COMMENTARII
ACADEMIAE
SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE.

Tomus XI.

AD ANNVM MDCCXXXIX.

PETROPOLI.
TYPIS ACADEMIAE.
cIↄ Iↄccl.

INDEX COMMENTARIORVM

In Classe Mathematica.

In Classe Physica.

G. W.

In Classe Historica.

Obseru. Astronom.

CLASSIS PRIMA.

CONTINENS

MATHEMATICA.

DE PRODVCTIS
EX INFINITIS FACTORIBVS ORTIS.
AVCTORE
L. Eulero.

§. 1.

Cum in Analysi ad eiusmodi quantitates perueniatur, quae numeris nec rationalibus nec irrationalibus exponi possunt, expressiones infinitae ad eas quantitates denotandas adhiberi solent: quae eo magis idoneae sunt censendae, quo citius earum ope ad cognitionem et aestimationem quantitatum iis expressarum peruenitur. Huiusmodi igitur expressionum maximus et amplissimus est vsus ad valores quantitatum transcendentium, cuiusmodi sunt logarithmi, arcus circulares, aliaeque per quadraturas curuarum determinatae quantitates, representandos earumque beneficio ad tam exactam cum logarithmorum, tum arcuum circularium, tum etiam plurium aliarum quantitatum transcendentium cognitionem pertigimus. Quin etiam istiusmodi expressiones infinitae insignem afferunt vtilitatem ad quantitates irrationales, et radices aequationum algebraicarum per numeros rationales vero proxime definiendas; quae si vsus spectetur veris expressionibus plerumque longe sunt anteferendae.

§. 2. Huiusmodi autem expressionum infinitarum nonnulla genera inter se maxime diuersa sunt constituenda, quorum primum in se complectitur omnes series infinitas, infinitis terminis ſignis + vel − iunctis conſtantes, quae doctrina nunc quidem iam tantopere eſt exculta, vt non ſolum plures habeantur methodi quasvis quantitates tam algebraicas quam tranſcendentes huiusmodi ſeriebus infinitis exprimendi, ſed etiam propoſita ſerie infinita inueſtigandi, cuiusmodi quantitas ea indicetur. Duplici enim modo expreſſiones infinitas cuiusque generis tractari oportet, quorum alter in conuerſione quantitatum vel algebraicarum vel tranſcendentium in expreſſiones infinitas conſiſtit; alter vero in indagatione illius quantitatis, quam propoſita exppreſſio infinita deſignat, viciſſim verſatur.

§. 3. Ad alterum genus expreſſionum infinitarum referri conuenit eas, quae ex innumerabilibus factoribus conſtant, cuiusmodi expreſſiones, quamquam iam complures ſunt inuentae ac cognitae, tamen nec modus ad eas perueniendi, nec via earum valores dignoſcendi vsquam eſt expoſita. Aeque autem dignae huius generis expreſſiones infinitae videntur, quae excolantur, ac priores ex infinito terminorum numero conſtantes, neque forte minus commodi Analyſi afferetur earum pertractatione. Praeterquam enim, quod iſtiusmodi expreſſiones naturam quantitatum quas referunt ſatis diſtincte ob oculos ponant, et ſaepe numero ad valores proximos inueniendos perquam ſunt accommodatae, inſignem praeſtant vſum ad logarithmos ipſarum quantitatum formandos, id quod in calculo ſaepiſſime ſummam affert vtilitatem. Sic ſi quantitas quaecunquae X transformata fuerit in iſtiusmodi expreſſionem $\frac{a}{\alpha}\cdot\frac{b}{\beta}\cdot\frac{c}{\gamma}\cdot\frac{d}{\delta}\cdot\frac{e}{\varepsilon}$. etc. ſtatim habebitur logarithmus quantitatis $X = l\frac{a}{\alpha} + l\frac{b}{\beta} + l\frac{c}{\gamma} + l\frac{d}{\delta} +$ etc. quae ſeries eo magis convergit

vergit, quo propius factores illi ad vnitatem inclinant. Hanc ob causam constitui in hac dissertatione theoriam huiusmodi expressionum infinitarum, quantum quidem obseruationes meae subsidii suppeditaverunt, inchoare, quo aliis facilius sit eam aliquando magis perficere.

§ 4. Primus eiusmodi expressionem infinitis factoribus contentam protulit Wallisius in Arithmetica infinitorum, vbi ostendit, si circuli diameter sit $= 1$. fore aream circuli $\frac{2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.}{3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.}$ etc. quam expressionem deduxit ex interpolatione seriei $\frac{2}{3} + \frac{2.4}{3.5} + \frac{2.4.6}{3.5.7} +$ etc. cuius terminos intermedios demonstrauerat a circuli quadratura pendere. Cum igitur istae expressiones interpolationi serierum originem suam debeant, non in congruum fore visum est tractationem hanc de productis ex infinitis factoribus constantibus ab interpolationibus incipere. Cum enim in *Tomo quinto* Commentariorum nostrorum methodum tradidissem interpolationes per quadraturas curuarum perficiendi, simul constabit, cuiusmodi quantitatem transcendentem producta infinita hac ratione orta exhibeant.

§. 5. Considero igitur sequentem progressionem

$$\overset{1}{f+g}) + \overset{2}{(f+g)(f+2g)} + \overset{3}{(f+g)(f+2g)(f+3g)} + \overset{4}{(f+g)(f+2g)(f+3g)(f+4g)}$$

cuius quilibet terminus, cuius index est n, inuenitur ex praecedente hunc per $f+ng$ multiplicando: ostendi autem in dissertatione allegata huius seriei terminum, cuius index est n esse $= \frac{g^{n+1}\int dx(-lx)^n}{(f+(n+1)g)\int x^{f:g}\,dx(1-x)^n}$ vtraquae integratione ita peracta, vt integralia euanescant posito $x = 0$, tumquae facto $x = 1$. Quam expressio simul indicabit, a quanam quadratura

mini intermedii pendeant. Quanquam enim si n sit numerus fractus, non ita facile constat, qualem quadraturam $\int dx(-lx)^n$ contineat, tamen eodem loco ostendi posito $\frac{p}{q}$ loco n formulam $\int dx\,(-lx)^{\frac{p}{q}}$ congruere cum $\sqrt[q]{(1.2.3.\ldots\ldots p).(\frac{2p}{q}+1)(\frac{3p}{q}+1)(\frac{4p}{q}+1).\ldots\ldots(\frac{qp}{q}+1)}$
$\int dx(x-xx)^{\frac{p}{q}}\int dx(x^2-x^3)^{\frac{p}{q}}\int dx(x^3-x^4)^{\frac{p}{q}}\int dx(x^4-x^5)^{\frac{p}{q}}\ldots\ldots\int dx(x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}$
cuius reductionis ope valor ipsius $\int dx(-lx)^{\frac{p}{q}}$ per quadraturas curuarum algebraicarum exprimi potest.

§ 6. Si nunc in serie assumta terminus, cujus index est $=\frac{1}{2}$, ponatur z, ex lege seriei termini, quorum indices sunt $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, etc. sequenti modo se habebunt:

$$\overset{\frac{1}{2}}{z} + \overset{\frac{3}{2}}{z(f+\tfrac{3}{2}g)} + \overset{\frac{5}{2}}{z(f+\tfrac{3}{2}g)(f+\tfrac{5}{2}g)} + \overset{\frac{7}{2}}{z(f+\tfrac{3}{2}g)(f+\tfrac{5}{2}g)(f+\tfrac{7}{2}g)}\ \text{etc.}$$

Quoniam autem progressio assumta tandem cum Geometrica confunnditur, hi termini interpolati euadent tandem medii proportionales inter contiguos seriei terminos. Quare si singuli termini interpolati iam ab initio tanquam medii proportionales spectentur, sequentes prodibunt approximationes ad terminum z, cuius index est $\frac{1}{2}$.

I. $z=\sqrt{(f+g)}$

II. $z=\sqrt{\dfrac{(f+g)(f+g)(f+2g)}{1\,(f+\frac{3}{2}g)(f+\frac{3}{2}g)}}$

III. $z=\sqrt{\dfrac{(f+g)(f+g)(f+2g)(f+2g)(f+3g)}{1(f+\frac{3}{2}g)(f+\frac{3}{2}g)(f+\frac{5}{2}g)(f+\frac{5}{2}g)}}$

etc.

ex qua progressionis lege intelligitur terminum indicis $\frac{1}{2}$ vere esse $=(f+g)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\dfrac{(f+g)}{(f+\frac{3}{2}g)}\,\dfrac{(f+2g)}{(f+\frac{3}{2}g)}\,\dfrac{(f+2g)}{(f+\frac{6}{2}g)}\,\dfrac{(f+3g)}{(f+\frac{5}{2}g)}}$
$(f+3g)$

$$\frac{(f+3g)(f+4g)(f+4g)(f+5g)(f+5g)(f+6g)}{(f+\frac{7}{2}g)(f+\frac{7}{2}g)(f+\frac{9}{2}g)(f+\frac{9}{2}g)(f+\frac{11}{2}g)(f+\frac{11}{2}g)} \text{ etc.}$$

§. 7. Nunc igitur non ſolum certum eſt hac expreſſione infinita terminum ſeriei aſſumtae

$$\overset{1}{(f+g)}+\overset{2}{(f+g)(f+2g)}+\overset{3}{(f+g)(f+2g)(f+3g)}+ \text{ etc.}$$

cuius index eſt $= \frac{3}{2}$, exhiberi, ſed etiam eadem expreſſio inuenta ad quadraturas curuarum reducitur. Poſito enim $n = \frac{1}{2}$, ob $p = 1$. et $q = 2$. fit $\int dx(-lx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 \cdot 2 \cdot \int dx\sqrt{(x-xx)}}$; quae expreſſio debito modo integrata dat radicem quadratam ex area circuli cuius diameter eſt $= 1$; vel poſita $1 : \pi$ ratione diametri ad peripheriam, erit $\int dx(-lx)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$. Hinc ergo idem terminus, cuius index $= \frac{3}{2}$, quem poſuimus z reperitur $= \frac{g\sqrt{\pi g}}{(2f+3g)\int x^{f:g}dx\sqrt{(1-x)}} = \frac{\sqrt{\pi g}}{(2f+3g)\int y^{f+g-1}dy\sqrt{(1-y^g)}}$; intergrali hoc eodem tractato modo, quo ante ratione variabilis x eſt praeſcriptum. At per reductionem formularum huius modi integralium eſt $\int y^{f+g-1}dy\sqrt{(1-y^g)} = \frac{2fg}{(2f+g)(2f+3g)}\int\frac{y^{f-1}dy}{\sqrt{(1-yg)}} = \frac{2f}{2f+g}\int y^{f-1}dy\sqrt{(1-y^g)}$. His ſubſtitutis reperitur

$$\frac{(2f+g)(2f+3g)(2f+3g)(2f+5g)(2f+5g)(2f+7g)}{(2f+2g)(2f+2g)(2f+4g)(2f+4g)(2f+6g)(2f+6g)} \text{ etc.}$$

$$= \frac{2ff(2f+g)}{\pi g}\left(\int y^{f-1}dy\sqrt{(1-y^g)}\right)^2 = \frac{2ffg}{\pi(2f+fg)}\left(\frac{\int y^{f-1}dy}{\sqrt{(1-y^g)}}\right)^2.$$

Per hanc igitur aequationem innumerabiles quadraturae in factores infinitos, et viciſſim huiusmodi factorum infinitorum valores in quadraturas curuarum transformari poſſunt.

§. 8.

§. 8. Vt hanc aequalitatem exemplis illustremus, sit $g = 1$, eritque $\int y^{f-1}dy\,V(1-y) = \frac{2.2.4.6.8.10\ldots(2f-2)}{3.5.7.9.11.13\ldots(2f-1)}$. Vnde fiet $\frac{2ff}{\pi}\frac{2.2.2.2.4.4\ldots\ldots(2f-2)(2f-2)}{3.3.5.5.7.7\ldots\ldots(2f-1)(2f-1)} = \frac{(2f+1)(2f+3)(2f+3)}{(2f+2)(2f+2)(2f+4)}$. etc. quae expressio ordinata seu ad continuitatem reducta dat $\pi = 4.\frac{2.4.4.6.6.8.8.10.10.}{3.3.5.5.7.7.9.9.11.}$ etc. quae est ipsa formula Wallisiana, proditque quicunque numerus integer affirmatiuus loco f substituatur. Haec eadem expressio autem prodit si ponatur $g = 2$. et $f =$ numero cuicunque impari integro.

§. 9. Cum igitur sit $\frac{fg}{\pi}\left(\frac{\int y^{f-1}dy}{V(1-y^g)}\right)^2 =$

$$\frac{(2f+g)(2f+g)(2f+3g)(2f+3g)(2f+5g)(2f+5g)}{2f\,(2f+2g)(2f+2g)(2f+4g)(2f+4g)(2f+6g)} \text{ etc.}$$

erit pari modo $\frac{hk}{\pi}\left(\frac{\int y^{h-1}dy}{V(1-y^k)}\right)^2 =$

$$\frac{(2h+k)(2h+k)(2h+3k)(2h+3k)(2h+5k)(2h+5k)}{2h\,(2h+2k)(2h+2k)(2h+4k)(2h+4k)(2h+6k)} \text{ etc.}$$

Quare illa expressione per hanc diuisa obtinebitur sequens aequatio libera a peripheria circuli π

$$\frac{fg(\int y^{f-1}dy:V(1-y^g))^2}{hk(\int y^{h-1}dy:V(1-y^k))^2} = \frac{2h(2f+g)^2(2h+2k)^2(2f+3g)^2(2h+4k)^2(2f+5g)^2}{2f(2h+k)^2(2f+2g)^2(2h+3k)^2(2f+4g)^2(2h+5k)^2}$$

etc. Quae radice quadrata extracta praebet hanc aequationem

$$\frac{\int y^{f-1}dy:V(1-y^g)}{\int y^{h-1}dy:V(1-y^k)}\cdot V\frac{g}{k} = \frac{2h(2f+g)(2h+2k)(2f+3g)(2h+4k)(2f+5g)}{2f(2h+k)(2f+2g)(2h+3k)(2f+4g)(2h+5k)} \text{ etc.}$$

§. 10. Haec autem expressio infinita valorem constantem non habet, nam etiamsi in infinitum continuetur, tamen alium habet valorem, si numerus factorum capiatur par, alium si numerus impar. Quamobrem nisi sit $k = g$,

quo

quo casu perinde est, vbi multiplicatio abrumpatur, bini factores coniunctim sunt accipiendi, quo facto binae obtinebuntur aequationes, prout numerus factorum capiatur par siue impar. Primo autem accurate euoluta expressione generali obtinebitur:

$$\frac{g\int y^{f-1}dy:V(1-y^g)}{k\int y^{h-1}dy:V(1-y^k)} = \frac{2h(2f+g)}{2f(2h+k)}\cdot\frac{(2h+2k)(2f+3g)}{(2f+2g)(2h+3k)}\cdot\frac{(2h+4k)(2f+5g)}{(2f+4g)(2h+5k)}\cdot\frac{(2h+6k)(2f+7g)}{(2f+6g)(2h+7k)}$$

etc. Sumendis autem alteris terminorum paribus erit

$$\frac{f\int y^{f-1}dy:V(1-y^g)}{h\int y^{h-1}dy:V(1-y^k)} = \frac{(2f+g)(2h+2k)}{(2h+k)(2f+2g)}\cdot\frac{(2f+3g)(2h+4k)}{(2h+3k)(2f+4g)}\cdot\frac{(2f+5g)(2h+6k)}{(2h+5k)(2f+6g)}\cdot\frac{(2f+7g)(2h+8k)}{(2h+7k)(2f+8g)}.$$

etc. in quibus expressionibus loca, vbi operationem abrumpere licet, punctis sunt distincta.

§. 11. Consideremus autem attentius casum, quo est $k = g$ quippe quo expressio infinita tanquam ex simplicibus factoribus constans concipi potest; eritque

$$\frac{\int y^{f-1}dy:V(1-y^g)}{\int y^{h-1}dy:V(1-y^g)} = \frac{2h(2f+g)(2h+2g)(2f+3g)(2h+4g)}{2f(2h+g)(2f+2g)(2h+3g)(2f+4g)}$$

quae expressio, quo minus cum praecedente ob easdem litteras confundatur, ponamus hic $2f=a$ et $2h=b$ atque $y=x^2$, quo substituto prodibit

$$\frac{\int x^{2f-1}dx:V(1-x^{2g})}{\int x^{b-1}dx:V(1-x^{2g})} = \frac{b(a+g)(b+2g)(a+3g)(b+4g)(a+5g)}{a(b+g)(a+2g)(b+3g)(a+4g)(b+5g)}.$$

etc. quae expressio cum priori. §. 9. data, quae facto pariter $y=x^2$, transit in hanc

$$\frac{4fg}{\pi}\left(\frac{\int x^{2f-1}dx}{V(1-x^{2g})}\right)^2 = \frac{(2f+g)(2f+g)(2f+3g)(2f+3g)(2f+5g)(2f+5g)}{2f(2f+2g)(2f+2g)(2f+4g)(2f+4g)(2f+6g)}$$

etc. comparata, insignes manifestabit proprietates, quarum veritas alias vix ostendi poterit.

§. 12. Statim enim patet si ponatur $a=2f$; et $b=2f+g$, illam expressionem infinitam in hanc transmutari; quamobrem etiam expressiones illis aequales, quadraturas cur-

curuarum continentes, hoc casu fient aequales, ex quo sequens emergit aequalitas: $\frac{\int x^{2f-1}dx:V(1-x^{2g})}{\int x^{2f+g-1}dx:V(1-x^{2g})} = \frac{4fg}{\pi}$ $(\int x^{2f-1}dx:V(1-x^{2g}))^2$, si quidem ponatur post integrationem $x=1$. Hinc igitur sequitur fore $\pi = 4fg$ $\int\frac{x^{2f-1}dx}{V(1-x^{2g})}\cdot\int\frac{x^{2f+g-1}dx}{V(1-x^{2g})}$: siue posito $2f=a$, erit π $=2ag\int\frac{x^{a-1}dx}{V(1-x^{2g})}\cdot\int\frac{x^{a+g-1}dx}{V(1-x^{2g})}$: quod sane est theorema maxime notatu dignum, cum eius beneficio productum duorum integralium, quorum saepissime neutrum exhiberi potest, assignari queat.

§. 13. Veritas huius theorematis quidem facile declaratur iis casibus, quibus altera formula integralis vel absolute integrationem admittit vel a circuli quadratura pendet. Ponamus enim $g=1$, et $a=1$; vtique erit $\pi = 2$ $\int\frac{dx}{V(1-x^2)}\cdot\int\frac{xdx}{V(1-x^2)}$ nam $2\int\frac{dx}{V(1-x^2)}$ posito post integrationem $x=1$ dat ipsam quantitatem π; atque $\int\frac{xdx}{V(1-xx)}$ $=1-V(-xx)$ facto $x=1$ fit $=1$. Simili modo si $a=2$ manente $g=1$ perspicitur fore $\pi=4\int\frac{xdx}{V(1-xx)}\cdot$ $\int\frac{xxdx}{V(1-xx)}$ nam est $\int\frac{xdx}{V(1-xx)}=1$, et $\int\frac{xxdx}{V(1-xx)}=\frac{\pi}{4}$; quibus casibus theorematis veritas aliunde cognita, confirmatur.

§. 14. Reliqui autem casus, quibus neutra quantitas integralis vel actu vel per quadraturam circuli exhiberi potest, totidem praebent theoremata maxime abstrusae indaginis. Ita posito $g=2$ et $a=1$ fiet $\pi=4\int\frac{dx}{V(1-x^4)}\cdot$ $\int\frac{xxdx}{V(1-x^4)}$; vbi $\int\frac{xxdx}{V(1-x^4)}$ exhibet applicatam in curua elastica ea rectangula, $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ vero arcum elasticae abscissae x respondentem. Quocirca rectangulum ex arcu elasticae abcissae 1 respondente et applicata respondente aequabitur areae circuli, cuius diameter est abscissa illa 1; quae proprietas elasticae fortasse alia methodo vix ac ne vix quidem cognosci demonstrarique poterit.

§. 15. Antequam autem hunc elasticae casum relinquam, iuuabit vtrumque integrale per seriem ordinariam exprimere casu saltem quo $x=1$. Cum enim sit $\frac{1}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(1-x^2)}}$ atque $(1+xx)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 +$ etc. singula membra a circuli quadratura pendebunt. Absoluta autem vtraque integratione pro casu $x=1$ erit $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{4}+\frac{1\cdot 9}{4\cdot 16}-\frac{1\cdot 9\cdot 25}{4\cdot 16\cdot 36}+$ etc. atque $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1\cdot 3}{4\cdot 4}+\frac{1\cdot 9\cdot 5}{4\cdot 16\cdot 6}-\frac{1\cdot 9\cdot 25\cdot 7}{4\cdot 16\cdot 36\cdot 8}+$ etc.) Hinc autem approximando prodit tam prope $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{5\pi}{8}$ et $\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{5}{8}$.

§. 16. Si fuerit $a=1$ erit $\pi = 2g\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}\cdot\int\frac{x^g dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$, quae duae expressiones integrales ita sunt comparatae, vt si fuerit $\int\frac{x^g dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ applicata curuae cuiusdam abscissae x respondens, futura sit $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ ipsa eiusdem curuae longitudo. Quamobrem si in hac curua sumatur abscissa $x=1$, erit productum seu rectangulum ex applicata in longitudinem curuae ad aream circuli, cuius diameter est abscissa $x=1$, vti se habet 2 ad numerum g; quae pro-

 positio

positio locum habet, dummodo g fuerit numerus affirmatiuus; valores negatiui enim sponte excipiuntur.

§. 17. Si $a-1$ minor accipiatur quam g, ita vt numeri a et g sint primi inter se, sequentia habebuntur theoremata notatu digna; nam si $a+g-1>2g$ tum integratio ad formulam simpliciorem reduci posset.

$$\pi = 2\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\cdot\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$\pi = 4\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}\cdot\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$$
$$\pi = 6\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}\cdot\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}$$
$$\pi = 12\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}\cdot\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}}$$
$$\pi = 8\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}$$
$$\pi = 24\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}\cdot\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^8)}}$$
$$\pi = 10\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^{10})}}$$
$$\pi = 20\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}$$

$$\pi = 30\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}$$
$$\pi = 40\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}\cdot\int\frac{x^8\,dx}{\sqrt{(1-x^{10})}}$$
$$\pi = 12\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}\cdot\int\frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}$$
$$\pi = 60\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}\cdot\int\frac{x^{10}\,dx}{\sqrt{(1-x^{12})}}$$
$$\pi = 14\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}\cdot\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}$$
$$\pi = 28\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}\cdot\int\frac{x^8\,dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}$$
$$\pi = 42\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}\cdot\int\frac{x^9\,dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}$$
$$\pi = 56\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}\cdot\int\frac{x^{10}\,dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}$$
$$\pi = 70\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}\cdot\int\frac{x^{11}\,dx}{\sqrt{(1-x^{14})}}$$

§. 18. Hoc ipso igitur inuento reductio etiam formularum integralium ad simpliciores insigniter est promota. Cum enim adhuc duae istae formulae $\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ et $\int\frac{x^{m+n}\,dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ ad se inuicem tantum reduci potuissent, si n erat multiplum exponentis $2g$; ita nunc reductio etiam succedit, si n tantum ipsius g fuerit multiplum: casu intellige, quo fit $x=1$. Quemadmodum autem si n est productum exponentis g per numerum parem, quotus, qui resultat ex diuisione alterius formulae per alteram, facile assignatur, ita e contrario, si n sit factum ex g in numerum

merum imparem, tum productum formularum facillime assignatur.

§. 19. Haec omnia ergo huc redeunt, vt si cognitum fuerit integrale formulae $\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ casu quo $x=1$, eodem casu etiam huius formulae $\int \frac{x^{m+n}\, dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ integrale, si sit n multiplum ipsius g, exhiberi queat. Sit enim A integrale formulae $\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ casu, quo est $x=1$; integralia alterius formulae, ponendo g, $2g$, $3g$, etc. successiue loco n sequenti modo se habebunt.

$$\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}} = \mathrm{A}$$

$$\int \frac{x^{m+g}\, dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}} = \frac{\pi}{2(m+1)g\mathrm{A}}$$

$$\int \frac{x^{m+2g}\, dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}} = \frac{(m+1)\mathrm{A}}{m+g+1}$$

$$\int \frac{x^{m+3g}\, dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}} = \frac{(m+g+1)\pi}{2(m+1)(m+2g+1)g\mathrm{A}}$$

$$\int \frac{x^{m+4g}\, dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}} = \frac{(m+1)(m+2g+1)\mathrm{A}}{(m+g+1)(m+3g+1)}$$

$$\int \frac{x^{m+5g}\, dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}} = \frac{(m+g+1)(m+3g+1)\pi}{2(m+1)(m+2g+1)(m+4g+1)g\mathrm{A}} \text{ etc.}$$

§. 20. Cum deinde haec formula generalis $\int x^{m+ig}\, dx\, (1-x^{2g})^{k-\frac{1}{2}}$ denotantibus i et k numeros integros quoscunque, reduci queat ad hanc formulam $\int \frac{x^{m+ig}\, dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$, intelligitur

ligitur illius formulae latissime patentis $\int x^{m+ig}\,dx\,(1-x^{2g})^{\frac{k-g}{g}}$ integrale assignari posse ex integrali $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{(1-x^{2g})}}$ cognito, casu saltem, quo post integrationem fit $x=1$. Casus autem, quibus i est numerus impar, praeter hoc integrale etiam circuli quadraturam π requirunt.

§. 21. Quemadmodum igitur per terminum indicis $\frac{1}{2}$ seriei supra §. 5. assumtae ad istas formularum integralium comparationes sum deductus, ita operae pretium forte erit alios terminos intermedios simili modo inuestigare. Quaeratur igitur terminus cuius index est $\frac{p}{q}$ qui ponatur $=z$, ex quo sequentes ita se habebunt

$$\begin{array}{llll} \frac{p}{q} & \frac{p+q}{q} & \frac{p+2q}{q} & \\ z + & \frac{z(fq+g(p+q))}{q} + & \frac{z(fq+(p+q)g)(fq+(p+2q)g)}{q^2}, & + \text{ etc.} \end{array}$$

Considerando nunc pari modo, quod haec progressio tandem in geometricam abeat, sequentes orientur approximationes ad terminum z.

I. $z = 1(f+g)^{\frac{p}{q}}$

II. $\frac{z(fq+(p+q)g}{q} = (f+g)^{\frac{q-p}{q}}(f+g)^{\frac{p}{q}}(f+2g)^{\frac{p}{q}}$

III. $z\left(f+\frac{(p+q)g}{q}\right)\left(f+\frac{(p+2q)}{q}g\right) = (f+g)^{\frac{q-p}{q}}(f+g)^{\frac{p}{q}}$ $(f+2g)^{\frac{q-p}{q}}\cdot(f+2g)^{\frac{p}{q}}(f+3g)^{\frac{p}{q}}$ Hinc igitur elicietur verus valor ipsius $z = \frac{(f+g)^{\frac{p}{q}}(f+g)^{\frac{q-p}{q}}}{1\left(f+\frac{(p+q)}{q}g\right)^{\frac{p}{q}}}$

$(f+$

$$\frac{(f+2g)^{\frac{p}{q}}}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)^{\frac{(q-p)}{q}}}\cdot\frac{(f+2g)^{\frac{q-p}{q}}}{(f+\frac{(p+2q)}{q}g)^{\frac{p}{q}}}\cdot\frac{(f+3g)^{\frac{p}{q}}}{(f+\frac{(p+2q)}{q}g)^{\frac{q-p}{q}}}\cdot\frac{(f+3g)^{\frac{q-p}{q}}}{(f+\frac{(p+3q)}{q}g)^{p:q}}$$

etc. Vel paucis mutatis, vt factores infinitesimi fiant $=1$, et expressio vbi libuerit abrumpi queat

erit $$\frac{z}{(f+\frac{p}{q}g)^{\frac{p}{q}}}=\frac{(f+g)^{\frac{p}{q}}}{(f+\frac{p}{q}g)^{\frac{p}{q}}}\cdot\frac{(f+g)^{\frac{q-p}{q}}}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)^{\frac{q-p}{q}}}\cdot$$

$$\frac{(f+2g)^{\frac{p}{q}}}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)^{\frac{p}{q}}}\cdot\frac{(f+2g)^{\frac{q-p}{q}}}{(f+\frac{(p+2q)}{q}g)^{\frac{q-p}{q}}}\cdot\frac{(f+3g)^{\frac{p}{q}}}{(f+\frac{(p+2q)}{q}g)^{\frac{p}{q}}}$$ etc. cuius expressionis lex, qua factores progrediuntur, sponte elucet.

§. 22. Eiusdem autem termini intermedii z valor ope termini generalis huius seriei exprimi potest, fiet enim $z=$

$\dfrac{g^{\frac{p+q}{q}}\int dx(-lx)^{\frac{p}{q}}}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)\int x^{f:g}dx(1-x)^{\frac{p}{q}}}$. Quare si ponatur $\int dx(-lx)^{\frac{p}{q}}=$

$$=\sqrt[q]{}(1.2.3\ldots\ldots p)(\tfrac{2p}{q}+1)(\tfrac{3p}{q}+1)(\tfrac{4p}{q}+1)\ldots(\tfrac{qp}{q}+1)$$

$$\int dx(x-x^2)^{\frac{p}{q}}.\int dx(x^2-x^3)^{\frac{p}{q}}.\int dx(x^3-x^4)^{\frac{p}{q}}\ldots\int dx(x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}$$

$=\sqrt[q]{}P$: atque $x=y^g$, quo fit $\int x^{f:g}dx(1-x)^{\frac{p}{q}}=g\int y^{f+g-1}dy$

$$(1-y^g)^{\frac{p}{q}}=\frac{ggp}{fq+(p+q)g}\int\frac{y^{f+g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}}=\frac{pfgg}{q(f+\frac{p}{q}g)(f+\frac{(p+q)}{q}g)}$$

$\int y$

$\frac{\int y^{f-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}}$. Ponatur porro $\int \frac{y^{f-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}} = Q$, erit $z =$

$\frac{q(f+\frac{p}{q}g)P^{\frac{1}{q}}}{pfg^{\frac{q-p}{q}}Q}$.

§. 23. Substituta nunc loco z superiore expressione infinita, sumtisque potestatibus exponentis q, prodibit ista aequatio: $\frac{q^qP}{p^qf^pg^{q-p}Q^q} = \frac{f^{q-p}}{(f+\frac{p}{q}g)^{q-p}} \cdot \frac{(f+g)^p}{(f+\frac{p}{q}g)^p} \cdot$
$\frac{(f+g)^{q-p}}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)^{q-p}} \cdot \frac{(f+2g)^p}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)^p} \cdot \frac{(f+2g)^{q-p}}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)^{q-p}}$. etc.

Si igitur pari modo ponatur $\int \frac{y^{h-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}} = R$, erit

$$\frac{p^qh^pg^{q-p}R^q}{q^qP} = \frac{(h+\frac{p}{q}g)^{q-p}}{h^{q-p}} \cdot \frac{(h+\frac{p}{q}g)^p}{(h+g)^p} \cdot \frac{(h+\frac{(p+q)}{q}g)^{q-p}}{(h+g)^{q-p}} \text{ etc.}$$

quae duae expressiones in se mutuo ductae dabunt $\frac{h^pR^q}{f^pQ^q}$

$$= \frac{f^{q-p}}{h^{q-p}} \frac{(h+\frac{p}{q}g)^q}{(f+\frac{p}{q}g)^q} \frac{(f+g)^q}{(h+g)^q} \frac{(h+\frac{(p+q)}{q}g)^q}{(f+\frac{(p+q)}{q}g)^q} \frac{(f+2g)^q}{(h+2g)^q}$$
$$\frac{(h+\frac{(p+2q)}{q}g)^q}{(f+\frac{(p+2q)}{q}g)^q} \text{ etc.}$$

§. 24.

§. 24. Si ergo vtrinque multiplicetur per $\frac{fp}{hp}$ atque radix potestatis q extrahatur reperietur $\frac{R}{Q} = \frac{f(h+\frac{p}{q}g)}{h(f+\frac{p}{q}g)}$

$$\frac{(f+g)(h+\frac{(p+q)}{q}g)(f+2g)(h+\frac{(p+2q)}{q}g)}{(h+g)(f+\frac{(p+q)}{q}g)(h+2g)(f+\frac{(p+2q)}{q}g)} \text{ etc.} =$$

$$\frac{\int y^{h-1}dy(1-y^g)^{\frac{p-q}{q}}}{\int y^{f-1}dy(1-y^g)^{\frac{p-q}{q}}},$$ in quibus integralibus cum ita fuerint accepta, vt euanescant posito $y=0$, fieri debet $y=1$, quo facto habebitur per quadraturas valor expressionis infinitae propositae. Ope huius igitur expressionis infinitae altera quadratura ad alteram, siquidem ponatur $y=1$, reduci poterit.

§. 25. Vt autem hinc eiusmodi integralium comparationes deducamus, sicuti ex priori casu, quo erat $p=1$ et $q=2$, ponamus hic $p=1$ et $q=3$; fietque $P = \frac{10}{8}$ $\int dx(x-x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot \int dx(x^2-x^3)^{\frac{1}{3}}$ et $Q = \frac{\int y^{f-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{2}{3}}}$ atque $R = \frac{\int y^{h-1}dy}{(2-y^g)^{\frac{2}{3}}}$. Erit ergo

$$\frac{27P}{fg^2Q^3} = \frac{f\cdot f\cdot(f+g)}{(f+\frac{1}{3}g)(f+\frac{1}{3}g)(f+\frac{1}{3}g)}$$

$$\frac{(f+g)(f+g)(f+2g)}{(f+\frac{4}{3}g)(f+\frac{4}{3}g)(f+\frac{4}{3}g)} \text{ etc. atque } \frac{R}{Q} = \frac{f(h+\frac{1}{3}g)(f+g)}{h(f+\frac{1}{3}g)(h+g)}$$

$$\frac{(h+\frac{4}{3}g)(f+2g)(h+\frac{7}{3}g)}{(f+\frac{4}{3}g)(h+2g)(f+\frac{7}{3}g)}$$ etc. quae duae expressiones, cum in illa vna reuolutio ex tribus hic autem ex duobus factoribus constet, in se mutuo transformari nequeunt; quicquid etiam loco h substituatur.

§. 26. Sit igitur $S = \int \frac{y^{x-1}\,dy}{(1-y^g)^{\frac{2}{3}}}$ erit $\frac{S}{Q} = \frac{f(k+\frac{1}{3}g)}{k(f+\frac{1}{3}g)} \cdot \frac{(f+g)(k+\frac{4}{3}g)(f+2g)(k+\frac{7}{3}g)}{(k+g)(f+\frac{4}{3}g)(k+2g)(f+\frac{7}{3}g)}$ etc. quae expressio cum praecedente coniuncta dabit $\frac{RS}{Q^2} = \frac{f.f.(h+\frac{1}{3}g)(k+\frac{1}{3}g)}{h.k.(f+\frac{1}{3}g)(f+\frac{1}{3}g)} \cdot \frac{(f+g)(f+g)(h+\frac{4}{3}g)}{(h+g)(k+g)(f+\frac{4}{3}g)}$ etc. quae expressio in illam ipsi $\frac{27P}{fg^2Q^3}$ aequalem conuertetur, ponendo $h = f+\frac{1}{3}g$, et $k = f+\frac{2}{3}g$. Quamobrem habebitur ista aequatio $\frac{27P}{fg^2} = Q$ RS, seu substitutis veris valoribus erit $90\int dx(x-x^2)^{\frac{1}{3}}$.
$\int dx(x^2-x^3)^{\frac{1}{3}} = fg^2 \int \frac{y^{f-1}\,dy}{(1-y^g)^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{y^{f+\frac{1}{3}g-1}\,dy}{(1-y^g)^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{y^{f+\frac{2}{3}g-1}\,dy}{(1-y^g)^{\frac{2}{3}}}.$

§. 27. Antequam autem haec vlterius prosequamur conueniet valori ipsius P commodiorem formam generaliter tribui. Facto autem $x = z^q$, cum sit $\int dx(x^n - x^{n+1})^{\frac{p}{q}} = \frac{npq}{(n+1)((n+1)p+q)} \int \frac{z^{np-1}\,dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}}$, post substitutionem prodibit

$$P = 1.2.3.\ldots.p.\,\frac{p}{q}^{\,q-1} \cdot \int \frac{z^{p-1}\,dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}} \cdot \int \frac{z^{2p-1}\,dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}} \cdot \int \frac{z^{3p-1}\,dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}} \ldots\ldots \int \frac{z^{(q-1)p-1}\,dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}}.$$

Ex qua expressione si extrahatur radix potestatis q, prodibit valor ipsius $\int dx(-lx)^{\frac{p}{q}}$.

§. 28.

§. 28. Posito nunc $p = 1$ et $q = 3$ prodibit $P = \frac{1}{3} \int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z\,dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}}$. Facto autem $y = z^3$; obtinebitur sequens aequatio: $\int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z\,dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} = 3fg^2 \cdot \int \frac{z^{3f-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{3f+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{3f+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}}$. Si nunc ponatur $3f = a$ orietur sequens aequatio notatu digna; $\int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z\,dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} = ag^2 \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}}$. Quae cum superiore $\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = ag \int \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2g})}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2g})}}$ comparata iam quodammodo indicat, quo modo sequentes huius *generis* aequationes se sint habiturae.

§. 29. Antequam autem per inductionem quicquam concludendi periculum faciam, casus nonnullos actu euoluam. Sit igitur $p = 2$ et $q = 3$ hincque reperietur $P = \frac{8}{3} \int \frac{z\,dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^3\,dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{8}{9} \int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z\,dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}}$; $Q = \int \frac{y^{f-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$; $R = \int \frac{y^{h-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$. Expressiones autem infinitae ita se habebunt; $\frac{27 \cdot P}{8f^2gQ^3} = \frac{f}{(f+\frac{1}{3}g)} \cdot \frac{(f+g)}{(f+\frac{2}{3}g)} \cdot \frac{(f+g)}{(f+\frac{2}{3}g)} \cdot \frac{(f+g)(f+2g)(f+2g)}{(f+\frac{4}{3}g)(f+\frac{5}{3}g)(f+\frac{5}{3}g)}$ etc. et $\frac{R}{Q} = \frac{f(h+\frac{2}{3}g)(f+g)}{h(f+\frac{2}{3}g)(h+g)}$

 $(h+$

$\dfrac{(h+\frac{5}{3}g)(f+2g)(h+\frac{8}{3}g)}{(f+\frac{5}{3}g)(h+2g)(f+\frac{8}{3}g)}$. Sit praeterea $S = \int \dfrac{y^{m-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$ et $T = \int \dfrac{y^{n-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$ erit $\dfrac{T}{S} = \dfrac{m(n+\frac{2}{3}g)(m+g)(n+\frac{5}{3}g)(m+2g)}{n(m+\frac{2}{3}g)(n+g)(m+\frac{5}{3}g)(n+2g)}$ etc. quae duae expressiones in se ductae dant $\dfrac{RT}{QS} =$

$$\frac{fm(h+\frac{2}{3}g)(n+\frac{2}{3}g)(f+g)(m+g)(h+\frac{5}{3}g)(n+\frac{5}{3}g)}{hn(f+\frac{2}{3}g)(m+\frac{2}{3}g)(h+g)(n+g)(f+\frac{5}{3}g)(m+\frac{5}{3}g)} \text{ etc.}$$

§. 30. Haec autem expressio ad illam, cui $\dfrac{27P}{8f^2gQ^2}$ aequale est inuentum, reduci non potest, nisi illa multiplicetur per $\dfrac{f}{f-\frac{1}{3}g}$, ita vt sit $\dfrac{27P}{8fg(f-\frac{1}{3}g)Q^2} = \dfrac{f}{(f-\frac{1}{3}g)} \cdot$

$$\frac{f \cdot (f+g)(f+g)(f+g)(f+2g)}{(f+\frac{2}{3}g)(f+\frac{2}{3}g)(f+\frac{2}{3}g)(f+\frac{5}{3}g)(f+\frac{5}{3}g)} \text{ etc.}$$

nunc enim fiet reductio ponendo $m = f$; $h = f - \frac{1}{3}g$, et $n = f + \frac{1}{3}g$. His igitur valoribus substitutis erit $\dfrac{27P}{8fg(f-\frac{1}{3}g)Q^2} = \dfrac{RT}{QS}$. Cum vero sit $S = Q$ et $R = \int \dfrac{y^{f-\frac{1}{3}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{f+\frac{1}{3}g}{f-\frac{1}{3}g} \int \dfrac{y^{f+\frac{2}{3}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$ et $T = \int \dfrac{y^{f+\frac{1}{3}g-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{3}}}$. obtinebitur haec aequatio; posito $y = z^3$;

$$\int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} = 3fg(3f+g) \int \frac{z^{3f-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^{3f+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^{3f+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}}.$$

Ac si ponatur $3f = a$ erit $\int \dfrac{dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} \cdot$

$\int zdz$

$$\int\frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}}=ag(a+g)\int\frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}}\cdot\int\frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}}\cdot\int\frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}}.$$

§. 31. Ponamus $p=1$ et $q=4$; habebiturque

$$\frac{4^4P}{fg^3Q^4}=\frac{f\cdot f\cdot f\cdot(f+g)(f+g)(f+g)}{(f+\frac{1}{4}g)(f+\frac{1}{4}g)(f+\frac{1}{4}g)(f+\frac{1}{4}g)(f+\frac{5}{4}g)(f+\frac{5}{4}g)}$$

etc. et $\frac{R}{Q}=\frac{f(b+\frac{1}{4}g)(f+g)(b+\frac{5}{4}g)(f+2g)}{b(f+\frac{1}{4}g)(b+g)(f+\frac{5}{4}g)(b+2g)}$ etc. Sit vero vt ante $S=\int\frac{y^{m-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}}$; $T=\int\frac{y^{n-1}dy}{(1-y^g)^{\frac{q-p}{q}}}$; erit

$$\frac{RST}{Q^3}=\frac{f\cdot f\cdot f(b+\frac{1}{4}g)(m+\frac{1}{4}g)(n+\frac{1}{4})\cdot(f+g)}{b\cdot m\cdot n(f+\frac{1}{4}g)(f+\frac{1}{4}g)(f+\frac{1}{4}g)(b+g)}\text{ etc.}$$

cuius expressionis 6 factores in illius quatuor sunt transmutandi, quod fiet ponendo $b=f+\frac{1}{4}g$; $m=f+\frac{2}{4}g$; et $n=f+\frac{3}{4}g$; quo facto habebitur $4^4P=fg^3QRST$. Quare cum sit $P=\frac{1}{4}\int\frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}\cdot\int\frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}\cdot\int\frac{z^2dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}$; si ponatur $y=z^4$ et $4f=a$ orietur ista aequatio:

$$\int\frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}\cdot\int\frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}\cdot\int\frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}}=ag^3\int\frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}}\cdot\int\frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}}\cdot\int\frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}}\cdot\int\frac{z^{a+3g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}}$$

cuius cum praecedentibus casibus, quibus erat $p=1, q=2$; et $p=1, q=3$, connexio facile perspicitur.

§. 32. Ex his igitur licebit omnes istius modi aequationes, quae orientur si ponatur $p = 1$, et $q =$ numero cuicunque affirmatiuo integro, formare; erit scilicet.

$$\text{I. } \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = ag \int \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2g})}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2g})}}.$$

$$\text{II. } \int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}} = ag^2 \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{2}{3}}}.$$

$$\text{III. } \int \frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^2dz}{(1-z^4)^{\frac{3}{4}}} = ag^3 \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+3g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{3}{4}}}$$

$$\text{III. } \int \frac{dz}{(1-z^5)^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^5)^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^2dz}{(1-z^5)^{\frac{4}{5}}} \int \frac{z^3dz}{(1-z^5)^{\frac{4}{5}}} = ag^4 \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{5g})^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{5g})^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{5g})^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^{a+3g-1}dz}{(1-z^{5g})^{\frac{4}{5}}} \cdot \int \frac{z^{a+4g-1}dz}{(1-z^{5g})^{\frac{4}{5}}}. \text{ etc.}$$

§. 33. Quo etiam eas aequationes, quae oriuntur si p non $= 1$, colligere queamus, ponamus $p = 3$ et $q = 4$; quo posito, et reliquis manentibus vt supra, erit $\frac{4^4 P}{3^4 f^3 g Q^4} =$ $\frac{f}{(f+\frac{3}{4}g)} \frac{(f+g)(f+g)(f+g)}{(f+\frac{3}{4}g)(f+\frac{3}{4}g)(f+\frac{3}{4}g)}$ etc. vbi reliqua membra ex quaternis factoribus constantia ex his formantur singulos factores quantitate g augendo. Simili vero modo erit

erit $\frac{RST}{Q^3} = \frac{f.\ f.\ f.}{b.\ m.\ n} \frac{(b+\frac{3}{4}g)(m+\frac{3}{4}g)(n+\frac{3}{4}g)}{(f+\frac{3}{4}g)(f+\frac{3}{4}g)(f+\frac{3}{4}g)}$ etc. vbi seni factores vnam reuolutionem seu periodum constituunt. Ad comparationem autem instituendam necesse est vtramque seriem ita contemplari: $\frac{4^4 P}{3^4 f^2 g (f-\frac{1}{4}g) Q^4} = \frac{f.}{(f-\frac{1}{4}g)} \frac{f}{(f+\frac{3}{4}g)} \frac{(f+g)}{(f+\frac{1}{4}g)} \frac{(f+g)}{(f+\frac{3}{4}g)}$ etc. $\frac{bRST}{fQ^3} = \frac{f.\ f.\ (b+\frac{3}{4}g)}{m.n.\ (f+\frac{3}{4}g)} \frac{(m+\frac{3}{4}g)(n+\frac{3}{4}g)(f+g)}{(f+\frac{3}{4}g)(f+\frac{3}{4}g)(b+g)}$ etc. quarum haec transmutatur in illam, ita vt fiat $\frac{4^4 P}{3^4 f g b (f-\frac{1}{4}g)} = QRST$, si fiat $b = f+\frac{1}{4}g$; $m = f-\frac{1}{4}g$; et $n = f+\frac{2}{4}g$.

§. 34. Cum igitur sit $P = \frac{3}{8}^4 \int \frac{z^8 dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}} \cdot \int \frac{z^5 dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}$: $\int \frac{z^8 dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}} = \frac{3^4}{32} \int \frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}} \cdot \int \frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}}$. et $Q = \int \frac{y^{f-1} dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{4}}}$; $R = \int \frac{y^{f+\frac{1}{4}g-1} dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{4}}}$; $S = \int \frac{y^{f-\frac{1}{4}g-1} dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{4}}} = \frac{f+\frac{2}{4}g}{f-\frac{1}{4}g} \int \frac{y^{f+\frac{2}{4}g-1} dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{4}}}$ atque $T = \int \frac{y^{f+\frac{3}{4}g-1} dy}{(1-y^g)^{\frac{1}{4}}}$. Ex quibus posito $y = z^4$ et $4f = a$ sequens conficitur aequatio:

$$\frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}} \cdot \int \frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{1}{4}}} = ag \frac{(a+g)(a+2g)}{1 \cdot 2} \int \frac{z^{a-1} dz}{(1-z^{4g})^{\frac{1}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1} dz}{(1-z^{4g})^{\frac{1}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1} dz}{(1-z^{4g})^{\frac{1}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+3g-1} dz}{(1-z^{4g})^{\frac{1}{4}}}.$$

§. 35.

§. 35. Hoc modo progrediendo reperientur sequentes aequationes, quando p non est $= 1$ et quidem si $p = 2$ inuenietur.

$$\text{I. } \int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^3)^{\frac{1}{3}}} = ag(a+g) \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{3g})^{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{II. } \int \frac{dz}{(1-z^4)^{\frac{2}{4}}} \cdot \int \frac{zdz}{(1-z^4)^{\frac{2}{4}}} \cdot \int \frac{zzdz}{(1-z^4)^{\frac{2}{4}}} = ag^2(a+g) \int \frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{2}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{2}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+2g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{2}{4}}} \cdot \int \frac{z^{a+3g-1}dz}{(1-z^{4g})^{\frac{2}{4}}}$$

Generaliter autem quicquid sit q, si ponatur $\frac{dz}{(1-z^q)^{\frac{q-2}{q}}} = X dz$ et $\frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{qg})^{\frac{q-2}{q}}} = Y dz$ erit $\int X dz \cdot \int z X dz \cdot \int z^2 X dz \ldots\ldots \int z^{q-2} X dz = ag^{q-2}(a+g) \int Y dz \cdot \int z^g Y dz \int z^{2g} Y dz \ldots\ldots \int z^{(q-1)g} Y dz$.

§. 36. Simili modo si sit $p = 3$, ac ponatur $\frac{dz}{(1-z^q)^{\frac{q-3}{q}}} = X dz$, et $\frac{z^{a-1}dz}{(1-z^{qg})^{\frac{q-3}{q}}} = Y dz$ prodibit sequens aequatio generalis, $\int X dz \cdot \int z X dz \cdot \int z^2 X dz \ldots\ldots \int z^{q-2} X dz = ag^{q-3} \frac{(a+g)(a+2g)}{1 \cdot 2} \int Y dz \cdot \int z^g Y dz \cdot \int z^{2g} Y dz \ldots\ldots \int z^{(q-1)g} Y dz$. Atque hinc omnes has formulas in vnam latissime patentem colligi licet. Sint enim p et q numeri quicunque integri affirmatiui, ac ponatur $\frac{dz}{(1-z^q)^{\frac{q-p}{q}}} = X dz$

$X dz$ et $\frac{z^{g-1} dz}{(1-z^{qg})^{\frac{q-p}{q}}} = Y dz$; habebitur $\int X dz . \int z X dz :$ $\int z^2 X dz \ldots . \int z^{q-2} X dz = a g^{q-p} \frac{(a+g)(a+2g)(a+3g) \ldots (a+(p-1)g)}{1. \quad 2. \quad 3. \ldots\ldots (p-1)}$ $\int Y dz . \int z^g Y dz . \int z^{2g} Y dz . \ldots\ldots \int z^{(q-1)g} Y dz$.

§. 37. Cum autem ſit $\int z^{q-1} X dz = \frac{1}{p}$, ſi per hunc factorem vtrinque multiplicetur proueniet ſequens aequatio ſatis elegans: $\frac{a(a+g)(a+2g)(a+3g) \ldots\ldots (a+(p-1)g)}{1. \; 2. \; 3. \; 4 \ldots\ldots p} g^{q-p} = \frac{\int X dz}{\int Y dz} . \frac{\int z X dz}{\int z^g Y dz} . \frac{\int z^2 X dz}{\int z^{2g} Y dz} . \frac{\int z^3 X dz}{\int z^{3g} Y dz} \ldots\ldots \frac{\int z^{q-1} X dz}{\int z^{(q-1)g} Y dz}$ quae expreſſio omnes hactenus inuentas in ſe complectitur; atque ob inſignem ordinem eſt notatu digna.

§. 38. Progrediar nunc ad aliam methodum, cuius ope ad huiusmodi expreſſiones ex factoribus innumerabilibus conſtantes peruenire licet, quae magis ad analyſin eſt accommodata. Obſeruaui enim ex reductione formularum integralium ad alias iſtiusmodi expreſſiones obtineri poſſe. Sit enim propoſita iſta formula integralis $\int x^{m-1} dx (1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$, quae non difficulter transmutatur in hanc expreſſionem $\frac{x^m (1-x^{nq})^{\frac{p+q}{q}}}{m} + \frac{m+(p+q)n}{m} \int x^{m+nq-1} dx (1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$. Si ergo m et $\frac{p+q}{q}$ fuerint numeri affirmatiui, atque integralia ita capiantur, vt euaneſcant, poſito $x=0$, tumque ponatur $x=1$, fiet $\int x^{m-1} dx (1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{m+(p+q)n}{m} \int x^{m+nq-1} dx (1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$.

§. 39. Cum deinde ſimili modo ſit $\int x^{m+nq-1} dx (1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{m+(p+2q)n}{m+nq} \int x^{m+2nq-1} dx (1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$ erit quoque $\int x^{m-1} dx (1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{(m+(p+q)n)(m+(p+2q)n)}{m(m+nq)} \int x^{m+2nq-1} dx (1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$. Hac

ergo

ergo reductione in infinitum continuata prodibit: $\int x^{m-1}dx (1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{(m+(p+q)n)(m+(p+2q)n)(m+(p+3q)n)\cdots\cdots(m+(p+\infty q)n)}{m\cdot(m+nq)(m+2nq)\cdots\cdots(m+\infty nq)} \int x^{m+\infty nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$. Ac simili modo est $\int x^{\mu-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{(\mu+(p+q)n)(\mu+(p+2q)n)(\mu+(p+3q)n)\cdots\cdots(\mu+(p+\infty q)n)}{\mu\,(\mu+nq)(\mu+2nq)\cdots\cdots(\mu+\infty nq)} \int x^{\mu+\infty nq-1} dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$; dummodo m, et nq et $\frac{p+1}{q}$ sint numeri affirmatiui, seu nihilo maiores.

