt{b}-cc\sqrt{v}-bb\sqrt{v}}{bb\sqrt{b}-bb\sqrt{a}}$ euanescat, quia $l\,0 = -\infty$, ita cum

cum logarithmus minimae fractionis sit satis exiguus, intelligitur modicum spatium requiri, ad hoc, vt discrimen a motu perfecte vniformi prorsus sit insensibile.

§. 43. Ponamus autem nunc corpori initio in O praeter motum progressiuum celeritate $\sqrt{a}$ imprimi motum rotatorium cum celeritate $\sqrt{b}$ in plagam oppositam HDC; atque in computo praecedente loco $+\sqrt{b}$ scribere debebimus $-\sqrt{b}$. Ac si in C ponamus motum rotatorium adhuc in eandem plagam HDC fieri, quoque $\sqrt{u}$ negatiue capiendum est. Pro hoc igitur casu habetur prima aequatio haec: $cc\sqrt{v} - bb\sqrt{u} = cc\sqrt{a} - bb\sqrt{b}$: altera vero erit $\frac{Fx}{P} = \frac{2ccbba + b^4a - 2b^4\sqrt{ab}}{(cc+bb)^2} - \frac{bbv}{cc+bb} - \frac{2(cc\sqrt{a} - bb\sqrt{b})bb\sqrt{v}}{(cc+bb)^2} - \frac{2(cc\sqrt{a} - bb\sqrt{b})^2 bb}{(cc+bb)^3}$ $l\frac{bb\sqrt{u} - cc\sqrt{v} + (cc+bb)\sqrt{v}}{bb\sqrt{a} + bb\sqrt{b}}$. Ex hoc apparet statum vniformitatis, ad quem motus corporis se tandem componet fore $\sqrt{v} = \frac{cc\sqrt{a} - bb\sqrt{b}}{cc+bb}$ et $\sqrt{u} = -\frac{cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b}}{cc+bb}$ nempe $\sqrt{v} = -\sqrt{u}$, vti status vniformitatis, quo frictio euanescit, requirit. Antequam igitur corpus ad istum statum vniformitatis peruenire potest, alterutram celeritatem negatiuum fieri oportet, ideoque per statum quietis transire.

§. 44. Ad casus hos euoluendos, quibus alterutra celeritas euanescit, ponamus primo $cc\sqrt{a} > bb\sqrt{b}$; manebit igitur celeritas progressiua $\sqrt{v}$ perpetuo affirmatiua, attamen continuo diminuetur, donec post percursum spatium infinitum fiat $\sqrt{v} = \frac{cc\sqrt{a} - bb\sqrt{b}}{cc+bb}$, tum vero erit $\sqrt{u} = -\frac{cc\sqrt{a} + bb\sqrt{b}}{cc+bb}$; ideoque rotatorius fit in sensum contrarium ei, quo initio rotabatur. Alicubi igitur necesse est vt motus rotatorius euanescat, vbi scilicet rotatio in plagam contrarium incipit. Ad hunc locum inueniendum ponamus $\sqrt{u} = 0$, eritque $\sqrt{v} = \frac{cc\sqrt{a} - bb\sqrt{b}}{cc}$, qui valor in ob $\frac{ee}{bb} = \frac{5}{2}$ si fuerit $\sqrt{b} > \frac{5}{2}\sqrt{a}$, globus motu progressiuo ad certam tantum distantiam OV pertinget, hincque reuertetur, et in directione Vv in infinitum progredietur, celeritatem tandem acquirens pro vtroque motu eandem atque $= \frac{2\sqrt{b} - 5\sqrt{a}}{7}$. Quodsi autem ponamus $\sqrt{b} = \frac{(5n+2)\sqrt{a}}{2(n-1)}$, erit interuallum OV, ad quod corpus pertingit, antequam reflectitur $= \frac{2Pa}{7F}\left(\frac{n-3}{n-1} + \frac{2ln}{(n-1)^2}\right)$, vbi pro ln logarithmum hyperbolicum numeri n accipi oportet.

§. 48. Quo facilius hae conclusiones cum experimentis comparari queant, diuersos casus numeri n, quos ante euoluimus, singulatim perpendamus, vbi notandum est fore proxime $\frac{2P}{7F} = 1$: quia vulgo $\frac{F}{P}$ solet esse fractio inter $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ contenta. Si porro k denotet spatium, quod globus motu impresso tempore vnius *minuti* secundi absoluere queat, in partibus millesimis pedis Renani expressum, erit $a = \frac{45}{62500}$. Sicque spatium OV quouis casu in data mensura exprimi poterit. Si ergo fuerit

$\sqrt{b} = \frac{12}{2}\sqrt{a}$; erit $OV = \frac{2Pa}{7F} \cdot 0,38629436$

$\sqrt{b} = \frac{17}{4}\sqrt{a}$; erit $OV = \frac{2Pa}{7F} \cdot 0,54930614$

$\sqrt{b} = \frac{22}{6}\sqrt{a}$; erit $OV = \frac{2Pa}{7F} \cdot 0,64139874$

$\sqrt{b} = \frac{27}{8}\sqrt{a}$; erit $OV = \frac{2Pa}{7F} \cdot 0,70117974$

$\sqrt{b} = \frac{32}{10}\sqrt{a}$; erit $OV = \frac{2Pa}{7F} \cdot 0,74334075$

etc.

Atque si numerus n fiat infinitus vt fiat

$\sqrt{b} = \frac{5}{2}\sqrt{a}$ erit $OV = \frac{2Pa}{7F}$ quod est interuallum maximum ad quod globus pertingere valet, antequam reuertatur.

DE METHODIS HOROLOGIA SOLARIA PROMTE DELINEANDI.

Auctore
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Cum non acuendis ſolum ingeniis, ſed vtilitati etiam et commoditati in vita humana, inſeruire et fauere debeat Matheſis: nullum dubium eſt, quin egregias laudes promereantur illi Artifices, qui, alteri horum ſcoporum praecipue intenti, ſolerter excogitant et fabricant eiusmodi Inſtrumenta, quibus contemplationes Mathematicorum fructuoſas reddere, ſimulque ad vſus communes et quotidianos vocare, facile licet. Eminent inter haec varia linearum, partibus vſui quaeque ſuo, diſtinctarum genera, quae in Regulis metallicis expreſſae Problemata totius Matheſeos maxime obuia, atque adeo etiam *Artis Gnomonicae*, promte et commode reſoluta ita porrigunt quaſi, vt ab imperitis etiam recipi et ad conuenientes vſus trahi tuto poſſint.

§. 2. In hunc finem *Angli* Inſtrumentorum Mathematicorum fabricatores, ingenio pariter et induſtria mirum pollentes, inſculpere Regulis ſolent lineas quoque Gnomonicas, quae certe Horologiis ſolaribus concienne et promte deſcribendis ſunt aptiſſimae; cum alias hic requiratur labor, vti notum eſt, non mediocris, et qui patientiam multum exercent. Harum linearum praecipuae ſunt funt duae, Horologiis horizontalibus defignandis deftinatae, quarum vnam vocare folent: *Scalam fex horarum*, *fcale of fix hours*; alteram vero *Lineam Latitudinum*, *Line of Latitudes*; cuius vtriusque adminiculo coniuncto ad cuiusvis loci terreftris Latitudinem quam citiffime exarari poteft horologium horizontale exactiffimum. Adiiciunt his quandoque adhuc alias, inferuientes horologiorum declinantium constructioni, quas autem intactas nunc relinquam; fed id folum agam, vt vfum indicaturam fcalarum, minus certe pro eius praeftantia extra Angliam familiarem, diftincte et breuiter exponam, hancque praxin Demonftratione Geometrica muniam, quam et hucusque in variis libris, fruftra quaefiui, fed et indagatione diligentiore dignam omnino iudicaui.

§. 3. Operatio igitur, per lineas praemonftratas breuiter et facillime abfoluenda, legitur in *Clariff. Harrifii Lexico Technico*, fub titulo: *Dialling-Lines*; neque alibi, etiamfi diu et fedulo inquirens, eam defcriptam deprehendere potui. In Dictionario enim Anglico fimili fed auctiore, *Nobiliff. Chambers*, Definitiones folae harum linearum, fine praxeos mentione facta, occurunt; vnde etiam factum eft, vt aliquamdiu dubius in his lineis ad vfum Gnomonicum reuocandis haeferim. Poft haec vero mihi in manus adhuc incidit optato liber Anglicus, cui titulus eft: *The Defcription and Vfes of a great Vniverfal-Quadrant*, *auctore Ioh. Collins*, editus Londini 1658, in quo hanc ipfam methodum ex inftituto defcriptam vidi, attributam *Iohanni Ferrereo* Hifpano, et exeultam quoque *Clauio* in operibus eius mathematicis, editis anno 1612; fed Demonftratione deftitu-

tam.

tam. Abſoluta autem iam hac Diſſertatione, inueni Demonſtrationem elegantem ſane huius methodi, ſed diuerſam tamen a mea, inter *Schootenii* Exercitationes Mathematicas, libro V. ſect. 29. p. 510. vbi excogitatio huius methodi deſcribendi horologia ſciatherica per triangulum iſoſceles, attribuitur *Samueli Forſtero*, apud *Londinenſes* in Collegio *Greſhamenſi* Aſtronomiae Profeſſori, qui *Londini* tractatum hac de re edidit anno 1638, cui titulus eſt: *The Art of Dialling by à new eaſie and moſt ſpeedii way*. Conſtat autem ea ſequentibus: Sit conſtruendum horologium horizontale ad locum cuius latitudo eſt 47°; in ducta igitur linea recta AB, ex puncto aliquo intermedio C abſcindatur vtrinque portio CA et CB, quarum vtraque aequalis ſit longitudini illi in *Linea Latitudinum* inſtrumenti, quae his gradibus latitudinis reſpondet. Tum capiatur Circino integra longitudo *Scalae ſex horarum*, eaque mediante ex A et B deſcribatur triangulum aequicrurum AEB, eritque ſic puncto E adſcribenda hora XII, et ducta CE linea meridiei. Iam vero inſtrumentum ob oculos ponit *Scalam* hanc *ſex horarum*, diuiſam in ſex horas, et quamlibet harum ſubdiuiſam adhuc in partes minores, prout exſtenſio huius lineae id permittere poteſt. Tranſerantur itaque longitudines, ab initio ſcalae ad quamlibet horam extenſae, ex E vtrinque in puncta 1, 1. 2, 2. 3, 3. 4, 4. 5, 5. quibus punctis ita obtentis ex centro horologii C per haec ducantur totidem lineae rectae C 1 I; C 2 II; C 3 IX; etc. quae erunt lineae horariae quaeſitae, figura noua, ornatus gratia, pro lubitu circumſcribendae, Si partes horarum deſiderentur; eae eadem facilitate ex ſcala depromuntur, et ab E vtrinque transferuntur. Tab. V. Fig. 8.

§. 4. Quo maiori itaque facilitate haec operatio absoluitur: eo maiori etiam ingenio eam erutam esse recte iudicare mihi videor. Sed vt tota haec praxis luce perfundatur sua, appareatque eam tutissimam esse et omnino exactam, ante omnia diuisio *Scalae sex horarum* indicari debet. Ea sic adornatur. Intra Peripheriam circuli ducantur diametri XII VI, et AB, ad angulos rectos se decussantes, quo facto semiperipheria XII B VI diuidatur in partes aequales sex pro horis, in duodecim pro semihoris, in viginti quatuor pro quadrantibus horae, et sic porro; tum ex A ducantur in singula haec diuisionum factarum puncta rectae AC, AD, etc. quae diametrum XII VI in totidem punctis intersecabunt; eritque sic diameter XII VI *Scala sex horarum* parata, cui horarum numeri adscribuntur, vti figura docet. Vnde patet, cum, pro diuisione horarum, BC sit 30°, fore III II = III IV, tangentem anguli horarii 15°, relatam ad radium A III, pariterque esse III I = III V, nec non III XII = III VI, tangentes angulorum horariorum respectiuos ad 30° et 45°, pro eodem radio, quem hic, et in sequentibus, constanter assumam aequalem vnitati. Erit igitur longitudo *Scalae sex horarum* integra = 2, hoc est, aequalis duplo tangentis 45°; habebitque diuisiones, facto initio ab hora III, hinc et inde respectiue sibi aequales; quarum longitudines, ab eadem hora III captae, nihil erunt aliud nisi tangentes angulorum horariorum, vel semihorariorum, etc. vel tangentes angulorum 15°, 30°, 45°; aut 7° 30′, 15°. 0′, 22° 30′, 30° 0, 37° 0, 37°. 30′, 45° 0′, etc. Ex his itaque facile perspicitur natura *Scalae sex horarum*; quid vero sit *Linea Latitudinum*, inferius demum poterit explicari.

Tab. VI. fig. 1.

§. 5.

§. 5. Ad reliquam tractationem necesse nunc est, vt paucis ad memoriam reuocetur ordinaria horologii horizontalis delineatio, fundata in regulis Proiectionum Astronomicarum, apud varios Auctores doctrinae Gnomonicae obuia, et quae breuiter huc redit. Ducta linea recta indefinita AEXII, capiatur angulus EAG = latitudini loci, ductaeque sic rectae AG insistat ad angulos rectos GD, cui aequalis abscindatur DE. Radio ED describatur quadrans circuli DK diuidendus in sex partes aequales pro horis, ductisque per harum diuisionum puncta inuenta rectis E1, E2, E3, etc., denotabuntur in D5, perpendiculari ad AE, puncta 1, 2, 3, 4, 5, per quae ductae rectae A1, A2, A3, A4, A5, erunt lineae horariae quaesitae. Ponamus iam eadem puncta 1, 2, 3, 4, 5, determinari debere per applicationem *Scalae sex horarum*, quae sit BC; apparet, quaestionem iam in eo versari, quomodo punctum B aut C determinari debeat, vt ei scala sex horarum, constantis quippe longitudinis, tuto applicari possit; deinde etiam, an possibile sit, et institutum id patiatur, vt quibuslibet latitudinibus vna eademque inseruiat longitudo et diuisio rectae BC hoc modo applicatae.

§. 6. Quibus quaestionibus vt satisfaciam, inuestigabo tantum quantitatem rectae AB, visurus an ea dependeat a latitudine loci sola, vel an aliis adhuc determinationibus obnoxia sit. Quodsi enim illud se manifestet: patebit possibilitas *Salae sex horarum* constantis, ad singulas latitudines applicandae. Quod vt commodius fiat, assumam tangentium D1, D2, D3, etc. eundem radium cum tangentibus FII, FI, FC, scilicet vtrumque

$=1$, eritque adeo $DE = DG = FC = FB = 1$, et $CB = 2$.

§. 7. Iam vero conſiderari debet, tangentem FII, 15°, (§. 4.) ita eſſe comparatam, vt ducta per punctum II, recta A II 2, tangens D 2 ſit 30°. Porro tangens FI ita eſt comparata, vt ducta per punctum I recta A I 1. tangens DI ſit 15°; vnde, ſi ex centro A ducatur recta intermedia quaeuis $A\alpha\beta$, generaliter tangentem $F\alpha$ ita conſtitutam eſſe oportet, vt, ſi angulus ipſi reſpondens fuerit Z, debeat eſſe $D\beta =$ tang. $(45° - Z)$. Quia vero initium numerandi hos angulos Z factum eſt a puncto F verſus C: euidens eſt angulos ab F captos verſus B fieri priorum ſuorum analogorum negatiuos, eorumque tangentes habendas etiam eſſe pro negatiuis; ita vt ex. gr. ſit $D5 =$ tang $(45° + 30°) =$ tang. 75°.

§. 8. Hac praeparatione iam facta, ſint, latitudinis ſinus $= m$, $AB = e$, tangens anguli $Z = F\alpha = t$, erit $C\alpha = 1 - t$, ACB ſinus $= \frac{e}{2}$, coſ. $= \frac{\sqrt{(4 - e^2)}}{2}$; et quia generaliter poſitis tangentibus anguli maioris $= T$, minoris $= t$, tangens differentiae eſt $\frac{T - t}{1 + Tt}$, et tang. $45° = 1$, erit tang. $(45 - Z) = \frac{1 - t}{1 + t}$, eritque porro in triangulo rectangulo ADG haec analogia; ſin. $DAG(m) : DG(1) =$ ſinus totus (1): AD vnde fit $AD = \frac{1}{m}$.

§. 9. Ex his deinde vlterius deducuntur ſequentia: ſi ex α demittatur $\alpha\gamma$ perpendicularis ad AC. Nempe in triangulo $C\gamma\alpha$ eſt, ſinus totus (1): $C\alpha(1 - t) =$ ſin. $ACB(\frac{e}{2}) : \gamma\alpha = \frac{\overline{1-t}.e}{2}$; nec non in eodem triangulo, ſinus totus (1) : $C\alpha$ $(1 - t)$ coſ. ACB $(\frac{\sqrt{4 - ee}}{2})$: $C\gamma = \frac{\overline{1-t}.\sqrt{4 - ee}}{2}$, ex quibus conficitur tangens $DA\beta =$ tan.

$\gamma A\alpha$

$\gamma A a = \frac{\gamma\alpha}{A\gamma} = \frac{\gamma\alpha}{AC - C\gamma} = \frac{\overline{1-t}.e}{2\surd(4-ee) - (1-t)\surd(4-ee)} = \frac{\overline{1-t}.e}{\overline{1+t}.\surd(4-ee)}$; vnde per analogiam ſequentem, radius (1): tang. $DA\beta\,(\frac{\overline{1-\ }.e}{\overline{1+t}.\surd(4-ee)}) = AD(\frac{1}{m}) : D\beta$, oritur $D\beta = \frac{\overline{1-t}.e}{\overline{1+t}.m\surd(4-ee)}$. Vt igitur $D\beta$ aequalis fiat tang. $(45^\circ - Z)$, prouti conditio operationis requirit, (§. 7.) nihil aliud neceſſe eſt, quam vt ſit $\frac{e}{m\surd(4-ee)} = 1$, hoc eſt, $e = \frac{2m}{\surd(m^2+1)}$; ſi enim hoc ita ſe habeat, erit $D\beta = \frac{1-t}{1+t}$, qualis (§. 8.) debet eſſe tangens $(45^\circ - Z)$. Vnde ergo conficitur, rectam AB nihil aliud inuoluere niſi ſinum latitudinis loci; adeoque eam conſtanti *Scalae ſex horarum* applicandae omnino eſſe aptam, ex quo ſimul totius praxeos ſupra allegatae (§. 3.) demonſtratio manifeſta eſt.

§. 10. Quoniam ex praecedentibus eſt $AD = \frac{1}{m}$, et $AC = \surd(4-e^2) = \frac{2}{\surd(m^2+1)}$, deriuatur exinde valor ipſius $CD = \pm(\frac{1}{m} - \frac{2}{\surd\, mm+1})$, prouti punctum C vel intra vel extra D cadit, qui ſi debeat eſſe nullus, vt puncta C et D coincidant, requiritur vt ſit $m = \frac{1}{\surd 2}$, quod quamproxime in latitudine $35^\circ\ 16'$ accidit.

§. 11. Sed maiorem curam meretur aequatio modo inuenta, $e = \frac{2m}{\surd(m^2+1)}$, ex cuius quippe conſtructione diviſio *Lineae Latitudinum*, ſuperius (§. 4.) promiſſa, perficitur. Geometrice haec conſtructio abſolui poteſt ſequenti modo. Sit ſinus latitudinis datae $m = \alpha\beta$, per β ducatur recta $\theta\gamma$, parallela diametro AB, et fiat $\beta\gamma =$ [illegible] αB, tum ex γ educatur in centrum recta γIII, ſecans peripheriam in δ, factiſque, arcu $B\delta = B\eta$, et

 recta

recta $\delta\eta$, erit haec $\delta\eta = e =$ AB in Fig. III. Nam facile patet, esse γ III $= \sqrt{(m^2 + 1)}$, atque hinc γ III $(\sqrt{mm+1}) : \gamma B (m) = \delta$ III $(1) : \frac{1}{2}\delta\eta \left(\frac{m}{\sqrt{(m^2+1)}}\right)$. Vnde si quis cupiat hac methodo horologium horizontale ad datam latitudinem construere, id sequenti modo exsequetur, describendo nempe, radio pro lubitu assumto, sed pro vnitate accepto, circulum BA, et formando in hoc, praescripto modo, (§. 4.) *Scalam sex horarum*; qua legitime diuisa, deinde ex data latitudine loci quaeratur etiam $\delta\eta$ per constructionem modo indicatam; eritque inuenta *Scala sex horarum* in Fig. III. ipsa BC, applicanda, modo supra (§. 3.) indicato, ex B ita vt AB sit eadem cum modo inuenta recta $\delta\eta$.

§. 12. Arithmetica igitur constructio *Lineae Latitudinum* ex praecedente Geometrica prono alueo fluet; nempe, datae latitudinis loci sinus rectus euoluatur inter tangentes, et videatur cuinam arcui respondeat; atque huius arcus noui sinus duplus erit numerus capiendus in radio B III diuiso in partes 100 000 aequales, pro puncto *Scalae* huius *Latitudinis* designando. Longe vero abludit haec regula ab ea, quam *Clar. Harrisius*, et *Nobiliss. Chambers* in Dictionariis supra laudatis vnanimiter allegant, his verbis; linea latitudinum producitur secundum hunc Canonem: „As Radius to the Chord of 90°, „so are the tangents of each respective Degrees of the „Line of latitudes to the tangents of other arks; and „then the natural sines of those arks are the numbers, „which taken froma Diagonal-Scale of equal parts, shal „graduate the Diuisions of the Line of Latitudes to any „radius.„ vid. haec Lexica sub tit. Dialling Lines. Quantum

tum enim haec verba interpretari possum, eaque quantitatibus meis hucusque adhibitis accommodare, Analogia commendata pro constructione lineae latitudinem huc redit: $1 : \sqrt{2} = \frac{m}{\sqrt{1-mm}}$: tangentem arcus cuiusdam, quem voco A. Itaque tangens $A = \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{1-mm}}$. Sit nunc sinus naturalis rectus huius arcus, qui tangentem modo memoratam habet, $= x$, eruetur x ex hac analogia, $\frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{1-mm}} : 1 = x : \sqrt{1-xx}$ vnde oritur $x = \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{mm+1}}$, quia valor ab eo, qui supra (§. 9.) inuentus est, $\frac{2m}{\sqrt{mm+1}}$, discrepat; cuius quidem dissensus causam nescire me fateor; id tamen experiundo cognoui, meam regulam ad amussim congruere omnibus illis exemplaribus instrumentorum, quae ex *Anglia* huc translata in *Gazophylacio Imperiali* asseruantur.

§. 13. Patet ex superioribus (§. 5.) lineam D5, *aequinoctialem* dictam, tenere constantem diuisionem tangentium horariarum, consequenter etiam haec pro *Scala sex horarum* poterit assumi perpetua, dummodo conueniens ipsi, pro quolibet casu latitudinis, centrum A assignetur. Sin igitur habeatur talis scala, regulae aeneae insculpta, atque eius ope delineandum sit horologium horizontale, ducantur duae lineae AD, et D5, ad angulos rectos, atque in hanc ex scala transferantur diuisiones conuenientes D1, D2, D3, D4, D5, erit haec D5 basis horologii futuri. Cui vt conueniens centrum assignetur, erit, posito sinu toto $= 1$, et sinu latitudinis loci $= m$, vniuersaliter $DA = \frac{1}{m}$, (§. 8.) quae Geometrice sic inuenitur: quoniam in scala horarum D5 longitudo Fig. 2.

gitudo D 3 aequalis est radio circuli ad quem tangentes huius scalae pertinent: describatur hoc interuallo D 3, tanquam radio, semicirculus AFB; in hoc sit arcus AD $=$ latitudini loci, et DG eius sinus $= m$, excitato ex C radio CF, normali ad AB, ducatur puncti F tangens FE, et radius CD eousque producatur, donec tangenti huic FE in E occurrat; determinabit recta CE, cosecans nempe arcus AD, in Fig. 3. ex D in A translata, centrum quaesitum sciatherici. Est enim manifestum, in triangulis similibus GDC et FCE, esse DG (m): DC $(1) =$ CF (1) : CE $= \frac{1}{m}$. Cumque adeo haec CE per solam latitudinem loci determinetur, patet iterum, posse vnica *Scala Latitudinum* omne hoc negotium absolui, quod ad definiendum centrum Sciatherici requiritur. Atque huc sine dubio redit methodus illa Domini *Haye*, Architecti militaris Galli, quae anno 1716 innotuit per tractatum cui titulus: *Regle Horaire Vniverselle, pour tracer des Cadrans Solaires*, etc. describitur enim haec praxis in *Diario Eruditorum Gallico* ad annum 1717 p. 547. sic, vt constet duabus lineis, regulae metallicae insculptis, quarum vna diuisa sit in puncta horaria a septima hora matutina vsque ad quintam vespertinam (quae scilicet lineae D 5 Fig. III. dupla est) altera autem *Centralis* ipsi vocata, inseruit definiendo centro horologii in loco latitudinis datae, quam Auctor extendit tantum a gradu latitudinis 21 vsque ad 65. Inueni postea etiam in libro *Germanico*, cuius titulus: **Der unbetrügliche Stunden-Weiser**, anno 1702 edito a *Ioh. Vlr. Müller*, p. 237 primum, qui de simili quadam, in hoc paragrapho in-

dicata,

dicata scala Gnomonica scripserit, fuisse *Clauium* cui *Iacobus Curtius*, Romanorum Imperatoris ad summi Pontificis aulam Legatus, tale artificium communicauerit, succedentibus deinde in cognitionem huius praxeos *Kirchero*, et *Schotto*, quorum posterior hanc ipsam methodum aperte docet in *Cursu Mathematico*, Herbipoli an. 1661 edito: pag. 409, Horographiae Parte V. Prop. II. Ex quibus omnibus tandem etiam haud obscure intelligitur, qua ratione construi possit horologium horizontale vniuersale, in quo nempe Index et loco moueri, et simul magis aut minus eleuari, debet.

DE
ORBITARVM APPARENTIIS.

Auctore

G. Heinsio.

I.

Tab. VII. Praecipuus Astronomiae finis eo tendit, vt non solum phaenomena coelestia legitime explicari, sed etiam praedici queant. Apparentiae orbitarum, quas corpora coelestia describunt, vel etiam circulorum, quos in globis planetarum ductos concipiunt Astronomi, non infimum locum inter ea occupant, quae praedictum finem eximium in modum promouent. Qui apparentias orbitarum satellitum Iouis vel Saturni ad datum *quoduis* tempus determinare valet, illi parum negotii facesset definitio phaenomenorum hisce Satellitibus solennium. Cognita ad quoduis tempus Aequatoris Solis in eius disco apparitione, theoria macularum Solarium maxima ex parte nota erit. Motus Lunae libratorii explicatio multum iuuabitur, si ad quoduis tempus apparentia aequatoris Lunae in eius disco sciatur, concesso nimirum huic planetae vertiginis motu. Taceo apparentiam motus vertiginis in reliquis planetis, apparentiam hemisphaerii terrae e Luna visi tempore Eclipsis Solaris, apparentiam annuli Saturni etc., quarum explicationem Astronomia non solum poscit, sed in promouendis etiam theoriis successu exoptato adhibet.

II.

2. Tantus eiusmodi apparentiarum per totam fere Astronomiam vsus exstimulauit animum, istas euidentiori et ampliori modo; ac hactenus factum esse credo, quantum pro viribus licet, examinandi, ad calculum reuocandi et ad vsum Astronomicum accommodandi. Vt propositum hoc legitime exequamur, exponemus primum, quid per orbitas, earumque apparentias intelligere velimus; deinde apparentiam orbitae ad proiectionem circuli in planum positione datum reducere et huius theoriam pro scopo nostro generalem tradere allaborabimus, quae, cum supponat orbitae respectu oculi positionem, ansam dabit inquirendi conditiones positionis orbitae respectu oculi eiusque variationes ex conditionibus motuum, quibus vel oculus circa orbitam, vel orbita circa oculum, vel oculus et orbita simul certa lege circa centrum aliquod commune feruntur; quo demum pacto considerationis nostrae vsus in Astronomia innotescet.

3. Orbitas, quas corpora coelestia describunt, et quarum apparentias inuestigare volumus, in hoc negotio circulares omnes supponimus; et cum etiam circulos, qui in globis planetarum ducti finguntur, huc trahere velimus, per *orbitam* intelligemus quemuis circulum in systemate nostro planetario, qui situm suum respectu fixarum conseruat vel conseruare poni potest, siue iste quiescat, siue circa centrum aliquod in curua quauis moueatur. Hoc modo circuli, quos circa planetas suos primarios describunt satellites Iouis et Saturni; aequator, Solis, Lunae, terrae; annulus Saturni etc. nomen orbitae in hac tractatione merentur; imo et ipsae orbitae planetarum primariorum, modo circulares istas assuma-

mus. Negotium sic omne reducitur ad inuestigationem apparentiae circuli; et situs orbitae, eiusque conseruatio respectu fixarum, consideratis simul orbitae et oculi motibus, indicabit orbitae respectu oculi positionem, quam determinatio apparentiae eius supponit.

Fig. 1. 4. Detur quaeuis figura ADB, quam oculus in O locatus contempletur. Intelligatur planum PQ inter oculum et figuram quomodocunque positum, vel planum RS post figuram in situ quouis. Ex oculo O ad singula perimetri figurae ADB puncta ductae concipiantur rectae *pyramidem*, vt vocant, *opticam* formantes, quae secent plana PQ, RS, ita, vt his sectionibus in illis oriantur figurae adb, $\alpha\delta\beta$: Figura ADB hoc modo dicitur *proiici* in plana PQ, RS; figurae adb, $\alpha\delta\beta$ inde resultantes vocari solent eius *proiectiones*, et PQ, RS, *plana proiectionum*; vt ideo figurae proiectio detur per sectionem pyramidis opticae a plano proiectionis effectam. Ex opticis iam constat, figuras adb, $\alpha\delta\beta$, in suis respectu oculi O positionibus oculum eodem modo afficere, quo figura ADB in suo ad oculum situ istum afficit; et figura ADB tunc dicitur *apparere* in plano PQ instar figurae adb, in plano RS instar $\alpha\delta\beta$. Apparentiam igitur obiecti indagaturi tantummodo respicere debemus ad eius proiectionem in datum planum; et apparentia circuli vel orbitae habebitur, si eius proiectio in aliquod planum vel figura inuestigetur, quae ex sectione coni optici a plano proiectionis facta oritur. Innumerae dantur eiusdem obiecti proiectiones pro diuersa tum ipsius tum plani proiectionis respectu oculi positione. Limitemus proiectionum conditiones, vt ipsa obiecti proiectio

simpli-

ſimplicior euadat, aſſignando conſtantem quendam plano proiectionis reſpectu oculi et obiecti ſitum. Ponamus nempe planum proiectionis ſemper tranſire per centrum obiecti et normale eſſe ad rectam ex oculo ad centrum obiecti ductam, vt huius proiectio in planum ficta ſemper oculo directe opponatur. Conditionem hanc ipſa apparentiae obiecti, praeſertim remoti natura poſcere videtur. Obiecti remoti partes viſibiles ab oculo ad planum referri ſolent, quod ad eandem diſtantiam, qua obiectum ab oculo abeſt, poſitum cenſetur, quodque oculo directe opponitur. Partes omnes iudicantur in hoc plano ſitae, licet reuera extra iſtud locatae ſint, ſi quidem diſtantiae partium ab hoc plano reſpectu nimis magnae oculi ab eodem diſtantiae ſub ſenſus non cadunt. Sit globus e longinquo ſpectatus inſtar circuli eius maximi apparet, cuius planum ad rectam globi centrum et oculum iungentem normale eſt; et eodem modo corpora coeleſtia inſtar diſcorum videntur oculo directe oppoſitorum. Hanc igitur apparentiae vel proiectionis ideam proſecuturi in ſequentibus *apparentiam orbitae* definiemus per proiectionem eius in planum, quod per centrum orbitae tranſit et normale eſt ad rectam oculum et centrum hoc iungentem.

5. Poſitis his conditionibus, nonnullas generales apparentiae orbitarum ſpecies iam enumerare valemus, dum ſolummodo ad ſectionem coni optici attendere debemus a plano proiectionis factam, cuius reſpectu oculi poſitio ex hypotheſi datur. Sic, ſi orbitae reſpectu oculi eiusmodi ſit ſitus, vt planum eius productum per oculum tranſeat, ſeu ad planum proiectionis normale ſit, iſta inſtar rectae apparebit; hoc enim caſu conus opti-

cus abit in planum transiens per rectam oculum et centrum orbitae iungentem et ad planum proiectionis normalem, cuius proinde sectio cum plano proiectionis rectam efficit. Si planum orbitae oculo directe opponatur, hoc est, si coincidat cum plano proiectionis; hoc conum opticum secabit in ipso baseos plano, et ipsa basis sectio erit; vnde orbita instar circuli apparebit. Si orbitae respectu oculi ea sit positio, vt conum opticum transuersim secet, quod fit, si planum orbitae ad planum proiectionis quomodocunque inclinetur, ex hac coni sectione oritur ellipsis, vt ex conicis constat, quae proinde apparentiam orbitae exhibet. Sed omnia exactiori modo patefient, si primo conditiones, per quas conus opticus determinatur, examinemus, et deinde ex iis et plani proiectionis positione per hypothesin data figuram ad calculum reuocemus, quam planum proiectionis conum opticum secando producit.

Fig. 1. 6. Sit ADB orbita circularis seu basis coni optici, eius centrum C; oculus in O, OC axis coni. Mente intelligatur planum orbitae productum, in quod ex oculo O demissa sit perpendicularis OG, secans istud in puncto G; iungatur GC in plano orbitae. Erit planum trianguli OCG normale ad planum orbitae ADB, et angulus OCG, quem rectae OC, CG ad centrum orbitae formant definiet positionem rectae OC respectu plani orbitae ADB. Constat iam, si dentur OC axis coni, AC radius baseos et angulus OCG vel OCA, conum opticum OAB determinatum esse. In sequentibus vocabimus OC *distantiam orbitae ab oculo*, AC *radium orbitae*, angulum OCA modo praecedenti definitum *positionem orbitae* re-

respectu oculi. Res igitur huc redit, vt ex datis orbitae radio, eius distantia ab oculo et positione respectu oculi inuestigemus conditiones sectionis, quam planum proiectionis respectu oculi positione datum in cono optico producit.

7. Sit AHBD orbita, eius centrum in C, oculus in O, vt OAHBD sit conus opticus, cuius axis OC. Per C transeat planum proiectionis PQ normale ad OC, ad quod conus opticus productus intelligatur, vt facta huius ab isto sectione, figura EHFD oriatur in plano proiectionis, quae ellipsis erit, cum planum PQ conum transuersim secet. Huius igitur ellipseos conditiones determinare debemus. Habeat diameter orbitae ACB eiusmodi situm, vt angulus ACO, quem radius AC cum axe CO format, definiat positionem orbitae respectu oculi; erit per §. 6. planum per AC, CO, seu planum trianguli OAB normale ad planum orbitae; sed idem planum OAB productum normale quoque est ad planum proiectionis vel sectionis PQ, plano trianguli OAB transeunte per OC perpendicularem ad PQ. Hinc triangulum per axem coni AOB, si producatur, planum PQ secabit in recta EF, quae erit vnus ex axibus coniugatis ellipseos EHFD, prout ex conicis constat; et haec recta EF ad OC perpendicularis erit, cum planum PQ tum ad planum OEF, tum ad rectam OC sit normale. Systema linearum AB, EF, AO, CO, BO, quae omnes in eodem plano existunt, euidentiae caussa seorsim delineauimus in fig. 3. Porro planum PQ per centrum orbitae C transiens huius planum secat in recta HD aequali diametro orbitae; et eadem HD, cum sectio sit planum PQ et AHBD ad planum

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 2.

AOB

AOB normalium, normalis erit ad planum EFO vel ABO adeoque perpendicularis ad rectas OC, AB, EF in centro C concurrentes. Habentur ergo in ellipsi EH FD duae rectae EF, HD, ad se inuicem in puncto C normales, quarum altera EF cum sit vnus ex axibus coniugatis, habebit alteram HD ordinatam in puncto C aequalem diametro orbitae, et CD vel CH semiordinatam radio orbitae aequalem. In fig. 4. ellipsin EH
Fig. 4. FD cum axe coniugato EF et ordinata ad ipsum HD; euidentiae causa, seorsim repraesentauimus. Res iam huc reducta est, vt ex datis coni optici conditionibus nimirum, AC, OC, et ACO, inueniamus partes EC, CF, axis coniugati, quibus cognitis reliqua facili negotio innotescent.

8. Sint ergo radius orbitae AC ($=$ BC $=$ CD) $= a$, distantia orbitae ab oculo OC $= d$, positionis orbitae ad oculum seu anguli ACO sinus $= s$, cosinus $= c$, existente sinu toto $= r$. In fig. 3. ex A et B in OC, vbi opus est, protractam, fiant perpendiculares AG, BI, quae parallelae erunt ad EF normalem ad OC; et orientur triangula ACG, BCI, rectangula ad G et I, quae ob AC $=$ BC, ACG $=$ ICB inter se aequalia erunt, ita vt sit CG $=$ IC, AG $=$ BI. Cum sit sin. tot. (r): sin. ACO vel ACG (s) $=$ AC (a): AG; dabitur AG $=$ BI $= \frac{as}{r}$; et quia sin. tot. (r): cos. ACO (c) $=$ AC (a): CG; habebitur CG $=$ IC $= \frac{ac}{r}$. Hinc OG $=$ OC $-$ CG $= d - \frac{ac}{r}$, et OI $=$ OC $+$ IC $= d + \frac{ac}{r}$. Iam ob AG, EF, IB inter se parallelas est OG ($d - \frac{ac}{r}$): AG ($\frac{as}{r}$) $=$ OC(d): EC, et OI ($d + \frac{ac}{r}$): BI ($\frac{as}{r}$) $=$ OC (d): CF; vnde da-

dabuntur $EC = \frac{asd}{dr-ac}$, $CF = \frac{asd}{rd+ac}$ et denique habebitur $EF = EC + CF \frac{2arsd^2}{r^2d^2-a^2c^2}$.

9. Datur iam in Ellipsi EHFD semiordinata CD $= a$, et partes EC, CF axeos EF semiordinatae CD respondentes; quaeratur ratio axium coniugatorum in Ellipsi. Hunc in finem bisecetur axis EF in puncto L, quod erit centrum Ellipsis, per quod si ducatur NM parallela ad ordinatam HD, habebitur alter axis NM, et ratio axium erit NM : EF. Iam ex natura Ellipsis est $LM^2 : EL^2$ hoc est $NM^2 : EF^2 = CD^2 : EC \times CF$ $= a^2 : \frac{asd}{rd-ac} \cdot \frac{asd}{rd+ac} = r^2d^2 - a^2c^2 : s^2d^2$, vnde $NM : EF = \sqrt{r^2d^2 - a^2c^2} : sd$. Ex eadem analogia ob $EF = \frac{2arsd^2}{r^2d^2-a^2c^2}$ habebitur alter axis $NM = \frac{2ard}{\sqrt{r^2d^2-a^2c^2}}$. T. VII Fig. 4.

10. Patet ergo, ex datis coni optici conditionibus dari proiectionem seu apparentiam orbitae. Per centrum enim orbitae C in plano proiectionis datum si quaeuis recta indefinita EF ducatur, quam ad OC (fig. 2.) distantiam orbitae ab oculo perpendicularem concipere debemus, et capiatur, $CE = \frac{asd}{rd-ac}$ ad eam plagam ad quam cadit perpendiculum OG (fig. 1.) ex oculo ad planum orbitae demissum, nec non $CF = \frac{asd}{rd+ac}$ ad plagam priori oppositam; habebitur axis EF, qui in L bisectus centrum ellipseos vel proiectionis manifestat, a centro orbitae C diuersum. Si denique in L excitetur NLM perpendicularis ad EF, et fiat $NL = LM = \frac{ard}{\sqrt{r^2d^2-a^2c^2}}$, dabitur alter axis NM et ellipsis construi poterit. Fig. 2.

11. Inuestigemus nunc variationes, quas patitur apparentia orbitae, variatis quibusdam coni optici conditio- Fig. 2. et 4.

nibus. Maneant radius orbitae et diſtantia eius ab oculo; euanescat autem angulus ACO, ſeu planum orbitae productum per oculum transeat. Hoc caſu fiet $s = 0$ $c = r$, adeoque EC, CF, EF, euaneſcent coëuntibus punctis E, L, F in puncto C; NM vero $\left(= \frac{2ard}{\sqrt{r^2d^2 - a^2c^2}}\right)$ in punctum C translata euadet $= \frac{2ard}{\sqrt{r^2d^2 - a^2r^2}} = \frac{2ad}{\sqrt{d^2 - a^2}}$; vnde orbita apparebit inſtar rectae $= \frac{2ad}{\sqrt{d^2 - a^2}}$, quae in plano proiectionis per centrum orbitae C tranſit, in C biſecatur, et ad OC diſtantiam orbitae ab oculo normalis eſt. Fiat ACO rectus, ſeu orbita oculo directe opponatur vel planum eius congruat cum plano proiectionis; erit $s = r$, $c = 0$; quo caſu fiet BC $\left(= \frac{asd}{rd - ac}\right) = a$, CF $\left(= \frac{asd}{rd + ac}\right) = a$, ideoque EC $=$ CF, coëuntibus punctis L, C, EF vero $\left(= \frac{2arsd^2}{r^2d^2 - a^2c^2}\right)$ abibit in $2a$, et NM $\left(= \frac{2ard}{\sqrt{r^2d^4 - a^2c^2}}\right)$ in punctum C translata degenerabit etiam in $2a$, Orbita igitur apparebit inſtar circuli, cuius centrum idem eſt cum centro orbitae et radius eius radio orbitae aequalis; ſeu orbita ipſa apparentiam ſuam exhibet.

12. Maneat poſitio orbitae reſpectu oculi ſeu angulus ACO (fig. 2.), varietur autem ratio inter diſtantiam orbitae ab oculo d et radium orbitae a. Sequentes hic occurrere ſolent caſus: vel enim d reſpectu a ita comparata eſt, vt $d = \infty$ cenſeri queat, vel $d > a$; vel $d = a$, vel $d < a$. Caſus, quo $d = \infty$ haberi poteſt exhibet proiectionem orbitae orthographicam et in Aſtronomia potiſſimum ocurrit; ſiquidem apparentiae orbitarum ſatellitum Iouis et Saturni, annuli Saturni, circulorum in planeta-

netarum corporibus ductorum huc pertinent. Casus, quo $d > a$, in Astronomia locum habere potest, si orbitas Veneris et Mercurii circulares statuere, et earum apparentias, oculo in centro terrae locato, inuestigare velimus. Casus, quo $d = a$, respicit proiectionem sphaerae stereographicam, et ad casum, quo $d < a$, in Astronomia referre licet apparentias orbitarum Saturni, Iouis et Martis pro circulis habitarum, oculo in centro terrae constituto. Singulos casus ex ordine expendamus.

13. Si $d = \infty$; in expressionibus $EC = \frac{asd}{rd - ac}$, Fig. 4. $CF = \frac{asd}{rd + ac}$, euanescit ac respectu rd, et fit tum EC, tum $CF = \frac{as}{r}$. Puncta igitur L et C in vnum coëunt et centrum ellipsis idem est cum centro orbitae. Axis NM $\left(= \frac{2ard}{\sqrt{r^2 d^2 - a^2 c^2}}\right)$ fit $= 2a$; et axis EF $\left(= \frac{2arsd^2}{r^2 d^2 - a^2 c^2}\right)$ euadit $= \frac{2as}{r}$. Igitur NM est axis maior et aequalis diametro orbitae; EF vero axis minor qui habetur, quaerendo quartam proportionalem ad sinum totum, sinum positionis orbitae respectu oculi et diametrum orbitae. Sit AB diameter orbitae, C centrum et Fig. 5. ECA angulus positionis orbitae ad planum proiectionis aequalis complemento positionis orbitae respectu oculi ACG ad rectum, demittantur ex A et B in EF perpendicula AE, BF, erit EF axis minor quaesitus, siquidem tum CF, tum EC $(= AG) = \frac{as}{r}$. Praeterea in hoc casu, si planum orbitae productum statuamus transire per oculum, factis $s = 0$, $c = r$ euanescit axis minor EF, et orbita apparebit instar rectae $NM = 2a$ seu diametro Fig. 4. orbitae, in centro huius bisectae; sin vero planum orbitae coincidat cum plano proiectionis, seu $s = r$, $c = 0$, orbita apparebit instar circuli sibi et magnitudine et positione aequalis vt in §. 11.

14. Si $d > a$; valores $EC = \frac{asd}{rd - ac}$, $CF = \frac{asd}{rd + ac}$, $EF = \frac{2arsd^2}{r^2d^2 - a^2c^2}$, $NM = \frac{2ard}{\sqrt{r^2d^2 - a^2c^2}}$ manent, vt in §. §. 8. 9. et omnes positiui sunt, siquidem $c > a$, $r > c$, adeoque $rd > ac$, $r^2d^2 > a^2c^2$. Igitur tantummodo examinare restat, quisnam ex axibus NM, EF, sit maior, quis minor. In §. 9 inuenta est ratio $NM : EF = \sqrt{r^2d^2 - a^2c^2} : sd$; quare dispicere debemus, quaenam ex quantitatibus $\sqrt{r^2d^2 - a^2c^2}$, sd, altera maior sit. Hoc facilius fieri poterit, si, ob $r^2 = s^2 + c^2$, loco c^2 substituamus $r^2 - s^2$, vt fiat $\sqrt{r^2d^2 - a^2c^2} = \sqrt{r^2d^2 - a^2r^2 + a^2s^2}$. Iam ob $d > a$, vel $d^2 > a^2$ fiet $d^2(r^2 - s^2) > a^2(r^2 - s^2)$ seu $r^2d^2 - s^2d^2 > a^2r^2 - a^2s^2$, quare subtrahendo maiorem et minorem quantitatem ab eadem r^2d^2, fiet $r^2d^2 - r^2d^2 + s^2d^2 < r^2d^2 - a^2r^2 + a^2s^2$, hoc est $s^2d^2 < r^2d^2 - a^2r^2 + a^2s^2$ seu $sd < \sqrt{(r^2d^2 - a^2r^2 + a^2s^2)}$; vnde in hoc casu erit NM axis maior, EF minor.

15. Si $d = a$, fient $EC \left(= \frac{asd}{rd - ac}\right) = \frac{as}{r - c}$, $CF \left(= \frac{asd}{rd + ac}\right) = \frac{as}{r + c}$, $EF = \left(\frac{2arsd^2}{r^2d^2 - a^2c^2}\right) = \frac{2ars}{r^2 - c^2}$, et (ob $r^2 - c^2 = s^2$) $= \frac{2ar}{s}$, $NM \left(= \frac{2ard}{\sqrt{r^2d^2 - a^2c^2}}\right) = \frac{2ar}{\sqrt{r^2 - c^2}} = \frac{2ar}{s}$. Hoc ergo casu, ob $NM = EF$, orbita apparebit instar circuli, cuius radius $= \frac{ar}{s}$, centrum vero diuersum erit a centro orbitae C, quemadmodum EC differt a CF.