§. 40. Quoniam autem si m est infinitum fit $\int x^m dx (1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \int x^{m+\alpha}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$, quicunque numerus finitus loco α accipiatur, vti ex paragr. 38 colligitur, erit quoque $\int x^{m+\infty nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \int x^{\mu+\infty nq-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}$. Quamobrem si praecedentium expressionum altera per alteram diuidatur, proueniet ista aequatio: $\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}}{\int x^{\mu-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}}} = \frac{\mu(m+(p+q)n)(\mu+nq)(m+(p+2q)n)(\mu+2nq)(m+(p+3q)n)(\mu+3nq)}{m(\mu+(p+q)n)(m+nq)(\mu+(p+2q)n)(m+2nq)(\mu+(p+3q)n)(m+3nq)}$ etc. in infinitum, cuius expressionis ope innumerabilia producta ex infinitis factoribus constantia exhiberi possunt, quorum valores per quadraturas curuarum assignari poterunt.

§. 41. Si altera formula integralis admittat integrationem, tum commoda expressio infinita pro altero integrali habebitur. Sit enim $\mu = nq$; erit $\int x^{\mu-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{1}{(p+q)n}$, quo valore substituto prodibit $\int x^{m-1}dx(1-x^{nq})^{\frac{p}{q}} = \frac{1}{(p+q)n}\cdot\frac{nq(m+(p+q)n)2nq(m+(p+2q)n)3nq}{m\,(p+2q)n\,(m+nq)(p+3q)n\,(m+2nq)}$ etc. cuius ope pro innumerabilibus integralibus expressiones per continuos factores in infinitum excurrentes inueniri possunt; eo saltem casu quo $x = 1$; quippe qui plerumque potissimum desideratur.

§. 42.

§. 42. Ponatur n loco nq, et prodibit: $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{q}{(p+q)n} \cdot \frac{n(mq+(p+q)n)}{m(p+2q)n} \cdot \frac{2n(mq+(p+2q)n)}{(m+n)(p+3q)n} \cdot \frac{3n(mq+(p+3q)n)}{(m+2n)(p+4q)n}$ etc. quae in binos factores resoluta fit simplicior euaditque $\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}} = \frac{q}{(p+q)n} \cdot \frac{1(mq+(p+q)n)}{m(p+2q)} \cdot \frac{2(mq+(p+2q)n)}{(m+n)(p+3q)} \cdot \frac{3(mq+(p+3q)n)}{(m+2n)(p+4q)}$ etc. vnde sequentia exempla notabiliora deducuntur.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = 1 \cdot \frac{1\cdot 4}{1\cdot 3} \cdot \frac{2\cdot 8}{3\cdot 5} \cdot \frac{3\cdot 12}{5\cdot 7} \text{ etc.} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(1-xx)}} = 1 \cdot \frac{1\cdot 6}{2\cdot 3} \cdot \frac{2\cdot 10}{4\cdot 5} \cdot \frac{3\cdot 14}{6\cdot 7} \text{ etc.} = 1$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-xx)}} = 1 \cdot \frac{1\cdot 8}{3\cdot 3} \cdot \frac{2\cdot 12}{5\cdot 5} \cdot \frac{3\cdot 16}{7\cdot 7} \text{ etc.} = \frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1\cdot 5\cdot 2\cdot 11\cdot 3\cdot 17\cdot 4\cdot 23\cdot 5\cdot 29}{1\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 10\cdot 9\cdot 13\cdot 11} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1\cdot 7\cdot 2\cdot 13\cdot 3\cdot 19\cdot 4\cdot 25\cdot 5\cdot 31}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 8\cdot 7\cdot 11\cdot 9\cdot 14\cdot 11} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1\cdot 6\cdot 2\cdot 14\cdot 3\cdot 22\cdot 4\cdot 30}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 9\cdot 7\cdot 13\cdot 9} \text{ etc.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 7\cdot 6\cdot 11\cdot 8\cdot 15}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 9\cdot 7\cdot 13\cdot 9} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{xxdx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1\cdot 10\cdot 2\cdot 18\cdot 3\cdot 26\cdot 4\cdot 34}{3\cdot 3\cdot 7\cdot 5\cdot 11\cdot 7\cdot 15\cdot 9} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\cdot 3\cdot 6\cdot 6\cdot 9\cdot 9\cdot 12\cdot 12}{1\cdot 5\cdot 4\cdot 8\cdot 7\cdot 11\cdot 10\cdot 14} \text{ etc.}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\cdot 4\cdot 8\cdot 8\cdot 12\cdot 12\cdot 16\cdot 16}{1\cdot 7\cdot 5\cdot 11\cdot 9\cdot 15\cdot 13\cdot 19} \text{ etc.}$$

Praeterea hae expressiones notari merentur.

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{n-m} \cdot \frac{n\cdot n}{m(2n-m)} \cdot \frac{2n\cdot 2n}{(m+n)(3n-m)} \cdot \frac{3n\cdot 3n}{(m+2n)(4n-m)} \text{ etc.}$$

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{m-n}{n}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{-n\cdot 2m}{m(m+n)} \cdot \frac{2n(2m+n)}{(m+n)(m+2n)} \cdot \frac{3n(2m+2n)}{(m+2n)(m+3n)} \cdot \frac{4n(2m+3n)}{(m+3n)(m+4n)} \text{ etc.}$$

§. 43. Cum autem pari modo sit $\int x^{\mu-1}dx(1-x^\nu)^{\frac{r}{s}} = \frac{s}{(r+s)\nu} \cdot \frac{1(\mu s+(r+s)\nu)}{\mu(r+2s)\nu} \cdot \frac{2(\mu s+(r+2s)\nu)}{(\mu+\nu)(r+3s)\nu} \cdot \frac{3(\mu s+(r+3s)\nu)}{(\mu+2\nu)(r+4s)\nu}$ etc. erit priorem expressionem per hanc diuidendo $\frac{\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\frac{p}{q}}}{\int x^{\mu-1}dx(1-x^\nu)^{\frac{r}{s}}} =$

 (r+1s)

$$\frac{(r+s)qv}{(p+q)sn} \cdot \frac{\mu(r+2s)(mq+(p+q)n)}{m(p+2q)(\mu s+(r+s)v)} \cdot \frac{(\mu+v)(r+3s)(mq+(p+2q)n)}{(m+n)(p+3q)(\mu s+(r+2s)v)} \text{ etc.}$$

Haec igitur expreſſio infinita, quoties habet valorem finitum, toties ſummatio alterius integralis ad alterum reduci poterit. Huiusmodi autem caſus exiſtunt, quando factores numeratoris deſtruunt factores denominatoris, ita vt poſt deſtructionem finitus factorum numerus ſuperſit. Continentur enim in hac expreſſione omnes omnino reductiones formularum integralium ad alias.

§. 44. Quo autem plures iſtiusmodi expreſſiones inter ſe comparari queant, eam hoc modo accipere viſum eſt:

$$\frac{\int x^{a-1}dx(1-x^b)^c}{\int x^{f-1}dx(1-x^g)^h} = \frac{(h+1)g}{(c+1)b} \cdot \frac{f(h+2)(a+(c+1)b)}{a(c+2)(f+(h+1)g)} \cdot \frac{(f+g)(h+3)(a+(c+2)b)}{(a+b)(c+3)(f+(h+2)g)}$$

etc. Simili modo erit $\dfrac{\int x^{\alpha-1}dx(1-x^{\epsilon})^{\gamma}}{\int x^{\zeta-1}dx(1-x^{\eta})^{\theta}} = \dfrac{(\theta+1)\eta}{(\gamma+1)\epsilon} \cdot \dfrac{\zeta(\theta+2)(\alpha+(\gamma+1)\epsilon)}{\alpha(\gamma+2)(\zeta+(\theta+1)\eta)} \cdot$ $\dfrac{(\zeta+\eta)(\theta+3)(\alpha+(\gamma+2)\epsilon)}{(\alpha+\epsilon)(\gamma+3)(\zeta+(\theta+2)\eta)}$ etc. quae expreſſiones, etſi re non inter ſe differunt, tamen quoniam habent formam diuerſam, inter ſe comparari poterunt.

§. 45. Vt nunc ex his expreſſionibus eadem theoremata eliciamus, quae ſupra inuenimus, ſit $\theta = \gamma = h = c$; $\eta = \epsilon = g = b$; erit $\dfrac{\int x^{a-1}dx(1-x^b)^c}{\int x^{f-1}dx(1-x^b)^c} = \dfrac{f(a+(c+1)b)(f+b)}{a(f+(c+1)b)(a+b)}$ $\dfrac{(a+(c+2)b)(f+2b)(a+(c+3)b)}{(f+(c+2)b)(a+2b)(f+(c+3)b)}$ etc. atque altera formula

$$\frac{\int x^{a-1}dx(1-x^b)^c}{\int x^{\zeta-1}dx(1-x^b)^c} = \frac{\zeta(a+(c+1)b)(\zeta+b)(a+(c+2)b)(\zeta+2b)(a+(c+3)b)}{a(\zeta+(c+1)b)(a+b)(\zeta+(c+2)b)(a+2b)(\zeta+(c+3)b)}$$

etc. Harum expreſſionum productum ſi ponatur $= \frac{f}{a}$ oportet eſſe $\dfrac{(a+(c+1)b)(f+b)\zeta(a+(c+1)b)}{(f+(c+1)b)(a+b)a(\zeta+(c+1)b)} = 1$, hoc enim ſi fuerit, totarum expreſſionum infinitarum productum fiet $= \frac{f}{a}$. At hoc obtinetinebitur faciendo $\alpha = a + (c+1)b$; $\zeta = f + (c+1)b$; fietque $c = -\frac{1}{2}$, ita vt sit $\alpha = a + \frac{1}{2}b$; $\zeta = f + \frac{1}{2}b$, eritque ideo $\int \frac{x^{a-1}dx}{\sqrt{(1-x^b)}} \cdot \int \frac{x^{a+\frac{1}{2}b-1}dx}{\sqrt{(1-x^b)}} = \frac{f}{a} \int \frac{x^{f-1}dx}{\sqrt{(1-x^b)}} \cdot \int \frac{x^{f+\frac{1}{2}b-1}dx}{\sqrt{(1-x^b)}}$ seu si ponatur $x = z^2$; erit $\int \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2b})}} \cdot \int \frac{z^{a+b-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2b})}} = \frac{f}{a} \cdot \int \frac{z^{f-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2b})}} \cdot \int \frac{z^{f+b-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2b})}}$ positis a et f loco $2a$ et $2f$. Haec autem aequatio nil aliud est nisi Theorema supra inuentum §. 12. facto enim $f = b$ fit $\int \frac{z^{2b-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2b})}} = \frac{1}{b}$ et $\int \frac{z^{b-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2b})}} = \frac{\pi}{2b}$; vnde fiet $\pi = 2ab \int \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2b})}} \cdot \int \frac{z^{a+b-1}dz}{\sqrt{(1-z^{2b})}}$

§. 46. Simili modo alia huius generis theoremata inveniri possunt; sit enim $g = b$; $b = c$; $\eta = \theta = b$ et $\vartheta = \gamma$, quaeraturque casus, quo productum ambarum expressionum fiat $= 1$: Hoc autem obtinebitur si sit $\frac{f(a+(c+1)b)\zeta(\alpha+(\gamma+1)b)}{a(f+(c+1)b)\alpha(\zeta+(\gamma+1)b)} = 1$; id quod fiet capiendo $\alpha = a + (c+1)b$; $f = a + (\gamma+1)b$; $\zeta = a$. His igitur valoribus substitutis orietur sequens theorema non inelegans $\frac{\int x^{a-1}dx(1-x^b)^c}{\int x^{a-1}dx(1-x^b)^\gamma} \cdot \frac{\int x^{a+(c+1)b-1}dx(1-x^b)^\gamma}{\int x^{a+(\gamma+1)b-1}dx(1-x^b)^c} = 1$; siue si ponatur $c+1 = m$ et $\gamma + 1 = n$ habebitur $\int \frac{x^{a-1}dx}{(1-x^b)^{1-m}} \cdot \int \frac{x^{a+mb-1}dx}{(1-x^b)^{1-n}} = \int \frac{x^{a-1}dx}{(1-x^b)^{1-n}} \cdot \int \frac{x^{a+nb-1}dx}{(1-x^b)^{1-m}}$.

§. 47. Alio insuper modo concinnum theorema elici poterit ponendo $\gamma = b$ et $\theta = c$, manente $\eta = \beta = g = b$; atque efficiendo vt productum expressionum integralium fiat $= \frac{f}{a}$, quod, quo eueniat, oportet esse $\frac{(a+(c+1)b)(f+b)\zeta}{(f+(b+1)b)(a+b)\alpha} \cdot \frac{(\alpha+(b+1)b)}{(\zeta+(c+1)b)} = 1$. Hoc vero efficietur capiendo $\alpha = a + (c+1)b$; $\zeta = f + (b+1)b$, ex quo reperietur $c + b + 1 = 0$ seu $b = -1 - c$; quare sumatur $c = -\frac{1}{2} + n$; et $b = -\frac{1}{2} - n$, atque sequeus prodibit theorema: $\frac{f}{a} =$

$$\frac{\int x^{a-1} dx (1-x^b)^{-\frac{1}{2}+n} \cdot \int x^{a+(\frac{1}{2}+n)b-1} dx (1-x^b)^{-\frac{1}{2}-n}}{\int x^{f-1} dx (1-x^b)^{-\frac{1}{2}-n} \cdot \int x^{f+(\frac{1}{2}-n)b-1} dx (1-x^b)^{-\frac{1}{2}+n}}.$$

§. 48. Sint nunc omnes exponentes c, b, γ et θ inaequales, at $g = \beta = \eta = b$, quaeranturque casus quibus productum ambarum expressionum fiat $= \frac{(b+1)(\theta+1)}{(c+1)(\gamma+1)}$. Hoc autem eueniet si reddatur haec forma $\frac{f(bb+2b)(a+(c+1)b)\zeta(b\theta+2b)}{a(bc+2b)(f+(b+1)b)\alpha(b\gamma+2b)} \cdot \frac{(\alpha+(\gamma+1)b)}{(\zeta+(\theta+1)b)} = 1$ quos factores ita expressi, vt singuli in sequentibus membris quantitate b crescant. Ponatur iam $\zeta + (\theta+1)b = bb + 2b$, seu $\zeta = b(1 + b - \theta)$ et $\alpha + (\gamma+1)b = bc + 2b$, seu $\alpha = b(1 + c - \gamma)$. Porro fiat $f + (b+1)b = b\theta + 2b$, seu $f = b(1 + \theta - b)$ et $a + (c+1)b = b\gamma + 2b$ seu $a = b(1 + \gamma - c)$. Denique debebit esse $\alpha = f$ et $\zeta = a$, quae duae aequationes requirunt vt sit $c - \gamma = \theta - b$, siue $c + b = \gamma + \theta$. Vnde sequens orietur Theorema: $\frac{(b+1)(\theta+1)}{(c+1)(\gamma+1)} =$

$$\frac{\int x^{b(1+\gamma-c)-1} dx (1-x^b)^c \cdot \int x^{b(1+c-\gamma)-1} dx (1-x^b)^\gamma}{\int x^{b(1+\theta-b)-1} dx (1-x^b)^b \cdot \int x^{b(1+b-\theta)-1} dx (1-x^b)^\theta}$$ dummodo sit $c + b = \gamma + \theta$.

§. 49. Alio autem insuper modo expressio illa effici potest $= 1$, ponendo $\alpha = a + (c+1)b$ et $\zeta = f + (b + 1)$

$+1)b$; $f=b(\gamma+2)$; $a=b(\theta+2)$; ita vt ſit $\alpha=b(3+c+\theta)$ et $\zeta=b(3+\gamma+b)$. Porro autem debet eſſe $\zeta+(\theta+1)b=bb+2b$, et $\alpha+(\gamma+1)b=bc+2b$; quibus poſtulatur vt ſit $\gamma+\theta+2=0$. Ponatur ergo $\gamma=-1+n$ et $\theta=-1-n$. At ſi requiratur, vt productum ambarum expreſſionum ſit $=\frac{f(b+1)(\theta+1)}{a(c+1)(\gamma+1)}$, id obtinebitur ponendo $\alpha=a+(c+1)b$, $\zeta=f+(b+1)b$; $f=b(\gamma+1)$; $a=b(\theta+1)$ vnde erit $\alpha=b(2+c+\theta)$ et $\zeta=b(2+b+\gamma)$. Tandem vero debebit eſſe $\gamma+\theta+1=0$. Ponatur $\gamma=-\frac{1}{2}+n$ et $\theta=-\frac{1}{2}-n$; atque habebitur hoc theorema $\frac{b+1}{c+1}=\frac{\int x^{b(\frac{1}{2}-n)-1}dx(1-x^b)^c}{\int x^{b(\frac{1}{2}+n)-1}dx(1-x^b)^b}\cdot\frac{\int x^{b(\frac{3}{2}+c-n)-1}dx(1-x^b)^{-\frac{1}{2}+n}}{\int x^{b(\frac{3}{2}+b+n)-1}dx(1-x^b)^{-\frac{1}{2}-n}}$: in quo notandum eſt, exponentes $c, b, -\frac{1}{2}+n, -\frac{1}{2}-n$ numeros negatiuos quidem eſſe poſſe, ſed tales vt cum vnitate ad affirmatiuos tranſeant; alioquin enim integralia valorem finitum non obtinerent caſu $x=1$.

§. 50. Quemadmodum igitur non ſolum theorema ſupra inuentum circa duarum formularum integralium producta detexi hac methodo magis directa, ſed etiam alia noua elicui non minus notatu digna, ita, ſi pari modo tres eiusmodi expreſſiones in ſe inuicem ducantur, theoremata complura circa producta trium formularum integralium prodibunt; atque vltra ad quotcunque factorum numerum progredi licebit; ſed cum haec inquiſitio adeo prolixum calculum requirat, vt etiam litterae vix ſufficiant, cum ipſis theorematis praecipuis indicatis, tum via monſtrata contentus ero.

DE

DE FRACTIONIBVS CONTINVIS OBSERVATIONES.

AVCTORE

Leonh. Eulero.

§. 1.

Cum anno superiore incepissem fractiones continuas examini subiicere, hancque fere nouam analyseos partem euoluere, nonnullae obseruationes se interea obtulerunt, quae forte ad istam Theoriam excolendam non erunt incongruae. Quamobrem cum exploratio huius doctrinae non parum adiumenti analysi allatura esse videatur, hoc argumentum denuo aggrediar, et quae huc spectantia occurrerunt, dilucide exponam. Sit igitur proposita haec fractio continua

$$A+\cfrac{B}{C+\cfrac{D}{E+\cfrac{F}{G+\cfrac{H}{I+\text{etc.}}}}}$$

cuius valor verus reperietur continuando sequentem seriem in infinitum.

$A+\frac{B}{1.P}-\frac{BD}{PQ}+\frac{BDF}{QR}-\frac{BDFH}{RS}+$ etc. in qua serie litterae P, Q, R, S etc. sequentes obtinent valores:

$P=C$; $Q=EP+D$; $R=GQ+FP$; $S=IR+HQ$; etc. Series haec autem semper est conuergens, quantumuis crescant vel decrescant litterae B, C, D, E, F etc. dummodo omnes sint affirmatiuae, quilibet terminus enim minor est quam praecedens, maior vero quam sequens; id

quod

quod lex, qua valores P, Q, R, S etc. formantur, statim declarat.

§. 2. Si ergo vicissim haec proposita fuerit series infinita $\frac{B}{P} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BDF}{QR} - \frac{BDFH}{RS} +$ etc. eius summa commode per fractionem continuam exprimi poterit. Cum enim sit $C = P$; $E = \frac{Q-D}{P}$; $G = \frac{R-FP}{Q}$; $I = \frac{S-HQ}{R}$, etc. habebitur fractio continua illi seriei aequalis haec:

$$\cfrac{B}{P + \cfrac{D}{\cfrac{Q-D}{P} + \cfrac{F}{\cfrac{R-FP}{Q} + \cfrac{H}{\cfrac{S-HQ}{R} + \cfrac{K}{etc.}}}}} \quad \text{seu} \quad \cfrac{B}{P + \cfrac{DP}{Q-D + \cfrac{FPQ}{R-FP + \cfrac{HQR}{S-HQ + \cfrac{KRS}{etc.}}}}}$$

Quare si data fuerit ista series $\frac{a}{p} - \frac{b}{q} + \frac{c}{r} - \frac{d}{s} + \frac{e}{t} -$ etc. ob $B = a$; $D = b:a$; $F = c:b$; $H = d:c$; $K = e:d$, etc. et $P = p$; $Q = q:p$; $R = pr:q$; $S = qs:pr$; $T = prt:qs$; etc. huius seriei $\frac{a}{p} - \frac{b}{q} + \frac{c}{r} - \frac{d}{s} + \frac{e}{t} -$ etc. summae aequalis erit sequens fractio continua:

$$\cfrac{a}{p + \cfrac{b:a}{\cfrac{aq-bp}{app} + \cfrac{c:b}{\cfrac{p^2(br-cq)}{bqq} + \cfrac{d:c}{\cfrac{q^2(cs-dr)}{cp^2r^2} + \cfrac{e:d}{\cfrac{p^2r^2(dt-es)}{dq^2s^2} + etc.}}}}} = \cfrac{a}{p + \cfrac{bp^2}{aq-bp + \cfrac{acqq}{br-cq + \cfrac{bdrr}{cs-dr + \cfrac{cess}{dt-es + etc.}}}}}$$

§. 3. Vt haec exemplis nonnullis illustremus, sumamus seriem $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} +$ etc. cuius summa est $= l\,2$ seu $= \int \frac{dx}{1+x}$ si post integrationem ponatur $x = 1$. erit ergo $a = b = c = d$ etc. $= 1$; $p = 1$; $q = 2$; $r = 3$; $s = 4$; etc. atque $p = 1$; $aq - bp = 1$; $br - cq = 1$; $cs - dr = 1$, etc.

 Hinc

Hinc igitur fit $\int \frac{dx}{1+x} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{16}{1+\text{etc.}}}}}}$

seu huius fractionis continuae valor est $l2$.

§. 4. Contemplemur nunc hanc seriem $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.}$ cuius summa est area circuli, diametrum $= 1$ habentis, seu $= \int \frac{dx}{1+x^2}$ posito post integrationem $x = 1$. Erit ergo $a = b = c = d = \text{etc.} = 1$ et $p = 1$; $q = 3$; $r = 5$; $s = 7$; etc. vnde fit:

$$\int \frac{dx}{1+xx} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2\ \text{etc.}}}}}}$$

quae est ipsa fractio continua Brounckeri, quam pro quadratura circuli exhibuit.

§. 5. Simili modo aliis huius generis seriebus accipiendis prodibunt sequentes formularum integralium conuersiones in fractiones continuas, posito scilicet post integrationem $x = 1$:

$$\int \frac{dx}{1+x^3} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{4^2}{3+\cfrac{7^2}{3+\cfrac{10^2}{3+\text{etc.}}}}}} \quad ; \quad \int \frac{dx}{1+x^4} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{4+\cfrac{5^2}{4+\cfrac{9^2}{4+\cfrac{13^2}{4\ \text{etc.}}}}}}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^5} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{5+\cfrac{6^2}{5+\cfrac{11^2}{5+\cfrac{16^2}{5+\text{etc.}}}}}} \quad ; \int \frac{dx}{1+x^6} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\cfrac{13^2}{6+\cfrac{19^2}{6\ \text{etc.}}}}}}$$

§. 6. Hinc igitur sequitur fore generaliter:

$$\int \frac{dx}{1+x^m} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{m+\cfrac{(m+1)^2}{m+\cfrac{(2m+1)^2}{m+\cfrac{(3m+1)^2}{m+\text{etc.}}}}}}$$

posito post integrationem $x=1$. Ac si fuerit m numerus fractus habebitur:

$$\frac{dx}{1+x^{\frac{m}{n}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{n}{m+\cfrac{(m+n)^2}{m+\cfrac{(2m+n)^2}{m+\cfrac{(3m+n)^2}{m+\text{etc.}}}}}}$$

§. 7. Consideremus nunc formulam $\int \frac{x^{n-1}dx}{1+x^m}$ quae integrata et post integrationem facto $x=1$ praebet hanc seriem: $\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{2m+n} - \frac{1}{3m+n} + \text{etc.}$ Hinc fiet $a = b = c = d =$ etc. $=1$. et $p=n$; $q=m+n$; $r=2m+n$; $s=3m+n$; etc. Vnde habebitur

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{1+x^m} = \cfrac{1}{n+\cfrac{n^2}{m+\cfrac{(m+n)^2}{m+\cfrac{(2m+n)^2}{n+\text{etc.}}}}}$$

quae fractio continua congruit cum vltimo inuenta.

§. 8. Proponatur iam ista formula $\int \frac{x^{n-1}dx}{(1+x^m)^{\frac{\mu}{\nu}}}$, quae integrata facto $x=1$ praebet hanc seriem: $\frac{1}{n} - \frac{\mu}{\nu(m+n)}$ +

$+\frac{\mu(\mu+\nu)}{1\cdot 2\nu^2(2m+n)}-\frac{\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\nu^3(3m+n)}+$ etc. quae cum generali comparata dat $a=1$; $b=\mu$; $c=\mu(\mu+\nu)$; $d=\mu(\mu+\nu)(\mu+2\nu)$; etc. $p=n$; $q=\nu(m+n)$; $r=2\nu^2(2m+n)$; $s=6\nu^3(3m+n)$; $t=24\nu^4(4m+n)$; etc. atque $aq-bp=\nu m+(\nu-\mu)n$; $br-cq=\mu\nu(3\nu-\mu)m+\mu\nu(\nu-\mu)n$; $cs-dr=2\mu\nu^2(\mu+\nu)(m(5\nu-2\mu)+n(\nu-\mu))$ $dt-es=6\mu\nu^3(\mu+\nu)(\mu+2\nu)(m(7\nu-3\mu)+n(\nu-m))$ etc. quibus substitutis, factaque reductione habebitur:

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{(1+x^m)^{\frac{\mu}{\nu}}}=\cfrac{1}{n+\cfrac{\mu n^2}{\nu m+(\nu-\mu)n+\cfrac{\nu(\mu+\nu)(m+n)^2}{(3\nu-\mu)m+(\nu-\mu)n+\cfrac{2\nu(\mu+2\nu)(2m+n)^2}{(5\nu-2\mu)m+(\nu-\mu)n+\cfrac{3\nu(\mu+3\nu)(3m+n)^2}{(7\nu-3\mu)m+(\nu-\mu)n\text{ etc.}}}}}}$$

Sit $\mu=1$ et $\nu=2$ erit $\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{(1-x^m)}}=$

$$\cfrac{1}{n+\cfrac{n^2}{2m+n+\cfrac{6(m+n)^2}{5m+n+\cfrac{20(2m+n)^2}{8m+n+\cfrac{42(3m+n)^2}{11m+n+\cfrac{72(4m+n)^2}{14m+n+\text{ etc.}}}}}}}$$

§. 9. At si fuerit $\nu=1$ et μ numerus integer, prodibunt sequentes fractiones continuae:

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{(1+x^m)^2}=\cfrac{1}{n+\cfrac{2n^2}{m-n+\cfrac{1.3(2n+n)^2}{m-n+\cfrac{2\cdot 4(2m+n)^2}{m-n+\cfrac{3\cdot 5(3m+n)^2}{m-n+\cfrac{4\cdot 6(4m+n)^2}{m-n+\text{ etc.}}}}}}}$$

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{(1+x^m)^3}=\cfrac{1}{n+\cfrac{3n^2}{m-2n+\cfrac{1\cdot 4(m+n)^2}{-2n+\cfrac{2\cdot 5(2m+n)^2}{-m-2n+\cfrac{3.6(3m+n)^2}{-2m-2n+\cfrac{4\cdot 7(4m+n)^2}{-3m-2n+\text{ etc.}}}}}}}$$

quae

quae expreſſio pariter ac ſequentes ob quantitates negatiuas non conuergunt ſed diuergunt.

§. 10. Conſequuntur haec omnia ex conuerſione fractionis continuae generalis §. 1 datae in ſeriem infinitam $A + \frac{B}{IP} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BDF}{QR} - \frac{BDFH}{RS} + \text{etc.}$ Haec eadem autem ſeries addendis binis terminis transformatur in hanc $A + \frac{BE}{IQ} + \frac{BDFI}{QS} + \frac{BDFHKN}{SV} + \text{etc.}$ Eſt vero $C = P = \frac{Q-D}{E}$; $G = \frac{S-HQ}{IQ} - \frac{F(Q-D)}{EQ}$; $L = \frac{V-MS}{NS} - \frac{K(S-HQ)}{IS}$; etc. Hinc iſta ſeries infinita $A + \frac{BE}{Q} + \frac{BDFI}{QS} + \frac{BDFHKN}{SV} + \text{etc.}$ conuertetur in ſequentem fractionem continuam:

$$A + \cfrac{B}{\frac{Q-D}{E} + \cfrac{D}{\cfrac{E+F}{\frac{E(S-HQ)-FI(Q-D)}{EIQ} + \cfrac{H}{\cfrac{I+K}{\frac{I(V-MS)-KN(S-HQ)}{INS} + \text{etc.}}}}}}$$

quae a fractionibus liberata tranſit in hanc:

$$A + \cfrac{BE}{Q-D + \cfrac{D}{\cfrac{I+FIQ}{E(S-HQ)-FI(Q-D) + \cfrac{EHQ}{\cfrac{I+KNS}{I(V-MS)-KN(S-HQ) + \cfrac{IMS}{I + \text{etc.}}}}}}}$$

§. 11. Si nunc viciſſim proponatur haec ſeries infinita $\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \frac{d}{s} + \frac{e}{t} + \text{etc.}$ et comparatio cum praecedente inſtituatur erit $Q = p$; $S = \frac{q}{p}$; $V = \frac{pr}{q}$; $X = \frac{qs}{pr}$; $Z = \frac{prt}{qs}$ etc. itemque $E = \frac{a}{B}$; $I = \frac{b}{BDF}$; $N = \frac{c}{BDFHK}$; etc. quibus valoribus ſeries propoſita conuertetur in hanc fractionem continuam:

$$\cfrac{a}{p-D+\cfrac{D}{1+\cfrac{bp:1}{Da(\frac{q}{p}-Hp)-b(p-D)+\cfrac{DHap:1}{1+\cfrac{cq:p}{Hb(\frac{pr}{q}-\frac{Mq}{p})-c(\frac{q}{p}-Hp)+\cfrac{HMbq:p}{1+\cfrac{dpr:q}{Mc(\frac{q}{p}\ldots}}}}}}}$$

in quam fractionem continuam innumerabiles novae quantitates ingrediuntur, quae in ſerie propoſita non inerant.

§. 12. Cum autem ſit ex §. 2. haec ſeries $\frac{b}{p}-\frac{bd}{pq}+\frac{bdf}{qr}-\frac{bdfh}{rs}+$ etc. aequalis iſti fractioni continuae

$$\cfrac{b}{p+\cfrac{dp}{q-d+\cfrac{fpq}{r-fp+\cfrac{hqr}{s-hq+\cfrac{krs}{\text{etc.}}}}}}$$

ſi haec ſeries ad praecedentem reducatur fiet $b=BE$; $d=\frac{-DFI}{E}$; $f=\frac{-HKN}{I}$; etc. $p=Q$; $q=S$; $r=V$, $s=X$ etc. Ex quo fractio continua §. praecedente data transmutabitur in hanc:

$$A+\cfrac{BE}{Q-ID:I.Q\cfrac{}{ES+DFI-EHKN.QS\cfrac{}{IV+HKNQ-IMOR.SV\cfrac{}{NX+MORS+\text{etc.}}}}}$$

cuius lex progreſſionis facile perſpicitur. §. 13.

§. 13. Series autem illa $A + \frac{B}{P} - \frac{BD}{PQ} + \frac{BDF}{QR} - \text{etc.}$ quam primum ex fractione continua generali elicuimus, facile transformatur in hanc formam: $A + \frac{B}{2P} + \frac{BE}{2Q} - \frac{BDG}{2PR} + \frac{BDFI}{2QS} - \frac{BDFHL}{2RT} + \text{etc.}$ quae si litterae C, E, G, I etc. per reliquas ope aequationum datarum exprimantur, abit in hanc: $A + \frac{B}{2P} + \frac{B(Q-D)}{2PQ} - \frac{BD(R-FP)}{2PQR} + \frac{BDF(S-HQ)}{2QRS} - \text{etc.}$ cui propterea aequalis est ista fractio continua:

$$A + \cfrac{B}{P + \cfrac{DP}{Q - D + \cfrac{FPQ}{R - FP + \cfrac{HQR}{S - HQ + \text{etc.}}}}}$$

§. 14. Haec omnia igitur consequuntur ex contemplatione fractionum continuarum immediate, pluresque huius generis obseruationes iam in superiore dissertatione communicaui. Nunc ergo his relictis ad alia pergo, atque aliquot modos tam ad fractiones continuas perueniendi, quam datarum istiusmodi fractionum valores per integrationes assignandi. Primum itaque, cum hic Brounckeri expressio quadtaturae circuli sit non solum demonstrata, sed etiam quasi a priori inuenta, examini subiiciam alias similes expressiones vel ab ipso Brounckero vel a Wallisio inuentas, recensentur enim a Wallisio, nec satis clare indicatur, vtrum Brounkerus omnes inuenerit, an eam duntaxat, quae pro circuli quadratura fuit exhibita. Postmodum vero etiam reliquas illas fractiones continuas, quae altioris indaginis videntur, ex principiis maxime diuersis demonstrabo, istiusque generis multo plures eruere docebo.

§. 15.

§. 15. Quae autem apud Wallifium extant huc redeunt, vt fit productum duarum harum fractionum continuarum $= a^2 =$

$$a-1+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)\ \text{etc.}}}} \quad \text{et} \quad a+1+\cfrac{1}{2(a+1)+\cfrac{9}{2(a+1)+\cfrac{25}{2(a+1)\ \text{etc.}}}}$$

Cum igitur fimili modo fit $(a+2)^2 =$

$$a+1+\cfrac{1}{2(a+1)+\cfrac{9}{2(a+1)+\text{etc.}}} \cdot a+3+\cfrac{1}{2(a+3)+\cfrac{9}{2(a+3)+\text{etc.}}}$$

reperietur hoc modo infinitum progrediendo

$$a \cdot \frac{a(a+4)(a+4)(a+8)(a+8)(a+12)(a+12)}{(a+2)(a+2)(a+6)(a+6)(a+10)(a+10)(a+14)} \ \text{etc.}$$

$$= a-1+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)+\text{etc.}}}}$$

§. 16. Si nunc productum iftud ex infinitis factoribus conftans per methodum in praecedente *differtatione* traditam examinetur reperietur fore $\frac{a(a+4)(a+4)(a+8)\ \text{etc.}}{(a+2)(a+2)(a+6)(a+6)\ \text{etc.}}$ $= \frac{\int x^{a+1}dx:\sqrt{(1-x^4)}}{\int x^{a-1}dx:\sqrt{(1-x^4)}}$. Quocirca huius fractionis continuae valor

$$a-1+\cfrac{1}{2(a-1)+\cfrac{9}{2(a-1)+\cfrac{25}{2(a-1)\ \text{etc.}}}}$$

aequabitur huic expreffioni $a\frac{\int x^{a+1}dx:\sqrt{(1-x^4)}}{\int x^{a-1}dx:\sqrt{(1-x^4)}}$ pofitio poft vtramque integrationem $x=1$.

§. 17. Theorema hoc, quo fractionis continuae fatis latae patentis valor per formulas integrales exprimitur, eo magis eft notatu dignum, quo minus eius veritas eft obvia. Nam quanquam ille cafus quo $a=2$, iam ante eft in-

inuentus, eiusque valor per quadraturam circuli expositus, ceteri tamen casus ex eo non consequuntur. Si enim ista fractio continua modo initio praescripto conuertatur in seriem, ad tam intricatas peruenitur formulas, vt summa eius minime colligi queat; praeter casum $a = 2$. Quo circa iam pridem multam collocaui operam, vt tam veritatem istius theorematis demonstrarem, quam viam detegerem, qua a priori ad hanc ipsam fractionem continuam pertingere liceret; quae inuestigatio, quo difficilior mihi est visa, eo maiorem vtilitatem ex ea orturam esse, sum arbitratus. Quamdiu autem omne studium frustra in hoc negotio impendi, maxime dolui, methodum a Brounckero visitatam nusquam esse expositam et forsitan omnino periisse.

§. 18. Quantum quidem ex Wallisii recensione constat, Brounckerus ad istam formam deductus est per interpolationem huius seriei: $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} +$ etc. cuius terminos intermedios ipsam circuli quadraturam praebere Wallisius demonstrauerat. Atque adeo indicatur initium huius interpolationis a Brounckero institutae. Sibi enim propositum fuisse perhibetur, singulas fractiones $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$ etc. in binos factores resoluere, qui omnes inter se continuam progressionem constituant. Ita si fuerit $AB = \frac{1}{2}$; $CD = \frac{3}{4}$; $EF = \frac{5}{6}$; $GH = \frac{7}{8}$; etc. ac quantitates A, B, C, D, E, etc. continuam progressionem constituant, series illa abit in hanc; $AB + ABCD + ABCDEF +$ etc. quae in hanc formam reducta sponte interpolatur: erit enim terminus cuius index $\frac{1}{2}$ est, $= A$; et terminus indicem $\frac{3}{2}$ habens $= ABC$; et ita porro. Ex quo tota haec interpolatio ad resolutionem singulorum fractionum in binos factores reducitur.

§. 19. Ex lege autem continuitatis erit $BC = \frac{2}{3}$; $DE = \frac{4}{5}$; $FG = \frac{6}{7}$; etc. Cum igitur sit $A = \frac{1}{2B}$; $B = \frac{2}{3C}$; $C = \frac{3}{4D}$; $D = \frac{4}{5E}$; etc. statim obtinetur $A = \frac{1 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6}$ etc. quae autem est ipsa formula a Wallisio primum producta, qua circuli quadraturam expressit, atque maxime ab expressione Brounckeri abhorret. Quare cum ista formula interpolationem hoc modo inuestigando tam facile se praebeat, eo magis est mirandum Brounckerum eadem via ingressum ad expressionem tantopere differentem peruenisse; nulla enim via superesse videtur, quae ad fractionem continuam deduceret. Neque vero existimandum est, Brounckerum de industria valorem ipsius A per fractionem continuam exprimere voluisse; sed potius methodum quampiam peculiarem secutum, quasi inuitum in eam incidisse: cum eo tempore fractiones continuae omnino fuerint incognitae, atque hac occasione primum in medium prolatae. Ex quibus satis colligere licet, obuiam dari methodum ad istiusmodi fractiones continuas deducentem, quantumuis ea nunc quidem abscondita videatur.

§. 20. Quamuis autem diu in hac methodo reperienda irrito conatu sim versatus, tamen in alium incidi modum interpolationes huiusmodi serierum per fractiones continuas absoluendi qui mihi autem praebuit expressiones a Brounckerianis maxime diuersas. Interim tamen non sine omni vtilitate fore spero, istam methodum exponere, cum eius ope reperiantur fractiones continuae, quarum valores iam aliunde sint cogniti, et per quadraturas exhiberi queant. Cum enim deinde aliam methodum sim traditurus valores quarumcunque fractionum continuarum per quadraturas exprimendi, inde egregiae orientur comparationes

tiones formularum integralium, eo saltem casu quo variabili post integrationem definitus valor tribuitur, eiusmodi comparationes plures in praecedente dissertatione de productis ex infinitis factoribus constantibus exhibui.

§. 21. Vt igitur hunc a me inuentum interpolandi modum exponam proposita sit ista series latissime patens

$$\frac{p}{p+2q}+\frac{p(p+2r)}{(p+2q)(p+2q+2r)}+\frac{p(p+2r)(p+4r)}{(p+2q)(p+2q+2r)(p+2q+4r)}+\text{etc.}$$

cuius terminus indicis $\frac{1}{2}$ sit $=A$; terminus indicis $\frac{3}{2}=ABC$ terminus indicis $\frac{5}{2}=ABCDE$, etc. Hinc igitur erit $AB=\frac{p}{p+2q}$; $CD=\frac{p+2r}{p+2q+2r}$; $EF=\frac{p+4r}{p+2q+4r}$; etc. atque ex lege continuitatis $BC=\frac{p+r}{p+2q+r}$; $DE=\frac{p+3r}{p+2q+3r}$; $FG=\frac{p+5r}{p+2q+5r}$ et ita porro.

§. 22. Ad fractiones tollendas ponatur $A=\frac{a}{p+2q-r}$; $B=\frac{b}{p+2q}$; $C=\frac{c}{p+2q+r}$; $D=\frac{d}{p+2q+2r}$ etc. eritque $ab=(p+2q-r)p$; $bc=(p+2q)(p+r)$; $cd=(p+2q+r)(p+2r)$; $de=(p+2q+2r)(p+3r)$ etc. Fiat nunc $a=m-r+\frac{1}{\alpha}$; $b=m+\frac{1}{\beta}$; $c=m+r+\frac{1}{\gamma}$; $d=m+2r+\frac{1}{\delta}$; $e=m+3r+\frac{1}{\varepsilon}$ etc. in quibus substitutionibus partes integrae constituunt progressionem arithmeticam, cuius differentia constans est r, id quod ipsa progressio factorum illorum postulat. His igitur valoribus substitutis prodibunt sequentes aequationes, ponendo breuitatis gratia $p^2+2pq-pr-m^2+mr=P$, et $2r(p+q-m)=Q$.

$$P\alpha\beta-(m-r)\alpha=m\beta+1$$
$$(P+Q)\beta\gamma-m\beta=(m+r)\gamma+1$$
$$(P+2Q)\gamma\delta-(m+r)\gamma=(m+2r)\delta+1$$
$$(P+3Q)\delta\varepsilon-(m+2r)\delta=(m+3r)\varepsilon+1$$

etc.

§. 23. Ex his igitur aequationibus emergent sequentes litterarum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. comparationes inter se. $\alpha = \frac{m\beta+1}{P\beta-(m-r)} = \frac{m}{P} + \cfrac{p(p+2q-r):P^2}{-\frac{(m-r)}{P}+\beta}$, $\beta = \frac{(m+r)\gamma+1}{(P+Q)\gamma-m} = \frac{m+r}{P+Q} + \cfrac{(p+r)(p+2q):(P+Q)^2}{-\frac{m}{P+Q}+\gamma}$ $\gamma = \frac{(m+2r)\delta+1}{(P+2Q)\delta-(m+r)} = \frac{m+2r}{P+2Q} + \cfrac{(p+2r)(p+2q+r):(P+2Q)^2}{-\frac{(m+r)}{P+2Q}+\delta}$

Si ergo breuitatis gratia ponatur $p^2+2pq-mp-mq+qr=R$ et $pr+qr-mr=S$, atque valores litterarum assumtarum continuo in praecedentibus surrogentur, prouemiet sequens fractio continua

$$\alpha = \frac{m}{P} + \cfrac{p(p+2q-r):P^2}{\cfrac{2rR}{P(P+Q)} + \cfrac{(p+r)(p+2q):(P+Q)^2}{\cfrac{2r(R+S)}{(P+Q)(P+2Q)} + \cfrac{(p+2r)(p+2q+r):(P+2Q)^2}{\cfrac{2r(R+2S)}{(P+2Q)(P+3Q)} + \text{etc.}}}}$$

§. 24. Cum igitur sit $a = m - r + \frac{1}{\alpha}$ habebitur

$$a = m - r + \cfrac{P}{m + \cfrac{p(p+2q-r)(P+Q)}{2rR + \cfrac{(p+r)(p+2q)P(P+2Q)}{2r(R+S) + \cfrac{(p+2r)(p+2q+r)(P+Q)(P+3Q)}{2r(R+2S) + \text{etc.}}}}}$$

Hinc igitur seriei propositae $\frac{p}{p+2q} + \frac{p(p+2r)}{(p+2q)(p+2q+2r)} + \frac{p(p+2r)(p+4r)}{(p+2q)(p+2q+2r)(p+2q+4r)} + \text{etc.}$ terminus cuius index est $\frac{1}{2}$ erit $A = \frac{a}{p+2q-r}$. Quoniam vero huius seriei terminus generalis indicem habens n est $= \frac{\int y^{p+2q-1}dy(1-y^{2r})^{n-1}}{\int y^{p-1}dy(1-y^{2r})^{n-1}}$ erit fractio continua inuenta seu valor litterae $a = (p+2q-r)$ $\frac{\int y^{p+2q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{p-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$ posito post vtramque integrationem $y=1$.

§. 25.

§. 25. Cum autem in nostra fractione continua insit littera arbitraria m, innumerabiles habebuntur fractiones continuae, quarum idem est valor isque cognitus: ex quibus praecipuas contemplari iuuabit. Sit igitur primo $m-r=p$ seu $m=p+r$, erit $P=2p(q-r)$; $Q=2r(q-r)$; $R=p(q-r)$ et $S=r(p-r)$: vnde fiet

$$a=p+\cfrac{2p(q-r)}{p+r+\cfrac{(p+2q-r)(p+r)}{r+\cfrac{(p+2q)(p+2r)}{r+\cfrac{(p+2q+r)(p+3r)}{r+\text{etc.}}}}}$$

At si fuerit $r \gtrless q$, ne fractio continua fiat negatiua, erit:

$$a=\cfrac{p}{1+\cfrac{2(r-q)}{p+2q-r+\cfrac{(p+2q-r)(p+r)}{r+\cfrac{(p+2q)(p+2r)}{r+\cfrac{(p+2q+r)(p+3r)}{r+\text{etc.}}}}}}$$

§. 26. Sit nunc $m=p+q$; quo et Q et S euanescat; erit autem $P=q(r-q)$ et $R=q(r-q)$, indeque proveniet

$$a=p+q-r+\cfrac{q(r-q)}{p+q+\cfrac{p(p+2q-r)}{2r+\cfrac{(p+r)(p+2q)}{2r+\cfrac{(p+2r)(p+2q+r)}{2r+\text{etc.}}}}}$$

quae fractio continua adeo praecedentibus est aequalis, etiamsi ipsae formae sint diuersae.

§. 27. Ponatur $m=p+2q$; eritque $P=2q(r-p-2q)=-2q(p+2q-r)$; $Q=-2qr$; $R=-q(p+2q-r)$, et $S=-qr$. Ex his itaque obtinebitur sequens fractio continua:

$$a=p+2q-r-\cfrac{2q(p+2q-r)}{p+2q+\cfrac{p(p+2q)}{r+\cfrac{(p+r)(p+2q+r)}{r+\cfrac{(p+2r)(p+2q+2r)}{r+\text{etc.}}}}}$$

Ita innumerabiles prodeunt fractiones continuae quarum omnium idem eſt valor a, qui per formulas integrales inuentus eſt $=(p+2q-r)\dfrac{\int y^{p+2q-1}dy:V(1-y^{2r})}{\int y^{p-1}dy:V(1-y^{2r})}$

$$=\frac{(p+2q-2r)\int y^{p+2q-2r-1}dy:V(1-y^{2r})}{\int y^{p-1}dy:V(1-y^{2r})}.$$

§. 28. Antequam vlterius progrediamur caſus nonnullos contemplemur. Sit igitur $r=2q$; eritque $a=p\dfrac{\int y^{p+2q-1}dy:V(1-y^{4q})}{\int y^{p-1}dy:V(1-y^{4q})}$. Cum ergo fiat $P=p^2+mq-m^2$; $Q=4q(p+q-m)$; $R=p^2+2pq+2qq-mp-mq$, et $S=2q(p+q-m)$, erit in genere

$$a=m-2q+\cfrac{P}{m+\cfrac{p^2(P+Q)}{4qR+\cfrac{(p+2q)^2P(P+2Q)}{4q(R+S)+\cfrac{(p+4q)^2(P+Q)(P+3Q)}{4q(R+2S)+\text{etc.}}}}}$$

§. 29. Si autem pro m varios illos valores ſubſtituamus, prodibunt ſequentes fractiones continuae determinatae.

$$a=p-\cfrac{2pq}{p+2q+\cfrac{p(p+2q)}{2q+\cfrac{(p+2q)(p+4q)}{2q+\cfrac{(p+4q)(p+6q)}{2q+\text{etc.}}}}}$$

Siue loco huius fractionis continuae ob $r>q$

$$a=\cfrac{p}{1+\cfrac{2q}{p+\cfrac{p(p+2q)}{2q+\cfrac{(p+2q)(p+4q)}{2q+\cfrac{(p+4q)(p+6q)}{2q+\text{etc.}}}}}}$$

Deinde ex §. 26. obtinetur pro hoc caſu iſta fractio

$$a=p-q+\cfrac{qq}{p+q+\cfrac{pp}{4q+\cfrac{(p+2q)^2}{4q+\cfrac{(p+4q)^2}{4q+\text{etc.}}}}}$$

Tertio

Tertio vero §. 27. suppeditabit hanc fractionem continuam:

$$a = p - \cfrac{2pq}{p+2q+\cfrac{p(p+2q)}{2q+\cfrac{(p+2q)(p+4q)}{2q+\cfrac{(p+4q)(p+6q)}{2q+\cfrac{(p+6q)(p+8q)}{2q+\text{etc.}}}}}}$$

quae cum primo hic exhibita congruit: ita vt duae tantum fractiones continuae simpliciores pro hoc casu, quo $r = 2q$, habeantur.

§. 30. Ponatur nunc porro $q = p = 1$, vt fiat $a = \frac{\int yydy:\sqrt{(1-y^4)}}{\int dy:\sqrt{(1-y^4)}}$; erit primo:

$$a = 1 - \cfrac{2}{3+\cfrac{1\cdot 3}{2+\cfrac{3\cdot 5}{2+\cfrac{5\cdot 7}{2+\text{etc.}}}}}$$

Deinde vero habebitur:

$$a = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{9}{4+\cfrac{25}{4+\cfrac{49}{4+\text{etc.}}}}}}$$

Vnde sequitur fore — $\frac{\int dy:\sqrt{(1-y^4)}}{\int yydy:\sqrt{(1-y^4)}} =$

$$2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{9}{4+\cfrac{25}{4+\cfrac{49}{4+\text{etc.}}}}}$$

qui casus continetur in expressione §. 16. data ex quo illa formula nondum satis demonstrata magis confirmatur. Posito enim ibi $a = 3$, fiet $3\frac{\int x^4dx:\sqrt{(1-x^4)}}{\int xxdx:\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\int dx:\sqrt{(1-x^4)}}{\int xxdx:\sqrt{(1-x^4)}}$

$$= 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{9}{4+\cfrac{25}{4+\cfrac{49}{4+\text{etc.}}}}}$$

ita vt nunc quidem constet formulam illam §. 16. exhibitam

bitam veram esse casibus quibus est tum $a = 2$ tum etiam $a = 3$: mox autem eius veritas in latissimo sensu euincetur.