16. Si $d < a$, valores $EC = \frac{asd}{rd - ac}$, $CF = \frac{asd}{rd + ac}$, $EF = \frac{2arsd^2}{r^2d^2 - a^2c^2}$, $NM = \frac{2ard}{\sqrt{r^2d^2 - a^2c^2}}$ manent, vt in §. §. 8. 9, qui vero mutationes quasdam patientur, prout rd vel $>$ vel $=$ vel $< ac$. Sed independenter ab his conditio-

tionibus, examinando rationem $NM:EF=\sqrt{r^2d^2-a^2c^2}:sd$, eadem methodo, qua in §. 14. vsi sumus, inuenietur $sd>\sqrt{r^2d^2-a^2c^2}$, adeoque $EF>NM$, seu in casu, quo sectio ENFM est Ellipsis, EF erit axis maior, NM minor; et quaerendo ad EF maiorem, NM minorem axem, tertiam proportionalem, habebitur parameter huius ellipsis, quam vocabimus p, $=\frac{2ar}{s}$, cum sit $\frac{2arsd^2}{r^2d^2-a^2c^2}:\frac{2ard}{\sqrt{r^2d^2-a^2c^2}}=\frac{2ard}{\sqrt{r^2d^2-a^2c^2}}:p$, hoc est, $s:1=2ar:p$, quae parametri expressio a dictis conditionibus quoque non pendet. Imo e valoribus $EC=\frac{asd}{rd-ac}$, $EC\frac{asd}{rd+ac}$ facile colligi potest, semper fore $EC>CF$ quaecunque sit habitudo ipsius ac respectu rd; siue enim $rd>$ siue $<ac$, semper erit $rd-ac<rd+ac$, ideoque $\frac{asd}{rd-ac}>\frac{asd}{rd+ac}$ seu $EC>CF$; si vero $rd=ac$, fit $EC=\frac{asd}{0}=\infty$, manente valore ipsius CF finito. In quamcunque igitur figuram abeat sectio ENFM, introductis conditionibus rd vel $>$ vel $=$ vel $<ac$, semper erit $EC>CF$, $EF>NM$, et figurae inde resultantis parameter $p=\frac{2ar}{s}$.

17. Euoluamus iam casus, in quibus rd vel $>ac$, vel $=ac$, vel $<ac$. In fig. 3. in recta CO capiatur $CR=CA$ radio orbitae. Existente oculo in R, casus erit §. 15; si vero oculus inter R et C locetur, prodibit casus §. 16, quo $d<a$. Sumatur iam AC pro sinu toto, ad quem referantur s et c; fiet AG (normalis ad CO) $=s$, $CG=c$, $rd=ad$, et examen an $rd>$, $=$ vel $<ac$ huc redit, vt videamus, $ad>$, $=$ vel $<$ sit quam ac, seu $d>$, $=$ vel $<c$, hoc est ipsa CG. Fig. 4.

 Si

Si oculus ponatur inter R et G, distantia centri orbitae ab oculo seu d maior erit quam CG, vnde in hoc casu erit $ad > ac$, seu loco a restituto r, $rd > ac$. Si oculus locetur in G, fiet $d = c$, et $rd = ac$. Denique si oculus versetur inter G et C, erit $d < c$, et $rd < ac$.

18. Ponamus iam oculum existere inter R et G, quo casu $rd > ac$; et valores ipsarum EC, CF, EF, NM, §. 16 exhibiti positiui manent et finitae magnitudinis; vnde orbita instar Ellipsis apparebit, cuius axis maior est $EF = \frac{2arsd^2}{r^2d^2 - a^2c^2}$, minor $NM \frac{2ard}{\sqrt{r^2d^2 - a^2c^2}}$, $EC = \frac{asd}{rd - ac}$, $CF = \frac{asd}{rd + ac}$, et parameter $p = \frac{2ar}{s}$. (Fig. 3. 4.)

19. Sit oculus in G, quo casu est $rd = ac$, $r^2d^2 = a^2c^2$; fiet $EF = \frac{2arsd^2}{0} = \infty$, $NM = \frac{2ard}{\sqrt{0}} = \infty$, $EC = \frac{asd}{0} = \infty$, $CF = \frac{asd}{rd + rd} = \frac{as}{2r}$, $p = \frac{2ar}{s}$; vnde p. $CF = \frac{2ar}{s} \cdot \frac{as}{2r} = a^2 = CD^2$, quae est proprietas parabolae. Hoc ergo casu orbita apparebit instar parabolae, cuius vertex est F, parameter $= \frac{2ar}{s}$.

20. Ponatur oculus inter G et C, quo casu est $rd < ac$, et $r^2d^2 < a^2c^2$; vnde $rd - ac = -(ac - rd)$, $r^2d^2 - a^2c^2 = -(a^2c^2 - r^2d^2)$, et fiet $EF = \frac{2arsd^2}{-(a^2c^2 - r^2d^2)} = -\frac{2arsd^2}{a^2c^2 - r^2d^2}$, $NM = \frac{2ard}{\sqrt{-(a^2c^2 - r^2d^2)}}$ quantitas imaginaria, $EC = \frac{asd}{-(ac - rd)} = -\frac{asd}{ac - rd}$, $CF = \frac{asd}{ac + rd}$, $p = \frac{2ar}{s}$. Punctum ergo E (fig. 6) respectu punctorum C et F cadit in plagam priori (in fig. 4) oppositam, prout in valoribus ipsarum EF, EC, signum negatiuum indicat; vnde assignando hunc situm in fig. 6, erit $EF = \frac{2arsd^2}{a^2c^2 - r^2d^2}$, $EC = \frac{asd}{ac - rd}$; CF vero et p manent, vt ante

ante. Hinc $p. \frac{EC.CF}{EF} = \frac{\frac{2ar}{s} \cdot \frac{asd}{ac-rd} \cdot \frac{asd}{ac+rd}}{\frac{2arsu^2}{a^2c^2-r^2d^2}} = \frac{2a^3rsd^2}{a^2c^2-r^2d^2} \cdot \frac{a^2c^2-r^2d^2}{2arsa^2} = a^2 = CD^2$, quae eſt proprietas hyperbolae, cuius vertex eſt F, axis transuerſus $EF = \frac{2arsd^2}{a^2c^2-r^2d^2}$ parameter $= \frac{2ar}{s}$; et orbita in praeſenti caſu inſtar huius hyperbolae apparebit, qui caſus occurrit circa orbitas Saturni, Iouis et Martis, e terra ſpectatas, ſi iſtae circulares ſupponantur. NM (fig. 4. et 6) valorem habet imaginarium, qui indicat, quod recta NM in L puncto biſectionis ipſius FE applicata nusquam terminari poſſit per figuram HFD. Si ergo ab hac impoſſibilitate abſtrahamus, et ipſi NM valorem $= \frac{2ard}{\sqrt{a^2c^2-r^2d^2}}$ attribuamus; habebitur recta, quae erit media proportionalis inter axem transuerſum EF et parametrum, quaeque axis hyperbolae minor vocari ſolet.

21. Satisfecimus iam ei tractationis noſtrae parti, qua ex datis orbitae radio, eius ab oculo diſtantia, eiusque reſpectu oculi poſitione apparentiam orbitae definire nobis propoſuimus. Reliquam igitur tractationis partem aggrediamur, in qua conditiones ad determinandam orbitae apparentiam neceſſarias ex conditionibus motuum tum oculi tum orbitae inveſtigare allaborabimus et ad vſum aſtronomicum accommodabimus. Horum motuum conditiones occurrere ſolent ſequentes, vt vel oculus circa orbitam immotum vel orbita circa oculum quieſcentem, vel oculus et orbita ſimul certa lege circa centrum aliquod commune ferantur, et quidem vel in plano eodem vel in planis a ſe inuicem diuerſis. Diſtinctam horum motuum ideam formare fas eſt.

22. Sit orbita RTQt, per cuius centrum S transeat planum Nin, in quo oculus circa orbitam immotam describat quamuis curuam nIN. Planum, in quo oculus mouetur, in sequentibus vocabimus *planum oculi*, curuam vero nIN *semitam oculi*. Duplex iam casus occurrit ratione positionis plani orbitae respectu plani oculi: vel enim prius cum posteriori coincidit, vel planum orbitae ad planum oculi quomodocunque inclinatur. In casu priori oculus, vbicunque versetur in curua nIN, semper existet in plano orbitae producto, et orbita semper instar rectae apparebit. In posteriori casu planum orbitae RTQt inclinatum ad planum oculi nIN aliculi secabit hoc veluti in recta RQ. Exinde variae notiones emergunt, quae explicari debent, antequam phaenomena apparentiae orbitae inuestigemus. Recta RQ seu eius productio Nn, dicitur *linea nodorum* (planorum scilicet orbitae et oculi), et puncta coeli fixarum, ad quae linea nodorum dirigitur, *nodi* vocantur, quorum notitia positionem lineae nodorum manifestat. Puncta haec iterum a se inuicem distingui solent ratione plagae eleuationis vnius plani super altero, quae plaga sumitur iuxta directionem motuum coelestium ab occidente in orientem veluti in figura iuxta nIN vel QTR. Si iam planum orbitae RtQT ad planum oculi nIN referatur, et positio orbitae ita comparata sit, vt ista a puncto Q iuxta QTR ab occidente orientem versus eleuetur super plano oculi, ab R vero iuxta RtQ infra istud descendat: punctum coeli, ad quod recta SQn dirigitur, vocatur *nodus* orbitae *ascendens*; id vero, quod respicit recta SRN, *nodus descendens*. Contrarium fit, si planum oculi

culi referatur ad planum orbitae, vbi prioris nodus ascendens conspicietur iuxta SRN, descendens iuxta SQ*n*. Breuitatis causa, sumto *s* pro centro sphaerae fixarum, subinde puncta Q, R; vel *n*, N, *nodos* appellabimus, quippe quorum positio directiones rectarum SQ*n*, SRN determinat. Lineae nodorum positio nodorumque distinctio cognita supponitur, si apparentiam orbitae inuestigare velimus. Praeterea vero requiritur, vt nota quoque sit *inclinatio* planorum orbitae et oculi ad se inuicem; seu angulus TSI, quem recta TS, in plano orbitae ad lineam nodorum RQ in centro S normalis, constituit cum alia recta IS, ex eodem centro S ad eandem RQ in plano oculi normaliter excitata. His positis sit oculus in A et concipiamus rectam SA, quae semper iungat oculum et centrum orbitae. Moto oculo ex A iuxta AIN oculus rectam AS circa centrum orbitae immotae S circumducet, quae proinde varias nanciscetur positiones respectu lineae nodorum N*n*, per angulos *n*SA, vel NSA dignoscendas, qui anguli *elongationes oculi a nodis orbitae* vocentur. Ad rectam SA in centro orbitae S semper normale est planum proiectionis (§. 4.) quod ideo semper normale perseuerabit ad planum oculi, quamcunque positionem acquirat recta SA. Circumducta ab oculo recta AS circa S communicabit plano proiectionis motuum vertiginis circa axem in S ad planum oculi normalem. Quando oculus peruenit ad puncta N vel *n*, in quibus linea nodorum N*n* semitam oculi secat, recta AS cum NS vel *n*S coincidit et planum proiectionis normale fit ad lineam nodorum, adeoque normale ad plana tum oculi tum orbitae, tranquam apparentiae orbitae phaenomena assignemus. Sit orbitae centrum in loco quouis semitae suae A, et planum orbitae $\gamma\lambda\mu$ secet planum primarium n I N in recta $\gamma\mu$, quam *lineam nodorum secundariam* vocabimus ob rationem mox afferendam. Rectae Aγ, Aμ, directione sua in coelo fixarum designabunt *nodos*, quorum iste, quem ferit Aγ, *ascendens*, quem vero Aμ respicit, *descendens nodus* erit, si nimirum a γ iuxta $\gamma\lambda\mu$ orbita super plano primario eleuetur, et motus coelestes iuxta $\gamma\lambda\mu$ peragantur. Ex centro orbitae A in plano primario ducta sit Aσ perpendicularis ad $\gamma\mu$, et ex eodem centro A in plano orbitae normalis erecta sit Aλ ad $\gamma\mu$; angulus λAσ, quem formant rectae λA, Aσ, metietur *inclinationem* plani orbitae ad planum primarium. Haec inclinatio pariter ac positio lineae nodorum cognitae supponuntur in quaestione de apparentia orbitae. Per oculum in S constitutum ducta sit in plano primario recta NSn parallela ad $\gamma\mu$; et ob infinitam sphaerae fixarum respectu systematis nostri planetarii magnitudinem, rectae SN, Sn, ad eadem coeli fixarum puncta tendent, ad quae diriguntur rectae Aγ, Aμ; vnde oculus S nodum orbitae ascendentem conspiciet iuxta SN, descendentem iuxta Sn. Recta NSn vocetur *linea nodorum primaria*, quippe quae immota persistit, et ad quam linea nodorum secundaria $\gamma\mu$ semper parallela est, in quocunque semitae suae loco centrum orbitae A versetur. Orbitae scilicet in hac theoria situm suum respectu fixarum conseruare ponuntur (§. 3.), quocunque motu progressiuo gaudeant; haec vero situs conseruatio requirit lineas nodorum secundarias inter se et

ad

ad primariam parallelas, nec non inclinationem orbitae ſemper eandem ad planum primarium reſpectu fixarum immotum. Sic orbita ex A in I translata ſitum reſpectu fixarum conſeruat, ſi linea nodorum ſecundaria *g m* in loco orbitae I parallela eſt tum ad $\gamma\mu$, tum ad N*n*, et ſi angulus *l* I S, quem inclinationem orbitae ad planum primarium metiri ponamus, idem eſt cum angulo $\lambda A \sigma$, ita vt ſitum reſpectu fixarum conſeruare, ſeu motu ſibi ſemper parallelo progredi, in eiusmodi translatione orbitae vnum idemque ſit. His poſitis ſit centrum orbitae in loco quouis ſemitae ſuae A, quod iungat recta AS cum oculo S, quae proinde in plano primario exiſtet. Planum proiectionis, quod per centrum orbitae tranſit et ad rectam SA normale eſt, ſemper normale erit ad planum primarium, idque ſecabit in recta BAC ad AS in A perpendiculari, ita, vt BAγ complementum ſit ipſius γAS vel AS*n* ad rectum. Moueatur centrum orbitae ex A iuxta AIN, et $\gamma\mu$ ſitum ſemper parallelum retinebit ad N*n*, angulus vero AS*n* ſeu ipſi aequalis γAS, quem *elongationem orbitae a nodo* dicamus, mutabitur, et cum ipſo angulus BAγ, decreſcente hoc, ſi iſte creſcit et viciſſim. Hoc modo recta BC circa A in gyrum agitur, et planum proiectionis inde acquirit motum vertiginis circa axem in A ad planum primarium normalem. Perueniat centrum orbitae in I vel *i*, vt angulus elongationis orbitae a nodo IS*n* vel *i*SN ſit rectus, quo caſu orbita in *limitibus* verſari dicitur. Recta BC nunc coincidet cum recta *mg* ad N*n* parallela; vnde hoc caſu planum proiectionis ſecabit planum primarium in linea nodorum ſecundaria mg; angulus vero lIS qui inclinationem orbitae ad planum primarium metitur, indicabit positionem orbitae respectu oculi; ex qua et ex Is distantia orbitae ab oculo, nec non Ig radio orbitae, apparentia huius determinari poterit. Versetur centrum orbitae in punctis N vel n, in quibus linea nodorum primaria semitam orbitae secat, et linea nodorum secundaria MG cum primaria Nn coincidet; planum proiectionis normale erit ad Nn et planum primarium secabit in recta bc ad Nn perpendiculari; orbita vero, cum planum eius productum per oculum transeat, instar rectae apparebit, cuius magnitudinem ex SN et MM datis per §. 11. definire licebit, et quae ad bc inclinata erit angulo LNc aequali inclinationi orbitae ad planum primarium. Sit tandem orbita in A loco quouis extra nodos et limites, et BC, vt supra, indicabit positionem plani proiectionis respectu lineae nodorum, ex qua et inclinatione orbitae ad planum primarium definiri debet positio mutua oculi et orbitae; vt ex ista demum et ex AS, $A\gamma$ datis apparentia orbitae innotescat, prout suo loco exponemus.

25. Illustrationis gratia ponamus oculum in centro solis, centrum vero orbitae in centro terrae; et semita orbitae eadem erit cum orbita terrae, planum autem primarium idem cum plano eclipticae. Si iam eclipticam terrae seu circulum, in quo planum eclipticae terram secat, pro orbita assumamus, habebitur casus prior §phi. 24, quo planum orbitae cum plano primario coincidit; posterior vero casus dabitur, si aequatorem terrae, Meridianum vel quemuis alium circulum terrae maximum, qui ecliptica non est, pro orbita accipiamus.

Idem

Idem caſus poſterior prodit, ſi de apparentia orbitarum ſatellitum Iouis, orbitarum ſatellitum Saturni, annuli Saturni, e ſole quaeſtio fit; vbi in primo caſu ſemita orbitae eadem eſt cum orbita Iouis, et planum primarium idem cum plano orbitae Iouis; in ſecundo autem et tertio caſu ſemita orbitae eadem eſt cum orbita Saturni, et planum primarium idem cum plano orbitae Saturni. Ponamus oculum in centro terrae, quam immotam ſtatuamus, centrum autem lunae pro centro orbitae ſumatur; erit nunc ſemita orbitae eadem cum orbita lunae, et planum primarium idem cum plano orbitae lunae. Si igitur circulum, in quo planum orbitae lunaris corpus lunae ſecat, pro orbita habeamus, dabitur caſus prior §phi. 23; poſterior vero, ſi aequator lunae vel quiuis alius circulus eius maximus a praecedenti diuerſus pro orbita accipiatur.

26. Moueantur oculus et orbita circa centrum aliquod commune, quod ſit S; oculus deſcribat ſemitam QTR in plano oculi per S tranſeunte; orbitae vero centrum C moueatur in curua nIN in plano primario, quod etiam per S tranſeat. Sequentes iam caſus ſeſe offerunt. 1.) Planum oculi cum plano primario idem eſt, et planum orbitae etiam incidit in planum primarium. 2.) Plana oculi et primarium ad ſe inuicem inclinantur, planum autem orbitae coincidit cum plano primario. 3.) Planum orbitae ad planum primarium inclinatur, planum vero oculi idem eſt cum plano primario. 4.) Inclinantur tum planum orbitae ad planum primirium, tum planum primarium ad planum oculi. Singulos caſus perpendere expedit.

Tab. VII. fig. 9.

Fig. 8.

Fig. 7.

Tab. VIII. fig. 10.

Fig. 11.

§. 27.

Tab. VII. fig. 8. 27. Iaceat planum oculi QTR in plano primario nIN et planum orbitae BDA etiam ſitum ſit in plano primario. Oculus in quocunque ſemitae ſuae loco T verſetur, ſemper erit in plano orbitae producto nimirum in plano primario, vnde orbita ſemper inſtar rectae apparebit, et planum proiectionis ſemper normale erit ad plannm primarium, hocque ſecabit in recta AB ad TC diſtantiam orbitae ab oculo perpendiculari; vt ideo facile ſit, ex datis TC, AC, in hoc caſu aſſignare apparentiam orbitae per §. 11.

Fig. 7. 28. Sit planum oculi QTR inclinatum ad planum primarium nIN angulo quouis TSI, quae plana, cum per centrum communae S tranſeant, ſeſe mutuo ſecabunt in recta aliqua RQ per S tranſeunte, ita vt NRSQn productio ipſius RQ exhibeat lineam nodorum plani oculi et plani primarii. Sit centrum orbitae bda in quouis ſemitae ſuae nIN loco c, et planum orbitae congruat cum plano primario. Moueatur nunc oculus in ſemita ſua QTR; et quoties oculus appellit ad puncta Q, R, lineae nodorum, toties exiſtet in plano primario et plano orbitae producto; vnde hoc caſu orbita, vbicunque poſita ſit, inſtar rectae apparebit, et planum proiectionis normale erit ad planum primarium, ſecans hoc in recta perpendiculari ad rectam centrum orbitae et punctum R vel Q iungentem. Sit centrum orbitae in N vel n, et orbita quidem ſemper inclinabitur ad oculum, vbicunque ponatur oculus in ſua ſemita, exceptis locis Q, R; planum autem proiectionis ſemper, normale erit in N vel n ad planum oculi productum, ſecans hoc in recta, quae perpendicularis eſt ad rectam

ex

ex N vel *n* ad oculum ductam. Sit orbita in quouis loco *c* semitae suae, extra puncta N, *n*, et oculus in quouis loco T semitae suae, extra puncta R, Q. Iungat *c*T centrum orbitae et oculum, ad quam in plano primario perpendicularis sit *ab* per *c* transiens; planum proiectionis quidem secabit planum orbitae vel primarium in recta *ab*, at, cum istud normale sit ad *c*T, variis modis inclinabitur ad hoc pro diuerso oculi et centri orbitae situ, quae inclinatio pariter ac positio orbitae respectu oculi diiudicari debent ex inclinatione rectae T*c* ad planum primarium, vnde demum, habita simul ratione ipsarum T*c*, *ac*, apparentia orbitae colligi poterit, vt suo loco ostendetur. Tab. VIII. fig. 10.

29. Congruat planum oculi cum plano primario, ita, vt in eodem plano oculus describat semitam QTR, centrum orbitae vero semitam *n*IN circa centrum commune S. Planum orbitae GLM inclinatum sit ad planum primarium angulo quouis, et lineam MG, *mg*, $\mu\gamma$ inter se parallelae in diuersis orbitae sitibus referant lineneas nodorum secundarias, ad quas parallela sit linea nodorum primaria N*n* per S transiens, vt in §. 24. Sit I*i* ad N*n* in S perpendicularis, vt si oculum in S fingamus (vt §. 24), orbita, quando ad I vel *i* peruenit, in limitibus versetur. His positis sit centrum orbitae GLM in quouis semitae suae loco K et oculus in quouis semitae suae loco T; iungatur TK, quae erit in plano primario. Igitur planum proiectionis per K transiens, cum semper normale sit ad TK distantiam orbitae ab oculo, semper normale erit ad planum primarium, idque secabit in recta *bc* ad TK perpendiculari, vt *b*KM sit complementum ad rectum anguli MKT, *qui elongationem or-*

bitae ab oculo indicat. Moueantur centrum orbitae in semita Nin, et oculus in TRQ, quomodocunque; elongatio orbitae ab oculo MKT continuo mutabitur, et cum ipsa angulus bKM, qui positionem plani proiectionis respectu lineae nodorum MG determinat, vnde hoc modo planum proiectionis respectu ipsius MG quasi acquirit motum vertiginis circa axem in K ad planum primarium normalem. Subinde iam pro diuerso oculi et orbitae in suis semitis motu fieri potest, vt elongatio orbitae ab oculo MKT euanescat, quo casu TK in GM productam ideoque in planum orbitae incidit et parallela fit ad lineam nodorum primariam Nn; vnde planum orbitae productum per oculum transiens apparentiam orbitae instar rectae efficiet. Haec ergo pendet a conditione, vt angulus elongationis orbitae ab oculo MKT euanescat, vel, quod perinde est, vt recta TK, oculum et centrum orbitae iungens, parallela euadat ad lineam nodorum, primariam Nn. Sit centrum orbitae in A; ducatur Aqr parallela ad nO, secans semitam oculi in q et r; ponatur oculus in q vel r; et dabitur casus apparentiae orbitae instar rectae. Planum proiectionis tunc normale erit ad lineam nodorum secundariam $\mu\gamma$, cum Aqr congruentem, et secabit planum primarium in recta, ad quam inclinabitur recta, cuius instar orbita apparet, angulo aequali inclinationi orbitae ad planum primarium. Hoc modo ex conditione ante notata apparentia orbitae instar rectae semper colligi et definiri potest. Praeterea vero terminos exinde assignare licet, intra quos orbita in sua semita poni debet, vt apparentia eius instar rectae possibilis euadat. Quoties nimirum recta Aqr ex centro

tro orbitae ad lineam nodorum primariam nN parallela, ſemitam oculi ſecat, veluti in q vel r; toties poſſibilis eſt orbitae apparentia inſtar rectae: fieri enim poteſt, vt oculus ad q vel r perueniat eodem momento, quo centrum orbitae in A verſatur, et tunc actu locum habebit apparentia dicta. Quoties vero recta Aqr ad nN parallela extra ſemitam oculi QTR cadit, toties impoſſibilis erit orbitae apparentia inſtar rectae. Ducantur BD, EF, ad nN parallelae, ſemitam oculi in T et t tangentes; hae deſignabunt B, D, E, F, loca ſemitae Nin, in quibus orbita prima vel vltima vice inſtar rectae apparere poteſt, ſeu B, E, F, D, conſtituunt terminos, intra quos orbita poni debet, vt locus detur eiusmodi apparentiae, quos proinde *terminos apparentiae rectilineae* vocabimus. Dum orbita motu iuxta inI ad B peruenit, poſſibilitas eius apparantiae incipit, finitur vero translata orbita ex B in E; denuo incipit, quando orbita ad F appellit, et definit, orbita locum D relinquente. Miſſis his introducamus conditionem ex poſitione oculi et orbitae in ſuis ſemitis, angulum ſcilicet elongationis orbitae ab oculo MKT fieri rectum; quem caſum figura noſtra oſtendat, centro orbitae in H, oculo in b, poſitis, ita vt nHb ſit rectus. Igitur in hoc caſu planum proiectionis ſecabit planum primarium in linea nodorum ſecundaria mg, angulus vero iHb quem format recta Hb cum iH ex H ad mg in plano orbitae normaliter excitata et qui inclinationem orbitae ad planum primarium metitur, determinabit poſitionem orbitae reſpectu oculi, ex qua et ex Hb, Hm, datis apparentia orbitae per praecedentia definiri poterit. Criterium huius caſus, quo poſitio orbitae reſpectu oculi eadem

dem est cum inclinatione orbitae ad planum primarium, habetur ex angulo mHb elongationis orbitae ab oculo, si iste rectus sit, vel si bH ad mg sit perpendicularis. Hinc, cum Hb producta etiam perpendicularis sit ad Nn (ob mg, Nn, parallelas), ideoque Hb ad IS, quam supra ad Nn in S normalem fecimus, parallela; ex parallelismo rectarum Hb et IS idem criterium habebitur, et ducendo ad ISi parallelas semitam oculi QTR vtrinque tangentes, termini, vt ante, assignari poterunt, intra quos centrum orbitae in sua semita locari debet, vt possibilis euadat casus aequalitatis positionis orbitae respectu oculi et inclinationis orbitae ad planum primarium. Tandem, si eiusmodi sit orbitae in K et oculi in T positio, vt TK neque ad Nn neque ad Ii parallela sit, vel si angulus elongationis orbitae ab oculo MKT sit acutus vel obtusus; ex isto et inclinatione orbitae ad planum primarium, nec non TK, inuestigari debat positio orbitae respectu oculi, vt demum apparentia orbitae inde deriuari possit, prout suo loco explicabitur.

T. VIII. fig. 11. 30. Moueantur oculus et centrum orbitae in planis a se inuicem diuersis sed per commune centrum S transeuntibus. Semita oculi sit QTR, orbitae nIN. Planum oculi QTRt secet planum primarium nIN in recta QR cuius productio sit nN *linea nodorum plani primarii et plani oculi.* Facta relatione plani primarii ad planum oculi sit *nodus ascendens* in n, *descendens* in N, ita, vt planum primarium ab n iuxta nIN eleuetur super plano oculi; ab N iuxta Nin infra hoc descendat. Orbitae KLM centrum sit in P, cuius planum secet planum primarium in recta MK, quae erit *linea nodorum secunda-*

ria

ria orbitae et plani primarii; orbitae vero respectu plani primarii *nodus ascendens* sit in K, descendens in M, ita, vt a K iuxta KLM planum orbitae super planum primarium ascendat. Ponamus locum centri orbitae in P ita comparatum esse, vt KM producta transeat per S, et efficiat P S p *lineam nodorum primariam* orbitae scilicet et plani primarii. In P sint LP in plano orbitae et λP in plano primario perpendiculares ad MK, vt LPλ mensuret *inclinationem plani orbitae ad planum primarium.* Porro in S sint tS in plano oculi et σS in plano primario ad QR normales, vt tSσ sit *inclinatio plani primarii ad planum oculi.* His positis dentur nodi in coelo fixarum, tum plani oculi et plani primarii, tum orbitae et plani primarii, seu dentur lineae Nn, Pp, positione. Dentur praeterea anguli tSσ, LPλ seu inclinationes plani primarii ad planum oculi et plani orbitae ad planum primarium. Ex his datis inuenire oportet conditionem apparentiae orbitae in quouis semitae suae loco. Hoc fieri nequit, nisi ex iisdem datis ante sciatur 1) quae sit positio plani orbitae respectu plani oculi, 2) qui sit progressus plani orbitae respectu plani oculi, dum orbita in sua semita motu sibi semper parallelo transfertur.

31. Vt primo requisito satisfiat, conferatur fig. 12 cum fig. 11. et ex S radio arbitrariae magnitudinis, quem $=$SN (fig. 11) assumamus, intelligatur circulus nI NPi in plano primario descriptus. Ex eodem centro S radio SE$=$SN in plano oculi QTR (fig. 11) producto descriptus sit circulus NEBnG. Denique in plano orbitae KLM (fig. 11) per S producto ex centro S radio SP$=$SN descriptus concipiatur circulus ApHPE. Tab. IX. fig. 12.

 His

His factis circuli isti, cum idem centrum et radios inter se aequales habeant, pro circulis maximis sphaerae alicuius haberi possunt, cuius centrum est S, radius SN, qui in superficie huius sphaerae sectionibus mutuis formabunt triangulum sphaericum NPE vel *npe* huius conditionis 1) vt in N vel *n* sit nodus plani primarii et plani oculi; 2) vt iuxta SP vel S*p* conspiciatur nodus plani orbitae cum plano primario, ideoque angulus NSP vel *n*S*p*, seu arcus NP vel *np* mensuret elongationem nodi posterioris a priori; 3) vt angulus sphaericus ENP vel *enp* metiatur inclinationem plani primarii ad planum oculi 4) vt angulus sphaericus EP*i* vel *ep*I sit mensura inclinationis circulorum A*p*H *p*, N*in*I seu plani orbitae ad planum primarium, cuius complementum ad duos rectos est angulus sphaericus NPE vel *npe*; 5 vt ES*e* sit sectio communis planorum orbitae et oculi productorum, quam *lineam nodorum primariam* horum planorum vocare licet, cum ista per centrum commune S transeat, 6) vt angulus sphaericus NEP(=AEB) seu *nep* sit mensura inclinationis plani orbitae ad planum oculi. Iam ex conditionibus §. 30 datur positio mutua rectarum N*n*, P*p*, hoc est, datur elongatio nodi P orbitae cum plano primario a nodo N plani primarii cum plano oculi seu angulus NSP vel arcus NP. Dantur praeterea anguli sphaerici ENP, NPE, quorum iste aequalis est inclinationi plani primarii ad planum oculi, hic vero complementum est ad duos rectos inclinationis orbitae ad planum primarium. Dabuntur ergo reliqua trianguli sphaerici NPE, nimirum 1) arcus NE vel angulus NSE, qui in plano oculi definit positionem rectae ES*e* vel li-

neae

neae nodorum primariae planorum orbitae et oculi respectu N*n* lineae nodorum plani primarii et plani oculi. 2) angulus sphaericus NEP vel AEB seu inclinatio plani orbitae ad planum oculi; 3) arcus EP vel angulus ESP, qui in plano orbitae metitur distantiam nodi E orbitae cum plano oculi a nodo P orbitae cum plano primario; vt adeo ex duobus prioribus positio plani orbitae respectu plani oculi constet. Hoc notandum est, quod pyramis SNPE, quae a triangulo sphaerico NPE tanquam basi et centro communi S tanquam vertice formatur, terminetur planis NSP, NSE, PSE; quorum NSP est planum primarium, NSE planum oculi, PSE planum orbitae.

32. Alterum requisitum concernit progressum plani orbitae respectu plani oculi dum orbita in sua semita motu sibi semper parallelo transfertur, ad quem distincte cognoscendum sequentia evoluamus. Sint duo plana NB, N*i*, angulo quouis ad *e* invicem inclinata, quorum sectio communis sit recta N*n* ad S producta. Plana haec secentur a tertio plano PA, ita, vt planum PA productum transeat alicubi per rectam NS. Sectio communis planorum PA, N*i*, sit recta PD; planorum PA, NB, recta EC. Intelligatur PD producta, quae alicubi in plano N*i* producto occurret rectae NS, veluti in S. Dico rectam EC productam ad idem punctum S tendere. Ex punctis N, *n*, rectae N*n* arbitrariis, in plano N*i* ducantur rectae quaeuis NP; *n*D inter se parallelae, et in D et P a plano PA terminatae. Ex iisdem punctis N, *n*, in plano NB concipiantur rectae quaeuis NE, *n*C, etiam inter se parallelae et in Tab. IX. fig. 13.

E

E et C a plano PA terminatae. Iungantur in plano PA puncta D, C; P, E, rectis DC, PE. Erunt plana nDC, NPE inter se parallela (Elem. XI. 15.), quae cum insistant plano tertio PA in rectis DC, PE; erunt etiam DC, PE inter se parallelae (Elem. XI. 16) ideoque triangulum NPE simile triangululo nDC, et DC:PE = nD:NP. Sunt autem triangula SnD, SNP, ob nD, NP parallelas, etiam similia, et nD : NP = SD: SP. Quare DC:PE = SD:SP; quae cum sit proprietas trianguli SPE, cuius latera SP, SE, secantur a parallelis DC, PE; patet, EC productam per verticem huius trianguli S transire debere.

33. Super plano N*i* transferatur planum PA motu sibi parallelo, et perueniat verbi caussa in situm *pa*, ob hanc situs paralleli conseruationem 1) planorum PA, *pa*, ad planum N*i* eadem erit inclinatio; 2) recta *pd*, quae est sectio planorum *pa*, N*i*, parallela erit ad PD (Elem. XI. 16) et producta secabit NS in S, vt sit N*sp* = NSP; 3) recta *ec*, quae est sectio planorum *pa*, NB, parallela erit ad EC (Elem. XI. 16), et producta tendet ad punctum *s* (§. 32), eritque N*se* = NSE. Datis ergo positione rectis NS, PS, ES, si detur quoduis punctum *p* plani N*i*, ad quod planum PA motu sibi parallelo translatum peruenit, veluti in *pa*, huius plani *pa* situs respectu vtriusque plani N*i*, NB, poterit determinari. Si enim per *p* ad PS in plano N*i* agatur parallela *pds* secans N*n* productam in *s*, habebitur sectio communis *pd* planorum *pa*, N*i*; et si ex puncto *s* iam definito in plano NB ducatur *sce* ad SE parallela

stela, dabitur ce, sectio communis planorum pa, NB, dabitur ergo positio plani pa, quod idem erit cum plano $pecd$, per rectas pd, ec, transeunte; et si quoduis punctum M rectae ec iungatur cum puncto quouis Q rectae pd, per rectam MQ, haec in plano pa existet.

34. Fiat iam applicatio dictorum ad ea, quae §. 30 ponuntur, vt inde apparentia orbitae innotescat, in quo negotio figuram 13. adhibebimus, cuius explicatio ex comparatione eius cum fig. 11. 12. facile intelligitur. Sit nimirum n I N i orbitae semita figurae cuiuscuis, quam tunc demum circularem mente concipere volumus, quando triangulum sphaericum NPE considerari debet. QTR sit semita oculi, m G N B eius productio vt in §. 31. Dabitur ergo per §. 31. triangulum sphaericum NPE, et rectae SN, SP, SE, dabuntur positione. Orbitae centrum, quod hactenus in P locauimus, translatum intelligatur in locum quemuis semitae suae p. Per p in plano primario n I N i ducatur ps parallela ad PS secans Nn in s, et ex s in plano oculi n G N B agatur se parallela ad SE; eritque planum pse parallelum ad planum PSE, et referet planum orbitae in p existentis (§. 33.) Quoties iam recta es loco orbitae p respondens semitam oculi RTQ secat veluti in T vel t, toties possibilis est apparentia orbitae instar rectae, quae actu dabitur, si oculus tunc versetur in intersectionis puncto T vel t, quando orbita appellit ad p: recta enim Tp oculum et centrum orbitae iungens existet in plano pse seu in plano orbitae producto. Si autem es extra semitam oculi cadit, impossibilis est apparentia orbitae instar rectae. Semitam oculi tangat Eu ad ES paralle-

la; per σ in plano primario n I N i ducatur $z\sigma\pi$ ad SP parallela secans semitam orbitae in π et z; erunt π et z *termini apparentiae rectilineae*; et eadem methodo ex altera semitae oculi parte eiusmodi termini assignari poterunt. Facile haec patent, si comparentur cum iis, quae in §. 29. tradita sunt. Ponatur centrum orbitae in N, vel n, nodo plani primarii et plani oculi, versetur autem oculus in quouis semitae suae loco M; recta MN, quae centrum orbitae et oculum iungit, erit in plano oculi, et planum proiectionis in N ad planum oculi normale. Si oculus tunc appellat ad Q vel R, planum proiectionis normale erit ad Nn ideoque normale tum ad planum oculi tum ad planum primarium. Ponatur centrum orbitae in quouis, praeter N, n, semitae suae loco; quoties oculus ad rectam Nn, seu ad Q vel R peruenit, toties recta oculum et centrum orbitae iungens erit in plano primario, ad quod proinde planum proiectionis normale erit. His casibus exceptis planum proiectionis diuersimode inclinabitur tum ad planum primarium, tum ad planum oculi, si quidem recta ab oculo ad centrum orbitae ducta, ad quam planum proiectionis semper normale est, varias inclinationes respectu vtriusque plani subit quae inclinationes ex situ oculi et orbitae in suis semitis diiudicari debent, vt demum innotescat positio orbitae respectu oculi, ad apparentiam orbitae determinandam necessaria; id quod suo loco ostendetur.

35. Casus motus oculi et orbitae in diuersis planis circa centrum commune, quem hactenus enucleauimus, in Astronomia occurrere solet circa satellites Iouis et Saturni,

turni, et annulum Saturni, oculo in terra posito. Si de apparentia orbitae satellitis Iouis quaestio sit, semita orbitae eadem erit cum orbita Iouis, et planum primarium idem cum plano orbitae Iouis. Orbita terrae nunc euadit semita oculi, et planum oculi abit in planum eclipticae. N*n* erit linea nodorum orbitae Iouis et eclipticae; et recta S P dirigetur ad nodos orbitae satellitis cum orbita Iouis; ex quibus positione datis phaenomena apparentiae orbitae satellitis, vt in §. 34, colligi poterunt. Pari modo applicatio ad orbitas satellitum Saturni eiusque annulum fieri potest. Intelligentur inde conditiones, quae apparentiam rectilineam orbitarum satellitum Iouis et Saturni vel euanescentiam annuli Saturni possibilem reddunt; cuius rei vberiorem explicationem in secunda de apparentiis orbitarum dissertatione trademus.

DE PERFICIENDIS MAPPIS GEOGRAPHICIS, INPRIMIS VNIVERSALIBVS, PER IDONEAS SCALAS METIENDIS DISTANTIIS INSERVIENTES.

Auctore

G. W. Richmann.

§. 1.

Methodus secundum perspectiuae leges mappas geographicas delineandi adhuc prudenter in vsu est in vniversalibus inprimis mappis desormandis; multa nihilominus in mappis his desiderantur et illae tantis incommodis laborant, vt nulla ars iis remouendis idonea videatur. At cum fini conuenientiores hactenus inuentae non sint contenti vt his simus, necesse est.

§. 2. Quia mappae geographicae singulorum locorum verum situm et distantias ab omnibus aliis in ipsis expressis definire debent, prima virtus mappae Geographicae est, vt magnitudines singularum regionum eam rationem habeant in mappa, quam habent in superficie telluris, secunda est, vt eam figuram etiam in mappa exhibeant, quam in superficie telluris ipsa obtinent, tertia, vt distantiae locorum sint in ea ratione in mappa expressae, in qua sunt distantiae locorum in superficie telluris, quarta, vt ex mappa cerni possit, quot gradus ab aequatore locus distet, quot a primo meridiano?

§. 3.

§. 3. Methodus secundum perspectiuae leges deformandi mappas primo requisito plane non satisfacit: Secundum requisitum vt exhibeat, sedulo quidem occupata est, at cum tantum sola specie fallere studeat, figuram ipsam regionum neutiquam sistit: Tertium requisitum deformatione secundum perspectiuae artem aliquatenus et ex parte obtinetur quidem, distantiae enim locorum, quae vnum habent meridianum, cognito numero graduum arcus meridiani, loca iungentis, innotescunt; at gradus tamen ipsi sunt inaequales, ergo distantiae non habent eam rationem in mappa, quam in superficie telluris sphaerica obtinent. Locorum vero, quae habent differentiam longitudinum, siue habeant eandem latitudinem, siue sint in diuersis parallelis, difficulter distantia accurate definiri potest et sine vsu calculi et tabularum in subsidium vocato nihil efficitur. Quartum requisitum solum dictis mappis perfecte obtinetur.

§. 4. Vt mappae geographicae sola specie nobis imponant non quidem est vt studio laboremus, sed potius vt rem ipsam, vti est, si in plano fieri potest, exprimant. Primum ergo quod requiritur, vt scilicet regiones in mappa eam habeant inter se rationem, quam habent in superficie telluris, ludenti deformationis artificio merito est praeferendum, nisi aliud adsit, quod contrarium suadeat. Secundum quod requiritur, vt regiones in plano eam exhibeant figuram, quam in superficie telluris habent i. e. vt in eo eiusdem magnitudinis et similitudinis lineis eosdem angulos intercipientibus sint terminatae, cum repugnantiam habeat, de eo obtinendo non est cogitandum. Tertio incommodo, quod mappis geographicis perſpectiua affert, vt remedium, ſi quoddam adeſt adhibeatur neceſſe eſt. Si vero nulla ars ei prorſus tollendo par eſt, è re eſt vt tantum praeſtet, quantum praeſtare valet. Niſi obtineri poſſit, vt diſtantiae ipſae et chordae diſtantiarum exhibeantur, laborandum tamen, vt mappae ſint ſic compoſitae et aptatae, vt ex iis facili negotio diſtantiae inueniantur, cauendumque ſedulo, ne calculo taedioſo artificii laus vileſcat euaneſcatque.

§. 5. Cum dictis incommodis mappae geographicae, quae hactenus in vſu ſunt, laborent nullaque deformationis methodus inuenta ſit, neque inueniri poſſe videatur, qua ſimul omne, quod ad perfectionem mapparum requiritur, perfici poſſit, eae mappae reliquis ſine dubio ſunt praeferendae, quae vtiliſſimis problematibus ſoluendis idoneae ſunt; quae ſi nulla aliae ſunt, quam eae ipſae, quae ſecundum perſpectiuae leges deformantur, idonei modi ſuppeditandi ſunt, quibus apti reddamur, vt imperfectis his mappis commode vti poſſimus.

§. 6. Ego aliquam in hac re operam nauaturus ſcalas conſuetis mappis addam, quarum auxilio diſtantiae verae locorum inueniri poterunt, ſiue loca ſint in eodem parallelo, ſiue in diuerſis, ſiue eiusdem longitudinis ſiue diuerſae.

§. 7. Cum diſtantiae locorum ſint partes peripheriae circuli telluris maximi inter loca, quorum diſtantia eſt definienda, omnis labor in hoc conſiſtet, vt eae inueniantur.

§. 8,

§. 8. Omnes chordae arcuum peripheriae ſphaerae maximae ſunt dupla ſinuum arcuum dimidiorum; dato ergo quolibet arcu peripheriae ſpharae maximae, chorda eius ex tabulis ſinuum inuenitur et data chorda peripheriae ſpharae maximae arcus eius magnitudo ex iisdem tabulis innoteſcit.

§. 9. Sit nunc (1) duorum locorum A et B in eodem parallelo ſitorum a polo C diſtantia CA = CB, cognita, cognita etiam erit chorda diſtantiae (per §. praec.) dicatur ea = s. (2) cognitus ſit angulus ACB, quem diſtantiae a polo intercipiunt, cognita igitur eſt etiam anguli chorda, quae arcum ipſius DE in peripheria ſphaerae maxima ſubtendit (ibid.), dicatur ea c. Tab. X Fig. 1.

Inueniendus eſt arcus peripheriae ſphaerae maximae loca A et B coniungens. Vt hoc obtineatur, chorda eius AB, quae definitam ad diſtantiam ipſam rationem habet eſt definienda. Ad hoc praeſtandum, ſinus diſtantiae a polo ſiue radius paralleli AF cognitus ſit neceſſe eſt, qui poſito radio ſphaerae = r, erit = $\frac{s}{2r}\sqrt{(4r^2 - s^2)}$ per principia Geometrica, et cum chorda arcus peripheriae ſphaerae maximae anguli dati ſit = c, erit tandem $r : c = \frac{s}{2r}\sqrt{(4r^2 - s^2)} : \frac{cs}{2r^2}\sqrt{(4r^2 - s^2)}$ i. e. radius ſphaerae eſt ad chordam eius angulum datum in peripheria circuli ſphaerae maximi ſubtendentem, vt radius paralleli in ſphaera ad chordam arcus paralleli in ſphaera loca data coniungentis. Haec paralleli chorda ſubtendit vero ſimul arcum peripheriae ſphaerae maximae locis datis terminatum, i. e. locorum diſtantiam, erit ergo ſimul chorda diſtantiae locorum, quae erat inuenienda; vt diſtantia ipſa ſecundum §. 8. innoteſceret.

§. 10.

§. 10. Cum radius semper sit cognitus et ipsis mappis exprimatur praedicto calculo supersedere possimus, si omnibus mappis addatur

1. Scala, quae paralleli cuiuslibet in sphaera radium siue sinum distantiae a polo $= \frac{s}{2r} \sqrt{(4r^2 - s^2)}$ sistat

2. Scala, quae chordas cuiuslibet arcus, in peripheria sphaerae, maxima siue dupla sinuum cuiuslibet arcus dimidii exhibeat.

§. 11. Hisce adminiculis exiguo labore distantiae locorum in eodem parallelo inueniri poterunt.

Fig. 2. Dentur iterum primo duo loca A et B in eodem parallelo in mappa quadam, angulus cuius arcum chorda inuenienda subtendit, siue differentia longitudinum ex omnibus mappis cognoscitur. Fiat deinde radio sphaerae CK arcus peripheriae circuli sphaerae maximi, transferatur circino ex scala chordarum laudata chorda KB anguli dati BCK, arcum BDK in peripheria circuli sphaerae maximi subtendens in arcum radio sphaerae delineatum, ducantur porro radii CK, CB ex centro circuli, angulum datum BCK intercipientes et radius paralleli sphaerae ex scala radiorum parallelorum sphaerae in radium sphaerae CB; vnoque circini pede centro *c* arcus descripti imposito, altero arcus *bda* extrema puncta *b* et *a* in radiis CA et CB notentur, distantia inter haec puncta breuissima *ab* erit non solum chorda paralleli in sphaera, sed etiam chorda distantiae quaesitae §. 9. Transferatur igitur haec circino in scalam chordarum, innotescet statim arcus quaesiti magnitudo, numero graduum apposito.