§. 31. Sit $q = \frac{1}{2}$ et $p = 1$; manente $r = 2q = 1$ erit $a = \frac{\int y dy : \surd(1-y^2)}{\int dy : \surd(1-y^2)} = \frac{2}{\pi}$ denotante π peripheriam circuli cuius diameter est $= 1$. Generaliter itaque erit $P = 1 + m - m^2$; $Q = 3 - 2m$; $R = \frac{5-3m}{2}$ et $S = \frac{3-2m}{2}$, ideoque

$$a = m - 1 + \cfrac{1+m-m^2}{m + \cfrac{1^2(1-m-m^2)}{5 - 3m + \cfrac{2^2(1+m-m^2)(1-m-m^2)}{8 - 5m + \cfrac{3^2(4-m-m^2)(1-6m-m^2)}{11 - 7m + \text{etc.}}}}}$$

In casibus autem specialibus expositis erit

$$\frac{\pi}{2} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1\cdot 2}{1 + \cfrac{2\cdot 3}{1 + \cfrac{3\cdot 4}{1 + \text{etc.}}}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1\cdot 2}{1 + \cfrac{2\cdot 3}{1 + \cfrac{3\cdot 4}{1 + \text{etc.}}}}}$$

et

$$\frac{\pi}{2} = \cfrac{1}{\frac{1}{2} + \cfrac{1:4}{\frac{1}{2} + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{2^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \text{etc.}}}}}} = 2 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{2^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \text{etc.}}}}}$$

§. 32. Vt vsus harum formularum in interpolationibus intelligatur, proposita sit haec series: $\frac{2}{1} + \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5} +$ etc. cuius terminum indicis $\frac{1}{2}$ inueniri oporteat, qui sit $= A$; Erit ergo $p = 2$; $r = 1$; et $q = -\frac{1}{2}$. Ponatur $A = \frac{a}{p+2q-r}$ et $A = \frac{a}{0}$, vnde incommodum datarum formularum, si fiat $p + 2q - r = 0$ satis intelligitur. Interim tamen negotium hoc absolui potest quaerendo terminum indicis $\frac{3}{2}$, qui si fuerit $= Z$ erit $A = \frac{2}{3} Z$; At $\frac{1}{2} Z$ erit terminus indicis $\frac{1}{2}$ huius seriei $\frac{4}{3} + \frac{4\cdot 6}{3\cdot 5} + \frac{4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7} +$ etc. quae cum generali comparata dat $p = 4$; $r = 1$; $q = -\frac{1}{2}$, ita vt fiat $Z =$

$= \frac{2\int y^2 dy \cdot \surd(1-y^2)}{\int y^3 dy : \surd(1-y^2)} = \frac{3\int dy : \surd(1-y^2)}{2\int y dy : \surd(-y^3)} = \frac{3}{4}\pi$. atque $A = \frac{\pi}{3}$. Cum igitur ſit per §. 24. $Z = a$; et $A = \frac{2}{3}Z = \frac{2}{3}a$, erit primo generaliter ob $P = 8 + m - m^2$; $Q = 7 - 2m$; $R = \frac{23-7m}{2}$; et $S = \frac{7-2m}{2}$; $A = \frac{2}{3}a = \frac{\pi}{3} = \frac{2(m-1)}{3}$

$$+ \cfrac{2(8+m-m^2)}{5m + \cfrac{2\cdot4\cdot3(15-m-m^2)}{23-7m + \cfrac{3\cdot5(8+m-m^2)(22-3m-m^2)}{30-9m + \cfrac{4\cdot6(15-m-m^2)(29-5m-m^2)}{37-11m + \text{etc.}}}}}$$

§. 33. Caſibus autem particularibus euoluendis erit $a = \frac{3}{4}\pi =$

$$4 - \cfrac{12}{5 + \cfrac{2\cdot5}{1 + \cfrac{3\cdot6}{1 + \cfrac{4\cdot7}{1 + \text{etc.}}}}} = \cfrac{4}{1 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{2\cdot5}{1 + \cfrac{3\cdot6}{1 + \cfrac{4\cdot7}{1 + \text{etc.}}}}}}$$

vel etiam $\frac{3}{4}\pi = 1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{1\cdot4}{1 + \cfrac{2\cdot5}{1 + \cfrac{3\cdot6}{1 + \cfrac{4\cdot7}{1 + \text{etc.}}}}}}$

Simili modo per §. 26. habebitur $a = \frac{3}{4}\pi$

$$= \frac{3}{2} - \cfrac{3\cdot4}{\frac{7}{2} + \cfrac{2\cdot4}{2 + \cfrac{3\cdot5}{2 + \cfrac{4\cdot6}{2 + \cfrac{5\cdot7}{2 + \text{etc.}}}}}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1\cdot3}{2 + \cfrac{2\cdot4}{2 + \cfrac{3\cdot5}{2 + \cfrac{4\cdot6}{2 + \text{etc.}}}}}}$$

Denique caſus §. 27. expoſitus dabit $a = \frac{3}{4}\pi =$

$$2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3\cdot4}{1 + \cfrac{4\cdot5}{1 + \cfrac{5\cdot6}{1 + \text{etc.}}}}}$$ ſeu $$\frac{\pi}{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1\cdot2}{1 + \cfrac{2\cdot3}{1 + \cfrac{3\cdot4}{1 + \cfrac{4\cdot5}{1 + \text{etc.}}}}}}$$

quae expreſſio conuenit cum ſuperiore quodam in §. 31. exhibita.

§. 34. Ex hac itaque interpolandi methodo innumerabiles consecuti sumus fractiones continuas, quarum valores per quadraturas curuarum seu formulas integrales assignari possunt. Cum autem istae fractiones continuae in initio sint irregulares initia quae anomaliam continent resecentur, vt habeantur fractiones continuae vbiquae eadem lege procedentes. Ita ex §. 25, ponendo $p+2q-r = f$ et $p+r=b$; prodibit sequens aequatio:

$$r+\cfrac{fb}{r+\cfrac{(f+r)(b+r)}{r+\cfrac{(f+2r)(b+2r)}{r+ \text{e.c.}}}} = \frac{b(f-r)\int y^{b+r-1}dy:V(1-y^{2r})-f(b-r)\int y^{f+r-1}dy:V(1-y^{2r})}{f\int y^{f+r-1}dy:V(1-y^{2r})-b\int y^{b+r-1}dy:V(1-y^{2r})}$$

quae aequatio semper est realis, nisi fiat $f=b$. At casu quo $f=b$ ponatur $f=b+dw$, reperieturque

$$\frac{\int y^{b+r+dw-1}dy:V(1-y^{2r})}{\int y^{b+r-1}dy:V(1-y^{2r})} = 1-r\,dw\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{b+2r-1}dx}{1+x^{2r}}$$

posito post integrationem $x=1$. Hinc ergo erit

$$r+\cfrac{bb}{r+\cfrac{(b+r)^2}{r+\cfrac{(b+2r)^2}{r+\text{etc}}}} = \frac{r+br(b-r)\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{b+2r-1}dx}{1-x^{2r}}}{1-br\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{b+2r-1}dx}{1-x^{2r}}}$$

$$= \frac{r(b-r)^2\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{b-1}dx}{1-x^{2r}}}{1-r(b-r)\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{b-1}dx}{1-x^{2r}}}$$

Verum ex natura integralium est $\int\frac{dx}{x^{r+1}}\int\frac{x^{b+2r-1}dx}{1-x^{2r}} = \frac{-1}{rx^r}\int\frac{x^{b+2r-1}dx}{1-x^{2r}}+\frac{1}{r}\int\frac{x^{b+r-1}dx}{1-x^{2r}}+\frac{1}{r}\int\frac{x^{b+r-1}dx}{1+x^{r}}$ posito $x=1$. Quo circa habebitur

$r+$

$$r+\cfrac{bb}{r+\cfrac{(b+r)^2}{r+\text{etc.}}}=\frac{r+b(b-r)\int\frac{x^{b+r-1}dx}{1+x^r}}{1-b\int\frac{x^{b+r-1}dx}{1+x^r}}=$$

$$\frac{1-(b-r)\int\frac{x^{b-1}dx}{1+x^r}}{\int\frac{x^{b-1}dx}{1+x^r}}$$; quae forma autem congruit cum ea, quae §. 7. est data.

§. 35. Simili modo ex §. 26. ponendo $p=f$ et $p+2q-r=b$, sequitur fore

$$2r+\cfrac{fb}{2r+\cfrac{(f+r)(b+r)}{2r+\cfrac{(f+2r)(b+2r)}{2r+\text{etc.}}}}=\frac{2(r-f)(r-b)\int\frac{y^{f-1}dy}{V(1-y^{2r})}-b(f+b-3r)\int\frac{y^{b+r-1}dy}{V(1-y^{2r})}}{2b\int\frac{y^{b+r-1}dy}{V(1-y^{2r})}-(f+b-r)\int\frac{y^{f-1}dy}{V(1-y^{2r})}}.$$

Quoniam autem formula manet immutata si f et b inter se commutentur, manifestum est esse debere

$$\frac{b\int y^{b+r-1}dy:V(1-y^{2r})}{\int y^{f-1}dy:V(1-y^{2r})}=\frac{f\int y^{f+r-1}dy:V(1-y^{2r})}{\int y^{b-1}dy.V(1-y^{2r})}$$, posito post omnes integrationes $y=1$. Hoc vero theorema iam continetur in iis, quae in praecedente dissertatione de productis ex infinitis factoribus constantibus exhibui; ibi enim plura huius generis theoremata produxi ac demonstraui.

§. 36. Hic autem pari modo casus notari meretur, quo est $f=b+r$, hoc enim tam numerator quam denominator fractionis inuentae euanescit. Posito autem vt ante $f=b+r+dw$ et calculo subducto orietur

$$2r + \cfrac{b(b+r)}{2r + \cfrac{(b+r)(b+2r)}{2r + \cfrac{(b+2r)(b+3r)}{2r + etc.}}} = \frac{b + 2b(r-b)\int \frac{x^{b-r}\,dx}{1+x^r}}{-1 + 2b\int \frac{x^{b-r}\,dx}{1+x^r}}$$

Quare si ponatur $b = r = 1$; habebitur

$$2 + \cfrac{1 \cdot 2}{2 + \cfrac{2 \cdot 3}{2 + \cfrac{3 \cdot 4}{2 + \cfrac{4 \cdot 5}{2 + etc.}}}} = \frac{1}{2l2 - 1}$$

Ceterum si aequatio §. 27. eodem modo tractetur, prodibit forma illi ipsi, quam ex §. 25. elicui, omnino similis.

§. 37. His expositis, quibus interpolatio serierum ad fractiones continuas reducitur, reuertor ad expressiones Brounckerianas, atque methodum tradam genuinam non solum ad eas perueniendi, sed etiam eiusmodi, quae videatur ab ipso Brounckero esse vsurpata. Maxime autem discrepant fractiones continuae hactenus inuentae a Brounckerianis, cum valores litterarum A, B, C, D, etc. methodo exposita ita a se inuicem pendeant, vt inter se comparari facile queant, methodo Brounckeri autem inter se diuersi prodierint, vt eorum mutua relatio non perspiciatur. Quod ipsum discrimen me tandem ad inuentionem alterius methodi nunc aperiendae manuduxit.

§. 38. Antequam autem ipsum interpolandi modum exponam, sequens lemma latissime patens praemitti conveniet. Si fuerint innumerabiles quantitates $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon,$ etc. quae ita a se inuicem pendeant vt sit:

$$\alpha\beta - m\alpha - n\beta - \kappa = 0$$

$$\beta\gamma - (m+s)\beta - (n+s)\gamma - \kappa = 0$$

$\gamma\delta$

$$\gamma\delta-(m+2s)\gamma-(n+2s)\delta-\varkappa=0$$
$$\delta\varepsilon-(m+3s)\delta-(n+3s)\varepsilon-\varkappa=0$$
etc.

ac tribuantur litteris α, β, γ, δ, etc. sequentes valores:

$$\alpha=m+n-s+\frac{ss-ms+ns+\varkappa}{a}$$
$$\beta=m+n+s+\frac{ss-ms+ns+\varkappa}{b}$$
$$\gamma=m+n+3s+\frac{ss-ms+ns+\varkappa}{c}$$
$$\delta=m+n+5s+\frac{ss-ms+ns+\varkappa}{d}$$
etc.

superiores aequationes transformabuntur in sequentes similes:

$$ab-(m-s)a-(n+s)b-ss+ms-ns-\varkappa=0$$
$$bc-mb-(n+2s)c-ss+ms-ns-\varkappa=0$$
$$cd-(m+s)c-(n+3s)d-ss+ms-ns-\varkappa=0$$
$$de-(m+2s)d-(n+4s)e-ss+ms-ns-\varkappa=0$$
etc.

Atque ex hoc ipso vt istiusmodi formae similes prodeant, substitutiones illae sunt ortae.

§. 39. Si nunc simili modo hae vltimae aequationes ope idonearum substitutionum in sui similes transmutentur, reperientur loco a, b, c, d, etc. sequentes substitutiones

$$a=m+n-s+\frac{4ss-2ms+2ns+\varkappa}{a1}$$
$$b=m+n+s+\frac{4ss-2ms+2ns+\varkappa}{b1}$$
$$c=m+n+3s+\frac{4ss-2ms+2ns+\varkappa}{c1}$$
$$d=m+n+5s+\frac{4ss-2ms+2ns+\varkappa}{d1}$$
etc.

quibus factis sequentes prouenient aequationes:

$$a1\,b1-(m-2s)a1-(n+2s)b1-4ss+2ms-2ns-\varkappa=0$$
$$b1\,c1-(m-s)b1-(n+3s)c1-4ss+2ms-2ns-\varkappa=0$$

 $c1\,d1$

$$c1\,d1 - m\,c1 - (n+4s)d1 - 4ss + 2ms - 2ns - x = 0$$

$$d1\,e1 - (m+s)d1 - (n+5s)e1 - 4ss + 2ms - 2ns - x = 0$$

etc.

§. 40. Vlterius igitur pergendo poni debebit:

$$a1 = m + n - s + \frac{9ss - 3ms + 3ns + x}{a2}$$

$$b1 = m + n + s + \frac{9ss - 3ms + 3ns + x}{b2}$$

$$c1 = m + n + 3s + \frac{9ss - 3ms + 3ns + x}{c2}$$

etc.

Atque ex his ſubſtitutionibus emergent hae aequationes:

$$a2\,b2 - (m-3s)a2 - (n+3s)b2 - 9ss + 3ms - 3ns - x = 0$$

$$b2\,c2 - (m-2s)b2 - (n+4s)c2 - 9ss + 3ms - 3ns - x = 0$$

$$c2\,d2 - (m-s)c2 - (n+5s)d2 - 9ss + 3ms - 3ns - x = 0$$

etc.

§. 41. Si nunc hae ſubſtitutiones continuentur in infinitum, atque perpetuo ſequentes valores in praecedentibus ſubſtituantur, litterarum α, β, γ, δ, etc. valores exprimentur fractionibus continuis ſequentibus:

$$\alpha = m + n - s + \cfrac{ss - ms + ns + x}{m + n - s + \cfrac{4ss - 2ms + 2ns + x}{m + n - s + \cfrac{9ss - 3ms + 3ns + x}{m + n - s + \cfrac{16ss - 4ms + 4ns + x}{m + n + s + \text{etc.}}}}}$$

$$\beta = m + n + s + \cfrac{ss - ms + ns + x}{m + n + s + \cfrac{4ss - 2ms + 2ns + x}{m + n + s + \cfrac{9ss - 3ms + 3ns + x}{m + n + s + \cfrac{16ss - 4ms + 4ns + x}{m + n + s + \text{etc.}}}}}$$

$$\gamma = m + n + 3s + \cfrac{ss - ms + ns + x}{m + n + 3s + \cfrac{4ss - 2ms + 2ns + x}{m + n + 3s + \cfrac{9ss - 3ms + 3ns + x}{m + n + 3s + \text{etc.}}}}$$

quae fractiones continuae ſatis ſunt ſimiles iis, quas Brounckerus dedit, cum ſequentes in praecedentibus non contineantur.

§. 42.

§. 42. Quo autem vſus harum formularum in interpolationibus pateat, propoſita ſit haec ſeries: $\frac{p}{p+2q} + \frac{p(p+2r)}{(p+2q)(p+2q+2r)} + \frac{p(p+2r)(p+4r)}{(p+2q)(p+2q+2r)(p+2q+4r)} +$ etc. cuius terminus indicis $\frac{1}{2}$ ſit $=$ A; terminus indicis $\frac{3}{2} =$ ABC; terminus indicis $\frac{5}{2} =$ ABCDE; et ita porro. His poſitis erit $AB = \frac{p}{p+2q}$; $CD = \frac{p+2r}{p+2q+2r}$; $EF = \frac{p+4r}{p+2q+4r}$; etc. Ponatur nunc $A = \frac{a}{p+2q-r}$; $B = \frac{b}{p+2q}$; $C = \frac{c}{p+2q+r}$; $D = \frac{d}{p+2q+2r}$; etc. eritque $ab = p(p+2q-r)$; $bc = (p+r)(p+2q)$; $cd = (p+2r)(p+2q+r)$; $de = (p+3r)(p+2q+2r)$; etc. Iam fiat vlterius $a = p+q-r+\frac{g}{\alpha}$; $b = p+q+\frac{g}{\beta}$; $c = p+q+r+\frac{g}{\gamma}$; $d = p+q+2r+\frac{g}{\delta}$; etc. quibus valoribus ſubſtitutis emergent ſequentes aequationes, facto $g = q(r-q)$:

$$\alpha\beta - (p+q-r)\alpha - (p+q)\beta - q(r-q) = 0$$
$$\beta\gamma - (p+q)\beta - (p+q+r)\gamma - q(r-q) = 0$$
$$\gamma\delta - (p+q+r)\gamma - (p+q+2r)\delta - q(r-q) = 0$$
$$\delta\varepsilon - (p+q+2r)\delta - (p+q+3r)\varepsilon - q(r-q) = 0$$

etc.

§. 43. Comparatis his aequationibus cum iis, quas §. 38. aſſumſimus, reperietur:

$m = p+q-r$; $n = p+q$; $\varkappa = qr-qq$; et $s = r$ vnde fiet $ss - ms + ns + \varkappa = 2rr + qr - qq$; $4ss - 2ms + 2ns + \varkappa = 6rr + qr - qq$; $9ss - 3ms + 3ns + \varkappa = 12rr + qr - qq$; etc. Quibus valoribus omnibus ſubſtitutis obtinebuntur ſequentes fractiones continuae, quibus litterae a, b, c, d, etc. exprimentur.

$$a = p+q-r+\cfrac{qr-qq}{2(p+q-r)+\cfrac{2rr+qr-qq}{2(p+q-r)+\cfrac{6rr+qr-qq}{2(p+q-r)+\cfrac{12rr+qr-qq}{2(p+q-r)+\text{etc.}}}}}$$

$b =$

$$b = p+q+\cfrac{qr-qq}{2(p+q)+\cfrac{2rr+qr-qq}{2(p+q)+\cfrac{6rr+qr-qq}{2(p+q)+\cfrac{12rr+qr-qq}{2(p+q)+\text{etc.}}}}}$$

$$c = p+q+r+\cfrac{qr-qq}{2(p+q+r)+\cfrac{2rr+qr-qq}{2(p+q+r)+\cfrac{6rr+qr-qq}{2(p+q+r)+\cfrac{12rr+qr-qq}{2(p+q+r)+\text{etc.}}}}}$$

etc.

§. 44. Cum autem feriei propofitae terminus qui indicem habet n fit $= \frac{\int y^{p+2q-1}dy(1-y^{2r})^{n-1}}{\int y^{p-1}dy(1-y^{2r})^{n-1}}$; erit $A =$ $\frac{a}{p+2q-r} = \frac{\int y^{p+2q-1}dy:V(1-y^{2r})}{\int y^{p-1}dy:V(1-y^{2r})}$; feu $a = (p+2q-r)$ $\frac{\int y^{p+2q-1}dy:V(1-y^{2r})}{\int y^{p-1}dy:V(1-y^{2r})}$. Deinde ob $ab = p(p+2q-r)$ erit $b = \frac{p\int y^{p-1}dy:V(1-y^{2r})}{\int y^{p+2q-1}dy:V(1-y^{2r})}$. Quoniam autem eft per theorema in praecedente differtatione expofitum $\frac{p\int y^{p-1}dy:V(1-y^{2r})}{\int y^{p+r-1}dy:V(1-y^{2r})} = \frac{f\int y^{f-1}dy:V(1-y^{2r})}{\int y^{p+r-1}dy:V(1-y^{2r})} =$ $\frac{(f+r)\int y^{f+2r-1}dy:V(1-y^{2r})}{\int y^{p+r-1}dy:V(1-y^{2r})}$ ponatur $f = p+2q-r$; quo facto erit $b = \frac{(p+2q)\int y^{p+2q+r-1}dy:V(1-y^{2r})}{\int y^{p+r-1}dy:V(1-y^{2r})}$. Simili vero modo progrediendo erit $c =$ $\frac{(p+2q+r)\int y^{p+2q+2r-1}dy:V(1-y^{2r})}{\int y^{p+2r-1}dy:V(1-y^{2r})}$ et $d =$ $\frac{(p+2q+2r)\int y^{p+2q+3r-1}dy:V(1-y^{2r})}{\int y^{p+3r-1}dy:V(1-y^{2r})}$ etc.

§. 45.

§. 45. Cum igitur lex progressionis harum formularum integralium constet, colligetur huius fractionis continuae generalis

$$p+q+mr+\cfrac{qr-qq}{2(p+q+mr)+\cfrac{2rr+qr-qq}{2(p+q+mr)+\cfrac{6rr+qr-qq}{2(p+q+mr)+etc.}}}$$

valor esse $= (p+2q+mr)\dfrac{\int y^{p+2q+(m+1)r-1}dy:V(1-y^{2r})}{\int y^{p+(m+1)r-1}dy:V(1-y^{2r})}$

Quare si ponatur $p+q+mr=s$, ita vt sit $p=s-q-mr$, proueniet sequens fractio continua:

$$s+\cfrac{qr-qq}{2s+\cfrac{2rr+qr-qq}{2s+\cfrac{6rr+qr-qq}{2s+\cfrac{12rr+qr-qq}{2s+\cfrac{20rr+qr-qq}{2s+etc.}}}}}$$

cuius propterea valor erit ista expressio

$$(q+s)\frac{\int y^{q+r+s-1}dy:V(1-y^{2r})}{\int y^{r+s-q-1}dy:V(1-y^{2r})}.$$

§. 46. Simili modo cum huius fractionis continuae

$$s+r+\cfrac{qr-qq}{2(s+r)+\cfrac{2rr+qr-qq}{2(s+r)+\cfrac{6rr+qr-qq}{2(s+r)+etc.}}}$$

valor fit $= (q+r+s)\dfrac{\int y^{s+2r+q-1}dy:V(1-y^{2r})}{\int y^{s+2r-q-1}dy:V(1-y^{2r})}.$

Harum duarum itaque fractionum continuarum productum erit $= (s+q)\,(s+r-q)$ quemadmodum productum formularum integralium declarat. Est enim per theorema in praecedente dissertatione datum:

$\dfrac{f}{a} = \dfrac{\int x^{a-1}dx:V(1-x^{2r})\,.\int x^{a+r-1}dx:V(1-x^{2r})}{\int x^{f-1}dx:V(1-x^{2r})\,.\int x^{f+r-1}dx:V(1-x^{2r})}$ ad quam formam productum formularum integralium sponte reducitur.

§. 47. Fractio continua inuenta in aliam commodiorem formam potest transmutari eo quod singuli numeratores in factores resolui possunt; ita habebitur ista fractio continua

$$s + \cfrac{q(r-q)}{2s + \cfrac{(r+q)(2r-q)}{2s + \cfrac{(2r+q)(3r-q)}{2s + \cfrac{(3r+q)(4r-q)}{2s + \text{etc.}}}}}$$

cuius adeo valor erit $= (q+s)\dfrac{\int y^{r+s+q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{r+s-q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$

Quocirca si ad fractionem continuam addatur s vt vbique eadem sit progressionis lex, erit

$$\frac{(q+s)\int y^{r+s+q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})} + s\int y^{r+s-q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{r+s-q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}$$

$$= 2s + \cfrac{q(r-q)}{2s + \cfrac{(r+q)(2r-q)}{2s + \cfrac{(2r+q)(3r-q)}{2s + \cfrac{(3r+q)(4r-q)}{2s + \text{etc.}}}}}$$

§. 48. Si nunc ponatur $r = 2$ et $q = 1$, prodibunt coniunctim omnes fractiones continuae a Brounckero exhibitae, quae omnes contiaebuntur in hac fractione continua:

$$s + \cfrac{1}{2s + \cfrac{9}{2s + \cfrac{25}{2s + \cfrac{49}{2s + \cfrac{81}{2s + \text{etc.}}}}}}$$

cuius propterea valor erit $= (s+1)\dfrac{\int y^{s+2}dy:\sqrt{(1-y^4)}}{\int y^{s}dy:\sqrt{(1-y^4)}}$

quae expressio apprime congruit cum ea, quam supra, ante-

antequam veritas omnino constaret, assignauimus, vide §. 16.

§. 49. Cum igitur hactenus plurimas dederim fractiones continuas, quarum valores per formulas integrales assignari possunt, methodum nunc directam exponam, cuius ope ex formulis integralibus vicissim ad fractiones continuas peruenire liceat. Nititur autem haec methodus reductione vnius formulae integralis ad duas alias, quae reductio non multum dissimilis est illi solitae, qua formulae cuiusdam differentialis integratio ad integrationem alius reducitur. Sint igitur huiusmodi formulae integrales infinitae $\int P dx$; $\int PR dx$; $\int PR^2 dx$; $\int PR^3 dx$; $\int PR^4 dx$ etc. quae ita sint comparatae, vt si singulae ita integrentur, vt euanescant posito $x = 0$, tumque ponatur $x = 1$ fit vt sequitur:

$$a\int P dx = b\int PR dx + c\int PR^2 dx$$
$$(a+\alpha)\int PR dx = (b+\beta)\int PR^2 dx + (c+\gamma)\int PR^3 dx$$
$$(a+2\alpha)\int PR^2 dx = (b+2\beta)\int PR^3 dx + (c+2\gamma)\int PR^4 dx$$
$$(a+3\alpha)\int PR^3 dx = (b+3\beta)\int PR^4 dx + (c+3\gamma)\int PR^5 dx$$

et generaliter

$$(a+n\alpha)\int PR^n dx = (b+n\beta)\int PR^{n+1} dx + (c+n\gamma)\int PR^{n+2} dx$$

§. 50. Si igitur huiusmodi habeantur formulae integrales, facili negotio ex iis fractiones continuae formabuntur. Cum enim sit

$$\frac{\int P dx}{\int PR dx} = \frac{b}{a} + \frac{c\int PR^2 dx}{a\int PR dx}$$
$$\frac{\int PR dx}{\int PR^2 dx} = \frac{b+\beta}{a+\alpha} + \frac{(c+\gamma)\int PR^3 dx}{(a+\alpha)\int PR^2 dx}$$
$$\frac{\int PR^2 dx}{\int PR^3 dx} = \frac{b+2\beta}{a+2\alpha} + \frac{(c+2\gamma)\int PR^4 dx}{(a+2\alpha)\int PR^3 dx}$$
$$\frac{\int PR^3 dx}{\int PR^4 dx} = \frac{b+3\beta}{a+3\alpha} + \frac{(c+3\gamma)\int PR^5 dx}{(a+3\alpha)\int PR^4 dx}$$

etc.

erit

erit substituendo quemque valorem in praecedente aequatione

$$\frac{\int Pdx}{\int PRdx}=\frac{b}{a}+\cfrac{c:a}{\cfrac{b+\beta}{a+2\alpha}+\cfrac{(c+\gamma):(a+\alpha)}{\cfrac{b+2\beta}{a+2\alpha}+\cfrac{(c+\gamma):(a+2\alpha)}{\cfrac{b+3\beta}{a+3\alpha}+\cfrac{(c+3\gamma):(a+3\alpha)}{\cfrac{b+4\beta}{a+4\alpha}+\text{etc.}}}}}$$

Haec vero expressio inuersa et a fractionibus partialibus liberata abit in hanc:

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx}=\cfrac{a}{b+\cfrac{(a+\alpha)c}{b+\beta+\cfrac{(a+2\alpha)(c+\gamma)}{b+2\beta+\cfrac{(a+3\alpha)(c+2\gamma)}{b+3\beta+\cfrac{(a+4\alpha)(c+3\gamma)}{b+4\beta+\text{etc.}}}}}}$$

§. 51. Si fuerit etiam designante n numerum negatiuum $(a+n\alpha)\int PR^{n}dx=(b+n\beta)\int PR^{n+1}dx+(c+n\gamma)\int PR^{n+2}dx$, sequentes habebuntur aequationes.

$$(a-\alpha)\int\frac{Pdx}{R}=(b-\beta)\int Pdx+(c-\gamma)\int PRdx$$
$$(a-2\alpha)\int\frac{Pdx}{R^2}=(b-2\beta)\int\frac{Pdx}{R}+(c-2\gamma)\int Pdx$$
$$(a-3\alpha)\int\frac{Pdx}{R^3}=(b-3\beta)\int\frac{Pdx}{R^2}+(c-3\gamma)\int\frac{Pdx}{R}$$
$$(a-4\alpha)\int\frac{Pdx}{R^4}=(b-4\beta)\int\frac{Pdx}{R^3}+(c-4\gamma)\int\frac{Pdx}{R^2}$$

etc.

Hinc igitur pari modo conficietur:

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx}=\frac{-(b-\beta)}{c-\gamma}+\frac{(a-\alpha)\int Pdx:R}{(c-\gamma)\int Pdx}$$
$$\frac{\int Pdx}{\int Pdx:R}=\frac{-(b-2\beta)}{c-2\gamma}+\frac{(a-2\alpha)\int Pdx:R^2}{(c-2\gamma)\int Pdx:R}$$
$$\frac{\int Pdx:R}{\int Pdx:R^2)}=\frac{-(b-3\beta)}{c-3\gamma}+\frac{(a-3\alpha)\int Pdx:R^3}{(c-3\gamma)\int Pdx:R^2}$$

etc.

Ex his autem aequationibus producetur

$\frac{\int PRdx}{\int Pdx}$

$$\frac{\int\mathrm{PR}dx}{\int\mathrm{P}dx}=\frac{-(b-\beta)}{c-\gamma}+\cfrac{(a-\alpha):(c-\gamma)}{\cfrac{-(b-2\beta)}{c-2\gamma}+\cfrac{(a-2\alpha)(c-2\gamma)}{\cfrac{-(b-3\beta)}{c-3\gamma}+\cfrac{(a-3\alpha):(c-3\gamma)}{\cfrac{-(b-4\beta)}{c-4\gamma}+\text{etc.}}}}$$

siue fractionibus partialibus sublatis

$$\frac{(c-\gamma)\int\mathrm{PR}dx}{\int\mathrm{P}dx}=-(b-\beta)+\cfrac{(a-\alpha)(c-2\gamma)}{-(b-2\beta)+\cfrac{(a-2\alpha)(c-3\gamma)}{-(b-3\beta)+\cfrac{(a-3\alpha)(c-4\gamma)}{-(b-4\beta)+\text{etc.}}}}$$

Duplex igitur habetur fractio continua, cuius vtriusque idem est valor $\frac{\int\mathrm{PR}dx}{\int\mathrm{P}dx}$.

§. 52. Praecipuum autem est in hoc negotio, vt definiantur idoneae functiones ipsius x loco P et R substituendae, quo fiat $(a+n\alpha)\int\mathrm{PR}^n dx=(b+n\beta)\int\mathrm{PR}^{n+1}dx+(c+n\gamma)\int\mathrm{PR}^{n+2}dx$ eo saltem casu, quo post singulas integrationes ponitur $x=1$. Ponamus igitur esse generaliter $(a+n\alpha)\int\mathrm{PR}^n dx+\mathrm{R}^{n+1}\mathrm{S}=(b+n\beta)\int\mathrm{PR}^{n+1}dx+(c+n\gamma)\int\mathrm{PR}^{n+2}dx$, atque $\mathrm{R}^{n+1}\mathrm{S}$ eiusmodi esse functionem ipsius x, quae euanescat posito tam $x=0$, quam $x=1$. Sumtis ergo differentialibus, et facta per R^n diuisione, erit: $(a+n\alpha)\mathrm{P}dx+\mathrm{R}d\mathrm{S}+(n+1)\mathrm{S}d\mathrm{R}=(b+n\beta)\mathrm{PR}dx+(c+n\gamma)\mathrm{PR}^2dx$; quae aequatio, cum semper locum habere debeat, quicquid sit n, in duas resoluitur aequationes has:

$$a\mathrm{P}dx+\mathrm{R}d\mathrm{S}+\mathrm{S}d\mathrm{R}=b\mathrm{PR}dx+c\mathrm{PR}^2dx \quad \text{et}$$
$$\alpha\mathrm{P}dx+\mathrm{S}d\mathrm{R}=\beta\mathrm{PR}dx+\gamma\mathrm{PR}^2dx$$

Ex his aequationibus elicitur duplici modo $\mathrm{P}dx=\frac{\mathrm{R}d\mathrm{S}+\mathrm{S}d\mathrm{R}}{b\mathrm{R}+c\mathrm{R}^2-a}=\frac{\mathrm{S}d\mathrm{R}}{\beta\mathrm{R}+\gamma\mathrm{R}^2-\alpha}$, vnde fit $\frac{d\mathrm{S}}{\mathrm{S}}=\frac{(b-\beta)\mathrm{R}d\mathrm{R}+(c-\gamma)\mathrm{R}^2d\mathrm{R}-(a-\alpha)d\mathrm{R}}{\beta\mathrm{R}^2+\gamma\mathrm{R}^3-\alpha\mathrm{R}}=\frac{(a-\alpha)d\mathrm{R}}{\alpha\mathrm{R}}+\frac{(\alpha b-\beta a)d\mathrm{R}+(\alpha c-\gamma a)\mathrm{R}d\mathrm{R}}{\alpha(\beta\mathrm{R}+\gamma\mathrm{R}^2-\alpha)}$. Ex hac ergo aequatione definitur S per R; inuento autem S erit $\mathrm{P}=\frac{\mathrm{S}d\mathrm{R}}{(\beta\mathrm{R}+\gamma\mathrm{R}^2-\alpha)dx}$; indeque cognitae erunt formulae $\int\mathrm{P}dx$ et $\int\mathrm{PR}dx$, quibus valor fractionum continuarum superiorum determinatur.

§. 53. Quoniam igitur quantitas R per x non definitur, pro ea functio quaecunque ipsius x accipi poterit. At cum conditio quaestionis postulet vt $R^{n+1}S$ euanescat posito tam $x = 0$, quam $x = 1$, eo ipso natura functionis loco R accipiendae determinatur. Deinde vero etiam ad hoc est respiciendum vt integralia $\int PR^n dx$ posito post integrationem $x = 1$, finitum obtineant valorem, si enim integralia ista hoc casu fierent vel 0 vel ∞, tum difficulter valor $\frac{\int PR dx}{\int P dx}$ colligeretur. Prius incommodum tutissime euitatur, tribuendo ipsi R eiusmodi valorem, vt PR^n nunquam negatiuum induat valorem, quamdiu x intra limites 0 et 1 consistit. Ne autem $\int PR^n dx$ posito $x = 1$ fiat infinitum, difficilius saepenumero obtinetur. Conueniet autem casus, quibus n est numerus vel affirmatiuus vel negatiuus a se inuicem discernere; cum saepissime, si his conditionibus satisfiat existente n numero affirmatiuo, simul reliquis casibus satisfieri nequeat. Sin autem conditiones praescriptae tantum impleantur casibus, quibus n est numerus affirmatiuus, tum prioris fractionis continuae tantum valor exhiberi potest; posterioris vero tantum, si conditionibus fuerit satisfactum, existente n numero negatiuo.

§. 54. Incipiamus euolutionem huius methodi valores fractionum continuarum inueniendi ab exemplis iam ante tractatis, et primo quidem proposita sit ista fractio continua:

$$r + \cfrac{fh}{r + \cfrac{(f+r)(h+r)}{r + \cfrac{(f+r)(h+2r)}{r + \text{etc.}}}}$$

cuius valor supra §. 34. assignatus est iste

$$\frac{h(f-r)\int y^{h+r-1} dy : \surd(1-y^{2r}) - f(h-r)\int y^{f+r-1} dy : \surd(1-y^{2r})}{f\int y^{f+r-1} dy : \surd(1-y^{2r}) - h\int y^{h+r-1} dy : \surd(1-y^{2r})}$$

Com-

Comparetur ergo haec fractio continua cum ista generali:

$$\frac{a\int P\,dx}{\int PR\,dx}=b+\cfrac{(a+\alpha)c}{b+\beta+\cfrac{(a+2\alpha)(c+\gamma)}{b+2\beta+\cfrac{(a+3\alpha)(c+2\gamma)}{b+3\beta+\text{etc.}}}}$$

eritque $b=r$; $\beta=0$; $\alpha=r$; $\gamma=r$; $a=f-r$; $c=b$. His valoribus substitutis orietur $\frac{dS}{S}=\frac{rR\,dR+(b-r)R^2\,dR-(f-2r)dR}{rR^3-rR}$ $=\frac{(f-2r)dR}{rR}+\frac{r\,dR+(b-f+r)R\,dR}{r(R^2-1)}$: atque integrando $lS=\frac{f-2r}{r}lR+\frac{b-f}{2r}l(R+1)+\frac{b-f+2r}{2r}l(R-1)+lC$ seu $S=CR^{\frac{f-2r}{r}}(R^2-1)^{\frac{b-f}{2r}}(R-1)$. Hinc itaque erit $R^{n+1}S=R^{\frac{f+(n-1)r}{r}}(R^2-1)^{\frac{b-f}{2r}}(R-1)$, atque $P\,dx=\frac{CR^{\frac{f-2r}{r}}(R^2-1)^{\frac{b-f}{2r}}dR}{r(R+1)}$.

§. 55. Cum autem $R^{n+1}S$ duobus casibus euanescere debeat posito tam $x=0$ quam $x=1$; idque quicunque numerus affirmatiuus loco n substituatur; ad negatiuos enim valores ipsius n respicere non est opus. Ponamus vero f, b, et r esse numeros affirmatiuos atque $b>f$, quod tuto assumere licet nisi sit $f=b$, deinde sit etiam $f>r$. His positis manifestum est formulam $R^{n+1}S$ duobus casibus euanescere scilicet si $R=0$ et $R=1$: hocque etiam locum habet si sit $f=b$. Dummodo ergo sit $f>r$ poni poterit $R=x$ eritque $P\,dx=\frac{x^{\frac{f-2r}{r}}(1-x^2)^{\frac{b-f}{2r}}dx}{1+x}$ determinata constante C. Ex his itaque valor fractionis continuae propositae erit $=\frac{(f-r)\int\frac{x^{\frac{f-2r}{r}}(1-x^2)^{\frac{b-f}{2r}}dx}{1+x}}{\int\frac{x^{\frac{f-r}{r}}(1-x^2)^{\frac{b-f}{2r}}dx}{1+x}}$.

Posito

Posito autem $x = y^r$ erit valor quaesitus $=$

$$\frac{(f-r)\int y^{f-r-1}(1-y^{2r})^{\frac{b-f}{2r}}dy:(1+y^r)}{\int y^{f-1}(1-y^{2r})^{\frac{b-f}{2r}}dy:(1+y^r)}.$$

§. 56. Aliam igitur nacti sumus expressionem huius fractionis continuae

$$r+\cfrac{fb}{r+\cfrac{(f+r)(b+r)}{r+\text{etc.}}}$$

valorem continentem, quae etsi formulas integrales in se complectitur, tamen discrepat ab expressione ante inuenta. Haec enim posterior expressio locum non habet nisi sit $f > r$, pro b autem accipi oportet maiorem quantitatum binarum f et b, siquidem fuerint inaequales. Attamen si etiam f fuerit minus quam r, valor fractionis continuae exhiberi potest considerando hanc

$$r+\cfrac{(f+r)(b+r)}{r+\cfrac{(f+2r)(b+2r)}{r+\text{etc.}}}$$

cuius valor erit $= \dfrac{f\int y^{f-1}(1-y^{2r})^{\frac{b-f}{2r}}dy:(1+y^r)}{\int y^{f+r-1}(1-y^{2r})^{\frac{b-f}{2r}}dy:(1+y^r)}$ quae nulla indiget restrictione. Posito enim hoc valore $= V$ erit fractionis continuae propositae valor $= r + \frac{fb}{V}$.

§. 57. Casus ille quo $f = b$, qui ante peculiari modo erat erutus, eiusque valor in §. 34. inuentus $=$

$$\frac{1-(b-r)\int x^{b-1}dx:(1+x^r)}{\int x^{b-1}dx:(1+x^r)} = \frac{(b-r)\int x^{b-r-1}dx:(1+x^r)}{\int x^{b-1}dx:(1+x^r)}$$

ex hac posteriore expressione sponte fluit; facto enim $f = b$, expressio §. 55. inuenta abibit in hanc $\dfrac{(b-r)\int y^{b-r-1}dy:(1+y^r)}{\int y^{f-1}dy:(1+y^r)}$

om-

omnino eandem ex quo consensus ambarum expressionum generalium satis perspicitur. Hic autem tuto accipere licet esse $b > r$, cum ii casus, quibus hoc secus accidit, facillime ad hos reducantur, vti modo est monstratum.

§. 58. Quo autem consensus ambarum expressionum omni casu intelligatur, praemittendum nobis est hoc lemma, quod ab aliis iam est demonstratum. Si fuerit series $1 + \frac{p}{q+s} + \frac{p(p+s)}{(q+s)(q+2s)} + \frac{p(p+s)(p+2s)}{(q+s)(q+2s)(q+3s)} +$ etc. in qua sint quantitatis p, q, et s affirmatiuae atque $q > p$; huius seriei in infinitum continuatae summa erit $= \frac{q}{q-p}$. Huius autem lemmatis veritas per methodum meam generalem series summandi sequenti modo euinci potest. Consideretur enim haec series $x^q + \frac{p}{q+s} x^{q+s} + \frac{p(p+s)}{(q+s)(q+2s)} x^{q+2s} +$ etc. cuius summa dicatur z, eritque differentiando $\frac{dz}{dx} = qx^{q-1} + px^{q+s-1} + \frac{p(p+s)}{(q+s)} x^{q+2s-1} +$ etc. atque $x^{p-q-s} dz = qx^{p-s-1} dx + px^{p-1} dx + \frac{p(p+s)}{q+s} x^{p+s-1} dx +$ etc. quae aequatio integrata dat $\int x^{p-q-s} dz = \frac{qx^{p-s}}{p-s} + x^p + \frac{px^{p+s}}{q+s} +$ etc. $= \frac{qx^{p-s}}{p-s} + x^{p-q} z$ Ex hac aequatione differentiata prodibit ista $x^{p-q-s} dz = qx^{p-s-1} dx + x^{p-q} dz + (p-q) x^{p-q-1} z dx$ seu $dz (1-x^s) + (q-p) x^{s-1} z dx = qx^{q-1} dx$ siue $dz + \frac{(q-p) x^{s-1} z dx}{1-x^s} = \frac{qx^{q-1} dx}{1-x^s}$, cuius integralis est $\frac{z}{(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}}$

$$= q \int \frac{x^{q-1} dx}{(1-x^s)^{\frac{q-p+s}{s}}} = \frac{qx^q}{(q-p)(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}} - \frac{pq}{q-p} \int \frac{x^{q-1} dx}{(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}}:$$

vnde erit $z = \frac{qx^q}{q-p} - \frac{pq(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}}{q-p} \int \frac{x^{q-1} dx}{(1-x^s)^{\frac{q-p}{s}}}$. Quare

 facto

facto $x = 1.$, erit $z = \frac{q}{q-p} = 1 + \frac{p}{q+s} + \frac{p(p+s)}{(q+s)(q+2s)}$ + etc. quae est demonstratio lemmatis dati, ex qua simul intelligitur lemmatis veritatem non consistere nisi sit $q > p$.

§. 59. Cum igitur valorem huius fractionis continuae

$$r + \cfrac{fh}{r + \cfrac{(f+r)(h+r)}{r + \cfrac{(f+2r)(h+2r)}{r + \text{etc.}}}}$$

duplici modo habeamus expressum, quorum alter est $=$

$$\frac{h(f-r)\int y^{h+r-1}dy : V(1-y^{2r}) - f(h-r)\int y^{f+r-1}dy : V(1-y^{2r})}{f\int y^{f+r-1}dy : V(1-y^{2r}) - h\int y^{h+r-1}dy : V(1-y^{2r})}$$

alter vero, qui in §. 56. est erutus $= r +$

$$\frac{h\int y^{f+r-1}dy\,(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}} : (1+y^r)}{\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}} : (1+y^r)},$$ operae pretium erit harum expressionum consensum declarare. Cum igitur sit $\frac{1}{1+y^r} = \frac{1-y^r}{1-y^{2r}}$ erit $\int y^{f-1}\,dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}} : (1+y^r) = \int y^{f-1} dy\,(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}} - \int y^{f+r-1}\,dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}$, atque $\int y^{f+r-1} dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f}{2r}} : (1+y^r) = \int y^{f+r-1}\,dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}} - \int y^{f+2r-1} dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}} = \int y^{f+r-1}\,dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}} - \frac{f}{h}\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}$.

Ponatur $\frac{\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}}{\int y^{f-1}\,dy\,(1-y^{2r})^{\frac{h-f-2r}{2r}}} = V$, erit valor po-

sterior

sterior fractionis continuae $= r + \frac{bV - f}{1 - V}$. Ponatur praeterea $\frac{\int y^{b+r-1}dy : \surd(1-y^{2r})}{\int y^{f+r-1}dy : \surd(1-y^{2r})} = W$ erit prior valor $= \frac{b(f-r)W - f(b-r)}{f - bW}$, ex quorum aequalitate sequitur fore $V = \frac{f}{bW}$ ita vt sit $\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-2r}{2r}} = \frac{f\int y^{f+r-1}dy : \surd(1-y^{2r})}{b\int y^{b+r-1}dy : \surd(1-y^{2r})}$, cuius aequalitatis ratio per Theoremata in praecedente dissertatione exhibita constat: est enim per vnum ex illis theorematis $\frac{\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-2r}{2r}}}{\int y^{f+2r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-2r}{2r}}}$ $= \frac{\int y^{f+r-1}dy : \surd(1-y^{2r})}{\int y^{b+r-1}dy : \surd(1-y^{2r})}$.

§. 60. Consideremus nunc hanc fractionem continuam

$$2r + \cfrac{fb}{2r + \cfrac{(f+r)(b+r)}{2r + \cfrac{(f+2r)(b+2r)}{2r + \text{etc.}}}}$$

cuius valor supra §. 35. inuentus est $=$

$$\frac{2(f-r)(b-r)\int y^{f-1}dy : \surd(1-y^{2r}) - b(f+b-3r)\int y^{b+r-1}dy : \surd(1-y^{2r})}{2b\int y^{b+r-1}dy : \surd(1-y^{2r}) - (f+b-r)\int y^{f-1}dy : \surd(1-y^{2r})}$$

si nunc haec fractio continua comparetur cum hac $\frac{a\int P dx}{\int P\kappa dx}$

$= b$

$$= b + \cfrac{(a+\alpha)c}{b+\beta+\cfrac{(a+2\alpha)(c+\gamma)}{b+2\beta+\cfrac{(a+3\alpha)(c+2\gamma)}{b+3\beta+\text{etc.}}}}$$

erit $b=2r$; $\beta=0$; $\alpha=r$; $\gamma=r$; $a=f-r$ et $c=b$. Hinc igitur ex §. 52. habebitur $\frac{dS}{S}=\frac{(f-2r)dR}{rR}+\frac{2cdR+(b-f+r)RdR}{r(R^2-1)}$ et integrando $S=CR^{\frac{f-2r}{r}}(R^2-1)^{\frac{b-f-r}{2r}}(R-1)^2$ vnde fit $Pdx=CR^{\frac{f-2r}{r}}(R^2-1)^{\frac{b-f-3r}{2r}}(R-1)^2dR$ et $R^{n+1}S=CR^{\frac{f+(n-1)r}{r}}(R^2-1)^{\frac{b-f-r}{2r}}(R-1)^2$, quae expressio duobus casibus euanescit, ponendo tum $R=0$ tum $R=1$, modo sit $f>r$ et $b+3r>f$, quibus conditionibus semper satisfieri potest.

§. 61. Sit igitur $R=x$ et constante C determinata erit $Pdx=x^{\frac{f-2r}{r}}dx(1-x^2)^{\frac{b-f-3r}{2r}}(1-x)^2$: vel posito $R=x=y^r$, erit $Pdx=y^{f-r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{2r}}(1-y^r)^2$, ex quibus erit valor fractionis continuae propositae $\frac{a\int Pdx}{\int PRdx}=$

$$\frac{(f-r)\int y^{f-r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{2r}}(1-y^r)^2}{\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{2r}}(1-y^r)^2}$$

quae per theoremata superioris dissertationis ad priorem formam reducetur, euoluendo quadratum $(1-y^r)^2$, quo facto vtraque formula integralis in binas simpliciores resoluetur. Ipsam autem reductionem in exemplo sequente latius patente declarabo.

§. 62.

§. 62. Si habeatur haec formula integralis $\int y^{m-1}dy (1-y^{2r})^{\varkappa}(1-y^r)^n$, atque $(1-y^r)^n$ resolualtur in seriem $1 - ny^r + \frac{n(n-1)}{1.2}y^{2r} -$ etc. cuius alternis terminis sumendis formula integralis proposita reducetur ad binas sequentes:

$$\int y^{m-1}dy(1-y^{2r})^{\varkappa}\left(1+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{m}{p}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{m(m+2r)}{p(p+2r)}+\text{etc.}\right.$$

$$-\int y^{m+r-1}dy(1-y^{2r})^{\varkappa}\left(n+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{(m+r)}{(p+r)}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{(m+r)(m+3r)}{(p+r)(p+3r)}\text{ etc.}\right.$$

posito breuitatis gratia $m + 2\varkappa r + 2r = p$. Quare si fuerit vt in casu praecedente $n = 2$ erit $\int y^{m-1}dy(1-y^{2r})^{\varkappa}(1-y^r)^2 = \frac{m+p}{p}\int y^{m-1}dy(1-y^{2r})^{\varkappa} - 2\int y^{m+r-1}dy(1-y^{2r})^{\varkappa}$. Ex quo habebitur $\frac{a\int Pdx}{\int PRdx}$

$$=\frac{\frac{(f-r)(f+b-3r)}{b-2r}\int y^{f-r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{2r}}-2(f-r)\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{2r}}}{\frac{f+b-r}{b-r}\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{br}}-2\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{2r}}}$$

$$=\frac{b(f+b-3r)\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-3r}{2r}}-2(f-r)(b-r)\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-r}{2r}}}{(f+b-r)\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-r}{2r}}-2b\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-r}{2r}}}$$

quae expressio cum aequalis esse debeat illi, quae supra §. 35. est inuenta, praebebit hanc aequationem:

$$\frac{\int y^{f+r-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-r}{2r}}}{\int y^{f-1}dy(1-y^{2r})^{\frac{b-f-r}{2r}}}=\frac{\int y^{b+r-1}dy:\surd(1-y^{2r})}{\int y^{f-1}dy:\surd(1-y^{2r})}$$

cuius quidem ratio iam in theorematis superioris dissertationis continetur.

§. 63. Sumamus nunc vicissim pro P et R datos valores, ex iisque fractiones continuas formemus; atque ponamus

namus

namus $P = x^{m-1}(1-x^r)^n(p+qx^r)^{\varkappa}$, et $R = x^r$. Cum autem esse debeat $(a+\nu\alpha)\int PR^{\nu}dx = x(b+\nu\beta)\int PR^{\nu+1}dx + (c+\nu\gamma)\int PR^{\nu+2}dx$, hincque ob P et R datas fiat ex §. 52. $S = \frac{1}{r}x^{m-r}(1-x^r)^n(p+qx^r)^{\varkappa}(\gamma x^{2r}+\beta x^r-\alpha)$ erit $\frac{dS}{S} = \frac{(m-r)dx}{x} + \frac{nrx^{r-1}dx}{-1+x^r} + \frac{\varkappa qrx^{r-1}dx}{p+qx^r} + \frac{2\gamma rx^{2r-1}dx+\beta rx^{r-1}dx}{\gamma x^{2r}+\beta x r^r-\alpha} = \frac{(a-\alpha)rdx}{\alpha x} + \frac{(\alpha b-\beta a)rx^{r-1}dx+(\alpha c-\gamma a)rx^{2r-1}dx}{\alpha(\gamma x^{2r}+\beta x^r-\alpha)}$. Sit nunc $(p+qx^r)(x^r-1) = \gamma x^{2r}+\beta x^r-\alpha$, erit $\gamma = q\ \beta = p-q$ et $\alpha = p$. Sit praeterea $\frac{(a-\alpha)r}{\alpha} = m-r$, erit $a = \frac{mp}{r}$. Vnde debebit porro esse $nqr+\varkappa qr+2qr = \frac{cpr-mpq}{p}$ seu $c = \frac{mq}{r}+nq+(\varkappa+2)q$, et tandem $b = \frac{m(p-q)}{r}+(n+1)p-(\varkappa+1)q$. Dummodo ergo m et $n+1$ fuerint numeri affirmatiui, quo $R^{\nu+1}S$ euanescat posito tam $x=0$, quam $x=1$, prodibit sequens expressio

$$\frac{\int x^{m+r-1}dx(1-x^r)^n(p+qx^r)^{\varkappa}}{\int x^{m-1}dx(1-x^r)^n(p+qx^r)^{\varkappa}} = \frac{\int PRdx}{\int Pdx}$$

quae propterea aequalis erit huic fractioni continuae

$$\cfrac{mp}{m(p-q)+(n+1)pr-(\varkappa+1)qr+\cfrac{pq(m+r)(m+nr+(\varkappa+2)r)}{m(p-q)+(n+2)pr-(\varkappa+2)qr+\cfrac{pq(m+2r)(m+(n+1)r+(\varkappa+2)r)}{m(p-q)+(n+3)pr-(\varkappa+3)qr+\text{etc.}}}}$$

§. 64. Quo fractio continua simpliciorem induat formam, ponatur $m+nr+r=a$; $m+\varkappa r+r=b$; et $m+nr+\varkappa r+r=c$, fiet $\varkappa = \frac{c-a}{r}$; $n = \frac{c-b}{r}$ et $m = a+b-c-r$; ideoque erit

$$\cfrac{p(a+b-c-r)}{ap-bq+\cfrac{pq(a+b-c)(c+r)}{(a+r)p-(b+r)q+\cfrac{pq(a+b-c+r)(c+2r)}{(a+2r)p-(b+2r)q+\cfrac{p(a+b-c+r)(c+r)}{(a+3r)p-(b+3r)q+\text{etc.}}}}}$$

$$=\frac{\int x^{a+b-c-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{\int x^{a+b-c-r-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}$$ posito post vtramque integrationem $x=1$. Requiritur autem vt sint $a+b-c-r$ et $c-b+r$ numeri affirmatiui. Sin autem ponatur breuitatis causa $a+b-c-r=g$ erit

$$\frac{\int x^{g+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{\int x^{g-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}$$

$$=\cfrac{pg}{ap-bq+\cfrac{pq(c+r)(g+r)}{(a+r)p-(b+r)q+\cfrac{pq(c+2r)(g+2r)}{(a+2r)p-(b+2r)q+\text{etc.}}}}$$

quae aequatio latissime patet, et omnes hactenus erutas fractiones continuas sub se comprehendit.

§. 65. Si quantitates c et g inter se commutentur, prodibit sequens fractio continua

$$\cfrac{pc}{ap-bq+\cfrac{pq(c+r)(g+r)}{(a+r)p-(b+r)q+\cfrac{pq(c+2r)(g+2r)}{(a+2r)p-(b+2r)q+\text{etc.}}}}$$

cuius adeo valor erit $$\frac{\int x^{c+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{g-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{g-a}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^r)^{\frac{g-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{g-a}{r}}}.$$

Quare cum fractiones hae continuae datam inter se teneant rationem, scilicet g ad c hinc sequens orietur Theorema restituto loco g suo valore $$\frac{c\int x^{a+b-c-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{\int x^{a+b-c-r-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}$$

$$=\frac{(a+b-c-r)\int x^{c+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{a-c-r}{r}}(p+qx^r)^{\frac{b-c-r}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^r)^{\frac{a-c-r}{r}}(p+qx^r)^{\frac{b-c-r}{r}}}$$

Sub

Sub qua amplissima forma plurimae egregiae reductiones particulares continentur. Sit verbi gratiae $b = c + r$ erit

$$\frac{c\int x^{a+r-1}dx(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}} : (1-x^r)}{\int x^{a-1}dx(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}} : (1-x^r)} = \frac{a\int x^{c+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{a-c-r}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^r)^{\frac{a-c-r}{r}}}$$

$= c$, vnde sequitur fore $\int \frac{x^{a+r-1}dx(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{1-x^r} = \frac{\int x^{a-1}dx(p+qx^r)^{\frac{c-a}{r}}}{1-x^r}$

Habebitur ergo hinc istud theorema latius patens

$\frac{\int x^{m-1}dx(p+qx^r)^{\kappa}}{1-x^r} = \frac{\int x^{n-1}dx(p+qx^r)^{\kappa}}{1-x^r}$, vbi semper integrationibus ita institutis vt euanescant integralia posito $x = 0$, fieri intelligitur $x = 1$. Excipitur autem solus ille casus quo est $q + p = 0$; quo incommodum accidit.

§. 66. Fractiones continuae, quas hactenus eruimus ope interpolationum, huc redeunt vt denominatores partiales sint constantes. Quo igitur formam generalem nunc inuentam ad eas transferamus, ponatur $p = q = 1$; prodibitque haec fractio coutinua

$$\cfrac{cg}{a-b+\cfrac{(c+r)(g+r)}{a-b+\cfrac{(c+2r)(g+2r)}{a-b+\cfrac{(c+3r)(g+3r)}{a-b+\text{etc.}}}}} = \frac{c\int x^{g+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(1+x^r)^{\frac{c-a}{r}}}{\int x^{g-1}dx(1-x^r)^{\frac{c-b}{r}}(1+x^r)^{\frac{c-a}{r}}}$$

vel eiusdem valor erit quoque $= \frac{g\int x^{c+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{g-b}{r}}(1+x^r)^{\frac{g-a}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^r)^{\frac{g-b}{r}}(1+x^r)^{\frac{g-a}{r}}}$

existente $g = a + b - c - r$. Ponatur $a - b = s$ ob $a + b = o + g + r$ erit $a = \frac{c+g+r+s}{2}$ et $b = \frac{c+g+r-s}{2}$, vnde

vnde fiet
$$\cfrac{cg}{s+\cfrac{(c+r)(g+r)}{s+\cfrac{(c+2r)(g+2r)}{s+\text{etc.}}}}$$
$$=\frac{c\int x^{g+r-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{c-g-r-s}{2r}}(1-x^r)^{\frac{s}{r}}}{\int x^{g-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{c-g-r-s}{2r}}(1-x^r)^{\frac{s}{r}}}=$$
$$\frac{g\int x^{c+r-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{g-c-r-s}{2r}}(1-x^r)^{\frac{s}{r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{g-c-r-s}{2r}}(1-x^r)^{\frac{s}{r}}}$$

§. 67. Ponamus vt ad formam §. 47. perueniatur $2s$ loco s, fitque $c=q$ et $g=r-q$, habebitur haec fractio continua
$$\cfrac{q(r-q)}{2s+\cfrac{(q+r(2r-q)}{2s+\cfrac{(q+2r)(3r-q)}{2s+\text{etc.}}}}$$
cuius valor adeo erit vel $=\frac{q\int x^{2r-q-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{q-r-s}{r}}(1-x^r)^{\frac{2s}{r}}}{\int x^{r-q-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{q-r-s}{r}}(1-x^r)^{\frac{2s}{r}}}$

vel $=\frac{(r-q)\int x^{q+r-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{-q-s}{r}}(1-x^r)^{\frac{2s}{r}}}{\int x^{q-1}dx(1-x^{2r})^{\frac{-q-s}{r}}(1-x^r)^{\frac{2s}{r}}}$. Eiusdem autem fractionis continuae valor ante est inuentus $=\frac{(q+s)\int y^{r+s+q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}{\int y^{r+s-q-1}dy:\sqrt{(1-y^{2r})}}-s$. Quamobrem istae formulae integrales interse erunt aequales; quod est theorema minime contemnendum.

§. 68. Sit vti §. 48. posuimus $r=2$, et $q=1$ erit

$$\frac{(1+s)\int y^{s+2}dy:\sqrt{(1-y^4)}}{\int y^s dy:\sqrt{(1-y^4)}} - s = \frac{\int x^2dx(1-x^4)^{\frac{-s-1}{2}}(1-x^2)^s}{\int dx(1-x^4)^{\frac{-s-1}{2}}(1-x^2)^s}$$

quae aequalitas conspicua est si $s=0$; casibus autem quibus s est numerus integer impar, aequalitas non difficulter ostenditur. Vt si fuerit $s=1$, erit posterior formula $\frac{\int xxdx:(1+xx)}{\int dx:(1+xx)} = \frac{x-\int dx:(1+xx)}{\int dx:(1+xx)} = \frac{4-\pi}{\pi}$ posito $x=1$. Prior vero formula dabit in $\frac{2\int y^3dy:\sqrt{(1-y^4)}}{\int ydy:\sqrt{(1-y^4)}} - 1 = \frac{4}{\pi} - 1 = \frac{4-\pi}{\pi}$ prorsus vti praecedens. At si s numerus par, per euolutionem potestatis $(1-xx)^s$ consensus ambarum expressionum facile perspicietur.

§. 69. Praeter fractiones autem continuas hactenus erutas forma generalis inuenta innumerabiles alias sub se complectitur; ex quibus nonnullas euoluere expediet. Sit igitur $g=c$, eritque huius fractionis continuae

$$\cfrac{c^2}{s+\cfrac{(c+r)^2}{s+\cfrac{(c+2r)^2}{s+\text{etc.}}}}$$

$$\text{valor} = \frac{r\int x^{c+r-1}dx(1-x^r)^{\frac{s}{r}}:(1-x^{2r})^{\frac{r+s}{2r}}}{\int x^{c-1}dx(1-x^r)^{\frac{s}{r}}:(1-x^{2r})^{\frac{r+s}{2r}}}.$$ Ponatur

$c=1$, et $r=1$, eritque

$$\cfrac{1}{s+\cfrac{4}{s+\cfrac{9}{s+\cfrac{16}{s+\text{etc.}}}}} =$$

$= \frac{\int x dx (1-x)^s : (1-xx)^{\frac{s+1}{2}}}{\int dx (1-x)^s : (1-xx)^{\frac{s+1}{2}}}$, cuius expressionis valores, quos pro variis ipsius s significationibus induit, investigemus. Posito igitur huius expressionis valore $= V$, erit vt sequitur:

si $s=0$; $V = \frac{\int x dx : \sqrt{(1-xx)}}{\int dx : \sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2\int dy : (1+yy)}$.

si $s=2$; $V = \frac{2\int dx : \sqrt{(1-xx)} - 3\int x dx : \sqrt{(1-xx)}}{2\int x dx : \sqrt{(1-xx)} - \int dx : \sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2\int y^2 dy : (1+yy)} - 2$

si $s=4$; $V = \frac{19\int x dx : \sqrt{(1-xx)} - 12\int dx : \sqrt{(1-xx)}}{3\int dx : \sqrt{(1-xx)} - 4\int x dx : \sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2\int y^4 dy : (1+yy)} - 4$

Generaliter autem erit

$V = \frac{1}{2\int y^s dy : (1+yy)} - s$, ex qua forma apparet, si fuerit s numerus integer par, quadraturam circuli inuolui, contra autem si s impar, logarithmos.

§. 70. Proposita nunc nobis sit haec fractio continua

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{4}{3 + \cfrac{9}{4 + \cfrac{16}{5 + \cfrac{25}{6 + \text{etc.}}}}}}$$

Comparetur haec cum forma §. 64. exhibita, fietque $pq cg = 1$; $pq(c+r)(g+r) = 4$, $pq(c+2r)(g+2r) = 9$; $ap - bq = 2$, et $(p-q)r = 1$, vnde erit $c = g = r$; $p = \frac{\sqrt{5}+1}{2r}$; $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2r}$; $a = \frac{r(1+3\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}$ et $b = \frac{r(3\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{5}}$, quibus

bus ſubſtitutis habebitur valor propoſitae fractionis continuae

$$= 1 + \frac{(\sqrt{5}-1)\int x^{2r-1}dx(1-x^r)^{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}(1+\sqrt{5}+(\sqrt{5}-1)x^r)^{\frac{-\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}}{2\int x^{r-1}dx(1-x^r)^{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}(1+\sqrt{5}+(\sqrt{5}-1)x^r)^{\frac{-\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}}$$

Ex qua expreſſione ob exponentes ſurdos nihil concludi poteſt notatu dignum.

§. 71. Cum in his fractionibus continuis numeratores partiales ex duobus factoribus ſint compoſiti, ita nunc ad eiusmodi fractiones continuas pergam, in quibus numeratores hi partiales progreſſionem arithmeticam conſtituant. Fiat igitur, ad §. 50. recurrendo, $\gamma = 0$ et $c = 1$. erit

$$\frac{\int PRdx}{\int Pdx} = \cfrac{a}{b + \cfrac{a+\alpha}{b+\beta + \cfrac{a+2\alpha}{b+2\beta + \cfrac{a+3\alpha}{b+3\beta + \text{etc.}}}}}$$

Oportet autem ſumi $\frac{dS}{S} = \frac{(a-\alpha)dR}{\alpha R} + \frac{(\alpha b - \beta a)dR + \alpha R dR}{\alpha(\beta R - \alpha)} = \frac{(a-\alpha)dR}{\alpha R} + \frac{dR}{\beta} + \frac{(\alpha^2 + \alpha\beta b - \beta^2 a)dR}{\alpha\beta(\beta R - \alpha)}$, vnde fit $S = Ce^{\frac{R}{\beta}} R^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} (\beta R - \alpha)^{\frac{\alpha^2 + \alpha\beta b - \beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}$.

Ponatur $R = \frac{\alpha x}{\beta}$, erit $S = Ce^{\frac{\alpha x}{\beta\beta}} x^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} (1-x)^{\frac{\alpha^2 + \alpha\beta b - \beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}$ ac $R^{n+1}S$ duplici caſu euaneſcit, poſito ſcilicet tam $x = 0$ quam $x = 1$, modo ſit $\alpha^2 + \alpha\beta b > \beta^2 a$. Hinc ergo erit $Pdx = e^{\frac{\alpha x}{\beta\beta}} x^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} dx(1-x)^{\frac{\alpha^2 + \alpha\beta b - \alpha\beta^2 - \beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}$ atque fractionis continuae propoſitae valor $= \frac{\int PRdx}{\int Pdx} =$

$$\frac{\alpha\int e^{\frac{\alpha x}{\beta\beta}} x^{\frac{a}{\alpha}} dx\,(1-x)^{\frac{\alpha^2 + \alpha\beta b - \alpha\beta^2 - \beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}}{\beta\int e^{\frac{\alpha x}{\beta\beta}} x^{\frac{a-\alpha}{\alpha}} dx(1-x)^{\frac{\alpha^2 + \alpha\beta b - \alpha\beta^2 - \beta^2 a}{\alpha\beta\beta}}}$$

poſito poſt integrationem $x = 1$.

§. 72.

§. 72. Vt hic casus exemplo illustretur sit $a=1$, $b=1$, $\alpha=1$, et $\beta=1$, habebitur haec fractio continua

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\text{etc.}}}}}$$

cuius valor erit $=\frac{\int e^x x\,dx}{\int e^x dx}=\frac{e^x x-e^x+1}{e^x-1}=\frac{1}{e-1}$ posito $x=1$. Vnde erit

$$e=2+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\text{etc.}}}}}$$

qua expressione satis cito ad valorem numeri e, cuius logarithmus est $=1$, pertingitur.

§. 73. Ponamus nunc in superiori fractione continua §. 71. data, esse $\beta=0$, vt sit

$$\frac{\int PR\,dx}{\int P\,dx}=\cfrac{a}{b+\cfrac{a+\alpha}{b+\cfrac{a+2\alpha}{b+\cfrac{a+3\alpha}{b+\text{etc.}}}}}$$

erit $\frac{dS}{S}=\frac{(a-\alpha)dR}{\alpha R}-\frac{b\,dR}{\alpha}-\frac{R\,dR}{\alpha}$, hincque $S=CR^{\frac{a-\alpha}{\alpha}}e^{\frac{-2bR-RR}{2\alpha}}$; Duplici nunc casu $R^{n+1}S$ euanescit, quorum alter est si $R=0$, alter si $R=\infty$, modo sint a et α numeri affirmatiui. Ponatur ergo $R=\frac{x}{1-x}$ eritque $S=Cx^{\frac{a-\alpha}{\alpha}}:(1-x)^{\frac{a-\alpha}{\alpha}}e^{\frac{2bx-(2b-1)xx}{2\alpha(1-x)^2}}$. Ob $dR=\frac{dx}{(1-x)^2}$ erit $\int P\,dx$

=

$$=\int \frac{x^{\frac{a-\alpha}{\alpha}}\,dx}{(1-x)^{\frac{a+\alpha}{\alpha}}\, e^{\frac{2bx-(2b-1)xx}{2\alpha(1-x)^2}}} \text{ atque } \int PR\,dx =$$

$$\int \frac{x^{\frac{a}{\alpha}}\,dx}{(1-x)^{\frac{a+2\alpha}{\alpha}}\, e^{\frac{2bx-(2b-1)xx}{2\alpha(1-x)^2}}}.$$

§. 74. Sit denique in §. 50, $a=1$; $c=1$ $\alpha=0$, $\gamma=0$, erit $\frac{\int PR\,dx}{\int P\,dx} = \cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\beta+\cfrac{1}{b+2\beta+\cfrac{1}{b+3\beta+\text{etc.}}}}}$

atque $\frac{dS}{S} = \frac{R^2 dR + (b-\beta)R\,dR - dR}{\beta R^2}$; vnde fiet $S =$ $e^{\frac{RR+1}{\beta R}} R^{\frac{b-\beta}{\beta}}$, et $P\,dx = e^{\frac{RR+1}{\beta R}} R^{\frac{b-2\beta}{\beta}} dR$ atque $PR\,dx$ $= e^{\frac{RR+1}{\beta R}} R^{\frac{b-\beta}{\beta}} dR$. Oportet autem R talem eſſe functionem ipſius x, vt R^{n+1} euaneſcat poſito tam $x=0$, quam $x=1$. Eiusmodi autem functionem aſſignare, opus eſt multo difficilius, quam pro reliquis caſibus. Neque igitur hunc caſum eadem methodo reſoluere conabor ſed eum alii methodo nunc exponendae reſeruabo.

§. 75. Huius quidem methodi ad fractiones continuas perueniendi iam ante aliquod tempus feci mentionem, ſed quoniam tum caſum tantum particularem tractaui, hic eam fuſius exponere conueniet. Continetur ea autem non vti praecedens formulis integralibus, ſed reſolutione aequationis differentialis ſimilis illi, quam quondam Comes Riccati pro-

proposuit. Considero scilicet hanc aequationem $ax^m dx + bx^{m+1} y dx + cy^2 dx + dy = 0$, quae ponendo $x^{m+3} = t$ et $y = \frac{1}{cx} + \frac{1}{xxz}$ transit in hanc: $\frac{-c}{m+3} t^{\frac{-m-4}{m+3}} dt - \frac{b}{m+3} t^{\frac{-1}{m+3}} z dt - \frac{(ac+b)}{(m+3)c} z^2 dt + dz = 0$, quae similis est priori. Quare si constaret valor ipsius z per t, simul y per x innotesceret. Reducatur autem eodem modo haec aequatio ad aliam sui similem ponendo $t^{\frac{2m+5}{m+3}} = u$, et $z = \frac{-(m+3)c}{(ac+b)t} + \frac{1}{ttv}$, ac istiusmodi reductiones continuentur in infinitum, quo facto si omnes valores posteriores in praecedentibus substituantur, exprimetur y sequenti modo.

$$y = Ax^{-1} + \cfrac{1}{-Bx^{-m-1} + \cfrac{1}{Cx^{-1} + \cfrac{1}{-Dx^{-m-1} + \cfrac{1}{Ex^{-1} + \cfrac{1}{-Fx^{-m-1} + \text{etc.}}}}}}$$

litterae vero A, B, C, D, etc, sequentes obtinebunt valores.

$$A = \frac{1}{c}$$

$$B = \frac{(m+3)c}{ac+b}$$

$$C = \frac{(2m+5)(ac+b)}{c(ac-(m+2)b)}$$

$$D = \frac{(3m+7)c(ac-(m+2)b)}{(ac+b)(ac+(m+3)b)}$$

$$E = \frac{(4m+9)(ac+b)(ac+(m+3)b)}{c(ac-(m+2)b)(ac-(2m+4)b)}$$

$$F = \frac{(5m+11)c(ac-(m+2)b)(ac-(2m+4)b)}{(ac+b)(ac+(m+3)b)(ac+(2m+5)b)}$$

etc.

quae determinationes simplicius sequentibus aequationibus comprehenduntur:

AB =

$$AB = \frac{m+3}{ac+b} \qquad DE = \frac{(3m+7)(4m+9)}{ac-(2m+4)b}$$
$$BC = \frac{(m+3)(2m+5)}{ac-(m+2)b} \qquad EF = \frac{(4m+9)(5m+11)}{ac+(2m+5)b}$$
$$CD = \frac{(2m+5)(3m+7)}{ac+(m+3)b} \qquad FG = \frac{(5m+11)(6m+13)}{ac-(3m+6)b}$$
etc. etc.

76. Si nunc hi valores in fractione continua inuenta substituantur reperietur:

$$cxy = 1 + \cfrac{(ac+b)x^{m+2}}{-(m+3) + \cfrac{(ac-(m+2)b)x^{m+2}}{(2m+5) + \cfrac{(ac+(m+3)b)x^{m+2}}{-(3m+7) + \cfrac{(ac-(2m+4)b)x^{m+2}}{(4m+9) + \text{etc.}}}}}$$

Ex hac expressione patet aequationem propositam absolute esse integrabilem casibus quibus b aequatur termino cuipiam huius progressionis $-ac$; $-\frac{ac}{m+3}$; $-\frac{ac}{2m+5}$; $-\frac{ac}{3m+7}$; etc. $-\frac{ac}{im+2i+1}$ deinde etiam casibus quibus b est termiuus huius progressionis: $\frac{ac}{m+2}$; $\frac{ac}{2(m+2)}$; $\frac{ac}{3(m+2)}$; etc. $\frac{ac}{im+2i}$ Fractio autem haec continua aequationis propositae exhibet integrale huius conditionis, vt posito $x = 0$, fiat $cxy = 1$, siquidem $m+2 > 0$; at si $m+2 < 0$, tum integrale hanc tenet legem vt posito $x = \infty$ fiat $cxy = 1$.

§. 77. Ponamus esse $b = 0$; atque $a = ne$, ac post integrationem poni $x = 1$; proueniet ex hac aequatione $ncx^m dx + cy^2 dx + dy = 0$ sequens fractio continua, qua valor ipsius y definietur, casu quo ponitur $x = 1$:

$$y = \frac{1}{c} + \cfrac{n}{-\frac{(m+3)}{c} + \cfrac{n}{\frac{(2m+5)}{c} + \cfrac{n}{-\frac{(3m+7)}{c} + \cfrac{n}{\frac{(4m+9)}{c} + \text{etc.}}}}}$$

siue

siue ponatur $c = \frac{1}{\varkappa}$, ex aequatione $n x^m dx + y^2 dx + \varkappa dy = 0$, valor ipsius y casu quo $x = 1$, ita se hebebit

$$y = \varkappa + \cfrac{n}{-(m\varkappa+3\varkappa) + \cfrac{n}{(2m\varkappa+5\varkappa) + \cfrac{n}{-(3m\varkappa+7\varkappa) + \text{etc.}}}}$$

seu

$$y = \varkappa - \cfrac{n}{m\varkappa+3\varkappa - \cfrac{n}{2m\varkappa+5\varkappa - \cfrac{n}{3m\varkappa+7\varkappa - \cfrac{n}{4m\varkappa+9\varkappa - \text{etc.}}}}}$$

§. 78. Si ergo proposita sit ista fractio continua

$$b + \cfrac{1}{b+\beta + \cfrac{1}{b+2\beta + \cfrac{1}{b+3\beta + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}$$

erit $\varkappa = b$; $n = -1$; $(m+2)b = \beta$ seu $m = \frac{\beta}{b} - 2$. Quare huius fractionis continuae valor erit valor ipsius y casu quo $x = 1$, ex hac aequatione $x^{\frac{\beta-2b}{b}} dx = y^2 dx + b dy$, integratione ita instituta, vt posito $x = 0$, fiat $x y = b$. cum sit $m + 2 > 0$, si quidem $\frac{\beta}{b}$ sit numerus affirmatiuus.

DETERMINATIO CALORIS ET FRIGORIS GRADVVM PRO SINGVLIS TERRAE LOCIS AC TEMPORIBVS.

§. 1.

Tab. I. Hoc loco in caloris et frigoris gradus a priori inquirere constitui, quatenus a sola actione solis proficiscuntur: et hanc ob rem neque ad ventos, neque ad tempestatum diuersitatem, quibus actio solis vehementer turbatur, respicio. In hoc itaque potissimum ero occupatus, vt remotis istis impedimentis pro quouis terrae loco et tempore gradum caloris frigorisue definiam a sola actione solis oriundum. Cum igitur ad hoc expediendum necesse sit gradum caloris quendam fixum et constantem adhibere, huius loco eum assumo, qui in ipsa solis superficie perpetuo viget, quemque constanter littera c designabo.

§. 2. Ad effectum autem solis in calore producendo definiendum concipio corpus plana superficie praeditum perpetuo soli ita expositum esse, vt radii solares normaliter in eius superficiem planam incidant. Sensim igitur istud corpus a sole calefiet, atque continuo maiorem caloris gradum recipiet, donec tandem summum gradum acquisierit, quem si semel fuerit consecutum, eum in aeternum sit conseruaturum. Gradum istum caloris appellabo vltimum siue naturalem caloris gradum, quem his circumstantiis exerere valet.

§. 3. Cum igitur calor a radiis solis proficiscatur hique diuergant ita, vt in duplicata ratione distantiarum a sole fiant rariores; etiam vltimus caloris gradus, quem sol superficiei planae directe oppositae inducere potest, tenebit rationem reciprocam duplicatam distantiarum a sole. Quare si distantia huius corporis a sole ponatur $= s$, et semidiameter solis $= 1$, erit vltimus caloris gradus $= \frac{c}{ss}$; quoniam, si corpus in ipsa solis superficie seu in distantia 1 ab eius centro esset positum, eundem caloris gradum acciperet, qui in superficie solis existit.

§ 4. At si radii solis oblique in superficiem corporis cadant, tum vtique tantus calor non generabitur, quam praecedente casu, quo radii solis normaliter in superficiem incidebant. Primo quidem satis perspicuum est, si solis radii tantum lambant superficiem, seu si angulus incidentiae radiorum euanescat, tum effectum omnino nullum a sole produci posse. Ex quo satis tuto assumi posse videtur, gradum caloris vltimum, quem superficies recipit esse sinui anguli incidentiae proportionalem; quando quidem superficies illuminatur. Nam si sol infra horizontem versetur, tum sinus incidentiae fieret negatiuus non autem videtur, effectum solis vnquam in negatiuum abire posse. Quare, si sol sub horizonte existit, eius effectus aliter spectari nequit, ac si ipsum horizontem occuparet, hoc est vltimus gradus caloris semper erit $= 0$, quantumuis profunde sol sub horizonte sit submersus.

§. 5. Si ergo sumatur in terra locus quicunque, definiri poterit gradus caloris, quem radii solis in data obliquitate incidentes tandem inducerent, si quidem sol perpetuo eundem situm respectu istius loci retineret. Namque sit altitudinis solis supra horizontem illius loci sinus $= v$, posito sinu toto $= 1$, erit vltimus caloris gradus, cuius hic locus est capax $= \frac{cv}{ss}$, denotante semper s di-

L 2 stantiam

ſtantiam ſolis a terra, exiſtente ſemidiametro ſolis $= 1$; ſiue etiam ſpectari poteſt s tanquam cotangens ſemidiametri ſolis apparentis. Vel ſi tangens ſemidiametri ſolis apparentis ponatur $= \varkappa$, erit vltimus gradus caloris $= c\varkappa^2 v$: ſi quidem ſol verſetur ſupra horizontem: at ſi ſol ſub horizonte lateat, gradus iſte erit $= 0$, qui eſt extremus ſummusque frigoris gradus.

§. 6. Hoc igitur modo vbique terrarum calor foret comparatus, ſi ſol reſpectu terrae quieſceret, ac perpetuo eundem ſitum retineret. Scilicet in iis regionibus in quibus ſol appareret, foret aliquis caloris gradus, isque eo maior, quo magis ſol fuerit eleuatus. In altero autem hemisphaerio, a ſole averſo, ſummum perpetuo regnaret frigus, niſi quatenus calor partis oppoſitae influeret. Hic vero ab iſtiusmodi circumſtantiis cogitationes prorſus abſtineo, neque alium caloris fontem praeter ſolem, conſidero. Hancque ob rem omnem materiam terreſtrem cuiusvis gradus caloris et frigoris aeque ſuſceptibilem pono, ita vt quouis tempore in eum ſtatum conſtituatur, quem regulae requirunt.

§. 7. Si igitur terrae regio iam illum ipſum habeat caloris gradum, quem ſol ipſi communicare conetur, quemque actu tandem induceret, niſi eum iam haberet; tum nulla eueniet mutatio caloris in ea regione, ſed ille ipſe gradus conſeruabitur. At ſi praeſens regionis calor vel maior ſit vel minor, quam calor naturalis ſitui ſolis reſpondens, tum paullatim ille calor vel diminuetur vel augebitur, donec tandem calori ſolis naturali aequalis fiat. Veriſimile autem videtur, caloris illius vel augmenta vel decrementa, quae dato tempore gignuntur, differentiae calorum

calorum solis scilicet naturalis et proprii, quem corpus habet, esse proportionalia. Cum enim aequalitas amborum caloris graduum tanquam finis sit proposita, eo fortior ad eam obtinendam erit actio, quo maior fuerit inaequalitas.

§. 8. Si ergo ponamus in regione terrae quadam caloris praesentis gradum esse z; atque solem in altitudine supra horizontem versari, cuius sinus sit $= v$; erit calor naturalis a sole oriundus $= c\varkappa^2 v$, denotante c gradum caloris in superficie solis et $\varkappa$ tangentem semidiametri apparentis solis. Tempusculo igitur dt calor regionis z incrementum accipiet proportionale excessui $c\varkappa^2 v - z$, siquidem fuerit $c\varkappa^2 v > z$, contrario enim casu calor z decrementum patietur. Hinc ergo erit $dz = \alpha dt(c\varkappa^2 v - z)$: ac si sol perpetuo istum situm obtineret, foret integrando $\alpha t = l\frac{C}{c\varkappa^2 v - z} = l\frac{c\varkappa^2 v - f}{c\varkappa^2 v - z}$, si f denotet gradum caloris, qui in ea regione fuit, principio a quo tempus t computatur.

§. 9. His nunc praemissis hypothesibus pro quouis terrae loco gradum caloris difinire conabor ad quamlibet horam dati diei. Sit igitur HOR horizon loci propositi, Z zenith, P polus mundi borealis, et AOB parallelus, in quo sol die proposito mouetur. Sit eleuationis poli PR sinus $=$ P cosinus $= p$, posito sinu toto $= 1$; sinus declinationis borealis solis $=$ Q, cosinus $= q$, sinusque Q abibit in sui negatiuum, si declinatio solis sit australis. Ponamus solem in S versari, angulumque APS esse $= t$, qui angulus exprimit tempus, quo sol post transitum per meridianum ex A in S peruenit; an- Tab. I. fig. 1.

gulique APS ſinus ſit $= x$ coſinus $= y$; erit $dt = \frac{dx}{y} = \frac{-dy}{x}$ ob $xx + yy = 1$.

§. 10. Quoniam nunc in triangulo ſphaerico PZS dantur primo angulus ZPS, cuius ſinus eſt x et coſinus y; deinde latus PZ, cuius ſinus eſt p, coſinus P; et tertio latus PS cuius ſinus eſt q, coſinus Q, reperietur lateris ZS coſinus $= pqy + PQ$; qui ſimul eſt ſinus altitudinis ſolis ſuper horizonte, dum in S verſatur. Solis igitur occaſus continget in puncto O, exiſtente anguli APO coſinu $= \frac{-PQ}{pq}$. Ponamus autem eſſe angulum ipſum APO $= g$, quo ſemiſſis temporis diurni deſignabitur atque poſito angulo 180. grad. $= \pi$, erit $\pi - g$ tempus dimidiae noctis.

§. 11. Inquiramus nunc primum in varietatem caloris regionis propoſitae, quamdiu ſol ſupra horizontem verſatur, ſitque tempore t poſt meridiem, quo ſol in S reperitur, gradus caloris in loco propoſito $= z$. Quoniam vero hoc tempore eſt ſinus altitudinis ſolis $= pqy + PQ$, erit calor ſolis naturalis $= c\varkappa^2 (pqy + PQ)$. Quamobrem tempuſculo dt, quod per angulum SPs repraeſentatur, calore z incrementum capiet dz tantum, vt ſit $dz = \alpha dt\, (c\varkappa^2 pqy + c\varkappa^2 PQ - z)$, in qua aequatione α quantitatem quandam conſtantem denotat, per obſeruationes determinandam.

§. 12. Aequatio differentialis inuenta $dz = \alpha dt\, (c\varkappa^2 pqy + c\varkappa^2 PQ - z)$ reducatur ad hanc formam $dz + \alpha z dt = \alpha c\varkappa^2 dt\, (pqy + PQ)$ quae multiplicata per $e^{\alpha t}$ denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$, fiet integrabilis; erit enim integrale $e^{\alpha t} z =$

$\alpha c\varkappa^2$

$\alpha c\kappa^2 \int e^{\alpha t} dt (pqy + PQ) = c\kappa^2 PQ e^{\alpha t} + \alpha c\kappa^2 pq \int e^{\alpha t} dx$ ob $y dt = dx$. Cum autem sit $t = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ erit $\int e^{\alpha t} dx = \int e^{\frac{\int \alpha dx}{\sqrt{(1-xx)}}} dx = \frac{e^{\alpha t}(x + \alpha \sqrt{(1-xx)})}{1+\alpha\alpha}$. Addita ergo indefinita constante habebitur $e^{\alpha t} z = Cc\kappa^2 pq + c\kappa^2 PQ e^{\alpha t} + \frac{\alpha c\kappa^2 pq e^{\alpha t}(x+\alpha y)}{1+\alpha\alpha}$, atque calor quaesitus $z = e^{-\alpha t} Cc\kappa^2 pq + c\kappa^2 PQ + \frac{\alpha c\kappa^2 pq (x+\alpha y)}{1+\alpha\alpha}$.

§. 13. Hinc igitur reperietur calor meridianus loci propositi faciendo $t = 0$, quo facto erit $x = 0$, et $y = 1$. Quare tempore meridiei erit calor $= Cc\kappa^2 pq + c\kappa^2 PQ + \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}$. Si detur calor meridianus, isque ponatur $= f$, determinabitur inde constans quantitas C, quae per integrationem est ingressa, eritque $Cc\kappa^2 pq = f - c\kappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}$; vnde ex dato calore meridiano definietur calor pro quauis hora eiusdem diei, ita vt sole in S existente post meridiem sit calor regionis propositae $z = e^{-\alpha t} f + c\kappa^2 PQ(1 - e^{-\alpha t}) + \frac{\alpha c\kappa^2 pq(x+\alpha y)}{1+\alpha\alpha} - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq e^{-\alpha t}}{1+\alpha\alpha}$.

§. 14. Inuestigemus nunc gradum caloris, qui fuit eodem die, cum sol est ortus; poni debebit $t = -g$, eritque pariter ac in occasu $y = \frac{-PQ}{pq}$ at $x = -\frac{\sqrt{(p^2q^2 - P^2Q^2)}}{pq}$, ob angulos ante meridiem negatiuos. Ex quibus prodibit calor, quando sol oritur $= e^{\alpha g} f - c\kappa^2 PQ(e^{\alpha g} - 1) - \frac{\alpha c\kappa^2(\alpha PQ + \sqrt{(p^2q^2 - P^2Q^2)})}{1+\alpha\alpha} - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq e^{\alpha g}}{1+\alpha\alpha} = e^{\alpha g}(f - c\kappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) + \frac{c\kappa^2 PQ - \alpha c\kappa^2 \sqrt{(p^2q^2 - P^2Q^2)}}{1+\alpha\alpha}$. At si anguli g sinus ponatur $= m$, cosinus $= n$; erit calor tempore ortus solis $= e^{\alpha g}(f + c\kappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c\kappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{c\kappa^2 npq - \alpha c\kappa^2 mpq}{1+\alpha\alpha}$.

§. 15.

§. 15. Perueniet nunc ſol ad occaſum in O fietque $t = g$; $y = n = \frac{-PQ}{pq}$ et $x = m = \frac{\sqrt{(p^2q^2 - P^2Q^2)}}{pq}$, ideoque $PQ = -npq$. Hinc igitur tempore occaſus ſolis prodibit calor loci propoſiti $= e^{-\alpha g}(f + c\varkappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{c\varkappa^2 npq + \alpha c\varkappa^2 mpq}{1+\alpha\alpha}$. Maximus autem hoc die calor erit tum, quando fit $z = c\varkappa^2 pqy + c\varkappa^2 PQ$; quippe quo tempore erit $dz = 0$. Subſtituto autem hoc valore in aequatione inuenta prodibit $e^{-\alpha t}(f - c\varkappa^2 PQ \frac{-\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) = \frac{c\varkappa^2 pq(y - \alpha x)}{1+\alpha\alpha}$; ex qua valor anguli t erutus et in tempus conuerſus praebebit momentum maximi caloris a meridie computando.

§. 16. Cum igitur calor tempore ſolis occaſus ſit repertus, quem ponamus breuitatis gratia $= b$, quantum iſte calor ſequente nocte diminuatur, inueſtigemus. Verſetur itaque ſol poſt occaſum in V, et ponatur angulus $OPV = t$, et calor tum ſit $= z$, dum ergo ſol per arculum Vv progreditur erit decrementum caloris $dz = -\alpha z\, dt$, hincque $l\frac{b}{z} = \alpha t$; ex quo fiet $z = e^{-\alpha t} b$. Sequente igitur die, cum ſol iterum orietur, prodibit calor $= e^{-2\alpha(\pi - g)} b$. Per totam ergo noctem calor diminuetur, vnde quauis nocte frigus ſummum erit, quando ſol oritur.

§. 17. Cum igitur primo die tempore ortus ſolis gradus caloris fuiſſet $= e^{\alpha g}(f + c\varkappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{c\varkappa^2 pq(n + \alpha m)}{1+\alpha\alpha}$; die ſequente calor tempore ortus ſolis erit $= e^{\alpha g - 2\alpha\pi}(f + c\varkappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{e^{-2\alpha(\pi - g)} c\varkappa^2 pq(n - \alpha m)}{1+\alpha\alpha}$; ſi quidem ſol ponatur interea eandem declinationem conſeruare. At ſi hoc eodem ſequente die calor tempore meridiei ponatur Φ, debebit calor tempore ortus eiusdem diei eſſe $= e^{\alpha g}(\Phi + c\varkappa^2 npq - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{c\varkappa^2 pq(n + \alpha m)}{1+\alpha\alpha}$ vnde prodibit

$\Phi +$

$$\Phi + cx^2 npq - \frac{\alpha^2 cx^2 pq}{1+\alpha\alpha} - \frac{e^{-\alpha g} cx^2 pq(n+\alpha m)}{1+\alpha\alpha} = e^{-2\alpha\pi}$$
$$(f + cx^2 npq - \frac{\alpha^2 cx^2 pq}{1+\alpha\alpha}) - \frac{e^{\alpha g - 2\alpha\pi} cx^2 pq(n-\alpha m)}{1+\alpha\alpha}$$

§. 18. Si ſol perpetuo eandem declinationem conſeruaret, tum quoque perpetuo eadem diei hora idem gradus caloris haberetur. Hoc igitur caſu foret $\Phi = f$, atque calor tempore ortus ſolis primo die aequalis calori ſequentis diei eodem tempore. Hinc igitur erit $e^{\alpha g}(1 - e^{-2\alpha\pi})(f + cx^2 npq - \frac{\alpha^2 cx^2 pq}{1+\alpha\alpha}) = \frac{cx^2 pq(n+\alpha m - e^{-2\alpha(\pi-g)}(n-\alpha m))}{1+\alpha\alpha}$ atque calor meridianus, qui erit conſtans, definietur $f = \frac{cx^2 pq(e^{-\alpha g}(n+\alpha m) - e^{\alpha g - 2\alpha\pi}(n-\alpha m))}{(1-e^{-2\alpha\pi})(1+\alpha\alpha)} - cx^2 npq + \frac{\alpha^2 cx^2 pq}{1+\alpha\alpha}$. Sub aequatore ergo, ob $P = 0$, et $p = 1$, itemque $m = 1$ et $n = 0$, hincque $g = \frac{\pi}{2}$ foret conſtans calor meridianus $f = \frac{\alpha c x^2 q e^{-\frac{\alpha\pi}{2}}}{(1+\alpha^2)(1-e^{-\alpha\pi})} + \frac{\alpha^2 cx^2 q}{1+\alpha\alpha}$.

§. 19. Formulae iſtae tantopere ſunt compoſitae et perplexae; vt ex iis vix quicquam concludi queat. Huius autem incommodi ratio in eo eſt poſita, quod amplitudo ortiua et occidua in eas ingrediatur, atque lex continuitatis ſit interrupta; quoniam pro nocte alio ſum viſus calculo alio pro die. Quamobrem vt aliquid ad vtilitatem deriuare queamus, neceſſe eſt aliquantum a veri ſimilitudine recedere, atque continuam legem aſſumere, ſecundum quam gradus caloris mutentur. Ita cum calores ſolis ſupra horizontem exiſtentis ſint ſinibus altitudinum proportionales; eadem lege oportebit calorem ſolis naturalem ſub horizonte latentis negatiuum ſtatuere, ac ſinui depresſionis ſub horizonte proportionalem.

§. 20. Hac autem admissa hypothesi facile perspicitur conclusiones inde deducendas veritati minus fore consentaneas, eo quod soli hoc pacto, quando sub horizonte versatur, non solum omnis effectus ad calorem generandum adimatur, sed etiam vis contraria frigorifica tribuatur. Qua quidem in re experientia aduersari videtur, cum sol sub horizonte calori praesenti plus nocere non possit, quam si prorsus ab esset; at dum ipsum horizontem occupat, iam perinde est, ac si prorsus foret sublatus. Quicquid autem sit, conueniet ex hac hypothesi consequentias formare, quae nihilominus aliquam vtilitatem habere poterunt, cum iam ante pateat, qua in parte conclusiones ab experientia dissentire debeant.

§. 21. Quoniam hoc pacto continuitatis lex obseruatur, ex aequatione supra inuenta $z = e^{-\alpha t}(f - c\varkappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) + c\varkappa^2 PQ + \frac{\alpha c\varkappa^2 pq(x+\alpha y)}{1+\alpha^2}$, quae praebet calorem post meridiem tempore t, existente calore meridiano $= f$, etiam gradus caloris nocturni poterunt determinari. Ita sequente media nocte ob $t = \pi$ et $x = 0$, $y = -1$, erit gradus caloris $= e^{-\alpha\pi}(f - c\varkappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) + c\varkappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}$. Sequentis autem diei meridie erit calor $= e^{-2\alpha\pi}(f - c\varkappa^2 PQ - \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}) + c\varkappa^2 PQ + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha}$, ob $t = 2\pi$ et $x = 0$, $y = 1$.

§. 22. Incrementum ergo caloris, a meridie primi diei ad meridiem sequentem erit $= (1 - e^{-2\alpha\pi})(c\varkappa^2 PQ + \frac{\alpha^2 \varkappa^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$. Si ergo sol perpetuo eandem declinationem retineret, foret etiam quotidie eadem semper caloris conditio, atque meridianus calor constans. Hoc itaque casu erit calor meridianus $f = c\varkappa^2(PQ + \frac{\alpha^2 pq}{1+\alpha\alpha})$. Singulis ergo

diebus

diebus, cum maximus calor incidat, quando est $e^{-\alpha t}(f - cx^2 PQ - \frac{\alpha^2 cx^2 pq}{1+\alpha\alpha}) = \frac{cx^2 pq(y-\alpha x)}{1+\alpha\alpha}$ incidet nostro casu maximus calor post meridiem, quando fit $y = \alpha x$ seu $\frac{x}{y} = \frac{1}{\alpha}$: atque ipse calor maximus erit $= cx^2(PQ + \frac{\alpha pq}{\sqrt{(1+\alpha\alpha)}}$; hoc est quando sol iam tantum meridianum est transgressus, vt sit anguli APS tangens $= \frac{1}{\alpha}$. Quare cum maximus calor circiter in horam tertiam pomeridianam incidere obseruetur, idque tum quando aestas maxime est aequabilis, erit proxime $\alpha = 1$.

§. 23. Cum igitur, sole eandem declinationem conseruante, incrementum caloris meridiani vno die sit $= (1 - e^{-2\alpha\pi})(cx^2 PQ + \frac{\alpha^2 cx^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$, erit incrementum duobus diebus acquisitum $= (1 - e^{-4\alpha\pi})(cx^2 PQ + \frac{\alpha^2 cx^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$, atque generaliter incrementum n diebus acquisitum erit $= (1 - e^{-2n\alpha\pi})(cx^2 PQ + \frac{\alpha^2 cx^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$. Cum igitur sol tempore vnius diei circiter $\frac{1}{365}$ partem eclipticae percurrat; n diebus conficiet $\frac{n}{365}$ partes; hoc est angulum $\frac{2\pi n}{365}$; denotante π angulum 180. graduum. Tempore ergo, quo sol eclipticae arculum ds percurrit, ob $n = \frac{365 ds}{2\pi}$, erit incrementum caloris meridiani $= (1 - e^{-365\alpha ds})(cx^2 PQ + \frac{\alpha^2 cx^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$; puta in eadem eleuatione poli, vbi tum est meridies.

§. 24. Quoniam autem propter exponentem $365\alpha ds$ infinite paruum est $e^{-365\alpha ds} = 1 - 365\alpha ds$, erit, dum sol per arculum eclipticae ds progreditur, existente tota eclipticae circumferentia $= 2\pi$, incrementum caloris meridiani $= 365\alpha ds(cx^2 PQ + \frac{\alpha^2 cx^2 pq}{1+\alpha\alpha} - f)$; in qua expressione denotat α numerum vnitati proxime aequalem; x

 gradum

gradum caloris constantem in superficie solis; P eleuationis poli in loco proposito sinum, Q sinum declinationis solis borealis; atque p et q cosinus sinibus P et Q respondentes. Denique $\varkappa$ est tangens semidiametri solis apparentis, atque f denotat ipsum calorem meridianum tempore oblato.

Tab. I. fig. 2. §. 25. Denotet ergo AVB aequatorem, et EVL ecclipticam, interfectio V aequinoctium vernum atque P polum loci propositi. Versetur sol in S post aequinoctium vernum, et ponatur arcus VS $= s$ existente tota ecclipʼtica $= 2\pi$; atque sit arcus VS sinus $= u$; angulique SVT, qui est 23° 29′, sinus $= m$; calor meridianus autem, dum sol in S versatur $= r$. His positis erit Q $= mu$, et $q = \surd(1-m^2uu)$; ac dum sol per arculum ds progreditur erit incrementum caloris meridiani $dr = 365\,\alpha ds\,(c\varkappa^2 m\mathrm{P}u + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 p\surd(1-m^2uu)}{1+\alpha\alpha} - r)$ existente $ds = \frac{du}{\surd(1-uu)}$. Ponatur breuitatis gratia n pro numero 365 α erit $dr + nr\,ds = (c\varkappa^2 m\mathrm{P}u + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 p\surd(1-m^2uu)}{1+\alpha\alpha})\,nds$.

§. 26. Postrema haec aequatio integrata dabit $c^{ns}r = c\varkappa^2 n\int e^{ns}ds\,(m\mathrm{P}u + \frac{\alpha^2 p\surd(1-m^2uu)}{1+\alpha\alpha}) = \frac{c\varkappa^2 mn\mathrm{P}}{1+nn}e^{ns}(nu - \surd(1-uu)) + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 np}{1+\alpha\alpha}\int e^{ns}ds\,\surd(1-m^2u^2)$. Ad integrale posterioris membri inueniendum oportet nosse, esse $\int e^{ns}u^\nu$

$$ds = \frac{e^{ns}u^{\nu-1}(nu - \nu\surd(1-uu)) + \nu(\nu-1)\int e^{ns}u^{\nu-2}ds}{nn+\nu\nu};$$

vnde est $\int e^{ns}ds = \frac{e^{ns}}{n}$; $\int e^{ns}u^2 ds = \frac{e^{ns}u(nu - 2\surd(1-uu)) + \frac{2}{n}e^{ns}}{4+nn}$

$$= \frac{e^{ns}(2 + n^2u^2 - 2nu\surd(1-uu))}{n(4+nn)};\ \int e^{ns}u^4\,ds =$$

e^{ns}

$$\frac{e^{ns}u^3(uu-4\surd(1-uu)) + \frac{12e^{ns}}{n(4+nn)}(2+n^2u^2-2nu\surd(1-uu))}{16+nn}$$

$$= \frac{e^{ns}(24+12n^2u^2+4n^2u^4+n^4u^4-4nu(6+4uu+nnuu)\surd(1-uu))}{n(4+nn)(16+nn)}$$

atque ita porro.

§. 27. Quoniam ergo est $\surd(1-m^2u^2) = 1 - \frac{m^2u^2}{2} - \frac{m^4u^4}{8}$ — etc. erit $\int e^{ns}ds\,\surd(1-m^2u^2) = e^{ns}\Big(\frac{1}{n} - \frac{mm(2+nnuu-2nu\surd(1-uu))}{2n(4+nn)} - \frac{m^4}{8}\cdot$

$\frac{(24+12n^2u^2+4n^2u^4+n^4u^4-4nu(6+4u+nnuu)\surd(1-uu))}{n(4+nn)(16+nn)}$

— etc.$\Big)$ + const. Ponamus $s = 0$, erit $u = 0$ et $\surd(1-uu) = 1$; fietque calor meridianus in aequinoctio verno $r = C - \frac{c\varkappa^2 mnP}{1+nn} + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 np}{1+\alpha\alpha}\Big(\frac{1}{n} - \frac{mm}{n(4+nn)} - \frac{3m^4}{n(4+nn)(16+nn)} - \frac{45m^6}{n(4+nn)(16+nn)(36+nn)}$ — etc. At posito $s = 2\pi$, r denotabit calorem meridianum in sequente aequinoctio verno, ita vt sit $e^{2n\pi}r = C - \frac{c\varkappa^2 mnPe^{2n\pi}}{1+nn} + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 npe^{2n\pi}}{1+\alpha\alpha}$ $\Big(\frac{1}{n} - \frac{m^2}{n(4+nn)} - \frac{3m^4}{n(4+nn)(16+nn)}$ — etc.

§. 28. Cum autem post innumerabiles reuolutiones solis perpetuo idem calor meridianus in aequinoctium vernum incidere debeat, oportebit quantitatem constantem C esse $= 0$; si pro loco proposito ponatur calor meridianus in aequinoctio verno $= a$, erit $a = \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 p}{1+\alpha\alpha}$ $\Big(1 - \frac{m^2}{4+n^2} - \frac{3m^4}{(4+n^2)(16+n^2)}$ — etc.$\Big) - \frac{c\varkappa^2 mnP}{1+nn}$. Atque dum sol in loco quocunque S eclipticae versatur, erit calor meridianus $r = \frac{\alpha^2 c x^2 p}{1+\alpha\alpha}\left(1 - \frac{m^2(2+n^2u^2-2nu\surd(1-uu))}{2(4+nn)} - \frac{m^4(24+\ldots n^2u^2+4n^2u^4+n^4u^4}{8(4+nn)}\right.$ $\left. - \frac{4nu(\ldots+\ldots v+nnuu)\surd(1-uu)}{(16+nn)}\right) + \frac{cx^2 mnP(nu-\surd(1-uu))}{1+nn}$.

§. 29. Cum n ſit numerus valde magnus, quippe proxime aequalis numero 365, ob $\alpha = 1$, atque m numerus vnitate minor, ſcilicet $= 0,3982823$. pro dato terrae loco ad quemuis anni cuiusque diem proxime poterit definiri calor meridianus. Aequinoctio nimirum verno erit calor meridianus $\frac{\alpha^2 cx^2 p}{1+\alpha\alpha} - \frac{cx^2 mnP}{1+nn}$: aequinoctio vero autumnali erit calor meridianus $= \frac{\alpha^2 cx^2 p}{1+\alpha\alpha} + \frac{cx^2 mnP}{1+nn}$. At ſolſtitio aeſtiuo habebitur calor meridianus $= \frac{\alpha^2 cx^2 p}{1+\alpha\alpha}\left(1 - \frac{m^2n^2}{2(4+nn)} - \frac{m^4n^4}{8(4+nn)(16+nn)} - \text{etc.}\right) + \frac{cx^2 mn^2 P}{1+nn} = \frac{\alpha^2 cx^2 p\surd(1-mm)}{1+\alpha\alpha} + \frac{cx^2 mn^2 P}{1+nn}$; atque ſolſtitio hyemali erit calor meridianus $= \frac{\alpha^2 cx^2 p}{1+\alpha\alpha}\left(1 - \frac{m^2n^2}{2(4+nn)} - \text{etc.}\right) - \frac{cx^2 mn^2 P}{1+nn} = \frac{\alpha^2 cx^2 p\surd(1-mm)}{1+\alpha\alpha} - \frac{cx^2 mn^2 P}{1+nn}$, neglectis terminis nimium exiguis.

§. 30. Sub aequatore ergo eſt calor meridianus in aequinoctio verno $= \frac{cx^2}{2}$, in ſolſtitio aeſtiuo $= \frac{cx^2}{2} - \frac{cx^2 m^2 n^2}{4(4+nn)}$; in aequinoctio autumnali $= \frac{cx^2}{2}$; et in ſolſtitio hyemali $= \frac{cx^2}{2} - \frac{cx^2 m^2 n^2}{4(4+nn)}$. At ſub eleuatione poli 60°; erit calor meridianus in aequinoctio verno $\frac{cx^2}{4} - \frac{cx^2 mn\surd 3}{2(1+nn)}$; in ſolſtitio aeſtiuo $= \frac{cx^2}{4} - \frac{cx^2 m^2 n^2}{8(4+nn)} + \frac{cx^2 mn^2\surd 3}{2(1+nn)} = \frac{cx^2\surd(1-mm)}{4} + \frac{cx^2 mn^2\surd 3}{2(1+nn)}$; in aequinoctio autumnali $= \frac{cx^2}{4} + \frac{cx^2 mn\surd 3}{2(1+nn)}$, et in ſolſtitio hyberno $= \frac{cx^2}{4} - \frac{cx^2 m^2 n^2}{8(4+nn)} - \frac{cx^2 mn^2\surd 3}{2(1+nn)} = \frac{cx^2\surd(1-mm)}{4} - \frac{cx^2 mn^2\surd 3}{2(1+nn)}$. Sub ipſo denique polo boreali erit calor in aequinoctio verno $= \frac{-cx^2 mn}{1+nn}$; in ſolſtitio aeſtiuo $= \frac{cx^2 mn^2}{1+nn}$; in aequinoctio autumnali $= \frac{cx^2 mn^2}{1+nn}$; atque in ſolſtitio hyberno $= \frac{-cx^2 mn^2}{1+nn}$: in quibus formulis denotat $n = 365$, cum poſuerimus $\alpha = 1$.