§. 12. Sint secundo duo loca in diuersis parallelis

et

et ſimul in diuerſis meridianis, ſiue habeant ambo latitudinem vel auſtralem vel borealem, ſiue vnus habeat latitudinem auſtralem alter vero borealem, definienda eſt locorum datorum diſtantia. Sit ABCHFA ſphaera, A ſit polus ſphaerae, vnus locus E et eius meridianus AEC, parallelus vero BEF, alter locus D et eius meridianus ADC, parallelus vero DGH erit differentia diſtantiarum cognitarum a polo A, BLD=EMG, cuius chorda BD inuenitur, vt (§. 8) oſtenſum. Chorda BE in parallelo BEF et chorda DG in parallelo DGH inuenitur vt §. 9. docui. Cognitis his chordis minor ſubtrahatur a maiori e. g. BE a DG differentia chordarum diuidatur in duas partes aequales et linea GK innoteſcit, quam EK, normalis ad DG ex puncto E chordae BE, definit. Si GK a chorda DG ſubſtrahitur linea KD innoteſcit. Porro ex quadrato chordae EG ſubſtrahatur quadratum lineae GK, ſiue ſemidifferentiae chordarum in parallelis, et obtinebitur quadratum perpendiculi EK. Fiat etiam ex KD quadratum et addatur ei quadratum perpendiculi EK, ſumma erit quadratum chordae quaeſitae ED ſiue chordae diſtantiae loca E et D in ſphaera iungentis. Si ergo radix extrahatur ex dicta ſumma, innoteſcit calculo chorda. Vt ſolutio problematis in compendium mittatur, ſit vt ſupra radius ſphaere $=r$, chorda differentiae longitudinum in peripheria ſphaerae maxima $=c$ differentiae diſtantiarum a Polo $=a$, paralleli minoris radius $=p$, maioris P. Cum ergo chorda differentiae longitudinum in parallelo minori ſit $=\frac{pc}{r}$, in parallelo maiori $=\frac{Pc}{r}$ erit ergo $GK=\frac{Pc-pc}{2r}$. $GKq=\frac{P^2c^2-2Ppc^2+p^2c^2}{4r^2}$ et EKq. =

Fig. 2.

$= a^2 \frac{-P^2c^2 + 2Ppc^2 - p^2c^2}{4r^2}$ et $KDq. = \frac{P^2c^2 + 2pPc^2 + p^2c^2}{4r^2}$ tandem ergo distantiae locorum chorda $ED = \sqrt{(a^2 + \frac{pPc^2}{r^2})}$.

§. 13. Sic calculo res expeditur, sine Trigonom. Spaericae vsu, mei est, vt ostendam qua ratione sine omni calculo ope solius circini et regulae, mappis prius scalis chordarum et radiorum parallelorum sphaerae instructis, locorum in diuersis parallelis distantia inueniri possit.

Fig. 4. Radio sphaerae AB describatur arcus circuli maximi et chorda differentiae longitudinum datarum BL, ex scala chordarum transferatur circino in arcum radio sphaerae delineatum et ducantur radii AB, AL. Ex centro arcus circuli maximi cum radiis parallelorum in sphaera AC et AE, quorum distantiae a polo A dantur, ex scala radiorum parallelorum circino captis notentur puncta C, D, et E, F in radiis sphaerae descriptis. Deinde chorda EF differentiae longitudinum in parallelo maiori ducta, chorda CD differentiae longitudinum in parallelo minori circino transferatur in chordam EF descriptam et ab ea subtrahatur, residuum GE diuidatur in duas partes aequales, et ex puncto diuisionis H erigatur ad EF normalis HK infinita. Porro capiatur chorda DB differen-

Fig. 3. et 4. tiae distantiarum datarum a polo (siue australi, siue boreali, idem est) ex scala chordarum et ex puncto E chordae maioris EF determinetur cum chorda DB dicta punctum O normalem definiens. Distantia alterius extremitatis F chordae FE a puncto O transferatur in scalam chordarum et innotescet locorum distantia numero graduum apposito. Omnia collato §. 12. patent.

§. 14. Hactenus ostendi, qua ratione mappae idoneis scalis perfici possint, neque dubito hac ratione map-

pas

pas perfectiores futuras, at cum mihi hisce meditationibus inhaerenti inciderit methodus scalam radiorum parallelorum in ipsis mappis vniuersalibus sic delineandi, vt eo ipso chordae distantiarum omnes in omnibus parallelis vel ipsa mappa expressae vel adplicata regula ad mappam definitae, ope circini in peripheriam circuli sphaerae maximi transferri possint, etiam hanc subiungam.

§. 15. Si dimidia telluris superficies in aequatoris plano est deformata in lineam meridianam CE, mappa expressam, meridiano primo propinquam ab aliis colore siue alia ratione distinctam, vt eo facilius inueniatur, radii multorum parallelorum sphaerae, siue sinus distantiarum a polo ex centro transferri poterunt et distantiarum a polo vel ab aequatore gradus adponi. Perspicuum est chordas distantiarum eo ipso in parallelis ipsa mappa esse definitas et adplicatis ad aequatorem mediante circino chordis distantias, loca in eodem parallelo iungentes, numero graduum apposito innotescere Fig. 7.

Sint loca H et G, lineae C 80 et C 160. repraesentant meridianos in hac deformatione, et $160° - 80° = 80°$ est differentia longitudinum, porro in linea CE, C 60. est radius paralleli sphaerae, arcus $m\,60.n$ chorda mn chorda distantiae: Haec si ad aequatoris peripheriam adplicatur, distantia locorum in gradibus ipsa mappa expressa inuenitur.

§. 16. Si dimidia telluris superficies in primi meridiani plano AFDGA est dilineata: in radium CE ex centro primi meridiani ad punctum E non procul a linea AD aequatorem exhibente ductum, ex centro primi meridiani omnium parallelorum in sphaera radii, siue Fig. 8.

si-rectus et consequenter arcus AFC arcus circuli minoris 90 graduum. Repraesentet arcus AFC primi meridiani partem et centrum circulorum C polum; circulus maior ABDA aequatorem, et dicto modo omnes reliqui meridiani per singulorum graduum initia, vel sicuti Geographi in mappis solent per singulorum quinorum graduum initia tantum ducantur. Hoc facto meridianus primus AFC diuidatur in nonaginta suos gradus, numeris graduum appositis, et per singulorum graduum terminos ducantur ex centro siue Polo circuli, hi circuli exhibebunt parallelos. Porro ex tabula longitudinum et latitudinum locorum loca ipsa transferantur in mappam, vti a Geographis fieri solet, et tandem scala chordarum et radiorum parallelorum sphaerae mappa instruatur, vti supra, vt earum ope distantiae locorum inueniri possint.

§. 19. Inter proprietates, quibus descripta mappa praecellit aliis, refero

1. quod locorum eiusdem meridiani distantias ipsas et chordas distantiarum exhibeat, vt cuilibet facile patet.

2. quod quaelibet pars in hac mappa rationem habeat ad quamlibet aliam quam habere debet. Hoc vt demonstrem sequenti ratione pergo:

Sit AFD semicirculus sphaerae maximus, sit AB chorda cuiusdam arcus, AC eiusdem arcus sinus versus,
Fig. 6. erit per principia Geometrica

$$AD : AB = AB : AC$$

Sit AF alia chorda et AG sinus versus erit iterum AD : AF = AF : AG et sic diameter ad quamlibet chordam est vt eadem chorda ad sinum sinum versum. Conseq.

$$\frac{AD.AC}{AD.AG} = \frac{AC}{AG} = \frac{AB^2}{AF^2}$$

et

et cum circuli sint in ratione quadratorum diametrorum, circulus diametri AB erit ad circulum diametri AF = AC : AG. pariterque quadruplum circuli diametri AB erit ad quadruplum circuli diametri AF = AC : AG. Cum hoc de omnibus chordis demonstrari possit, quadrupla nempe circulorum chordarum esse in ratione sinuum suorum versorum, ipsaque sint ipsi paralleli in mappa descripti, circuli paralleli in mappa descripti sunt in ratione sinuum versorum arcuum, quorum chordis paralleli in mappa delineantur. At superficies segmentorum sphaerae, qui parallelis mappae exhibentur, parallelis sphaerae terminatae sunt pariter in ratione sinuum versorum respondentium arcuum per principia Geometrica. Ergo etiam circuli paralleli in mappa deformati sunt in ratione superficierum segmentorum sphaerae parallelis spaerae terminatorum i. e. partes quaelibet in mappa habent ad totum rationem, quam habere debent.

§. 20. Dictis proprietatibus mappa descripta praecellit reliquis, at maiora certe videntur esse incommoda, quibus haec mappa prae aliis est obnoxia. Chordae distantiarum locorum, quae diversam habent longitudinem vt cuique inquirenti patebit et iudicatu facillimum est, a veris maxime distant, eoque magis, quo paralleli aequatori propinquiores sunt. Aequator ipse non maiori esse deberet peripheria circuli sphaerae maximi, qui tamen est ad hanc vt subtensa arcus 90° ad radium sphaerae. Interim ex talibus mappis vno obtutu videre licet, quantum vna regio magnitudine aliam superet, quod ope earum mapparum, quae in vsu sunt, non fit.

DE

DE INTERPOLATIONE SIMPLICI MEDITATIONES.

Auctore

C. N. de Winsheim.

Antequam ars interpolandi, siue ratio implendi seriem numerorum ex differentiis secundis Cl. Virorum Gabrielis Mouton et Petri Horrebouii, ad manus meas peruenirent, cogitare coepi, quomodo numerus quicunque per datum numerum locorum ita distribui possit, vt sumendo differentiam, saltus obseruetur, aut plane nullus, aut ad minimum tolerandus.

Supposui autem sequentia.

I. Numeros interpolandos aequaliter crescere aut decrescere debere.

II. Si vel maxime ad differentias secundas et tertias (si accurate procedendum) confugiendum sit, numeros tamen ita comparatos esse debere, vt summa ἀκρίβεια, vel plane non desideretur, aut ab illo, qui numeris vti velit, facile suppleri possit.

III. Fractiones non ante integro numero aequiparandos esse, quam dimidium excedunt iisque semper vnitatem adiiciendo, locum determinari posse, vbi nouus numerus ponendus.

IV. Per (a) numerum cognitum, a quo interpolandi initium fiat, aut praecedentem semper numerum; per (x) vero semper nouum numerum, per schema determinandum, significari.

His

His suppositis sperabam me taediosa illa via liberari, qua fractiones per diuisionem enatas, tentando rite disponere, coactus eram, et laeuiori opera metam contingere me posse; nec spem fefellit euentus, scilicet per septem et quod excurrit annos culminationes solis et planetarum earumque altitudines meridianas, nec non varias alias tabulas, quibus saepenumero opus erat, sequentibus schematibus et tabulis adiutus, breui temporis spatio et pro scopo satis accurate elaborare potui, id quod vel tentando aut subinde regulas praescriptas adhibendo, non sine temporis dispendio efficere potuissem, quamuis me, magis accurate omnia exhibere potuisse, non negauerim.

Hanc igitur methodum in vsum eorum qui eodem aut simili labore aliquando in Obseruatorio Imperiali fungi debent, communicare partium mearum duxi, vt facilitatem iis eandem in calculo conciliarem Astronomico, quam ipse expertus fui.

Sint e. g. data duo loca vacua, dies scilicet 12, et 13. Iunii.

Anno 1743.	11. Iun. lat. ♃ bor.	1°. 13′.
	12 – – –	
	13 – – –	
	14	1°. 12′.

vbi vnitas veniat interpolanda,

pro die 12. prodit $\frac{1}{2}$.

— – 13. — — $\frac{1}{2}$.

Sed quoniam numerus integer solum hic desideratur et $\frac{1}{2}$ dimidium non superat, ergo pro primo loco ponitur (a) pro 2do (x) = $a\,x$ hinc in priori casu, vbi, (a) adest die 12. Iun. numerus praecedens 1°. 13′. retinetur, seu repetitur, et die 13. vnitas ipsi (hoc in passu, decrescentibus scilicet numeris) subtrahitur, et sic interpolata sunt duo haec loca.

11	Iun.	lat. ♃.	bor.	1°.	13′.
12	—	—	—	1°.	13′.
13	—	—	—	1°.	12′.
14	—	—	—	1°.	12′.

Porro. Sit interpolanda vnitas tribus vacuis in locis. E. g. Sit transitus ♂ per meridianum

d. 26. Febr. 23°. 13′.
27. —
28. —
29. —
1. Mart 23°. 12′. quoniam differentia, vnitas et loca tria interpolanda sunt.

prodit pro loco primo $\frac{1}{3}$.
pro — secundo $\frac{2}{3}$.
pro — tertio $\frac{3}{3}$.

Quoniam $\frac{2}{3}$ iam dimidium superant, hinc vnitas in medio ponitur, et sic schema oritur sequens

$\frac{1}{3}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{3}$.
a x a

et loca vacua iam sequentem in modum impleta sunt.

die 26.	Febr.	23°.	13′.
27.	—	23.	13.
28.	—	23.	12.
29.	—	23.	12.
1.	Mart.	23.	12.

Sint

Sint interpolandi 2. numeri et loca adsint 3.

$\frac{2}{3}$. $\frac{4}{3}$. $\frac{6}{3}$.

x. a. x.

Scilicet x ponitur primo loco quoniam $\frac{2}{3}$ dimidium superant, in loco medio autem ponitur a (qui numerum cognitum praecedentem indicat) quia $\frac{4}{3}$ vnitatem cum dimidio non superant, ergo secundus numerus integer tertio demum loco poni debet.

Sint tandem 3. loca per 3. vnitates implenda, id fit prouti facile attendenti patet, singulas vnitates sibi invicem addendo, aut subtrahendo, prouti numeri crescunt aut decrescunt; exinde oritur sequens schema.

pro duobus locis

1 - - -	a	x
2 - - -	x	x
1 - - -	0	1
2 - - -	1	1
3 - - -	1	2
4 - - -	2	2
5 - - -	2	3
6 - - -	3	3 f. f.

pro tribus locis

1 - - -	a	x	a
2 - - -	x	a	x
3 - - -	x	x	x
1 - - -	0	1	0
2 - - -	1	0	1
3 - - -	1	1	1

4	- - -	1 2 1
5	- - -	2 1 2
6	- - -	2 2 2
7	- - -	2 3 2
8	- - -	3 2 3
9	- - -	3 3 3

Quamuis hactenus dicta sufficere posse videantur, vt cui volupe fuerit vnusquisque pro data quantitate numerorum intermediorum distribuendorum, non solum schema sed etiam tabulas ipsas sibi parare possit, ne tamen aliquid ad perspicuitatem huius methodi pertinens, praeteriisse videamur, adhuc vnico exemplo vsum tabulae A infra adiectae, in determinatione et examine schematum breuibus monstrabimus.

Notum est Astrophilis planetarum motus ab iis qui Ephemerides conscribunt ad calculos modo in quintum, modo in decimum quemque diem ex tabulis reuocari Astronomicis, intermediosque numeros in dies singulos distribui, prouti in Ephemeridibus Manfredi id obtinuisse testatur Franc. Maria Zanotti in ed 2. Erratorum insigniorum Ephemeridum coelestium motuum Manfredi.

Faciamus iam periculum quomodo schema pro decem locis interpolandis construi debeat.

Hic vsus elucescit tabulae A e qua quadratum ab 1 ad 10 desumendum sequentem in modum.

1.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.	20.
3.	6.	9.	12.	15.	18.	21.	24.	27.	30.
4.	8.	12.	16.	20.	24.	28.	32.	36.	40.
5.	10.	15.	20.	25.	30.	35.	40.	45.	50.
6.	12.	18.	24.	30.	36.	42.	48.	54.	60.
7.	14.	21.	28.	35.	42.	49.	56.	63.	70.
8.	16.	24.	32.	40.	48.	56.	64.	72.	80.
9.	18.	27.	36.	45.	54.	63.	72.	81.	90.
10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90.	100.

Singuli hi numeri hoc in casu partes decimales significabunt, ita vt prima series

1. $\frac{1}{10}$. $\frac{2}{10}$. $\frac{3}{10}$. $\frac{4}{10}$. $\frac{5}{10}$. $\frac{6}{10}$. $\frac{7}{10}$. $\frac{8}{10}$. $\frac{9}{10}$. $\frac{10}{10}$.

2. $\frac{2}{10}$. $\frac{4}{10}$. $\frac{6}{10}$. $\frac{8}{10}$. $\frac{10}{10}$. $\frac{12}{10}$. $\frac{14}{10}$. $\frac{16}{10}$. $\frac{18}{10}$. $\frac{20}{10}$.

et sic porro significet.

Cogitetur porro dum vnitas per decem loca distribuenda sit, illam non ante quam in sexto loco poni posse, quoniam in loco quinto saltem $\frac{5}{10}$ = dimidium vnitatis adsit; $\frac{6}{10}$ autem dimidium iam superat, huic $\frac{6}{10}$ tanquam primo loco vbi integer numerus ponendus, semper, prouti supra dictum fuit, adiiciantur vnitates, tot quod pro conditione schematis adiici possunt, $\frac{6}{10} + 1 = \frac{16}{10} + 1 = \frac{26}{10} + 1 = \frac{36}{10}$ sq. Notentur ex his enati numeri 6. 16. 26. 36, 46. 56. 66. 76. 86. 96. etc.

Hi numeri ipsi, vbi in quadrato praedicto adsunt, aut si non adsint numeri proxime maiores notentur asterismo, prouti in sequenti factum obseruatur laterculo, quibus peractis loca non insignita per a vbi asterismus exstat per x exprimantur, hoc pacto fundamen-

 tum

tum schematis sequentis vna cum ipso schemate elaboratum exhibemus, id quod quoque per duos ordines numerorum exprimere necessarium duximus.

1.	2.	3.	4.	5.	*6.	7.	8.	9.	10.
2.	4.	*6.	8.	10.	12.	14.	*16.	18.	20.
3.	*6.	9.	12.	15.	*18.	21.	24.	*27.	30.
4.	*8.	12.	*16.	20.	24.	*28.	32.	*36.	40.
5.	*10.	15.	*20.	25.	*30.	35.	*40.	45.	*50.
*6.	12.	*18.	24.	*30.	*36.	42.	*48.	54.	*60.
*7.	14.	*21.	*28.	35.	*42.	49.	*56.	63.	*70.
*8.	*16.	24.	*32.	*40.	*48.	*56.	64.	*72.	*80.
*9.	*18.	*27.	*36.	45.	*54.	*63.	*72.	*81.	*90.
*10.	*20.	*30.	*40.	*50.	*60.	*70.	*80.	*90.	*100.

		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
1.	—	a.	a.	a.	a.	a.	x.	a.	a.	a.	a.
2.	—	a.	a.	x.	a.	a.	a.	a.	x.	a.	a.
3.	—	a.	x.	a.	a.	a.	x.	a.	a.	x.	a.
4.	—	a.	x.	a.	x.	a.	a.	x.	a.	x.	a.
5.	—	a.	x.	a.	x.	a.	x.	a.	x.	a.	x.
6.	—	x.	a.	x.	a.	x.	x.	a.	x.	a.	x.
7.	—	x.	a.	x.	x.	a.	x.	x.	x.	a.	x.
8.	—	x.	x.	a.	x.	x.	x.	x.	a.	x.	x.
9.	—	x.	x.	x.	x.	a.	x.	x.	x.	x.	x.
10.	—	x.	x.	x.	x.	x.	x.	x.	x.	x.	x.

1	—	0.	0.	0.	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	
2	—	0.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	1.	0.	0.	
3	—	0.	1.	0.	0.	0.	1.	0.	0.	1.	0.	
4	—	0.	1.	0.	1.	0.	0.	1.	0.	1.	0.	
5	—	0.	1.	0.	1.	0.	1.	0.	1.	0.	1.	
6	—	1.	0.	1.	0.	1.	1.	0.	1.	0.	1.	
7	—	1.	0.	1.	1.	0.	1.	1.	1.	0.	1.	
8	—	1.	1.	0.	1.	1.	1.	1.	0.	1.	1.	
9	—	1.	1.	1.	1.	0.	1.	1.	1.	1.	1.	
10	—	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	
11	—	1.	1.	1.	1.	1.	2.	1.	1.	1.	1.	
12	—	1.	1.	2.	1.	1.	1.	1.	2.	1.	1.	
13	—	1.	2.	1.	1.	1.	2.	1.	1.	2.	1.	
14	—	1.	2.	1.	2.	1.	1.	2.	1.	2.	1.	
15	—	1.	2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.	1.	2.	
16	—	2.	1.	2.	1.	2.	2.	1.	2.	1.	2.	
17	—	2.	1.	2.	2.	1.	2.	2.	2.	1.	2.	
18	—	2.	2.	1.	2.	2.	2.	2.	1.	2.	2.	
19	—	2.	2.	2.	2.	1.	2.	2.	2.	2.	2.	
20	—	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	2.	etc.

Haec qui rite intellexit ſchemata noſtra, ante plures annos confecta, quae fundamenta tabularum praebent, ſi forte non recte conſtructa ſint, (in quod inquirendum nunc non vacat) ipſi corrigere, totque quot voluerit ſibi ſchemata tabulasque conſtruere poterit.

Sin autem minus volupe ſit tabulas prolixas (quae tamen absque vlla quaſi moleſtia ab vnoquoque in Arithmeticis vel leuiter verſato conſtrui poſſunt) ſupputare, etiam miſſis talibus abacis, dummodo ſchemata rite conſtructa,

structa, e praecedentibus nullo negotio conficienda, adsint, pro re nata sibi tabulam peculiarem conficere valet, sequentia obseruando:

vbi duo loca interpolanda, singulos binos numeros
vbi 3 — — — — — ternos —
vbi 4 — — — — — quaternos —

nouum dare ordinem prouti e schematibus eum in finem constructis, et infra adiectis vnicuique ipsa intuenti patebit.

Supponatur Cometam quendam die 5. mensis cuiusdam habuisse longitudinem 13°. 10′. die 9. autem in longitudine 4°. 35′. promotum esse, quaeritur quaenam longitudo singulis diebus intermediis, scilicet 6. 7. 8. et 9. competat, statuendo motum eius per hoc spatium temporis semper aequalem fuisse.

Sic ergo dantur 4°. 35′. per 4. loca distribuenda 60

240
35

haec 275 minuta prima 275

per 4. diuisa, dant multiplum quaternarii proxime minus, scilicet 68. Quod indicio est vltimum ordinem numerorum per quaternos numeros dispositorum, desiisse per 68 et quidem e regione numeri 272. sequentem in modum

269	67.	67.	68	67.
270	67.	68.	67.	68.
271	68.	67.	68.	68.
272	68.	68.	68.	68.

nam 68
68
68
68

quater sibi additi dant 272. Ergo

Ergo nouum ordinem, seu abacum peculiarem, pro

$\left.\begin{array}{l}273\\274\\275\\276\end{array}\right\}$ constituendum esse consulendo schema

a. a. x. a.
a. x. a. x.
x. a. x. x.
x. x. x. x.

Notetur saltim, quod supra monuimus, vbi (a) inueniatur, ibi praecedentem numerum, hoc loco 68. ponendum, vbi vero (x) praecedenti numero vnitatem adiiciendam esse.

Hinc pro	273.	ponatur	68. 68. 69. 68.
	274.		68. 69. 68. 69.
	275.		69. 68 69 69.
	276.		69. 69. 69. 69.

sicque datus numerus 275. primorum minutorum = 4°. 35′. sequentem in modum distributus fuit.

$$\left.\begin{array}{l}\text{die } 5 - 13°.\ 10'.\\ \quad\ 6 - 14.\ 19.\\ \quad\ 7 - 15.\ 27.\\ \quad\ 8 - 16.\ 36.\\ \quad\ 9 - 17.\ 45.\end{array}\right\}\begin{array}{l}69\\68\\69\\69\end{array} = 275 = 69.\ 68.\ 69.\ 69.$$

Neque tamen opus erit in numeris praesertim maioribus e. g. vbi 10. aut 15. series ad ordinem implendum requiruntur, schema integrum construere, aut in numeris exhibere, sufficere poterit sequens compendium e tabula A. hauriendum. Sit datus numerus 386. inter decem loca intermedia distribuendus, instituatur diuiſio per decem, prodit quotus 38. et remanent $\frac{6}{10}$. qui indicio eſt, interpolationem iſtam per 38. quater ſumtos, et 39. ſexies ſumtos inſtitui debere, ſcilicet

38.	39.
38.	39.
38.	39.
38.	39.
152.	39.
	39.
	234.

152. + 234. = 386.

Sit iterum datus numerus 729. pro interpolatione 15. in locis inſtituenda

$\frac{729}{15} = 48. + \frac{9}{15}.$

e quo concludere licet, 6. loca per 48. et reliqua 9. per 49. implenda eſſe, quoniam 48. 6. = 288. et 49. 9. = 441. et 441. + 288. = 729.

Dico his in caſibus minime opus eſſe, vt pro decem aut quindecim locis integra conſtruantur ſchemata. Nil amplius requiritur, quam vt priori in caſu e laterculo 10. numerorum ſeries ſexta, quoniam fractio quotientis eam requirit 6. 12. 18. 24. 30. 36. 42. 48. 54. 60. in ſecundo paſſu autem e quadrato pro quindecim numeris ſeries 9na. ob eandem rationem deſumatur 9. 18. 27. 36. 45. 54. 63. 72. 81. 90. 99. 108. 117. 126. 135. et quoniam $\frac{6}{10}$ in priori, $\frac{9}{15}$ in poſteriori caſu dimidium ſuperant, fractioni $\frac{6}{10}$. numerum integrum ſemper pro extenſione ſeriei addendo, prodeunt numeri ſupra commemorati 6. 16. 26. 36. 46. 56. 66. 76. et fractioni alteri $\frac{9}{15}$. ſemper 15. addendo prodit

dit ſequens numerus 8. 23. 38. 53. 68. 83. 98. 113. 128. qui vbi inueniuntur vel ipſi vel numeri proximi maiores aſteriſmo inſigniri debent, reliquis praetermiſſis, exinde enatae ſunt ſequentes ſeries $\overset{*}{6}$. 12. $\overset{*}{18}$. 24. $\overset{*}{30}$. $\overset{*}{36}$. 42. $\overset{*}{48}$. 54. $\overset{*}{60}$. quibus ſi numeri 38. et 39 debito modo ſubſtituantur prodit ſequens ordo 39. 38. 39. 38. 39. 39. 38. 39. 38. 39.

Simili modo procedendo pro 15. ponuntur primo $\overset{*}{9}$. 18. $\overset{*}{27}$. 36. $\overset{*}{45}$. $\overset{*}{54}$. 63. $\overset{*}{72}$. 81. $\overset{*}{90}$. $\overset{*}{99}$. 108. $\overset{*}{117}$. 126. $\overset{*}{135}$. quibus ſi ſubſtituantur numeri 48. et 49. quos diuiſio numeri 729. per 15. indicauit, ſequentem in modum diſpoſiti inueniuntur, 49. 48. 49. 48. 49. 49. 48. 49. 48. 49. 49. 48. 49. 48. 49. ita vt minime opus ſit ſchema totum elaborare, aut tabulas prolixas ſibi conſtruere.

Hac methodo ii praeſertim frui poterunt, qui aut rariſſime, aut ſaltim in vno alteroue caſu interpolationem inſtituunt.

Cetera quae forte monenda reſtant inſpectio ſchematum aeque ac tabularum adiectarum, vnumquemque eas adhibentem laeui opera docebit.

Tabula A.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75	78	81	84	87	90
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154	161	168	175	182	189	196	203	210
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176	184	192	200	208	216	224	232	240
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198	207	216	225	234	243	252	261	270
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242	253	264	275	286	297	308	319	330
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	148	158	168	180	192	204	216	228	240	252	264	276	288	300	312	324	336	348	360
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286	299	312	325	338	351	364	377	390
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308	322	336	350	364	378	392	406	420
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300	315	330	345	360	375	390	405	420	435	450
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320	336	352	368	384	400	416	432	448	464	480
17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340	357	374	491	408	425	442	459	476	493	510
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360	378	396	414	432	450	468	486	504	522	540
19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380	399	418	437	456	475	494	513	532	551	570
20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	420	440	460	480	500	520	540	560	580	600
21	42	63	84	105	126	147	168	189	210	231	252	273	294	315	336	357	378	399	420	441	462	483	504	525	546	567	588	609	630
22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	242	264	286	308	330	352	374	396	418	440	462	484	506	528	550	572	594	616	638	660
23	46	69	92	115	138	161	184	207	230	253	276	299	322	345	368	391	414	437	460	483	506	529	552	575	598	621	644	667	690
24	48	72	96	120	144	168	192	216	240	264	288	312	336	360	384	408	432	456	480	504	528	552	576	600	624	648	662	686	720
25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350	375	400	425	450	475	500	525	550	575	600	625	650	675	700	725	750
26	52	78	104	130	156	182	208	234	260	286	312	338	364	390	416	442	468	494	520	546	572	598	624	650	676	702	728	754	780
27	54	81	108	135	162	189	216	243	270	297	324	351	378	405	432	459	486	513	540	567	594	621	648	675	702	729	756	783	810
28	56	84	112	140	168	196	224	252	280	308	336	364	392	420	448	476	504	532	560	588	616	644	672	700	728	756	784	812	840
29	58	87	116	145	174	203	232	261	290	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580	609	638	667	696	725	754	783	812	841	870
30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360	390	420	450	480	510	540	570	600	630	660	690	720	750	780	810	840	870	900

Tab. B.

2.

a	x
x	x
1	

3.

a	x	a
x	a	x
x	x	x
$\frac{2}{3}$.	5.	8.

4.

a	a	x	a
a	x	a	x
x	a	x	x
x	x	x	x
$\frac{3}{4}$.	7.	11.	15.

5.

a	a	x	a	a
a	x	a	x	a
x	a	x	a	x
x	x	a	x	x
x	x	x	x	x
$\frac{3}{5}$.	8.	13.	18.	23.

6.

a	a	a	x	a	a
a	x	a	a	x	a
a	x	a	x	a	x
x	a	x	x	a	x
x	x	a	x	x	x
x	x	x	x	x	x
$\frac{4}{6}$.	10.	16.	22.	28.	34.

7.

a	a	a	x	a	a	a
a	x	a	a	a	x	a
a	x	a	x	a	x	a
x	a	x	a	x	a	x
x	a	x	x	x	a	x
x	x	x	a	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x

$\frac{4}{7}$. 11. 18. 25. 32. 39. 46.

8.

a	a	a	a	x	a	a	a
a	a	x	a	a	a	x	a
a	x	a	a	x	a	x	a
x	a	x	a	x	a	x	a
x	a	x	a	x	x	a	x
x	a	x	x	x	a	x	x
x	x	x	a	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x

$\frac{5}{8}$. 13. 21. 29. 37. 45. 53. 61.

9.

a	a	a	a	x	a	a	a	a
a	a	x	a	a	a	x	a	a
a	x	a	a	x	a	a	x	a
a	x	a	x	a	x	a	x	a
x	a	x	a	x	a	x	a	x
x	a	x	x	a	x	x	a	x
x	x	a	x	x	x	a	x	x
x	x	x	x	a	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x

$\frac{6}{9}$. 14. 23. 32. 41. 50. 59. 68. 77.

10.

10.

a	a	a	a	a	x	a	a	a	a
a	a	x	a	a	a	a	x	a	a
a	x	a	a	a	x	a	a	x	a
a	x	a	x	a	a	x	a	x	a
a	x	a	x	a	x	a	x	a	x
x	x	x	a	x	x	a	x	a	x
x	x	x	x	a	x	x	x	a	x
x	x	a	x	x	x	x	a	x	x
x	x	x	x	a	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
$\frac{6}{10}$. 16.	26.	36.	46.	56.	66.	76.	86.	96.	

11.

a	a	a	a	a	x	a	a	a	a	a
a	a	x	a	a	a	a	a	x	a	a
a	x	a	a	a	x	a	a	a	x	a
a	x	a	a	x	a	x	a	a	x	a
a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a
x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x
x	a	x	x	a	x	a	x	x	a	x
x	a	x	x	x	a	x	x	x	a	x
x	x	a	x	x	x	x	x	a	x	x
x	x	x	x	x	a	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
$\frac{6}{11}$. 17.	28.	39.	50.	61.	72.	83.	94.	105.	116.	

a	a	a	a	a	a	x	a	a	a	a	a
a	a	a	x	a	a	a	a	a	x	a	a
a	a	x	a	a	a	x	a	a	a	x	a
a	x	a	a	x	a	a	x	a	a	x	a
a	x	a	x	a	a	x	a	x	a	x	a
a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x
x	a	x	a	x	a	x	x	a	x	a	x
x	a	x	x	a	x	x	a	x	x	a	x
x	a	x	x	x	a	x	x	x	a	x	x
x	x	a	x	x	x	x	x	a	x	x	x
x	x	x	x	x	a	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

$\frac{7}{12}$. 19. 31. 43. 55. 67. 79. 91. 103. 115. 127. 139.

13.

a	a	a	a	a	a	x	a	q	a	a	a	a
a	a	a	x	a	a	a	a	a	x	a	a	a
a	a	x	a	a	a	x	a	a	a	x	a	a
a	x	a	a	x	a	a	a	x	a	a	x	a
a	x	a	x	a	a	x	a	a	x	a	x	a
a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a
x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x
x	a	x	a	x	x	a	x	x	a	x	a	x
x	a	x	x	a	x	x	x	a	x	x	a	x
x	x	a	x	x	x	a	x	x	x	a	x	x
x	x	x	a	x	x	x	x	x	a	x	x	x
x	x	x	x	x	x	a	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

$\frac{7}{13}$. 20. 33. 46. 59. 72. 85. 98. 111. 124. 137. 150. 103.

14

a	a	a	a	a	a	a	x	a	a	a	a	a	a
a	a	a	x	a	a	a	a	a	a	x	a	a	a
a	a	x	a	a	a	a	x	a	a	a	x	a	a
a	x	a	a	a	x	a	a	x	a	a	a	x	a
a	x	a	a	x	a	a	x	a	x	a	a	x	a
a	x	a	x	a	x	a	a	x	a	x	a	x	a
a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x
x	a	x	a	x	a	x	x	a	x	a	x	a	x
x	a	x	x	a	x	a	x	x	a	x	x	a	x
x	a	x	x	x	a	x	x	a	x	x	x	a	x
x	x	a	x	x	x	a	x	x	x	x	a	x	x
x	x	x	a	x	x	x	x	x	x	a	x	x	x
x	x	x	x	x	x	a	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
$\frac{8}{14}$ 22.	36.	50.	64.	78.	92.	106.	120.	134.	148.	162.	176.	190.	

a	a	a	a	a	a	a	x	a	a	a	a	a	a	a
a	a	a	x	a	a	a	a	a	a	a	x	a	a	a
a	a	x	a	a	a	a	x	a	a	a	a	x	a	a
a	x	a	a	a	x	a	a	a	x	a	a	a	x	a
a	x	a	a	x	a	a	x	a	a	x	a	a	x	a
a	x	a	x	a	a	x	a	x	a	a	x	a	x	a
a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a
x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x
x	a	x	a	x	x	a	x	a	x	x	a	x	a	x
x	a	x	x	a	x	x	a	x	x	a	x	x	a	x
x	a	x	x	x	a	x	x	x	a	x	x	x	a	x
x	x	a	x	x	x	x	a	x	x	x	x	a	x	x
x	x	x	a	x	x	x	x	x	x	x	a	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	a	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
8.	23.	38.	53.	68.	83.	98.	113.	128.	143.	158.	173.	188.	203.	218.

a	a	a	a	a	a	a	a	x	a	a	a	a	a	a	a
a	a	a	a	x	a	a	a	a	a	a	a	x	a	a	a
a	a	x	a	a	a	a	a	x	a	a	a	a	x	a	a
a	a	x	a	a	a	x	a	a	a	x	a	a	a	x	a
a	x	a	a	x	a	a	a	x	a	a	x	a	a	x	a
a	x	a	a	x	a	x	a	a	x	a	a	x	a	x	a
a	x	a	x	a	x	a	a	x	a	x	a	x	a	x	a
a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x	a	x
x	a	x	a	x	a	x	x	a	x	a	x	a	x	a	x
x	a	x	x	a	x	a	x	x	a	x	x	a	x	a	x
x	a	x	x	a	x	x	x	a	x	x	a	x	x	a	x
x	x	a	x	x	x	a	x	x	x	a	x	x	x	a	x
x	x	a	x	x	x	x	x	a	x	x	x	x	a	x	x
x	x	x	x	a	x	x	x	x	x	x	x	a	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	a	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

9. 25. 41. 57. 73. 89. 105. 121. 137. 153. 169. 185. 201. 217. 233. 249.

a	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*
a	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*
a	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*
a	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*
a	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*
a	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*
x	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*a*	*x*
x	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*
x	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*a*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*
x	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*	*x*

$\frac{11}{20}$. 31. 51. 71. 91. 111. 131. 151. 171. 191. 211. 231. 251. 271. 291. 311. 331. 351. 371. 391

Tabula

Tabula C.

2

a. *x.*
x. *x.*

1	*a*	*x*
2	*x*	*x*
1	0	1
2	1	1
3	1	2
4	2	2
5	2	3
6	3	3
7	3	4
8	4	4
9	4	5
10	5	5

etc.

3

a. *x.* *a.*
x. *a.* *x.*
x. *x.* *x.*

1	0	1	0
2	1	0	1
3	1	1	1
4	1	2	1
5	2	1	2
6	2	2	2
7	2	3	2
8	3	2	3
9	3	3	3
10	3	4	3
11	4	3	4
12	4	4	4

etc.

4

a. *a.* *x.* *a.*
a. *x.* *a.* *x.*
x *a.* *x.* *x.*
x. *x.* *x.* *x.*

1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	1	0	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	2	1
6	1	2	1	2
7	2	1	2	2
8	2	2	2	2
9	2	2	3	2
10	2	3	2	3
11	3	2	3	3
12	3	3	3	3
13	3	3	4	3
14	3	4	3	4
15	4	3	4	4
16	4	4	4	4

etc.

5

a.	*a.*	*x.*	*a.*	*a.*
a.	*x.*	*a.*	*x.*	*a.*
x.	*a.*	*x.*	*a.*	*x.*
x.	*x.*	*a.*	*x.*	*x.*
x.	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*

1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	1	0
3	1	0	1	0	1
4	1	1	0	1	1
5	1	1	1	1	1
6	1	1	2	1	1
7	1	2	1	2	1
8	2	1	2	1	2
9	2	2	1	2	2
10	2	2	2	2	2
11	2	2	3	2	2
12	2	3	2	3	2
13	3	2	3	2	3
14	3	3	2	3	3
15	3	3	3	3	3

etc.

6

a.	*a.*	*a.*	*x.*	*a.*	*a.*
a.	*x.*	*a.*	*a.*	*x.*	*a.*
a.	*x.*	*a.*	*x.*	*a.*	*x.*
x.	*a.*	*x.*	*x.*	*a.*	*x.*
x.	*x.*	*a.*	*x.*	*x.*	*x.*
x.	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*	*x.*

1	0	0	0	1	0	0
2	0	1	0	0	1	0
3	0	1	0	1	0	1
4	1	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	2	1	1
8	1	2	1	1	2	1
9	1	2	1	2	1	2
10	2	1	2	2	1	2
11	2	2	1	2	2	2
12	2	2	2	2	2	2
13	2	2	2	3	2	2
14	2	3	2	2	3	2
15	2	3	2	3	2	3
16	3	2	3	3	2	3
17	3	3	2	3	3	3
18	3	3	3	3	3	3

etc.

7

	a.	a.	a.	x.	a.	a.	a.
	a.	x.	a.	a.	a.	x.	a.
	a.	x.	a.	x.	a.	x.	a.
	x.	a.	x.	a.	x.	a.	x.
	x.	a.	x.	x.	x.	a.	x.
	x.	x.	x.	a.	x.	x.	x
	x.	x.	x.	x.	x.	x.	x.
1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	0	0	1	0
3	0	1	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1	0	1
5	1	0	1	1	1	0	1
6	1	1	1	0	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	2	1	1	1
9	1	2	1	1	1	2	1
10	1	2	1	2	1	2	1
11	2	1	2	1	2	1	2
12	2	1	2	2	2	1	2
13	2	2	2	1	2	2	2
14	2	2	2	2	2	2	2
15	2	2	2	3	2	2	2
16	2	3	2	2	2	3	2
17	2	3	2	3	2	3	2
18	3	2	3	2	3	2	3
19	3	2	3	3	3	2	3
20	3	3	3	2	3	3	3
21	3	3	3	3	3	3	3

etc.

10

	a.	a.	a.	a.	a.	x.	a.	a.	a.	a.
	a.	a.	x.	a.	a.	a.	a.	x.	a.	a.
	a.	x.	a.	a.	a.	x.	a.	a.	x	a.
	a.	x.	a.	x.	a.	a.	x.	a	x.	a.
	a.	x.	a.	x.	a.	x.	a.	x.	a.	x.
	x.	a.	x.	a.	x.	x.	a.	x.	a.	x.
	x.	a.	x.	x.	a.	x.	x.	x.	a.	x.
	x.	x.	a.	x.	x.	x.	x.	a.	x.	x.
	x.	x.	x.	x.	a.	x.	x.	x.	x.	x.
	x.	x.	x.	x.	x.	x.	x.	x.	x.	x.
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
3	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
4	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
5	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
6	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
7	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
8	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
9	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1
12	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1
13	1	2	1	1	1	2	1	1	2	1
14	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1
15	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
16	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2
17	2	1	2	2	1	2	2	2	1	2
18	2	2	1	2	2	2	2	1	2	2
19	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2
20	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

etc.

CLASSIS

CLASSIS SECVNDA
CONTINENS
PHYSICA.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE ANNI 1740.

AVCTORE:
Georgio Wolffgango Krafft.

§. 1.

Hoc anno 1740 obseruatae fuerunt a me altitudines Barometri, singulis mensibus maximae et minimae, sequentes, in quibus, vt hucusque factum est, numeri ante punctum positi denotant partes duodecimas, siue pollices, pedis Londinensis, numeri autem post punctum positi denotant horum pollicum partes centesimas.

		maxima	minima	differ.
1740.	Ianuarius	— 30. 08	— 28. 98	— 1. 10
	Februariu	— 30. 12	— 29. 08	— 1. 04
	Martius	— 29. 99	— 28. 91	— 1. 08
	Aprilis	— 29. 79	— 28. 95	— 0. 84
	Maius	— 30. 28	— 29. 30	— 0. 98
	Iunius	— 29. 91	— 29. 40	— 0. 51
	Iulius	— 29. 88	— 29. 28	— 0. 60
	Augustus	— 30. 25	— 29. 28	— 0. 97
	September	— 30. 12	— 29. 14	— 0. 98
	October	— 30. 10	— 28. 91	— 1. 19
	Nouember	— 30. 14	— 28. 90	— 1. 24
	December	— 30. 12	— 28. 65	— 1. 47

§. 2. Apparet ex his altitudinibus Barometri, earum maximam hoc anno fuisse 30. 28, quae obseruata fuit die 10 Maii, serenitate perfecta aliquot dierum, spirante mediocri zephyro, variabili; quia vero haec altitudo maxima illam quae anno 1737 obseruata fuit, nempe 30. 95, non excedit: haec adhucdum manet omnium hic loci obseruatarum maxima. Minima autem Barometri altitudo hoc anno fuit 28. 65, quae extitit die 11 Decembris, cum Borea-zephyrus fortis turbulenter niuem per aëra ferret, et nubes continuae aliquot dierum existerent, cum frigore mediocri. Quae igitur minima altitudo huius anni, cum inuentam in praecedentibus annis, nempe 28. 18, superat: manet adhuc idem spatium variationum Barometricarum antea stabilitum, nempe 2. 77. Suntque adhuc variationes menstruae in primis et vltimis anni mensibus maiores, minores autem praecise sex mediis.

§. 3. Auroras Boreales hoc anno obseruaui sequentes:

1740 Ianuarii 12. aderant, in serenitate mediocri, vestigia lucis Borealis, flante leniter Euro, perdurante serenitate mediocri.

Februarii 19. visa est lux Borea parua, inter nubes; flante tenui Austro; secuta est nix.

Martii 12. in serenitate perfectissima aliquot dierum apparuit lux Borea insignis, hora 10 nocturna, frigore existente satis forti.

13.

13. perdurante adhuc eadem serenitate visa fuit lux Borea debilior, nec non
14. alia, in iisdem circumstantiis.

Septembris 11. in serenitate perfecta apparuit lux Borea, vnico tantum radio conspicua, quam insequebatur fortissimus zephyrus variabilis, et pluuia.

14. inter nubes visa sunt vestigia lucis Borealis, quam pluuia insecuta fuit. Eadem hora Londini grauissima saeuiit tempestas, nunciantibus Nouis publicis Amstelodamensibus.

15. cum plueret fere toto die, visa sunt circa horam 9 nocturnam, in coelo atris nubibus diuiso, fulgura frequentissima, sine tonitru; et hora 10 aderant indicia apertissima lucis Borealis, ex aliquot ascendentibus virgis, in aëre serenitati restituto.

Octobris 13. in serenitate fere integra, visa est lux Borea parua, cum pluuia insequente et praecedente.

Nouembris 5. in serenitate perfecta, sed breui durante, visa est lux Borea, constans arcu lucido tranquillo, quam coelum nubilum insecutum est.

7. vidi hora 4. matutina vestigia lucis Boreae, in multa serenitate.

§. 4. Prima congelatio facta est hoc anno d. 23 Septembris, quo die simul aqua, libero aëri exposita,

 crusta

crusta glaciali obducta fuit hora 10½ nocturna. Thermometro Fahrenheitiano, iuxta appenso, monstrante gradus 33.

§. 5. Maximum frigus huius anni incidit in diem 24 Decembris, quo hora 7 matutina, Thermometrum Fahrenheitianum, libero aëri expositum, ab egregio artifice Amstelodamensi *Prins* confectum, descendit ad gradus 15 infra 0, flante leni Euro, in serenitate perfecta. Frigus praeterea paulo minus acre experti sumus diebus 14. 23. 24. 25. 26 et 27. Ianuarii, 8 et 12 Februarii, 15. 18. 19 20. 21 22. 23 et 31 Decembris; qui omnes dies Thermometrum modo dictum ad gradus 9 et 12 infra 0 adegerunt. In Obseruatorio autem Imperiali, in aëre nempe magis eleuato, et magis libero, quam is est, qui aedes ordinarias circumdat, maximum frigus deprehensum fuit d. 25 Ianuarii, ad gradus 30 infra 0. In plerisque praeterea dierum allegatorum, frigore intenso insignitorum, nebulae, modo densiores, modo paulum tenuiores, obseruatae sunt, prouti ab aliis iam hoc phaenomenon annotatum est.

§. 6. Tonitrua hoc anno audita fuerunt diebus sequentibus: Maii 6. Iunii 28. Iulii 10. Augusti 2. Septembris 5, quae vltima tempestas, insolita in his terris, procul dubio ventis aduecta fuit. Nam in Nouis publicis referebatur, die praecedente in vico prope *Halam Magdeburgicam* domum fulmine tactam conflagrasse, et eo die fortis apud nos spirabat ventus Austro Zephyrus. Accedunt his fulgura frequentissima sine tonitru d. 15. Septembris, circa horam 9 nocturnam, mihi et multis aliis visa, supra iam §. 3. memorata.