§. 31.

§. 31. Ex formula inuenta intelligitur, calorem meridianum non fore maximum ipso solstitio aestiuo, neque minimum solstitio hyberno; sed aliquantum post has tempestates incidere. Quod tempus vt definiatur pro quavis eleuatione poli, quaeratur, quando fiat $dr = 0$. Hoc autem euenit, cum sit $r = cx^2 mPu + \frac{\alpha^2 cx^2 p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{1+\alpha\alpha}$: erit ergo $cx^2 mPu + \frac{\alpha^2 cx^2 p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{1+\alpha\alpha} = \frac{\alpha^2 cx^2 p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{1+\alpha\alpha} + \frac{cx^2 mnP(nu-\sqrt{(1-uu)})}{1+nn}$; est enim proxime $r = \frac{\alpha^2 cx^2 p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{1+\alpha\alpha} + \frac{\alpha^2 x^2 pm^2 u\sqrt{(1-uu)}}{(1+\alpha^2)n\sqrt{(1-m^2u^2)}} + \frac{cx^2 mnP(nu-\sqrt{(1-uu)})}{1+nn}$; generaliter sumendis iis tantum terminis, in quibus n plurimas habet dimensiones.

§. 32. Ad tempus igitur definiendum, quo calor meridianus est maximus, ista habetur aequatio $u = -n\sqrt{(1-uu)}$ et $\frac{u}{\sqrt{(1-uu)}} = -n$ ergo $u = \frac{n}{\sqrt{(1+nn)}}$ et $\sqrt{(1-uu)} = \frac{1}{\sqrt{(1+nn)}}$. Maximus ergo calor meridianus, pariter ac maximum frigus incident post solstitia; at discrimen ne vnicum quidem diem adaequat, ita vt satis tuto ipsa solstitia pro momentis, in quibus calor meridianus tum sit maximus tum minimus, haberi queant. Quodsi cum obseruationibus minus congruat, id hypothesi a veritate nimium aberranti est tribuendum. Vi hypothesis enim in solstitio aestiuo calor per noctem minime diminuitur, per diem autem maxime augetur.

§. 33. Quoniam calor meridianus sub aequatore non multum variatur per anni tempestates, ex eo commodissime calor in superficie solis poterit determinari. Denotet enim i maximum calorem meridiunum sub aequatore obseruatum, qui cum sit $= \frac{cx^2}{2}$, erit $c = \frac{2i}{x^2}$. At cum x sit tangens semidiametri solis apparentis, si pro x sumatur

matur tangens $16'$, fiet $c = 92328\, i$; ita vt calor in superficie solis propemodum sit centies millies maior, quam summus calor tempore meridiei, sub ipso aequatore. Verum vt ratio multiplicationis caloris pateat, notandum est, summum calorem meridianum sub aequatore duplo maiorem esse, quam medium gradum caloris, inter gradus caloris meridiani aequinoctialis verni et autumnalis, sub eleuatione poli $60°$.

§. 34. Qui formulas datas contemplabitur, mox perspiciet, summum calorem meridianum neque sub aequatore neque sub polis deprehensum iri. Quamobrem operae pretium erit illas regiones terrae determinare, in quibus tempore solstitii aestiui maximus obseruari debeat calor. Calculo vero subducto reperietur harum regionum eleuatio poli 41. graduum: fieri enim debet $\frac{P}{p} = \frac{2m}{\sqrt{(1-mm)}}$. His vero regionibus erit calor meridianus in solstitio aestiuo $= \frac{cx^2\sqrt{(1+3mm)}}{2} = \frac{1,215\, cx^2}{2}$, cum summus calor meridianus sub aequatore sit $= \frac{cx^2}{2}$.

§. 35. Hinc igitur sequentem tabellam deduxi, in qua pro variis poli eleuationibus conspiciuntur gradus caloris meridiani, tempore tam aequinoctiorum quam solstitiorum.

Calor

Calor meridianus.

Eleuatio Poli.	Aeq. Verno	Solstit. Aest.	Aeq. Aut.	Solstit. hyb.
0°	0, 500	0, 459	0, 500	0, 459
10°	0, 492	0, 521	0, 492	0, 382
20°	0, 469	0, 567	0, 470	0, 295
30°	0, 432	0, 596	0, 434	0, 198
40°	0, 382	0, 607	0, 384	0, 095
50°	0, 321	0, 600	0, 322	-0, 010
60°	0, 249	0, 574	0, 251	-0, 115
70°	0, 170	0, 531	0, 172	-0, 218
80°	0, 085	0, 472	0, 088	-0, 313
90°	-0, 001	0, 398	0, 001	-0, 398

§. 36. Cum autem hac theoria pro quouis loco solis in ecliptica detur calor meridianus, r ita vt sit $r = \frac{m^2 p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2} + \frac{cx^2 pm^2 u\sqrt{(1-uu)}}{2n\sqrt{(1-m^2u^2)}} + \frac{cx^2 mnP(nu-\sqrt{(1-uu)})}{1+nn}$. Hoc ergo die tempore t post meridiem erit calor $= e^{-\alpha t} cx^2 \left(\frac{pm^2u\sqrt{(1-uu)}}{2n\sqrt{(1-m^2u^2)}} - \frac{mnP\sqrt{(1-uu)}}{1+nn}\right) + cx^2 mPu + \frac{cx^2 p(x+y)\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2}$ seu neglectis terminis qui per n sunt diuisi erit calor iste $Z = cx^2 \left(mPu + \frac{p(x+y)\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2}\right)$; vnde sequitur maximum cuiusuis diei calorem incidere in horam tertiam pomeridianam: ideo quia posuimus $\alpha = 1$. Nam si α maius foret, maximus calor propius ad meridiem incideret.

§. 37. Quamobrem si longitudinis solis sinus ponatur $= u$; atque P designet sinum eleuationis poli, p eius cosinum; ac m sinum inclinationis eclipticae ad aequatorem: erit pro dato loco

	Calor.
Meridie	$cx^2(mPu + \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2})$
hora 3	$cx^2(mPu + \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{\sqrt{2}})$
hora 6	$cx^2(mPu + \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2})$
hora 9	$cx^2(mPu + 0)$
hora 12	$cx^2(mPu - \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2})$
mane	
hora 3	$cx^2(mPu - \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{\sqrt{2}})$
hora 6	$cx^2(mPu - \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{\sqrt{2}})$
hora 9	$cx^2(mPu - 0)$
hora 12	$cx^2(mPu + \frac{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{2})$

§. 38. Hinc autem clariſſime inſufficientia huius hypotheſis elucet, cum ſub aequatore ipſo media nocte maius frigus deberet regnare, quam rigidiſſima hyeme ſub polis. Cauſa quidem huius abſurdi ſponte ſe offert, quoniam ſecundum theoriam ſub aequatore tempore nocturno calor maxime imminui debeat, eo quod ſoli ſub horizonte latenti adeo vim frigefaciendi tribuimus, eamque eo maiorem, quo profundius ſit ſubmerſus: in zona autem torrida profundiſſime ſubmergitur. Quocirca iſta theoria correctione indiget maxima, ſi quidem ad obſervationes accommodari debeat.

§. 39. Ob has difficultates tentabo rem expedire per priorem hypotheſin, quae veritati magis eſt conſentanea; manentibus ergo poſtremis denominationibus, praeterquam quod r denotet gradum caloris tempore ortus ſolis, reperietur haec aequatio $dr + nrds =$
$$\frac{cx^2ne^{-2\alpha\pi}ds(mPu(e^{2\alpha g}-1)+\alpha(1+e^{-\alpha g})V(p^2-m^2u^2)}{(1+\alpha\alpha)(1-e^{+2\alpha\pi})}$$ vbi g denotat

notat arcum, cuius ſinus eſt $\frac{\sqrt{(p^2-m^2u^2)}}{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}$. Ex qua aequatione, cum n ſit numerus tam magnus ſcilicet 365, erit proxime $r = \frac{c\varkappa^2}{1+\alpha\alpha}\,\frac{e^{-2\alpha\pi}(mPu(e^{2\alpha g}-1)+\alpha(e^{2\alpha g}+1)\sqrt{(p^2-m^2u^2)})}{(1-e^{-2\alpha\pi})}$ vnde reperitur calor meridianus $f = \frac{c\varkappa^2 e^{-\alpha g}}{1+\alpha^2}.$ $\left(\frac{(e^{2\alpha g-2\alpha\pi}-1)mPu+(e^{2\alpha g-2\alpha\pi}+1)\alpha\sqrt{(p^2-m^2u^2)}}{1-e^{-2\alpha\pi}}+c\varkappa^2 mPu + \frac{\alpha^2 c\varkappa^2 p\sqrt{(1-m^2u^2)}}{1+\alpha\alpha}\right).$ Calor in occaſu erit $= \frac{c\varkappa^2 e^{-2\alpha g}((e^{2\alpha g}-1)mPu+(e^{2\alpha g}+1)\alpha\sqrt{(p^2-m^2u^2)})}{(1+\alpha^2)(1-e^{-2\alpha\pi})}$, ergo quouis die ſe habet calor ortus ad calorem occaſus vt $e^{-2\alpha\pi}$ ad $e^{-2\alpha g}$ ſeu vt $e^{2\alpha g}$ ad $e^{2\alpha\pi}$; quo breuiores ergo ſunt dies, eo maior eſt differentia inter gradus caloris in ortu et occaſu.

§. 40. Poſt meridiem ergo tempore t quod in arcum aequatoris conuerſum dat angulum t, erit calor in regione propoſita $z = \frac{c\varkappa^2 e^{-\alpha(t+g)}}{(1+\alpha^2)(1-e^{-2\alpha\pi})}\left(\left((e^{2\alpha(g-\pi)}-1)Pu\right)+(e^{\alpha(g-\pi)}+1)\alpha\sqrt{(p^2-m^2u^2)}\right)+c\varkappa^2 mPu+\frac{\alpha c\varkappa^2 p(x+\alpha y)\sqrt{(1-m^2u^2)}}{1+\alpha^2}$; vbi u denotat ſinum longitudinis ſolis; x ſinum anguli t et y coſinum ipſius: g vero angulum cuius ſinus eſt $\frac{\sqrt{(p^2-m^2u^2)}}{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}$ et coſinus $= \frac{-mPu}{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}$ ſeu $g = \frac{\pi}{2} + \text{Ar. ſin.}\ \frac{mPu}{p\sqrt{(1-m^2u^2)}}$ vel $dg = \frac{mPdu}{(1-m^2u^2)\sqrt{(p^2-m^2u^2)}}$.

DE MOTIBVS OSCILLATORIIS CORPORVM HVMIDO INSIDENTIVM.

AVCTORE
Daniele Bernoulli.

§. 1.

Communicaui non ita pridem cum Academia differtationem de ſtatu aequilibrii corporum humido inſidentium, quae prius eſt perlegenda quam praeſentis argumenti disquiſitio ſuſcipiatur: ſunt enim prioris diſſertationis propoſitiones fere totidem lemmata hisce disquiſitionibus, alias non parum nodoſis, felicem exitum praeparantia: quapropter praemiſſa iſta omnia, vt huius diſſertationis partem facientia conſiderari, ſimulque tres figuras, vt ibi fuerunt explicatae atque adhibitae, rurſus adhiberi velim.

§. 2.

Ordinem hic ſeruabo, quem in priori diſſertatione adhibui: prius ſcilicet de planis humido verticaliter inſidentibus dicam, deinde de corporibus qualibuscunque; in priori autem caſu oscillationes fieri in ipſo plano propoſito putabimus. Intelligo autem per oſcillationes motus reciprocos, quos facit planum, ſiue corpus ex ſtatu aequilibrii firmi deturbatum, ſibique poſtea relictum. Hi motus eo fient frequentiores, quo firmius habent aequilibrium, cum ſunt in ſtatu aequilibrii poſita. Sunt autem motus iſti reciproci duplicis generis: alii ſunt iſochroni, alii tales non ſunt: de oſcillationibus iſochronis potiſſimum agere

agere constitui: sed isochronae esse nequeunt, nisi excursiones angulares veluti infinite paruae considerentur: igitur situs omnes corporis, tanquam situi aequilibrii proximos, considerabimus.

§. 3.

Sit nunc vt in praemissa dissertatione, M Q superficies fluidi, cui planum graue F E G (fig. 3 et 4) insidet, quod sic in statu aequilibrii positum putetur. Sit porro A centrum grauitatis totius plani et B centrum grauitatis homogeneae partis submersae. Concipiatur rursus vectis verticalis A R eiusque longitudo ponatur $= 1$, intelligendo simul per vnitatem sinum totum: um in punctis A et R applicatae intelligantur potentiae minimae contrariae et aequales, horizontales et ipsi plano parallelae: istae potentiae planum declinabunt in situm proximum $f e g$, perueniente puncto R in r, A in a, B in b; eritque angulus $r a R$ angulus minimus inclinationis, cuius sinum vocauimus α: his ita positis, bisectaque recta F G in puncto H, demonstrauimus §. 9. praemissae dissertationis, fore Tab. I.

$$A a = H N \times \alpha$$
$$B c = H N \times \alpha$$
$$b c = \left[AB + \frac{FG^2}{12 M}\right) \alpha$$

vbi M significat massam siue pondus totius plani, quod exprimi debet per magnitudinem partis submersae.

Deinde demonstrauimus quoque §. 11. fore quamuis potentiam planum declinantem $= [AB \times M + \frac{1}{12} FG^2] \alpha$.

§. 4.

Iam vero nobis duo ab inuicem distinguendi veniunt casus, quorum *primus* est, quum est $A a = 0$, id est, cum ab mutato plani situ, centrum grauitatis plani, situm non mutat, isque obtinet, cum linea verticalis A R secat lineam F G bifariam, quia tunc fit $H N = 0$; *secundus* casus est, vbi contrarium fit. In primo casu planum durante situs sui mutatione simpliciter circa suum centrum grauitatis rotatur, et statim ac potentiae agere cessant, planum motibus reciprocis circa centrum grauitatis agitabitur. In altero casu cessantibus potentiis, planum motu agitabitur mixto, altero oscillatorio et rotatorio circa centrum grauitatis, altero verticali et parallelo, quo planum alternis vicibus descendit atque ascendit. In priori casu oscillationes plani omnes, siue maiores siue minores sunt necessario isochronae; at vero in casu secundo agitationes non nisi certo in casu sunt isochronae; nisi enim ambo motus, ex quibus istae agitationes componuntur, inter se tautochroni fiant, vt eodem absoluantur tempore, non possunt non agitationes esse valde irregulares. Vt ordine procedam, incipiam a casu priori, cui sequens inseruiet lemma.

§. 5.

Lemma.

Quum planum F E G potentia vtcunque applicata circa punctum A mouetur, motus eadem fiet lege, ac si illi plano substituatur punctum graue in R, cuius massa ita fuerit determinata. Sumatur nempe aggregatum singularum particularum planum componentium multiplicatarum per quadratum suae distantiae a puncto A et diuisarum per quadratum A R. De-

Demonstrationem huius lemmatis dedi in dissertatione *de motu corporum a percussione excentrica.* §. 5. *vid Comm. Tom.* IX. *p.* 191. si itaque centro A ducantur duo circuli infinite propinqui, et dicatur circuli interioris radius x atque massula plani inter duos circulos intercepti $d\zeta$ erit, ob $AR = 1$, massa in R substituenda $= \int x\,x\,d\zeta$.

§. 6.

Cum R sit punctum ad libitum sumendum, poterit ita locari, vt massa in R substituenda sit praecise massae plani aequalis, id est, vt $\int x\,x\,d\zeta = M$. De isto puncto plurimas proprietates demonstraui in dissertatione *de mutua relatione centri virium, centri oscillationis et centri grauitatis, vid. Comm. Tom.* 2. *p.* 208. vbi punctum R hac lege determinatum voco centrum virium viuarum. Inter alias proprietates vna est, quae huc maxime facit, quamque notatu plane dignam puto: nempe *si punctum rotationis A est in ipso centro grauitatis, vti hic est, fore tunc oscillationes plani, ex puncto R verticaliter suspensi, brachystochronas, id est, minoris durationis, quam si planum ex quouis alio puncto suspendatur. vid. p.* 214.

Potest itaque longitudo A R in quouis plano vtcunque graui, iteratis experimentis sine calculo proxime explorari, imo potest vnico experimento inueniri hunc in modum: *assumatur punctum quodcunque, ex quo planum suspendatur atque deinde oscilletur, erit A R aequalis mediae proportionali inter distantiam puncti assumti a centro grauitatis et distantiam centri oscillationis a centro grauitatis. vid. p.* 212.

Longitudinem autem A R hac lege determinatam, vocabo *longitudinem brachystochronam*, eamque porro designabo per vnitatem.

§. 7.

§. 7.

Lemma.

Sit longitudo penduli alicuius simplicis $= L$, distantia minima puncti grauis oscillantis a puncto infimo $= \alpha$, erit vis acceleratrix in isto situ $= \frac{\alpha}{L}$, habetur autem vis acceleratrix, si diuidatur potentia mobili directe applicata per massam eius, eruntque omnes motus oscillatorii isochroni, si in iisdem a puncto aequilibrii distantiis sit vis acceleratrix eadem. Notissima haec sunt in mechanicis.

§. 8.

Problema.

Inuenire longitudinem penduli isochroni cum motibus oscillatoriis plani F E G fluido verticaliter immersi.

Solutio.

Sit longitudo quaesita $= L$; ponaturque distantia puncti oscillantis a puncto infimo $= \alpha$; erit vis eius acceleratrix $= \frac{\alpha}{L}$. Est vero potentia P planum F E G in situ inclinato feg detinens $= [AB \times M + \frac{FG^2}{12}]\alpha$ per §. 3. haecque ipsa est, quae in plano oscillante puncto R vel r applicata intelligi debet: potest porro massae plani substitui in R vel r punctum graue M per §. 6. estque distantia puncti r a puncto aequilibrii R etiam $= \alpha$, quia α significat angulum $r\,a$ R et ponitur a R vel A R $= 1$. Est ergo hic vis acceleratrix $= [AB \times M + \frac{FG^2}{12}]$ $\alpha : M$. oportet itaque per §. 7. facere $\frac{\alpha}{L} = [AB \times M + \frac{FG^2}{12}]\alpha : M$ et hinc fit

L =

$$L = \frac{12 M}{12 M \times AB + FG^3}$$

aut quia $AR = 1$, poteſt homogeneitatis cauſa poni

$$L = \frac{12 M \times AR^2}{12 M \times AB + FG^3}$$

in qua aequatione M denotat ſpatium plani ſubmerſum Q E I.

§. 9.

Corollarium I.

Apparet ex hac aequatione oſcillationes admodum accelerari ab aucta ſectione aquae cum plano, quae indicatur per F G, atque ſi F G ſit veluti nulla, vti eſſet in bacillis aquae ſubmerſis vel in omnibus planis fere totis ſubmerſis, quorum latitudines ſuperiora verſus decreſcunt, poſſe tunc cenſeri

$$L = \frac{AR^2}{AB}.$$

Igitur in triremibus, quae ratione molis magnam habent latitudinem in ſuperficie aquae, oſcillationes latitudinales citiores erunt, ſed ſimul minores ceteris paribus, quam in aliis nauium generibus.

§. 10.

Corollar. II.

Oſcillationes porro accelerantur ab aucto valore A B: quo humilius itaque centrum grauitatis plani poſitum eſt, eo celerius perficiuntur, ſed rurſus ceteris paribus minores.

§. 11.

Corollar. III.

Denique oſcillationes accelerantur ceteriſque paribus fiunt minores a diminuta *longitudine brachyſtochrona*. Patet autem ex conſtructione generali huius *longitudinis bra-*

chystochronae in fine §. 6. exposita, quod eo minor sit, quo magis massa plani est circa centrum grauitatis concentrata.

Hae obseruationes regulas architecturae naualis non parum illustrant atque confirmant, quum de subuersione nauium vitanda sermo est.

Quae de planis hucusque commentati sumus, extendi etiam possunt ad corpora, quae prisma rectum formant, et quorum strata ad prisma perpendicularia similia similiterque posita sunt.

§. 12.

Iam vero regulas nostras exemplis aliquibus illustrabo. *Exemp. I.* Sit bacillus rectus crassitiei minimae sed vniformis compositus ex duabus partibus longitudine aequalibus; sit grauitas specifica partis superioris dimidia grauitatis specificae alterius partis, longitudo totius bacilli sit $= a$: putetur bacillus tantum non totus submersus existente grauitate specifica fluidi tantillo maior sesquialtera grauitate specifica partis leuioris bacilli.

Hic est $AB = \frac{a}{12}$; $FG = 0$ et $AR = a\sqrt{\frac{11}{12}}$; et inde fit $L = \frac{11}{12}a$.

Excemp. II. Habeatur (vt in priori dissertatione §. 15.) planum quadratum aequaliter crassum, vbique homogeneum humido verticaliter insidens, ita vt habeat duo latera horizontalia, totidemque verticalia. Sint rursus grauitates specificae aquae et plani vt m ad n, ponaturque latus quadrati $= 2a$; quaeritur longitudo penduli isochroni. Hic fit $FG = 2a$, initoque calculo prodit $AB = \frac{n-m}{m}a$; $M = \frac{4n}{m}aa$; $AR = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, hisque valoribus substitutis in aequatione §. 8. oritur $L = \frac{4mna}{6nn-6mn+mm}$.

Si

Si fuerit $m = 3n \pm n\sqrt{3}$, erit $L = \infty$; sunt enim hi duo valores quantitatis m limites, intra quos aequilibrium firmum non subsistit.

Si fuerit m tantillo maior quam n, fit $L = 4a$, atque si ponatur $m = 5n$, fit $L = 20a$ etc.

Exemp. III. Si pro plano assumatur circulus ex circulis concentricis homogeneis quidem, sed tamen inter se vtcunque heterogeneis, compositus. Apparet planum in omni situ obtinere aequilibrium atque adeo pendulum isochronum esse debere infinitae longitudinis, oportet itaque, vt sit semper $AB = \frac{-FC^3}{12M}$: hanc proprietatem a posteriori erutam calculo analytico, qui voluerit, confirmare poterit: proprietas autem ista huc redit, vt si sumatur segmentum circuli homogenei quodcunque, sit in illo segmento distantia centri grauitatis a centro circuli aequalis parti duodecimae cubi chordae diuisi per aream segmenti.

§. 13.

Venio nunc ad casum alterum, quem §. 4. exposui, quo scilicet plana motu duplici agitantur, rotatorio, quem hucusque considerauimus et parallelo verticali, quo planum alternis vicibus immergitur et emergitur. Istud alterum argumentum tot difficultatibus prima fronte intricatum apparet, vt nihil aliud de eo affirmare ab initio ausus fuerim, quam quod motus isti reciproci admodum inaequales et irregulares esse debeant. Sed re attentius perpensa, animaduerti, quod vtrumque, oscillationis genus vtcunque ab initio irregulare tandem ad vniformem tendat statum permanentem, quem accurate determinare liceat. Erunt fortasse, quibus argumentum istud tanti momenti non esse videbitur, quod tam exquisitum mereatur examen. Non inquiram heic momentum problematis istius specialis, at argumentum, in ampliori extensione consideratum, mihi videtur vtilissimum et a paucis adhuc pertractatum: problema autem, quod nunc tractabimus, argumento generali lumen affundet.

§. 14.

Si habeatur systema corporum ita connexorum, vt cognito motu vnius corporis non innotescat statim motus corporis alterius, etsi acceleratio cuiusuis corporis pendeat a situ corporum singulorum, determinatio motus singulorum corporum plerumque fit admodum difficilis: si vero motus minimi sint et reciproci siue oscillatorii, legi subiiciuntur fere generali, quae in hoc consistit, vt motus perturbati, inaequales diuersae durationis tendant ad statum vniformem, quo singula corpora oscillationes suas eodem perficiunt tempore et excursiones suas simul incipiunt simulque finiunt. In isto statu perdurationis obtinent excursiones singulae constantem aliquam inter se rationem, et distantiae corporum a puncto aequilibrii proportionem constanter eandem seruant, siue oscillationes maiores fiant siue minores.

Ad hunc quidem statum durationis corpora post tempus demum infinitum peruenire deberent; at vero si corporibus statim ab initio talis concilietur situs, vt singulorum distantiae a puncto aequilibrii obtineant modo dictam proportionem constantem, tunc omnes systematis motus perdurabunt in eodem statu eruntque inter se isochroni. Haec melius intelligentur, si attendatur ex. gr. ad oscillationes

simsingulares, quas corpora filo flexili connexa atque verticaliter suspensa faciunt: has oscillationes in peculiari dissertatione Comm. Tom. VI. inserta consideraui atque penitus explicaui.

Ostendi autem in qua proportione corpora singula a linea verticali deduci debeant, vt deinde simul sibi relicta, omnia oscillationes suas simul perficiant: monstraui simul hunc vniformitatis et durationis statum tot diuersis modis obtineri posse, quot corpora filo sunt connexa, atque sic catenam pendulam infinitis modis oscillationes vniformes et aequabiles efficere posse: nisi autem corpora singula debita proportione ab linea verticali deducta fuerint, cum moueri incipiunt, oscillationes singulae erunt irregulares, inconstantes, perturbatae, sed quae tamen continue magis magisque ad vniformitatis statum vergent. Hae annotationes inseruiunt ad motum tremulum chordarum sonorarum intelligendum: potest enim vnius eiusdemque chordae sonus ex multis tonis esse compositus.

§. 15.

Apparet igitur problema nostrum iam eo esse deductum, vt inueniatur, in qua proportione, vtrumque oscillationum genus fieri debeat, vt ambo eodem semper tempore absoluantur. Huius problematis solutioni praemittendum est problema hoc alterum.

Problema.

Sit in fig. 3. et 4., praeter ambas potentias P, P hactenus consideratas, potentia tertia π puncto R in directione verticali applicata et planum sursum trahens, sint- Tab. I.

 que

que omnia in aequilibrio posita, oporteatque inuenire potentias horizontales P, P et potentiam verticalem π.

Solutio.

Ponatur tres praefatae potentiae planum detinere in situ feg; puteturque sic plani centrum grauitatis A peruenisse in a, atque partis submersae centrum grauitatis homogeneae ex B peruenisse in b: sumaturque rursus A R pro sinu toto 1, sitque sinus anguli minimi $Rar = \alpha$, eleuatio autem minima (cuius iam maguitudo simul pendet a magnitudine potentiae verticalis) sit $= \varepsilon$. In hoc casu notandum est, magnitudinem partis submersae non eandem esse in vtroque plani situ, quin emergi in situ feg particulam, quae est $= FG \times \varepsilon - FG \times HN \times \alpha$: patet autem esse potentiam verticalem π ponderi huius particulae, post mutationem situs emersae, aequalem, vnde statim obtinetur

$$\pi = FG \times \varepsilon - FG \times HN \times \alpha.$$

Quod attinet ad potentiam horizontalem P, vt haec determinetur, oportet inquirere in lineolem horizontalem bc, haecque eodem modo inuenietur, quo vsi sumus §. IX. praecedentis dissertationis: sic reperietur peractis omnibus secundum notas staticae leges

$$bc = \left(\frac{AB + \frac{1}{3} \times FN^2 + \frac{1}{3} GN^2}{M}\right)\alpha - \frac{FG \times HN \times \varepsilon}{M}$$

Si haec conferantur porro cum §. 6. praecedentis dissertationis, apparebit esse potentiam $P = \frac{bc}{AR} \times M$, siue $= bc \times M$: substituto igitur valore inuento lineolae bc prodibit

$$P = [AB \times M + \tfrac{1}{3} \times FN^2 + \tfrac{1}{3} \times GN^2]\alpha - FG \times HN \times \varepsilon.$$

atque sic satisfactum est problemati.

§. 16.

§. 16.

Putetur iam potentias horizontales P, P, et verticalem π simul euanescere, atque sic apparebit planum ad rotationem circa punctum A animari potentia P, simulque ad descensum sollicitari potentia π: sique porro AR ea lege construatur, quam §. 6. exposuimus, poterit massa plani considerari tanquam concentrata in R. Et hoc modo fit vis acceleratrix in R ratione motus rotatorii $= \frac{P}{M}$ atque ratione motus verticalis paralleli fit vis acceleratrix $= \frac{\pi}{M}$.

§. 17.

Problema.

Posito vtroque oscillationum genere eiusdem durationis inter se, quaeritur longitudo penduli isochroni communis et ratio excursionum, quas punctum R vtroque motu describit.

Solutio.

Quum per hypothesin punctum R eodem tempore motu rotatorio describit arculum α, quo descendit per altitudinem minimam β, oportet vt sit eadem ratio inter vires accelerantes $\frac{P}{M}$ et $\frac{\pi}{M}$ quae est inter vias describendas α et β, vnde oritur talis aequatio

$$\alpha\pi = \beta P$$

substituantur pro π et P valores §. 15. dati, eritque

$$FG \times \alpha\beta - FG \times HN \times \alpha\alpha = [AB \times M + \tfrac{1}{3}FN^2 + \tfrac{1}{3}GN^2]\,\alpha\beta - FG \times HN \times \beta\beta,$$

cuius aequationis homogeneitas ita restituetur

$$FG \times AR^2 \times \alpha\beta - FG \times HN \times AR\,\alpha\alpha = [AB \times M + \tfrac{1}{3}FN^2 + \tfrac{1}{3}GN^2]\,\alpha\beta - FG \times HN \times AR \times \beta\beta.$$

Ponatur

Ponatur nunc quantitas cognita $\frac{FG \times AR^2 - AB \times M - \frac{1}{3}FN^3 - \frac{1}{3}GN^3}{FG \times HN}$ $= 2Q$; hoc facto, reductaque aequatione inuenitur

$$\beta = \left(\frac{\mp \sqrt{(AR^2 + Q^2)} - Q}{AR}\right) \alpha,$$

atque sic iam satisfecimus parti problematis posteriori, qua quaerebatur ratio inter β et α: vt iam et pendulum simplex isochronum inueniatur, quod vocabimus L, considerabimus esse $L = \frac{M\alpha}{P}$ vel etiam $L = \frac{M\beta}{P}$ (vid. §. §. 7. et 8.): si priori valore vtamur atque valorem ipsius P substituamus (§. 15.) erit

$$L = \frac{M \times \alpha}{[AB \times M + \frac{1}{3}FN^3 + \frac{1}{3}GN^3]\,\alpha - FG \times HN \times \beta},$$

vel posito pro β valore ipsius inuento, factaque deinde diuisione per α, habebitur tandem restituta simul terminorum homogeneitate

$$L = \frac{M \times AR^2}{M \times AB + \frac{1}{3}FN^3 + \frac{1}{3}GN^3 + FG \times HN[Q \pm \sqrt{(AR^2 + Q^2)}]}$$

Q. E. I.

§. 18.

Corollar. I.

Ex duplicitate signorum quantitati radicali praefixorum sequitur, duobus diuersis modis oscillationes fieri posse vniformes et omnes tautochronas atque pendulum simplex isochronum quouis modo alius esse longitudinis.

§. 19.

Corollar. II.

Si sit $HN = 0$, erit $Q = \infty$ et $FN = GN = \frac{1}{2}FG$: tuncque, si seligatur signum superius, fiet $\beta = 0$

et

$$\text{et } L = \frac{M \times AR^2}{M \times AB + \frac{1}{3} FN^3 + \frac{1}{3} GN^3} = \frac{12\, M \times AR^2}{12\, M \times AB + FG^3}$$

vt inuenimus §. 8. sed si seligatur signum inferius, fit $\mathfrak{C} = \infty \alpha$, vel quod eodem recidit, $\alpha = 0$ et $L = \frac{M}{FG}$.

In priori casu sunt oscillationes verticales nullae prae oscillationibus rotatoriis, in casu altero sunt rotatoriae nullae prae verticalibus: sequitur itaque tanquam corollarium, si planum motibus reciprocis minimis modo immergatur modo emergatur, sine vlla plani motu rotatorio, fore longitudinem penduli hisce oscillationibus isochroni $= \frac{M}{FG}$, quod theorema in omnibus etiam corporibus humido insidentibus valet, si per M intelligatur volumen, quod corpus sub aqua occupat et per FG sectio, quam corpus cum superficie aquae facit.

§. 20.

Pauca quaedam addam circa oscillationes corporum; nec enim multis adhuc opus est, vt appareat, quomodo hic sit procedendum, si modo attente prius perlecta fuerint, quae in praecedenti dissertatione monui §. §. 18. 19. et *seqq.* quibus demonstrauimus, quod si corporis inclinatio fiat in plano ad lineam, positione datam bb, perpendiculari (fig. 5.) atque si productae AB applicentur potentiae horizontales aequales et contrariae in ipso inclinationis plano, altera in puncto A, altera quae ab hoc puncto distat linea AR eadem lege, vt supra § 6. constructa, demonstrauimus, inquam, quod sit quaeuis harum potentiarum corpus inclinantium

Tab. I. fig. 5.

$$= (AB \times M + \tfrac{1}{3}\textstyle\int y^3 dx + \tfrac{1}{3}\int Z^3 dx)\, \alpha$$

Sed demonstrauimus porro praeter hasce duas potentias duas alias requiri potentias itidem horizontales, aequales et contrarias, iisdemque punctis applicatas, sed in plano ad prius perpendiculari agentes, easque potentias simul definiuimus.

His omnibus in memoriam reuocatis, possemus iam omnes corporum oscillationes vtcunque compositas definire, modo iam regulares et inter se tautochronae factae fuerint, eodem modo et ratiocinio, quo vsi sumus §. 17. Sunt autem in corpore omni, quod sine selectu accipitur, minimum tria oscillationum genera:

Primum est rotatorium circa punctum A in plano ad lineam *bb* positione datam perpendiculari.

Alterum pariter rotatorium circa idem punctum A sed in plano ad primum planum perpendiculari.

Tertium est verticale et parallelum, quo totum corpus motu parallelo ascendit et descendit: sed vererer ne fastidium Lectori excitarem; si oscillationes has ita perplexas velim sine restrictione examinare, postquam methodum ad hunc finem necessariam iam tradidi; dicam igitur nunc tantum de iis oscillationibus, quae simplices fiunt.

Duo autem requiruntur, vt simplices sint, *primo* vt sit $HN = 0$; *secundo* vt sit $\pi\Phi = 0$; lineas et puncta figurae tertiae explicauimus §. 19. praemissae Differt.

§. 21.

Problema.

Determinare longitudinem penduli simplicis isochroni cum oscillationibus simplicibus corporis humido insidentis.

Solutio.

Solutio.

Quia potentia corpus ad rotationes oscillatorias puras et simplices animans est $= [AB \times M + \frac{1}{3}\int y^3 dx + \frac{1}{3}\int Z^3 dx]\,\alpha$, erit vis acceleratrix $= \frac{[AB \times M + \frac{1}{3}\int y^3 dx + \frac{1}{3}\int Z^3 dx]\,\alpha}{M}$: vnde (per §. 8.) erit longitudo quaesita $= \frac{M}{P}$, siue

$$L = \frac{M \times AR^2}{AB \times M + \frac{1}{3}\int y^3 dx + \frac{1}{3}\int Z^3 dx}. \quad \text{Q. E. I.}$$

§. 22.

Ad illustrandam aequationem hanc generalem, eodem vtemur exemplo, quod adhibuimus §. 22. superioris dissertationis: habeatur scilicet cylindrus rectus homogeneus, cuius grauitas specifica sit ad grauitatem specificam fluidi vt n ad m: sit altitudo cylindri $= a$; radius baseos $= b$; ponaturque axis cylindri fluido immersi verticalis; quaeritur pendulum simplex isochronum cum oscillationibus minimis cylindri.

Demonstrauimus autem loco citato, esse $M = \frac{nc}{2m} \times abb$ atque $P = \frac{nnc}{4mm}\, aabb - \frac{nc}{4m}\, aabb + \frac{c}{8}\, b^4$: sique calculus recte ponatur fiet porro $AR = \sqrt{(bb + \frac{1}{12}aa)}$. His valoribus substitutis, fit

$$L = \frac{mna^3 + 12\,mnabb}{48\,nnaa - 48\,mnaa + 24\,mmbb},$$

sique fuerint verbi gratia $a = 2b$, erit $L = \frac{4mnb}{24nn - 24mn + 3mm}$ atque, si porro poneretur $6m = 7n$, foret $L = 56.\,b$.

CONSIDERATIO PROGRESSIONIS CVIVSDAM AD CIRCVLI QVADRATVRAM INVENIENDAM IDONEAE.

AVCTORE
L. Eulero

§. 1.

Posita arcus cuiusdam in circulo, cuius radius sit $=1$, tangente $=t$, erit ipse arcus $=\int\frac{dt}{1+tt}$; si iam loco differentialium dt substituantur particulae tangentis finitae quidem, sed valde exiguae, atque integrationis loco actualis eiusmodi particularum additio perficiatur, expressio prodibit eo propius ad arcum propositum accedens, quo minores capiantur particulae tangentis t. Sic diuisa tangente in n partes aequales, quarum quaelibet erit $\frac{t}{n}$, vicem differentialis dt subeunda, loco t successiue poni debebunt valores $\frac{t}{n}$, $\frac{2t}{n}$, $\frac{3t}{n}$ .... vsque ad $\frac{nt}{n}$; quo facto arcus cuius tangens est t aequabitur huic progressioni $\frac{nt}{nn+tt}+\frac{nt}{nn+4tt}+\frac{nt}{nn+9tt}+\ldots\ldots\frac{nt}{nn+nntt}$ quae expressio eo minus a vero arcus valore differet, quo maior capiatur numerus n. Semper autem haec expressio nimis erit parua, nisi pro n sumatur numerus reuera infinitus.

§. 2. Cum igitur sumto pro n numero finito ista progressio $\frac{nt}{n^2+t^2}+\frac{nt}{n^2+4t^2}+\frac{nt}{n^2+9t^2}+\ldots+\frac{nt}{n^2+n^2t^2}$ eo propius exprimat arcum cuius tangens est t, quo maior fuerit numerus n; perpetuo autem hoc modo valor pro-

prodeat nimis paruus, inuestigabo, quantum ista expressio quouis casu a vera arcus longitudine deficiat. Quodsi enim defectus commode atque ad calculum accommodate exhiberi queat, per seriem vehementer conuergentem, ista methodus cuiusque arcus longitudinem determinandi perquam facilis et idonea videtur.

§. 3. Ad hoc inuestigandum singulos expressionis terminos methodo consueta in progressionem geometricam resoluo infinitam, vt sequitur

$$\frac{nt}{n^2+t^2} = \frac{t}{n} - \frac{t^3}{n^3} + \frac{t^5}{n^5} - \frac{t^7}{n^7} + \text{etc.}$$

$$\frac{nt}{n^2+4t^2} = \frac{t}{n} - \frac{2^2t^3}{n^3} + \frac{2^4t^5}{n^5} - \frac{2^6t^7}{n^7} + \text{etc.}$$

$$\frac{nt}{n^2+9t^2} = \frac{t}{n} - \frac{3^2t^3}{n^3} + \frac{3^4t^5}{n^5} - \frac{3^6t^7}{n^7} + \text{etc.}$$

$$\frac{nt}{n^2+16t^2} = \frac{t}{n} - \frac{4^2t^3}{n^3} + \frac{4^4t^5}{n^5} - \frac{4^6t^7}{n^7} + \text{etc.}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$\frac{nt}{n^2+n^2t^2} = \frac{t}{n} - \frac{n^2t^3}{n^3} + \frac{n^4t^5}{n^5} - \frac{n^6t^7}{n^7} + \text{etc.}$$

§. 4. Ponamus progressionis nostrae oblatae

$$\frac{nt}{n^2+t^2} + \frac{nt}{n^2+4t^2} + \frac{nt}{n^2+9t^2} + \ldots + \frac{nt}{n^2+n^2t^2}$$

valorem iam esse actu determinatum, eumque esse $= s$; ac transformatio facta sequentem suppeditabit aequationem:

$$s = \begin{cases} +\frac{t}{n}\,(1^0+2^0+3^0+\ldots\ldots+n^0) \\ -\frac{t^3}{n^3}\,(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2) \\ +\frac{t^5}{n^5}\,(1^4+2^4+3^4+\ldots\ldots+n^4) \\ -\frac{t^7}{n^7}\,(1^6+2^6+3^6+\ldots\ldots+n^6) \\ +\frac{t^9}{n^9}\,(1^8+2^8+3^8+\ldots\ldots+n^8) \\ -\frac{t^{11}}{n^{11}}\,(1^{10}+2^{10}+3^{10}+\ldots+n^{10}) \\ \qquad\qquad \text{etc. in infinitum} \end{cases}$$

§. 5. Quoniam in hac expressione coefficientes terminorum $\frac{t}{n}$, $\frac{t^3}{n^3}$, $\frac{t^5}{n^5}$, etc. sunt summae progressionum potestatum parium seriei numerorum naturalium: summae hae autem se habent sequenti modo

$$1^0+2^0+\ldots+n^0 = n$$
$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$
$$1^4+2^4+\ldots+n^4 = \frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$
$$1^6+2^6+\ldots+n^6 = \frac{n^7}{7}+\frac{n^6}{2}+\frac{n^5}{2}-\frac{n^3}{6}+\frac{n}{42}$$
$$1^8+2^8+\ldots+n^8 = \frac{n^9}{9}+\frac{n^8}{2}+\frac{2n^7}{3}-\frac{7n^5}{15}+\frac{2n^3}{9}-\frac{n}{30}$$
etc.

substituantur hi valores definiti loco indefinitorum, ac prodibit sequens aequatio

$$s = \begin{cases} +t \\ -\frac{t^3}{3}-\frac{t^3}{2n}-\frac{t^3}{6n^2} \\ +\frac{t^5}{5}+\frac{t^5}{2n}+\frac{t^5}{3n^2}-\frac{t^5}{30n^4} \\ -\frac{t^7}{7}-\frac{t^7}{2n}-\frac{t^7}{2n^2}+\frac{t^7}{6n^4}-\frac{t^7}{42n^6} \\ +\frac{t^9}{9}+\frac{t^9}{2n}+\frac{2t^9}{3n^2}-\frac{7t^9}{15n^4}+\frac{2t^9}{9n^6}-\frac{t^9}{30n^8} \\ \qquad \text{etc.} \quad \text{etc.} \end{cases}$$

cuius

cuius lex processus vlterioris pendet a coefficientibus formulae generalis series summandi. Praecipue autem ad continuandam hanc seriem notari conuenit coefficientes vltimorum terminorum in quaque expressione, quae hanc tenent progressionem: $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{42}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{5}{66}$; $\frac{691}{13.210}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{3617}{17.30}$; $\frac{43867}{19.42}$; $\frac{174611}{330}$; $\frac{854513}{6.23}$; $\frac{236364091}{5.546}$; quam hucusque produxisse sufficit.

§. 6. Disponantur termini inuentae expressionis secundum columnas a summo ad imum extensas, atque ad legem, qua singulae columnae progrediuntur, ordinentur; quo facto erit $s =$

$$+t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\frac{t^9}{9}-\frac{t^{11}}{11}+\text{etc.}$$
$$-\frac{t^2}{2n}(t-t^3+t^5-t^7+t^9-t^{11}+\text{etc.})$$
$$-\frac{t^3}{6n^3}(t-2t^3+3t^5-4t^7+5t^9-6t^{11}+\text{etc.})$$
$$-\frac{t^4}{30n^4}(t-5t^3+14t^5-30t^7+55t^9-91t^{11}+\text{etc.})$$
$$-\frac{t^6}{42n^6}\left(t-\frac{28}{3}t^3+42t^5-132t^7+\frac{1001}{3}t^9-728t^{11}+\text{etc.}\right)$$
etc.

quae series omnes hanc tenent legem, vt potestas $\frac{t^m}{Nn^m}$ multiplicari debeat per istam seriem $t-\frac{(m+1)(m+2)}{2.\quad 3}t^3+\frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{2.\quad 3.\quad 4.\quad 5}t^5+$ etc.

§. 7. Quanquam haec series ob m numerum integrum affirmatiuum in infinitum excurrit, tamen semper habet summam finitam, quae sequenti modo inuenietur. Ponatur tantisper seriei illius summa $= v$ erit $m\,v = \frac{mt}{1}-\frac{m(m+1)(m+2)}{1.\quad 2.\quad 3}t^3+\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5}t^5-$ etc. $=$

$= \frac{(1-t\sqrt{-1})^{-m}-(1+t\sqrt{-1})^{-m}}{2\sqrt{-1}}$. Haec autem expressio transmutatur in istam $mv = \frac{(1+t\sqrt{-1})^m-(1-t\sqrt{-1})^m}{2(1+tt)^m\sqrt{-1}}$. At binomiis his actu ad potestatem exponentis m euectis prodibit per aliam seriem $mv = \frac{1}{(1+tt)^m}\left(\frac{mt}{1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} t^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} t^5 - \text{etc.}\right)$ quae ad nostrum institutum maxime est accommodata, cum sponte abrumpatur, quando m est numerus integer affirmatiuus.

§. 8. Series ergo v, per quam terminus quisque $\frac{t^m}{\mathfrak{N} n^m}$ multiplicari debet, nunc transmutata est in hanc $\frac{1}{m(1+tt)^m}$ $\left(\frac{mt}{1} - \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{(m-2)}{3} t^3 + \text{etc.}\right)$; quamobrem habebitur $s =$

$$t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11} + \text{etc.}$$

$$- \frac{t^3}{2n(1+tt)}$$

$$- \frac{t^2}{2\cdot 6 n^2(1+tt)^2} \cdot \frac{2t}{1}$$

$$- \frac{t^4}{4\cdot 30 n^4(1+tt)^4}\left(\frac{4t}{1} - \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} t^3\right)$$

$$- \frac{t^6}{6\cdot 42 n^6(1+tt)^6}\left(\frac{6t}{1} - \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} t^3 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} t^5\right)$$

$$- \frac{t^8}{8\cdot 30 n^8(1+tt)^8}\left(\frac{8t}{1} - \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} t^3 + \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} t^5 - \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{5t^{10}}{10\cdot 66 n^{10}(1+tt)^{10}}\left(\frac{10t}{1} - \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} t^3 + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{691 t^{12}}{12\cdot 13\cdot 210 n^{12}(1+tt)^{12}}\left(\frac{12t}{1} - \frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} t^3 + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{7t^{14}}{14\cdot 6 n^{14}(1+tt)^{14}}\left(\frac{14t}{1} - \frac{14\cdot 13\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3} t^3 + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{3617 t^{16}}{16\cdot 17\cdot 30 n^{16}(1+tt)^{16}}\left(\frac{16t}{1} - \frac{16\cdot 15\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3} t^3 + \text{etc.}\right)$$

etc.

§. 9.

§. 9. Cum nunc huius expressionis prima series $t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} +$ etc. illum ipsum circuli arcum denotet, cuius tangens est t, quem quaerere instituimus, sit z iste arcus atque manente $s = \frac{nt}{n^2+1^2} + \frac{nt}{n^2+4t^2} + \frac{nt}{n^2+9t^2} + \ldots\ldots + \frac{nt}{n^2+n^2t^2}$, reperietur arcus $z = s + \frac{t^3}{2n(1+tt)} + \frac{1}{6}\frac{tt}{2nn(1+tt)^2} \cdot 2t + \frac{1}{30} \cdot \frac{t^4}{4n^4(1+tt)^4}(4t - 4t^3) + \frac{1}{42} \cdot \frac{t^6}{6n^6(1+tt)^6}(6t - 20t^3 + 6t^5) + \frac{1}{30} \cdot \frac{t^8}{8n^8(1+tt)^8}(8t - 56t^3 + 56t^5 - 8t^7) + \frac{5}{66} \cdot \frac{t^{10}}{10n^{10}(1+tt)^{10}}(10t - 120t^3 + 252t^5 - 120t^7 + 10t^9) + \frac{691}{13 \cdot 210} \frac{t^{12}}{12n^{12}(1+tt)^{12}}(12t - 220t^3 + 792t^5 - 792t^7 + 220t^9 - 12t^{11}) + \frac{7}{6} \cdot \frac{t^{14}}{14n^{14}(1+tt)^{14}}(14t - 364t^3 + 2002t^5 - 3432t^7 + 2002t^9 - 364t^{11} + 14t^{13}) +$ etc.

§. 10. Expressio haec commodissime accommodabitur ad casum, quo est $t = 1$, cum alterni seriei termini euanescant, atque insuper arcus z abeat in quartam semiperipheriae circuli partem, posita ergo semiperipheria circuli $= \pi$, ita vt sit $z = \frac{\pi}{4}$, sumtoque quocunque numero integro affirmatiuo pro n erit $\frac{\pi}{4} = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \frac{n}{n^2+16} + \ldots \frac{n}{n^2+n^2} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2n^2} - \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{2^3 \cdot 6n^6} + \frac{5}{66} \cdot \frac{1}{2^5 \cdot 10n^{10}} - \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{2^7 \cdot 14n^{14}} + \frac{43867}{19 \cdot 42} \cdot \frac{1}{2^9 \cdot 18n^{18}} - \frac{854513}{6 \cdot 23} \cdot \frac{1}{2^{11} \cdot 22n^{22}} +$ etc. Hinc igitur erit $\pi = \frac{4n}{n^2+1} + \frac{4n}{n^2+4} + \frac{4n}{n^2+9} + \ldots\ldots \frac{4n}{n^2+n^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1n^2} - \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 3n^6} + \frac{5}{66} \cdot \frac{1}{2^4 \cdot 5n^{10}} - \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{2^6 \cdot 7n^{14}} + \frac{43867}{19 \cdot 42} \cdot \frac{1}{2^8 \cdot 9n^{18}} - \frac{854513}{6 \cdot 23} \cdot \frac{1}{2^{10} \cdot 11n^{22}} +$ etc. quae series eo magis conuergit, quo maior numerus pro n accipiatur.

§. 11. Quamuis autem haec series eo magis conuergere videatur, quo maior sit numerus n tamen perpetuo ad certum vsque terminum tantum conuergit, post quem termini crescent iterum; hancque ob causam non iuuat seriem eo vsque adhibere, quoad termini diuergere incipiant, sed expediet operationem ibi finire, vbi maxima obseruatur conuergentia. Namque si fractionum $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{42}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{5}{66}$; etc. ea quae indicem habet ν ponatur $= X$, atque sequens $= Y$ erit semper $\frac{Y}{X} > \frac{(\nu-1)(2\nu-3)}{2\pi^2}$, atque ν in infinitum crescente fiet $\frac{Y}{X} = \frac{\nu^2}{\pi^2}$. Ex quo apparet terminos istius seriei continuo magis crescere, atque nullam progressionem geometricam quantumuis conuergentem cum ea coniunctam eam reddere posse conuergentem. Hinc autem concluditur in serie paragr. praec. plures terminos accipi non licere quam ad summum $\frac{\pi n}{\sqrt{2}}$ hoc est proxime $2n$: etiamsi enim sumerentur plures termini, summa non ad veram propior accedens reperiretur.

§. 12. Ex hoc vero ipso subsidium ad valorem ipsius π propius inueniendum ope seriei paragraphi 10, consequitur. Ponamus enim seriei: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1n^2} - \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 3n^6} + \frac{5}{66} \cdot \frac{1}{2^4 \cdot 5n^{10}} -$ etc. iam actu esse additos μ terminos, ac sequentem terminum esse $= P$, eius loco sumatur ista expressio $\frac{\pi^4 n^4 P}{\pi^4 n^4 + 16\mu^4}$, isque loco omnium reliquorum addatur vel subtrahatur, prout terminus P habuerit signum $+$ vel $-$. Est vero proxime $\pi^4 = 90, 740909$, vnde loco termini P substitui poterit $\frac{P}{1 + \frac{16\mu^4}{36;n^4}}$. Hocque modo eo propius ad verum valorem ipsius π accedetur, quo maior fuerit numerus μ: hoc est quo plures termini iam fuerint additi.

§. 13. His tamen non obstantibus series paragrapho decimo data semper dat valorem ipsius π nimis magnum, quic-

quicquid pro n substituatur; eo propius autem acceditur, quo maior numerus pro n substituatur. Sumto enim 1 pro n prodit $\pi = 3,1646 +$ quae expressio iam in figura secunda a vero valore $3,14159265358979 32$ aberrat. Si ponatur $n = 3$, prodibit $\pi = 3,14159272 16 +$ a vero valore in octaua figura discrepans. At si ponatur $n = 5$ reperietur per eandem methodum

$$\begin{array}{l} \pi = 3,14159265359007 26 + \\ \underline{3,14159265358979 32} \\ 0,00000000000027 94 \end{array}$$

cuius numeri excessus in decima tertia demum figura conspicitur. Haecque aberratio a veritate eo magis est notatu digna, quo minus vitium in ratiocinio instituto deprehendi potest. Ad quod accedit vt ista formula aberratione hac non obstante commode ad valorem ipsius π inueniendum inseruire queat, substituendo scilicet maiores numeros loco n.