§. 7.

§. 7. Mense Augusto huius anni coepi quantitatem pluuiae et niuium metiri, et hunc in finem eas excipere in vase ligneo, quadrato, cuius quodlibet latus tenet 19 poll. pedis Londinensis. Exposui hoc aeri libero in Solariis, lateri orientali et occidentali aedium mearum adiunctis, ex quo factum quidem est, vt paries aedium proximus, distans tamen a vase ad pedes 6, pluuiae quandoque aliquid interceperit. Et quia hoc vas quadratum apertum est: solicite attendi, vt post finitam quamcunque pluuiam statim metirer quantitatem eius, aut vero in diuturnis pluuiis saepius mensuram repeterem, antequam per euaporationem aliquid auolare potuerit. Mensuram autem niuis et pluuiae institui cylindro ferreo, stanno obducto, eius capacitatis, vt quod calculo et experimento ipso cognoui, 21 tales aqua repleti in vase quadrato efficerent altitudinem aquae vnius pollicis Londinensis. Ex his itaque obtinui sequentes obseruationes:

		alt. pluuiae
a 17 Augusti ad finem mensis		0. 56. poll Lond.
September	- -	2. 24.
October	- -	3. 15.
Nouember	- -	1. 44.
December	- -	1. 80.
	Summa	9. 19.

niuem in vase collectam calore temperato in aquam resolui curaui ita, vt vas linteo obtextum esset, ad euitandam euaporationem. In densitatem quoque aquae ex niue resoluta ortae inquisiui, immergendo illi Araeometrum vitreum paruulum, et capiendo mensuram partis cylindri

lindri eius super aquam exstantis; aquam vero ipsam reduxi ad eundem semper calorem, nempe gradus 43 Thermometri Fahrenheitiani, atque ita deprehendi partem exstantem Araeometri in aqua niuali d. 18 Decembris 180 partium, qualium 2400 efficiunt pedem Lond. d. 26. Decembris vero 181 earundem partium; sed, in similibus plane circumstantiis examinando aquam fluuiam Newae nostrae, partem Araeometri exstantem inueni non nisi 171 dictarum partium; vnde profundius in hac submersum est Instrumentum, et consequenter haec illa leuior.

§. 8. Ventos vehementes experti sumus diebus sequentibus: Ianuarii 17. 18. 27. Februarii 5. 17. 23. 24. 25. 26. 29. Martii 18. 24. 25. 26. 27. 28. 30. Aprilis 7. 8. 11. 17. 18. 22. 24 30. Maii 3. 5. 13. 15. 18. 34. 25. 31. Iunii 1. 4. 5. 13. 14. 16. 20. 23. 28. Iulii 1. 2. 3. 4. 11. 22. 23. 25. Augusti 4. 19. 25. 26. 27. 30. 31. Septembris 2. 3. 5. 6. 12. 13. 18. 21. 22. 29. Octobris 12. 13. 20. 29. 30. Nouembris 4. 6. 12. 13. 22. 26. 29. 30. Decembris 1. 2. 11. 18. 19. 20. 29. inter quos procellae fuerunt Febr. 25. Mart 25. 26. Aprilis 8. 22. 24. Maii 18. 24. Iunii 16. Iulii 1. 2. 3. Septembris 5. 12. 13. 22. Octobris 12. 13. Capto experimento ad modum, quem exposui in *Obseruationum Meteorologicarum ab anno 1726 vsque in finem anni 1736 factarum comparatione, Praelect. II.* §. 10. vidi, ventum fortem asserculum ligneum, quadratum, circa latus superius mobilem, eleuasse d. 11. Decembris ad 50°, et hinc ventum eum talem habuisse celeritatem, qua in vnico minuto secundo temporis progressus est per 39⅛ pedes Rhenanos.

§. 9.

§. 9. Grandinem experti sumus die 5. Septembris, furente Zephyro et multum variante, impetum suum duas horas ante grandinem decidentem assumente; 22. et 23. Septembris furente iterum Borea-Zephyro; magnitudo prioris grandinis erat vti pisorum campestrium, ordinaria quidem, sed forma granorum sensibiliter conica erat, ita vt vertice, et base circulari, praedita essent.

§. 10. Quotidiana obseruatione liquet, nubes varias induere figuras: sed die 13. Iulii huius anni earum seriem aliquam plane singularem obseruaui, quae multis spectatoribus, praecipue nautis huc adpropinquantibus, admirationi fuit. Erat eo die toto tempore antemeridiano coelum nubibus continuis obductum, flante mediocri Austro-Zephyro; post meridiem vero ventus mutatus est in leuissimum Borea-Zephyrum, qui ad vesperam plane quieuit, et coelo serenitas integra restituta, si solam hanc seriem nubium excipias, quae plagam Borealem occupauit, et ab Occidente versus Orientem leuiter decliuis apparuit, vt ibi paulo maiorem altitudinem supra horizontem teneret quam hic. Latitudo huius fasciae nubium erat circiter 10 graduum, et integra series terminata vtrinque lineis fere rectis inter se parallelis AB, et CD. Area fasciae vbique repleta erat colore tenui subfusco, qui distinctus erat in partes multas valde nigricantes, quas figura accurate ostendit. Cum enim phaenomenon hoc per aliquot horas duraret, et nubium figura interea immota perstaret: Curaui statim vt omnis earum aspectus per duos delineatores Academiae peritos, me praesente, omni fide delinearetur. Aspeximus autem hanc nubium formam ab hora vespertina 11 vsque ad 1 post mediam noctem Tab. XII. fig. 1.

 qualis

qualis Fig. 1. repraesentatur, sed haec macula die sequentis 14 Iulii erat mutata, et multum contractior apparuit sub forma, quam commonstrat Fig. 2.

§. II. In observationibus Meteorologicis anni praecedentis exhibui descriptionem Thermometri, quod gradum frigoris, in regione aliqua maximi, observatore interim absente, assumit, et eum huic post aliquod tempus redeunti deinde indicat. Monitus ab eo tempore perquam humanissime a Fautore sui, posse idem Instrumentum inservire quoque examinando gradui caloris, qui obtinet in imo profundi Oceani. Cui scopo vt vtile fiat, vt instrumentum hoc adaptem, suadeo vt parietibus globus vitreus satis amplus A, cui annexus sit tubulus BCD, qui in latere CD sacculos vitreos, intra tubum hiantes, sibi teneat affixos. Repleatur hoc instrumentum spiritu vini colorato, aut mercurio, aut alio liquido, per methodos cognitos, atque tum, relicto aëre naturali in globo A, vtrinque hermetice sigilletur. Quo facto facile patet futurum esse, vt instrumentum, hoc modo adornatum, prioris sit inversum, aptum nempe ad retinendum calorem aliquem maximum, dum aër in globo A contentus, et a calore expansus, liquorem cogit vt ascendat, atque sic sacculorum superiorem aliquem impleat, qui liquoris captam portionem, dum hic postea iterum descendit, retinet. Sin itaque hoc Instrumentum, pondere aliquo grauatum, in imum maris fune demittatur atque per aliquod temporis spatium ibi detineatur, retractum illud indicabit quam facillime, an in fundo maris calor maior obtineat quam in eius superficie. Si vero suspicio aliqua nascatur, fundum maris frigidiorem esse quam eius superficies: eodem dum successu instrumentum prius demittendum erit. Poterit enim in vtroque casu Thermometrum hoc ea firmitate, et crassitie vitri, donari, vt a pressione aquarum, et diruptione vitri, omnis metus absit.

§. 12. Seculo superiori agitata iam fuit quaestio, ad quam profunditatem gelu terram penetret in regionibus septentrionalibus. Proposita et commendata ea est *Hevelio* ex Anglia, inter diuersas alias ad frigus pertinentes, quae insertae sunt omnes *Diario Eruditorum Gallico* anni 1667. pag. 25. Respondit ad hanc quaestionem *Hevelius*, ex obseruatione *Shefferi* Professoris Vpsaliensis eo tempore, terram *Suecia* congelari vsque ad 2 vlnas Suecias. Refertur etiam in Diario citato, ad annum 1675. pag. 138. *Paulum Biornium*, qui in Islandiam peregrinatus est, memoriae prodidisse, terram ibi ad profunditatem 4 pedum congelari. Operam igitur adhibui vt et hic loci determinem ad quam profunditatem tellus nostra, pro variis circumstantiis locorum, congelationem durante hyeme patiatur, atque hinc sequentes obseruationes institui, quas, vt hic referam, propositum meum omnino requirere videtur, etiamsi fere omnes earum ad obseruationes Meteorologicas anni sequentis 1741 referendae essent. Itaque anno 1740, d. 14 Martii, ad finem properante hyeme illius anni longe lateque saeuissima, in hortulo domestico, aedibus lapideis et ligneis fere vndique cincto, niuem primo, deinde terram frigore constrictam, suffodi curaui, atque inueni altitudinem niuis 2 pedum Londinens. humum vero non nisi ad profunditatem $\frac{1}{4}$ pedis, vel 3 poll. glacie constrictam, durissima quidem, ita vt nihil eius digitis abradere vel conterere licuerit; infra hanc crustam glacialem autem, quae suis limitibus accurate distincta erat, terra arenata, qualis ordinarie hic esse solet, consueto more digito friabilis offerebatur, quod in sequentibus quoque obseruationibus deprehendi. Anno 1741. d. 11. Februarii in horto Botanico Academiae, amplo, et libero aëri maximam partem exposito, sed intra vrbem tamen sito, a Clariss. *Ammano* obseruata fuit altitudo niuis terrae incumbentis 16½ poll. terrae autem glacie constrictae tantum 7½ poll. D. 23 Februarii subsequente, cum aliquot dies ante Thermometrum Fahrenheitianum vsque ad gradus 15 infra 0 depressum fuisset, inueni in campo intra vrbem sito, aedibus quidem lapideis, sed ad distantiam 500 aut 600 passuum, et ex parte tantum, cincto, profunditatem niuis 14. poll. et terrae conglaciatae 8. poll. Insequente d. 4. Martii selegi campum liberum, extra vrbem situm ad distantiam circiter ¼ milliaris Germanici, qui arboreto humili ad interuallum vnius Verstae, vel ⅐ mill. Germ. ex vno latere munitus est, atque ibi deprehendi niuem altam 16 poll. infra hanc crustam aquae purae glacie constrictae altitudinis 1½ poll. quam terra conglaciata sequebatur ad profunditatem non nisi 5 poll. campus hic ingruente autumno paulum solet esse paludinosus, vnde sine dubio crusta glacialis aquea ortum sub niue duxit. Proximo deinde 17 Martii selegi alium campum liberrimum, eodem circiter, qua prius, distantia extra vrbem iacentem, in eoque inueni altitudinem niuis 14. poll. crustam aquae congelatae altam ½ poll. terram vero glacie constrictam ad profunditatem 12 poll.

TEN-

TENTAMEN EXPLICANDI DILATATIONEM ET CONTRACTIONEM PVPILLAE

Auctore

Iosias Weitbrecht.

§. 1.

Indubitatum est phaenomenon, quod pupilla oculi non eiusdem semper diametri videatur, sed maiore luminis claritate illabente minor, minore autem maior appareat. Neque vero hoc simpliciter ita apparere, sed re vera talem pupillae dilatationem et constrictionem actu fieri vnanimiter Physiologi statuunt; quem motum reciprocum ope fibrarum muscularium partim orbicularium partim longitudinalium radii in modum protensarum, quas in vuea ab Anatomicis collocari supponunt, effectui dari arbitrantur.

§. 2. Equidem non negauerim, in planitie iridis a limbo pupillae vsque ad illum locum, ad quem processus ita dicti ciliares terminantur, plurimas fibras candicantes et coruscantes radiatim dispositas decurrere, itemque alium circulum fibrosum adesse, quo ipse pupillae limbus circumscribitur. Has fibras autem carneas et musculosas esse a nemine Anatomicorum hactenus per experientiam ad oculum demonstratum est; etiamsi scriptorum aliqui illas tales esse vel probabiliter argumento ab analogia desumto, dubitanter tamen assumserint, vel et absque vlla restrictione audacter statuerint; quin po-

§. 7. Scholion II. Iridem posse fluctuare, in humore aqueo vndulare, innatare, et quocunque denique nomine hunc motum insignire placuerit, nullum est dubium. Hoc ex eius structura molli et cohaesione cum adiacentibus partibus luculenter apparet. Praeterea multum inter Anatomicos celebres de figura et situ iridis disputatum est. Alii illam planam alii conuexo concauam posuerunt; aliis camera humoris aquei posterior maior visa fuit, aliis minor. Quae varietas omnis quemadmodum vel a constitutione et figura oculi, vel a secantium dexteritate, vel a methodo, qua rem aggressi sunt, dependebat: ita exinde consequitur, fluctuationem et mutationem situs iridis neutiquam imaginariam esse, sed actu existere posse.

§. 8. Prop. II. Quando iris fluctuat, illa a situ suo perpendiculari ac plano deflectit, et ab humore crystallino vel recedit, vel ad eum appropinquat.

§. 9. Prop. III. Pupilla est foramen circulare in iride, vt limites ponantur radiis lucis in lentem crystallinam incidentibus.

§. 10. Prop. IV. Pupilla dilatari dicitur aut constringi, quando diameter foraminis maior aut minor apparet.

§. 11. Prop. V. Quando iris inter humorem aqueum fluctuans ad membranam corneam propius accedit; pupilla necessario ampliatur.

Tab. XII. fig. 4. 5. Repraesentent enim lineae *ae*, *ec* et *cb* (fig. 4.) sectionem iridis et pupillae medium *ac*; *bc* (fig. 5.); sint puncta *a* et *b* fixa, quibus ipsa peripheria iridis *ac cb* (fig. 5.) cum sclerotica cohaeret; moueantur lineae *ac*, et *cb* (fig. 4.) tanquam radii constantes circa centra fixa

a et

a et *b*, et transferantur illae in situm *ad* et *bd*: puncta *d* et *d* necessario longius a se distabunt, quam puncta *c* et *c*. Videlicet iris ex situ plano transmutabitur in figuram coni truncati. Durante hoc motu, quia nihil est, quod fibras longitudinales iridis *ac*, *ec*, *bc* (fig. 4. 5.) extendat, illae eandem mensuram eandemque a punctis *a*, *e*, *b*, distantiam seruabunt; contra vero fibrae circulares *c*, *c*, et *α*, *ε* (fig. 5.), vtpote debiliores in omnes plagas trahentur, fibrae autem longitudinales angulum inclinationis, quo tamquam radii concentrici conuergebant, mutabunt, et magis parallele decurrent. Iridis igitur planities apparebit spatiosior, et pupilla in maiorem amplitudinem expandetur.

§. 12. Problema I. Determinare augmentum amplitudinis pupillae.

Sit AC radius circuli, et latitudo annuli iridis vndulantis; transferatur ille in situm DC ad distantiam BD, quae est longitudo viae, quam punctum *c* (fig. 4. 5.) in limbo pupillae fluctuando conficit; erit AB, sinus versus, augmentum radii pupillae. Sit igitur $AC = DC = r$ $BD = a$, $AB = x$; erit ex natura circuli $AB : BD = BD : BE$, $x : a = a : 2r - x$; vnde elicitur valor ipsius $x = r - \sqrt{rr - aa}$. Assumamus autem iuxta calculum Cl. Petiti latitudinem annuli iridis $= 2$ lin, longitudinem viae BD, siue maximam a situ plano distantiam $= 1$ lin. et diametrum pupillae in situ plano $= 1$ lin; erit $x = 2 - \sqrt{3}$ augmentum radii pupillae, et augmentum totius diametri $2x = 4 - \sqrt{12} = \frac{1}{2}$ lin. cum aliquo excessu; vnde diameter pupillae minima in situ plano iridis ad ma- Tab. XII. fig. 6.

accedit; minor autem, quando eadem membranula ad tunicam corneam appropinquat. Considerari enim potest iris, vt corpus illud intra sphaeram motum; humor aqueus, vt aqua in sphaera; cornea vt sphaerae superficies. Sed quia hoc Propositioni V. et VI. directe repugnare videtur, inquiramus paullo strictius in huius variationis modum et quantitatem; mensura enim exita maiorem certitudinem rei conciliabit, et quantum hypothesi nostrae officiat, determinabit.

Tab. XII. fig. 8. §. 23. Problema II. Sit AMNB sphaera aquea, cuius radius $AC = r$, in eaque circulus opacus, diametri Rr, mobilis, vt ad punctum superficiei A accedere et ab illo recedere queat. Sit oculus spectatoris in O. Quaeritur, quo angulo visuo orbis Rr in quaque ab A distantia oculo O repraesentetur.

Solutio. Sit MOA dimidius angulus opticus, qui cum sit vehementer paruus, pono distantiam oculi $AO = PO = MO = a$; $PM = x$. Sit porro MT radius incidentiae, respondens radio refracto MO, et tangat MT extremitatem circuli opaci in R. Sit $TC = y$, erit $TM = TA = y + r$, et $OC = a + r$. Quia (§. 20.) $\int NMC : \int TMC = 4 : 3$; erit $OC . MT : CT . MO = 4 : 3$, vnde $(a + r)(y + r) : ya = 4 : 3$, et $y = \frac{3r(a+r)}{a-3r} = CT$. Sit denique distantia circuli a centro sphaerae $CS = d$, et radius circuli opaci $RS = b$; erit $TS : RS = TP : PM$, $(y + d) : b = (y + r) : x$, et $y = \frac{rb - dx}{x - b}$; ex quibus binis valoribus τῦ y elicitur $x = \frac{4abr}{3r(a+r) + d(a-3r)}$. Est igitur angulus opticus quaesitus reciproce, vt $3r(a + r) + d(a - 3r)$. Ergo quo magis pupilla retrahitur ad lentem crystallinam a superficie tunicae corneae, eo maior illa apparet.

§. 24.

§. 24. Scholium IV. Densitatem tunicae corneae in tota consideratione tuto neglexinus, partim, quia calculum nimis intricatum reddidisset, partim, quia inuentae aestimationi vix quicquam discriminis attulisset.

§. 25. Corollarium I. Assumamus iuxta eandem calculum Clar. Petiti radium sphaerae, cuius cornea portio est, CA, CM $= r = 3\frac{1}{4}$. lin; Semidiametrum pupillae RS $= b = \frac{1}{2}$ lin; Longitudinem viae, quam iris fluctuando conficere potest, siue distantiam pupillae a lente crystallina, variabilem, maximam $= 1\frac{1}{4}$ lin; distantiam minimam $= 0$; consequenter distantiam pupillae CS a centro corneae C maximam $= d = 3\frac{1}{4}$ lin; distantiam eandem CS minimam $= d = 2\frac{1}{2}$ lin; distantiam oculi spectantis AO $= a = 60$ lin: Erit in maxima pupillae a crystallina lente distantia $x = \frac{450}{900}$, in distantia autem minima $x = \frac{450}{840}$. Apparentia igitur pupillae prope lentem maxima ad minimam prope tunicam corneam erit $= 900 : 840 = 15 : 14$. Cum vero latitudinem pupillae circa corneam supra (§. 12.) inuenerimus diametri quindecim partium decimarum vnius lineae, cum aliquo excessu: exinde patet, hanc diametrum pupillae dilatatae propter refractionem semper $\frac{1}{10}$ lineae maiorem iudicari debere, quam oculo intuentis apparet; quae autem differentia adeo exigua est, vt oculus spectatoris illam distinguere nequeat. Effectus igitur refractionis hypothesi nostrae neutiquam officit.

§. 26. Coroll. II. Quia durante pupillae dilatatione solae fibrae transuersales et in orbem ductae $a\varepsilon$ sunt, quae violentam extensionem patiuntur (§. 11.): cessante illa caussa, quae iridem protrusit, etiam dilatatio cessat; fibrae enim istae internae elateris sui virtute iterum restituuntur et pupilla angustatur.

§. 27. Solutio igitur problematis (§. 1.) eo redacta est, vt caussam dilatationis pupillae non in contractione fibrarum muscularium longitudinalium iridis, sed in protrusione totius iridis corneam versus, et inde sequente extensione fibrarum circularium (§. 11.); angustationem vero non in istarum relaxatione, sed in harum naturali restitutione (§. 26.) quaesiuerimus. Vnde nouum problema emergit. Quae est caussa, quod illabente pauciore lumine iris a lente crystallina recedat, et corneam versus protrudatur? Obiicies forsan, nos hac methodo nihil vel parum profecisse, aeque enim difficile esse, rationem reddere, quare iris, illabente minore lucis claritate protrudatur, quam satisfacere antiquae quaestioni: quare positis iisdem, fibrae carneae longitudinales contrahantur. At vero, primus ad veritatem gressus est, errorem agnoscere. Cum nulli tales dentur musculi: quid igitur in reddenda caussa rei, qualis nulla est, inutiliter anxii simus? De difficultate autem vtriusque problematis inter se comparanda nemo iudicare poterit, nisi qui vtramque solutionem tentauerit, quod tamen a quopiam Physiologo factum esse, mihi compertum non est. Non loquor de caussa finali, sed physica. Dabo ego difficultatis specimen. Motus certe istarum fibrarum muscularium, si quae sunt, plane inuoluntarius est. Eius igitur determinatio ex cerebro debet proficisci. Quid vero est illud, quod cerebrum ad hanc determinationem sollicitat? Si caussam in prouidentia mentis quaesiueris; nodum quidem scindes, non solues. Sin impressionem vel actionem radiorum lucis eis incidentium, (quod G. Bergerus in Physiologia sua Cap. XXVIII. Pag. 410. verbulo indicasse videtur) accusaueris: sequitur, quo maior luminis claritas, quo copiosiores radii, eo fortiorem illorum esse debere actionem et sollicitationem. At vero omnia contraria euenire experientia docet; quo debilius enim lumen est, eo fortior illarum fibrarum actio, eoque amplior pupillae dilatatio sequitur. Accipe et alterum. Variante luminis intensitate obseruatur variationem pupillae cum notabili aliqua mora procedere; non vero in instanti vel eo ipso momento, quo lumen augetur vel minuitur, quod tamen ita fieri deberet, si dilatatio eius a contractione fibrarum muscularium dependeret. Sed ne alteram quaestionem omnino intactam relinquam, aliqualem illius explicationem paucis tentabo. Iris protruditur corneam versus, quando posterior camera ampliatur pro maiore humoris aquei quantitate recipienda; retrocedit autem illa, quando ex eadem camera angustata humor aqueus in anteriorem expellitur. Certum est, radios lucis in cauum oculi illabentes effectum aliquem exerere in illius humores et tunicas. Concede igitur mihi, per copiosiores radios humorem vitreum vel rarefieri, vel in posteriore sede bulbi comprimi, et vna cum lente crystallina anteriora versus propelli: in vtroque casu camera posterior angustior euadet, humor aqueus in cameram anteriorem penetrabit, et iridem lenti apprimet. Remittant autem radii; cessabit etiam humoris vitrei vel rarefactio vel compressio; contrahetur igitur et retrocedet cum lente in sedem pristinam, camera posterior ampliabitur,

et

et humor aqueus illas dilabens iridem corneam versus protrudet, vnde pupilla dilatabitur. Dixi, aliqualem explicationem me tentaturum, vt pote nondum satis digestam. Hanc enim pro absolute vera venditare nolim, neque etiam vlli sententiam meam obtrudam, aut occasionem praescindam, qui forte in reuelandis caussis oculatior me fuerit.

DE

DE GLANDVLIS RENALIBVS EVSTACHII.

Auctore
I. G. du Vernoi.

Saepe a. 1739. admonui, certas particulas, renum succenturiatorum historiam spectantes, crebris dissectionibus mihi compertas, et nunc post earum descriptionem, eas pingendi spem et voluntatem esse: Post hac vero iconum caussa, res istae quantumlibet descriptae, fere obliuioni traditae, et ob spem ipsos renes succenturiatos simul pingendi, in longinquum tempus dilatae sunt: Quos renes, vt apud Anatomicos hactenus depicti sunt, quoties diligentius perlustrare mihi contigit, ego haud satis mirari potui, cur quanto liberalius, et redundantius et tanta diligentia reliquae partes C. H. sunt depictae, tanto parcius icones illorum renum peruulgatae, et vt vera fateamur, rudiore et indiligentiore artificio, quam in re tanti momenti decebat, confectae fuerint: Quae cum ita sint, quid quaeso, ad historiae anatomicae complementum, magis optandum est, quam studio, labore, et industria, quibus reliquarum partium C. H. Sic illorum renum icones excultas esse, quibus iuxta naturae exemplar, omnia quae tam exterius quam interius, circa eorumdem admirandam structuram, a Diuino Opifice constituta sunt, qua fieri potest perspicuitate, fide, et solertia, exponantur, qua in re, opinor, haud leuior; vt nonnullis videtur, diligentia, quam circa quamcunque aliam partem C. H. desideratur.

Sic itaque cum ingenti spe conatus fuissem, dimensionibus, amplitudine, situ, connexionibus, et forma, qua vterque ren succenturiatus spectatur, pictura exprimere, cum omnis generis vasis apud Anatomicos hactenus descriptsu. His autem haud contentus, annisus fuissem, circulim quendam admirabilem delineare, quem vascula exilia hactenus, vt opinor, minus descripta, incredibili copia efformare, in vtriusque sexus cadaueribus, saepius comperi, et aliis ostendi: nempe secta tam anterius quam posterius tunica adiposa illos renes inuoluente, et detracta, e toto eius interiore ambitu, vascula tenuissima fibras longitudinales repraesentantia renum exteriori circumferentiae annexa, vtque per processus ciliares, crystallinus et vuea, sic per iam memorata vascula radiatim disposita, membranam adiposam et renes succenturiatos, a Diuino Opifice coniuncta esse animaduerti: Quae vascula, quantum ego assequi possum, haud in vnum truncum communem coeunt, verum per singula et distincta orificia, renem vndiquaque ingressa, sanguinem vt vasculorum color rubicundus indicat, ad visum hactenus minus cognitum, in eius cauitatem deuehunt. Iuxta circulum vascularem, conatus fuissem formam exteriorem, frequentiam, et nexum cum illis renibus 1. lymphaeductuum. 2. fibrarum neruearum 3. exilium his interiectorum nodulorum seu tumorum gangliformium perspicuis et accuratis iconibus illustrare.

Ab exteriore habitu postea, ego operam haud secus contulissem in peculiares icones, quae videlicet artificium quod a Diuino Opifice interius constitutum est, praeclare exhiberent. Nempe 1. Venas illos renes permeantes

meantes haud solidis et imperuiis, vt extra renem, membranis constructae, verum vndiquaque sic peruiae et perforatae sunt, vt per tunicarum interstitia haud secus quam per directum canalis, via constituta sit. Si nunc creberrima foramina, vt res fortuita, et vt effectus dilacerationis vasculorum lateralium, a nonnullis credi vellent, ipsa opinor conformatio foraminum, quae omni ex parte in modum cribri sunt disposita, et, quod hinc consequitur, subita renis intumescentia, quae ante sectionem per venae inflationem efficitur, omnem ea de re dubitationem adimunt: Quam conformationem peculiarem venarum, cuius in C. H. duplex exemplum duntaxat videlicet in liene, virorum organis genitalibus, mihi hactenus cognitum est, ego propterea tanto magis sum miratus, quod illis renibus, *si glandulae essent*, vt communis opinio est, tum vt in venis glandularum similis structura a Diuino Opifice tributa fuisset: quae venarum perforationes in glandulis, quantum scio, a nemine hactenus obseruatae sunt.

Mihi, vt CASPARO BARTHOLINO primum, et nonnullis Anatomicis contigit, semper quidem cauitas aliqua, et vt non raro accidit, per compressionem effluxus cruenta, vel aliqua per flatum expansio spectata sunt, verum tamen, num illa cauitas, vt per sectionem conspicua est, sic a natura constructa? vtrum solitaria et simplex? an vero multiplex et composita sit? iure meritoque dubitandum est, postquam neque partim ab EVSTACHIO primo illorum renum inuentore, ipsa cauitas eiusque constitutio minus descripta fuerit, partim circa eandem recentiores descriptiones parum sibi constent;

 aliae

aliae apud adultos in dubium reuocent; aliae ductus ampli et tali nomine designent, aliae in extremitate maiore eius sedem constituant, aliae fraena transuersa, aliae valuulas satis insignes, aliae duntaxaat filamenta parietes inuicem nectentia, adiiciant: dum ipse, praeter illas rationes dubitandi, exteriorem superficiem vidi haud semper aequalem et complanatam, verum nonnullis protuberantiis praeditam esse: a quo tempore, renes forte e multiplici cauitate constructos esse, coniicere coepi itaque sic dissecando mihi obseruare contigit. Si circa renis succenturiati circumferentiam, ope styli tenuioris leuiter impulsi, perforatio instituitur, tum tactu iudice, interstitium aliquod vacuum occurrit, cui succedit postea difficultas vlterius penetrandi, quando stylus centrum versus dirigitur: contra si dextrorsum aut sinistrorsum conuertitur, nulla difficultas amplius obstare videtur. Illud iam interstitium, vt incidendo comperi, regione conuexa seu extrema renis, est excauatum, forma peculiaris canalis arcuati qui vt extrorsum cortice clauditur, sic opposita nempe interiore parte, per laminam aequalis latitudinis et longitudinis, coloris purpurascentis, verum cortice tenuiorem et molliorem, ad modum intersepti clausus, proptereaque canalis peculiaris, potius quam Venae ampliatae, structura praeditus est: Illud enim minus a Venae structura abhorret, quod eius interiora crebris minimarum venarum ramificationibus instructa sunt, quarum similes, in caeteris mox describendis maeandris seu caueis, a me pariter obseruatae sunt. Pone illam laminam, multiplices aliae laminae, et inter has distinctae cauitates eiusdem formae spectantur, quae iuxta plicas seu monti-

monticuli latus vtrumque positae sunt: quinimo hic circularis et paulo amplior cauitas spectatur, de qua vero iam Anatomicis constare supra indicatum est. Caeterum inter singulas caueas, ostia seu viae peculiares ex vna in aliam a Diuino Opifice constitutae sunt: quae ostia tam circa medium, quam circa extremum cauearum conspicua, fere earumdem diametro aequalia videntur. Nullae hic valuulae, verum duntaxat rugae leuiores intra istiusmodi ostia spectantur.

Vt nunc promissis vtcunque satisfaciam, quoniam incertum est quanta mora iconibus adhuc opus sit, ante omnia ego pollicitus eram certum inuentum, quod iure meritoque, vt pars essentialis historiae Renum succenturiatorum, agnoscendum est, videlicet, quod certa et peculiaria corpuscula, vtrique reni succenturiato interiecta, ac vt multiplici obseruatione, sic haud minore diligentia et studio a me explorata, de quibus mox verba faciam; quod inquam in C. H. ad renem succenturiatum dextrum sinistrumue, quem nunc proceriorem vel si mauis crassiorem appellabo, nonnulli sed minimi succenturiati a Diuino Opifice constituti sint, quos propterea Embryones vocabo. Cum praememoratis, et cum certis aliis partibus, iam olim summorum Virorum diligentia obseruatis et descriptis, ego comparationem institui posse, a primo conieci: Nam sic an. 1637. 2K. Ianuarii IOANNES VESLINGIVS *in cadauere foeminino, praeter communem naturae structuram, vt a Ioanne Rhodio narratur, publice praesentabat renem dextrum cui adnatus erat ren alter exilis*: et syntagm. Anat. paulo disertius. *Plures minoresque glandulas venis et arteriis suis instructas* turiatorum interdum aequali, interdum auctiore ternario enim numero vno latere semel inueni. Cum sede a Veslingio, Molinetto, et Bartholino, descripta et delineata, eo discrepant, quod haud infra vasa emulgentia, verum parte postica renis succenturiati, modo ad eiusdem limbum superiorem, modo circa medium, modo circa basin, tam dextro quam laeuo latere, naturalis sedes constituta fuerit. Mihi bis duntaxat in parte antica abdomen respiciente obseruasse contigit. Quae tametsi communi adiposa membrana renem succenturiatum inuestiente inclusa, et a primo nexus et communicationis haud expertia esse videantur, ego in duobus duntaxat cadaueribus nexum manifesto perspexi: quinimo, reni succenturiato sic accreta et agglutinata offendi, vt in continuam ambo concreuisse crediderim: Attamen in reliquis semper disiuncta esse animaduerti: quae omnia, haud secus quam fibrarum neruearum, et diuersi generis vasculorum circa eadem corpuscula concursus et connexiones vitro conspici possunt, quoties membranam adiposam soli expositam et digitis leuiter distractam diligentius perlustrare contingit.

Ex his quae hactenus dicta sunt, haud secus quam paruitate eorumdem corpusculorum, credi iam posset, longe a succenturiatis renibus ea discrepare, et rectius glandularum lymphaticarum nomine appellanda esse: Qui enim veri specie dici potest, a Diuino Opifice singulis hominibus quaternum et aliquando senarium numerum renum succenturiatorum tamque inaequalis magnitudinis, nempe alios ob paruitatem vix conspicuos tributos fuisse? quanto veri similius est illam molis disparitatem glan-

dulis

dulis peculiarem esse, vt Anatomicorum communis sententia est: quae dubitationes propterea in animum inducere possent, nomen renum succenturiatorum prae memoratis corpusculis falso impositum fuisse.

Quae quum ita sint, de nominis vera origine, quantum me measque obseruationes de interiore natura et constitutione attinet, sic habendum est. Extra inuestiente sed pellucida, ante omnia corpuscula liberare necesse est, quae tum spectata, cum substantia renum succenturiatorum, si duntaxat quantitatem seu molem demas, haud elegantius conuenire posse videntur, quando nempe tam particularum componentium, quam coloris et superficiei similitudo praeclare spectatur. Si eaedem particulae intus spectatae, vicissim conferantur, tum in complementum similitudinis, a Diuino Opifice verae capsulae hic constructae manifesto apparent. Nam vbi prior substantia intus terminatur, ei continuo, per vniuersam circumferentiam, paries peculiaris, seu substantia pulposa atro-purpurea superstructa est, cui cauitas succedit in nonnullis circularis, in aliis oblonga, liquore atro-purpurascente infecta, quae corpusculorum magnitudini proportionata est. Si praeterea adiicimus, corpuscula indissolubili nexu aliquando renibus succenturiatis agglutinata, et perfecte vnita esse, vt duplex exemplum perspicere mihi contigit, tum res tanto clarius constituitur: Sicque fateri cogimur, in C. H. a Diuino Opifice multiplices renes succenturiatos constitutos fuisse, nempe proceriores illos ab Eustachio, et reliquis Anatomicis hactenus descriptos: et minores, eorum haud absimiles, quos ego, quum a nemine, quantum scio, ante me peruulgati sint, prima

 nunc

nunc vice, vt diu pollicitus eram, ad historiae renum succenturiatorum complementum describere conatus fui. Haec omnia exhibentur sequenti diario, vbi obseruationes duntaxat solutiores annotaui.

Anno 1739 d. 9. Maii, in vxore D. Forret, ingenti tumore vtriusque ouarii laborante, circa renes succenturiatos sic obseruatum est. In transitu venae atrabilariae ad venam cavam, haud procul a rene succenturiato dextro eiusdemque margine superiore, exiguum corpusculum rotundum, plexui nerueo vicinum spectare contigit, structuram interiorem, cum rene succenturiato omni ex parte conueniens.

Nota 1. Eiusdem renis succenturiati margini inferiori, aliud superstructum erat haud absimile corpusculum instar appendicis.

Nota 2. Partem eiusdem renis succenturiati costas spectantem seu exteriorem, vidi cum interiore substantia veri renis non solum per peculiaria vasa sanguinea nexum habere, verum aliqua sui parte sic vnitam esse vt hi duo renes ex continua substantia formati viderentur.

A. 1739. d. 14. Maii, in masculino cadauere repente extincto, corpuscula haud absimilia, vtroque latere, vltro spectare contigit, vnum pisi magnitudine in dextro, in sinistro latere duplex, sed minus.

A. 1739 d. 11. Iunii, in cadauere viri laqueo interfecti, duplex corpusculum extrorsum positum erat, vnum seminis lini magnitudine et figura, alterum instar pisi rotundum. Sedes prioris in medio faciei anticae ad venae atrabilariae exortum, posterioris circa basin constituta erat.

A

A. 1739 d. 2. Iul. in duobus cadaueribus masculinis, sinistrorsum duo corpuscula exigua, miliaria, iuxta se inuicem posita spectare mihi contigit, in vno subiecto parte postica, apud alterum ad limbum superiorem sinistri renis succenturiati. Dextrorsum, vnum duntaxat sed minus, parte antica renis succenturiati dextri delitescebat.

Nota superficiem tam anteriorem quam posteriorem eiusdem renis succenturiati dextri, incredibilem copiam lymphaeductuum, vltro spectare contigit.

An. 1740 d. 18. Aprilis in Masculino cadauere, sub membrana adiposa renis succenturiati sinistri, corpusculum animaduerti minimum, granum sinapi aequans. Aliud corpusculum granum raphani aequans, parua abhinc distantia, eidem membranae adiposae agglutinatum conspexi.

Haud absimili corpusculo, ipsam superficiem anticam renis succenturiati sinistri obsessam fuisse, pariter animaduerti: quod corpusculum, peculiari et distincta cauitate praeditum erat.

Dextrorsum, ad renis succenturiati dextri extremitatem superiorem, corpusculum granum raphani adaequans obseruaui.

Nota 1. dissecando comperi singula corpuscula, sinu seu cauitate praedita, et sanguine intus tincta fuisse.

Nota 2. Renem succenturiatum copia sanguinis fluidi distentum, dextrum contra vacuum fuisse obseruaui.

Caeterum, donec diligentia, et labore aliorum, obseruationum nostrarum veritas cognita et omni ex parte confirmata fuerit, nunc certe periculosum esse crediderim, quidquam de renum succenturiatorum in C. H. vtilitatibus

litatibus

litatibus praepropere determinare velle; vt ea de re variae sententiae hactenus excogitatae, et in lucem editae fuerunt, quarum hae duae praecipuae sunt, nempe renes succenturiatos haud secus quam nonnullas partes in C. H. ad foetus peculiarem et priuatum vsum constructos fuisse, hos quae post partum, et toto vitae decursu decrescere et impotentes fieri. 2. Certo ductu excretorio renes succenturiatos praeditos esse. Fateor, inter foetuum et adultorum renes succenturiatos aliquam differentiam occurrere, verum, vt mihi nunc videtur, tam parua differentia est, si cum istius modi partibus quarum praecipuus vsus in foetu perspectus est, earumdemque structura conferamus, vt haud maiore iure, hic attendi posse videatur, quam istiusmodi discrimina, quae ante et postquam homo in lucem editus est, circa caeteras partes obseruantur. Praeterea iure meritoque res hic adnotanda est, quam in supramemoratis peruestigationibus circa multiplices renis succenturiatos animaduertisse mihi contigit, nempe maiores et minores renes succenturiatos inter se minime conuenire, et quidem iuxta supramemoratam doctrinam deberent: Maiores enim qui ante partum tumidiores obseruantur, nunc vt placenta similes depressiores et irregulari figura apud adultos sunt praediti: In minoribus contra nullum decrementum perspicere potui, sed aequales et inuariabiles permansisse mihi visi sunt. Quae cum ita sint, certi vel illa impotentia renum succenturiatorum post partum imaginaria est, vel maiores dumtaxat renes impotentes fieri, minores contra toto vitae decursu vi et facultate actionem exercendi praeditos esse prodendum est:. quam doctrinam profecto in animum arum inducere perdifficile est. Et hic fere de posterioris sententiae veritate, nempe de renum succenturiatorum certo ductu excretorio, vt nonnulli existimant, nostrae obseruationes nos dubitare cogunt, si sequentia attentius ad animum revocantur, nempe eorumdem peculiaris structura, numerus, varia magnitudo, incerta figura, quinimo situs inconstantia inter maiores et minores, quos semel coniunctos vidi, intercedit. Igitur exspectandum est, quidnam animaduersione dignum, post illas obseruationes, tam circa minores renes succenturiatos a me descriptos, quam circa maiores occurrere poterit.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE INSTITVTAE PETROPOLI An. 1741.

Auctore

G. W. Krafft.

§. 1.

Durante hoc anno 1741 obseruatae fuerunt a me altitudines Barometri simplicis, et hucusque ad hos vsus vocati, singulis mensibus maximae et minimae, sequentes, in quibus, vti hucusque solitus sum, numeris ante punctum positis denoto partes duodecimales, siue pollices, pedis Londinensis: numeris autem post punctum positis designo horum pollicum partes centesimas.

		maxima.	minima.	diff.
1741.	Ianuarius	30. 37	28. 87	1. 50
	Februarius	30. 48	29. 30	1. 18
	Martius	30. 59	29. 32	1. 27
	Aprilis	29. 93	28. 99	0. 94
	Maius	30. 12	29 25	0. 87
	Iunius	30. 04	29. 17	0. 87
	Iulius	30. 08	29. 23	0. 85
	Augustus	30. 25	29. 44	0. 81
	September	30. 20	29. 98	1. 22
	October	30. 60	29. 12	1. 48
	Nouember	30. 10	28 63	1. 47
	December	30. 73	28. 64	2 09

§. 2.

§. 7. Apparet ex his altitudinibus Barometri, earum maximam hoc anno fuisse 30. 73, quae obseruata fuit die 5. Decembris, circa meridiem, in serenitate perfecta illius solius diei inter praecedentem et insequentem, spirante nullo vento sensibili, sed frigore regnante praeduro, ad 12. gradus nempe infra o Thermometri Fahrenheitiani. Quia autem haec altitudo maxima illam, quae anno 1737 obseruata fuit 30. 95., non excedit: haec etiamnum manet omnium hic loci obseruatarum maxima. Minima Barometri altitudo hoc anno fuit 28. 63, quae obseruata fuit die 30. Nouembris, tempore nubilo, cadente modica niue, flante forti Borea-Zephiro, et frigore mediocritatem tenente. Quae igitur minima altitudo huius anni, cum inuentam in praecedentibus annis, 28. 18, superet: manet adhuc idem spatium variationum Barometricarum antea stabilitum, nimirum 2. 77. Suntque etiam adhuc variationes menstruae in primis et vltimis anni mensibus maiores, minores autem mediis.

§. 8. Auroras Boreales hoc anno obseruaui sequentes:

1741.	Ianuarii	10.	Lux Borea, multis virgis pallidis, verticem vsque ascendentibus, atque etiam arcu lucido, conspicua, durans vsque ad horam sextam matutinam diei sequentis.
		15.	Lux Borea irregularis, haud diu durans.
		16.	Lux Borea debilis.
	Februari	3.	Lux Borea ordinaria.
		4.	Lux Borea nubeculis permixta.
		5.	Lux Borea humilis et quieta.

	23.	Lux Borea nubibus permixta.
Martii	1.	Lux Borea alta et tranquilla.
	26.	Lux Borea tranquilla.
Aprilis	1.	Vestigia Lucis Boreae distincta.
	5.	Lux Borea sine arcu, ex variis nubeculis lucidis, agitatis, constans
	7.	Lux Borea humilis et quieta.
Augusti	29.	Lux Borea multis virgis, in latus et sursum motis, conspicua, abiens tandem in arcum amplum, subobscurum.
	30.	Lux Borea similis hesternae.
Septembris	4.	Lux Borea tranquilla.
	7.	Lux Borea inter nubes.
	8.	Lux Borea debilis.
	28.	Lux Borea radiis copiosis, vsque ad verticem extensis, ludens.
	29.	Lux Borea humilis, quieta.
Octombris	1.	Lux Borea nubibus permixta.
	17.	Lux Borea priori similis.
Nouembris	1.	Lux Borea inter nubes conspicua.
	3.	Lux Borea tranquilla.
	23.	Lux Borea humilis et tranquilla.
	27.	Lux Borea priori similis.
Decembris	10.	Lux Borea variis coloribus picta.
	23.	Lux Borea tranquilla.

Quibus addo, die 16. Februarii apparuisse in coelo, caetera maxime sereno, nubes tenues, albicantes, et fere in speciem Lucis Boreae formatas, sine radiis tamen assurgentibus, et omni motu destitutas.

§. 4.

§. 4. Prima congelatio facta est hoc anno die 16. Septembris, eaque vniuersalis, et durans ad horam 9am matutinam vsque, quo die serenitas perfecta erat.

§. 5. Maximum frigus huius anni incidit in diem 28 Decembris, quo in serenitate perfecta, hora 8ua matutina Thermometrum Fahrenheitianum descendit ad 16. gradus infra 0, spirante leni Borea, et Instrumento locato in aëre libero, prope parietem aedium mearum. Frigus paeterea paullo minus acre experti sumus hoc anno diebus Ianuarii 1. 2. 3. 8. 9. 16. 17. 23. 24. 29. Februarii 18. 19. 20. Nouembris 25. Decembris 5. 23. 24. 25. 26. 27. 29. 30. 31. qui omnes dies Thermometrum modo dictum ad minimum in gradu 0 depressum tenuerunt. Nocte inter 18. et 19. Februarii intercedente ad minimum singulis horae quadrantibus vnum ipse audiui sonitum trabium, aedibus caetera lapideis, instructarum a frigore crepantium, ad modum sclopeti explosi. Mense etiam Augusto, eiusque die 21. glacies satis densa ab hortulanis fide dignis obseruata fuit, summo mane. Calorem aestati debitum non sensimus nisi post 18. Iunii; et eiusdem mensis die 21 Thermometrum Fahrenheitianum libero soli expositum hora 3 post meridiem ostendit gradus 100, quandoque etiam 103; sole vero paullum nubibus obtecto statim per 5 aut plures gradus descendit.

§. 6. Vt autem gradus frigoris atque caloris aëris liberi per totum annum hunc eo melius patescant, adscribam eos, quales obseruaui in Thermometro a Cl. *De-lisle* hic loci introducto. Dabant gitur menses huius anni.

		maximum	Frigus	minimum	diff.
1741.	Ianuarius	182. 0		148. 8	33. 2
	Februarius	187. 0		146. 6	40. 4
	Martius	169. 5		143. 0	26. 5
	Aprilis	156. 0		127. 5	28. 5
	Maius	145. 0		115. 0	30. 0
	Iunius	138. 0		112. 5	25. 5
	Iulius	134. 0		113. 5	20. 5
	Augustus	136. 0		122. 0	14. 0
	September	155. 0		112. 0	43. 0
	October	154. 0		134. 5	19. 5
	Nouember	177. 3		141. 0	36. 3
	December	188. 9		151. 3	37. 6

Quae interualla menstrua caloris et frigoris, mensibus hybernis maiora, aestiuis autem minora, an constitutioni valetudinis hominum aliquid tribuant, morbisque epidemicis excitandis modo magis, modo minus, faueant: Medicorum cura et Obseruationibus non indignum puto

§. 7. Tonitrua hoc anno audita fuerunt Maii 6. 14. 25. Iunii 11. Iulii 16. 23. Accedunt his fulgura frequentissima, sine tonitru, testibus fide dignis visa d. 31. Decembris, circa horam 11. nocturnam.

§. 8. Qua ratione quantitatem pluuiae et niuium obseruauerim exposui in *Obseruationibus Meteorologicis an.* 1740. §. 7. Cum vero mense Septembri huius anni forma aedium mearum mutata fuisset, ita vt negotio huic inseruire amplius plane non posset: recepit in se hanc operam Cl. Professor *Richmannus*, commodiores huic instituto aedes inhabitans. Quia vero, vti l. c. indicaui, cylindri, ad mensuras has adhibiti, 21 requirebantur, vt alti-

altitudo pluuiae in vase a me adhibito, cuius quodlibet latus 19. pollicum, assurgeret ad vnum pollicem: et vero Cl. *Richmannus* adhibuit Hyetometrum ligneum, in quo calix habet superne aream quadratam, cuius latus 2 pedum Lond. vel 24, poll. patet, instituto calculo, requiri ad hunc calicem quam proxime $33\frac{1}{3}$. eiusmodi cylindros, vt altitudo puuiae in hoc calice ad altitudinem vnius pollicis excrescat. Igitur hac ratione Obseruationes hoc Hyetometro factas reduxi ad pollices altitudinum pluuiae, et eorum partes centesimas. Erat itaque altitudo pluuiae, et niuis liquefactae, in pollicibus duodecimalibus, et eorum partibus centesimis pedis Londinensis, sequens:

1741.	Ianuarius	0. 95
	Februarius	0. 37
	Martius	0. 22
	Aprilis	0. 93
	Maius	0. 83
	Iunius	1. 13
	Iulius	1. 27
	Augustus	0. 75
	September	2. 76
	October	1. 37
	Nouember	3. 01
	December	0. 88
	Summa	14. 47

Ventos vehementes experti sumus hoc anno diebus sequentibus. Ianuarii 11. 12. 13. 21. 26. 28. 29. Februarii 15. 17. 24. 25. 26. 27. Martii 7. 10. 14. 15. 16. 21. 22. 23. 24. Aprilis 5. 12. 19. 20. 22.

27. Maii 6. 8. 9. 12. 15. 29. 30. 31. Iunii 1. 14. 18. 23. 27. Iulii 1. 4. 20. 25. 27. Augusti 8. 13. Septembris 6. 10. 14. 24. 27. 28. Octobris 2. 3. 16. Nouembris 1. 2. 6. 11. 15. 16. 19. 21. 26. 27. 30. Decembris 1. 2. 26. 30. Inter hos procellae fuerunt furentes diebus Ianuarii 12, circa horam 2. p. m. subito exsurgens. Februarii 26. Martii 15. 16. 21. 22. 23. 24. Aprilis 20. 22. Maii 9. 15. vno quasi ictu circa horam 11. a. m. excitata. Octobris 3 Nouembris 26. 27. 30. Decembris 1. Quarum ea, quae fuerit Martii 24. ita vehemens erat, vt asserculum in Anemometro descripto inter *Obseruationes Meteorologicas ab an.* 1726 *vsque in finem anni* 1736. *factas* Praelect. 11. §. 10. saepius eleuaret ad gradus 75; vnde in minuti secundi tempore absoluit pedes Rhenanos 109 $\frac{7}{10}$.

§. 10. Grandines experti sumus Aprilis die 20, hora $5\frac{1}{2}$ p. m spirante fortissimo Austro-Euro; Maii 6, flante iterum forti Austro-Euro. Iunii 1, flante vehementi Austro-Zephyro, qui vix horae spatio spirare ante ceperat. Nouembris 12, sine vento sensibili.

§. 11. Hoc eodem anno etiam summa diligentia in id incubui, vt obtinerem exactam Declinationem acus magneticae. Sequenti igitur consilio rem hanc sum aggressus. Obtinuit Academia a praeclarissimo Artifice *Dietrico Metz*. Amstelodamensi, exactissime et penitus elaboratum ~~tale Instrumentum~~, quale Cel. *Petrus van Musschenbroek* inuenit, et descripsit in *Dissertationis Physicae Experimentalis de Magnete*. Experimento 109 pag. 233. in quo acus magnetica arcubus orichalceis, plane vti in l. c. praecipitur, donata, longitudinem tenet 6. pollicum

cum Londinens. Hac machina Declinatoria impetrata curaui erigi stylobatam lapideum, extructum non e lateribus, quoniam hi a suspicione ferri non sunt liberi, sed e lapidibus maioribus campestribus, caemento inter se coagmentatis, nullo plane interueniente ferro, qui stylobata, altitudinis circiter 4. pedum, obtectus est marmorea tabula alba, politissima, et horizontali. Exstructa est haec basis lapidea prope aedes Academicas, ad distantiam ab his 76 pedum, in campo ibidem satis patente, ita vt prorsus nulla suspicio ferri alicuius in hunc locum agentis superesse possit. Igitur in superficie tabulae marmoreae duxi primo lineam meridianam, quam deinde ex Obseruationibus Astronomicis Meridiei in Obseruatorio Imperiali, huic stylobatae vicino, factis, adiuante hoc institutum Cl. Domino Prof. *Heinsio* nostro, aliquot dierum obseruationibus correxi, atque sic tandem conclusi, hanc meam meridianam a vera aberrare angulo 3′ 59″ a septentrione Ortum versus, cum meridiem 12″ temporis tardius iusto indicaret. Est igitur error meae meridianae subtractiuus 3′ 59″. His ita praeparatis accessi Aprilis 13 et pluribus insequentibus diebus ad stylobatam, ita vt quicquid ferrei, etiam minutissimi, apud me tenebam, id omne antea solicite seposuerim; atque sic, applicando aciem Instrumenti ad lineam meridianam stylobatae, inueni Declinationem apparentem acus magneticae exactissime 4° 0′ 0″. Occasum versus, cui si applicetur correctio subtractiua modo indicata, exoritur Declinatio acus magneticae vera 3° 56′ 1″. Occasum versus.

DE DENSITATE MIXTORVM EX METALLIS ET SEMIMETALLIS FACTORVM.

Auctore

C. E. Gellert.

§. 1.

Institutis experimentis circa densitatem duorum metallorum inter se commixtorum, de quibus videatur Cl. Domini Krafftii dissertatio, insuper metallis semimetalla admiscui et mixtorum quaedam phaenomena praeprimis densitatem obseruaui; quae experimenta recensere, phaenomena annotare et si potero explicare conabor.

§, 2. Metallis et semimetallis vtcunque puris vsus sum, operationes, quantum pro meo apparatu suppellectilique chymica fieri potuit, accurate institui; quasdam, quo me certiorem redderem reiteraui; ad vnamquamque operationem noua mundaque vasa adhibui et sollicite curaui ne quid peregrini mixtum ingrederetur; commixtionem mechanicam, vbi licuit, haud neglexi; cum colliquarem metalla difficulter fluentia cum semimetallis, superaddidi aliquid tartari et vitri communis ad nimium dispendium euitandum. Ponderationem hydrostaticam ad densitates detegendas, Cl. Krafftius, vt pote cuius curae instrumenta physica commissa sunt, benigne in se suscepit et pro more suo accuratissime confecit, quam beneuolentiam et reliqua in me collata beneficia omni qua par est obseruantia animi, reuerentia grataque mente semper agnoscam.

§. 3.

§. 3. Mixtorum denſitatem methodo conſueta examinaui et cum ea quam deberent ſecundum calculum habere comparaui; quam methodum hic apponere haud abſonum erit.

Denſitas corporis definitur, quod ſit materiae quantitas in corpore conſiderata cum relatione ad volumen corporis. Si itaque denſitatem corporis denotamus per D, quantitatem materiae per M, volumen corporis per V, erit $D = \frac{M}{V}$. Notum eſt pondera a corporibus in eodem fluido amiſſa eſſe in ratione voluminum; ſubſtituitur ergo ipſi V, pondus in eodem fluido amiſſum quod denotetur per p. Grauitas corporis ſpecifica eſt grauitas corporis conſiderata cum relatione ad volumen. Cum vero grauitates ſpecificae et denſitates corporum in corporibus homogeneis ſint in eadem ratione, ipſi M poteſt ſubſtitui grauitas corporis ſiue pondus abſolutum quod indigitemus per P. Poſſumus itaque hanc formulam $D = \frac{P}{p}$ ſubſtituere priori $D, = \frac{M}{V}$.

Ex definitione denſitatis patet, ſi alterius mixtum ingredientis quantitas materiae ſit M, volumen V, alterius quantitas materiae m, volumen v; denſitatem mixti debere eſſe $\frac{M+m}{V+v}$. Si itaque alterius ingredientis pondus abſolutum ſit P, alterius Q, alterius, pondus in eodem fluido amiſſum p, alterius q, denſitas erit $\frac{P+Q}{p+q}$.

Haec cum ita ſint, inquirendum eſt in pondera abſoluta tum mixtorum cum ingredientium, quae debent diuidi ſecundum has formulas per ſua pondera in eodem fluido amiſſa, prodibunt denſitates et experientia et computo repertae.

§. 4.

§. 4. Saepius omnium metallorum solo igne fusorum pars aut sub fumi aut florum specie dissipatur, aut in scorias conuertitur, auro et argento exceptis. Hinc huius dispendii in densitate ex calculo quaerenda, ratio est habenda; quod equidem satis accurate fieri potest in iis mixtis, quorum alterum ingrediens est aurum siue argentum: nam tunc quod perit iure a semimetallo altero ingredienti subtrahitur. In reliquis autem mixtis vbi vtraque ingredientia igne aliquid amittunt, non certo definiri potest quantum vnius cuiusque fuerit dispendium; hanc ob causam nec densitas computo accurate potest erui. Hoc autem nobis relinquitur, quod vt plurimum stabilire possumus aliquod mixtum rarius siue densius neglecta quantitate esse factum quam calculus exposcit; in quem finem inueni et adhibui duplicem methodum. Prima quae raro vsu venit haec est: si mixti densitas deprehenditur maior, quam densitas ingredientis densioris, mixtum densius est factum; si vero mixti densitas minor est quam ingredientis rarioris, mixtum rarius est quam calculus requirit. Secunda, quae vtplurimum locum habet his consistit. Sit rarioris ingredientis densitas $\frac{P}{p}$ densioris $\frac{Q}{q}$ dispendium mixti a. Sit dispendium a adscribendum ingredienti rariori erit eius pondus absolutum $P-a$ et pondus in aqua amissum $p-y$ hinc densitas mixti $\frac{P+Q-a}{p+q-y}$. Sit dispendium a adscribendum ingredienti densiori erit pondus huius absolutum $Q-a$ et pondus in aqua amissum $q-x$, hinc tunc densitas $\frac{P+Q-a}{p+q-x}$. Idem pondus corporis rarius plus sui ponderis in aqua amittit, quam corporis densioris ideo $y > x$ et $p+q-x, >$

$p+q$

$p + q - y$ et $\frac{P + Q + a}{p + q - x} < \frac{P + Q - a}{p + q - y}$. Hanc ob caussam, si dispendium deducitur ab ingredienti rariori et densitas secundum calculum minor est, quam experientia reperta mixtum densius est factum, si vero dispendium aufertur ab ingredienti densiori et densitas ex computo maior reperitur, quam densitas experimento obseruata, mixtum rarius est factum.

Experimentum I.

Auri grana $196\frac{3}{4}$ per fusionem miscui cum $289\frac{1}{2}$ gr. Bismuthi. Inquisiui in pondus mixti admodum fragilis coloris ex albo coerulescentis; quod reperi duobus granis minutum. ☉ et ♁

Pars huius mixti 487. gr. amittebat in aqua 41. gr. hinc densitas $\frac{487}{41} = 11, 73$.

Auri $196\frac{3}{4}$ gr. amittebant in aqua $12\frac{1}{4}$ gr. et Bismuthi grana $289\frac{1}{2}$ amittebant 30 gr. Esset itaque ex computo densitas mixti $\frac{196\frac{3}{4} + 289\frac{1}{2}}{12\frac{1}{4} + 30} = 11, 51$. §. 3. si nullum dispendium obseruassem sed etsi istud decrementum duorum granorum, quod Bismutho attribuendum, ad calculum reuocare velles, nulla certe sensibilis orietur differentia. Videmus itaque hoc mixtum maioris esse densitatis nempe 11, 73 quam calculus ostendit vtpote 11, 51.

Experientia II.

Colliquaui 73 gr. Auri cum $96\frac{1}{4}$ gr. Zinci. Dispendium erat $29\frac{3}{4}$. gr. Mixti admodum fragilis coloris dilute grysei quasi semimetallici grana 139 amittebant in ☉ et Z titatem Zinci: mixto effuso combusta erant 202. gr. Mixtum fragile coloris aurei quadam tenacitate erat praeditum.

Pars huius mixti 915. gr. amittebat in aqua 119. gr. hinc densitas $\frac{915}{119} = 7,69$.

Analogice concludere licet et hoc mixtum densius esse factum, quam calculus indicat, aliud etenim mixtum eorundem ingredientum feci, quod densius erat quam ipsum Cuprum, nempe illius densitas erat 8, 78. Cupri 8, 74.

Experimentum VII.

♀ et B Colliquaui Cupri grana 686. cum $898\frac{1}{2}$ gr. Bismuthi. Ignis rapuerat 23. gr.

Mixtum fragile coloris ex rubicundo albescentis texturam Bismuthi tessulatam prodebat.

Pars mixti $514\frac{3}{4}$ gr. amittebat in aqua $55\frac{3}{4}$ gr. inde densitas $\frac{514\frac{3}{4}}{55\frac{3}{4}} = 9,23$. Ponamus nihil de esse densitas erit $\frac{686 + 898\frac{1}{2}}{78\frac{1}{2} + 93\frac{1}{2}} = 9,21$.

Si dispendium subtrahimus a Bismuthio densitas esset $\frac{686 + 875\frac{1}{2}}{78\frac{1}{2} + 91} = 9,215$. Si vero ista 23 grana auferuntur a Cupro haec prodit densitas, $\frac{663 + 898\frac{1}{2}}{75\frac{1}{2} + 93\frac{1}{2}} = 9,32$. Patet itaque hoc mixtum non maiorem densitatem habere quam calculus requirit, sed hanc potius satis accurate cum calculo conuenire.

Expe-

Experimentum VIII.

Liquefeci Cupri grana 314. cum 464. granis Reguli Antimonii. Mixtum consistentiae admodum fragilis, coloris ex rubicundo coerulei vi ignis $43\frac{1}{2}$ gr. deperdiderat. ♀ et Reg. ♀ii.

Pars mixti $699\frac{1}{2}$ gr. amittebat in aqua $87\frac{1}{4}$ gr. hinc densitas $\frac{699\frac{1}{2}}{87\frac{1}{4}} = 8,02$.

Ponamus $43\frac{1}{2}$ gr. ingredientis rarioris nempe Reguli Antimonii combusta esse, licet et ignis valide in Cuprum agat densitas esse $\frac{314 + 420\frac{1}{2}}{36 + 62} = 7,49$. §. 3. Hoc mixtum itaque densius est factum. §. 4.

Experimentum IX.

Inter se confudi 684. gr. Zinci et 741. gr. Stanni. Dispendium erat 9. gr. ♃ et Z.

Mixtum coloris ex albo obscurioris nigricantis erat paulo minus malleabile quam ipsum stannum. Pars mixti 1008. gr. amittebat in aqua 143. gr. hinc densitas $\frac{1008}{143} = 7,05$.

Ponamus dispendium 9. gr. Stanno vt pote ingredienti densiori esse attribuendum densitas esset secundum calculum $\frac{732}{100} + \frac{684}{100} = 7,08$. Hoc mixtum itaque rarius est factum §. 4.

Experimentum X.

Miscui $838\frac{1}{2}$ gr. Stanni granis 723 Bismuthi. Nullum dispendium obseruare potui. ♃ et B.

Mixtum erat admodum fragile, superficies externa flavescente interna medio inter Bismuthum et Stannum colore tincta. Textura Bismuthi tessulata apparebat.

Pars mixti 966 gr. amittebat in aqua 116 gr. hinc densitas $\frac{966}{116} = 8,32$, quae secundum calculum fuisset $\frac{838\frac{1}{2} + 723}{114\frac{1}{2} + 75} = 8,24$, ideo mixtum paulo densius est repertum, quam calculus indigitabat. §. 4.

Experimentum XI.

♃ et Reg. ♁ii Commiscui Stanni $231\frac{3}{4}$ gr. et Reguli Antimonii $231\frac{3}{4}$ gr. Iacturam habui 77. gr.

Mixtum coloris albi regulini erat admodum fragile. Pars mixti $374\frac{1}{2}$ gr. amittebat in aqua 54. gr. hinc densitas $\frac{374\frac{1}{2}}{54} = 6,94$.

Auferatur iactura 77. gr. a Stanno ingredienti densiori densitas esset $\frac{154\frac{3}{4} + 231\frac{3}{4}}{21 + 34\frac{1}{4}} = 7,00$. quae, cum maior est quam experimento detecta, ostendit hoc mixtum rarius esse factum. §. 4.

Eperimenrum XII.

♃ et ♄. Colliquaui Zinci $405\frac{3}{4}$ gr. et $415\frac{1}{2}$ gr. Plumbi. Dispendium erat 48. gr.

Massa effusa primo intuitu homogenea quidem apparebat, sed curatius considerata duo quasi strata arcte inter se cohaerentia sistebat, plumbum nempe lege Hydrostaticae locum inferiorem, Zincum superiorem sibi vindicabat, ita vt facile a se inuicem distingui possent, oculo, cultro, malleo.

Experimentum omni cura reiteratum, iugi adhibita circumactione, eadem praebebat phaenomena, praeter quod densitas paulo maior nempe $\frac{353}{36} = 9,81$, et color Plumbi dilutior obseruabatur. Prioris etenim mixti densitas erat [illegible] $= 9,02$.

Ponatur dispendium ab ingredienti rariori prouenire, densitas esset $\frac{357 + 415\frac{1}{2}}{53\frac{1}{4} + 36\frac{1}{2}} = 8,70$.

Videmus itaque difficulter equidem nec in magna quantitate sed intime Zincum se Plumbo commiscere et mixtum densius esse factum. §. 4.

Experimentum XIII.

Confudi Plumbi grana $352\frac{1}{2}$ cum totidem granis Bismuthi. Iactura erat 48. gr.

Mixtum cultro abrasum erat coloris albi splendentis; fractum obscurioris nigricantis, texturae Bismuthi. Dum frangebatur tenax imo quodammodo ductile erat.

Pars mixti $652\frac{3}{4}$ gr. amittebat in aqua $60\frac{3}{4}$ gr. hinc densitas erat $\frac{652\frac{3}{4}}{60\frac{3}{4}} = 10,74$. Si dispenpium subducitur a Bismutho ingredienti rariori, licet ignis et plumbi partem destruat, habemus hanc densitatem $\frac{304\frac{1}{2} + 352\frac{1}{2}}{34 + 32} = 9,95$. Mixtum ideo densius est repertum. §. 4.

Expe

Experimentum XIV.

♄ et Reg ♁ Colliquaui Plumbi grana $386\frac{1}{2}$ et Reguli Antimonii 333. Operatione peracta deerant $101\frac{1}{2}$ gr.

Mixtum fragile dum frangebatur nitidam quasi granulatam intus superficiem exhibebat coloris obscurioris regulini.

Pars huius mixti $536\frac{1}{4}$ gr. amittebat in aqua $58\frac{1}{2}$ gr. ideo densitas $\frac{536\frac{1}{4}}{58\frac{1}{2}} = 9,17$. Si iactura aufertur ab ingredienti rariori Regulo Antimonii densitas esset $\frac{386\frac{1}{2} + 231\frac{1}{2}}{33\frac{3}{4} + 34} = 9,12$. Mixtum itaque densius est facto. §. 4.

Experimentum XV.

♂ et Z. Limaturae Ferri $115\frac{1}{2}$ gr. commiscui cum 231 gr. Zinci. Perierant 97 grana.

Mixtum fragile vbi fractum erat colorem fere plumbaginis referabat et a Magnete attrahebatur.

Pars $117\frac{3}{4}$ gr. amittebat in aqua 17 gr. hinc densitas $\frac{117\frac{3}{4}}{17} = 6,926$. Ponamus 97 gr. ingredientis densioris Ferri combusta fuisse, mixti densitas ex computo esset $\frac{18\frac{1}{2} + 231}{2\frac{1}{4} + 33\frac{3}{4}} = 6,931$. Quoniam itaque haec densitas paulo maior est, quam experimento detecta et certi sumus Zincum facilius comburi quam Ferrum, affirmare possumus, hoc mixtum rarius esse, quam calculus requirit. §. 4.

Ex-

Experimentum XVI.

Colliquaui limaturae Ferri $115\frac{1}{2}$ gr. et Bismuthi 231 gr. iacturam habui 87. gr. ♂ et ♁

Mixti fragilis color prodebat Bismuthum eiusque partes a Magnete attrahebantur.

Frustum $122\frac{1}{2}$ gr. amittebat in aqua $15\frac{1}{2}$ gr. hinc densitas erat $\frac{122\frac{1}{2}}{15\frac{1}{2}} = 7,90$. Subtrahamus a Bismutho vtpote ingridienti densiori iacturam 87 gr. esset densitas secundum calculum $\frac{144 + 115\frac{1}{2}}{15 + 14\frac{3}{4}} = 8,72$. Cum itaque haec illam superat, hoc mixtum rarius est factum. §. 4.

Experimentum XVII.

Limaturae Ferri $115\frac{1}{2}$ gr. et Reguli Antimonii 173 gr. vniui per fusionem. Combusta erant 63 gr. ♂ et Reg. ♁ii.

Mixtum fragile coloris cinerei, maculis rubiginosis.

Pars mixti 204 gr amittebat in aqua $29\frac{1}{2}$ gr. ideo densitas erat $\frac{204}{29\frac{1}{2}} = 6,92$.

Dispendium 63 gr. si subtrahamus ab ingredienti densiori Ferro, densitas ex computo erit $\frac{52\frac{1}{2} + 173}{6\frac{1}{2} + 25\frac{1}{2}} =$ 7,05. Hanc ob causam mixtum experientia rarius est repertum, quam calculus ponit.

Admodum generosus Magnes ne scobem quidem attrahebat, praeter vnam alteramue particulam minimam, quae mihi ferrum adhuc esse videbatur.

Experimentum XVIII.

Z et B Confudi Zinci gr. $362\frac{1}{4}$ et eandem quantitatem Bismuthi. Desideraui 11 gr.

Haec duo Semimetalla sese non commiscuerant, sed massa effusa speciem duorum stratorum arcte inter se cohaerentium referebat, quorum inferius Bismuthum vt pote ingrediens densius, superius Zincum erat.

Frustum horum stratorum ponderis 379 gr. amittebat in aqua 49 gr. hinc densitas $\frac{379}{49} = 7,73$, quae dispendio neglecto fuisset $\frac{362\frac{1}{4} + 362\frac{1}{4}}{52\frac{3}{4} + 37\frac{1}{2}} = 8,03$. Haec itaque subtracto dispendio et attentione in quasdam cauitates, quas aqua penetrare haud potuit, facta, cum illa conuenire dici potest.

Experimentum XIX.

Z et Reg. δii. Colliquaui Zinci gr. 319. et tot grana Reguli Antimonii, dispendium fuit 102. gr.

Massa fragilis bene permixta, homogenea, vbi fracta, erat coloris ex albo cinerei, in superficie externa multicolor.

Pars huius mixti $210\frac{3}{4}$ gr. amittebat in aqua $32\frac{3}{4}$ gr. hinc densitas $\frac{210\frac{3}{4}}{32\frac{3}{4}} = 6,43$, quae cum minor sit quam ingredientis rarioris, ostendit hoc mixtum rarius esse factum. §. 4. Reguli etenim Antimonii vt pote ingredientis rarioris densitas erat 6,77.

Ex-

Experimentum XX.

Confudi tum Bismuthi cum Reguli Antimonii grana 198. iactura erat 19. gr. ♆ et Reg. ♁ii.

Mixtum admodum fragile structuram tessulatam et colorem sed paulo dilutiorem Bismuthi referebat. Pars mixti $342\frac{3}{4}$ gr amittebat in aqua $42\frac{1}{2}$ ideo densitas $\frac{342\frac{3}{4}}{52\frac{1}{2}} = 8,96$. Ponamus 19 gr. ingredientis densioris Bismuthi combusta esse mixti densitas deberet esse $\frac{179 + 198}{18\frac{1}{2} + 29} = 7,94$. Hoc mixtum itaque densius est factum. §. 4.

Experimentum XXI.

Mixtum Argenti et Mercurii feci conterendo digerendoque, quod Amalgama vocatur. Mercurio superfluo per alutam expresso Amalgama in mercurio fundum petebat. Hinc inferebam hoc mixtum densius esse factum §. 4. ☾ et ☿.

Ne autem dubium esset, quin hoc phaenomenon ab alia quacunque causa proueniret, indidi in langenulam vitream Amalgama et affudi circiter tertiam partem Mercurii, lagenula obturamento laeuigato accuratissime clausa deprehendi pondus Amalgamatis vna cum Mercurio esse 1367. granorum, cum Mercurius solus in eadem lagegenula ponderatus tantum esset $1355\frac{1}{2}$ gr. Aqua pura in eodem vasculo pendebat 96 gr. Scimus densitates corporum eiusdem voluminis esse vti pondera absoluta §. 3. Posita itaque densitate aquae 1,00 densitas mixti est $\frac{1367}{96} = 14,24$. Mercurii solius $\frac{1355\frac{1}{2}}{96} = 14,15$. Cum in-

 super

ſuper tertia pars Mercurii Amalgamati fuerit addita, videre eſt Amalgama haud parum denſius eſſe factum.

Quod hanc penſionem attinet, moneo, me illam ſatis accurate perficere potuiſſe, repetita etenim penſione vnius eiusdemque corporis, ne illius quidem grani deſcrimen obſeruare potui.

§. 5. Recenſitis experimentis tabulam ſubſequentem ſubiiciam, quo quaſi vno obtutu videre liceat, quaenam mixta per haſce obſeruationes denſiora quaeue rariora reperta fuerint, quam calculus expoſcit.

Mixtum		Auri et Biſmuthi, factum eſt	denſius.
—	—	Auri et Zinci — — — —	denſius.
—	—	Argenti et Biſmuthi — — —	denſius.
—	—	Argenti et Zinci — — —	denſius.
—	—	Argenti et Reguli Antimonii —	denſius.
—	—	Cupri et Zinci — — —	denſius.
—	—	Cupri et Biſmuthi ferme cum calculo	conuenit.
—	—	Cupri et Reg. Antimonii — —	denſius.
—	—	Stanni et Zinci — — —	rarius.
—	—	Stanni et Biſmuthi — — —	paulo denſius.
—	—	Stanni et Reg. Antimonii — —	rarius.
—	—	Plumbi et Zinci — — —	denſius.
—	—	Plumbi et Biſmuthi — — —	denſius.
—	—	Plumbi et Reg. Antimonii —	denſius.
—	—	Ferri et Zinci — — —	rarius.
—	—	Ferri et Biſmuthi — — —	rarius.
—	—	Ferri et Reg. Antimonii —	rarius.
		Zincum et Biſmuthum commixtionem	reſpuebant.
—	—	Zinci et Reg. Antimonii —	rarius.

— — Bismuthi et Reg. Antimonii — densius.
— — Argenti et Mercurii — — densius.

§. 6. Ex hac tabula perspicuum est,

1.) Mixtum Cupri et Bismuthi densitatem calculo conuenientem habere.

2.) Mixta Ferri et Zinci, Ferri et Bismuthi, Ferri et Reg. Antimonii, Stanni et Zinci, Stanni et Reg. Antimonii, Zinci et Reg. Antimonii rariora esse facta.

3.) Reliqua, quae maiorem numerum constituunt, densitatem calculo erutam superare.

§. 7. Si explicationem horum Phaenomenorum aggredi audeamus considerandum est,

1.) Quidnam fieri debeat, vt mixta aut rariora aut densiora euadant, aut densitatem cum calculo conuenientem retineant.

2.) Quaenam sit caussa huius mutationis.

Mixta Metallorum et Semimetallorum tunc fieri densiora si partes vnius intrant poros alterius, et rariora si partes distendunt poros alterius, denique retinere densitatem cum calculo conuenientem si partes vtriusque sibimet inuicem quasi apponuntur, a veritate non abhorrere puto: Quare autem haec ita fiant altioris est indaginis. Mihi videtur hanc mutationem prouenire a structura, quantitate, attractione et repulsione partium constituentium. Structuram et quantitatem considerandam esse colligo ex Exp. 9. 11. 15. 16. 17. Nam notum est Ferrum et Stannum multa scatere terra, a qua pars inflammabilis igne facile diuelli potest, quo facto tales partes terrae, loco figurae sphaericae, quam antea in fluxu habebant, aliam

 quam-

quamcunque induunt figuram, quae in fluxu globulis alterius Metalli seu Semimetalli interpositae forsan hos magis distendunt, quam si ipsae adhuc globuli essent, ideo mixta fiunt rariora. Attractiouem et repulsionem circa partes Metallorum et Semimetallorum fusorum dari, comprobant experimenta, vbi omni adhibita cura nulla commixtio procedit, et alia vbi miscenda admodum auide coëunt, ita vt e. g. Cuprum cum Zinco, Ferrum cum Stanno longe mitiori ignis gradu fundantur, quam si sola igni exposita fuissent.

§. 8. Huic dissertationi apponere lubet singulare quoddam phaenomenon Magnetis, quod occupatus circa mixta Metallorum et Semimetallorum detexi. Obseruaui nempe Magnetem minorem plus agere in mixta Ferri cum Metallis et Semimetallis Magnete maiore, qui Ferri quantitatem duplo maiorem attrahit quam minor. Experimenta, quae hunc in finem institui, breuitatis causa in hanc tabulam conieci. Prima columna continet octo Magnetes A, B, C, D, E, F, G, H, denotatos. Vnicuique adscriptum est, pondus proprium cum armatura, pondus quod attrahit, quaenam istius in digitis et lineis pedis Anglicani sit longitudo, altitudo, latitudo et distantia pedum. In secunda 3tia, 4ta, 5ta et 6ta columna sunt frusta mixtorum cum suo pondere designata et e regione vnius cuiusque Magnetis videre est, quomodo quilibet in ista mixta agat?

Mixta

Mixta

Magnetes armati	☽ et ♂ Duo Frusta 31 grano in pendentia	♀ et ♂ Frusta 1) 60 gr. 2) 55 gr.	♃ et ♂ Frusta 1) 75 gr. 2) 30 gr.	Bismuthum et ♂ Frusta 1) 72 gr. 2) 29 gr. 3) 12 gr.	Zincum et ♂ Frusta 1) 76 gr. 2) 15 gr.
A. Pondus pr. 20 Loth. Vis 6 libr. Long. 1 d. 8 l. Alt. 1 d. 6 l. Lat. 1 d. -- Dist. ped. 1 d. 1 l.	Ambo attrahebat ita, vt superius teneret inferius.	Ambo attrahebat.	Ambo attrahebat.	Singula.	Singula sed maius vix.
B. Pond. pr. 2 libr. 10 L. Vis $4\frac{1}{2}$ libr. Long. 3 d. 2 l. Alt. 3 d. 6 l. Lat. 2 d. 6 l. Dist. ped. 2 d. 6 l.	Item ac antecedens.	Alterutrum valide attrahebat.	Alterutrum.	Duo priora mouebat tertiam attollebat.	Maius mouebat reliqua tenebat.
C. Pond. pr. 2 libr. 25 L. Vis 2 libr. 10 L. Long. 3 d. 6 l. Alt. 2 d. - - Lat. 2 d. 1 l. Dist. ped. 2 d. 7 l.	Alterutrum attrahebat.	Alterutrum mouebat sed non tenebat.	Alterutrum tenebat.	Nullum mouebat frustula autem vnius grani attrahebat.	Nullum mouebat, frustula 1. gr. attrahebat.
D. Pond. pr. 1 9. Loth. Vis 2 libr. 5 L. Long. 1 d. 6 l. Alt. - - 6 l. Lat. 1 d. - - Dist. ped. - - $7\frac{1}{2}$ l.	Item ac antecedens.	Item ac antecedens.	Vix alterutrum	Item ac antecedens.	Item ac antecedens.
E. Pond. pr. 7 L. Vis 1 libr. 8 L. Long. 1 d. 1 l. Alt. - - 8 l. Lat. - - 6 l. Dist ped. - 6 l.	Vnum attrahebat quocum in alterum agebat sed attollere non poterat.	Satis valide alterutrum attrahebat.	Alterutrum et fortius quam tres antecedentes.	Omnia 3ia mouebat, 4tum 5. gr. attollebat.	Vtrumque mouebat tertium 2. gr. attrahebat.
F. Pond. pr. 7 L. Vis 24 Loth. Long. 1 d. 1 l. Alt. - - 8 l. Lat. - - 7 l. Dist. ped. - $5\frac{1}{2}$ l.	Vnum attrahebat et minus quam antecedens in alterum agebat.	Ferme vti C. et D.	Vix alterutrum	Vti C. et D.	Vti C. et D.
G. Pond. pr. $1\frac{1}{3}$ L. Vis 1 libr. 4 L. Long. - d. $6\frac{1}{2}$ l. Alt. - $4\frac{1}{2}$ l. Lat. - $4\frac{1}{2}$ l. Dist. - $4\frac{1}{2}$ l.	Alterutrum attrahebat, quocum magis quam antecedentes in alterum agebat.	Alterutrum et paulo fortius quam B.	Alterutrum sed multo fortius quam antecedentes.	Singula sed paulo debilius quam A.	Maius admodum mouebat minus attrahebat.
I. Pond. pr. 1 L. Vis 4 L. Long. - d. 5 l. Alt. - 4 l. Lat. - 2 l. Dist. ped. $3\frac{1}{2}$ l.	Haec non asmino a attrahebat.	neutrum.	Alterutrum mouebat sed non tenebat.	Vti C. D. et F frustula 1. gr. attrahebat.	Frustula minora quam C. D. et F attrahebat.

DE LAPATHO ORIENTALI, FRVTICE HVMILI FLORE PVLCHRO INST. R. H. COR.

Auctore

Ioanne Ammano.

Tab. XIII. In tractatu de stirpibus rarioribus in Imperio Rutheno sponte prouenientibus mentionem feci *Lapathum Orientale*, fruticem humilem flore pulchro et Atriplicem Orientalem, fruticem aculeatum flore pulchro Inst. r. h. Coroll. pag. 38. a I. P. Tournefortio recensitas atque ab eodem Auctore in Oriente primum detectas singulares et valde pulchras duas hasce plantas in Kirgisiorum atque Baskirorum Tatarorum regionibus, nec non in variis Sibiriae locis prouenire.

Tournefortius harum plantarum nomina tantum, descriptiones autem et icones nullas cum publico communicauit.

Post Tournefortium Christianus Buxbaumius per Russiae et Persiae ad Caspium mare sitas prouincias Constantinopolim petens, in Media quoque prope vrbem *Ienschi* seu *Hansem* locis glareosis circa fluuios et riuulos posteriorem, Atriplicem nempe, obseruauit, descriptionem vero et iconem exhibuit in Centur. suarum 1^a^. pag. 19. Tab. XXX. Melius deinde eandem plantam delineauit et descripsit I. Iacobus Dillenius in Horto Elthamensi pag. 47. Tab. XL. fig. 47.

Prioris,

Prioris, Lapathi nempe Orientalis, fruticis humilis, flore pulchro nec icon, nec descriptio apud rei herbariae scriptores, quod sciam, reperitur. Quare operae pretium existimaui illam coram Academia praelegere, quam anno praeterito in horto Academico ex planta viua, pulchre florenti et semina ferenti, accurata icone illustratam, constitui.

Excrescit nempe elegans hic frutex in cubitalem plus minus altitudinem, mox a radice pluribus tenuibus et lignosis ramis praeditus, intus laete viridibus, extus albicanti vel subincano subtilissimo cortice obductis, quaquauersum nullo determinato ordine dispositis, procumbentibus vt plurimum et tortuosis.

Ex his primo Vere enascuntur folia alternatim posita, vtrinque acuta, magnitudine, forma, colore et consistentia ad Polygoni oblongo angusto folio Casp. Bauh. Pin. quam proxime accedentia, nisi quod rigidiora sint et acutiora, marginibus subinde parum reflexis.

Iunio Iulioque mensibus in hac regione e ramorum summitatibus nec non et foliorum alis flores oriuntur in spicas tenues dispositi, vnciales aut biunciales. Singuli flores, petiolis trientem plus minus pollicis longis et dilute rubentibus sustentati, ex octo constant staminibus, valde gracilibus, albicantibus, apices subrotundos, paruos, luteolos gerentibus, et pistillo staminibus dimidio fere breuiori, albenti itidem, cuius apex in tria corpuscula globosa seu stigmata alba terminatur. Hae floris partes calice continentur in quinque segmenta inaequalia fere ad basin vsque dissecto, quorum tria interiora exterioribus duobus triplo ad minus sunt maiora. Segmenta haec initio dum sese explicant, album obtinent colorem, maturante vero fructu roseum seu suaue rubentem acquirunt. Interiora, maiora scilicet, crescente in dies embryone, cui pistillum innascitur, valde ampliantur, inflectuntur et fructum arcte amplectuntur. Exteriora duo eandem fere magnitudinem seruant, quam habuerunt, dum expandebantur; maturo autem fructu reflectuntur.

Fructus est semen Acetosae vel Lapathi semini perfecte analogum, triangulum, spadiceum, splendens, grani Triticei magnitudine, quod Augusto demum mense ad maturitatem peruenit.

Cultura delicatiori opus non habet, sed amat magis solum liberum et apertum, soli ventisque expositum; saeuissimas quoque hyemes, si modo niue tectum sit, facile tolerat.

Carolus Linnaeus ex hac iam descripta planta, ex Atriplice, de qua supra mentionem feci, et ex alio Africanae originis frutice a Dillenio in Horto Elthamensi pag. 36. Tab. XXXII. fig. 36. delineato et descripto, genus peculiare sub titulo Atraphaxis, graeco a Dioscoride Atriplici vulgari imposito nomine, instituit et in Horto Cliffortiano pag. 137 et 138 species eiusdem recensuit. Videamus an nostra haec planta ad nouum Atraphaxeos genus referri possit et debeat. Character huius generis essentialis ab Auctore in Generibus suis plantarum n: 298. pag. 105. exhibitus, praecipue in numero staminum seu maritorum, vt alibi loqui idem amat, et stigmatibus duobus seu faeminis consistit, nempe duae faeminae cum sex maritis nuptae sunt; impraegnatae vero vnicum subrotundum compressum infantem parturiunt, tuiunt, ab aliis ſemen plantae vocatum. Secundum methodum Auctoris ſexualem recte Atriplex illa Orientalis, vnde character noui huius generis petitus videtur, ad Hexandria Digynia refertur. Cum noſtra autem planta res plane aliter ſe habet: in hac enim faeminae tres octo maritis nubſerunt; faeminae autem tres ſimul e maritis grauidae factae edunt infantem anguloſum, triquetrum, ſplendentem, ſpadiceum. Quam ob rem ſecundum ipſius methodum ad octandria trigynia poſt Biſtortam vel Polygonum referenda fuiſſet haec planta, aut ſaltém ad alterutrum horum generum. Ad polygonum tamen propius accedere videtur, quam ad Biſtortam, habitu in primis externo, creſcendique modo.

Tab. XIII. fig. 1. ramos plantae repraeſentat floribus et ſeminibus onuſtos; fig. 2. calycem cum ſtaminibus; fig. 3. ſemen maturum intra calycem contentum.

CLASSIS TERTIA
CONTINENS
HISTORICA

DE

DE
ALCIBIADE CERTAMINIS CVRVLIS OLYMPICI APVD ELEOS VICTORE
OBSERVATIO HISTORICO-CRITICA.

I. H. SCHVLZE.

De Alcibiadis victoria curuli Olympica vtrumque iure dixeris, quod nihil illa illustrius sit, eademque nihil etiam obscurius maioribusque tenebris obtectum. Mihi certe ad antiquitates athleticas per XXV. annos non mediocriter attento, saepius contigit hic haerere, et exitu desperato recedere ab illa inuestigatione. Non quod res ipsa sit illustribus testimoniis destituta: sed quod recentiorum quorundam explicationibus occupatam mentem attuleram, quibus tamquam saxo adhaerescens parum aberam, quin potius THVCYDIDEM, DEMOSTHENEM, PLVTARCHVM, ATHENAEVM erroris arguerem aut suspectos haberem, quam meos a ducibus non exiguae auctoritatis acceptos errores repudiarem. Non diffiteor me hoc scepticismo fluctuantem Harduinianis dubitationibus aliquando tribuisse plusculum, iamque animo certe ad bellum bonis auctoribus inferendum fuisse paratum: immo calamum arripueram, vt ostenderem fieri non posse, vt vera sint, quae de Alcibiade apud dictos auctores legeram: saltem non posse concipi, quomodo Olympici agonis apud Eleos victor fuerit.

Postquam autem longo attentoque omnium, quae in caussa obueniunt, examine omnino cognoui, nihil esse quod nos cogere debeat ad Alcibiadem a victoribus celebrium apud Eleos certaminum segregandum, aut ad suspectos habendos testes illius victoriae: operae pretium me facturum speraui, si de hoc argumento aliquid commentarer, easque obiectiones remouerem, quae me ipsum non exiguo temporis spatio remoratae fuerunt. Id dum praestare conor, non raro, re ita exigente, cogar indicare suis nominibus aliquos, a quibus dissentio. Quamquam autem calamo ita temperaturus sum, vt nihil, nisi modestissime et placidissime dictum effluat: rogo tamen ac obtestor lectorem beneuolum, velit *ita omnia* in optimam partem accipere, vt de me persuasissimum habeat, non cum eruditis viris sententiarum auctoribus, sed cum sententiis ipsis certamen suscipi: nullamque me palmam optare, nisi quam ipsa veritas manu sua porrigat.

Sed ad rem accedendum est. Quum anno belli Peloponnesiaci XVII. Siculi Egestaei auxilium Atheniensium aduersus finitimos Selinuntios implorassent; diuersaeque essent sententiae: iuuenis Alcibiades, qui ad capessendam rempublicam nuper primum accesserat, omnino cupiebat, vt Egestaeis suppetiae ferrentur. Sed Nicias ipsi ita aduersabatur, vt in concione multa liberius in Alcibiadis iuuentutem, inque immodicos sumtus, quos in alendos equos faciebat, iactaret. Huic respondens Alcibiades, haec de se commemorabat: ὧν πέρι ἐπιβόητός εἰμι, τοῖς μὲν προγόνοις μου καὶ ἐμοὶ δόξαν φέρει ταῦτα,

τῇ

τῇ δὲ πατρίδι καὶ ὠφέλειαν. Οἱ γὰρ ἕλληνες καὶ ὑπὲρ δύναμιν μείζω ἡμῶν τὴν πόλιν ἐνόμισαν, τῷ ἐμῷ διαπρεπεῖ τῆς Ὀλυμπίαζε θεωρίας, πρότερον ἐλπίζοντες αὐτὴν καταπεπολεμῆσθαι. Διότι ἅρματα μὲν ἑπτὰ καθῆκα, ὅσα οὐδείς πω ἰδιώτης πρότερον, ἐνίκησα δὲ, καὶ δεύτερος καὶ τέταρτος ἐγενόμην, καὶ τἆλλα ἀξίως τῆς νίκης παρεσκευασάμην. Quae Latine ſic efferenda puto: „ea, propter quae ad vos delatum me ſugillatumque audiui, non maiorem mihi meisque progenitoribus gloriam, quam patriae vtilitatem afferunt. Nam quod ego ad Olympica ſacra cum tanto tamque ſplendido apparatu profectus fui, effecit vt Graeci, qui tantum non expugnatos belloque fractos nos exiſtimauerant, nulla vi ſuperabilem ciuitatem noſtram iudicarent. Currus enim in certamen dimiſi ſeptem, quod ante me priuatus nemo vnquam fecit: iiſque et victoriam adeptus ſum, et a victore ſecundum quartumque locum: ne dicam, quam me victoria dignum in ceteris praeſtiterim.

His Thucydideis ex *libr. VI. cap.* 16. allatis ſubiungat beneuolus lector, quae PLVTARCHVS de eodem viro tractans, reliquit *Tom. I. pag.* 196. et quae ad hoc argumentum pertinentia apud ATHENAEVM leguntur *dipnoſophiſt. XII. pag.* 534. ex antiquiore auctore ANTISTHENE relata: quorum aliqua inferius magis commodo loco afferenda proſpicio. Sed age propius inſpiciamus THVCYDIDIS ſingula verba. Ὧν πέρι ἐπιβόητός εἰμι, exponendum putaui: ea, propter quae delatum me ſugillatumque audiui: Nicias enim illa oratione, quae ab auctore antea relata eſt, pungit iuuenem quendam equestris rei vltra modum studiosum, quique sumtibus nimiis in eam factis attritus leuari cupiat, imperio aliquo in se collato. Alcibiades se non ignarum esse, quem significare hac ad populum oratione voluerit, initio statim profitetur. Si vero velimus in genere hoc dictum esse, vt plures eiusdem accusationis auctores simul intelligat, vertere licebit: ea, propter quae vulgo traducor. Non enim Niciam vnum id fecisse, sed Alcibiadem esse, in quem iam antea Aristophanes lepidissimam comoediam, *Nubes*, conscripsit, vt ipsum quidem oblique, sed apertius Socratem apud populum criminaretur, veteres, qui de ea comoedia commentati sunt, nos edocent. Vocabulum ἐπιβόητος in bonam partem non accipi, et IVL. POLLVX Lib. V. sect. 159. docet, et Graeci sermonis vsus confirmat.

Sequitur nunc, quod maxime requirimus, quo referendum sit τὸ διαπρεπὲς τῆς ὀλυμπίαζε θεωρίας. Docet nos HARPOCRATION, θεωροὺς dici τοὺς εἰς θεοὺς πεμπομένους, καὶ ὅλως τοὺς τὰ θεῖα φυλάττοντας, ἢ τῶν θείων φροντίζοντας: qui ad deos legabantur, vt et in vniuersum, qui ea, quae ad diuinas res pertinent, custodiunt et curae habent. Neque hic solum intelligendos esse, qui ad oracula mittebantur, discimus exemplis eiusmodi sacrarum legationum, quae ad praesens negotium maxime quadrant. Sufficiat vnum adduxisse, quod THVCYDIDES atque PLVTARCHVS descriptum reliquerunt, ille quidem libro III. hic in Nicia, vbi de insula Delo lustrata et antiqua religione instaurata agitur. Fuerat enim priscis temporibus in hac insula frequens circumuicinorum ex insulis et continente Ionum conuentus, qui illuc

cum

cum vxoribus et liberis, colendi numinis caussa, confluebant, ξὺν γυναιξὶ καὶ παισὶν ἐθεώρουν. Atque hi, priuata pietate confluentes aut ab vrbibus diuersis missi, ne sine ordine et decore sacrum incompositum agentes, magis id turbarent, quam ornarent: opus erat aliquo cum auctoritate rem administrante, qui dicebatur θεωρίαν ἄγειν, dux esse omnium ad sacrum deo peragendum missorum. Isto sensu theorus in Delo tunc erat Nicias, cuius magnificum et religiosum munus multis verbis describit PLVTARCHVS. Scilicet huius erat inter multos θεωροῦντας prouidere, vt omnia ordine et bene composito ritu peragerentur. HOMERVS, vbi *Iliad.* ά. describit eiusmodi actum placando Apollinis numini destinatum, naui, quae theoros deduceret, imponit ἀρχὸν, praefectum, βουληφόρον, qui consilio omnia moderaretur. Quo loco EVSTATHIVS bene annotat, non solum respici ad nauis gubernationem, sed designari ἐπὶ πρεσβείᾳ σελλόμενον.