§. 14. Ex his exemplis quibus 1, 3, et 5 loco n substituimus per inductionem concludi posse videtur, valorem ipsius π in fractionibus decimalibus fere ad triplo plures figuras iustum repertum iri, quam n contineat vnitates, siquidem prima figura 3 computetur; prima autem hac figura non computata videtur numerus figurarum iustarum fore $= 2\frac{1}{2}.n$. Sic si ponatur $n = 2$ reperitur $\pi = 3,141635$ cuius quinta figura quaternario nimis est magna. Ac posito $n = 4$ prodit $\pi = 3,1415926537 4 +$ cuius decima figura binario maior est vera. Posito autem $n = 6$ reperitur, $\pi = 3,14159265358979355 8 +$ cuius figura demum decima sexta a veritate recedit.

§. 15. Si nunc in caussam huius a veritate aberrationis calculi inquiramus, aliam detegere non valemus, nisi diuergentiam seriei §. 10. allatae; reliqua enim omnia prorsus se recte habere deprehenduntur. Namque si t vnitatem excedat, eo maior reperietur aberratio a veritate, quo minor accipiatur numerus n; id quod clarissime se manifestabit si t ponatur infinitum atque simul n = numero infinito. Ponamus enim $t = \infty$, quo casu in §. 9. abibit z in quartam peripheriae partem, eritque ideo $z = \frac{\pi}{2}$. Sit insuper $n = pt$, denotante p numerum quemcunque affirmatiuum siue integrum siue fractum, eritque ob $z = \frac{\pi}{2} = s + \frac{1}{2p}$ ac reliqui termini omnes negligi posse videntur, quod tamen in terminis infinitesimis perperam fit, quippe qui tandem ad finitam magnitudinem excrescere possunt.

§. 16. Interim tamen notari meretur errorem satis esse exiguum, nisi p sit numerus vnitate minor, atque quo maior valor ipsi p tribuatur eo minorem fore aberrationem a veritate. Cum enim hoc casu sit $s = \frac{p}{p^2+1} + \frac{p}{p^2+4} + \frac{p}{p^2+9} + \frac{p}{p^2+16} + \frac{p}{p^2+25} +$ etc. in infinitum; videatur huius seriei summa posse per quadraturam circuli definiri, quod tamen secus se habet. Per vltimam enim aequationem foret $s = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2p}$ seu $\frac{\pi}{2p} - \frac{1}{2pp} = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+4} + \frac{1}{p^2+9} + \frac{1}{p^2+16} +$ etc. cuius quidem aequationis falsitas si $p = 0$ sponte elucet. At sumto $p = 1$ foret $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{26} +$ etc. $= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$. Vera autem summa per alias regulas reperitur $= \frac{\pi}{2} - 0,4941222793$ ita vt illa summa sit iusto minor, idque parte 0,0058777206 sin autem ponatur $p = 2$, habebitur ista

series

series $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{80}+$ etc. cuius summa per viam hanc erroneam prodit $=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}-0,125$; cum tamen constet veram summam esse $=\frac{\pi}{4}-0,124994522075$, ita vt illius defectus tantum sit $=0,000005477924$. Multo autem adhuc minor erit aberratio si maiores numeri pro p accipiantur: sic si $p=3$, in nona demum figura accidet aberratio, atque quocunque numero pro p sumto prodibit summa iusta ad $3p$ figuras.

§. 17. Ex his satis perspicitur, quam caute circa summationem serierum diuergentium versari oporteat, praesertim si eiusmodi series diuergentes occurrant infinitae. Huiusque rei adhuc vnum exemplum afferre visum est, ex quo necessitas summae circumspectionis clarius elucebit. Proposita sit series quaecunque $\overset{1}{a}+\overset{2}{b}+\overset{3}{c}+\overset{4}{d}+\overset{5}{e}+\overset{6}{f}+\overset{7}{g}+\overset{8}{h}$ + etc. cuius constat terminum quemcunque indicis x fore $=a+\frac{(x-1)}{1}(b-a)+\frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}(c-2b+a)+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3}(d-3c+3b-a)+$ etc. Ex hac forma definiantur omnes termini praecedentes versus sinistram in infinitum progredientes, eritque vt sequitur

term. indicis $0=a+(a-b)+(a-2b+c)+(a-3b+3c-d)+$ etc.
term. indic. $-1=a+2(a-b)+3(a-2b+c)+4(a-3b+3c-d)+$ etc
term. indic. $-2=a+3(a-b)+6(a-2b+c)+10(a-3b+3c-d)+$ etc
term. ind. $-3=a+4(a-b)+10(a-2b+c)+20(a-3b+3c-d)+$ etc
etc.

§. 18. Colligantur omnes hi termini antecedentes in infinitum, reperieturque omnium summa $=\frac{a}{1-1}+\frac{a-b}{(1-1)^2}+\frac{a-2b+c}{(1-1)^3}+\frac{a-3b+3c-d}{(1-1)^4}+$ etc. quae in series innumerabiles secundum litteras $a, b, c, d, e,$ etc. resoluta abibit in hanc formam:

$$+a\left(\frac{1}{1-1}+\frac{1}{(1-1)^2}+\frac{1}{(1-1)^3}+\frac{1}{(1-1)^4}+\text{etc.}\right)$$
$$-b\left(\frac{1}{(1-1)^2}+\frac{2}{(1-1)^3}+\frac{3}{(1-1)^4}+\frac{4}{(1-1)^5}+\text{etc.}\right)$$
$$+c\left(\frac{1}{(1-1)^3}+\frac{3}{(1-1)^4}+\frac{6}{(1-1)^5}+\frac{10}{(1-1)^6}+\text{etc.}\right)$$
$$-d\left(\frac{1}{(1-1)^4}+\frac{4}{(1-1)^5}+\frac{10}{(1-1)^6}+\frac{20}{(1-1)^7}+\text{etc.}\right)$$

§. 19. Series hae singulae autem summationem admittunt; atque summis earum loco substitutis prodibit aggregatum omnium terminorum antecedentium versus sinistram in infinitum, vt sequitur

$$+a\cdot\frac{1}{(1-1)-1}=-a$$
$$-b\cdot\frac{1}{((1-1)-1)^2}=-b$$
$$+c\cdot\frac{1}{((1-1)-1)^3}=-c$$
$$-d\cdot\frac{1}{((1-1)-1)^4}=-d$$
$$+\text{etc.}$$

Ex quo videtur terminorum horum antecedentium summa fore $=-a-b-c-d-$ etc. Quare si series quaecunque infinita $a+b+c+d+e+$ etc. etiam versus sinistram in infinitum continuaretur, foret totius seriei vtrinque in infinitum abeuntis summa semper $=0$: si quidem ratiocinium hoc esset iustum.

§. 20. Neque vero hoc ratiocinium semper fallit, sed in innumerabilibus seriebus veritati consentaneum deprehenditur. Primo enim omnes progressiones geometricae hac gaudent proprietate vt in infinitum vtrinque progredientes summam habeant $=0$. Scilicet seriei $n+n^2+n^3+n^4+$ etc, summa est $=\frac{n}{1-n}$ partis autem praecedentis $1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+$ etc. summa est $=\frac{n}{n-1}$, quae cum illa iuncta producit nihil. In infinitis autem

seriebus

feriebus aliis ratiocinium hoc maxime a veritate recedit, cuiusmodi eſt ſeries $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{27} +$ etc. quae antrorſum continuata ſui fit ſimilis et aequalis, ſcilicet $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{27} + \frac{1}{15} +$ etc. cuius adeo totius ſumma non fit o ſed potius duplo maior. Haec igitur propoſuiſſe non minoris vtilitatis eſſe arbitror, quam ſummo rigore demonſtratas veritates.

DE

$$s = \begin{cases} + \frac{t}{n}\,(1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots + n^0) \\ - \frac{t^3}{n^3}\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) \\ + \frac{t^5}{n^5}\,(1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4) \\ - \frac{t^7}{n^7}\,(1^6 + 2^6 + 3^6 + \ldots + n^6) \\ + \frac{t^9}{n^9}\,(1^8 + 2^8 + 3^8 + \ldots + n^8) \\ - \frac{t^{11}}{n^{11}}\,(1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \ldots + n^{10}) \\ \quad \text{etc. in infinitum} \end{cases}$$

§. 5. Quoniam in hac expressione coefficientes terminorum $\frac{t}{n}$, $\frac{t^3}{n^3}$, $\frac{t^5}{n^5}$, etc. sunt summae progressionum potestatum parium seriei numerorum naturalium: summae hae autem se habent sequenti modo

$$1^0 + 2^0 + \ldots + n^0 = n$$
$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$
$$1^4 + 2^4 + \ldots + n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$
$$1^6 + 2^6 + \ldots + n^6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}$$
$$1^8 + 2^8 + \ldots + n^8 = \frac{n^9}{9} + \frac{n^8}{2} + \frac{2n^7}{3} - \frac{7n^5}{15} + \frac{2n^3}{9} - \frac{n}{30}$$
etc.

substituantur hi valores definiti loco indefinitorum, ac prodibit sequens aequatio.

$$s = \begin{cases} + t \\ - \frac{t^3}{3} - \frac{t^3}{2n} - \frac{t^3}{6n^2} \\ + \frac{t^5}{5} + \frac{t^5}{2n} + \frac{t^5}{3n^2} - \frac{t^5}{30n^4} \\ - \frac{t^7}{7} - \frac{t^7}{2n} - \frac{t^7}{2n^2} + \frac{t^7}{6n^4} - \frac{t^7}{42n^6} \\ + \frac{t^9}{9} + \frac{t^9}{2n} + \frac{2t^9}{3n^2} - \frac{7t^9}{15n^4} + \frac{2t^9}{9n^6} - \frac{t^9}{30n^8} \\ \quad \text{etc. etc.} \end{cases}$$

cuius

cuius lex processus vlterioris pendet a coefficientibus formulae generalis series summandi. Praecipue autem ad continuandam hanc seriem notari conuenit coefficientes vltimorum terminorum in quaque expressione, quae hanc tenent progressionem: $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{42}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{5}{66}$; $\frac{691}{13.210}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{3617}{17.30}$; $\frac{43867}{19.42}$; $\frac{174611}{330}$; $\frac{854513}{6.23}$; $\frac{236364091}{5.546}$; quam hucusque produxisse sufficit.

§. 6. Disponantur termini inuentae expressionis secundum columnas a summo ad imum extensas, atque ad legem, qua singulae columnae progrediuntur, ordinentur; quo facto erit $s =$

$$+t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\frac{t^9}{9}-\frac{t^{11}}{11}+\text{etc.}$$
$$-\frac{t^2}{2n}(t-t^3+t^5-t^7+t^9-t^{11}+\text{etc.})$$
$$-\frac{t^2}{6n^3}(t-2t^3+3t^5-4t^7+5t^9-6t^{11}+\text{etc.})$$
$$-\frac{t^4}{30n^4}(t-5t^3+14t^5-30t^7+55t^9-91t^{11}+\text{etc.})$$
$$-\frac{t^6}{42n^6}(t-\frac{28}{3}t^3+42t^5-132t^7+\frac{1001}{3}t^9-728t^{11}+\text{etc.})$$
$$\text{etc.}$$

quae series omnes hanc tenent legem, vt potestas $\frac{t^m}{Nn^m}$ multiplicari debeat per istam seriem $t-\frac{(m+1)(m+2)}{2\cdot 3}t^3+\frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}t^5+$ etc.

§. 7. Quanquam haec series ob m numerum integrum affirmatiuum in infinitum excurrit, tamen semper habet summam finitam, quae sequenti modo inuenietur. Ponatur tantisper seriei illius summa $= v$ erit $mv =$ $\frac{mt}{1}-\frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot 2\cdot 3}t^3+\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}t^5-$ etc. $=$

$= \frac{(1-t\sqrt{-1})^{-m}-(1+t\sqrt{-1})^{-m}}{2\sqrt{-1}}$. Haec autem expressio transmutatur in istam $mv = \frac{(1+t\sqrt{-1})^m-(1-t\sqrt{-1})^m}{2(1+tt)^m\sqrt{-1}}$. At binomiis his actu ad potestatem exponentis m euectis prodibit per aliam seriem $mv = \frac{1}{(1+tt)^m}\left(\frac{mt}{1} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}t^5 - \text{etc.}\right)$ quae ad nostrum institutum maxime est accommodata, cum sponte abrumpatur, quando m est numerus integer affirmatiuus.

§. 8. Series ergo v, per quam terminus quisque $\frac{t^m}{Nn^m}$ multiplicari debet, nunc transmutata est in hanc $\frac{1}{m(1+tt)^m}$ $\left(\frac{mt}{1} - \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\frac{(m-2)}{3}t^3 + \text{etc.}\right)$; quamobrem habebitur $s =$

$$t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \frac{t^{11}}{11} + \text{etc.}$$

$$- \frac{t^3}{2n(1+tt)}$$

$$- \frac{t^2}{2\cdot 6n^2(1+tt)^2}\cdot\frac{2t}{1}$$

$$- \frac{t^4}{4\cdot 30\,n^4(1+tt)^4}\left(\frac{4t}{1} - \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}t^3\right)$$

$$- \frac{t^6}{6\cdot 42\,n^6(1+tt)^6}\left(\frac{6t}{1} - \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}t^5\right)$$

$$- \frac{t^8}{8\cdot 30\,n^8(1+tt)^8}\left(\frac{8t}{1} - \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}t^5 - \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{5t^{10}}{10\cdot 66\,n^{10}(1+tt)^{10}}\left(\frac{10t}{1} - \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{691\,t^{12}}{12\cdot 13\cdot 210\,n^{12}(1+tt)^{12}}\left(\frac{12t}{1} - \frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{7t^{14}}{14\cdot 6\,n^{14}(1+tt)^{14}}\left(\frac{14t}{1} - \frac{14\cdot 13\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \text{etc.}\right)$$

$$- \frac{3617\,t^{16}}{16\cdot 17\cdot 30\,n^{16}(1+tt)^{16}}\left(\frac{16t}{1} - \frac{16\cdot 15\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \text{etc.}\right)$$

etc.

§. 9.

§. 9. Cum nunc huius expressionis prima series $t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} +$ etc. illum ipsum circuli arcum denotet, cuius tangens est t, quem quaerere instituimus, sit z iste arcus atque manente $s = \frac{nt}{n^2+t^2} + \frac{nt}{n^2+4t^2} + \frac{nt}{n^2+9t^2} + \ldots\ldots + \frac{nt}{n^2+n^2t^2}$, reperietur arcus $z = s + \frac{t^2}{2n(1+tt)} + \frac{1}{6}\frac{tt}{2nn(1+tt)^2} \cdot 2t + \frac{1}{30} \cdot \frac{t^4}{4n^4(1+tt)^4}\,(4t - 4t^3) + \frac{1}{42} \cdot \frac{t^6}{6n^6(1+tt)^6}\,(6t - 20t^3 + 6t^5) + \frac{1}{30} \cdot \frac{t^8}{8n^8(1+tt)^8}\,(8t - 56t^3 + 56t^5 - 8t^7) + \frac{5}{66} \cdot \frac{t^{10}}{10n^{10}(1+tt)^{10}}\,(10t - 120t^3 + 252t^5 - 120t^7 + 10t^9) + \frac{691}{13 \cdot 210}\,\frac{t^{12}}{12n^{12}(1+tt)^{12}}\,(12t - 220t^3 + 792t^5 - 792t^7 + 220t^9 - 12t^{11}) + \frac{7}{6} \cdot \frac{t^{14}}{14n^{14}(1+tt)^{14}}\,(14t - 364t^3 + 2002t^5 - 3432t^7 + 2002t^9 - 364t^{11} + 14t^{13}) +$ etc.

§. 10. Expressio haec commodissime accommodabitur ad casum, quo est $t = 1$, cum alterni seriei termini euanescant, atque insuper arcus z abeat in quartam semiperipheriae circuli partem, posita ergo semiperipheria circuli $= \pi$, ita vt sit $z = \frac{\pi}{4}$, sumtoque quocunque numero integro affirmatiuo pro n erit $\frac{\pi}{4} = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \frac{n}{n^2+16} + \ldots \frac{n}{n^2+n^2} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2n^2} - \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{2^3 \cdot 6n^6} + \frac{5}{66} \cdot \frac{1}{2^5 \cdot 10\,n^{10}} - \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{2^7 \cdot 14n^{14}} + \frac{43867}{19 \cdot 42} \cdot \frac{1}{2^9 \cdot 18n^{18}} - \frac{854513}{6 \cdot 23} \cdot \frac{1}{2^{11} \cdot 22\,n^{22}} +$ etc. Hinc igitur erit $\pi = \frac{4n}{n^2+1} + \frac{4n}{n^2+4} + \frac{4n}{n^2+9} + \ldots\ldots \frac{4n}{n^2+n^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1n^2} - \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 3n^6} + \frac{5}{66} \cdot \frac{1}{2^4 \cdot 5n^{10}} - \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{2^6 \cdot 7n^{14}} + \frac{43867}{19 \cdot 42} \cdot \frac{1}{2^8 \cdot 9n^{18}} - \frac{854513}{6 \cdot 23} \cdot \frac{1}{2^{10} \cdot 11n^{22}} +$ etc. quae series eo magis conuergit, quo maior numerus pro n accipiatur.

§. 11. Quamuis autem haec series eo magis conuergere videatur, quo maior sit numerus n tamen perpetuo ad certum vsque terminum tantum conuergit, post quem

 termini

termini crefcent iterum; hancque ob caufam non iuuat feriem eo vsque adhibere, quoad termini diuergere incipiant, fed expediet operationem ibi finire, vbi maxima obferuatur conuergentia. Namque fi fractionum $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{42}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{5}{66}$; etc. ea quae indicem habet ν ponatur $= X$, atque fequens $= Y$ erit femper $\frac{Y}{X} > \frac{(\nu-1)(2\nu-3)}{2\pi^2}$, atque ν in infinitum crefcente fiet $\frac{Y}{X} = \frac{\nu^2}{\pi^2}$. Ex quo apparet terminos iftius feriei continuo magis crefcere, atque nullam progreffionem geometricam quantumuis conuergentem cum ea coniunctam eam reddere poffe conuergentem. Hinc autem concluditur in ferie paragr. praec. plures terminos accipi non licere quam ad fummum $\frac{\pi n}{\sqrt{2}}$ hoc eft proxime $2n$: etiamfi enim fumerentur plures termini, fumma non ad veram propior accedens reperiretur.

§. 12. Ex hoc vero ipfo fubfidium ad valorem ipfius π propius inueniendum ope feriei paragraphi 10, confequitur. Ponamus enim feriei: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1n^2} - \frac{1}{42}\cdot\frac{1}{2^2\cdot 3n^6} + \frac{5}{66}\cdot\frac{1}{2^4\cdot 5n^{10}} -$ etc. iam actu effe additos μ terminos, ac fequentem terminum effe $= P$, eius loco fumatur ifta expreffio $\frac{\pi^4 n^4 P}{\pi^4 n^4 + 16\mu^4}$, isque loco omnium reliquorum addatur vel fubtrahatur, prout terminus P habuerit fignum + vel − 1. Eft vero proxime $\pi^4 = 90,740909$, vnde loco termini P fubftitui poterit $\frac{P}{1 + \frac{16\mu^4}{36;n^4}}$. Hocque modo eo propius ad verum valorem ipfius π accedetur, quo maior fuerit numerus μ: hoc eft quo plures termini iam fuerint additi.

§. 13. His tamen non obftantibus feries paragrapho decimo data femper dat valorem ipfius π nimis magnum, quic-

quicquid pro n substituatur; eo propius autem acceditur, quo maior numerus pro n substituatur. Sumto enim 1 pro n prodit $\pi = 3, 1646 +$ quae expressio iam in figura secunda a vero valore $3, 14159265358979 32$ aberrat. Si ponatur $n = 3$, prodibit $\pi = 3, 141592 7216 +$ a vero valore in octaua figura discrepans. At si ponatur $n = 5$ reperietur per eandem methodum

$$\begin{array}{l} \pi = 3, 14159265359007 26 + \\ \underline{\;\;\; 3, 14159265358979 32} \\ \;\;\; 0, 00000000000027 94 \end{array}$$

cuius numeri excessus in decima tertia demum figura conspicitur. Haecque aberratio a veritate eo magis est notatu digna, quo minus vitium in ratiocinio instituto deprehendi potest. Ad quod accedit vt ista formula aberratione hac non obstante commode ad valorem ipsius π inueniendum inseruire queat, substituendo scilicet maiores numeros loco n.

§. 14. Ex his exemplis quibus 1, 3, et 5 loco n substituimus per inductionem concludi posse videtur, valorem ipsius π in fractionibus decimalibus fere ad triplo plures figuras iustum repertum iri, quam n contineat vnitates, siquidem prima figura 3 computetur; prima autem hac figura non computata videtur numerus figurarum iustarum fore $= 2\frac{1}{2}.n$. Sic si ponatur $n = 2$ reperitur $\pi = 3, 141635$ cuius quinta figura quaternario nimis est magna. Ac posito $n = 4$ prodit $\pi = 3, 14159265374 +$ cuius decima figura binario maior est vera. Posito autem $n = 6$ reperitur, $\pi = 3, 141592653589793558 +$ cuius figura demum decima sexta a veritate recedit.

§. 15. Si nunc in caussam huius a veritate aberrationis calculi inquiramus, aliam detegere non valemus, nisi diuergentiam seriei §. 10. allatae; reliqua enim omnia prorsus se recte habere deprehenduntur. Namque si t vnitatem excedat, eo maior reperietur aberratio a veritate, quo minor accipiatur numerus n; id quod clarissime se manifestabit si t ponatur infinitum atque simul n = numero infinito. Ponamus enim $t = \infty$, quo casu in §. 9. abibit z in quartam peripheriae partem, eritque ideo $z = \frac{\pi}{2}$. Sit insuper $n = pt$, denotante p numerum quemcunque affirmatiuum siue integrum siue fractum, eritque ob $z = \frac{\pi}{2} = s + \frac{1}{2p}$ ac reliqui termini omnes negligi posse videntur, quod tamen in terminis infinitesimis perperam fit, quippe qui tandem ad finitam magnitudinem excrescere possint.

§. 16. Interim tamen notari meretur errorem satis esse exiguum, nisi p sit numerus vnitate minor, atque quo maior valor ipsi p tribuatur eo minorem fore aberrationem a veritate. Cum enim hoc casu sit $s = \frac{p}{p^2+1} + \frac{p}{p^2+4} + \frac{p}{p^2+9} + \frac{p}{p^2+16} + \frac{p}{p^2+25} +$ etc. in infinitum; videatur huius seriei summa posse per quadraturam circuli definiri, quod tamen secus se habet. Per vltimam enim aequationem foret $s = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2p}$ seu $\frac{\pi}{2p} - \frac{1}{2pp} = \frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+4} + \frac{1}{p^2+9} + \frac{1}{p^2+16} +$ etc. cuius quidem aequationis falsitas si $p = 0$ sponte elucet. At sumto $p = 1$ foret $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{26} +$ etc. $= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$. Vera autem summa per alias regulas reperitur $= \frac{\pi}{2} - 0,4941222793$ ita vt illa summa sit iusto minor, idque parte $0,0058777206$ sin autem ponatur $p = 2$, habebitur ista series

series $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{80}+$ etc. cuius summa per viam hanc erroneam prodit $=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}-0,125$; cum tamen constet veram summam esse $=\frac{\pi}{4}-0,12499452207\overline{5}$, ita vt illius defectus tantum sit $=0,000005477924$. Multo autem adhuc minor erit aberratio si maiores numeri pro p accipiantur: sic si $p=3$, in nona demum figura accidet aberratio, atque quocunque numero pro p sumto prodibit summa iusta ad $3p$ figuras.

§. 17. Ex his satis perspicitur, quam caute circa summationem serierum diuergentium versari oporteat, praesertim si eiusmodi series diuergentes occurrant infinitae. Huiusque rei adhuc vnum exemplum afferre visum est, ex quo necessitas summae circumspectionis clarius elucebit. Proposita sit series quaecunque $\overset{1}{a}+\overset{2}{b}+\overset{3}{c}+\overset{4}{d}+\overset{5}{e}+\overset{6}{f}+\overset{7}{g}+\overset{8}{h}$ + etc. cuius constat terminum quemcunque indicis x fore $=a+\frac{(x-1)}{1}(b-a)+\frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}(c-2b+a)+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3}(d-3c+3b-a)+$ etc. Ex hac forma definiantur omnes termini praecedentes versus sinistram in infinitum progredientes, eritque vt sequitur

term. indicis $0=a+(a-b)+(a-2b+c)+(a-3b+3c-d)+$ etc.
term. indic. $-1=a+2(a-b)+3(a-2b+c)+4(a-3b+3c-d)+$ etc
term. indic. $-2=a+3(a-b)+6(a-2b+c)+10(a-3b+3c-d)+$ etc
term. ind. $-3=a+4(a-b)+10(a-2b+c)+20(a-3b+3c-d)+$ etc
etc.

§. 18. Colligantur omnes hi termini antecedentes in infinitum, reperieturque omnium summa $=\frac{a}{1-1}+\frac{a-b}{(1-1)^2}+\frac{a-2b+c}{(1-1)^3}+\frac{a-3b+3c-d}{(1-1)^4}+$ etc. quae in series innumerabiles secundum litteras $a, b, c, d, e,$ etc. resoluta abibit in hanc formam:

Q 3 +

$$+ a\left(\frac{1}{1-1} + \frac{1}{(1-1)^2} + \frac{1}{(1-1)^3} + \frac{1}{(1-1)^4} + \text{etc.}\right)$$
$$- b\left(\frac{1}{(1-1)^2} + \frac{2}{(1-1)^3} + \frac{3}{(1-1)^4} + \frac{4}{(1-1)^5} + \text{etc.}\right)$$
$$+ c\left(\frac{1}{(1-1)^3} + \frac{3}{(1-1)^4} + \frac{6}{(1-1)^5} + \frac{10}{(1-1)^6} + \text{etc.}\right)$$
$$- d\left(\frac{1}{(1-1)^4} + \frac{4}{(1-1)^5} + \frac{10}{(1-1)^6} + \frac{20}{(1-1)^7} + \text{etc.}\right)$$

§. 19. Series hae singulae autem summationem admittunt; atque summis earum loco substitutis prodibit aggregatum omnium terminorum antecedentium versus sinistram in infinitum, vt sequitur

$$+ a \cdot \frac{1}{(1-1)-1} = - a$$
$$- b \cdot \frac{1}{((1-1)-1)^2} = - b$$
$$+ c \cdot \frac{1}{((1-1)-1)^3} = - c$$
$$- d \cdot \frac{1}{((1-1)-1)^4} = - d$$
$$+ \text{etc.}$$

Ex quo videtur terminorum horum antecedentium summa fore $= - a - b - c - d -$ etc. Quare si series quaecunque infinita $a + b + c + d + e +$ etc. etiam versus sinistram in infinitum continuaretur, foret totius seriei vtrinque in infinitum abeuntis summa semper $= 0$; si quidem ratiocinium hoc esset iustum.

§. 20. Neque vero hoc ratiocinium semper fallit, sed in innumerabilibus seriebus veritati consentaneum deprehenditur. Primo enim omnes progressiones geometricae hac gaudent proprietate vt in infinitum vtrinque progredientes summam habeant $= 0$. Scilicet seriei $n + n^2 + n^3 + n^4 +$ etc. summa est $= \frac{n}{1-n}$ partis autem praecedentis $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} +$ etc. summa est $= \frac{n}{n-1}$, quae cum illa iuncta producit nihil. In infinitis autem

seriebus

feriebus aliis ratiocinium hoc maxime a veritate recedit, cuiusmodi est feries $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{17} +$ etc. quae antrorsum continuata fui fit fimilis et aequalis, fcilicet $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} +$ etc. cuius adeo totius fumma non fit o fed potius duplo maior. Haec igitur propofuiffe non minoris vtilitatis effe arbitror, quam fummo rigore demonftratas veritates.

DE

DE NOVO GENERE OSCILLATIONVM.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Quamuis doctrina de oscillationibus corporumque motibus reciprocis iam tanto studio sit pertractata, vt in ea nihil omnino noui proferri posse videatur; tamen in hac dissertatione nouum prorsus genus oscillationum sum prolaturus, quod cum a nemine adhuc tactum est, tum etiam singulari analysi indiget. Primum quidem ansam de eo cogitandi mihi praebuit Clarissimus Collega Krafft, in dissertatione, quam de insolitis quibusdam oscillationibus horologii portatilis suspensi praelegit; deinde vero etiam, cum aestum maris essem contemplatus, deprehendi istum maris motum reciprocum ad idem oscillationum genus pertinere.

§. 2. Corpus quodcunque oscillationes perficere motuue reciproco praeditum esse dicitur, quando vel totum vel eius partes in dato spatio ita perpetuo mouentur, vt eundo et redeundo alternatim in plagas oppositas progrediantur. Hac enim ratione comparatus est motus pendulorum, qui in hac doctrina tanquam casus simplicissimus spectari solet, ad quem omnia reliqua oscillationum genera reuocari conueniat: cuiusmodi sunt vibrationes chordarum, tremores campanarum, vndulationes aquarum; atque

atque etiam fluxus et refluxus maris. In quibus omnibus motuum ſpeciebus talis reciprocatio alternaque commutatio ſecundum plagas oppoſitas fieri obſeruatur.

§. 3. Cum igitur haec proprietas communis ſit omni motui oſcillatorio, exponam qua in re nouum genus nunc quidem examini ſubiiciendum a reliquis ſatis iam agitatis diſcrepet. Sit ergo ACB linea vel curua vel recta id ſpatium repreſentans, in quo corpus vel portio corporis quaecunque motu reciproco feratur, ita vt alternis vicibus modo verſus dextram in directione ACB modo verſus ſiniſtram in directione BCA promoueatur. Cum igitur nullum corpus ſibi ſoli relictum et liberum iſtiusmodi motu reciproco cieri queat, ſed vniformiter in directum progredi nitatur, viribus opus eſt ad motum oſcillatorium producendum, in quarum diſcrimine praecipua diuerſitas ipſius motus oſcillatorii conſiſtit. Tab. I. Fig. 6. et 7.

§. 4. Quando autem ad vires attendimus perinde eſt cuiusnam figurae ſpatium, in quo fit motus, accipiamus; et propterea hoc ſpatium commodiſſime nobis repraeſentabitur per lineam rectam ACB. Cum igitur motus alternatim verſus dextram et ſiniſtram contingat, eiusmodi opus eſt viribus, quae corpus modo verſus dextram modo verſus ſiniſtram impellant. Hae ergo vires debent eſſe maxime variabiles, atque ſubinde ſui negatiuae fieri; vis enim verſus ſiniſtram pellens conſiderari poteſt inſtar vis negatiuae verſus dextram vrgentis. Quare ſi fuerit p vis, quae corpus, dum in M verſatur, ſollicitat, neceſſe eſt vt p ſit quantitas variabilis, quae non ſolum pro variis circumſtantiis maior minorue fiat, ſed etiam in ſui negatiuam abeat. Fig. 7.

§. 5. Quodsi quantitas huius vis per p solum locum, quem corpus in spatio ACB occupat, determinatur, oscillationes inde ortas ad primum genus refero: in hocque genere continentur omnes oscillationum species etiamnum tractatae, quae quidem in vacuo fieri ponuntur. Pro hoc itaque oscillationum genere vis p exprimetur functione quapiam quantitatis, a qua locus corporis M pendet, scilicet functione quadam spatii MC, existente C puncto fixo spatii ACB. Quoties autem istiusmodi oscillationes isochronae deprehenduntur, vis p directe proportionalis est spatio MC; quae si corpus versetur inter A et C, tendit ad dextram, corpore autem inter C et B puta in N existente, sui fit negatiua atque corpus versus sinistram vrgebit vi, quae sit vt NC.

§. 6 Ad secundum oscillationum genus refero eas, quae oriuntur a vi p partim a spatio MC partim a celeritate, quam corpus in M habet, pendente, eritque his casibus p functio quaedam cum spatii MC tum etiam celeritatis in M. Ad hoc genus praecipue pertinent eae oscillationes, quae in medio resistente fieri concipiuntur: quia enim resistentia functioni cuidam celeritatis est proportionalis, corpus praeter vim sollicitantem absolutam retardari censendum est a resistentia, quae est vis directioni motus, quam corpus habet, perpetuo contraria. Quomodo autem pro data lege resistentiae vim absolutam comparatam esse oporteat, vt oscillationes fiant isochronae, id in Tractatu meo de motu corporum fusius exposui.

§. 7. Ad tertium denique oscillationum genus eas refero, in quibus corpus praeter vim absolutam a spatio MC pendentem sollicitatur a vi, cuius quantitas determinatur

minatur per tempus, quod a termino quodam fixo eſt ellapſum, dum corpus in M verſatur. Huiusmodi oſcillationes a nemine adhuc, quantum ſcio, ad calculum ſunt reuocatae; etiamſi tales oſcillationes non parui momenti in mundo fieri quotidie obſeruentur. Ad hoc enim genus pertinent oſcillationes ſupra memoratae atque a Clariſſimo Profeſſore Krafft primum obſeruatae, in quibus vires oſcillationes producentes a motu horologii interno atque idcirco a tempore pendent; accedit autem inſuper vis abſoluta a pondere horologii oriunda, quae diſtantiae a ſitu aequilibrii eſt proportionalis.

§. 8. Manifeſtum autem eſt in eodem hoc genere contineri motum maris reciprocum ſeu alternam eleuationem et depreſſionem. Praecipua enim vis mare ad hunc motum ciens a loco lunae pendet, qua interuallo duodecim fere *horarum* alternatim attollitur atque deprimitur: vnde haec vis neque a ſitu aquae neque ab eius celeritate pendet, ſed potius a temporis momento. Praeter hanc vero vim mare vrgetur a vi propria grauitatis, qua ſi ſupra libellam ſit eleuatum, deprimitur, contra vero attollitur, ſi eius ſuperficies infra libellam verſetur. Quocirca ſi ex effectu harum duarum virium motus maris debeat definiri, ante natura oſcillationum ad hoc tertium genus pertinentium inueſtigari oportebit.

§. 9. Ponamus igitur oſcillationes fieri in ſpatio ACB, corpusque dum in M verſatur ſollicitari a duplici vi, quarum altera a loco M pendeat ſpatioque MC ſit proportionalis: ab hac ergo vi corpus, dum in ſpatio AC exiſtit, vrgebitur verſus dextram, contra autem, ſi ſit in ſpatio BC ſitum, verſus ſiniſtram. Altera autem vis pendeat a Tab. I fig. 7 et 8.

tempore, eaque corpus certis momentis verſus dextram, certisque aliis momentis verſus ſiniſtram impelli, idque ſine vllo reſpectu ad corporis locum habito. Exprimamus autem tempus vniformiter fluens per peripheriam circuli FDHE, quippe quae, cum in ſe ipſam redeat, idonea eſt ad tempus quantumuis denotandum. Vires porro ſint proportionales ſinibus arcuum tempora denotantium, vrgeantque eae verſus dextram, ſi ſint affirmatiui, contra vero ſi fiant negatiui verſus ſiniſtram.

§. 10. Sit F temporis initium, quo oſcillationes inceperunt, fluatque tempus ſecundum ductum FTDHE. Initio igitur hoc vis corpus ſollicitans erit nulla, at poſt tempus FT corpus verſus dextram pelletur vi vt PT; quae vis fiet maxima elapſo tempore FD; poſtmodum iterum decreſcet, donec euaneſcat poſt tempus FDH. Deinde dum tempus ex H per E in F fluit, vis iſta erit negatiua, ac corpus verſus ſiniſtram ſollicitabit; atque elapſo tempore per totam peripheriam expreſſo, eaedem vis ſollicitantis redibunt reuolutiones, vnde in corpore propoſito motum oſcillatorium generari neceſſe eſt; idque ſi hae ſolae vires agerent: a priori autem vi abſoluta a loco corporis pendente iſte motus oſcillatorius eo magis turbabitur, quo maior quouis momento inter has vires reperietur diſſenſus.

§. 11. Ponatur circuli FDHE radius $FG = DG = a$; tota circumferentia $FDHE = 4c$ ita vt c quadrantem circuli denotet: atque elapſum iam ſit tempus per arcum FT repraeſentatum, quod poſito arcu $FT = t$, ſit $= \frac{t}{\sqrt{a}}$: ob homogeneitatem enim conuenit tempus per functionem dimidiae dimenſionis linearum exprimi. Hoc praeterea tempo-

temporis momento exiſtat corpus in loco M, ſitque ſpatium $MC = s$; atque hoc in loco celeritatem habeat verſus dextram tantam, quanta debetur altitudini v. Hoc ergo in loco a priori vi verſus dextram ſollicitabitur, haecque vis, cum proportionalis ſit ſpatio MC, ponatur $= \frac{s}{b}$ exiſtente vi grauitatis $= 1$.

§. 12. Ab altera igitur vi a tempore pendente pariter vrgebitur ad dextram, ſinui PT proportionaliter, ſi quidem ſinus arcus FT ſit affirmatiuus. Ponamus arcus $FT = t$ ſinum $PT = y$, atque vim corpus verſus dextram pellentem eſſe $= \frac{y}{g}$. Cum igitur corpus in M ſollicitetur ab his viribus coniunctim in eandem plagam puta verſus dextram vi $= \frac{s}{b} + \frac{y}{g}$; acceleratio, dum ſpatii elementum Mm abſoluit, innoteſcet. Quoniam vero eſt $Mm = -ds$ prodibit per legem accelerationis $dv = -ds\left(\frac{s}{b} + \frac{y}{g}\right)$, cuius aequationis integratio determinanda erit ex initio motus, ſcilicet ex loco, quem tum corpus occupauit a celeritate, quam eo tempore habuit.

§. 13. Praeter hanc vero aequationem natura circuli ſuppeditat iſtam $dt = \frac{a\,dy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$ ex qua fit $t = a\,\text{A ſin.}\,\frac{y}{a}$ denotante $\text{A ſin.}\,\frac{y}{a}$ arcum cuius ſinus eſt $\frac{y}{a}$ in circulo ſemidiametrum habente $= 1$: ſimilique modo inuerſe erit $y = a\,\text{ſin. A}\,\frac{t}{a}$: denotante pariter $\text{ſin. A}\,\frac{t}{a}$, in circulo cuius radius eſt 1, ſinum arcus $\frac{t}{a}$. Si ergo fiat $t = c$, erit $y = a$ et ſi $t = 2c$ fiet $y = 0$; ac generaliter denotante i numerum quemcunque integrum, ſi fuerit $t = 2ic$ erit $y = 0$; ſin $t = (4i + 1)c$ erit $y = a$; at ſi $t = (4i - 1)c$; fiet $y = -a$. Hinc igitur pro lubitu t loco y, vel y loco t in computum introducetur.

leritas in $M = \sqrt{v} = \frac{-ds\sqrt{a}}{dt} = \frac{-Ca - a^2 \operatorname{cof.} A \frac{t}{a}}{2g\sqrt{a}}$. Ponatur initio temporis celeritas fuisse versus dextram et debita esse altitudini b; erit $2g\sqrt{ab} = -Ca - a^2$ ideoque $Ca = -a^2 - 2g\sqrt{ab}$, ex quo fiet post tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$ celeritas in eandem plagam $\sqrt{v} = \sqrt{b} \frac{+ a\sqrt{a} \operatorname{fin.} v. A \frac{t}{a}}{2g}$.

§. 19. Cum igitur finus versus cuiusque arcus semper sit affirmatiuus, intelligitur celeritatem $\sqrt{v}$ semper fore affirmatiuam seu versus dextram esse directam, si quidem initio temporis celeritas $\sqrt{b}$ in eandem plagam tendat. Hoc ergo casu corpus per rectam A B in infinitum progredietur, motu quidem inaequabili; elapsis enim temporibus $\frac{0}{\sqrt{a}}$; $\frac{4c}{\sqrt{a}}$; $\frac{8c}{\sqrt{a}}$; $\frac{12c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{4ic}{\sqrt{a}}$ celeritas corporis a sinistra ad dextram erit $= \sqrt{b}$; elapsis autem temporibus $\frac{c}{\sqrt{a}}$; $\frac{3c}{\sqrt{a}}$; $\frac{5c}{\sqrt{a}}$; et generatim $\frac{(2i+1)c}{\sqrt{a}}$ celeritas erit $= \sqrt{b} + \frac{a\sqrt{a}}{2g}$; temporibus denique $\frac{2c}{\sqrt{a}}$; $\frac{6c}{\sqrt{a}}$; $\frac{10c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{2(2i+1)c}{\sqrt{a}}$ celeritas erit maxima et $= \sqrt{b} + \frac{a\sqrt{a}}{g}$. Quamobrem nisi celeritas initialis $\sqrt{b}$ sit negatiua seu versus sinistram tendat, motus non dabitur reciprocus, nullaeque absoluentur oscillationes.

§. 20. Vt igitur motus oriatur oscillatorius, quo corpus perpetuo in eodem interuallo contineatur, in quo alternis vicibus eundo et redeundo moueatur, necesse est vt celeritas aeque saepe fiat negatiua ac affirmatiua: id quod eueniet, si corpus initio versus sinistram moueatur celeritate $= \frac{a\sqrt{a}}{2g}$: seu ponendo $\sqrt{b} = \frac{-a\sqrt{a}}{2g}$. Hac autem hypothesi facta prodibit ad datum tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$ celeritas ver-

fus

ſus dextram ſeu $\sqrt{v} = \frac{-a\sqrt{a}.\text{coſ. A}\frac{t}{a}}{2g}$. Temporibus igitur $\frac{0}{\sqrt{a}}$; $\frac{4c}{\sqrt{a}}$; $\frac{8c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{4ic}{\sqrt{a}}$, celeritas erit $= \frac{-a\sqrt{a}}{2g}$; temporibus $\frac{c}{\sqrt{a}}$; $\frac{5c}{\sqrt{a}}$; $\frac{9c}{\sqrt{a}}$ et generaliter tempore $\frac{(4i+1)c}{\sqrt{a}}$; itemque temporibus $\frac{3c}{\sqrt{a}}$; $\frac{7c}{\sqrt{a}}$ et generaliter tempore $\frac{(4i+3)c}{\sqrt{a}}$ celeritas erit $= 0$. Temporibus denique $\frac{2c}{\sqrt{a}}$; $\frac{6c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{(4i+2)c}{\sqrt{a}}$ celeritas erit $= \frac{a\sqrt{a}}{2g}$

§. 21. Cum igitur caſu quo oſcillationes regulares abſoluuntur, ſit $\sqrt{v} = \frac{-a\sqrt{a}}{2g}$ coſ. A $\frac{t}{a}$; erit $\frac{ds}{dt} = \frac{a}{2g}$ coſ. $\frac{t}{a}$, ſeu $2gds = adt$ coſ. A $\frac{t}{a}$, cuius integrale eſt $2gs = C + aa$ ſin. A $\frac{t}{a}$. Ponatur conſtans $C = 0$, quo ſpatium s quod a medio puncto C computatur, tam crebro fiat negatiuum quam affirmatiuum, erit $s = \frac{aa}{2g}$ ſin. A $\frac{t}{a}$. *Temporibus* ergo $\frac{0}{\sqrt{a}}$; $\frac{2c}{\sqrt{a}}$; $\frac{4c}{\sqrt{a}}$ et $\frac{2ic}{\sqrt{a}}$ corpus exiſtet in puncto C. Temporibus vero $\frac{c}{\sqrt{a}}$; $\frac{5c}{\sqrt{a}}$, et generaliter $\frac{(4i+1)c}{\sqrt{a}}$ corpus verſabitur in A, exiſtente CA $= \frac{aa}{2g}$. Temporibus autem $\frac{3c}{\sqrt{a}}$; $\frac{7c}{\sqrt{a}}$ et generaliter $\frac{(4i+3)c}{\sqrt{a}}$ corpus ſitum erit in B, exiſtente CB $= \frac{aa}{2g}$. Tempus denique, quo corpus vel ex A in B vel viciſſim ex B in A pertingit erit $= \frac{2c}{\sqrt{a}} = \pi\sqrt{a}$ denotante $1 : \pi$ rationem diametri ad peripheriam.

§. 22. His igitur caſibus euolutis iam ſatis intelligere licet, quomodo in integratione aequationis differentio differentialis $2addds + \frac{sdt^2}{b} + \frac{adt^2}{g}$ ſin. A $\frac{t}{a} = 0$ verſari oporteat; ex qua aequatione deriuandus eſt motus, corpus ſi ab vtraque vi coniunctim cieatur. Ac primo quidem tentemus integrationem eo modo, quo in integrationibus

 aequa-

aequationum differentialium cuiuscunque gradus, in quibus altera variabiles plus vna dimensione non habet, vti soleo. Qui modus, tametsi ad constructionem aequationis propositae manuducet, tamen vehementer implicabitur formulis integralibus, ita vt alia integrandi methodus particularis quidem illi sit anteferenda.

§. 23. Methodus autem mea prior ita se habet: reiectis omnibus terminis, in quibus illa variabilis, quae plures vna dimensiones nusquam habet, non inest, residua aequatio integretur. Ex nostra igitur aequatione emerget ista $2adds + \frac{sdt^2}{b} = 0$, quae, cum sit ea ipsa, quam primo casu habuimus, bis integrata dabit $t = V\,2ab$. A cos. $\frac{s}{C}$ ex qua oritur $s = C$ cos. A . $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$. Quo ipsius s valore inuento regula mea porro postulat, vt s producto ex hoc valore in nouam variabilem ponatur aequalis: sit itaque $s = u$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$, erit $ds = du$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{udt}{\sqrt{2ab}}$ sin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$; atque $dds = ddu$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{2dtdu}{\sqrt{2ab}}$ sin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{udt^2}{2ab}$. cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$.

§. 24. Si iam isti valores in aequatione proposita $2adds + \frac{sdt^2}{b} + \frac{adt^2}{g}$ sin. A $\frac{t}{a} = 0$ substituantur, prodibit ista aequatio $2addu$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{4adudt}{\sqrt{2ab}}$ sin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{adt^2}{g}$ sin. A $\frac{t}{a} = 0$. Cum nunc habeatur aequatio, in qua altera variabilis u ipsa non inest, ponatur $du = pdt$, atque aequatio proposita abibit in hanc differentialem primi gradus $2adp$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{4apdt}{\sqrt{2ab}}$ sin. A . $\frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{adt}{g}$ sin. A $\frac{t}{a} = 0$: quae vlterius transit in hanc $dp - \frac{2pdt}{\sqrt{2ab}}$ tang. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} = -\frac{dt}{2g} \cdot \frac{\text{sin. A}\frac{t}{a}}{\text{cos. A}\frac{t}{\sqrt{2ab}}}$ quae ad integrationem magis est accommodata.

§. 25. Cum nunc sit $\frac{-dt}{\sqrt{2ab}}$ sin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ = diff. cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$, aequatio vltima transformabitur in hanc $dp +$ $\frac{2p \text{ diff. cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}}}{\text{cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}}} = \frac{-dt}{2g} \cdot \frac{\text{sin. A } \frac{t}{a}}{\text{cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}}}$ quae multiplicata per cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$. cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ fit integrabilis, atque integralis aequatio erit haec p cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$. cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} = C - \frac{1}{2g}$ $\int dt$ sin. A $\frac{t}{a}$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ vel si constans in ipso integrali inuoluatur, erit $p = \frac{-1}{2g \text{ cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}}}$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} \int dt$ sin. A $\frac{t}{a}$. cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ Cum igitur per t detur p, ex eo reperietur $u = \int p\, dt$ ac denique $s =$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} \cdot \int p\, dt$.

§. 26. Quantumuis autem non solum prima integratio, sed etiam altera difficiles videantur, tamen vtraque re bene perpensa satis commode absolui potest. Transmutatione enim integralium fit $\int dt$ sin. A $\frac{t}{a}$ cos. A. $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ $= \sqrt{2ab}$ sin. A $\frac{t}{a}$ sin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{\sqrt{2ab}}{a} . \int dt$ cos. A $\frac{t}{a}$. sin $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ $= \sqrt{2ab}$ sin. A $\frac{t}{a}$ sin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} + 2b$ cos. A $\frac{t}{a}$. cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ $+ \frac{2b}{a} \int dt$ sin. A $\frac{t}{a}$. cos. A. $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$, quae posterior formula integralis cum propositae sit similis, habebitur $\int dt$ sin. A $\frac{t}{a}$ cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} = \frac{a\sqrt{2ab}. \text{ sin. A } \frac{t}{a} \text{. sin. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}} + 2ab \text{ cos. A } \frac{t}{a} \text{. cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}}}{a-2b}$ $+ C$ vnde fiet $p = \frac{C}{\text{cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}} \text{ . cos. A. } \frac{t}{\sqrt{2ab}}} -$

$$\frac{a\sqrt{2ab}\text{. sin. A. } \frac{t}{a} \text{ . } \int \text{A . } \frac{t}{\sqrt{2ab}} - 2ab \text{ cos. A } \frac{t}{a} \text{ cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}}}{2g(a-2b) \text{ cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}} \text{ . cos. A } \frac{t}{\sqrt{2ab}}}.$$

ex qua aequatione valor ipsius p per quantitates finitas habetur expressus.

§. 27. Quoniam porro est $u = \int p\,dt$, multiplicetur valor ipsius p inuentus per dt, quo facto singula membra deprehendentur integrabilia; prodibit autem $u = D + \frac{C \text{ fin. } A \frac{t}{\sqrt{2ab}}}{\text{cof. } A \frac{t}{\sqrt{2ab}}} - \frac{a^2 b \text{ fin. } A \frac{t}{a}}{g(a-2b) \text{ cof. } \frac{t}{\sqrt{2ab}}}$. Quare cum fit $s = u$ cof. $A \frac{t}{\sqrt{2ab}}$ orietur tandem ista aequatio $s = D \text{ cof. } A \frac{t}{\sqrt{2ab}} + C \text{ fin. } A \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2 b \text{ fin. } A \frac{t}{a}}{g(a-2b)}$, cuius quantitates constantes ex circumstantiis casus propositi debent definiri. Quod, quo facilius fieri queat, celeritas $\sqrt{v}$ est definienda, quae cum sit $= \frac{-ds\sqrt{a}}{dt}$, erit $\sqrt{v} = \frac{+D}{\sqrt{2b}} \text{ fin. } A \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{C}{\sqrt{2b}} \text{ cof. } A \frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{ab\sqrt{a} \cdot \text{cof. } \frac{t}{a}}{g(a-2b)}$. Ex his ergo aequationibus ad datum quoduis tempus cum locus corporis in recta AB tum etiam celeritas, qua mouebitur, poterit determinari.

§. 28. Casus quo $2b = a$ seu $\sqrt{2ab} = a$, peculiari indiget integratione, neque praecedens ad hunc casum patet. Erit enim $\int dt \text{ fin. } A \frac{t}{a} . \text{ cof. } A \frac{t}{a} = \frac{1}{2} a \text{ fin. } A \frac{t}{a} . \text{ fin. } A \frac{t}{a} + C$. ideoque $p = \frac{C}{\text{cof. } A \frac{t}{a} . \text{ cof. } A \frac{t}{a}} - \frac{a \text{ fin. } A . \frac{t}{a} \text{ fin. } A \frac{t}{a}}{4g \text{ cof. } A \frac{t}{a} . \text{ cof. } A \frac{t}{a}}$.

$$\text{Vnde fit } \int p\,dt = u = \frac{C \text{ fin. } A \frac{t}{a}}{\text{cof. } A \frac{t}{a}} - \frac{a^2 \text{ fin. } A . \frac{t}{a}}{4g \text{ cof. } A \frac{t}{a}} + \frac{at}{4g} + D.$$

Consequenter habebitur $s = D \text{ cof. } A \frac{t}{a} + C \text{ fin. } A . \frac{t}{a} + \frac{at}{4g} \text{ cof. } A \frac{t}{a}$. mutata constante C. Hinc itaque oritur $\sqrt{v} = \frac{-ds\sqrt{a}}{dt} = \frac{D}{\sqrt{a}} \text{ fin. } A \frac{t}{a} - \frac{C}{\sqrt{a}} \text{ cof. } A \frac{t}{a} - \frac{a\sqrt{a}}{4g} \text{ cof. } A \frac{t}{a} + \frac{t\sqrt{a}}{4g} \text{ fin. } A \frac{t}{a}$.

A $\frac{t}{a}$. Ex quo iſtae oſcillationes poſt tempus infinitum in infinitum excreſcent ac per ſpatium infinite magnum excurrent.