Istum vocabuli θεωρεῖν antiquissimum ac genuinum significatum, a θεός et ὥρα, *cura*, descendentem videas ab interpretibus Graecorum librorum subinde non attendi, reconditumque sensum praetermitti. Vnico exemplo rem ostendere satis sit. In venustissimo IVLIANI libello, qui *Caesares* inscribitur, ita de Alexandro M. loquens inducitur Iul. Caesar *pag.* 321. Ἀλέξανδρος Αἴγυπτον παρῆλθε θεωρῶν, ἐγὼ δὲ συμπόσια συγκροτῶν κατεπολέμησα. Duo docti interpretes reddiderunt, alter quidem, *Aegyptum spectans pertransiuit*; alter *duntaxat aspectans praeteriuit*. Neuter vim verborum expressit. Sensus hic est, Alexandrum Aegypti amplissimum regnum non bellatoris ritu

 aggres-

aggressum cepisse, sed omnem expeditionem illam fuisse pompae religiosae, quam bello, similiorem. Rem cognoscet, qui ex ARRIANI historiarum libr. III. principium relegerit. Quoniam vero res seria erat cultum Deorum procurare: hinc Caesar, vt se Alexandro maiorem ostendat, a se inter conuiuia et compotationes subactam Aegyptum iactat. Mallem hoc loco legere περιῆλθεν, quod visum etiam illi fuit, qui *pertransiuit* interpretatus est. Nam *praeteriisse*, quod παρῆλθε valet, repugnat historiae et scopo loquentis.

Videndum nunc est propius, quid sit ἡ 'Ολυμπίαζε θεωρία, qua Alcibiades functus dicitur. Iupiter Eleorum Olympius erat Graecorum omnium commune numen: quique ipsi quinto quoque anno recurrente habebantur sacri sollemnesque honores et sacrificia, totius Graeciae nomine peragebantur: vtque omnes possent interesse, ab antiquo cautum erat, vt bellis, si qua gerebantur, induciae darentur. Confluebant autem illo tempore homines non solum priuata voluntate, vt totius Graeciae conuentum spectarent, et in illa hominum multitudine fructum aliquem ex mercatu perciperent: sed ciuitates publico nomine mittebant, qui pompae peragendae et sacrificiis suo nomine interessent. Qui autem cupiebant tam Olympiae, quam in ceteris sacris, decertare, suaeque virtutis documentum dare, aliquot mensibus ante iustum tempus aduenire seseque satis explorandos exhibere debebant. Atque haec lex adeo firma erat, vt ad decertandum nemo admitteretur, qui vel legitimo προαγῶνος tempore defecisset, vel fluente illo aliquid admisisset, quod νομίμως ἀθλοῦντα dedeceret.

Erant

Erant itaque in eiusmodi ſacro et religioſo conuentu, (πανήγυριν vocare Graeci ſolent,) aliqui publico nomine a ciuitatibus miſſi, qui pompae partem conſtituerent et ſacris intereſſent: atque hi quidem θεωρεῖν ſtricto iure dicebantur; praeeratque illis publico etiam nomine miſſus θεωρίαν ἄγων. Hocque munus ſibi potiſſimum depoſcebant nobiliſſimi et locupletiſſimi iuuenes, qui magnifico ſplendore, quo hanc ſacram legationem ornabant, gloriam ſibi inter omnes Graecos et fauorem ciuitatis parabant, vnde in honoribus petendis proueherentur. Sed et erant complures priuata pietate vel curioſitate huc adducti, vel mercandi potiſſimum deſiderio pertracti: quibus ſi theoriae honorem non adimere omnino licet; alio tamen, et latiori ſenſu tribuendum eſſe certum eſt. Tandem quoque erant coronae olympicae, variis certaminum generibus acquirendae, candidati; de quibus dubito, poſſintne theororum nomine decorari. Etſi enim ſpectacula, quae decertando edebant, numinum honori imputabantur, omninoque pars religioſi cultus erant: non memini tamen vllius auctoris, qui, de exercitatoribus iſtis agendo, illos in theororum numerum retulerit, aut verbo θεωρεῖν de illis vſus fuerit.

Erit itaque illa Ὀλυμπίαζε θεωρία, quam Alcibiades commemorat, vel publico nomine ciuitatis ſuae ſuſcepta legatio ad panegyrin Olympiae agendam: vel priuato eius ſtudio ad famam aucupandam, fauoremque ſibi parandum ſuſcepta, et magnifico apparatu peracta peregrinatio. Quamquam enim nemo veterum nobis omnia, quae ad ſolemnia et toti Graeciae communia ſacra cum ludis coniuncta pertinent, deſcripta reliquit: videor tamen

men mihi certum habere, quod, instante huiusmodi sacro omnibus id ciuitatibus publice fuerit significatum: quae tam foederis, quo communi omnes continebantur, renouandi; quam iuris locique sui tuendi et conseruandi caussa, ne superstitionis vim etiam commemorem, mittebant, qui publico nomine antiquis interessent sacris et pro ipsa ciuitate deo, qui colebatur, sacrificium afferrent. Si non aliunde id colligeremus, luculenter, puto equidem, cognosceretur ex eo, quod THVCYDIDES Lib. V. Cap. 49. et 50. vt et PAVSANIAS Lib. Cap. scribunt, Lacedaemonios fuisse aliquamdiu per Eleos ab Olympicis ludis et sacrificio prohibitos, quod mulctam ipsis irrogatam persoluere noluerant.

Quum vero clarissime id comprobare nequeamus, ponamus vtique, Alcibiadem priuato suo nomine Ioui Olympio, eiusque sacro, honorem hunc habuisse. Fauebit ita nobis tanto magis reliqua oratio illa, quam Thucydides, tamquam ab Alcibiade habitam, posuit. Dicit enim nullum ante se priuatum, ἰδιώτην, septem currus in certamen curule misisse: moxque subiicit, non inutilem censeri debere illam insaniam, si quis suis sumtibus non solum de seipso, sed etiam de sua patria bene meretur. Quanquam enim dicta haec ita se habent, vt non obesse possint, si quis velit asserere Alcibiadem in theoria ista obeunda patriae iussum habuisse; quoniam Athenis theoriae et choragiae a diuitibus ciuibus suo sumtu fere peragebantur, idque genus muneris magis honor erat, quam potestas: porroque ἰδιώτης hic non opponitur homini aliquam publicam procurationem adepto, qua peracta in pristinam conditionem redit; sed ita in ciuitate aliqua eminenti, vt omnium rerum absolutum habeat arbitrium: tamen in

obscu-

obſcuris et non clariſſime patentibus factis ſemper puto tutius in omnem partem diſpicere, et potius ordinaria, quam extra ordinem poſita, ſequi.

Eſto igitur Alcibiadem omnino priuatum ad Olympica certamina cum tanta pompa fuiſſe profectum. Fecit rem maiorum ſuorum exemplo congruam, deque ſuis facultatibus, ampliſſimis ſane, teſtantem. Annon in eo, per iuuenilem confidentiam, nimias impenſas fecerit, qui priuatus omnium regum omnem magnificentiam ſuperauit; parum quidem noſtra refert inquirere: ſed aemulos ita iudicaſſe, et rei publicae, ſi ipſius manibus permitteretur, male ominatos, peculatuſque eius praedicere auſos fuiſſe, palam eſt, ſiue Thucydidem legas, ſiue alia eius aeui momenta inſpicias: de quo plura dicam, quando de tempore quaeremus.

Nunc tempeſtiuum videtur de equeſtribus certaminibus in vniuerſum pauca delibare, vt tanto magis pateat, quonam magnificentia Alcibiadis potiſſimum cenſenda ſit. Quum multa et celebria eſſent per Graeciam ludorum, honori deorum conſecratorum, genera; eminebant tamen plurimum illae, quae genti vniuerſae Graeca lingua vtenti communes et ſacrae habebantur, πανηγύρεις ſeu conuentus ad Olympiam, Nemeam, Iſthmum et Delphos. Poſt ſacrificia, ad quae ſolemni pompa procedebant, ludi inſtituebantur omnis generis, gymnici, equeſtres, muſici: erantque iudices conſtituti, quorum ſuffragiis, qui victoriam adepti eſſent, coronam accipiebant et coram vniuerſo coetu praeconis voce declarabantur. Neque contemnenda erat gloria, quam gymnicorum certaminum victor conſequebatur: nec exigua erant emolumenta, quae cuique

in

in patriam suam reuerso praebebantur. Nam quum ciuitas quaelibet se ipsam in ciue suo coronari existimaret: non solum honorifice eum reuertentem excipiebat, verum etiam inter primarios ciues locum ipsi faciebat, censumque equestrem, si non antea suppeteret, ex publico collatis opibus, explebat, et alimenta per omnem vitam, cum plena immunitate, praebebat. Nihil itaque mirum est, quod omnis Graecia, desiderio tantorum fructuum incensa, illis exercitationibus insano studio dedita fuit, quibus praeparari debet, qui se vult certaminibus huiusmodi committere. Cumque subinde accideret, vt homines tenuissimi, vel celeritate vel corporis robore pollentes artisque praeceptis adiuti, victoriam currendo, luctando pugillandoque reportarent, subitaque conuersione fortunae emergerent: coeperunt nobiliores homines gymnica illa vituperare et ab iis fere abstinere, tanto autem magis operam dare equestribus seu curulibus certaminibus, in quibus non cum plebeiis antagonistis, sed cum regibus, ciuitatibus et nobilissimo ac spectatissimo quoque de palma certandum erat. Nam τὸ ἱπποτροφεῖν, equos alere, regium olim censebatur: atque qui inter ciues possent equum in bellicos vsus paratum semper habere, digniores omnino ceteris habebantur.

Habebant autem haec curulia certamina multum, quod a gymnicorum more et instituto recedebat. Nam non solum equestre stadium diuersum erat ab illo, quo athletae gymnicae artis specimina edebant: verum hoc maxime discrepabat, quod athleta proprii corporis robore, agilitate, patientiaue coronam sibi quaerebat: hic autem equi, forte etiam muli, domino longissime absenti pal-

palmam acquirebant. Mittebant enim reges et principes, vt et reginae claraeque feminae, equos currusque, addebantque peritos ἡνιόχους, agitatores, nescio an aurigas Latine appellare liceat. Victoriam consequebatur currus illius, equorumque currum vehentium dominus, qui metam feruidis euitando rotis ceteros anteuerterat, currumque cum omni apparatu eius integrum saluumque per tot decursiones conseruauerat: aut si equi sine curribus cum sessore mitterentur, qui celeritate reliquos post se reliquerat.

Isti ἡνίοχοι seu agitatores apud Graecos minime erant seruilis aut abiectae conditionis homines, verum iuuenes nobilissimi, et plerumque eorum, qui equos miserant, propinqui, certe amici, quorum fidei er dexteritati tantam spem suam confidere se posse credebant. Hi quemadmodum palmae honorem permittebant equorum curruumue dominis: ita ab illis honorem sibi habendum et quicquid remunerationis loco esse poterat, exspectabant. De quo plura non inueni, quam quod is, qui victoriam per ipsos acceperat, publice eos coram omni spectatorum concione vitta quadam exornare fuerit solitus. Quo autem pacto, et per quos id fecerint absentes victores, (saepe enim longissime illi aberant, vt Cyrenaici et Siculi reges) me non inuenisse profiteor; coniecturis autem indulgere non iuuerit.

Atque sic intelligi potest, quid sibi velit, quod in Alcibiadis laudem cecinisse poetam scripsit PLVTARCHVS, eum βῆναι ἀπονητὶ στεφθέντα, *absque labore coronam ipsum abstulisse*; quoniam nihil nisi sumtus fecerat, agitandi autem quemuis currum laborem τοῖς ἡνιόχοις permiserat.

Quid autem sibi vult, quod idem vates, siue EVRIPIDES is fuit, siue quisquis alius, δὶς ςεφθέντα, bis coronatum Alcibiadem dixit? Certe in Olympicis, omnibusque sacris certaminibus, in quouis decertandi genere tantum vnicus erat, qui victoriam, eiusque signum coronam, accipiebat: et omni antiquitati, ipsique sacro codici fidem derogant, qui secus statuunt. Confundunt autem certamina θεματικὰ, quae lucratiua erant, cum sacris: et quod ibi tria quatuorue praemia, aut quinque adeo erant, male transferunt ad sacra certamina. Cuius grauissimae aberrationis dux et auctor esse mihi videtur vir sane doctissimus et diligentissimus PETRVS FABER, qui si tam bene digessisset τὰ ἀγωνιστικὰ, quam sedulo congessit ad hoc argumentum pertinentia, forte nihil aut parum reliquisset eorum industriae, qui post ipsum ad hunc antiquitatis campum progressi sunt. Omni autem modo contendit persuadere nobis, quod fuerint in omni certaminum genere proposita prima et secunda et tertia praemia, vt qui esset primis exclusus, non tamen his minoribus defraudaretur, cuius aliquod meritum prae ceteris post victorem antagonistis fuisset. Id vero vt comprobet, inter alia adducitur etiam pro testimonio Alcibiadis exemplum. Vnde operae pretium facturus videor, si hanc rem accuratius perpendero.

Mentem suam de pluribus praemiis propositis multis quidem locis, sed clarissime edisserit Lib. III. pag. 309. „vbi haec legimus: praemii nomen simpliciter et sine „adiectione prolatum soli primo competit, sicut et bra„bii, quod vnus tantum merebatur aut accipiebat, qui „victor a praecone palam renunciatus foret.„ Ibidemque caput

caput ſequens ſic orditur: „Ergo prima et ſecunda et „tertia praemia fuiſſe propoſita, vt qui eſſet illis excluſus, non tamen hiſce defraudaretur, cuius aliquod meritum prae ceteris poſt victorem antagoniſtis foret, perſpicue ac eleganter Philo admonet, cetera. Alcibiadis autem exemplum Fabro omnis inſtar probationis videri, cum ex *pag.* 167. patet, vbi ipſum Olympici certaminis primum ſecundum ac tertium victorem fuiſſe renunciatum ſcribit; tum ex *pag.* 316. vbi legimus admodum multa ad Plutarchi de Alcibiade narrationem expediendam pertinentia. Serio itaque credit Alcibiadem iſtis ludis Olympicis reportaſſe plura vno praemia: ſcilicet primum, qud proprie βραβεῖον vocatum ſit, deinde ſecundum et quartum ex mente Thucydidis, ex aliorum autem teſtimonio tertium.

Conficitur inde, quod ex mente clariſſimi ICti minimum quatuor praemia fuerint tunc temporis propoſita, quae acciperent primus, et qui a primo optimam et feliciſſimam operam nauaſſent, vſque ad quartum. Eandem opinionem fouent complures alii, quorum ex numero adducere ſufficiat ANDR. DACERIVM, Plutarchi nouiſſimum interpretem, qui in nota 28. iſti loco ſubiecta id clare adſerit, probationiſque loco prouocat ad HOMERVM, apud quem nos Olympicorum ludorum ante inſtitutos Olympiae ludos ideam iubet requirere. Enimuero haec eſt, ſi quicquam aliud, inſignis confuſio ludorum thematicorum, vbi pro praemio lucratiuo certabatur, et ſacrorum certaminum, vbi praeter coronam victori glorioſam nihil tribuebatur in loco certaminis. Illa autem non niſi vni dabatur, qui conſpicue ſuperaſſet omnes aemulos. Omnia apud Homerum scripta et decantata certamina fuerunt priuata, a munificis heroibus instituta vel populum delectandi causa, vel in honorem defunctorum, quorum funera condebantur. Sacra totius Graeciae certamina vigebant publico totius gentis decreto, atque omnino alia habebant statuta, longeque illustriora praemia. Ideam certaminum gymnicorum, quae Nicocles patri defuncto instituit, ex Homero licet capere; fuere enim et haec lucratiua; forte etiam plerorumque, quae per vrbes Graecas agebantur magno sane numero: sed Olympia, Pythia, Nemea et Isthmia, vtpote vniversae gentis consensu pro sacris reputata, non licet Homerico pede metiri: certe non licet ab illo tempore, quo fuerunt vniuersae gentis consensu communes omni Graeciae et στεφανίται facti, id est, pro omni praemio serti cuiusdam honore remunerari coeperunt.

Iam propius inspiciendus est Alcibiades victor, et praeterea secundus et quartus a victore, forte etiam tertius. Videtur doctissimus FABER *pag.* 316. rem ita animo suo concepisse, tamquam magnificos Alcibiadis apparatus et curruum ac equorum praestantia ita omnes deterruerit, vt nemo decertare ausus fuerit: vnde factum sit, vt ipsi sine controuersia debuerit corona tribui, vna cum praemiis, quae a victore proximis erant auferenda. Atque ex hac causa videtur Thucydidem, qui omissa tertii mentione, quartum a victore fuisse scripserat, reliquisse, ipsique sequiorum aetate et auctoritate sententias praetulisse. Nam videbat necessarium esse, vt fuerit alius, qui tertio loco Alcibiadis currum superauerit, vt continuata serie palmarum excideret.

Rei

Rei indolem consideranti clarum fit, fieri non potuisse, vt vnus Alcibiades septem suos currus, quos ad certamen miserat, regeret. Si omnino ipse per se decertauit, non nisi vnius currus esse potuit ἡνίοχος. Sed exemplum desidero, quo probetur, quod vmquam dominus equorum et curruum ad sacra certamina missorum ipsemet eos agitauerit. Videtur de eo non dubitasse DACERIVS, qui ad Plutarchum nota 29. asserit, Alcibiadem illas tres palmas, de quibus Euripides ibi citatus loquitur, per se meruisse: deinde autem absentem bis vicisse. Sed mihi non persuaserit, rem ita, vt perhibet, habuisse, aut habere potuisse. Equidem existimo in equorum decursionibus et bigarum quadrigarumque agitationibus idem obtinuisse, quod in hominibus stadium decurrentibus constitutum erat. Hos, docente PAVSANIA Libr. VI. Cap. 13. non turmatim emittebant, sed simul quatuor, quos sors primos designauerat, decurrebant. Hos inter qui primus virtute fuerat, dicebatur προτερήσας, aut κρατήσας, habebatque vnus spem præmii, reliquis tribus, qui vna cum illo decurrerant, sed victi ab eo fuerant, ab vlteriori spe omnino deiectis. Post hos quatuor decurrebant totidem sequentes: et sic deinceps res peragebatur, donec omnes decurrerant; semper discedentibus, qui postremi fuerant. Iam his προτερήσασι, seu victoribus in prima decursione, nouum instabat certamen, vt tamdiu quaterni decurrerent, donec deficientibus aliis atque aliis vnus aperte victor conspiceretur. Rem ita, vt diximus, in curuli etiam certamine, vt de pedestri certum est, habuisse, persuadet Romanorum in circo auririgantium exemplum: vbi non nisi quatuor simul currus emittebantur.

Iam is, qui aperte tandem superauerat omnes, victor vnus declarabatur: qui vltimus cum victore certauerat, secundus ab eo habebatur, tertius autem et quartus, qui, ceteris iam omnibus superatis spem victoriæ retinuerat, vsque dum ex multis tantum quatuor superessent, qui secum de victoria pugnare debebant; quod vltima et decretoria decursione fiebat.

Si igitur, ex Thucydidis narratione, Alcibiades vicit, et secundus ac quartus fuit, necessarium est tandem, vbi numerus curruum ad quatuor redactus fuit, primum secundum et quartum currum Alcibiadis fuisse, vnum autem tertium Alcibiadis non fuisse. Etiam hoc aperte colligitur, illa eadem Olympiade, qua Alcibiades victor discessit, minimum fuisse currus sedecim, qui victoriae caussa decertauerunt. Neque obscurum esse potest fieri omnino non potuisse, vt Alcibiades illas tres palmas per se mereretur: quum in vltima missione tres omnino currus ipsius essent, quorum non nisi vnius ἡνίοχος esse poterat.

Atque adeo locus ille minime probat Alcibiadem tria præmia fuisse consequutum. Vnicum, scilicet νίκην, gloriam victoriæ, et coronam, victoriæ insigne, meruit et consequutus est, siquidem vno tantum curulis certaminis genere expertus fuit. Sed ad præstantiam equorum, omnisque apparatus curulis, referebant homines, quod præter illum currum, qui victoriam reportauit, alter proxime, tertius non longe ab ea abfuerit. Sic olim admirationi fuit, quod in vna Olympiade septem Crotonienses

nienses in stadio decurrendo fuerunt προτεγήσαντες: quoniam ex nulla alia gente Græciæ vno tempore tot visi fuerunt, qui alios prima statim decursione a spe vlteriori deiicerent. Sed propterea non fuere illico omnes coronati, vt aliqui incaute perhibuerunt: verum debuerunt hi septem Crotonienses, ac si præter illos ex aliis ciuitatibus aliqui fuere προτερήσαντες, inter se tamdiu certare, stadium identidem decurrendo, donec lassatis ceteris inuicta vnius virtus manifeste cognosceretur: qui vnus coronam stadii consequutus est.

Redimus, ad Alcibiadem, de quo nunc omnia satis videntur plana, praeter illud, quod poeta toties dictus illum bis serto oleagineo, id est Olympico coronatum perhibet. Vidimus quid erudito Dacerio placuerit, scilicet quod post olympicas tres palmas, duas praesens retulerit, bis deinde absens coronatus fuerit. Atque id ipsi propterea maxime videtur, quod dictum est δὶς στεφθέντα ἀπονητί. Putat igitur triplicem palmam non sine magno fuisse labore partam, quia septem currus agitare debuerat; sed alio tempore ipsum absentem sine molestia et sudore proprio honorem meruisse. Enim vero non possum cum docto viro sentire etiam de binis coronis alio tempore partis. Non enim video quid impediat, quo minus in una eademque Olympiade duas coronas ab equestribus certaminibus referret: bene autem video, quod poeta non loquatur de re diuersis temporibus, sed simul gesta. Scilicet non vnius eiusdemque generis erant currus, qui in certamen mittebantur; sed admodum diuersi: vt bigae, quadrigae, seiuges, octoiuges: de quibus dicendum esset, si omnem rem curulem

expli-

explicandam suscepissemus. Singulis autem generibus licebat victoriam contingere. Adeoque Alcibiadi, si diversis curruum generibus ad certamen accessit, via ad diversas victorias, earumque praemia, coronas patuit: nihilque opus est contendere, quod diuersis ludis eas quaerere, adeoque annis interiectis, debuerit.

Atque sic, spero equidem, satis expedita erunt omnia, quae ad Alcibiadem Olympiae curuli certamine vincentem pertinent. Enimuero supersunt aliquae quaestiones de loco et tempore, quibus nunc expendendis operam dabimus. Praeter illa sollemnia Olympia, quae Ioui apud Eleos quinto quouis anno recurrente ab omni Graeca gente celebrabantur, erant Olympia minus celebria, ab Atheniensibus et Macedonibus certis fixisque temporibus agi solita in Iouis Olympii honorem. Ad horum aliqua victoriam Alcibiadis reiicit vir doctissimus IOSVA BARNES in Euripidis vita, pagina XXVIII. „his verbis: Archelaus rex Macedoniae adeo gloriae ar„dore incaluit, vt olympica certamina in Dio Macedo„niae institueret, quae respectu Olympiorum in Elide „dicta erant Olympia minora: quod et Athenienses ante „eum fecisse dicuntur: in quibus Alcibiades ter victoriam „reportabat; nec enim is semel maiora Olympia vicisse „deprehenditur. Adscripsi verba auctoris, quoniam obscurum videtur, Macedoniisne an Atheniensibus Olympiis victorem addicat Alcibiadem. Mihi quidem vero videtur simillimum, Barnesium mentionem Atheniensium per modum parentheseos tantum facere, et referre Alcibiadem ad Macedoniorum ab Archelao institutorum ludorum victores, quoniam totus, qui subsequitur, sermo de hoc

hoc rege tantum agit. Equidem video, cur vir de bonis litteris praeclare meritus Alcibiadis victoriam maluerit ad Macedonas referre, quam ad ceberrrima apud Eleos Olympia: quia ſcilicet nulli Olympionicarum faſti Alcibiadem victorem Olympiae commemorant. Vereor autem vt ipſi acciderit, quod pluribus videmus, qui ſe vni dubitationi exemturi in longe magis dubia et obſcura coniiciunt.

Quaeſtionem primariam deinde agitabimus: nunc iſtud modo dicam, fuiſſe prius Barneſio deliberandum aut potius probandum, in Olympiis illis Macedonum fuerintne ludi curules inſtituti, et an exteri ad illa inuitati aut admiſſi fuerint. Mihi certe antiquos cum cura excutienti neutrum horum ſeſe offert. Nam vbi DIODOR. SICVL. Libr. XVII. commemorat hos ludos ab Alexandro ante expeditionem in Aſiam peractos, his abſoluit narrationem: θυσίας μεγαλοπρεπεῖς τοῖς θεοῖς συνετέλεσεν ἐν Δίῳ τῆς Μακεδονίας, καὶ σκηνικοὺς ἀγῶνας Διῒ καὶ Μούσαις, οὓς Ἀρχέλαος ὁ προβασιλεύσας πρῶτος κατέδειξε. En ſacrificia et ludos ſcenicos, non gymnicos, nedum curules, in Iouis et Muſarum honorem, eoſque ipſos illos, quos Archelaus quondam inſtituit. De eadem re loquens ARRIANVS haec habet: τῷ τε Διῒ τῷ Ὀλυμπίῳ τὴν θυσίαν, τὴν ἀπ' Ἀρχελάῳ ἔτι καθεστῶσαν ἔθυσε, καὶ τὸν ἀγῶνα Αἰγαῖς διέθηκε τὰ Ὀλύμπια. Nihil hic etiam niſi ſacrificium Ioui Olympio et ludum ab Archelao inſtitutum, id eſt ſcenicum, narrat. Erat hoc ſacrum initio ſuo datum vrbi Dio, ad radices Olympi montis ſitae, vnde Ioui Olympio nomen: et quia huic Ioui ac Muſis dedicatum erat, Olympium a potiori vocabatur ſacrum. Videtur autem non adeo adſtrictum vrbi fuiſſe: quia Arrianus certamen illud ſcenicum Aegis, id eſt Edeſſae, regia ſcilicet Macedonum vrbe, peractum teſtatur: in quo diſcrepat a Diodoro, qui Dium diſerte ponit. Forte ſic conciliandi erunt, quod ſacrificium Dii in templo Iouis Olympii peractum, ludi autem, maioris commoditatis cauſa in ipſa ſede regia, omni neceſſariarum ad magnificentiam et decus rerum copia magis affluente, inſtituti fuerint.

Alterum, de quo propter Alcibiadem dubito, hoc eſt, fuerintne exteri ad illud ſacrum inuitati et admiſſi. Certe Diodorus copiarum tantum duces et amicorum praecipuos initio commemorat: deinde autem in recenſendo conuiuii apparatu σκηνὴν ἑκατοντάκλινον, tabernaculum magnificum, centum conuiuas capiens, vbi neceſſarios, ducèsque et ciuitatum legatos excepit; ſcilicet qui tunc miſſi ad eum venerant, vt de bello Perſis communi Graecorum nomine inferendo deliberarent. Idem DIODORVS, vbi Lib. XVI. recenſet magnificum apparatum, quo Philippus, pater Alexandri, nuper dux belli in Perſas ſuſcipiendi declaratus legatos et hoſpites Graecos ſtudioſe inuitatos exceperit, nuptialique feſto filiae ad mouerit; quo omnem beneuolentiam erga Graecos atque ſimul ſplendorem aulae ſuae oſtentare cupiebat, ludos ſcenicos et muſicos tantum. nullos autem gymnicos et equeſtres indicat: prorſus vt dubitandi iuſtus locus ſit, vmquamne Macedones certamina curulia apud ſe inſtituerint.

Quod Athenis Olympia fuerint, neutiquam dubitari poteſt, quum multis teſtibus id conſtet. At vero inſolens eſſet vel ſuſpicari, quod curule certamen in illis fue-

fuerit propositum: quare nihil hic addi opus videtur.

Progredior tandem ad tentandas vires in requirendo tempore, quo Alcibiades Olympia vicisse cum maxima verisimilitudine dici possit. In quo fateor non parum esse obscuritatis, postquam eorum scripta interciderunt, qui curiose annotauerunt, quis in quouis certaminum genere victoriam in Olympicis certaminibus reportauerit. Tale fuit opus PHLEGONTIS TRALLIANI, cuius specimen nobis conseruauit PHOTIVS *Cod.* XCVII. vbi recognoscimus illos, qui per singula certaminum genera victores fuerunt Olympiade CLXXVII. Adscribam particulam eorum, quae ad curules coronas pertinent, quas tunc meruerunt Aristolochus Eleus τεθρίππῳ, Agemon Eleus κέλητι, Hellanicus Eleus συνωρίδι et πωλικῷ τεθρίππῳ, Ctesias Eleus πωλικῇ συνωρίδι, Callippus Eleus πωλικῷ κέλητι.

Id vero Phlegontis opus integrum exstare, esseque id ipsum, quod SCALIGER cum Graecis EVSEBII chronologicis edidit, docti viri frustra omnino contendunt adversus ipsum Scaligerum, ingenue ad calcem notarum suarum professum, quod illam Ὀλυμπιάδων ἀναγραφὴν, quam post NICEPHORI patriarchae chronographiam dedit, quaeque prior pars est τῆς συναγωγῆς ἱστορικῆς, partim ex editis, partim ex nondum editis scriptoribus collegerit. Neque argumento esse potest, quod Phlegontem hic habeamus, quia ad Olympiadem 177. legimus ea, quae ex Phlegonte Photius excerpta pro specimine illius operis dederat: nempe apud Photium lecta in suum scriptum transtulit Scaliger: perinde vt GVIL. LLOYD in sua serie chronologica eidem Olympiadi eosdem victores adſcripſit. Quemadmodum vero anni iſtius vbertas cum praegreſſorum et ſubſequentium ſterilitate collata differentiam notabilem ipſis oculis ingerit; ſic ad cognoſcendum, qnod Phlegontei operis exiguae miculae ſuperſint, nulla re opus eſt, quam Photii indicio et iudicio. Vitio enim dat auctori nimiam diligentiam, quin putidam accurationem in ſingulis Olympiadibus percenſendis, ſingulorumque certaminum nominibus et rebus geſtis, atque ipſis etiam oraculis referendis, qua non poſſit non taedium lectori adferre, dum per eam reliqua omnia in hoc libro obteguntur, neque apparere ſinuntur. Certe nemo erit, qui in illa, quam manibus terimus, Scaligerana Ὀλυμπιάδων ἀναγραφῇ illam a patriarcha Photio reprehenſam curioſitatem nimiam, aut qui, reſponſa oraculorum ſuperſtitioſius collecta, notandi cauſam inuenerit. Atque vtinam eſſet nobis integer conſeruatus hic Phlegon: nam ſi habuiſſet, utique quae non iuuare patriarcham poſſent, ſuppeditaret certe, antiquitatum et hiſtoriarum minuta quaerere ſubinde coactis, innumera, quae indagationem eorum nunc fruſtrantur. Certe conſpecto Alcibiadis nomine in victorum curulis certaminis indice non cogitatum fuiſſet de Olympiis Macedoniis, quod Alcibiadi tantam gloriam attulerint.

Sed redimus in viam, quaeſituri annum, quo Alcibiadem Olympiae victorem citatum fuiſſe veroſimile ſit. Neceſſarium eſt vtique illum eſſe ante belli Peloponneſiaci annum XVII. a nobis requirendum: illo enim, qui Olympiadis LXXXXI. primus erat, habita eſt illa oratio Alcibiadis, cuius argumentum nobis diligentiſſimus et coaeuus ſcriptor THVCYDIDES refert, et vnde huius diſquiſitionis argumentum ſumſimus. Nimis itaque aperte hallu-

hallucinatur optimus PET. FABER, qui annum, quo apud Eleos vicerit Alcibiades, eundem esse scribit, quo ἡ τελεία συνωρὶς in Olympicis ludis primum recepta fuit. Id enim, teste illo, quem ipse adducit, DIODORO SICVLO Libr. XIII. cui plures adstipulantur a GVIL. LLOYD in *serie chronol.* laudati, accidit Olympiade LXXXXIII. adeoque post octo annos ab illa concione transactos. Erit itaque nobis fere tantundem, quam is descendendo aberrauit, adscendendum, vt deducamus ad veram illam, aut verosimillimam Olympiadem, qua victoria tam insignita fuit reportata.

Parum quidem accurate de annis tanti viri scripserunt veteres, de quo in aliis tam minuta consectati sunt, vt et eius nutricem nomine suo denotauerint. Referam tamen, quae mihi indaganti sese obtulerunt. Nicias, qui Alcibiadi maxime aduersabatur, in oratione illa, qua ipsum tantopere irritauit, inter alia, iuuentutem de republica consultando et imperio capessendo imparem obiecerat. THVCYDIDES etiam vbi Libr. V. refert quam callide res miscuerit, vt bellum cum Lacedaemoniis nuper compositum redintegraretur, ita illum describit, quod fuerit ἀνὴρ ἡλικίᾳ μὲν ἔτι τότε ὢν νέος, ὡς ἐν ἄλλῃ πόλει, ἀξιώματι δὲ προγόνων τιμώμενος. vir valde tunc iuuenis, si ex aliarum vrbium moribus iudicandum esset, cui tamen claritas maiorum auctoritatem faciebat. Scilicet olim Athenis constitutum fuerat, vt non nisi L. annis maiores in concionibus sententiam de republica dicerent: sed Alcibiadi fauor populi multa concedebat, quae aliis non aeque indulgebantur. Hoc autem accidit quarto ante illum anno, quo se Niciae debebat obiicere,

 belli

belli autem Peloponnesiaci duodecimo. Pugnae cum Potidaeatis, quae ante hoc tantopere celebratum bellum altero anno accidit, admodum adolescens intererat, manifesto periculo tunc per commilitonem Socratem ereptus. Non possumus vtique eum minorem XVIII. aestimare, quod tempus minimum erat, quo adolescentes militare incipiebant. Atque hoc assumto consequitur Alcibiadem vix quatuor annos natum fuisse, quum pater eius Clinias Olympiadis LXXXIII. anno secundo apud Coroneam fortiter pro patria pugnans decederet, ipsumque tutorum curae relinqueret.

Iam si cogitamus immanes sumtus, quos Alcibiades fecit equis alendis, et memorabilem profusionem in sacrificiis et epulis praebendis, de quibus apud PLVTARCHVM in vita eius et ATHENAEVM dipnosoph. libr. XII. ex scriptoribus coaeuis refertur: vix alicui videbitur fieri potuisse, vt Alcibiadi sub tutoribus constituto integrum fuerit tantas impensas facere: praesertim si consideretur, non solum ad Olympia illum equos suos et currus misisse, sed alia etiam sacra certamina adiisse et inde coronas abstulisse: quod de Nemeis satis certum est ex PAVSANIA lib. I. cap. XXII. Oportet igitur id tunc demum accidisse, vbi iam sui iuris fuit et tutelam excessit: quod legibus veterum Atticorum aliquanto serius, quam apud Romanos, videtur factum. Nam quum hi tutela pupillum dimitterent decimo et quarto aetatis anno peracto, eidem tamen curatorem bonorum vsque ad vicesimum et quintum adiungerent; ne per lubricum aetatis rem a parentibus relictam dissiparent: curatores equidem apud Graecos non inuenio datos, sed tutelam

ad

ad annos decem et octo productam. Clare hoc apparet ex DEMOSTHENIS orationibus in Aphobum, quibus tutores suos ad iudices defert, patrimoniique sui admodum male administrati reos agit. Si itaque Alcibiades decem et octo annos natus tutela exiit, et militare patriae suae moribus eodem tempore coepit, atque se equestribus exercitationibus tradidit; potuit vtique tantum in iis progredi, vt Olympiade LXXXIX. profectibus suis aliquantum confideret et periculum eorum facere auderet: quo tempore vicesimum septimum annum egisse eum colligo.

Atque me non multum forte aberrare in hoc anno designando vel illud maxime persuadet. quod inuidiae in Alcibiadem publice tunc exsurgentis ob illam equestris rei gloriam clara documenta exstant. Illo enim anno ARISTOPHANES produxit comoediam, quae *Nubes* inscribitur, qua Socratem, Alcibiadi carissimum virum, ita traducit, vt manifeste mordeat Alcibiadem, cuius etiam matrem et genus aperte insectatur, et ab illo insano equestris rei studio multa reipublicae mala extimescenda proponit. Quemadmodum autem fumus ignem, sic inuidia gloriam prodit: haec autem tam euidentia eius documenta in hominem tam nobilem et potentem edita, caussam sane magnam, a qua irritata et excitata fuerit, debent nobis indicare.

Neque obstare huic sententiae nostrae potest, quod illo anno Alcibiades in castris ad Delium Boeotiae degit. Is enim sacris ludis honor habebatur, vt, quando instabant, induciae inter vrbes bellum gerentes publico consensu denunciarentur, vt cuiuis ad eos conuentus abire volenti nihil obstaret, quo minus secure commodeque adire

ire

ire illos et ab iis Poſſet diſcedere. Si vero alicui dubium ſit, an propter inducias illas militibus ſuis imperatores permiſerint diffluere et a ſignis tam longe diſcedere: aliud omnino ſuccurrit ex THVCYDIDIS accurata deſcriptione. Fuit enim ſero demum auctumno raptim et ſubito ſuſcepta, et potius repentina irruptio, quam iuſta et prouide inſtituta expeditio, cuius propterea ſucceſſus conceptae ſpei minime reſpondebat.

Atque haec puto ſufficere ad intelligendum, nullam eſſe neceſſitatem victoriam Alcibiadis Olympicam ad Macedonas ab Eleis transferendi; quod doctiſſimo BARNESIO viſum fuit: et quod PETRVS FABER in illius victoriae deſcriptione nullum ſuae perſuaſionis de pluribus pretiis ſingulorum certaminum victoribus propoſitis praeſidium ponere debuiſſet. Haud equidem ſpero fore vt aliquis credat, magnas Fabro ſuppetias ferri a ſcholiaſtae Thucydidei auctoritate, qui verba ſui ſcriptoris, ἐνίκησα δὲ καὶ δεύτερος καὶ τέταρτος ἐγενόμην, ita exponit: ἐνίκησα τά τε πρῶτα, καὶ τὰ δεύτερα, καὶ τὰ τέταρτα. Hunc locum videas vere ita intellectum a doctis viris, vt tria praemia Alcibiades reportauerit, ſummum ſcilicet, ſeu βραβεῖον, minus aliquod ſed ab ſummo proximum, et denique minimum, quod quartum fuit. Enimuero ſalua res eſt. Vere vicit Alcibiades τὰ δεύτερα et τὰ τέταρτα, et is, qui in decretorio illo certamine tertius fuit, vicit τὰ τρίτα. Hoc eſt vicerunt quiſque in ſecunda, tertia et quarta τάξει. Sed debebant hi victores inter ſe porro decertare tam diu, donec vnus omnes reliquos manifeſte viciſſet. Atque vnus is fiebat Olympionica eius certaminis, in quo omnes antagoniſtas vicerat. Clariſſima ſunt verba PAVSANIAE

Libr.

Libr. VI. Cap. XIII. *οἱ δ' ἂν ἐν ἑκάστῃ τάξει κρατήσωσιν, ὑπὲρ αὐτῶν αὖθις θέουσι τῶν ἄθλων.* Atque *νίκας*, id est victorias, eos retulisse, qui in classe sua priores aut superiores fuerant, minimeque abhorruisse veteres ab hac loquendi ratione, id clarissime apparet ex IVLIANI Caesaribus, qui ita loquitur: *ὁ τοῦ τὰς πολλὰς ἀνελομένου νίκας κρατήσας, ἑνὸς περιγενόμενος, οὐδὲν ἔλαττον δοκεῖ κἀκείνων γεγονέναι κρείσσων, οἳ προσεπάλαισαν μὲν οὐδαμῶς αὐτῷ, τοῦ κρατηθέντος δὲ ἥττους ἐγένοντο.* Quin videmus adeo numeratas fuisse palmas, quas victor multorum *προτερησάντων* reportasset. Reuera enim is auferebat illis victorias, quarum causa coronari debebant, si pauciores competitores coronae fuissent, aut res transigi paucioribus decursionibus potuisset. Proinde tamen non multiplicabantur coronae, non augebantur praemia. Vnum enim erat, quod omne pretium complectebatur, praemium, corona et vox praeconis, quae publice victorem illum vnum declarabat.

Quoniam in hac controuersia diiudicanda non parum pendet a temporis rationibus recte positis; ad eas digerendas animum quam maxime adieci. Est autem obscurum, quo anno natus Alcibiades fuerit: quo vero obierit, a DIODORO SICVLO clarissime notatum inuenio. CORN. NEPOS obiisse ipsum scribit annos circiter quadraginta natum: quod fieri omnino nequit, vt admittamus. Esset enim necessarium vt natum crederemus aliquot post patris sui obitum annis, et decennem admodum prima stipendia meruisse. Aut igitur anni in illa vaga determinatione supra quadragesimum plures intelligendi erunt: aut pro quadraginta, qui nunc leguntur,

tur, Nepos quinquaginta scripsit: a quibus certe tunc prope abfuisse Alcibiadem, quum vita decederet, omnis historia confirmat. Suppono ipsum, quum prima ad Potidaeam stipendia faceret, annos XVIII. habuisse; quod legibus Atheniensium conuenire existimo: atque hoc assumto consequitur, Olympiade LXXXII. Alcibiadem in lucem editum fuisse: aut certe ante Olympiadem LXXXIII. Subiiciam itaque chronologiam Alcibiadis, auctorum idoneorum testimoniis confirmatam.

Olym-

Olympiad.	Anno	
LXXXII.	1	
	2	
	3	
	4	
LXXXIII.	1	
	2	Athenienses ad Coroneam infeliciter pugnant. *Diod.*
	3	*Sicul. Libr. XII.* In hoc praelio Clinias pater Al-
	4	cibiadis cecidit. *Plutarch.*
LXXXIIII.	1	
	2	
	3	
	4	
LXXXV.	1	
	2	
	3	
	4	
LXXXVI.	1	
	2	Pugnatur ad Potidaeam. *Diodor. Sic. Libr. XII.*
	3	*pag.* 305.
	4	
LXXXVII.	1	Iterum pugnatur ad Potidaeam. *Diod. Sic. Libr.*
	2	*XII. pag.* 305. Alterutri pugnae Alcibiades tunc
	3	admodum adolescens intererat, manifesto periculo
	4	per Socratem contubernalem ereptus. *Plutarch. p.* 194.
LXXXVIII.	1	
	2	
	3	
	4	
LXXXVIIII.	1	Aristophanes Nubes docet. *Sam. Petit. in miscell.*
	2	Sero auctumno Alcibiades pugnae ad Delium interest,
	3	iterum socio Socrate. *Plutarch. pag.*
	4	Alcibiades turbat res inter Lacedaemonios et Athenienses. Ad Mantineam gesta
LXXXX.	1	
	2	
	3	
	4	

Olympiad.	Anno	
LXXXXI.	1 2 3 4	Alcibiades contendit cum Nicia, in Siciliam mittitur. *Thucydides Libr. VI. Diodor. Sicul. Libr.* XIII. Mox absens accusatur, revocatur, ad Lacedaemonios perfugit.
LXXXXII.	1 2 3 4	
LXXXXIII.	1 2 3 4	Athenas redit. mox recidit in offensam civium suorum. *Diodor. Sicul. Libr.* XIII. *pag.* 368.
LXXXXIIII.	1	Fraude Pharnabazi interficitur. *Diodor. Sicul. Libr.* XIV. *pag.* 400.

DE

DE GANDISAPORA
PERSARVM QVONDAM ACADEMIA MEDICA OBSERVATIO HISTORICA.

Io. Henr. Schulzii.

Si linguae, quas Asiam incolentes populi hodie vernaculas habent, totidem cultores in Europa nactae fuissent, quam vel Graecae vel Romanae obtigerunt; atque typographorum praela libros earum gentium toties renouassent ac multiplicassent, ac Latina et Graeca monumenta per tria admodum saecula incudi subiecta fuerunt: minime dubitandum videtur factum pridem fuisse, vt de multis historiarum monumentis, quae inter obscura hodie reponuntur, multo certiora nossemus, et aliqua, quae nos scire remur, aliter apud illos tradi cognosceremus. Non equidem ignoro dari multa, in quibus longissime ab omni antiquitate recedunt scriptores illi, qui sua ad Muhammedis Coranum debent accommodare, illiusque auctoritatem, quam sacrosanctam putant, tueri enixa opera omnique studio et ingenio coguntur; in quibus nemo nostrum erudiri se ab illis cupiet. Sed si ista demantur solaque haec spectentur, quae post Muhammedis tempora acciderunt, aut quae ab illo non deformata fuerunt; supersint sane multa, in quibus illis, qui rebus domi suae gestis aut interfuerunt aut propius adfuerunt, maiorem fidem, quam remotioribus quibuscunque tribuendam esse cum recta ratione statuere possumus. Et sunt profecto non pauca, quae aut ignorare oportet, aut ex orientalibus scriptoribus requirere. Neque contemnendi ista momenti

menti sunt, sed tam magni, quantum historiae, tam ecclesiasticae, quam ciuili et litterariae omnes merito tribuimus.

Huius generis puto illam, quam suscipio, disputationem de vrbe Persiae Gandisapor, quae et Giondisabour scribitur: possemusque Saporopolin, vtpote a Sapore conditam, vocare, vt Constantinopolis a Constantino denominatur. Multum illa celebratur in scriptis eorum, qui res Persarum ecclesiasticas describunt: nec raro eadem commendatur ab illis, qui de doctis viris, praesertim medicis in orientalibus terris celebribus, aliquid consignarunt. Habuit enim episcopum praecipuae auctoritatis inter Nestorianae sectae addictos, Metropolitani auctoritate fulgentem, primum dignitate a Catholico, quo se nomine venditabat ille, qui Seleuciae sedem tenebat, et de primatu cum aliis certabat. Fuit porro in illa nosocomium et schola medica, ex qua abunde multi prodierunt, qui episcopale fastigium conscenderunt, aut in aulis primorum Chalifarum comites archiatrorum fuerunt, et pro ea, qua in aulis principum valebant, gratia, plurimum poterant in rebus ecclesiasticis ad suum nutum vel dirigendis vel turbandis. Neque exigua fuit illorum, qui in illa schola bonis litteris et medicinae operam dabant, auctoritas, quum in patriarchae electione partem haberent.

Quae singula effecerunt, vt de hac tam clara et nobili vrbe per complures annos, perque omne genus librorum requirerem, quae ad statum eius intelligendum possent aliquid adferre. Enimuero satis superque didici, verissimum esse, quod EVSEB RENAVDOTVS *de liturg. Tom. II. pag.* 471. conquestus est, rem adeo fluxam et incer-

incertam nobis esse omnem de regionibus et vrbibus orientalium gentium disputationem, vt postquam limites populorum et prouinciarum magno labore ex antiquis geographis constituti sunt, vbi comparantur cum sequioris aeui scriptoribus Graecis, Syris et Arabibus, coniecturae prope omnes, etiam verosimiliores euanescant. Tanta enim per continua Persarum et Romanorum bella, deinde per Arabum dominationem, perque bellicosarum gentium inuasiones, mutatio rerum facta est, vt complures olim celeberrimae vrbes excisae sint, nihilque certi de earum situ et origine affirmari possit.

Sed de his desino conqueri et ad propositam mihi rem accedo. GREGORIVS ABVLPHARAGIVS, qui et BAR-HEBRAEVS audit, celebris per Orientem medicus et Maphrianus, id est Primas Orientis sectae Iacobitarum, post medium SAEC. XIII. floruit, vir litteris Graecis, Syriacis et Arabicis excultus, multorum ad omne scientiarum genus pertinentium scriptorum auctor. Videri potest illorum notitia, quam longo ordine dedit vir de litteris orientalibus longe omnium maxime meritus IOSEPHVS SIMONIVS ASSEMANVS, *bibliothecae orientalis Clementino-Vaticanae, Tom. II.* a pag. 245. ad 272.

Eminent autem inter illius monumenta duo opera ad historiam pertinentia, alterum arabico stilo exaratum, quod doctissimus EDVARDVS POCOCKIVS edidit sub titulo *Historiae compendiosa dynastiarum*, alterum *Chronicon Syriacum*, in tres partes diuisum, quod laudatissimus ASSEMANVS opus luce dignum, et omnium, quae Bar-hebraeus edidit, doctissimum aeque ac vtilissimum iudicat,

dicat, in bibliotheca Vaticana adseruatur. Huius prior tantum pars est, quam auctor breui ante obitum suum tempore Arabice a se conuersam reliquit et Pocockius in lucem protraxit. Enimuero longe pleniora esse omnia in Syriaco, siue facta Arabum et Mogulensium spectes, siue res Christianorum in Thracia, in Syria, in Mesopotamia et in Perside, doctus Assemanus testatur et speciminibus cnmprobat *c. l. pag.* 312.

In hoc dynastiarum compendio de Aureliano Augusto in huncce modum scribit: „Aurelianus Caesar sex „annos imperauit. Pacem iniit cum Sapore Persarum re„ge, eique filiam suam nuptum dedit, cui exstruxit Sa„pores in Perside vrbem Byzantio similem, quam Giondisa„bur appellauit. Misit autem Aurelianus, qui inseruirent fi„liae suae, medicos Graecos quosdam, atque illi medi„cinam Hippocraticam in Oriente docuerunt.

En illustre ac notatu dignissimum historiae momentum, quod vtique mereri videtur seriam inquisitionem. Tam autem multa ipsi insunt, quae seorsum considerari debent, vt omnino paucis defungi hoc labore non liceat.

Primum autem remouenda videntur, quae ad testimonii huius ipsiusque testis auctoritatem eleuandam possunt excogitari, aut iam prolata fuerunt. Quod igitur vnicus testis, isque aeui admodum recentis, id dixit, omnino morari adsensum ita potest, vt nemo debeat magno vitio dubitationem etiam protractiorem vertere. Enimuero quod vnicus est, imputandum paupertati nostrae videtur et alieni socordiae in requirendis publicandisque codicibus orientalium scriptorum, qui plurimi et optimi non suo merito in tenebris latitant, protracti autem, lecti

lecti et intellecti multa nos edocere possent, et, si quid augurior, posteros nostros edocturi sunt.

Si recens est scriptor Abulpharagius, constat eum vetustissimae memoriae auctores et domesticos testes ad manus habuisse, quos nemo vel nostrum vel Romanorum, qui Aureliani temporibus propiores fuerunt, inspexit. Nactus est Aurelianus Aug. vitae factorumque suorum scriptorem FLAVIVM VOPISCVM, aeuo Constantini supparem, cuius silentium de tam nobili argumento fraudi esse Abulpharagio non debet. Quantumuis enim ostentet ephemeridas, in quibus ipse quotidiana sua scribi praeceperat, ex bibliotheca Vlpia acceptas; vel mancae illae fuerunt, vel parum diligenter illis vsus est, qui de maximi ponderis vitae momentis tam ieiune et imperfecte conscripsit. Quis enim legens apud VOPISCVM, quod Aurelianus legatus ad Persas ierit, donisque honoratus fuerit, qualia imperatoribus tantum dari a rege Persarum solita sint, non optauerit adiectum, a quonam missus, cuiusque rei causa, fuerit. Vix dubium esse potest, talia fuisse in istis libris consignata, atque posteritatis memoriae consultum tantarum rerum annotatione melius fuisse, quam quod friuoli tantum augurii argumento ea adnotauit.

Sed omnem hanc Abulpharagii narrationem in fabulas reiecit vir doctissimus et de Augustorum historia, si quisquam alius, praeclare meritus TILLEMONTIVS. Videamus quo argumento. Non solebant, inquit, Romani filias suas exteris elocare. Certe hoc non magis solebant antiqui, quam exteras ducere. An propterea Antonius triumuir non duxit Cleopatram Aegyptiam?

 Id

Id quod sollemne et publicis moribus receptum ac legibus etiam cautum est, tam non est perpetuum, vt non aliquibus potentibus libeat et liceat praeter solitum facere. Tota Pompeii vita est series euentuum, qui aliter, quam Romae solebat agi, plaudente omni populo contigerunt. Et vt porro appareat, multa aliter fieri ex necessitate, vel propter vtilitatem, quam olim solebat fieri, nulla re opus est, quam considerare tempora Aurelianeis propiora. Quis propterea negauerit Valerianum Aug. in vinculis Persicam multis annis mansisse, atque etiam decessisse; quod prisci Romani non fuerunt soliti permittere, vt ciues bello capti aut signa captiua in hostium potestate manerent: quod bella eorum causa susceperunt, coegeruntque hostes redditis captiuis pacem redimere. Tanto autem magis vel ignauia vel imbecillitas Romanorum admirabilis videri debet, quia Valeriano fuit filius Augustus, a cuius pietate exspectandum videbatur, vt id tam graui causa faceret, quod maiores sui ob mercatores laesos aut nauem onerariam captam et detentam fecerunt.

Sed bene tamen habet, gratiaeque Vopisco debentur, qui nobis legationem hanc commemorauit, vnde ad coniecturas non improbabiles ducimur, quo pretio Valerianus fuerit Persis proditus. Videtur intellexisse Vopiscus, quam parum Aureliano suo honorifica futura esset vera et plena illius legationis descriptio, ideoque in friuolis recensendis operam consumendam existimauit. De reliquo non video, quid Aurelianum, quum legatione illa fungeretur, adhuc priuatum deterrere potuerit, quo minus filiam Sapori permitteret, quum Romanas vxores Chosroes Abruizus et quidam Chazarorum rex, atque hic

ideo

adeo imperatoris filiam deinde habuerint. Ne dicam quam parum connubiorum priscae leges obseruatae fuerint, iam satis longo ante Aurelianum tempore. Certe in Septimii Seueri domo matrem familias Syram, et in omni deinceps familia eiusdem nationis mulieres deprehendimus. Sed haec missa facio, quae nec ipse adiecissem, nisi me antiquae consuetudinis Romanae intempestiua obiectio ad leuitatem argumenti ostendendam deduxisset.

Grauius est, quod ad hanc de origine Gandisaporae narrationem labefactandam deducitur dubium ex chronico Abulpharagii Syriaco, ex quo ortus Gandisaporae in hunc sensum apud ASSEMANVM *Tom. IV.* refertur: „Abducto „in Persidem Valeriano, Gallienus Christianis pacem red„didit. Sapores autem in Perside aedificauit ciuitatem Con„stantinopoli similem, quam Gandisapor appellant, eam„que (Valerianum) ibi collocauit. Porro aduenerunt „cum eo complures periti medici Graeci, qui medici„nam Hippocraticam in Oriente disseminarunt.„ Enimuero constat Arabicam dynastiarum historiam ab ipso auctore in compendium ex Syriaco esse redactam: adeoque cogitationes posteriores ipsum praetulisse prioribus manifestum est. Iam si matrimonium cum Aureliani filia, quod ad nos parum pertinet, non confirmatur: manet tamen vrbis nouae origo et medicorum in illam aduentus etiam hoc testimonio inconcussus. Commode autem explicandum est, quod Gandisaporam Constantinopoli similem scripsit: scilicet talem, quae magnificentia et cultu non concederet illi, quam Constantinus postea exstruxit et de suo nomine appellandam voluit.

Pro-

Progredimur ad plura inuestiganda, dabimusque operam, vt annum illius legationis, si fieri potest, certum reddamus, aut coniectura verosimili assequamur. Non est dubium quin Sapores hic intelligendus sit secundus, Artaxaris filius, quem Orientales Ardschir Babegan denotant. Nam non alius Sapores conuenit temporibus Aureliani adhuc priuati. Atque ad hunc pacis componendae caussa legatus fuisse videtur eo tempore, quo, Valeriano imperante, Cyriades anno CCLVIII. Persas in Romanorum ditiones duxerat tanto successu, vt, Mesopotamia omni vastata, Antiochiam quoque caperent et diriperent: quo facto, nemine repellente, ad suas regiones abierunt, vt opimam praedam domum referrent.

Hoc admisso tempore Gandisaporae ortum iam clarius intelligimus, adhibito alterius scriptoris orientalis AMRI testimonio, quem ASSEMANVS citat *Tom. II. pag.* 398. Is enim diserte testatur vrbem Gandisapor conditam fuisse, postquam ingens praeda ex Romanorum terris, ac praesertim ex Antiochia fuisset capta et abducta. Enimuero hic auctor nouam crucem historiae figit, dum Saporem alium, qui temporibus longe posterioribus vixit, conditorem vrbis ostendit, scilicet Hormisdatis filium, quem nos Saporem III. designamus, qui vitam et imperium, quod nondum natus acceperat, ab anno Christi CCCIX. ad CCCLXXX. prorogauit, adeoque a temporibus Diocletiani ad Theodosium vsque rebus praefuit. Ad Amri mentem alius scriptor orientalis MARES, qui vitam Papae, episcopi Seleuciae, condidit, fertur commentatus. Sed saepius iam laudatus ASSEMANVS in non satis genuina monumenta incidisse hos scriptores, aut

studio

studio Gandisaporensis episcopi praerogatiuam amplificandi aliquantum magis quam veritati studuisse existimat. Quicquid horum sit, quoniam mihi non licet in controuersiae ad nos non pertinentis amplam expositionem descendere, satis illud apparere tamen existimo, quod duo auctores in eo consentiant, Gandisaporam ex ruinis Antiochiae creuisse et amplificatam ac exornatam fuisse. Eam autem vrbem temporibus Saporis III. captam et direptam fuisse, nemo scriptorum illius aeui annotatum reliquit.

Quare non possum, quin ad Saporem potius II. quam III. referam Gandisaporae originem; interim in medio relicta quaestione, vtrum Aureliani natam honorandi causa ad illud opus suscipiendum et perficiendum Sapores tum primum accesserit, an magis strenue in eo perrexerit, vt tanto libentius ac iucundius inter Persas degeret. Quod autem in Syriaco chronico legitur, Valeriano a Sapore capto domicilium Gandisaporae datum fuisse: id non debet destruere priorem vrbis condendae vel exornandae causam. Scilicet beneficii loco is habere debebat, quod in vrbe Graecis hominibus frequentata degere ipsi concessum fuit. Ceterum ea, quae de durissima captiuitate et miserabili morte Valeriani a nostris scriptoribus relata sunt, forte nimium fuerunt exaggerata: quoniam Orientalium nullus quicquam de eo commemorauit, quum id reticendi caussam tunc saltem non habuerint, postquam Persarum dynastia omnino deleta, summa rerum ad Chalifas Sarracenorum fuerat delata: satisque libere de saeuitia Persarum in Christianos tradiderint, nec rationem supprimendi habuerint viri Christianis quondam tam infensi miserum exitum, saeua vita non indignum, si domi suae quicquam de eo audiuissent.

Atque adeo Gandisaporae conditae aeram sic satis probabiliter collocabimus inter annos CCLVII. et CCLX. Proximum est, vt quaeramus eius situm: quem satis constanti consensu tradiderunt orientales scriptores NASSIR ETTVSAEVS et VLVGBEIGVS in tabulis, quae in geographiae scriptorum minorum, Oxonii editorum, Tomo III. insertae sunt. Vterque enim Gandisaporam tribuit prouinciae Chorestanae, eique longitudinis gradum LXXXIV, et minuta quinque, latitudinis autem XXXI. minuta LV. adsignat. ABVLPHEDA, ab Assemano adductus, haec habet: Gandisapor, Chuzistanae vrbs, ab ea ad Tostar sunt octo parasangae, et ad Susam sex parasangae. Atque hos adductos auctores sequutus est Arabicae aliarumque Orientis linguarum gnarissimus Professor Parisiensis in tabula geographica, quam vitae Timuris a se in gallicum sermonem conuersae Tom III. inserendam ad paginam 193. curauit.

Nimis itaque longe aberrauit IO. FREINDIVS in historia medicinae, qui Gandisaporam et Nisaporam vnam eandemque vrbem existimauit. Haec enim Chorasanae prouinciae est, et, vt BARTHOLOMAEVS HERBELOTVS ex scriptis idoneis addocet, situm longitudinalem habet sub gradus XCII. minuto XXX. latitudinis autem in septemtrionem extensae gradum XXXVI. et minutum XXI. aequat. Sed videor mihi inuenisse, quid viro eximio fraudi fuerit, eumque induxerit vt crederet Nisaporam et Gandisaporam vnam et eandem esse vrbem. Scilicet cum apud Abulpharagium Latine conuersum *pag.* 143. legisset medicum celebrem Georgium Bachtischuae filium Gandisaporensem; deindeque in eadem versione

pag.

pag. 198. Nisapora accensitum illum in aulam Ruschidi inuenisset: nomina haec vnam eandemque vrbem denotare forte credidit: praesertim cum inter Chorosanam et Chorestanam prouincias exigua sit nominis discrepantia, quarum haec Gandisaporam, illam Nisaporam contineat. Enimuero manifestum est textum Arabicum vltimo hoc loco corruptum, snioremque lectionem esse, quam Pocockius margini textus Arabici adiecit ex alio scripto codice, qui pro Nisapora Gandisaporam legit.

In hac igitur vrbe a prima sua origine, hoc est ab saeculi christiani tertii anno circiter sexagesimo, schola medica floruit, a viris Graecam medicinam edoctis fundata. Quum vero in Persia Christianorum numerus augeretur, istique scholam etiam sacram condidissent in vrbe eiusdem prouinciae Lapetha seu Beth-Lapetha; mandatumque, incertum quo tempore, sedes Elamitarum metropolitana vna cum schola ex Lapetha Gandisaporam transferretur: factum est vt schola sacra cum medica in vnam coniungeretur, sicque celebritatem magnam, frequentemque discentium numerum consequeretur.

Nam quum Christianorum antistites in varias sententias scinderentur: neque illis dissensionibus tollendis et vniformi doctrinae reddendae concilia sufficerent; isti autem, qui pertinacius suis inhaerebant sententiis, imperantium iussu migrare ex prouinciis Romano imperio subiectis cogerentur: magno numero illi concedebant in regiones Persarum dominio subiectas, quae ab eo tempore cum illis, qui recte de religione et ad mentem conciliorum oecumenicorum sentiebant, magno etiam numero Nestorii aliorumque damnatorum dogmata sequentium

C

tium implebantur. Atque tanto magis huc, tamquam ad portum, confluebant, qui ob singulares suas sententias a ceteris exagitabantur, quum Persis persuasum esset, tanto se fidelioribus vsuros esse Christianis in suo regno degentibus, quanto longius dissiderent ab istis, qui Romano imperio parebant, a quo tantum non perpetuis bellis distinebantur.

Postulat hic maxime locus, vt ante aliquid de Elymaide, Lapetha et Huzitide dicam, quam ad Gandisaporam amplius describendam progrediar.

De Elymaide, quantum ex scriptoribus Graecis et Romanis consequi potuit, ample et accurate exposuit vir non minus antiquae doctrinae vbere copia, quam sua modestia celeberrimus CHRISTOPH. CELLARIVS, geographiae antiqu. Libr. III. Cap 19. sect. 3. quem luminibus orientalium litterarum benigne supplet et illustrat vir incomparabilis ASSEMANVS Tom. IV. pag. CCCCXIX. et seqq. nobisque ostendit a quatuor diuersis populis Elymaeis, Susiis, Vsiis et Chusaeis, in vnam gentem coalitis, prouinciam illam fuisse habitatam. Habuere illi Metropolitanum, qui primum locum post Seleuciensem Primatem obtinuit, atque in Syrorum monumentis triplici modo denotatur. Scilicet ab gentis vniuersae nomine vocatur Metropolita Elamitidis: a sede antiquiori in vrbe Lapetha, quae et Beth-Lapetha, Lapethensis: denique Gandisaporensis recentissime vocatur ab eo tempore, quo sedes Metropolitae, vna cum schola, ad vrbem Gandisaporam translata fuit ex vrbe Lapetha. Haec Lapetha autem fuit primaria vrbs Huzitarum seu Vziorum, quos nostri scriptores Vxios vel

Oxios

Oxios vocare solent. Commemorauit illam suo nomine PROCOPIVS de bello Persico, cum eo, quod sit Vasainae regionis, et a Ctesiphonte septem dierum itinere sit dissita. Ex quo illud discimus, quod temporibus Iustiniani Magni integra superfuerit, Persisque paruerit.

Scholae, quam Lapethenses habuerunt, sacrae initia non facile determinare licet. Sunt autem vestigia non obscura, quae nos ad originem eius deducant. Scilicet saeculo V. quod modo Ioannem Chrysostomum, modo Nestorium exagitabat, omnemque rem Christianam in partes trahebat, Persae suam scholam apud Edessenos habebant, cuius magistro Nestorio se fauere non dissimulabant. Hac re commotus Rabulas, episcopus Edessenus, Chrysostomo addictissimus, Persas illa schola eiecit, ceteraque egit in Nestorianae factioni addictos admodum seuere. Prima eiectio facta fuit, vt Assemanus ostendit, circa A. C. CCCCXXXI. altera sub imperatore Zenone A. C. CCCCLXXXIX. omninoque cum scholae Edessenae fine coniuncta fuit.

Hi itaque in exsilium pulsi patriam repetebant, ac episcopatibus praeficiebantur: quorum non pauci in Huzitide consedisse memorantur. Istorum studio excitatae passim fuerunt scholae: quas inter Nisibena potissimum clara est facta. Sed quo tempore Elamitarum illa Lapethensis coeperit, quoue cum Gandisaporensi coniuncta fuerit, non adeo clare cognoscitur. Factum id iam fuisse post saeculi septimi medium, satis certum est ex iis, quae ASSEMANVS Tom. II. pag. 422. et Tom. IIII. pag. 615. recenset de Ioanne Marthae filio patriarcha Nestorianorum tricesimo nono, qui, cum in schola Gan-

 disapodissaporensi litteras iuuenis didicisset, et monachus aliquamdiu fuisset, metropolita Gandisaporensis, tandemque patriarcha A. C. DCLXXX factus est. Atque ab hoc tempore clara est et crebra mentio in historiis Orientalium huius scholae, multaque commemorantur, quae auctoritate illam non exigua valuisse comprobant. Sed haec clarius patebunt ex illis, quae inferius adferenda erunt.

Relinquimus igitur ea, quae ad sacram scholam siue Elamiticam siue Lapethensem pertinent, aliis amplius inquirenda, nuncque conuertimus studium ad medicam scholam Gandisaporensem, quae diu ante illam cum ecclesiastica coniunctionem per se viguerat; deinde autem, postquam coierunt, illustrius nomen magnamque auctoritatem consequuta est. Vellem autem multa esse, quae referre de antiqua eius gloria possem. Sed in tanto vetustorum monumentorum defectu, quae paucula suppetunt, exhibebo.

Scribit itaque vir doctus, et ipse medicus, quem initio laudaui, quod medici Graeci, Gandisaporam missi, medicinam Hippocraticam in Oriente docuerint. Non est dubium, quin fuerint ante illorum ex Graecia aduentum Persis sui medici: Sed illis non fidentes isti, qui ex Syria vicina, aliisque Romani imperii finibus, illuc habitatum concesserant, vna cum amore bonarum litterarum et am desiderium attulerant et conseruabant, vt corporibus suis curandis haberent viros peritos et rationalem artem professos. Omnes historiarum periti norunt, quam multi ab eo tempore, quo Alexander M. Orientem sibi subiecit, et ad suos successores transmisit, Graeca gen-

te

te oriundi illis regionibus consederint; quibus postea sub Romanis non pauci accesserunt: prorsus vt Syria et Mesopotamia omnis Graecorum essent plenae. Quumque Christiana religio vndiquaque inualesceret, eamque professi antistites haberent, qui Graecorum institutione vsi fuerant, certeque consuetudine ipsorum carere non poterant, quum libri ecclesiastici omnes et Synodi antiquissimae illa lingua exaratae essent: satis vero videri simile debet, in tot hominibus aliquos fuisse, qui arti ad corporum valetudinem conseruandam et reparandam tam necessariae pretium aliquod statuerent.

Quum porro isti, qui in prouinciis Persarum dominio subiectis habitabant, quoties bella cum Romanis gerebantur, non sine periculo satis certo vltra fines suos progredi possent; atque si per dominos id licuisset, ipsis Romanis suspectos se fore nossent: porroque religionis causa non parum ipsis molestiae apud Romanos crearetur: haec omnia videntur necessariam hanc illis curam fecisse, vt domi suae alerent viros medicinae Graecanicae peritos, quorum ope possent vti, vel qui valetudinem afflictam sentirent, vel qui discere vellent, quo pacto esset succurrendum in periculo versantibus. Efficiunt etiam haec dicta, vt fidem habeamus, medicinam semel in Persiam delatam studiose fuisse fotam et conseruatam: atque seorsum scholam Gandisaporae fundatam semper habuisse patronos, qui conseruandae eidem et exornandae operam darent.

Fuisse in illa vrbe nosocomium, quod praecipue inseruiebat ad artem instituendorum commoditati, praeter Abulpharagium multis locis comprobat ex ineditis Syrorum et Arabum libris illustris doctrinae vir ASSEMA-

NVS. Quisquis vetusta monumenta diligentius versauit, vix dubitare potest, esse xenodochia, ptochotrophea et nosocomia Christianae religionis fructus laude omni dignissimos. Mihi certe haud perfunctoria diligentia requirenti non obtigerunt huius generis instituta vel apud Graecos vel Romanos Christo nondum addictos: sed ante Iustinianum non longo tempore haec coepisse, et ab ipso egregia liberalitate aucta et amplificata fuisse, vel vnus PROCOPIVS pridem abunde me docuit. Ex quo fit, vt nosocomii Gandisaporensis antiquitatem ipsius vrbis initiis parem vix liceat credere. Idem fundatum a Persis aut profanae religioni addictis ex eadem ratione non adducor vt credam. Quin potius persuasissimum habeo, illud fuisse conditum a Christianis, qui in his locis consederant, sequutis exemplum aliorum in felicibus et commerciorum flore ornatis vrbibus degentium, quarum iam sexto saeculo paucae videntur fuisse, quae ornamentis huius generis prorsus destituerentur.

Mentionem nosocomii facientes iam adducendos existimo, vt eadem opera cognoscantur plura, quae ad illius notitiam pertinent. Primum audiemus GREGORIVM ABVLPHARAGIVM, iam toties laudatum, qui *Histor. dynast. pag.* 143. refert de Georgio Bachtischuae filio, quod ipsum Almansor medicinae apud se faciendae caussa Gandisapora accersiuerit. Hic itaque ad principem vocantem profectus nosocomii curam filio suo demandasse legitur. Factum hoc est circa annum Hegirae CXXXVII. Christi autem DCCLIV. Idem porro auctor anno Hegirae CCLV. Christi autem DCCCLXVIII. obiisse scribit Saburem Saheli filium, nosocomii Gandisaporensis praefectum, religione

gione Christianum, qui libros composuit celebres, ex quibus est liber medicamentorum compositorum, quem in nosocomiis et pharmacopoeis sequuntur, viginti duobus capitibus constantem.

Atque, vt durationem eius intelligas, exstat apud ASSEMANVM ex concilio A. C. cIↃ cccXVIII. habito canon, quo illis, qui medicinae operam dare cupiunt, praescriptum est, quibus antea imbuti exercitatique esse debeant, quam ad nosocomium admittantur. Notandumque est, quod illud concilium in hac constitutione sequutum fuerit longe antiquiorem, quam patriarcha Sabariesus circa A. C. IↃccc XXXIIII. condiderat.

Medicae illius scholae caput idem fuisse videtur praefectus nosocomio, cui ceteri, qui in medicina docenda, facienda, discendaue occupabantur, subordinati et subiecti fuerunt. Metropolitae autem fuit ius supremum omnes res scholae vniuersae administrandi et dirigendi: in quo saepe qui mali erant et auaritia contaminati, ita sunt versati, vt non parum res turbarentur, et controversiae insignes agitarentur. Id vbi incidebat, res ad Catholicum deferebatur, id est, ad supremum inter episcopos Nestorianos patriarcham, cui metropolitani et singularum dioeceseon antistites subiecti erant. Discere hoc licet ex longa narratione dissensionum, quae saeculi noni medio inter Marabam metropolitam Gandisaporae et scholam fuerant ortae, atque apud Abrahamum Catholicum ita disceptatae, vt Metropolitanus causa caderet; de quo videndus est ASSEMANVS *Tom. III. pag.* 508. 509.

Porro de hac schola medica illud mihi compertum est, quod iuuenibus non licuerit statim se ad artem salutarem conferre, ſed prius bene praeparandos ſe praebere debuerint. Pertinent haec propaedeumata partim ad pietatem et religionis praecepta, partim ad illas diſciplinas, quae ceteris omnibus vt inſtrumenta inſeruiunt. Et quamquam Niſibena Neſtorianorum ſchola omnes litteras ſaeculares excludebat, vt ASSEMANVS harum rerum vnus omnium peritiſſimus *Tom. IV. pag.* DCCCCXLII. oſtendit: idem tamen ſubiungit haec luculentiſſima: „Ceterum in aliis Neſtorianorum ſcholis praeter ſacrarum „litterarum ſtudium artes etiam liberales omnes doceri „conſueuiſſe, grammaticam ſcilicet, rhetoricam, poeticam, dialecticam, arithmeticam, geometriam, muſicam, aſtronomiam, medicinam, aliaſque, compertum „ eſt ex iis, quae Ebedieſus Sobenſis in catalogo ſcriptorum Syrorum refert: vbi tractatus de ſcientiis omnibus, „ac praeſertim philoſophici et medici, recenſentur.„ His tamen omnibus maiorem vel minorem fuiſſe operam impenſam, pro eo ac tempora Chriſtianorum floruerunt, aut magnis calamitatibus preſſa et afflicta fuerunt, facile intelligitur. Teſtantur de eo canones, quos ſaepius laudatus orientalium rerum promus condus ὁ πάνυ ASSEMANVS *Tom. IV. pag.* CMXL. produxit, quibus cautum eſt, vt omnes Chriſtianorum filii, antequam ad artem aliquam diſcendam admittantur, legant Dauidis pſalmos, nouum teſtamentum, et ex veteri illos maxime textus, qui in conuentibus ſacris ſolent praelegi. Atque haec conſtitutio fuit edita poſterioribus temporibus: quum felicioribus ſoliti fuiſſent totam ſcripturam ſacram in ſcholis pertractare, et tunc demum ad noſocomium dimitti, qui medicinae ſemet conſecraturi erant.

Quum

Quum sic appareat fuisse omnem scholam sub directione personarum ecclesiasticarum: ipsaque nosocomia inde a primis Christianorum temporibus ecclesiae fuerint subiecta et innexa: videtur sane admodum probabile, quod ad scholam medicam accessus non patuerit, nisi Christianorum liberis, atque non promiscue omnibus, sed qui eiusdem dogmatis essent asseclae. Facit haec consideratio, vt non existimem, Arabem illum medicum Hareth Ibn Calda, cuius mentionem facit Abulpharagius, discipulum in schola Gandisaporensi formatum et educatum fuisse. Scribit de ipso his verbis: Profectus in Persiam artem medicam didicit a Gandisaporae incolis. Videntur mihi hic intelligendi medici in schola illa formati, qui suis auspiciis artem in vrbe exercebant, quorum institutione vsus fuit. Nisi probari possit, eum admodum iuuenem illuc delatum et religionem Christianam sequutum fuisse: quod tamen vix colligas, quia scriptor circumspectus Arabem dicere et tribum eius indicare satis putauit: senem quoque Muhammedis tunc sua commenta spargere incipientis gratia floruisse, suisque commendatum ab eo fuisse annotat.

Ex quo illud quoque colligimus, superioribus addendum, floruisse scholam medicam Gandisaporensem saeculi sexti postrema parte: et, si recte habent, quae probabiliter collegimus, iam tunc fuisse cum ecclesiastica vnitam. Ne autem aliquid hic determinate et pro omnino certo ponerem, effecit testimonium ab ASSEMANO *Tom. IV, pag.* CMXXXIV. allatum, quod olim in schola siue Edessena siue Nisibena Christiani pueri et pagani in vna eademque schola edocti fuerint: quod cur

non

non eadem ratione Gandisapome factum fuerit, nullam video rationem sufficientem.

Addendum nunc est, vt scholae Gandisaporensis omnem statum melius peruideamus, quod praeter theologiam et medicinam in ea etiam tradita alia fuerint. Frequenter memorantur eiusdem scholae scribae: quos puto esse illos, quos occupatos tenebat studium legum, quo se aptos reipublicae negotiis ciuilibus reddere cupiebant. Certe inter Graecos et Orientales honorati homines erant οἱ γραμματεῖς: quod ex sacris litteris comprobari posset, et ex numis ample illustrari, si id locus hic permitteret. Quare minime mihi viderer rem adsequutus, si vel notarios vel calligraphos hic vellem intelligendos propinare: quamquam et his honos illo tempore habebatur, quum ad multa vtilis eorum esset opera, illo praesertim tempore et loco, vbi librorum erat magna raritas et par desiderium. THEODORETVS *Hist. ecclesiast. Libr. IV. Cap.* 18. vbi de schola Edessena agit, inter conditores eius laudat admirandum Protogenem, in sacris litteris eruditum et notarum peritum, qui puerorum magister factus, simul illos per notarum compendia scribere docuit et in diuinis eloquiis erudiuit.

Iam qui de Persis ex Edessena schola eiectis scribunt, simul cum ipsis aiunt excessisse Edessenos scriptores, qui eiusdem persuasionis erant, ob quam Persae expellebantur. Cumque hi partim apud Nisibenos consederint, alii apud Elamitas, vt supra dictum est, scholasque condiderint; omnino iustum videtur, horum etiam tam celeriter per notas scribendi, quam deinceps plenis et elegantibus litteris codices exarandi magistrorum et stu-

ſtudioſorum rationem habere. Veroque ſimile videtur hos homines, ſi legum etiam gnari et canonum eccleſiaſticorum periti fuerunt, in ſcholis redditi, multum in regenda et adminiſtranda republica neceſſarios et omnino commodos fuiſſe.

Quin poſſunt etiam, ſi ſcriptores ac ſcribas ſeiungere placet, interpretes librorum intelligi: ii ſcilicet, qui ex Graeca lingua in Aramaeam ſeu Syriacam, Chriſtianis omnibus per omnem Orientem vernaculam et in ſacris receptam, libros transferebant. Id vero ſtudium valde fuiſſe Syris commendatum, viriſque praeſtantiſſimis publica, vt colligere licet, auctoritate demandatum, norunt omnes in indagandis rebus hoc tempore per Orientem geſtis diligentius verſati. Certe Syri Arabibus in hoc longo temporis interuallo priores ſunt, eorumque ſtudium ita excitauerunt, vt non immerito videantur multae Graecorum librorum Arabicae interpretationes potius ex Syriacis quam Graecis codicibus factae.

Supereſt vt paucis diſpiciamus de ſcholae Gandiſaporenſis conditionibus omnibus. Eam ſub Metropolita fuiſſe, ſupra iam indicaui. Eundem exactionibus aliquando vexaſſe alumnos ſcholae, qui propterea in ius ipſum apud Catholicum vocauerunt, itidem iam attigi. Ceterum in eligendo Metropolita atque ipſo etiam Catholico Neſtorianorum, ſuffragia medicorum et ſcribarum illius ſcholae plurimum valuiſſe cum ex aliis teſtimoniis ab Aſſemano paſſim allatis conſtat, tum clariſſime ex illo, quod *Tom. III. pag.* 160. ex Amro adductum legimus: adde *Tom. IV. pag.* CMXXXVI.

Ceterum multos, qui in ſchola Gandiſaporenſi fuerunt educati, et medicinam olim exercuerunt, ad epiſcopalem, quin metropolitanam dignitatem, fuiſſe inter Neſtorianos euectos, facile intelligitur ex indiciis clarorum inter huic ſectae addictos, virorum, qui muneribus eccleſiaſticis defuncti ſunt.

Apparet ex eo, quod Gandiſaporenſis ſchola medicinae potiſſimum intuitu, diuerſa ſequuta fuerit ab aliis in Oriente Neſtorianorum ſcholis, quae tantum fuere eccleſiaſticae. Huius generis erat illa Niſibena olim celebertima, vt in ipſam Europam et Africam eius fama propagaretur. Inter huius leges fuit aliqua in hunc modum ſcripta: „Nemo fratrum, qui in ſchola docentur, „medicum ſequatur, aut lectionem ab eo excipiat. Non „enim conueniunt libri ad fidem ſpectantes cum litteris „ſaecularibus„ Ergo ne quidem permittebant Niſibeni ſuis alumnis ad medicum extra ſcholam diſcendi cauſa accedere: tantum aberat, vt ipſi in ſchola magiſtros artem docentes praeberent. Atque hoc ita iam fuit conſtitutum, antequam coniunctio eccleſiaſticae ſcholae Gandiſaporenſis cum antiquiori medica videtur fuiſſe facta.

Fuerintne plures, praeter Gandiſaporenſem, in quibus medicinam docere ac diſcere licuit, non habeo ſatis exploratum. Illud inuenio apud Graecos Conſtantinopolitanos, ſero tandem a patriarcha Luca, poſt ſaeculi XII. medium, fuiſſe cautum, ne quis medicinam exercens, et ne archiatri quidem dignitate exornatus, diaconus vel ſacerdos fieret, cauſa ſubiuncta: „Non eſſe ferendum, vt qui cum infulis et caſulis ſancta tractant, ſae„cularibus veſtibus induantur, et cum laicis, viris ſcilicet „medicis, incedant. Quam legem refert ENIMVND. BONEFIDIVS *iur. oriental. pag.* 147. 148.

OBSER-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE

OBSERVATIO ECLIPSEOS LVNAE PARTIALIS

d. 21. Decembr. 1740.

d. 1. Ianuar. 1741.

IN OBSERVATORIO IMPERIALI PETROPOLITANO HABITA.

A

Godofredo Heinsio.

Obseruationis huius eclipseos successum exoptatum spondebat quidem maxima caeli serenitas; ast frigus ingens, cuius intensitas ex gradu 180, quem thermometrum mercuriale ex diuisione Cl. de l' Isle indicabat, colligi potest, magnam occupationum partem frustraneam reddidit, cum saepe membrorum frigore rigentium curam habere necessitas vrgeret. Impedimenta haec iam preuisa suadebant, appulsus vmbrae tantum ad praecipuas lunae maculas obseruare. Quem in finem quoque duas circiter horas ante eclipseos initium aliquot macularum loca in disco lunae determinabam ope machinae paralacticae tubo 8. ped. instructae, qui reticulum ex quatuor filis ad angulos semirectos versus se inuicem inclinatis continebat. Eodem apparatu deinceps vsus sum in ipsa eclipseos obseruatione, in qua per tubum memoratum non solum appulsus vmbrae ad maculas attendi, verum etiam appulsus cornuum lunae eclipsatae ad filum horarium reticuli, quantum quidem licuit, annotaui, vt exinde quantitatem partis obscuratae colligere possem. Obseruationum praecipua momenta haec sunt. Tab. XIV.

Ordo Obseru.	tempus verum stylo Astronomico.	
1	$12^h. 11'. 30''$.	Penumbra ad Schickardum debilis adhuc.
2	— 17. 30.	Penumbra manifesta.
3	— 20. 0.	Initium iam factum videtur in regione Schickardi.
4	— 20. 50.	Initium certe factum. Vmbra cum penumbra tantum confundebatur, vt de termino vmbrae nihil certe concludere liceret, quamobrem de momento initii satis certus non sum.
5	— 27. 25.	Mare Humorum tangi videtur.
6	— 28. 0.	Mare Humorum certe tangitur ab vmbra.
7	— 30. 55.	Grimaldus tangi videtur.
8	— 31. 30.	Grimaldus certe tangitur.
9	— 33. 0.	Vmbra per medium Grimaldi.
10	— 34. 0.	Grimaldus totus vmbra inuolutus.
11	— 35. 20.	Vmbra per medium Capuani transit.
12	— 38. 0.	Vmbra ad Tychonem.
13	— 39. 0.	Tycho totus tectus.
14	— 43. 24.	Waltherus tangi videtur
15	— 44. 5.	Waltherus certe tangitur ab vmbra. Vmbra nunc terminari incipit.
16	12. 48. 33.	Differentia ascensionum rectarum inter cornu phaseos praecedens et limbum lunae sequentem deprehensa est $1'. 34\frac{1}{2}$ in tempore. In hac obseruatione centrum Copernici stringebat filum

			filum diurnum reticuli, a quo auſtrum verſus cornu phaſeos ſequens ad ſenſum diſtabat $1\frac{3}{4}$ diametri Copernici. Quantitas partis lunae obſcuratae inde deducta eſt 3. digit: $27\frac{6}{7}$ minut.
17	—	58. 5.	Differentia aſcenſionum rectarum inter cornu phaſeos praecedens et limbum lunae ſequentem inuenta eſt 1'. 50''. et 12ʰ. 59'. 40''. limbus auſtralior Copernici et cornu phaſeos ſequens in eodem diurno exiſtebant. Determinata inde eſt quantitas obſcuratae partis 4. digit. $29\frac{2}{3}$ minut.
			Vmbra nunc bene terminatur.
18.	13.	14. 50.	Copernicus tangitur ab vmbra; aſt vmbra admodum lente acceſſit ad Copernicum, ita vt tactus apparens per vnum alterumue minutum primum durare viſus ſit.
19	—	17. 10.	Quarta circiter pars diametri Copernici tecta.
20	—	23. 40.	Circiter $\frac{2}{5}$ diametri Copernici ab vmbra tectae aeſtimatae ſunt.
21	—	27. 10.	Vmbra per centrum Copernici tranſit; et hic eſt terminus, quousque vmbra intra Copernicum penetrauit. Iſta deinceps medium Copernici deſerere incepit.

	13^h.	30'.	Vmbra bene terminata apparet.
22	—	36. 30.	Vmbra et Langrenum et Promontorium acutum (vtramque maculam in parte australiori) tangit. et per $\frac{1}{3}$ diametri Copernici transit.
23	—	39. 30.	Vmbra per medium Langrenum, tertiam partem Promontorii acuti et quartam partem diametri Copernici transit.
24	—	41. 30.	Vmbra per medium promontorium acutum et quintam partem diametri Copernici.
25	—	42. 37.	Langrenus totus tectus est et vmbra tangit Copernicum.
26	14.	18. 35.	Promontorium acutum totum emersum.
27	—	23. 38.	Differentia Ascensionum rectarum inter cornu phaseos sequens et limbum lunae sequentem deprehensa est $23''$ in tempore; et cornu praecedens a diurno, quem centrum Copernici strinxit, distabat semidiametro Copernici Austrum versus. Inde deducta est quantitas obscuratae partis 4. digit. $53\frac{2}{3}$ minut.
28	—	27. 42.	Differentia Ascensionum rectarum inter cornu phaseos sequens et limbum lunae sequentem inuenta est $27\frac{1}{2}''$ in tempore; cornu praecedens vero a diurno, quem centrum Copernici

			stringebat, distabat circiter $1\frac{1}{2}$ diam. Copernici. Quantitas partis obscuratae inde determinata est 4. digit. $32\frac{1}{4}$ minut.
29	14^h.	$38'. 55''$.	Walthers totus emersit.
30	—	40. 15.	Tycho emergere incipit.
31	—	40. 35.	Vmbra per medium Tychonis.
32	—	40. 55.	Tycho totus emersus.
33	15.	5. 30.	Finis eclipseos, satis bene obseruari potuit, ita vt intra $15''$. de momento eius dubitandi locus non sit, vmbra sat bene terminata.

In schemate adiecto phases praecipuae exhibentur iis numeris notatae, quibus eaedem phases in recensione insigniuntur.

Ex multis obseruationibus tum in transitu lunae per Meridianum, tum ope Machinae parallacticae habitis, et probe inter se consentientibus, inuenta est mora transitus disci lunaris per horarium $2'. 19''\frac{1}{2}$ temporis primi mobilis, quae ad altitudinem lunae $53°$. super horizonte referri debet. Si ex hac mora auferantur $5\frac{1}{4}''$, quae motui lunae proprio in Assensione recta interea facto debentur, prout obseruationes transitus lunae per meridianum diebus 1 et 2. Ianuarii habitae docuerunt; prodit mora ista correcta $2'. 13\frac{1}{8}''$. Huic in diurno respondent $33'. 37\frac{1}{2}''$ et in partibus circuli maximi $30'. 57''$, posita diurni lunae distantia ab aequatore $= 23°$. Inde determinatur diameter lunae horizonntalis $30'. 29''$, quae a $30'. 28''$. quanta ope calculi ex Tabulis Ludosum. Coniectationem confirmauit transitus vmbrae per centrum Copernici ex obseruatione cognitus; cum e contrario ne tactum quidem vmbrae et limbi Copernici concederet schema constructum. His aliisque circumstantiis adductus, minimam centrorum Lunae et vmbrae distantiam ita imminui, vt conditioni transitus vmbrae per centrum Copernici satisfieret. nulla quantitati semidiametri vmbrae, quam ex calculo acceperam, inducta mutatione, quippe cui refragabantur reliquae conditiones. Inde deprehendi, latitudinem Lunae in ☍ statuendam esse 38′. 41″, vt conditiones obseruationis nostrae eclipseos saluae reddantur, quae proinde 31″ minor est latitudine calculo determinata. Porro quantitas eclipseos hinc deducta est 6. digit. 48′. excedens quantitatem ex calculo definitam 13⅓′. Horarius quoque Lunae a Sole 7″. auctior prodiit horario ex calculo petito, scilicet 29′. 19″, siquidem huic mutationem aliquam inducere et initium eclipseos 12^h. 20′. 5″ factum statuere liceat. Hoc autem momentum a vero inito non nimium discrepare, appulsus vmbrae ad potiores maculas post initium obseruati et phases notatae suadent, quippe quorum interualla a dicto initii momento sat probe conueniebant cum interuallis, quae schema constructum et ex praecedentibus conditionibus correctum exhibebat. Et eodem pacto sufficientem schematis cum obseruationibus consensum obtinui circa plerasque maculas, exceptis Langreno et Walthero, circa quas descrepantia aliqua prae ceteris exsurgebat. Tandem ob imminutam in ☍ Lunae latitudinem decreuit quoque interuallum temporis inter ☍ et maximam obscurationem idque 7′. 33″ prodiit; vnde si tempus obscurationis maximae

ximae $13^h. 42'. 45$ initio $12^h. 20'. 0''$ et fine $15^h. 5'. 30''$ definitum hoc interuallo augeatur, habebitur tempus ☍ $13^h. 50'. 18''$; quod $5'. 40''$ deficit a momento ☍ per calculum determinato. Vt discrepantia calculi ab obseruatione vno obtutu cognosci possit, sequentem tabulam subiungere iuuat.

Manentibus semidiametris Lunae et vmbrae, et positione orbitae lunaris respectu circuli latitudinis, vt in calculo, erit.

	ex calculo	ex obseruatione	differ.
Latitudo ☽ bor. in ☍	$39'. 12''$	$38'. 41''$.	$31''$ −
Horarius ☽ a ☉	29. 12.	29. 19.	7 +
Tempus inter ☍ et Obscurationem maximam.	7. 39.	7. 33.	6 −
Initium	12^h. 26. 35.	12^h. 20. 0.	$6'$. 35 −
tempus obsc. max.	13. 48. 19.	13. 42. 0.	5. 34 −
Tempus ☍	13. 55. 58.	13. 50. 18.	5. 40 −
Finis	15. 10. 3.	15. 5. 30.	4. 33 −
duratio eclipseos	2. 43. 28.	2. 45. 30.	2. 2 +
Quantitas eclipseos	6. digit. $34\frac{2}{3}'$.	6. dig. $48'$.	$13\frac{1}{3}'$ +

Denique vt obseruatio nostra cum aliis obseruationibus iuxta dimensionem digitorum eclipticorum institutis commode comparari possit, ope schematis constructi et correcti momenta definiui quibus singuli digiti obscurari debuerunt. En momenta.

		Tempore vero.
Initium		$12^h. 20'. 0''$.
Digit.	1.	— 27. 26.
	2.	— 35. 13.
	3.	— 43. 27.

4.		—	52.	43.
5.		13.	3.	12.
6.		—	16.	35.
6.	48′ obsc. max.	42.	45.	
6.		14.	8.	55.
5.		—	22.	18.
4.		—	32.	47.
3.		—	42.	3.
2.		—	50.	17.
1.		—	58.	4.
Finis		15.	5.	30.

ECLI-

ECLIPSES SATELLITVM IOVIS A MENSE MARTIO VSQVE AD FINEM An. 1740. PETROPOLI VISAE.

A.

G. Heinsio.

An. 1740. Styl. nou. tempus verum.	
Martii. 4. $8^h. 2'. 50''$	Satelles primus iam emersus debili tamen lumine instructus. Coelum erat paulisper vaporosum. Pensitatis obseruationis circumstantiis aestimaui, emersionem primam Satellitis circiter factam fuisse $8^h. 2'. 15''$. Obseruatio ope Tubi Catadioptrici 7. ped. peracta est.
Marti 27. 8. 24. 22.	Emersio Satellitis primi tubo astronomico 23. ped. obseruata, exacte.
Octobr, 27. 10. 17. 15.	Immersio Satellitis primi tubo Catadioptrico 7. ped. visa. obseruatio paulisper dubia est, coelo existente non nihil vaporoso.
Dec. 12. $10^h. 27'. 10''$.	Immersio Satellitis primi tubo Catadioptrico 7. ped. obseruata; quae intra $10''$ temporis certa est. Ventus enim tubum agitabat.

TRAN-

TRANSITVS LVNAE AD IOVEM d. $\frac{2}{13}$ SEPTEMBR. 1740. STYLO ASTRONOMICO PETROPOLI OBSERVATVS.

A.