§. 29. Cum iſtae integrationes penitus ſint inſolitae, ac propterea non cuiuis diiudicatu faciles, aliam methodum particularem exponam, cuius ope eaedem aequationes integrales erui queant. Cum aequatio propoſita eſſet $2\,a\,dds + \frac{sdt^2}{b} + \frac{adt^2}{g}$ ſin. A $\frac{t}{a} = 0$, ea ſinum arcus $\frac{t}{a}$ per ſeriem exprimendo tranſibit in hanc $2\,a\,dds + \frac{sdt^2}{b} + \frac{dt^2}{g}$ ($t - \frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3a^2} + \frac{t^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a^4} - \frac{t^7}{1\cdot 2\ldots 7a^6} +$ etc.) $= 0$. Aſſumatur iam pro s iſte valor indefinitus, $s = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 + \varepsilon t^4 + \zeta t^5 + \eta t^6 +$ etc. erit ſubſtitutione facta vt ſequitur:

$$\frac{2adds}{dt^2} = 2\cdot 1\cdot 2\gamma a + 2\cdot 2\cdot 3\delta at + 2\cdot 3\cdot 4\varepsilon at^2 + 2\cdot 4\cdot 5\zeta at^3 + 2\cdot 5\cdot 6\eta at^4 + \text{etc.}$$

$$\frac{s}{b} = \frac{\alpha}{b} + \frac{\beta t}{b} + \frac{\gamma t^2}{b} + \frac{\delta t^3}{b} + \frac{\varepsilon t^4}{b} + \text{etc.}$$

$$\frac{a}{g}\text{ ſin. A}\frac{t}{a} = \frac{t}{g} - \frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3a^2g} + \text{etc.}$$

§. 30. Si nunc harum trium ſerierum termini ſinguli homogenei ponantur $= 0$, coefficientes aſſumti ſeriei, cui s aequale eſt poſitum, ita definientur vt ſit:

$$\gamma = \frac{-\alpha}{1\cdot 2\cdot 2ab}\,;\quad \delta = \frac{-b-\beta g}{2\cdot 3g\cdot 2ab}\,;\quad \varepsilon = \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2^2a^2b^2}$$

$$\zeta = \frac{2b + a + \frac{\beta ag}{b}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2^2\cdot a^3gb}\,;\quad \eta = \frac{-\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,2^3\cdot a^3b^3}$$

$$\theta = \frac{-b - \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4b} - \frac{\beta a^2g}{4bb}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots 7\cdot 2a^5bg}\,.\quad 2 = \frac{\alpha}{1\cdot 2\cdots\cdots 8\cdot 2^4a^4b^4}$$

$$\varkappa = \frac{b + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4b} + \frac{a^3}{8bb} + \frac{\beta a^3g}{8b^3}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots 9\cdot 2a^7bg}\,;\quad \lambda = \frac{-\alpha}{1\cdot 2\cdots\cdots 10\cdot 2^5a^5b^5}$$

$$\mu = \frac{-b - \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4b} - \frac{a^3}{8bb} - \frac{a^4}{16b^3} - \frac{\beta a^4g}{16b^4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots 11\cdot 2a^9bg}\,;\quad \text{etc.}$$

vnde reliquorum coefficientium valores cognoſci poterunt.

§. 31 Coefficientes quidem poteſtatum parium ipſius t ſatis regulariter progrediuntur, at poteſtatum imparium exponentes ad has formas rediguntur.

$$\beta = \beta\,; \qquad \delta = \frac{-a+2b}{1\cdot2\cdot3\cdot2ag(a-2b)} - \frac{\beta}{1\cdot2\cdot3\cdot2ab}$$

$$\zeta = \frac{a^2-4b^2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot4a^3bg(a-2b)} + \frac{\beta}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot4a^2b^2}$$

$$\theta = \frac{-a^3+8b^3}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots7\cdot8a^5b^2g(a-2b)} - \frac{\beta}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdot7\cdot8a^3b^3}$$

$$\varkappa = \frac{a^4-16b^4}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdot9\cdot16a^7b^3g(a-2b)} + \frac{\beta}{1\cdot2\cdots9\cdot16a^4b^4}$$

etc.

Quare ſi ſeries $\alpha + \beta t + \gamma t^2 +$ etc. in ſeries ſimplices regulares reſoluatur, prodibit $s =$

$$\alpha\left(1 - \frac{t^2}{1\cdot2\cdot2ab} + \frac{t^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot4a^2b^2} - \frac{t^6}{1\cdot2\cdot3\cdots6\cdot8a^3b^3} + \text{etc.}\right)$$

$$+\beta\sqrt{2ab}\left(\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{t^3}{1\cdot2\cdot3\cdot2ab\sqrt{2ab}} + \frac{t^5}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdot5\cdot4a^2b^3\sqrt{2ab}} - \text{etc.}\right)$$

$$+\frac{ab\sqrt{2ab}}{g(a-2b)}\left(\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{t^3}{1\cdot2\cdot3\cdot2ab\sqrt{2ab}} + \frac{t^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot4a^2b^2\sqrt{2ab}} - \text{etc.}\right)$$

$$-\frac{a^2b}{g(a-2b)}\left(\frac{t}{a} - \frac{t^7}{1\cdot2\cdot3\cdot a^3} + \frac{t^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot a^5} - \text{etc.}\right)$$

quae ſeries cum ſingulae ſint ſummabiles, obtinebitur loco s ſequens valor finitus, $s = \alpha \text{ coſ. A} \,.\, \frac{t}{\sqrt{2ab}} + \beta\sqrt{2ab} \,.\, \text{ſin. A} \,.\, \frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{ab\sqrt{2ab}}{g(a-2b)} \text{ ſin. A} \,.\, \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2b}{g(a-2b)} \text{ ſin. A} \,.\, \frac{t}{a}$. quae aequatio ſi conſtantes α et β aliquantillum mutentur plane congruit cum ea, quae ſupra §. 27. ope integrationis eſt eruta.

§. 32. Retineamus aequationes ſupra inuentas $s = \text{D coſ. A} \,.\, \frac{t}{\sqrt{2ab}} + \text{C ſin. A} \,.\, \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2b}{g(a-2b)} \text{ ſin. A} \frac{t}{a}$ et $\sqrt{v} = \frac{\text{D}}{\sqrt{2b}} \text{ ſin. A} \,.\, \frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{\text{C}}{\sqrt{2b}} \text{ coſ. A} \frac{t}{\sqrt{2ab}} + \frac{ab\sqrt{a}}{g(a-2b)} \text{ coſ. A} \frac{t}{a}$ in quibus caſus ambo ſpeciales ſupra tractati egregie continentur. Ponamus nunc autem initio quo $t = 0$, corpus quieuiſſe in C, ita vt tum fuerit tam $s = 0$ quam $\sqrt{v} = 0$. Fiet itaque $\text{D} = 0$; et $\text{C} = \frac{ab\sqrt{2ab}}{g(a-2b)}$, quibus valoribus

loribus substitutis erit $s = \frac{ab\sqrt{2ab}}{g(a-2b)}$ sin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} - \frac{a^2 b}{g(a-2b)}$ sin. A $\frac{t}{a}$ atque $\sqrt{v} = \frac{ab\sqrt{a}}{g(a-2b)}$ (cos. A $\frac{t}{a}$ — cos. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$), ex quibus aequationibus ad datum tempus tum locus corporis, tum eius celeritas innotescent.

§. 33. Vt naturam harum oscillationum penitius inspiciamus, varias relationes quantitatum a et b contemplemur, quibus arcus $\frac{t}{a}$ et $\frac{t}{\sqrt{2ab}}$ commensurabiles reddantur. Ac primo quidem incipiamus a maximo ipsius b valore, quo casu vis a spatio s pendens euanescit. Cum igitur hoc casu sit sin. A $\frac{t}{\sqrt{2ab}} = \frac{t}{\sqrt{2ab}}$, fiet $s = \frac{-at}{2g} + \frac{a^2}{2g}$ sin. A $\frac{t}{a}$; atque $\sqrt{v} = \frac{+a\sqrt{a}}{2g}$ f vers. A $\frac{t}{a}$. Ergo

si tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit spatium s	ac velocitas $\sqrt{v}$
$\frac{0c}{\sqrt{a}}$	0	0
$\frac{c}{\sqrt{a}}$	$\frac{-ac+aa}{2g}$	$\frac{a\sqrt{a}}{2g}$
$\frac{2c}{\sqrt{a}}$	$\frac{-2ac}{2g}$	$\frac{2a\sqrt{a}}{2g}$
$\frac{3c}{\sqrt{a}}$	$\frac{-3ac-aa}{2g}$	$\frac{a\sqrt{a}}{2g}$
$\frac{4c}{\sqrt{a}}$	$\frac{-4ac}{2g}$	0
$\frac{5c}{\sqrt{a}}$	$\frac{-5ac+aa}{2g}$	$\frac{a\sqrt{a}}{2g}$.

§. 34. Hoc igitur casu, quo cum b ponimus infinitum, tum corpus initio in C quieuisse assumimus, corpus ex C versus dextram CB continuo vltra progredietur, motu alternatim accelerato et retardato. Quanquam autem hoc casu oscillationes non contingunt, tamen ab eo examen ordiri visum est, vt nexus inter motus hoc modo oriundos, dum b pedetentim minorem valorem consequitur, clarius pateat. Ponamus $b = \frac{nna}{2}$ vt sit $\sqrt{2ab} = na$; vnde fiet $s = \frac{n^2 a^2}{2g(nn-1)}$ (sin. A $\frac{t}{a} - n$ sin. A $\frac{t}{na}$) atque $\sqrt{v} = \frac{n^2 a\sqrt{a}}{2g(nn-1)}$ (cos. A $\frac{t}{na}$ — cos. A . $\frac{t}{a}$): in quibus ex-

expreſſionibus arcuum $\frac{t}{a}$ et $\frac{t}{na}$ ſinus et coſinus inter ſe comparari poterunt, quoties n fuerit numerus rationalis.

§. 35. A valore ipſius n, qui priore caſu erat infinitus, deſcendamus ad valores continuo minores, quoad perueniatur ad caſum $n = 1$; quo per peculiarem aequationem fit $s = \frac{-a^2}{4g}$ ſin. A $\frac{t}{a} + \frac{at}{4g}$ coſ. A $\frac{t}{a}$; $ac\sqrt{v} = \frac{t\sqrt{a}}{4g}$ ſin. A $\frac{t}{a}$, quo caſu oſcillationes tandem in infinitum excreſcunt: motus autem ita ſe habebit.

Si tempus $= \frac{t}{\sqrt{a}}$	erit ſpatium s	ac celeritas $\sqrt{v}$
$\frac{0c}{\sqrt{a}}$	0	0
$\frac{c}{\sqrt{a}}$	$-\frac{aa}{4g}$	$+\frac{c\sqrt{a}}{4g}$
$\frac{2c}{\sqrt{a}}$	$-\frac{2ac}{4g}$	0
$\frac{3c}{\sqrt{a}}$	$+\frac{a^2}{4g}$	$-\frac{3c\sqrt{a}}{4g}$
$\frac{4c}{\sqrt{a}}$	$+\frac{4ac}{4g}$	0
$\frac{5c}{\sqrt{a}}$	$-\frac{a^2}{4g}$	$+\frac{5c\sqrt{a}}{4g}$

§. 36. Euolutis igitur caſibus, quaſi extremis, ſcilicet $n = \infty$ et $n = 1$. videamus quantum caſus intermedii, quibus pro n ſucceſſiue numeros integros ponemus, ab extremis diſcrepent. Ponamus itaque $n = 2$, ſeu $b = 2a$: erit $s = \frac{2a^2}{3g}$ (ſin. A $\frac{t}{a}$ - 2 ſin. A $\frac{t}{2a}$) atque $\sqrt{v} = \frac{2a\sqrt{a}}{3g}$ (coſ. A $\frac{t}{2a}$ - coſ. A. $\frac{t}{a}$). Quoties igitur fuerit $t = 4ic$, erit $s = 0$; at celeritas euaneſcet, quoties ſit $t = \frac{8ic}{3}$, deſignante i numerum integrum quemcunque. Motus ergo ſe habebit, vt ex hac tabella perſpicietur.

Si

Si tempus $= \frac{t}{\sqrt{a}}$	erit ſpatium s	ac celeritas $\sqrt{v}$
et $t = \frac{0c}{3}$	0	0
$t = \frac{4c}{3}$	$-\frac{2a^2}{3g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	$+\frac{4a\sqrt{a}}{3g}$ coſ. A. $\frac{2c}{3a}$
$t = \frac{8c}{3}$	$-\frac{6a^2}{3g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	0
$t = \frac{12c}{3}$	0	$-\frac{4a\sqrt{a}}{3g}$.
$t = \frac{16c}{3}$	$+\frac{6a^2}{3g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	0
$t = \frac{20c}{3}$	$+\frac{2a^2}{3g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	$+\frac{4a\sqrt{a}}{3g}$ coſ. A $\frac{2c}{3a}$
$t = \frac{24c}{3}$	0	0

§. 37. Eaedem igitur motus reuolutiones redeunt elapſo tempore $= \frac{8c}{\sqrt{a}}$, ſeu bis percurſa peripheria circuli; intereaque tres oſcillationes abſoluuntur, quarum media fit per ſpatium duplo maius quam ceterae. Simili modo progrediendo patebit, ſi ponatur $n = 3$, easdem periodos fore redituras poſt tempus $\frac{12c}{\sqrt{a}}$, ſeu peripheria circuli ter confecta: atque ita porro, donec ſi $n = \infty$, periodorum nulla fit reuolutio, atque corpus in eandem plagam perpetuo progredi pergit. Namque ſi $n = 3$, celeritas $\sqrt{v}$ toties euaneſcit, quoties euenit $t = 3ic$: ac ſi $n = 4$, celeritas corporis euaneſcet partim caſibus quibus $t = \frac{16ic}{3}$ partim quibus eſt $t = \frac{16ic}{5}$. Poſito ergo $t = \frac{16ic}{15}$, ſi loco i ſucceſſiue omnes numeri integri ſubſtituantur, celeritas corporis deprehendetur nulla caſibus quibus i eſt,

0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25 etc.

different: 3, 2, 1, 3, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 3, 1,

poſt tempus adeo $16c$ eadem periodus repetetur, ſeptiesque vna periodo celeritas corporis erit nulla, totidemque vna periodus continebit inaequales oſcillationes: ſi quidem vna oscillatio sumatur inter duos terminos, quibus celeritas est $= 0$.

§. 38. Magis fient hae oscillationes regulares, si fuerit $n < 1$ atque $\frac{1}{n}$ numerus integer. Ponamus itaque esse $b = \frac{a}{2n^2}$ vt sit $\sqrt{2ab} = \frac{a}{n}$, eritque $s = \frac{a^2}{2g(nn-1)}\left(\frac{1}{n}\,\text{sin. A.}\,\frac{nt}{a} - \text{sin. A}\,\frac{t}{a}\right)$ atque $\sqrt{v} = \frac{a\sqrt{a}}{2g(n^2-1)}\left(\text{cos. A}\,\frac{t}{a} - \text{cos. A.}\,\frac{nt}{a}\right)$. Toties igitur celeritas corporis euanescet, quoties fuerit $t = \frac{4ic}{n \pm 1}$. In idem autem punctum C quo $s = 0$ corpus non recidet, nisi sit $t = 2ic$. At si sumatur $t = \frac{4ic}{n-1}$ fiet $s = \frac{-a^2}{2gn(n+1)}\,\text{sin. A}\,\frac{t}{a}$, sin autem capiatur $t = \frac{4ic}{n+1}$, fiet $s = \frac{-a^2}{2gn(n-1)}\,\text{sin. A}\,\frac{t}{a}$. Ex his ergo formulis ponendo successiue loco n numeros 2, 3, 4, 5, etc. natae sunt sequentes tabellae, ex quibus motus oscillatorius corporis duplici vi sollicitati cognosci poterit.

Sit $n = 2$ seu $b = \frac{a}{8}$

Ad tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit spatium s	et celeritas $\sqrt{v}$
si $t = 0\,c$	0	0
si $t = c$	$-\frac{aa}{6g}$	$+\frac{a\sqrt{a}}{6g}$
si $t = \frac{4}{3}\,c$	$-\frac{aa}{4g}\,\text{sin. A}\,\frac{2c}{3a}$	0
si $t = 2\,c$	0	$-\frac{a\sqrt{a}}{3g}$
si $t = \frac{8}{3}\,c$	$+\frac{aa}{4g}\,\text{sin. A}\,\frac{2c}{3a}$	0
si $t = 3\,c$	$+\frac{aa}{6g}$	$+\frac{a\sqrt{a}}{6g}$
si $t = 4\,c$	0	0

Sit

Sit $n = 3$ seu $b = \frac{a}{18}$.

Ad tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit spatium s	et celeritas $\sqrt{v}$
si $t = 0\,c$	0	0
si $t = c$	$-\frac{aa}{12g}$	0
si $t = 2\,c$	0	0
si $t = 3\,c$	$+\frac{aa}{12g}$	0
si $t = 4\,c$	0	0

Sit $n = 4$, seu $b = \frac{a}{32}$

Ad tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit spatium s	et celeritas $\sqrt{v}$
si $t = 0$	0	0
si $t = \frac{4}{5}\,c$	$-\frac{a^2}{24g}$ sin. A $\frac{4c}{5g}$	0
si $t = c$	$-\frac{a^2}{30g}$	$-\frac{a\sqrt{a}}{30g}$
si $t = \frac{4}{3}\,c$	$-\frac{a^2}{40g}$ sin. A $\frac{2c}{3g}$	0
si $t = \frac{8}{5}\,c$	$-\frac{a^2}{24g}$ sin. A . $\frac{2c}{5g}$	0
si $t = 2\,c$	0	$-\frac{a\sqrt{a}}{15g}$
si $t = \frac{12}{5}\,c$	$+\frac{a^2}{24g}$ sin. A . $\frac{2c}{5g}$	0
si $t = \frac{8}{3}\,c$	$+\frac{a^2}{40g}$ sin. A . $\frac{2c}{3g}$	0
si $t = 3\,c$	$+\frac{a^2}{30g}$	$-\frac{a\sqrt{a}}{30g}$
si $t = \frac{16}{5}\,c$	$+\frac{a^2}{24g}$ sin. A $\frac{4c}{5g}$	0
si $t = 4\,c$	0	0

Sit $n = 5$ seu $b = \frac{a}{50}$.

Ad tempus $\frac{t}{\sqrt{a}}$	erit spatium s	et celeritas $\sqrt{v}$
si $t = 0$	0	0
si $t = \frac{2}{3}\,c$	$-\frac{aa}{40g}$ sin. A $\frac{2c}{3a}$	0
si $t = c$	$-\frac{aa}{60g}$	0
si $t = \frac{4}{3}\,c$	$-\frac{aa}{40g}$ sin. A . $\frac{2c}{3a}$	0
si $t = 2\,c$	0	0

ſi $t = \frac{8}{3}c$	$+ \frac{aa}{40g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	o
ſi $t = 3c$	$+ \frac{aa}{60g}$	o
ſi $t = \frac{10}{3}c$	$+ \frac{aa}{40g}$ ſin. A $\frac{2c}{3a}$	o
ſi $t = 4c$	o	o

§. 39. Inter hos caſus omnes maxime notari meretur is, quo erat $2b = a$: eo quod ſpatium, in quo continetur quaeque oſcillatio continuo augetur, ac tandem in infinitum excreſcit: qui effectus eo magis eſt admirandus, quod huic ſoli caſui eſt proprius, atque a viribus finitis oriatur. Ex hoc igitur caſu, ſi quidem commode ad praxin reuocari poſſet, inuentio perpetui mobilis deriuari poſſe videtur: pendulum enim in cycloide oſcillans iam ita eſt comparatum, vt impulſiones a grauitate oriundae verſus ſitum aequilibrii, ſint vt ſpatia percurrenda. Quare ſi tali pendulo iſtiusmodi automaton applicetur, quod alteram vim a tempore pendentem producat, vis oſcillationes tantopere augentis portio tum ad automati intenſionem renouandam, quoties opus eſt, tum ad reſiſtentiam et frictionem ſuperandam impendi poſſet, ita vt ſi oſcillationes non increſcant, tamen datae quantitatis perpetuo conſeruentur.

§. 40. Si nunc in cauſam inquiramus, propter quam ſolus iſte caſus oſcillationes continuo adaugeat, aliam non deprehendimus, niſi quod hoc caſu tempus vnius oſcillationis integrae ex vno itu vnoque reditu compoſitae, quae producitur a ſola actione vis a ſpatio s pendente, aequale ſit tempori, quod per totam circuli FDHE peripheriam exprimitur. Si enim corpus a ſola vi $\frac{s}{b}$ ſollicitetur, tempus vnius oſcillationis integrae ex itu et reditu

con-

constantis erit $= 2\pi \sqrt{2b} = \frac{4c}{a}\sqrt{2b}$ ob $1 : \pi = a : 2c$. Tempus autem per totam circuli peripheriam expressum est $= \frac{4c}{\sqrt{a}}$; quare vt haec tempora sint aequalia, necesse est sit $2b = a$. qui est ipse casus memoratus.

§. 41. Hinc etiam natura discriminis, quod inter oscillationes reliquorum casuum obseruauimus, penitius inspici potest. Pendet enim hoc discrimen partim a quantitate litterae g, qua quidem nulla alia diuersitas oscillationibus inducitur, nisi quod per eo maiora spatia fiant, quo minorem valorem habeat g, ceterum autem tam ratione motus quam temporis sui maneant similes. Partim autem differentia oscillationum, qua indoles ipsarum maxime immutatur, sita est in diuerso habitu literarum a et b, quo ipso ratio remporum oscillationum ab ambabus viribus seorsim oriundarum definitur. Est enim tempus vnius oscillationis sola agente vi $\frac{s}{b}$ ad tempus vnius oscillationis a sola vi $\frac{y}{g}$ ortae vt $\sqrt{2b}$ ad $\sqrt{a}$. Ex quo intelligitur, quo magis haec ratio a commensurabilitate recedat, eo magis oscillationes futuras esse irregulares.

EXPLICATIO PHAENOMENORVM QVAE A MOTV LVCIS SVCCESSIVO ORIVNTVR.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Si radii lucis in inſtanti per quantumuis magna interualla propagarentur, tum non ſolum quaeque obiecta eo ipſo momento, quo lucem emittere incipiant, apparerent, ſed etiam in eadem directione, quam radius viſiuus tenet, cernerentur, neque in hac obſeruatione motus ſiue obiecti ſiue ipſius ſpectatoris vllum diſcrimen produceret. Aliter res ſe habet, ſi radii lucis non in inſtanti propagantur, ſed ad datum ſpatium abſoluendum dato tempore opus habent. Primo enim cum obiectum ante occultum ſubito lucem emittere incipiat, id eo ipſo momento a ſpectatore non cernetur, ſed eo tardius, quo maior fuerit diſtantia inter obiectum et ſpectatorem. Deinde etiam, niſi tam obiectum quam ſpectator quieſcant, diſcrimen deprehendetur in directione, in qua obiectum apparebit; inaequalitasque intercedet inter directionem, in qua obiectum eodem momento conſpiceretur ab obſeruatore, ſi radii in inſtanti propagarentur, eamque directionem, in qua actu conſpicitur.

§. 2. Lucem autem non in inſtanti propagari euincunt obſeruationes ecclipſium ſatellitum Iouis; quibus conſtat radios

dios lucis circiter 8. minuta prima impendere ad ſpatium, quod inter ſolem et terram interiacet percurrendum. Quare ſi parallaxin ſolis horizontalem aſſummamus 10. minutorum ſecundorum, reperietur diſtantia ſolis a terra = 20618 ſemidiametrorum terreſtrium; ac lux ad tantum ſpatium abſoluendum impendet 8. minuta prima. Ex quo definiri poteſt lucis celeritas, quippe quae tanta erit, qua vno minuto ſecundo abſoluet ſpatium 43. ſemidiametrorum terreſtrium. Quodſi ergo celeritates quasuis metiamur, vti conſtanter faciemus, ſpatiis vno minuto ſecundo percurſis, erit nobis lucis celeritas per 43. exprimenda, dum vnitas ſemidiametrum terrae indicat. Ponamus autem ne nimium his obſeruationibus fidamus numerum indefinitum c pro lucis celeritate; cenſeamusque lucem tempore vnius minuti ſecundi c ſemidiametros terrae percurrere.

§. 3. Vt nunc omnia phaenomena, quae ex ſucceſſiva lucis propagatione conſequuntur, eo diſtinctius euoluamus atque ob oculos ponamus, quatuor caſus ſeorſim examini ſubieciemus. Primo ſcilicet tam obiectum quam ſpectatorem in perpetua quiete collocabimus. Secundo obiecto quidem motum tribuemus, ſpectatorem vero in quiete relinquemus. Tertio eos caſus perpendemus quibus obiectum quieſcit, ſpectator vero ſuum ſitum continuo mutat. Quarto denique vtrique cum obiecto tum ſpectatori motum adiudicabimus. Atque vt noſtra inueſtigatio latius pateat, motum, quem vel in obiecto vel ſpectatore vel in vtroque conſtituemus, tum rectilineum faciemus tum etiam curuilineum. Quod inſtitutum ſi generatim pertractaverimus, tum demum ad phaenomena corporum coeleſtium progrediemur, atque anomalias, quae ex

motu

motu lucis succeſſiuo obſeruationibus aſtronomicis inducuntur, diligenter enumerabimus.

Tab. II. fig. 1. §. 4. Quieſcat igitur obiectum lucidum in O ſitque ſpectator in A pariter in quiete conſtitutus. Ponatur diſtantia obiecti ab obſeruatore ſeu recta OA $= u$ ſemidiametrorum terrae, erit tempus quo radius ex obiecto emiſſus ad ſpectatorem pertingit $= \frac{u}{c}$ minutorum ſecundorum. Quodſi ergo obiectum ante fuerit obſcuratum, nunc autem ſubito radios emittere incipiat, non hoc ipſo momento a ſpectatore cernetur ſed demum poſt $\frac{u}{c}$ minuta ſecunda. Atque eo tardius apparere incipiet, quo longius fuerit remotum. Si igitur praeterea aliud adſit obiectum in o quod ſimul lucere incipiat, cuius a ſpectatore diſtantia Ao ſit $= v$ ſemid. terrae, id quidem prius cernetur, ſi diſtantia v minor fuerit quam u; ac poſtquam obiectum o apparuit, alterum obiectum O demum elapſis $\frac{u-v}{c}$ minutis ſecundis fiet conſpicuum.

§. 5. Quam primum autem obiectum O a ſpectatore conſpicietur, id in directione OA apparebit prorſus ac ſi radius lucis OA in inſtanti ab O ad A proceſſiſſet: neque igitur quantitas diſtantiae OA vllum diſcrimen in ſitum obiecti obſeruatum inferet. Cum enim radius lucis OA occulum ſpectatoris in quiete poſitum feriat in directione OA, obſeruator obiectum in eadem directione ſitum iudicabit. Quare cum res eodem modo ſe habeat in altero obiecto o, eadem diſtantia ſeu angulus OAo inter ambo obiecta obſeruabitur, ſiue lux propagetur in inſtanti ſiue quantumuis lente, neque diuerſitas diſtantiarum horum amborum obiectorum vllum diſcrimem in ſitu obſeruato producet. Quotcunque igitur fuerint obiecta

lucida,

lucida, dummodo singula quiescant, ea a spectatore pariter quiescente perinde ratione situs obseruabuntur, ac si propagatio lucis esset instantanea.

§. 6. Accedamus nunc ad casum secundum, quo spectator iterum ponitur quiescens in A, obiecto autem O motus tribuitur in directione OV quacunque cum celeritate. Sit distantia obiecti in O constituti a spectatore OA $= u$ semid. terrae, eiusque celeritas secundum directionem rectilineam OV tanta, qua vno minuto secundo absoluat s semidiametros terrae; sitque anguli AOV sinus $= m$, cosinus $= \mu$ existente sinu toto $= 1$. Primum igitur manifestum est, si obiectum O subito radios emittere incipiat, spectatorem obiectum non eo ipso momento visurum esse, sed aliquanto tardius, scilicet post $\frac{u}{c}$ minuta secunda: atque hoc ipso momento obiectum conspectum iri in directione AO, etiamsi hoc tempore obiectum non amplius in hoc loco O versetur. Quocirca retardatio apparitionis eodem modo est comparata, siue obiectum quiescat siue secus, haecque retardatio a sola distantia obiecti a spectatore, seu spatio a radio emetiendo donec in oculum incurrat, pendet. Tab. II. fig. 2.

§. 7. Dubium hoc loco oriri potest, quod, cum obiectum in motu positum assumatur, inde tamen radios aeque emanare statuamus, ac si obiectum quiesceret: lapis enim proiectus allegari potest, qui a motu hominis proiicientis cum ratione directionis tum etiam celeritatis afficitur. At obiecti lucidi ratio longe aliter est comparata; primo enim cum obiectum quaqua versus radios emittat, ab eo vis obiecti producetur, qui recta ab obiecto in oculum eiicitur; vnde siue obiectum quiescat siue moueatur radii id representantis eadem erit directio. Deinde nullo modo statui potest, celeritatem lucis a motu obiecti lucidi affici, cum enim veri simile sit, radios lucis non actu ab obiecto ad nos proiici, sed per aetherem vndularum instar propagari, celeritas lucis a sola aetheris elasticitate pendebit, neque motus obiecti ipsius vllo modo particeps erit. Quocirca nullum dubium superesse potest, quin emissio radiorum cum ratione directionis tum celeritatis eodem fiat modo ex obiecto vtcunque moto ac ex quiescente.

§. 8. Quamuis autem obiecti motus in emisione radiorum nil turbet, tamen directio, in qua conspicitur a spectatore, mutatur. Ponamus enim ex obiecto, dum in O est, emanare radium OA in oculum spectatoris, qui demum post $\frac{u}{c}$ minuta secunda eo pertinget. Interea autem ipsum obiectum vi motus, quo vno minuto secundo spatium s semidiametrorum terrae absoluit processit in V, ita vt sit spatium OV $= \frac{us}{c}$ semid. terrae. Ex quo spectator obiectum in O conspiciet, cum id iam revera est in V; hocque in loco eo ipso momento videret, si lux in instanti propagaretur. Vocabimus igitur directionem AV in qua obiectum tempore obseruationis actu deprehenditur, locum obiecti verum, directionem vero AO, in qua conspicitur, locum apparentem: vnde locus verus a loco apparente discrepabit angulo O A V, qui angulus in eodem plano erit constitutus, in quo spectator et via obiecti versantur.

§. 9. Vt quantitas huius discrepantiae seu anguli OA V innotescat, consideremus triangulum AOV in quo datur relatio laterum AO et OV, cum sit AO : OV $= u :$

$\frac{us}{c}$

$\frac{u}{s} = c : s$; siue erit AO ad OV vt celeritas lucis ad celeritatem obiecti; datur autem in eodem triangulo praeterea angulus AOV cuius sinus est $= m$ et cosinus $= \mu$. Quare positis quantitatibus proportionalibus c et s loco laterum OA et OV, si ex A in OV ducatur perpendicularis AP, erit AP $= mc$ et OP $= \mu c$, vnde fit VP $= \mu c - s$. Anguli igitur OAP tangens erit $= \frac{\mu}{m}$, et anguli VAP tangens $= \frac{\mu c - s}{mc}$; ex quibus emergit horum angulorum differentiae OAV tangens $= \frac{ms}{c - \mu s}$ propter $m^2 + \mu^2 = 1$. Ad locum igitur obseruatum AO obiecti versus eam regionem, in quam obiectum promouetur, addi debet angulus, cuius tangens est $\frac{ms}{c - \mu s}$ vt prodeat locus obiecti verus pro momento obseruationis. Vnde patet istam aequationem non a distantia obiecti a spectatore pendere, sed cum celeritate lucis tum celeritate obiecti tum etiam angulo O determinari.

§. 10. Si via OV in qua obiectum mouetur incidat in directionem AO vel euanescente angulo AOV vel ad duos rectos vsque excrescente, erit $m = 0$ quare hoc casu aequatio seu correctio loci apparentis fiet nulla. Posito autem angulo AOV recto quo casu fit $m = 1$ et $\mu = 0$, prodibit anguli OAV tangens $= \frac{s}{c}$, vnde differentia inter locum obiecti visum et verum eo erit maior, quo maior fuerit celeritas obiecti. At si, vti plerumque accidere solet, celeritas obiecti valde sit exigua ratione celeritatis lucis, angulus OAV valde fiet paruus, eiusque tangens quae satis tuto pro ipso arcu assumi poterit, erit $= \frac{ms}{c}$. Denique intelligitur, si lux in instanti propagaretur, tum aequationem illam ad locum obseruatum addendam euanescere ob $c = \infty$: vnde etiam locum, quo obiectum quouis momento appareret, si radii in instanti propagarentur, pro loco vero assumimus.

Tab. II. fig. 3. §. 11. Prosequamur iam obseruationes obiecti O in directum OM vniformiter progredientis videamusque sub quonam angulo OAM obiectum quouis momento apparere debeat. Maneat distantia $OA = u$, quae simul sit normalis ad semitam obiecti OM. Ponamus obseruationum initium, cum obiectum in O apparuit; reuera ergo obiectum ante iam extitit in O idque tempore $\frac{u}{c}$ minut. sec. Peruenerit obiectum in M existente anguli OAM tangente $= t$ erit $OM = ut$; quare cum obiectum spatium s minuto secundo absoluat, ex O in M peruenit tempore $\frac{ut}{s}$ min. sec. postquam ergo in O fuit obseruatum, tempore $\frac{ut}{s} - \frac{u}{c}$ min. secund. in M existet. Quoniam nunc obiectum a spectatore distat interuallo $MA = u\sqrt{(1+tt)}$, tardius in M conspicietur idque $\frac{u\sqrt{(1+tt)}}{c}$ minut. secund. Quocirca cum obiectum in O apparuit, ab eo momento angulum OAM cuius tangens $= t$, confecisse obseruabitur tempore $\frac{ut}{s} + \frac{u\sqrt{(1+tt)}-u}{c}$ min. secund.

§. 12. Ponamus spatium $OM = z$ semid. terrae atque obiectum vniformiter motum obseruabitur hoc spatium conficere tempore $\frac{z}{s} + \frac{\sqrt{(u^2+z^2)}-u}{c}$ men. sec. Hancobrem nisi tarditatis lucis ratio habeatur, hoc obiectum motu inaequabili progredi censebitur etiamsi reuera motu aequabili feratur. Quae inaequabilitas vt clarius intelligatur ponamus obiectum spatium $z + dz$ confecisse id quod eueniet tempore $\frac{z}{s} + \frac{\sqrt{(u^2+z^2)}-u}{c} + \frac{dz}{s} + \frac{zdz}{c\sqrt{(u^2+z^2)}}$; ex quo tempore $\frac{dz}{s} + \frac{zdz}{c\sqrt{(u^2+z^2)}}$ spatiolum dz percurrisse, ideoque

ideoque celeritatem $\frac{1}{\frac{1}{s}+\frac{z}{c\sqrt{(u^2+z^2)}}} = \frac{cs\sqrt{(u^2+z^2)}}{c\sqrt{(u^2+z^2)}+sz}$ habere aestimabitur. Atque cum spatium fere iam infinitum confecit, aestimabitur progredi celeritate $\frac{cs}{c+s}$, cum initio obseruatum esset celeritate s ferri, vnde hoc obiectum continuo retardari putabitur, quamuis reuera aequabiliter progrediatur.

§. 13. Moueatur nunc obiectum O in peripheria circuli OVMN aequabiliter, in cuius centro A constitutus sit spectator immobilis. Ponatur distantia obiecti O a spectatore A, quae perpetuo erit eadem seu radius circuli OA $= u$ semid. terrae: sitque celeritas obiecti tanta, qua singulis minutis secundis conficiat s semidiametros terrae. Si ergo ponatur ratio diametri ad peripheriam $= 1 : \pi$ obiectum reuertetur in idem punctum O, cum emensum erit spatium $2\pi u$ semidiametrorum terrae; vnde vna reuolutio absoluetur tempore $\frac{2\pi u}{s}$ minut. sec. Quare cum obiectum circa spectatorem tempore $\frac{2\pi u}{s}$ minut. sec. absoluat angulum 360. grad. dato minutorum secundorum numero, puta n, conficiet angulum $\frac{180 ns}{\pi u}$ graduum; talisque appariturus esset motus, si lux in instanti propagaretur. Tab. II. fig. 4.

§. 14. At cum radius antequam ab obiecto in O versante ad spectatorem A vsque pertingat, impendat $\frac{u}{c}$ min. sec. interea ipsum obiectum ex O promouebitur vsque in V, existente angulo OAV $= \frac{180 s}{\pi c}$ grad. Quare cum obiectum spectatori in O apparet, id eo momento reuera iam in V versabitur, ac differentia inter locum appa-

 rentem

rentem O et locum verum V erit angulus OAV $= \frac{180 s}{\pi c}$ grad. qui angulus ad locum apparentem versus plagam OM secundum quam obiectum progreditur, addi debet, vt prodeat locus obiecti verus. Deinde quia eadem ratio vbique manet, vbicunque obiectum in peripheria circuli reperiatur, ita, vt si appareat in M, locus verus sit N, differens ab obseruato angulo MAN $= \frac{180 s}{\pi c}$ grad. motus per totam peripheriam videbitur aequabilis, perinde ac si lux in instanti propagaretur.

§. 15. Ponamus tempus vnius reuolutionis obiecti per totam circuli peripheriam esse constans, vti in systemate Ptolemaico et Tychonico statuitur, quo omnia astra tempore vnius diei siderei circa terram quiescentem rotari ponuntur, sitque hoc tempus κ min. secund. habebitur haec aequatio $\frac{2\pi u}{s} = \kappa$ indeque $s = \frac{2\pi u}{\kappa}$. Quamobrem locus obiecti verus V discrepabit a loco apparente O angulo OAV $= \frac{360 u}{c\kappa}$ grad. ex quo discrimen inter locum apparentem et verum eo erit maius, quo maior fuerit distantia obiecti a spectatore. Si igitur distantia obiecti, veluti stellarum fixarum, sit quasi infinite magna, locus verus ab apparente maxime discrepabit; atque si duarum stellarum fixarum distantiae fuerint inaequales, loca apparentia quouis tempore maxime different a veris, neque distantia vera earum, seu angulus ad terram, quo a se inuicem distant, vllo modo definiri poterit.

Tab. II. fig. 5. §. 16. Pertractato casu secundo aggrediamur casum tertium, quo obiectum quiescere spectator vero moueri ponitur. Quiescat igitur obiectum in O spectator vero in A constitutus moueatur vniformiter in directione

A a,

Aa. Sit ſpectatoris celeritas $= r$ qua ſcilicet tempore vnius minuti ſecundi r ſemidiametros terrae conficiat; anguli vero OAa ſinus ſit $= m$ coſinus $= \mu$. Manifeſtum autem eſt omnia plane ac propterea etiam apparentiam manere eandem, ſiue caſus vti eſt propoſitus locum obtineat, ſiue tam ſpectatori quam obiecto motus aequabilis in directionibus parallelis tribuatur. Hancobrem concipiamus toti ſyſtemati imprimi motum in directione ipſi Aa oppoſita atque celeritate $= r$; quo fiet vt ſpectator in A quieſcat, obiectum O vero in directione OV parallela ipſi Aa promoueatur, idque celeritate $= r$. Hoc igitur pacto praeſens caſus eſt reductus ad caſum praecedentem.

§. 17. Quoniam igitur ſpectator in A quieſcit, obiectum vero in directione OV aequabiliter progreditur celeritate $= r$, angulique VOA, qui aequalis eſt angulo OAa ſinus eſt $= m$ coſinus $= \mu$, innoteſcet diſcrimen inter locum obiecti apparentem et verum. Si enim radius OA, quem obiectum dum in O erat emiſit, in oculum ſpectatoris incidat, tum ſpectator videbit obiectum in directione AO, qui erit locus apparens; hoc autem momento obiectum iam erit in puncto V′, ita vt directio AV praebeat locum verum. Inuenimus autem ante anguli OAV tangentem eſſe $= \frac{mr}{c-\mu r}$; quare ſi vera obiecti elongatio a directione Aa deſideretur, ad elongationem obſeruatam, quae erat angulus OAa, addi debet angulus, cuius tangens eſt $= \frac{mr}{c-\mu r}$, ſicque obtinebitur angulus VAa, qui exprimit veram obiecti elongationem a directione Aa tempore obſeruationis.

§. 18.

§. 18. His definitis tollamus motum communem, quem ſpectatori atque obiecto tribuimus; quo facto obiectum, vt caſus erat propoſitus, quieſcet in O, ſpectator vero celeritate r in directione Aa promouebitur. Dum autem radius ex obiecto O emittitur erat ſpectator in A vnde progredietur per aliquod ſpatium puta Aa, antequam obiectum ipſi appareat. Quam primum igitur obiectum videbit, id in directione ao conſpiciet parallela directione AO, falleturque iterum angulo oAO $=$ OAV cuius tangens eſt $= \frac{mr}{c-\mu r}$. Quamobrem ſi ſpectator qui in recta Aa vniformiter progreditur celeritate $= r$ conſpiciat obiectum lucidum ſub angulo OAa cum ſua motus directione, cuius ſinus eſt $= m$ coſinus $= \mu$, hunc angulum augere debebit angulo cuius tangens eſt $\frac{mr}{c-\mu r}$, vt obtineat directionem veram, in qua obiectum verſatur.

§. 19. Quanquam haec correctio deducta eſt ex conuerſione caſus tertii ad ſecundum, tamen aeque eſt legitima, ac ſi ex ipſius caſus propoſiti contemplatione eſſet deducta. Quamuis enim videatur, cum radius in directione OA ex obiecto O ad ſpectatorem in A ſitum perueniat, ſpectatori verum obiecti ſitum repraeſentari debere; id tamen tantum valet, quando ſpectator quieſcit. Namque ſi ſpectator in motu fuerit poſitus radius in eius oculum incidens non ſub ea directio, in retinam impingit, in quam impingeret ſi quieſceret, ſed incidentiae angulus ſimul ex motu oculi debet definiri. Simile ſcilicet hic radio accidit, quod vento in vela mota impingenti, cuius effectus definiri non poteſt, niſi ſimul motus velorum ratio habeatur.

§. 20.

§. 20. Inuestigemus igitur effectum, quem radius lucis in oculum motum exerit, et in discrimen situs apparentis et veri secundum regulas motus inquiramus. Quiescat igitur obiectum in puncto O, spectator vero vniformiter promoueatur in recta AE celeritate r: ac dum in A versatur excipiat radium OA ex obiecto emissum. Cum ergo radius in directione OA celeritate c impingat in oculum A celeritate r in directione AE motum, resoluatur motus radii in duos laterales, quorum alter PA sit normalis ad AE, alter OP cum directione AE congruat. Quodsi igitur OA celeritatem lucis c exprimat, erit PA vt celeritas normalis ad AE, et OP erit celeritas in directione EA, quae cum sit contraria celeritati oculi r, eundem praestabit effectum, ac si celeritate r augeretur, atque in oculum quiescentem incurreret. Tab. II. fig. 6.

§. 21. Sumta ergo AE tanta, vt sit $OA : AE = c : r$, celeritas radii OP augeatur parte $OQ = AE$ atque oculus in A quiescens radium excipiet, cuius motus erit compositus ex motu PA et motu QP, ex quo resultabit radius QA, in cuius directione obiectum a spectatore in A constituto cernetur. Spectatori ergo, qui etsiamsi moueatur sibi in A quiescere videtur, obiectum apparebit sub angulo QAE, cum tamen ipsi, si lux in instanti propagaretur, sub angulo OAE apparere deberet: vnde angulus QAO constituet excessum loci obiecti veri supra apparentem. Ponamus anguli apparentis QAE sinum esse $= m$ cosinum $= \mu$; cum autem sit $OA = c$; $OQ = AE = r$, ponamus tantisper $AQ = y$, erit $AP = my$; $PQ = \mu y$, et $OP = \mu y - r$; atque $c^2 = yy - 2\mu r y + r^2$ seu

r^2 ſeu $y = \mu r + \sqrt{(c^2 - m^2 r^2)}$. Hinc anguli QAP tangens erit $= \frac{\mu}{m}$, anguli OAP tangens $= \frac{-m^2 r + \mu \sqrt{(c^2 - m^2 r^2)}}{m \mu r + m \sqrt{(c^2 - m^2 r^2)}}$ vnde anguli QAO tangens $= \frac{mr}{\sqrt{(c^2 - m^2 r^2)}}$ atque ſinus $= \frac{mr}{c}$.

§. 22. Diuerſas ergo praebuerunt correctiones ambo iſti caſum propoſitum euoluendi modi, quarum diſcrimen etſi eſt valde exiguum et contemnendum, ſiquidem r reſpectu c fuerit quantitas valde parua, tamen in originem diſcrepantiae diligentiſſime erit inquirendum, vt, vtri determinationi magis ſit fidendum, planum fiat. Ac primo quidem conſtat, differentiam ex eo oriri, quod in poſteriore conſideratione aſſumſimus radium QA ſenſum obiecti in oculo excitantem ferri celeritate $y = \mu r + \sqrt{(c^2 - m^2 r^2)}$ cum priori conſiderandi modo radio viſiuo celeritatem c tribuiſſemus. Si enim loco y in poſteriore modo ponamus c, ſeu $c - \mu r$ loco $\sqrt{(c^2 - m^2 r^2)}$ prodibit anguli QAO tangens omnino vt antea $= \frac{mr}{c - \mu r}$. Quaeſtio itaque huc redit, vtrum ratiocinium veritati magis ſit conſentaneum.

Tab. II. fig. 5. §. 23. Hoc dum perpendemus, mox intelligemus in priore ratiocinio vitium eſſe commiſſum. Cum enim reductione tertii caſus ad ſecundum toti ſyſtemati in quo cum obiectum O tum ſpectator A verſantur motum ſecundum directionem Aα celeritate r tribuiſſemus, definiri debuiſſet, vtrum ſimilis motus medio, per quod radii propaganrur, ſimul ſit impreſſus an non. Namque ſi, vti fecimus medium in quiete relinquatur, caſus, ad quem reductio eſt facta, omnino erit diuerſus a caſu propoſito, quia in caſu propoſito medium vna cum obiecto quieſcebat, in caſu autem mutato medium habebatur quieſcens cum ſpectatore:

tore: ex quibus diſſimilitudo caſuum, ac proinde illegitima reductio clare apparet. Ipſum itaque medium in directione A α ſimul promoueri debuiſſet celeritate r, qui motus ſi pariter in radios transferatur, prodibit prorſus vt altero modo anguli OAV ſinus $= \frac{mr}{c}$.

§. 24. Cum igitur poſterius ratiocinium cum veritate conſpiret, atque anguli, quo locus obiecti verus ab apparente diſcrepat, ſinus ſit $\frac{mr}{c}$, non autem eius tangens ſit $= \frac{mr}{c-\mu r}$, perſpicuum eſt aliter obiectum quieſcens ſpectatori moto eſſe appariturum, aliter obiectum motum ſpectatori quieſcenti, etiamſi motus poſterior priori ſit aequalis et oppoſitus. Ratio huius diſcriminis in eo latet, quod lucem inſtar ſoni per motum vndulatorium propagari poſuimus, quo pacto motus obiecti radios emittentis celeritatem radiorum non afficit; verum medium, ſi moveatur, eundem motum cum motu radiorum miſcebit; ac propagationem vndularum vel accelerabit vel retardabit, prout motus medii motui radiorum vel ſit ſecundus vel aduerſus. Cuique haec plana fient, ſi quae hactenus de luce ſumus commentati, ad ſonum atque auditum accommodentur.

§ 25. Perfecta autem ſimilitudo inter caſum ſecundum et tertium conſeruaretur, ſi lux non motu vndulatorio ſed actuali eiaculatione ex corpore lucente emittatur. Si enim ponamus particulas lucis, quae radios conſtituunt, ex corpore lucido quieſcente actu explodi celeritate c, quam luci tribuimus, idem corpus, ſi moueatur, ſuum motum cum motu radiorum coniunget: neque medium, ſiue moueatur ſiue quieſcat, quicquam motum radiorum afficiet; inſtar

Tab. II. fig. 2. vacui enim considerari poterit. Ex hac autem hypothesi alia reperietur correctio situs apparentis in casu secundo. Si enim obiectum lucidum moueatur in directione O V celeritate s hoc ipso motu celeritas radio OA naturalis c afficietur, tam ratione directionis, secundum quam eiiciuntur, quam ratione celeritatis, quae vel augebitur vel diminuitur.

Tab. II. fig. 2. §. 26. Ponamus eum radium sensum obiecti O in oculo spectatoris excitare, qui si obiectum quiesceret, emitteretur in directione O E celeritate c: quoniam autem obiectum in directione O V celeritate s promoueri ponitur, si capiatur $OV : OE = s : c$, radius O E a motu obiecti ita afficietur, vt eius directio cadat in diagonalem OA parallelogrammi O E A V, atque isto pacto spectatorem offendat, celeritatem vero iste radius O A habebit tantam, quae se habeat ad naturalem c vti O A ad O E. Cum igitur obiectum interea, dum radius ad spectatorem pertingit, progreditur per spatium $OV = s$; spectator in aestimatione loci obiecti falletur angulo OAV. Quodsi ergo sinus anguli AOV ponatur $= m$ erit perpendicularis Vp in AO ducta $= ms$ atque sinus anguli $OAV = \frac{Vp}{AV} = \frac{ms}{c}$, qui error apprime congruit cum eo, quem pro casu tertio inuenimus.

§. 27. Plurimum igitur inter est nosse, vtrum lux per actualem explosionem particularum lucidarum ex obiecto lucido generetur, an simili modo, quo sonus per aërem propagatur. Si enim prior modus in natura locum habeat, tunc similes forent differentiae inter loca apparentia et vera pro casu secundo et tertio, tutoque liceret alterum casum ad alterum ope motus contrarii toti systemati impressi reducere. Quodsi autem modus posterior locum

cum habeat, radiique lucis instar soni propagentur, tum illicita erit ista reductio; etsi discrimen est prorsus contemnendum, nisi obiectis stupendae celeritates tribuantur, vti fit in systematibus mundi Ptolemaei et Tychonis. Quanquam autem posterior sententia veritati magis consentanea videtur, tamen pro praesenti instituto sequamur priorem propter eximiam conuenientiam inter correctiones ad casus secundum et tertium pertinentes.

§. 28. Persequemur igitur hic potissimum eam hypothesin, qua radii lucis ex obiecto lucido actu explodi ponuntur, atque assumamus radios, qui ex sole ad nos perueniunt, summa celeritate ex ipso sole esse eiaculatos, vnde tempore 8. circiter minutorum ad nos pertigerint. Quamuis enim haec hypothesis minus sit probabilis quam altera, qua lumen instar soni propagari statuitur, tamen magis est accommodata ad nostrum institutum atque motus compositionem recipit, cuius altera hypothesis minus est capax. Si enim propagatio lucis in generatione pulsuum per medium subtile constet, tum si ad sensationem respiciamus, non tam ad tempus, quo pulsus per datum spatium vehuntur, erit attendendum, quam ad proprium cuiusuis particulae motum tremulum, qui maxime diuersus esse potetit a motu progressiuo radiorum.

§. 29. Stabilita igitur hac hypothesi, phaenomena casus primi, quo tam obiectum quam spectatorem in quiete posuimus, omnino manebunt vt supra exposuimus: pro casu secundo autem ea mutatio adhiberi debet, cuius fecimus mentionem, scilicet loco anguli OAV, qui praebet differentiam inter locum obiecti apparentem et verum, cuius tangens erat $= \frac{ms}{e-\mu s}$ substitui debet angulus cuius si-

 nus

Tab. II. fig. 6. nus est $\frac{ms}{c}$. Quae autem de casu tertio §. 20. attulimus ea, cum sint ex compositione motus deducta, recte se habent, ac si obiectum spectatori in A constituto, qui secundum directionem AE celeritate r promoueatur, appareat in directione AQ seu sub angulo QAE cuius sinus est m, adhunc angulum addi debet angulus QAO, cuius sinus est $= \frac{mr}{c}$, vt prodeat situs obiecti verus.

Tab. II. fig. 7. §. 30. Vt autem phaenomena casus secundi distinctius euoluamus, examinemus missionem radiorum, quae ex obiecto mobili fit. Quiescat igitur primum obiectum in O, ac radii ex eo quaqua versus emittentur aequali celeritate c; ita vt spectator A, vbicunque consistat, radium OA ex obiecto excipiat celeritate c motum, vnde si distantia OA fuerit u, radius OA ex obiecto ad spectatorem perueniet tempore $\frac{u}{c}$ minut. secund. Ponamus nunc obiectum celeritate s in directione OV progredi, iste motus cum motu naturali singulorum radiorum debebit coniungi. Describatur igitur centro O radio OC, qui sit ad OV vti c ad s circulus CBFD; eiusque quilibet radius OB praebebit radium lucis vna cum ipsius celeritate, qui ex obiecto quiescente emitteretur. At ob motum obiecti radius OB non hanc directionem conseruabit, sed progredietur per diagonalem OI parallelogrammi OBIV, eiusque celeritas erit vt OI.

§. 31. Si iam hoc modo singuli radii OB cum motu obiecti coniungantur, reperientur puncta I sita esse in peripheria circuli GIH centro V radio $VG = OC = c$ descripti: atque quaelibet recta OI ex loco obiecti O ad hanc alteram peripheriam ducta exhibebit celeritatem radii OA in directione OI emissi. Ab hoc igitur obiecto

specta-

ſpectator in A excipiet quidem radium OA, ſed alia celerirate motum, quae ſe habet ad celeritatem naturalem c vti recta OI ad radium OF. Hinc intelligitur, ſi celeritas obiecti OV fuerit aequalis vel maior quam celeritas lucis naturalis, euenire poſſe, vt recta OA ex obiecto ad ſpectatorem ducta circulum centro V deſcriptum nusquam ſecet, quodſi euenerit obiectum a ſpectatore prorſus non conſpici poterit. Fieri etiam poteſt vt, radius ad ſpectatorem tam lente perueniat, vt in organo viſus nullum effectum producere poſſit, quo caſu pariter obiectum erit inconſpicuum.