G. Heinsio.

Horis matutinis d. $\frac{3}{14}$ Septembr. tempore ciuili interdiu contingebat transitus Lunae propinquus ad Iouem cuius obseruationem sequentem, quantum quidem clementia coeli permisit, istitui. Coelo ab initio valde sereno, ope sextantis muralis transitum Lunae et Iouis per meridianum obseruaui et exinde differentiam ascensionum rectarum limbi Lunae sequentis et centri Iouis inueni $2'. 19\frac{1}{4}''$ temporis primi mobilis, quae ad momentum $19^h. 2'. 10''.$ temporis veri d. $\frac{2}{13}$ Septembr. referri debet. Iupiter orientalior erat Luna. Eadem obseruatione ad idem temporis momentum deprehendi differentiam declinationum centrorum Lunae et Iouis $39'. 18''$ partium circuli maximi, quibus Iupiter borealior erat centro Lunae. Innotuit haec ex obseruatis altitudinibus meridianis centri Iouis et vtriusque limbi Lunae, superioris et inferioris; vnde etiam diameter Lunae verticalis constitit $29'. 50''$, ad altitudinem $52°. 20'$ referenda. Luna quidem phasi erat affecta, cum vix biduo quadraturam secundam praetergressa esset; ast quoniam linea cuspidum fere normalis existebat ad diurnum, altitudinem meridianam vtriusque cornu vel limbi Lunae sat probe obseruare licuit. His in meridiano peractis, reliquam huius transitus Lunae ad Iouem obseruationem ope machinae paral-

lacticae

lacticae expediendam suscepi. Machina haec, vt iam saepe notaui, instructa est tubo astronomico 8. ped. qui reticulum ex quatuor filis ad angulos semirectos versus se inuicem inclinatis continet, quod ad maculas lunares statim examinaui, vt de constitutione eius iusta certior fierem. Examine vix finito totum coelum subito nubibus tegebatur, nec nisi post quatuor fere horas Luna iterum per nubium hiatus in conspectum venit. Concesso Lunae adspectu statim obseruationem situs Iouis respectu Lunae suscepi, sed non nisi differentia ascensionum rectarum limbi Lunae sequentis et centri Iouis determinari potuit. Tanta scilicet erat distantia Iouis a Limbo Lunae boreali septentrionem versus, vt si limbum Lunae Ioui proximum super diurnum reticuli statuissem, Iupiter in tubo appariturus non fuisset. Hanc ob causam machinam sic direxi, vt appulsus Iouis ad tria fila reticuli et limbi Lunae sequentis ad filum horarium concederentur; quo facto ex habito simul respectu appulsuum cornu phaseos Lunae Ioui priximi ad fila reticuli, vt de huius a Ioue distantia circiter, de positione vero diurni Iouis respectu filorum reticuli certo iudicium fieri posset, sequentes inueni.

Tempore vero	Differentias Ascensionum rectarum limbi Lunae sequentis et cenrri Iouis.
$22^h. 46'. 25''.$	$4'. 7''.$ temporis primi mobilis
22. 52. 24.	4. $18\frac{3}{4}$.
22. 58. 25.	4. 29.

Iupiter occidentalior erat Luna. Differentia vltima 4′. 29″. intra vnum alterumue secundum dubia est, cum appulsum Lunae ad filum horarium propter nubes superuenientes non nisi aestimare liceret. Coelum deinceps denuo nubibus tectum vlteriorem obseruationem impediuit.

FINIS

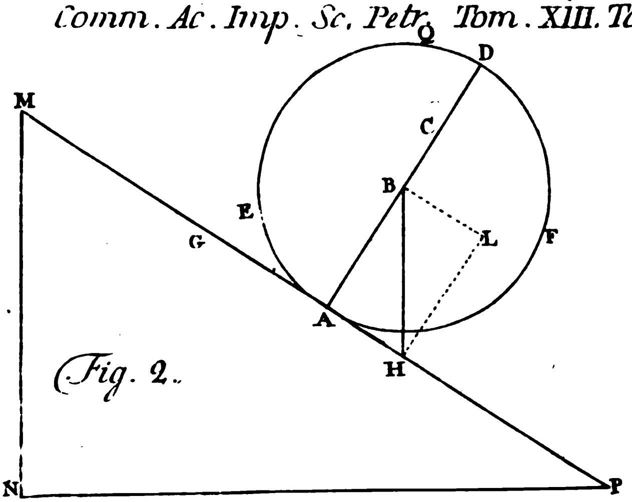


Fig. 2.

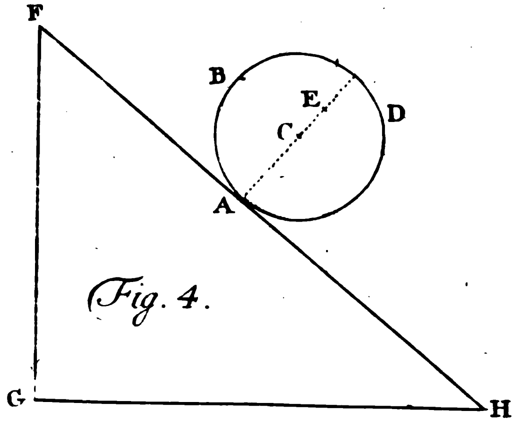


Fig. 4.

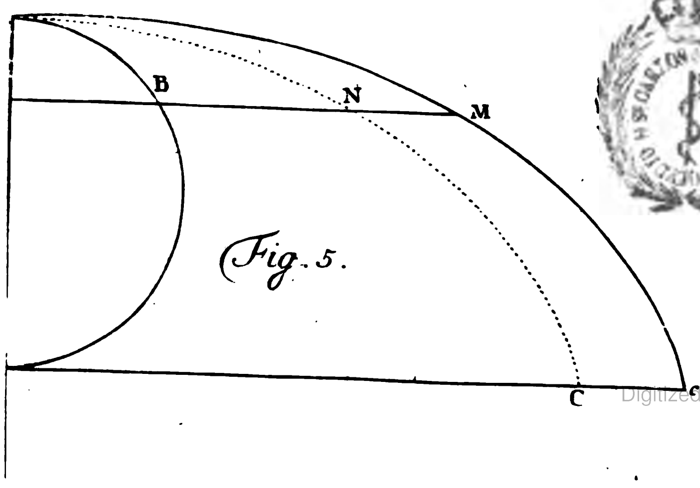
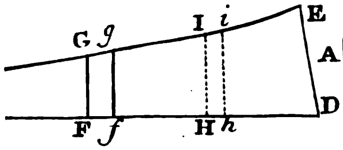


Fig. 5.



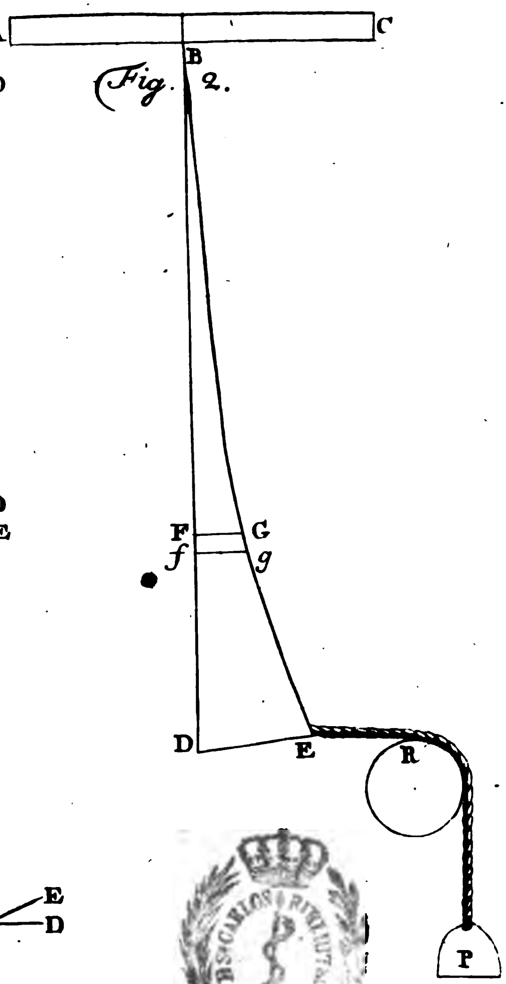
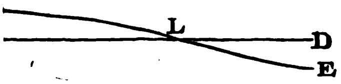
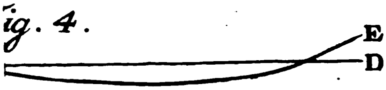


Fig. 2.



ig. 4.



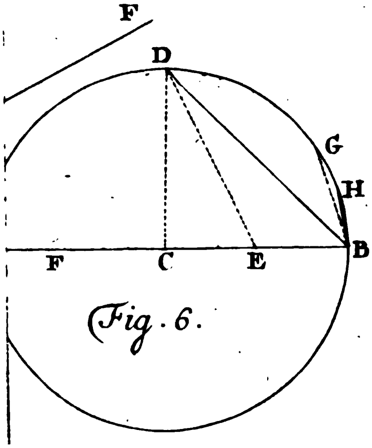


Fig. 6.

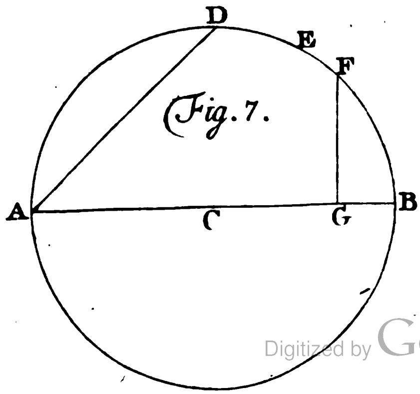


Fig. 7.

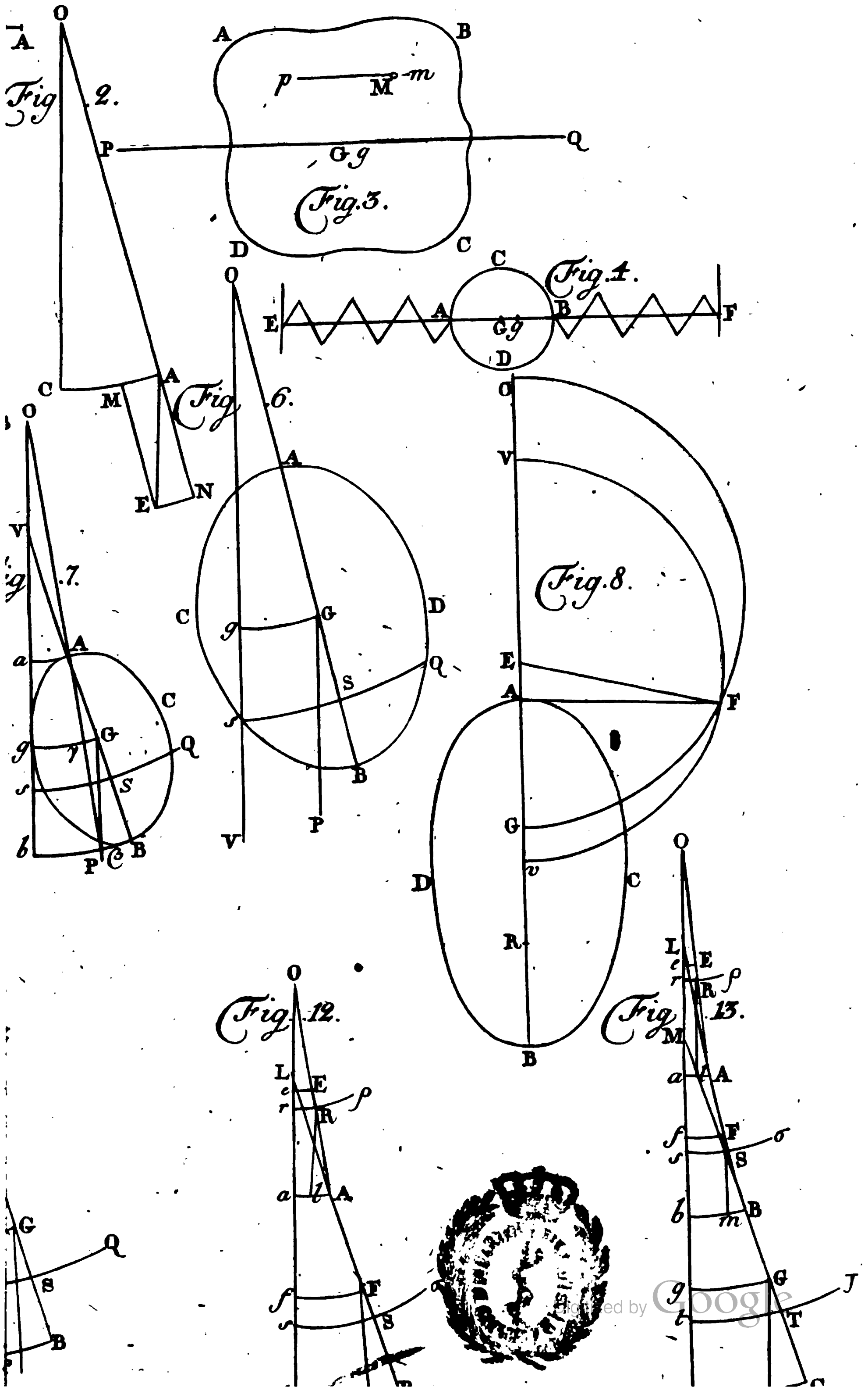
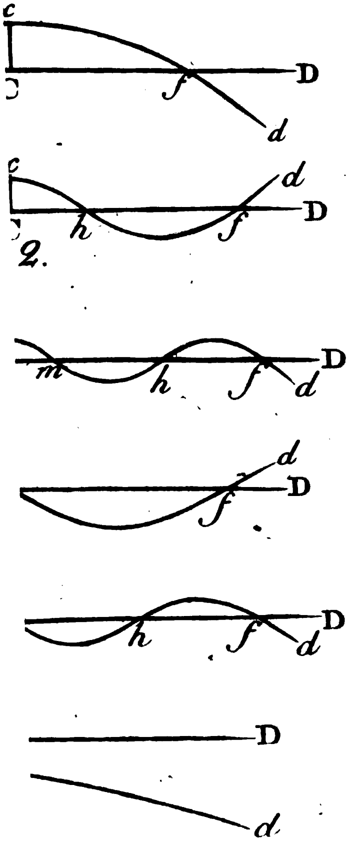


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 12.
Fig. 13.



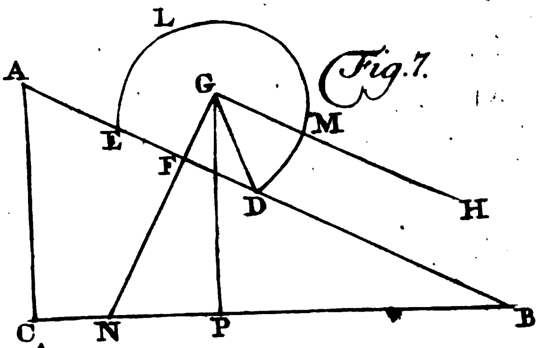


Fig. 7.

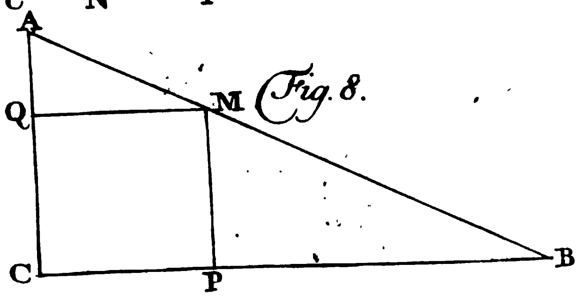


Fig. 8.

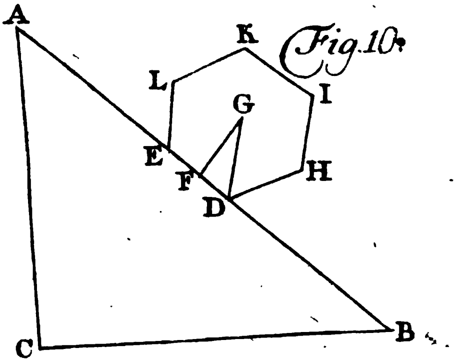


Fig. 10.

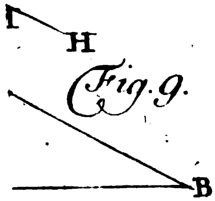


Fig. 9.

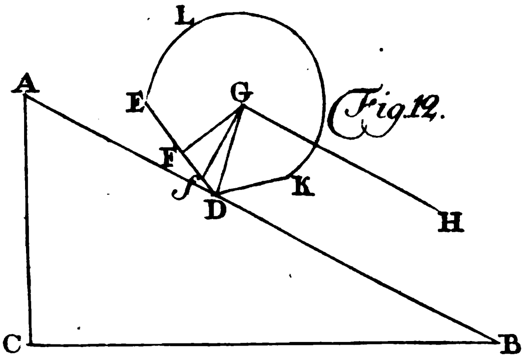


Fig. 12.

Fig. 11.

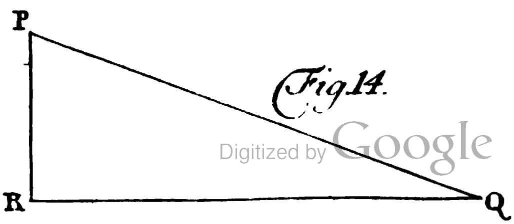
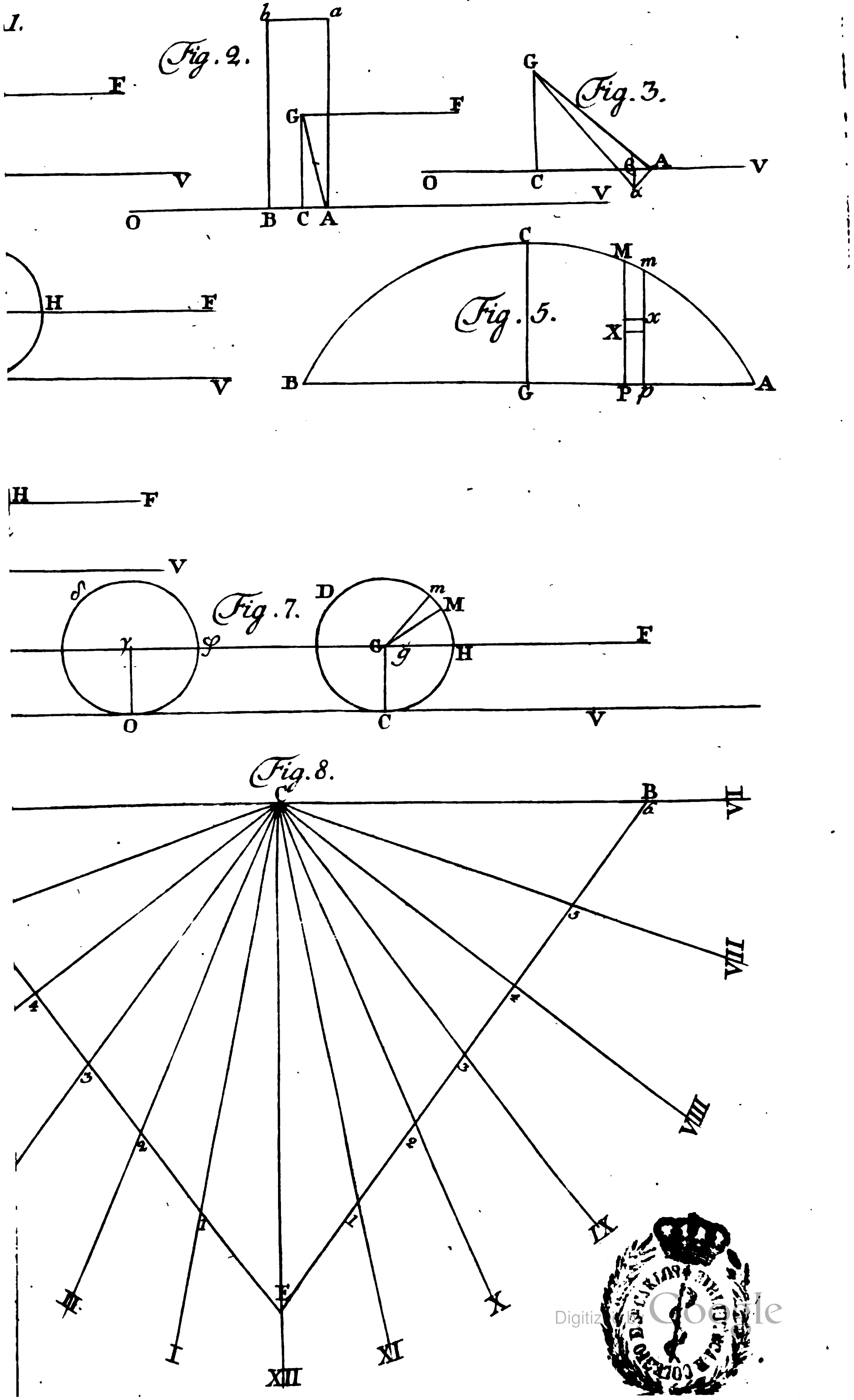


Fig. 14.


Fig. 13.


1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 8.
b a G F O B C A V
G A V O C V
H F V
C M m X x B G P p A
H F V
D m M G g H F C O V
C B VII VIII VIIII IX X XI XII I II

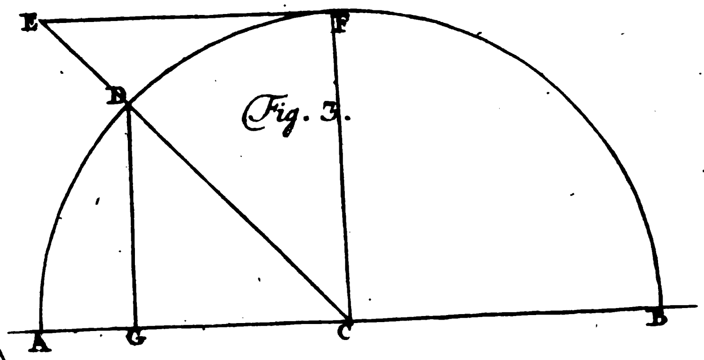
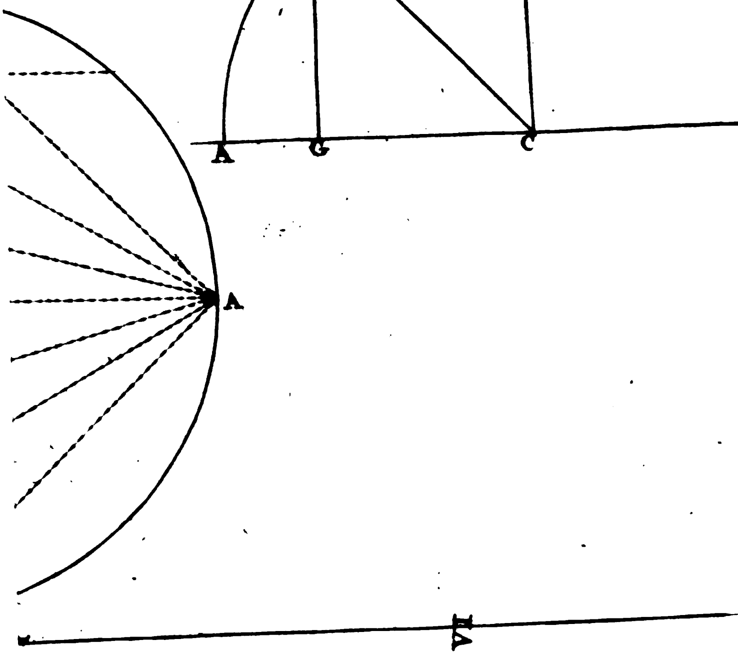
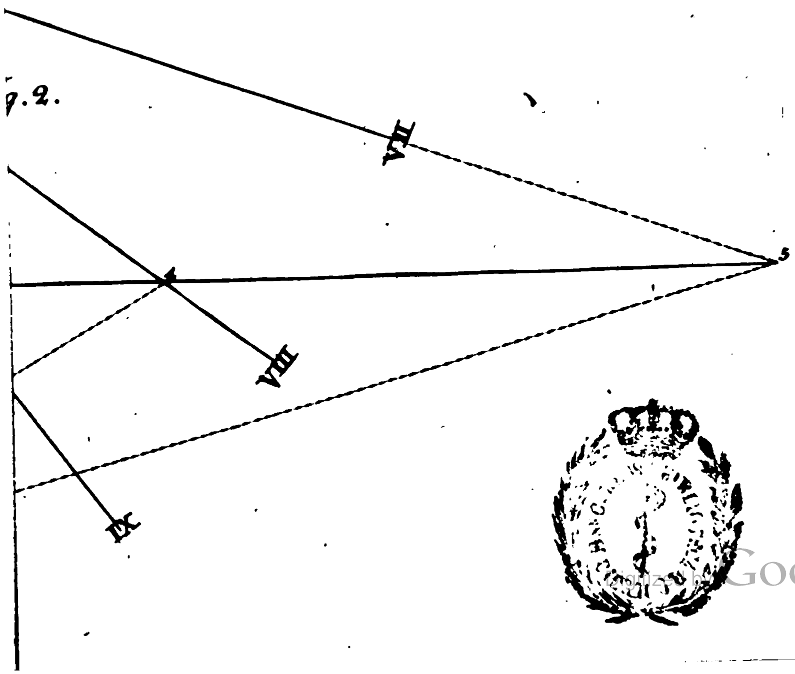


Fig. 3.





g. 2.

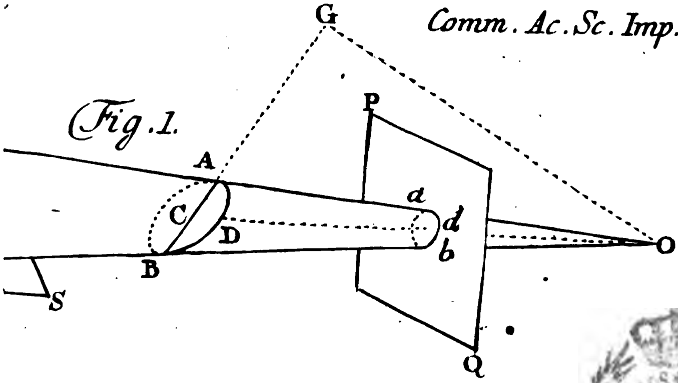


Fig. 1.

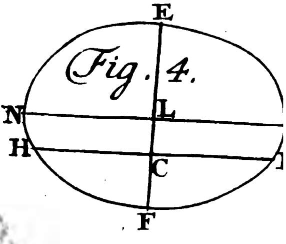


Fig. 4.

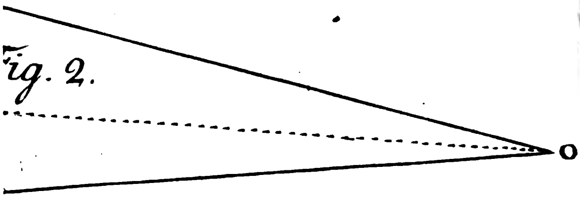


Fig. 2.

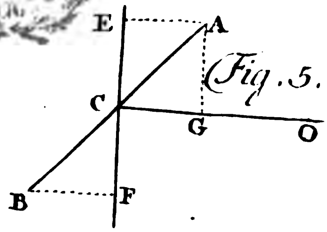


Fig. 5.

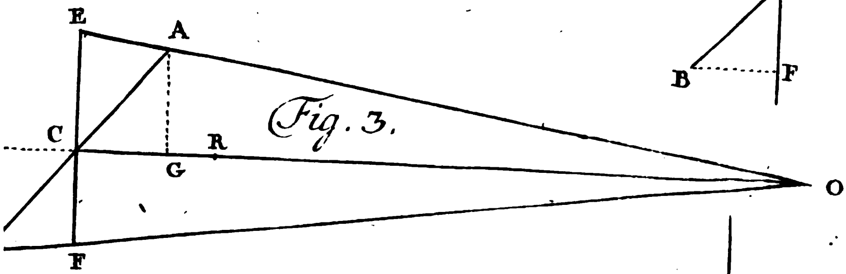


Fig. 3.

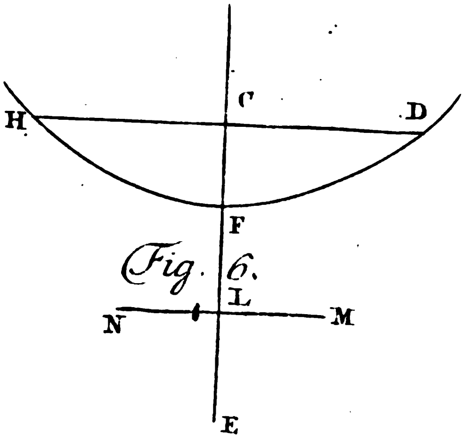


Fig. 6.

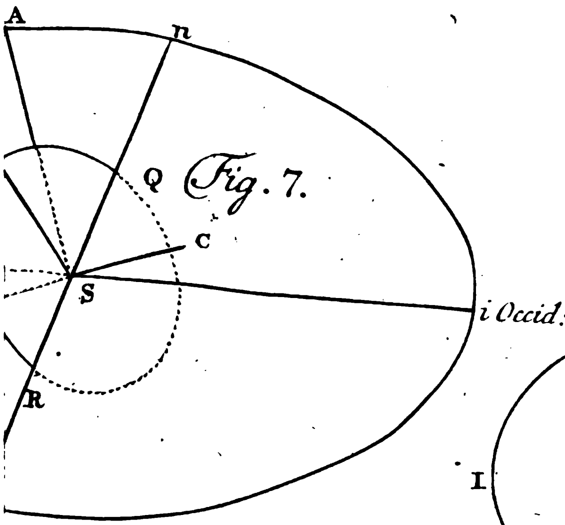


Fig. 7.

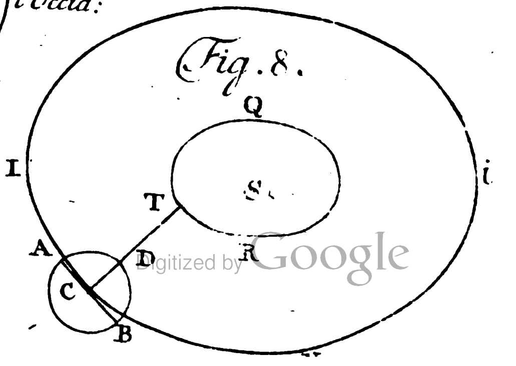


Fig. 8.

Fig. 9.

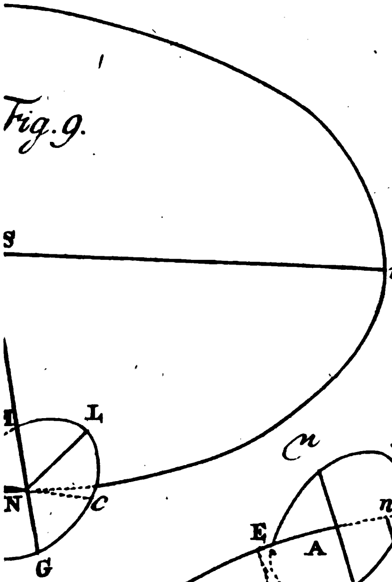
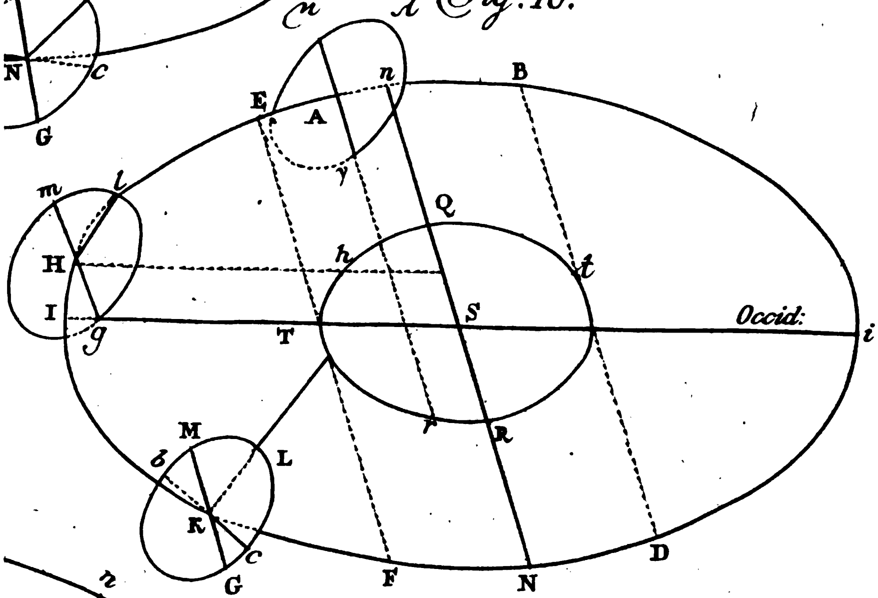
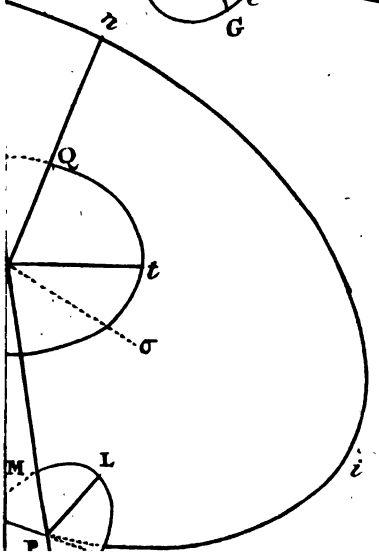

S
i
Occid:
L
N
c
G

Fig. 10.


λ
n
B
E
A
γ
m
l
Q
H
h
t
I
g
T
S
Occid:
i
r
R
M
b
L
K
c
G
F
N
D


n
Q
t
σ
i
M
L

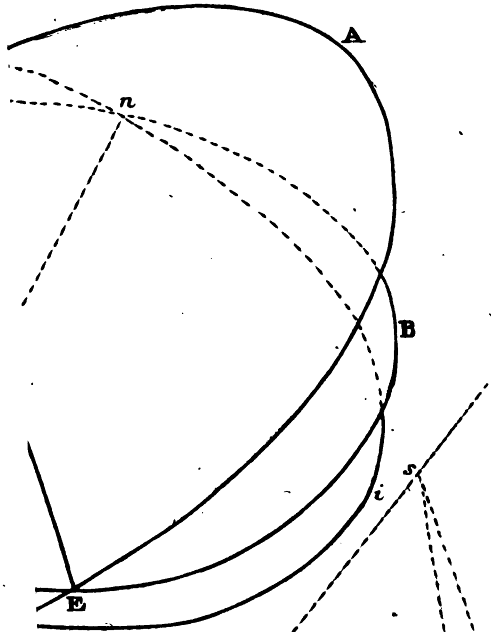
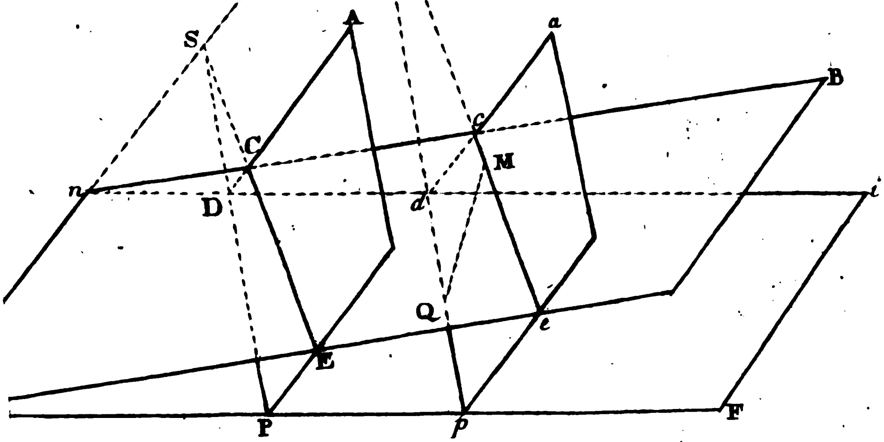
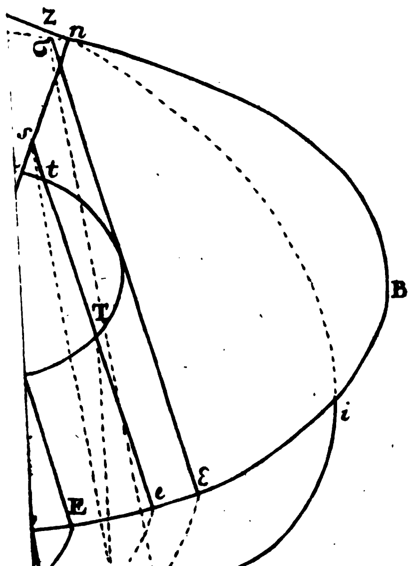


Fig. 13.





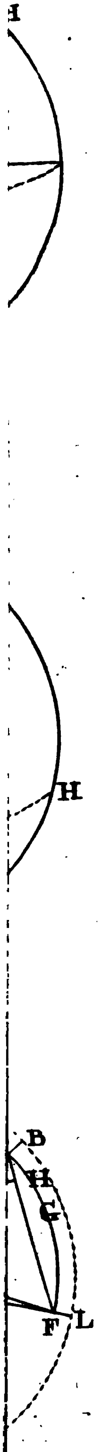


Fig. 2.

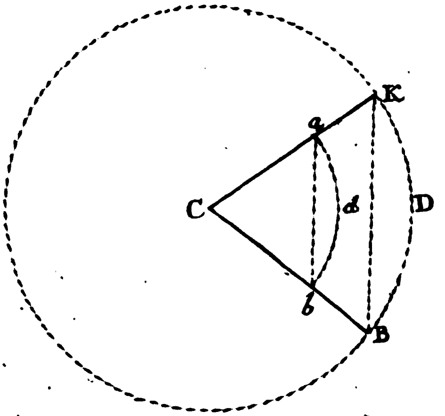


Fig. 5.

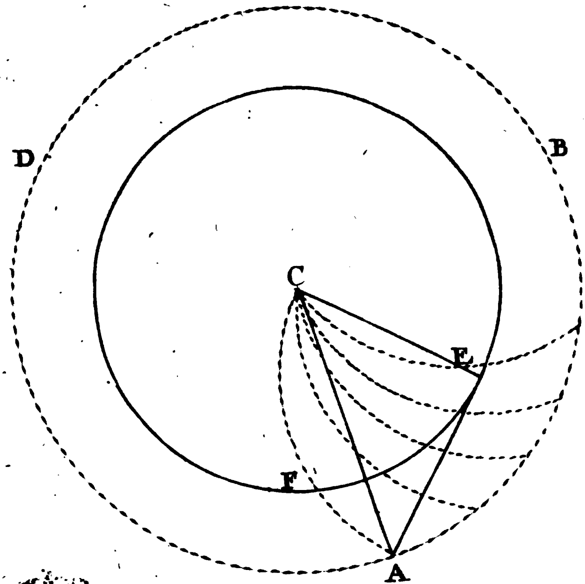


Fig. 6.

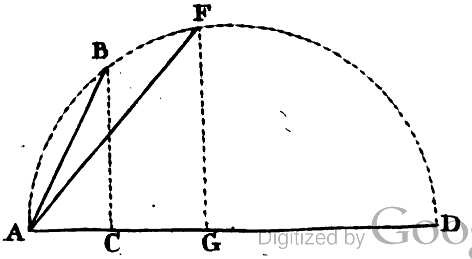


Fig. 7.

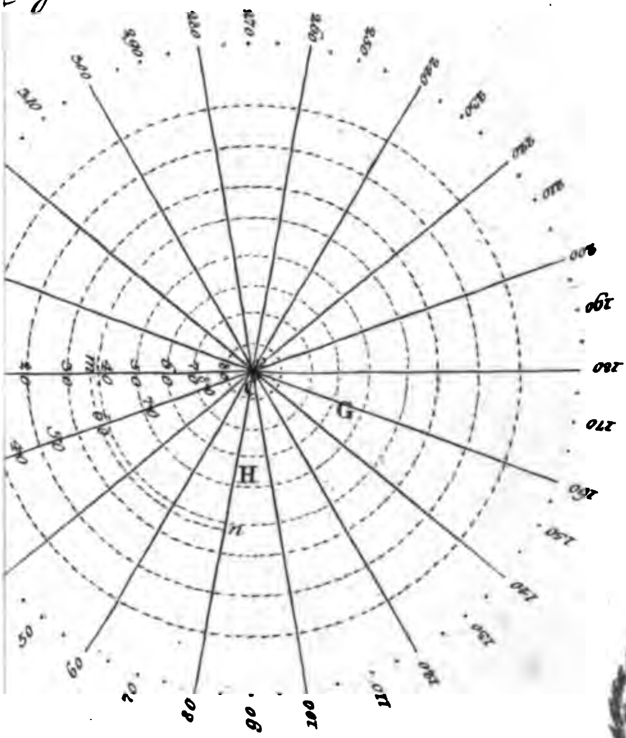


Fig. 8.

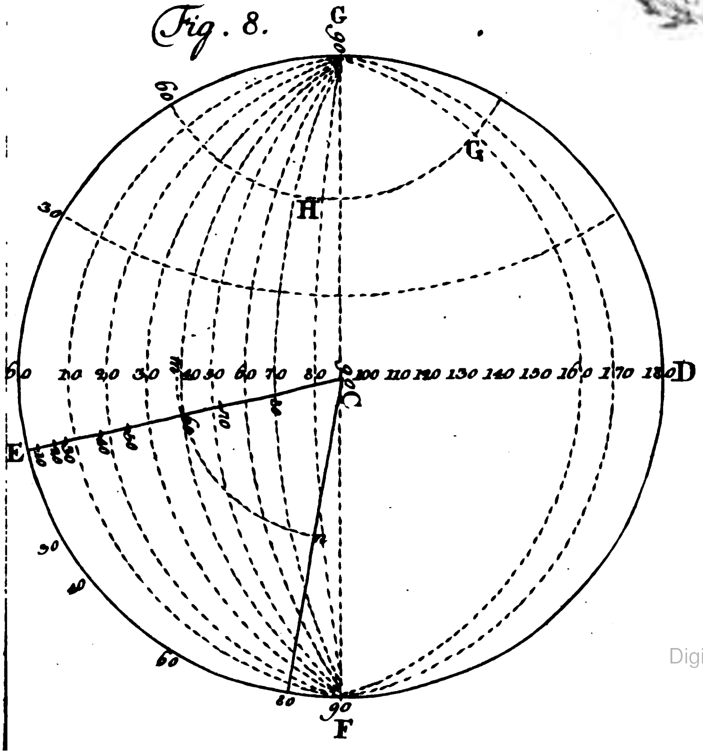
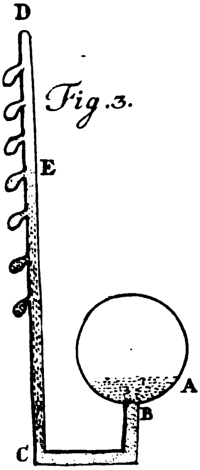


Fig. 1.

Fig. 3.



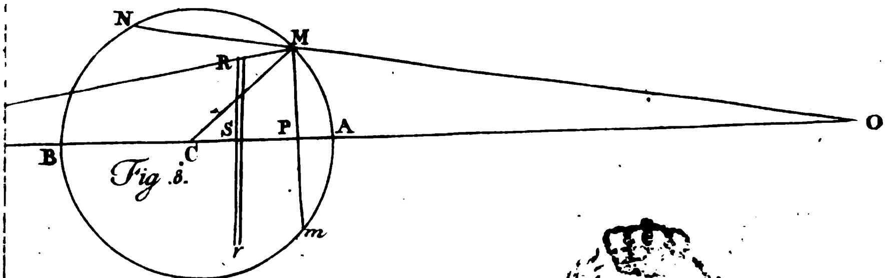
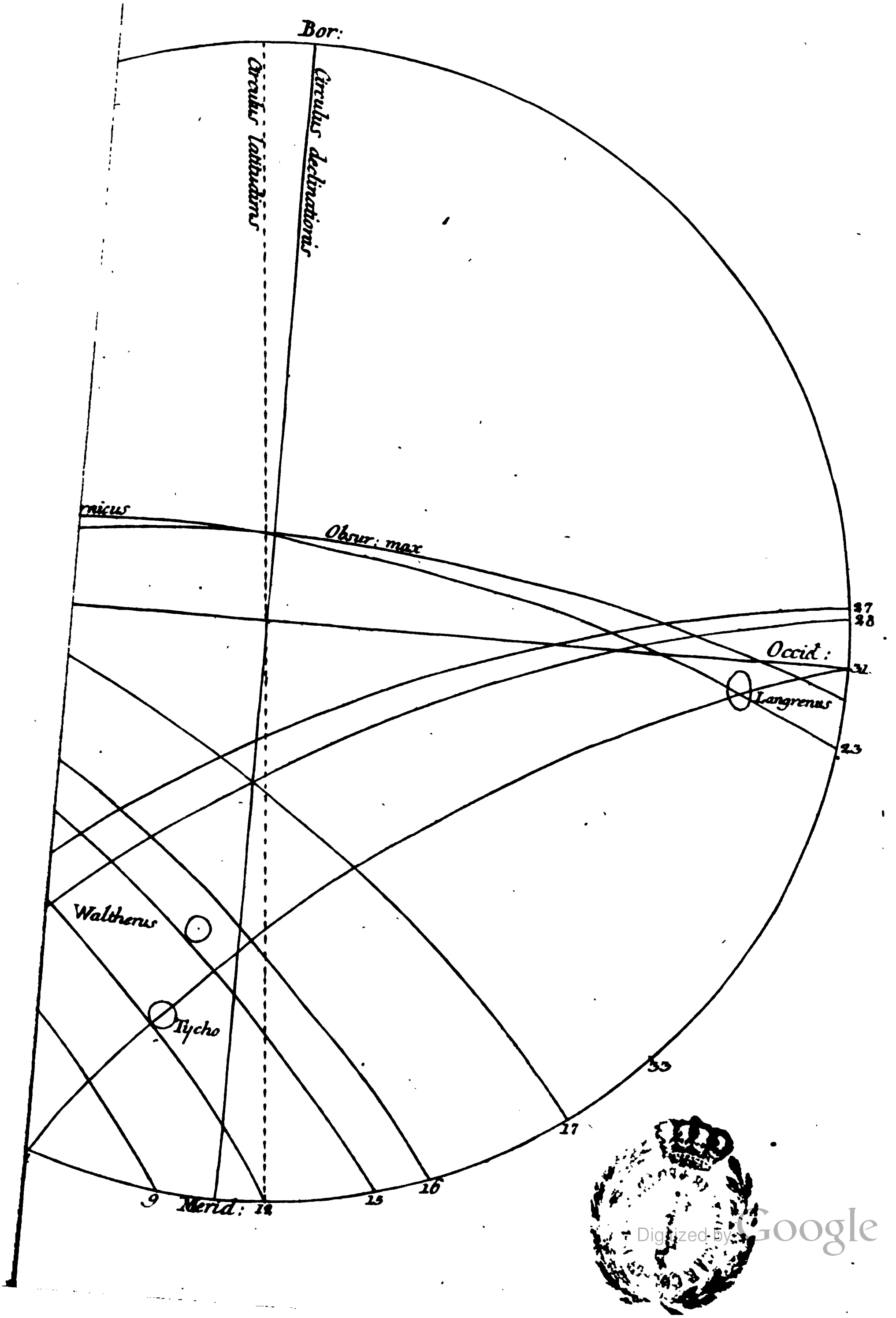


Fig. 8.

Comm. Ac. Imp. Sc. Petr. Tom. XIII. Tab. XIII.


Bor:
Circulus latitudinis
Circulus declinationis
rnicus
Obscur: max
27
28
Occid:
31.
Langrenus
23
Waltherus
Tycho
33
27
16
15
9
Merid: 12