§. 32. In hac hypotheſi etiam phaenomena obiecti in periphaeria circuli reuoluentis et ſpectatoris in centro A conſtituti aliter ſe habebunt. Ponamus enim obiectum in peripheria circuli OV circumagi celeritate $= s$: ſitque radius OA$= u$. Cum igitur ex obiecto, dum in O erat, radius ad ſpectatorem pertingit, obiectumque in O ipſi repraeſentat, tum obiectum non amplius erit in O, ſed in loco V, adeo vt obſeruator fallatur. Si quidem obiectum moueretur eadem celeritate ſecundum tangentem OV, tum interea obiectum perueniret in V, foretque angulus OAV, errorem exprimens, tantus, vt eius ſinus ſit $= \frac{s}{c}$ ob angulum VOA rectum; radiusque tanta celeritate ad ſpectatorem perueniret, quae ſe habet ad celeritatem c, vti AO ad AV. Quanquam autem obiectum non in directum ſed in circulo progredi ponitur, tamen emiſſio radiorum, dum eſt in O, vtroque caſu aequaliter afficietur; ita vt etiam hoc caſu radius OA ad ſpectatorem veniat celeritate $= \frac{c \cdot AO}{AV}$. Tab. II. fig. 8.

§. 33.

§. 33. At error obseruationis a loco obiecti vero alius erit, si obiectum in circulo promoueatur. Cum enim, si in directum OV progrederetur, interea dum radius ex O ad A pertingit, perueniat ad V vsque; eodem interuallo per peripheriam circuli latum absoluet arcum OU, aequalem tangenti OV; eritque error nunc angulus OAU, vtique maior quam foret si obiectum in directum moueretur. Quoniam vero est anguli OAV sinus $= \frac{s}{c}$, erit eiusdem cosinus $= \frac{\sqrt{(c^2-s^2)}}{c} = \frac{AO}{AV}$; vnde ob $AO = u$ erit $AV = \frac{cu}{\sqrt{(c^2-s^2)}}$, et $OV = \frac{su}{\sqrt{(c^2-s^2)}}$, atque velocitas radii OA in oculum spectatoris incidens erit $= \sqrt{(c^2-s^2)}$. Quare si obiecti celeritas s aequalis fuerit vel adeo maior quam celeritas lucis naturalis c, tum nequidem obiectum a spectatore cerni poterit, quod idem eueniet si s valde prope ad c accedat.

§. 34. Vt quantitas anguli OAU definiatur, sit $1 : \pi$ ratio diametri ad peripheriam, eritque $\pi u =$ semiperipheriae circuli seu arcui 180. graduum. Fiat igitur $\pi u : 180^\circ = OU\ \left(\frac{su}{\sqrt{(c^2-s^2)}}\right) : \frac{180 s}{\pi\sqrt{(c^2-s^2)}}$, ex qua analogia praebebit $\frac{180 s}{\pi\sqrt{(c^2-s^2)}}$ in gradibus angulum OAU, quo locus obiecti visus a vero discrepat. Cum praeterea obiectum vno minuto secundo percurrat s semidiametros terrae, totam peripheriam $2\pi u$ absoluet tempore $\frac{2\pi u}{s}$ min. sec. Ponamus tempus vnius reuolutionis esse constans atque x min. sec. fiet $s = \frac{2\pi u}{x}$. Quamobrem angulus OAU erit $= \frac{360 u}{\sqrt{(c^2x^2-4\pi^2u^2)}}$; ob duplicem igitur causam crescit error seu angulus OAU crescente distantia AO, ac facta $u = \frac{cx}{2\pi}$, error in infinitum augebitur; hoc vero casu obiectum cessabit spectatori apparere. Quare, si stellae cunctae circa terram quietam tem-

tempore 24. horarum circumagerentur, eae quae magis distarent quam 591287 semidiametros terrae nequidem conspicuae forent, hoc est quae tricies magis essent remotae quam sol: ex quo ne vnica quidem stella fixa esset conspicua.

§. 35. Videbimus autem rem longe aliter se esse habituram, si terrae motum circa axem, sideribus vero quietem tribuamus, quamuis primo intuitu similia phaenomena accidere debere videantur. Neque vero hoc mirum videbitur, si hanc rem attentius perpendamus; licet enim saluis legibus et regulis mechanicis vniuerso cuidam systemati corporum, motum aequabilem in directum imprimere, ita, vt nil in phaenomenis mutetur, at vel motum inaequabilem vel curuilineum tribuere minime licet. Ex quo manifestum est, casum maxime immutari, si motus circularis, quem spectator habeat, transferatur ad astra, iisque motus circulares, eodem tempore periodico absoluendi, adiudicentur. Tali autem illegitima translatione motus lucis potissimum perturbari debet.

§. 36. Ponamus igitur spectatorem in A constitutum promoueri continuo per peripheriam circuli ABD, celeritate tanta, qua tempore vnius minuti secundi absoluat r semidiametros terrae. Concipi scilicet potest circulus ABD tanquam parallelus terrae qui spatio diei siderei seu 23. horis, $56' \; 4''$ circa axem reuoluatur ab occidente in orientem, ita, vt punctum E spectatori versus orientem sit situm. Ponatur cosinus eleuationis poli, quae respondet loco spectatoris in A, $= p$, posito sinu toto atque semidiametro terrae $= 1$, erit $p =$ semidiametro paralleli AC, ex quo circumferentia paralleli erit $= 2\pi p$, quam cum Tab. II. fig. 9.

 specta-

ſpectator abſoluat tempore $86164''$, vno minuto ſecundo conficiet ſpatium $\frac{\pi p}{43082}$ ſemid. terrae. Hinc ergo dabitur celeritas ſpectatoris $r = \frac{p}{13713,4}$, ac log. $r = lp - l$ ſin. tot. $- 4,1371461 = lp - 14,1371461$; tantaque celeritate ſpectator verſus orientem ſecundum directionem tangentis A E progredietur.

§. 37. Appareat nunc iſti ſpectatori ſidus in directione A O, quaeriturque ſitus huius ſideris verus A o, ſub quo appareret, ſi vel terra quieſceret vel radii in inſtanti propagarentur; ſidus autem quieſcere aſſumimus. Ex ſidere O in planum paralleli demittatur perpendiculum O P, atque ex P in radium C A productum normalis P Q. Quoniam vero planum paralleli in aequatorem coeli incidit rectaque C A Q meridianum loci A denotat, meridianus enim eſt planum normale ad A B D idque in recta C A Q ſecat; dabit angulus O A P declinationem ſideris obſeruatam, angulus P A Q autem diſtantiam circuli horarii a meridiano loci A. Cum igitur figura ſidus in declinatione boreali ac verſus occidentem ſitum repraeſentet, ſit ſinus declinationis borealis ſeu anguli $OAP = a$, coſinus $= \alpha$. anguli P A Q ſeu diſtantia ſideris horaria a meridiano verſus occidentem, ſinus $= b$, coſinus $= \mathfrak{b}$.

§. 38. His poſitis ſit ſideris obſeruati diſtantia a terra $OA = u$, quae quidem quaſi infinita aſſumitur attamen ex calculo euaneſcet; erit ergo $OP = au$ et $AP = \alpha u$; porro erit $PQ = \alpha b u$ et $AQ = \alpha \mathfrak{b} u$. In tangentem A E productam ex P ducatur normalis P R, eritque $PR = AQ = \alpha \mathfrak{b} u$: αb eſt ſinus diſtantiae ſtellae a meridiano in circulo poſitionis ſumta, ſeu circulo per polos meridiani ducto: ducta autem recta O R perpendicularis erit ad rectam A R.

At

At vero habebitur $AR = \alpha b u$ et $OR = u\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}$: vnde anguli OAE, quem locus sideris visus cum directione AE, in qua spectator promouetur, constituit, sinus erit $= \sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}$. Verus itaque sideris locus erit in o puncto in plano OAE sito, atque angulo OAo, cuius sinus est $\frac{r\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}{c}$, magis versus occidentem remoto. Abscindatur ergo in plano OAR angulus OAo, cuius sinus sit $= \frac{r\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}{c}$ et cosinus $= \frac{\sqrt{(c^2 - r^2 + \alpha^2 b^2 r^2)}}{c}$; eritque o locus sideris verus.

§. 39. Inuestigemus iam quantum locus verus a loco viso cum ratione declinationis tum ascensionis rectae discrepet. Ponamus breuitatis gratia sinum anguli $OAo = n$, et cosinum $= \nu$; demittamusque ex o in AR perpendicularem or, erit anguli oAr sinus $\nu\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)} - n\alpha b$ et cosinus $= \nu\alpha b + n\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}$: vnde ob $Ao = u$, prodibit $or = u(\nu\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)} - n\alpha b)$ et $Ar = u(\nu\alpha b + n\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)})$. Ex o in planum paralleli demittatur perpendicularis op, erit ob triangula ORP et orp similia $op = au\left(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}\right)$ et $pr = \alpha\mathfrak{C}u\left(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}\right)$ atque hinc $Ap = u\sqrt{\left(1 - a^2\left(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}\right)^2\right)}$. Insuper vero est $pq = Ar$ et $Aq = pr$.

§. 40. Vera ergo sideris declinatio indicabitur angulo oAp, cuius sinus erit $= a\left(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}\right)$ cosinus vero $= \sqrt{\left(1 - a^2\left(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}\right)^2\right)}$; dum apparentis declinationis erat sinus $= a$, cosinus $= \alpha$. Vera autem sideris elongatio a meridiano versus occasum exprimetur angulo qAp, cuius sinus erit $\frac{pq}{Ap} = \frac{\nu\alpha b + n\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}{\sqrt{\left(1 - a^2\left(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}\right)^2\right)}}$ et cosinus $= \frac{Aq}{Ap} =$

$$\frac{\alpha\mathfrak{C}\left(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}\right)}{\sqrt{\left(1 - a^2\left(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}\right)^2\right)}}$$; ita vt anguli qAp tangens sit $=$

$\frac{n - n\alpha^2 b^2 + \nu\alpha b\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}{\nu\alpha\beta\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)} - n\alpha^2 b\beta}$, cum anguli apparentis QAP tangens esset $= \frac{b}{\beta}$. Excedit ergo vera elongatio qAp apparentem QAP angulo PAp, cuius tangens est $= \frac{n\beta}{n\alpha^2 b + \nu\alpha\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}$ $= \frac{\beta r}{a^2 br + \alpha\sqrt{(c^2 - r^2 + \alpha^2 b^2 r^2)}}$ restitutis loco n et ν valoribus assumtis.

§. 41. Quoniam vero terra secundum signorum coelestium ordinem reuoluatur, si ascensio recta obseruata computetur ab aequinoctio verno, haec ascensio recta diminui debet angulo $q\,A\,p$, vt oriatur ascensio recta vera. Deinde vero etiam declinatio obseruata per diminutionem corrigi debebit, ita vt verus sideris locus propius ad aequatorem accedat, quam obseruatur. Si quidem fuerit $a > a\left(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}\right)$ seu $c + \alpha b r > \sqrt{(c^2 - r^2 + \alpha^2 b^2 r^2)}$ id quod quidem semper contingit, si b affirmatiuum obtineat valorem, sidusque versus occidentem spectetur; contrarium euenit, si sidus versus orientem aspiciatur, quo casu declinatio augeri debet.

§. 42 Obseruetur sidus, dum per meridianum loci, in quo spectator versatur, transit, fiet $b = 0$ atque $\beta = 1$: maneatque declinationis borealis obseruatae sinus $= a$, cosinus $= \alpha$, vnde vera sideris declinatio tanta censeri debebit, vt eius sinus sit $= \nu a = \frac{a}{c}\sqrt{(c^2 - r^2)}$. Cum autem r sit quantitas vehementer exigua respectu ipsius c, erit $\sqrt{(c^2 - r^2)} = c - \frac{r^2}{2c}$, vnde verae declinationis sinus erit $= a - \frac{arr}{2cc}$, cosinus vero $\alpha + \frac{a^2 r^2}{2\alpha cc}$, quare vera sideris declinatio minor erit quam vera, angulo, cuius sinus est $= \frac{arr}{2\alpha cc}$, quod discrimen ob quadratum ipsius r tam est exiguum, vt tuto negligi queat: adeo vt declinatio obseruata

ſeruata a vera non diſcrepet, ſi quidem obſeruatio in meridiano inſtituatur.

§. 43. Deinde cum angulus QAP euaneſcit, fiet anguli qAp tangens $= \frac{r}{\alpha\surd(cc-rr)}$; vnde cum quaecunque ſtella in meridiano obſeruatur, ea reuera per meridianum iam tranſiiſſe erit cenſenda, anguloque a meridiano verſus occidentem iam diſtare, cuius ſinus vel tangens ſit $= \frac{r}{\alpha c}$, ob r valde paruum. Vel correctio ita erit inſtituenda, vt aſcenſio recta ſtellae obſeruata diminuatur angulo, cuius ſinus eſt $= \frac{r}{\alpha c}$. Eſt autem $r = \frac{p}{1371,4}$ et $c = 43$ vnde fit $\frac{r}{c} = \frac{p}{58976}$. Quodſi ergo obſeruator ſub aequatore verſetur, quo caſu ſit $p = 1$, atque tranſitum ſtellae per ipſius zenith obſeruet, ab aſcenſione recta aeſtimata auferre debebit angulum 20. minutorum tertiorum, quae correctio tuto negligi poteſt.

§. 44. Ponamus ſtellam obſeruari in circulo ſextae horae verſu soccaſum, fiet $b = 1$ et $\mathfrak{b} = 0$, vnde ſinus verae ſtellae declinationis erit $= \nu a - n\alpha$ et coſinus $= n a + \nu\alpha$, cum declinationis apparentis ſinus eſſet a, et coſinus α. maior igitur eſt declinatio apparens quam vera, exceſſusque eſt angulus cuius ſinus eſt $= n = \frac{ar}{c}$, qui angulus ſi ſit maximus, quod euenit ſi $a = 1$ et $p = 1$, tamen ne quidem ad ſemiſſem vnius minuti ſecundi aſſurgit. Aſcenſio vero recta obſeruata omnino non diſcrepabit a vera, eo quod $\mathfrak{b} = 0$, qua hypotheſi tangens anguli PAp evaneſcit: idem autem vſu venit ſi obſeruatio in altero circulo horario verſus orientem inſtituatur; ibi autem declinatio obſeruata non minui ſed augeri debet angulo cuius ſinus eſt $= n = \frac{ar}{c}$.

§. 45. Ex his intelligitur, variationem apparitionis siderum, quae quidem a motu terrae diurno proficiſcitur, ob ingentem paruitatem tuto negligi poſſe; ita vt loca ſtellarum apparentia ſine errore pro veris haberi queant; nunquam enim diſcrimen ad integrum minutum ſecundum, imo ne ad ſemiſſem quidem aſſurgit. Haecque perinde ſe habent in vtraque motus lucis hypotheſi; altera enim dat pro aequatione angulum, cuius tangens eſt $\frac{mr}{c-\mu r}$, altera angulum cuius ſinus eſt $\frac{mr}{c}$, qui duo anguli cum fractio $\frac{r}{c}$ ſit quam minima, a ſe inuicem non diſcrepant. Verum ſi loco motus terrae diurni, ſimilis motus ſideribus tribuatur ad mentem Ptolemaei, tum non ſolum aberrationes obſeruationum a locis veris pro vtraque hypotheſi maxime prodirent diuerſae, ſed etiam ipſae aberrationes fierent tam vaſtae, vt nil certi ad locum verum definiendum ex iis concludi poſſet; quae ſola circumſtantia ſufficere poteſt ad ſyſtemata terrae immotae funditus ſubuertenda.

Tab. II. fig. 9. §. 46. Cum igitur motus terrae diurnus nullam ſenſibilem differentiam inter loca ſiderum apparentia ac vera producat, videamus, quantum motus annuus in hoc negotio valeat. Repraeſentet igitur nunc circulus ABD orbitam terrae in qua circa ſolem C reuoluatur; tuto autem hic circulum pro orbita terrae vera aſſumere licet. Huius ergo circuli ſemidiameter AC erit 20618 ſemid. terrae, vnde eius peripheria continebit, 129546 ſem. terrae. quod ſpatium cum emetiatur anno ſydereo ſeu 31558140″, vno minuto ſecundo abſoluet ſpatium $\frac{129546}{31558140}$ ſemid. terrae, quod erit valor ipſius r, vnde cum ſit $c = 43$ fiet $\frac{r}{c} = 0,0000954,6 = \frac{1}{10475}$, qui valor fere

fere sexagies maior est, quam ante erat pro motu diurno, ex quo iam intelligitur, motum annuum sensibilem variationem obseruationibus inducere debere.

§. 47. Primo quidem ipse sol, ad cuius locum reliqua sidera sunt referenda, nunquam in suo vero situ apparebit, sed sub angulo acuto ad tangentem AE. Hancobrem longitudo solis obseruata continuo erit nimis parua, ad eamque addi debet angulus cuius sinus est $\frac{r}{c}$, secundum signorum seriem, qui angulus prodit $20''$. Cum igitur sol apparet in initio arietis, eius locus verus censeri debet $0\,S,\ 0^{\circ},\ 0',\ 20''$. Atque hoc modo ante loca solis obseruata corrigi oportet, antequam siderum loca cum solis loco comparentur. Cum autem ista aberratio loci solis apparentis a loco vero perpetuo sit eadem, motus solis in eccliptica ex terra eodem modo conspicietur ac si radii in instanti propagarentur, neque hinc noua anomalia motui solis admiscebitur.

§. 48. Cognito igitur vero solis loco geocentrico obseruetur a spectatore A sidus O in directione OA, ex quo in planum orbitae terrae seu ecclipticae demittatur perpendicularis OP, atque ex B in CA productam pariter perpendiculum PQ. Ducta igitur AP, praebebit angulus OAP latitudinem stellae obseruatam, cuius sinus sit $= a$, cosinus $= \alpha$. Angulus vero QAP dabit distantiam stellae a loco soli opposito in eccliptica; quae in gradibus eccliptiae obtinebitur, si a puncto soli opposito subtrahatur longitudo stellae obseruata; sit igitur huius anguli PAQ sinus $= b$, cosinus $= \beta$. Cum igitur iam reliqua maneant vt ante in motu terrae diurno, verus sideris locus erit in directione Ao; atque vera latitudo definietur angulo

gulo oAp; veraque differentia longitudinis sideris et loci soli oppositi angulo qAp.

§. 49. Cum igitur verae sideris latitudinis oAp sinus sit $= a\left(v - \frac{nab}{\sqrt{(1-a^2b^2)}}\right) = \frac{a}{c}\left(\sqrt{(c^2 - r^2 + a^2b^2r^2)} - abr\right)$, fiet iste sinus ob r respectu c vehementer paruum, $= a\frac{-aabr}{c}$; eiusque cosinus $= \alpha + \frac{a^2br}{c}$. Latitudo ergo stellae obseruata diminui debet angulo, cuius sinus est $\frac{abr}{c}$, siue latitudo sit borealis siue australis. Haec autem diminutio tantum locum habet cum angulus PAQ sinum b habet affirmatiuum, hoc est cum sol ad coniunctionem stellae accedit: seu a tempore oppositionis ad coniunctionem vsque. Contra autem a coniunctione stellae cum sole vsque ad oppositionem latitudo stellae debet augeri ob b negatiuum, atque ad latitudinem obseruatam siue borealem siue australem addi debet angulus cuius sinus est $= \frac{abr}{c}$.

§. 50. Vt haec correctio facilius ad calculum astronomicum accommodari queat, sequens adhibeatur regula. Ex canone logarithmorum consueto excerpantur logarithmi sinuum cum latitudinis stellae obseruatae, tum distantiae stellae a puncto in ecclíptica soli opposito secundum longitudinem, hique logarithmi addantur et a summa auferatur iste logarithmus 18,7057289. residuo logarithmo quaeratur numerus respondens ex tabula logarithmorum numerorum naturalium, qui numerus praebebit aequationem latitudinis: quae a latitudine obseruata subtrahi debet, si stellae locus in ecclíptica intra locum solis et eius oppositionem versetur; addi vero debet, si locus stellae in ecclíptica intra punctum soli oppositum ipsumque solis locum contineatur.

§. 51.

§. 51. Vt ista operatio exemplo illustretur ponamus stellae cuiusdam latitudinem obseruatam esse $75^\circ, 17', 48''$; longitudinem vero fuisse deprehensam $5\,S, 13^\circ\, 20'\, 55''$: eoque tempore solis longitudinem fuisse $7\,S, 25^\circ, 42', 35''$; computus ergo instituatur vt sequitur

	Longitudo ☌ ☉	$7\,S, 25^\circ, 42', 35''$
	Longitudo ☍ ☉	$1\,S; 25^\circ, 42', 35''$
subtr.	Longitudo stellae	$5\,S; 13^\circ, 20', 55''$
	Ergo ang. QAP =	$8\,S, 12^\circ, 21', 40''$

seu ang. QAP $= 252^\circ, 21', 40''$ cuius sinus cum sit negatiuus, latitudo obseruata debet augeri per aequationem: ex quo erit b sinus anguli $72^\circ, 21', 40''$; eiusque logarithm. $= 9{,}9790862$

addatur log. $75^\circ, 17', 48''$ =	$9{,}9855400$
subtr.	$19{,}9646262$
	$18{,}7057289$
	$1{,}2588973$

Ad latitudinem ergo obseruatam addi debent $18'', 9'''$ vnde vera latitudo erit $75^\circ, 18', 6'', 9'''$.

§. 52. Cum igitur latitudo stellae obseruata est nulla, tum etiam latitudo vera euanescet, vnde stellae in ipsa ecc cliptica sitae etiam semper in eccliptica apparebunt. Quo magis autem stella quaepiam ab eccliptica est remota, eo magis latitudo apparens discrepare poterit a latitudine vera, ceteris paribus; maxima enim differentia incidit in quadraturas stellae cum sole, estque $\frac{ar}{c}$; quae addi debet in quadratura priore, seu ea, quae post coniunctionem cum sole accidit, in posteriore autem quadratura coniunctionem praecedente subtrahi debet. At cum stella proxime ad polum eccliptica erit obseruata tum ob α quantitatem valde paruum, denotabit autem α finum distantiae stellae a polo eccliptieae obseruatum, alio calculo erit opus. Cum enim sit $\dot{a} = \sqrt{(1-\alpha^2)} = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ erit finus verae stellae latitudinis $= \dot{a} - \frac{ar^2}{2cc} - \frac{\alpha abr}{c} = 1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{r^2}{2cc} - \frac{\alpha br}{c}$, eiusque cosinus $= \sqrt{(\alpha^2 + \frac{r^2}{cc} + \frac{2\alpha br}{c})}$ qui erit finus verae distantiae stellae a polo eccliptieae.

§. 53. Si igitur stella in ipso polo eccliptieae obseruetur, tum reuera ab hoc polo distabit angulo cuius finus est $\frac{r}{c}$, qui angulus circiter 20″ conficit. At si distantia stellae a polo obseruata fuerit circiter 20″, vt α fere aequale sit ipsi $\frac{r}{c}$, tum expediet veram stellae a polo distantiam definire ex eius finu, qui est $\sqrt{(\alpha^2 + \frac{r^2}{cc} + \frac{2\alpha br}{c})}$ neque ad radicis extractionem iuuabit approximatione vti. Veluti si stella obseruetur a polo eccliptieae distare angulo 30″, sitque angulus PAQ rectus seu stella in posteriore quadratura, erit $b = 1$ et finus distantiae verae a polo $= \alpha + \frac{r}{c}$ seu 50″ sin stella in priore quadratura fuerit obseruata, erit vera distantia a polo $=$ 10″. In coniunctione autem vel oppositione reperietur vera distantia a polo $=$ 36″, cum tamen alias in oppositione et coniunctione latitudo vera ab obseruata non discrepet.

§. 54. Videamus nunc quanam correctione longitudo stellae obseruata indigeat; supra autem inuenimus ad angulum QAP addi debere angulum PAp, cuius tangens est $= \frac{6r}{\alpha^2 br + \alpha\sqrt{(c^2 - r^2 + \alpha^2 b^2 r^2)}}$ tanto igitur angulo longitudo stellae obseruata debebit diminui, vt prodeat eius longitudo vera si quidem anguli PAQ cosinus 6 fuerit affirmatiuus, contra enim addi debet aequatio, si 6 fiat negatiuum. Quoniam vero r est valde paruum respectu c fiet

illius

illius anguli tangens $= \frac{\mathfrak{E}r}{ac + a^2br - \frac{ar^2}{2c} + \frac{a^3b^2r^2}{2c}}$ quae nisi stella proxime ad polum eclipticae fuerit sita abit in hanc $\frac{\mathfrak{E}r}{ac}$. Manente ergo stellae a polo distantia maxima aequatio longitudinis erit in coniunctione et oppositione cum sole, illo quidem casu addi hoc vero subtrahi debet angulus, cuius tangens est $\frac{r}{ac}$: in quadraturis autem haec correctio fit nulla.

§. 55. Haec igitur correctio commode per logarithmos sequenti modo institui poterit; ad logarithmum cosinus anguli QAP addatur 1,2942710, atque a summa subtrahatur logarithmus cosinus latitudinis stellae observatae residui logarithmi quaeratur numerus respondens, qui dabit numerum minutorum secundorum addendum vel subtrahendum longitudini observatae, prout stella vel coniunctioni solis vel oppositioni fuerit propior. Sic in exemplo §. 51. allato est ang. QAP $= 252^\circ, 21', 40''$ cuius cosinus est negatiuus, vnde longitudo observata augeri debebit. Iste autem cosinus congruit cum sinu anguli $17^\circ, 38', 20''$ cuius logarith. = 94814666

add.	1,2942710
auferat. log. sin. $14^\circ, 42', 12''$	10,7757376
	9,4045158
	1,3712218

hinc aequatio prodit $23'', 30'''$, quae ad longitudinem observatam addi debet, ita vt vera longitudo sit 5 S; $13^\circ, 21', 18'', 30'''$.

§. 56. Aliter autem correctio erit instituenda, si stella polo eclipticae fuerit proxima, ita vt sinus eius

 distan-

diſtantiae ab hoc polo α tam ſit paruus vt prae termino αc reliqui termini non euaneſcant, tam enim a longitudine obſeruata angulus ſubtrahi debebit, vel ad angulum QAP addi debebit angulus cuius tangens eſt $= \frac{\frac{\epsilon r}{c}}{\alpha + \frac{a^2 br}{c}}$ Quare ſi α omnino euaneſcat, fiatque $a = 1$, anguli addendi PAp tangens erit $= \frac{\epsilon}{b}$; quare cum anguli QAP tangens ſit $= \frac{b}{\epsilon}$, fiet angulus QAp rectus. Stellae igitur in ipſo polo eccliptícae viſae latitudo erit diminuenda 20. ſec. eiusque longitudo 90. gradibus ſuperabit longitudinem ſolis.

§. 57. Quaeſtio hic moueri poteſt non inelegans, qua quaeratur, quo ſitu ſtella in ipſo eccliptícae polo reuera poſita quouis tempore ſpectatoribus terreſtribus apparere debeat. Quum igitur verae huius ſtellae latitudinis ſinus ſit 1, habebitur iſta aequatio $1 = \frac{a}{c}(V(c^2 - r^2 + a^2 b^2 r^2) - abr)$ ſeu $c + aabr = aV(c^2 - r^2 + a^2 b^2 r^2)$ vnde ſumtis quadratis fit $\alpha^2 c^2 + 2\alpha abcr + a^2 r^2 = 0$, ex qua aequatione oritur tangens diſtantiae apparentis huius ſtellae a polo eccliptícae $= \frac{\alpha}{a} = \frac{-br + r\sqrt{(b^2 - 1)}}{c}$. Hinc igitur patet ſtellam talem polarem ex terra nunquam alio ſitu conſpici poſſe, niſi ſit $bb = 1$, hoc eſt niſi in quadratura cum ſole priore, quae poſt coniunctionem contingere ſolet. Hoc autem caſu fit $b = -1$ atque haec ſtella a polo angulo cuius tangens eſt $\frac{r}{c}$ ſeu angulo $20''$ diſtare perpetuo obſeruabitur. Ex quo haec ſtella circa verum polum circulum ſpatio vnius anni abſoluere cernetur, cuius radius erit $20''$.

§. 58.

§. 58. Diligenter igitur cauendum eſt, ne haec ſtel- Tab. III. fig. 1.
larum variatio annua a motu lucis ſucceſſiuo oriunda cum parallaxi confundatur. Expediet ergo ad parallaxin annuam ſtellarum fixarum commodiſſime inueſtigandam ſtella fixa vti, quae in ipſa eccliptica ſit ſita, quia eiusmodi ſtellarum latitudo non alteratur. Deinde longitudo huius ſtellae bis eſt obſeruanda eodem anno, quando ea cum ſole in quadraturis deprehenditur, his enim caſibus longitudo obſeruata a vera non diſcrepat. Ita ſi fuerit T*t* orbita terrae, S ſol et O ſtella fixa in plano ecclipticae ſita, obſeruetur ea primum in □ cum terra eſt in T angulusque OTS vel reuera rectus vel proxime; deinde obſeruetur eadem ſtella cum terra verſatur in *t* exiſtente angulo O*t*S iterum fere recto. His factis dati erunt anguli OTS et O*t*S fere recti, itemque ex theoria terrae per obſeruationes corrigenda angulus TS*t*, ex quibus definiri poterit diſtantia SO per ſemidiametros orbis magni.

§. 59. Hac igitur ratione obſeruationes ſtellarum fixarum ſunt corrigendae; alia autem correctione eſt opus pro obſeruationibus planetarum, quippe qui non quieſcent, ſed pariter ac terra circa ſolem reuoluuntur. Pertinet igi- fig. 2.
tur haec correctio ad caſum quartum, quo tam obiectum quam ſpectatorem in motu collocamus. Moueatur igitur obiectum O in recta OV celeritate aequabili *s* ſpectator vero A promoueatur ſecundum directionem AE celeritate $= r$; ſint autem rectae OV et AE in eodem plano poſitae, quoniam haec potiſſimum ad motum planetarum ſumus accommodaturi qui fere in eodem plano circa ſolem rotantur, in quo ſita eſt orbita terrae. Emittat obiectum, dum in O verſatur radium, qui incidat in oculum ſpecta-

$\frac{n - n\alpha^2 b^2 + \nu\alpha b \sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}{\nu\alpha\varepsilon\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)} - n\alpha^2 b\varepsilon}$, cum anguli apparentis QAP tangens esset $= \frac{b}{\varepsilon}$. Excedit ergo vera elongatio qAp apparentem QAP angulo PAp, cuius tangens est $= \frac{n\varepsilon}{n\alpha^2 b + \nu\alpha\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}$ $= \frac{\varepsilon r}{\alpha^2 br + \alpha\sqrt{(c^2 - r^2 + \alpha^2 b^2 r^2)}}$ restitutis loco n et v valoribus assumtis.

§. 41. Quoniam vero terra secundum signorum coelestium ordinem reuoluatur, si ascensio recta obseruata computetur ab aequinoctio verno, haec ascensio recta diminui debet angulo qAp, vt oriatur ascensio recta vera. Deinde vero etiam declinatio obseruata per diminutionem corrigi debebit, ita vt verus sideris locus propius ad aequatorem accedat, quam obseruatur. Si quidem fuerit $a > a\left(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}\right)$ seu $c + \alpha br > \sqrt{(c^2 - r^2 + \alpha^2 b^2 r^2)}$ id quod quidem semper contingit, si b affirmatiuum obtineat valorem, sidusque versus occidentem spectetur; contrarium euenit, si sidus versus orientem aspiciatur, quo casu declinatio augeri debet.

§. 42 Obseruetur sidus, dum per meridianum loci, in quo spectator versatur, transit, fiet $b = 0$ atque $\varepsilon = 1$: maneatque declinationis borealis obseruatae sinus $= a$, cosinus $= \alpha$, vnde vera sideris declinatio tanta censeri debebit, vt eius sinus sit $= \nu a = \frac{a}{c}\sqrt{(c^2 - r^2)}$. Cum autem r sit quantitas vehementer exigua respectu ipsius c, erit $\sqrt{(c^2 - r^2)} = c - \frac{r^2}{2c}$, vnde verae declinationis sinus erit $= a - \frac{arr}{2cc}$, cosinus vero $\alpha + \frac{a^2 r^2}{2\alpha cc}$, quare vera sideris declinatio minor erit quam vera, angulo, cuius sinus est $= \frac{arr}{2\alpha cc}$, quod discrimen ob quadratum ipsius r tam est exiguum, vt tuto negligi queat: adeo vt declinatio obseruata

seruata a vera non discrepet, si quidem obseruatio in meridiano instituatur.

§. 43. Deinde cum angulus QAP euanescit, fiet anguli qAp tangens $= \frac{r}{\alpha\sqrt{(cc-rr)}}$; vnde cum quaecunque stella in meridiano obseruatur, ea reuera per meridianum iam transiisse erit censenda, anguloque a meridiano versus occidentem iam distare, cuius sinus vel tangens sit $= \frac{r}{\alpha c}$, ob r valde paruum. Vel correctio ita erit instituenda, vt ascensio recta stellae obseruata diminuatur angulo, cuius sinus est $= \frac{r}{\alpha c}$. Est autem $r = \frac{p}{13713,4}$ et $c = 43$ vnde fit $\frac{r}{c} = \frac{p}{589676}$. Quodsi ergo obseruator sub aequatore versetur, quo casu fit $p = 1$, atque transitum stellae per ipsius zenith obseruet, ab ascensione recta aestimata auferre debebit angulum 20. minutorum tertiorum, quae correctio tuto negligi potest.

§. 44. Ponamus stellam obseruari in circulo sextae horae versu soccasum, fiet $b = 1$ et $\beta = 0$, vnde sinus verae stellae declinationis erit $= \nu a - n\alpha$ et cosinus $= n a + \nu \alpha$, cum declinationis apparentis sinus esset a, et cosinus α. maior igitur est declinatio apparens quam vera, excessusque est angulus cuius sinus est $= n = \frac{\alpha r}{c}$, qui angulus si fit maximus, quod euenit si $a = 1$ et $p = 1$, tamen ne quidem ad semissem vnius minuti secundi assurgit. Ascensio vero recta obseruata omnino non discrepabit a vera, eo quod $\beta = 0$, qua hypothesi tangens anguli PAp evanescit: idem autem vsu venit si obseruatio in altero circulo horario versus orientem instituatur; ibi autem declinatio obseruata non minui sed augeri debet angulo cuius sinus est $= n = \frac{\alpha r}{c}$.

 §. 45.

§. 45. Ex his intelligitur, variationem apparitionis siderum, quae quidem a motu terrae diurno proficiscitur, ob ingentem paruitatem tuto negligi posse; ita vt loca stellarum apparentia sine errore pro veris haberi queant; nunquam enim discrimen ad integrum minutum secundum, imo ne ad semissem quidem assurgit. Haecque perinde se habent in vtraque motus lucis hypothesi; altera enim dat pro aequatione angulum, cuius tangens est $\frac{mr}{c-\mu r}$, altera angulum cuius sinus est $\frac{mr}{c}$, qui duo anguli cum fractio $\frac{r}{c}$ sit quam minima, a se inuicem non discrepant. Verum si loco motus terrae diurni, similis motus sideribus tribuatur ad mentem Ptolemaei, tum non solum aberrationes obseruationum a locis veris pro vtraque hypothesi maxime prodirent diuersae, sed etiam ipsae aberrationes fierent tam vastae, vt nil certi ad locum verum definiendum ex iis concludi posset; quae sola circumstantia sufficere potest ad systemata terrae immotae funditus subuertenda.

Tab. II. fig. 9. §. 46. Cum igitur motus terrae diurnus nullam sensibilem differentiam inter loca siderum apparentia ac vera producat, videamus, quantum motus annuus in hoc negotio valeat. Repraesentet igitur nunc circulus ABD orbitam terrae in qua circa solem C reuoluatur; tuto autem hic circulum pro orbita terrae vera assumere licet. Huius ergo circuli semidiameter AC erit 20618 semid. terrae, vnde eius peripheria continebit, 129546 sem. terrae, quod spatium cum emetiatur anno sydereo seu $31558140''$, vno minuto secundo absoluet spatium $\frac{129546}{31558140}$ semid. terrae, quod erit valor ipsius r, vnde cum sit $c = 43$ fiet $\frac{r}{c} = 0,0000954,6 = \frac{1}{10475}$, qui valor fere

fere sexagies maior est, quam ante erat pro motu diurno, ex quo iam intelligitur, motum annuum sensibilem variationem obseruationibus inducere debere.

§. 47. Primo quidem ipse sol, ad cuius locum reliqua sidera sunt referenda, nunquam in suo vero situ apparebit, sed sub angulo acuto ad tangentem AE. Hancobrem longitudo solis obseruata continuo erit nimis parua, ad eamque addi debet angulus cuius sinus est $\frac{r}{c}$, secundum signorum seriem, qui angulus prodit 20″. Cum igitur sol apparet in initio arietis, eius locus verus censeri debet 0 S, 0°, 0′, 20″. Atque hoc modo ante loca solis obseruata corrigi oportet, antequam siderum loca cum solis loco comparentur. Cum autem ista aberratio loci solis apparentis a loco vero perpetuo sit eadem, motus solis in ecliptica ex terra eodem modo conspicietur ac si radii in instanti propagarentur, neque hinc noua anomalia motui solis admiscebitur.

§. 48. Cognito igitur vero solis loco geocentrico obseruetur a spectatore A sidus O in directione OA, ex quo in planum orbitae terrae seu eclipticae demittatur perpendicularis OP, atque ex B in CA productam pariter perpendiculum PQ. Ducta igitur AP, praebebit angulus OAP latitudinem stellae obseruatam, cuius sinus sit $= a$, cosinus $= \alpha$. Angulus vero QAP dabit distantiam stellae a loco soli opposito in ecliptica; quae in gradibus eclipticae obtinebitur, si a puncto soli opposito subtrahatur longitudo stellae obseruata; sit igitur huius anguli PAQ sinus $= b$, cosinus $= \beta$. Cum igitur iam reliqua maneant vt ante in motu terrae diurno, verus sideris locus erit in directione Ao; atque vera latitudo definietur angulo

gulo $o A p$; veraque differentia longitudinis ſideris et loci ſoli oppoſiti angulo $q A p$.

§. 49. Cum igitur verae ſideris latitudinis $o A p$ ſinus ſit $= a\left(\nu - \frac{n\alpha b}{\sqrt{(1-\alpha^2 b^2)}}\right) = \frac{a}{c}\left(\sqrt{(c^2 - r^2 + \alpha^2 b^2 r^2)} - \alpha b r\right)$, fiet iſte ſinus ob r reſpectu c vehementer paruum, $= a \frac{-\alpha a b r}{c}$; eiusque coſinus $= \alpha + \frac{a^2 b r}{c}$. Latitudo ergo ſtellae obſeruata diminui debet angulo, cuius ſinus eſt $\frac{abr}{c}$, ſiue latitudo ſit borealis ſiue auſtralis. Haec autem diminutio tantum locum habet cum angulus PAQ ſinum b habet affirmatiuum, hoc eſt cum ſol ad coniunctionem ſtellae accedit: ſeu a tempore oppoſitionis ad coniunctionem vsque. Contra autem a coniunctione ſtellae cum ſole vsque ad oppoſitionem latitudo ſtellae debet augeri ob b negatiuum, atque ad latitudinem obſeruatam ſiue borealem ſiue auſtralem addi debet angulus cuius ſinus eſt $= \frac{abr}{c}$.

§. 50. Vt haec correctio facilius ad calculum aſtronomicum accommodari queat, ſequens adhibeatur regula. Ex canone logarithmorum conſueto excerpantur logarithmi ſinuum cum latitudinis ſtellae obſeruatae, tum diſtantiae ſtellae a puncto in ecliptica ſoli oppoſito ſecundum longitudinem, hique logarithmi addantur et a ſumma auferatur iſte logarithmus 18,7057289. reſiduo logarithmo quaeratur numerus reſpondens ex tabula logarithmorum numerorum naturalium, qui numerus praebebit aequationem latitudinis: quae a latitudine obſeruata ſubtrahi debet, ſi ſtellae locus in ecliptica intra locum ſolis et eius oppoſitionem verſetur; addi vero debet, ſi locus ſtellae in ecliptica intra punctum ſoli oppoſitum ipſumque ſolis locum contineatur.

§. 51.

§. 51. Vt ista operatio exemplo illustretur ponamus stellae cuiusdam latitudinem obseruatam esse $75^\circ, 17', 48''$; longitudinem vero fuisse deprehensam $5\,S, 13^\circ\ 20'\ 55''$: eoque tempore solis longitudinem fuisse $7\,S, 25^\circ, 42', 35''$; computus ergo instituatur vt sequitur

Longitudo ☌ ☉	$7\,S, 25^\circ, 42', 35''$
Longitudo ☍ ☉	$1\,S; 25^\circ, 42', 35''$
subtr. Longitudo stellae	$5\,S; 13^\circ, 20', 55''$
Ergo ang. $QAP =$	$8\,S, 12^\circ, 21', 40''$

seu ang. $QAP = 252^\circ, 21', 40''$ cuius sinus cum sit negatiuus, latitudo obseruata debet augeri per aequationem: ex quo erit b sinus anguli $72^\circ, 21', 40''$; eiusque logarithm. $= 9{,}9790862$

addatur log. $75^\circ, 17', 48'' =$	$9{,}9855400$
subtr.	$19{,}9646262$
	$18{,}7057289$
	$1{,}2588973$

Ad latitudinem ergo obseruatam addi debent $18'', 9'''$ vnde vera latitudo erit $75^\circ, 18', 6'', 9'''$.

§. 52. Cum igitur latitudo stellae obseruata est nulla, tum etiam latitudo vera euanescet, vnde stellae in ipsa ecliptica sitae etiam semper in eccliptica apparebunt. Quo magis autem stella quaepiam ab eccliptica est remota, eo magis latitudo apparens discrepare poterit a latitudine vera, ceteris paribus; maxima enim differentia incidit in quadraturas stellae cum sole, estque $\frac{ar}{c}$; quae addi debet in quadratura priore, seu ea, quae post coniunctionem cum sole accidit, in posteriore autem quadratura coniunctionem praecedente subtrahi debet. At cum stella proxime ad polum eccliptícae erit obseruata tum ob α quantitatem valde paruum, denotabit autem α sinum distantiae stellae a polo eclipticae obseruatum, alio calculo erit opus. Cum enim sit $a = \sqrt{(1-\alpha^2)} = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ erit sinus verae stellae latitudinis $= a - \frac{ar^2}{2cc} - \frac{\alpha abr}{c} = 1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{r^2}{2cc} - \frac{\alpha br}{c}$, eiusque cosinus $= \sqrt{(\alpha^2 + \frac{r^2}{cc} + \frac{2\alpha br}{c})}$ qui erit sinus verae distantiae stellae a polo eclipticae.

§. 53. Si igitur stella in ipso polo eclipticae obseruetur, tum reuera ab hoc polo distabit angulo cuius sinus est $\frac{r}{c}$, qui angulus circiter 20″ conficit. At si distantia stellae a polo obseruata fuerit circiter 20″, vt α fere aequale sit ipsi $\frac{r}{c}$, tum expediet veram stellae a polo distantiam definire ex eius sinu, qui est $\sqrt{(\alpha^2 + \frac{r^2}{cc} + \frac{2\alpha br}{c})}$ neque ad radicis extractionem iuuabit approximatione vti. Veluti si stella obseruetur a polo eclipticae distare angulo 30″, sitque angulus PAQ rectus seu stella in posteriore quadratura, erit $b = 1$ et sinus distantiae verae a polo $= \alpha + \frac{r}{c}$ seu 50″ sin stella in priore quadratura fuerit obseruata, erit vera distantia a polo = 10″. In coniunctione autem vel oppositione reperietur vera distantia a polo = 36″, cum tamen alias in oppositione et coniunctione latitudo vera ab obseruata non discrepet.

§. 54. Videamus nunc quanam correctione longitudo stellae obseruata indigeat; supra autem inuenimus ad angulum QAP addi debere angulum PAp, cuius tangens est $= \frac{\mathfrak{G}r}{a^2br + a\sqrt{(c^2 - r^2 + \alpha^2b^2r^2)}}$ tanto igitur angulo longitudo stellae obseruata debebit diminui, vt prodeat eius longitudo vera si quidem anguli PAQ cosinus $\mathfrak{G}$ fuerit affirmatiuus, contra enim addi debet aequatio, si $\mathfrak{G}$ fiat negatiuum. Quoniam vero r est valde paruum respectu c fiet illius

illius anguli tangens $= \frac{\mathfrak{C} r}{ac + a^2 br - \frac{ar^2}{2c} + \frac{a^3 b^2 r^2}{2c}}$ quae nisi stella proxime ad polum eclipticae fuerit sita abit in hanc $\frac{\mathfrak{C} r}{ac}$. Manente ergo stellae a polo distantia maxima aequatio longitudinis erit in coniunctione et oppositione cum sole, illo quidem casu addi hoc vero subtrahi debet angulus, cuius tangens est $\frac{r}{ac}$: in quadraturis autem haec correctio fit nulla.

§. 55. Haec igitur correctio commode per logarithmos sequenti modo institui poterit; ad logarithmum cosinus anguli QAP addatur 1, 2942710, atque a summa subtrahatur logarithmus cosinus latitudinis stellae obseruatae residui logarithmi quaeratur numerus respondens, qui dabit numerum minutorum secundorum addendum vel subtrahendum longitudini obseruatae, prout stella vel coniunctioni solis vel oppositioni fuerit propior. Sic in exemplo §. 51. allato est ang. QAP $= 252^\circ, 21', 40''$ cuius cosinus est negatiuus, vnde longitudo obseruata augeri debebit. Iste autem cosinus congruit cum sinu anguli $17^\circ, 38', 20''$ cuius logarith. = 94814666

add.	1, 2942710
aufer. log. sin. $14^\circ, 42', 12''$	10, 7757376
	9, 4045158
	1, 3712218

hinc aequatio prodit $23''$, $30'''$, quae ad longitudinem obseruatam addi debet, ita vt vera longitudo sit 5 S; 13°, $21'$; $18''$, $30'''$.

§. 56. Aliter autem correctio erit instituenda, si stella polo eclipticae fuerit proxima, ita vt sinus eius diſtantiae ab hoc polo α tam ſit paruus vt prae termino αc reliqui termini non euaneſcant, tam enim a longitudine obſeruata angulus ſubtrahi debebit, vel ad angulum QAP addi debebit angulus cuius tangens eſt $= \frac{\frac{gr}{c}}{\alpha + \frac{\alpha^2 br}{c}}$ Quare ſi α omnino euaneſcat, fiatque $a = 1$, anguli addendi PAp tangens erit $= \frac{g}{b}$; quare cum anguli QAP tangens ſit $= \frac{b}{g}$, fiet angulus QAp rectus. Stellae igitur in ipſo polo ecclipticae viſae latitudo erit diminuenda 20. ſec. eiusque longitudo 90. gradibus ſuperabit longitudinem ſolis.

§. 57. Quaeſtio hic moueri poteſt non inelegans, qua quaeratur, quo ſitu ſtella in ipſo eccliptícae polo reuera poſita quouis tempore ſpectatoribus terreſtribus apparere debeat. Quum igitur verae huius ſtellae latitudinis ſinus ſit 1, habebitur iſta aequatio $1 = \frac{a}{c}(\sqrt{(c^2 - r^2 + \alpha^2 b^2 r^2)} - \alpha b r)$ ſeu $c + \alpha a b r = a \sqrt{(c^2 - r^2 + \alpha^2 b^2 r^2)}$ vnde ſumtis quadratis fit $\alpha^2 c^2 + 2 \alpha a b c r + a^2 r^2 = 0$, ex qua aequatione oritur tangens diſtantiae apparentis huius ſtellae a polo eccliptícae $= \frac{\alpha}{a} = \frac{-br + r\sqrt{(b^2 - 1)}}{c}$. Hinc igitur patet ſtellam talem polarem ex terra nunquam alio ſitu conſpici poſſe, niſi ſit $bb = 1$, hoc eſt niſi in quadratura cum ſole priore, quae poſt coniunctionem contingere ſolet. Hoc autem caſu fit $b = -1$ atque haec ſtella a polo angulo cuius tangens eſt $\frac{r}{c}$ ſeu angulo 20″ diſtare perpetuo obſeruabitur. Ex quo haec ſtella circa verum polum circulum ſpatio vnius anni abſoluere cernetur, cuius radius erit 20″.

§. 58.

§. 58. Diligenter igitur cauendum eſt, ne haec ſtellarum variatio annua a motu lucis ſucceſſiuo oriunda cum parallaxi confundatur. Expediet ergo ad parallaxin annuam ſtellarum fixarum commodiſſime inueſtigandam ſtella fixa vti, quae in ipſa eccliptica ſit ſita, quia eiusmodi ſtellarum latitudo non alteratur. Deinde longitudo huius ſtellae bis eſt obſeruanda eodem anno, quando ea cum ſole in quadraturis deprehenditur, his enim caſibus longitudo obſeruata a vera non diſcrepat. Ita ſi fuerit T*t* orbita terrae, S ſol et O ſtella fixa in plano eccliptícae ſita, obſeruetur ea primum in □ cum terra eſt in T angulusque OTS vel reuera rectus vel proxime; deinde obſeruetur eadem ſtella cum terra verſatur in *t* exiſtente angulo O*t*S iterum fere recto. His factis dati erunt anguli OTS et O*t*S fere recti, itemque ex theoria terrae per obſeruationes corrigenda angulus TS*t*, ex quibus definiri poterit diſtantia SO per ſemidiametros orbis magni. Tab. III. fig. 1.

§. 59. Hac igitur ratione obſeruationes ſtellarum fixarum ſunt corrigendae; alia autem correctione eſt opus pro obſeruationibus planetarum, quippe qui non quieſcent, ſed pariter ac terra circa ſolem reuoluuntur. Pertinet igitur haec correctio ad caſum quartum, quo tam obiectum quam ſpectatorem in motu collocamus. Moueatur igitur obiectum O in recta OV celeritate aequabili *s* ſpectator vero A promoueatur ſecundum directionem AE celeritate $= r$; ſint autem rectae OV et AE in eodem plano poſitae, quoniam haec potiſſimum ad motum planetarum ſumus accommodaturi qui fere in eodem plano circa ſolem rotantur, in quo ſita eſt orbita terrae. Emittat obiectum, dum in O verſatur radium, qui incidat in oculum ſpectatoris fig. 2.

 toris

toris in A constituti, et hancobrem concipiatur radius O F quem obiectum emissurum fuisset celeritate c si in O quieuisset, hicque radius, postquam motum obiecti recepit, oculum spectatoris in A feriat; hoc itaque fiet; si fuerit completo parallelogrammo $OF : OV = c : s$; radiusque OA perueniet ad spectatorem celeritate $= \frac{c.AO}{OF}$.

§. 60. Radius OA autem qui in oculum A celeritate r in directione AE motum impingit, eundem praestat effectum, ac si in directione QA in oculum quiescentem incideret, existente OAEQ parallelogrammo, ac $OA : AE = \frac{c.AO}{OF} : r$; vnde erit $OF : AE : OV = c : r : s$. Videbit ergo spectator in A obiectum in directione AQ, ideoque sub angulo ad sui motus directionem QAE. Dum autem radius ex obiecto in O existente ad spectatorem vsque peruenit, ipsum interea obiectum processit in V ita vt sit $OF : OV = c : s$ ex quo spectator obiectum videre deberet hoc ipso momento in directione AV; discrepat ergo locus a spectatore visus AQ a loco vero AV angulo QAV hicque angulus erit correctio ad situm obseruatum QAE addenda Quantus igitur sit iste angulus videamus, constat quidem ex duabus partibus QAO et OAV, quae addi debent, si quidem motus obiecti et spectatoris tendant in plagas contrarias, vti in figura assumimus.

§. 61. Sit anguli QAE, sub quo obiectum spectatori apparet, sinus $= m$, cosinus $= \mu$, ponanturque lineae $OF = AV = c$; $AE = OQ = r$; et $AF = OV = s$. Ex O in AQ demittatur perpendiculum Op, erit $\frac{Op}{OQ} = $ sin. OQA $=$ sin. QAE $= m$, adeoque $Op = mr$ et et $Qp = \mu r$. Producatur VO, donec AQ fecet in q, fitque anguli QOq, qui inclinationem directionum OV ad AE exprimit verfus plagam AE, finus $= n$, cofinus $= \nu$, erit ang. Oqp finus $= m\nu + \mu n$. Hinc itaque oritur $m\nu + \mu n : QO\ (r) = m : Oq\ (\frac{mr}{m\nu + \mu n})$. Nunc ex V demittatur in AQ perpendicularis VP, erit ob triangula qOp et qVP fimilia:

$$qO : Op = qV : VP$$

$$\frac{mr}{m\nu + \mu n} : mr = \frac{mr}{m\nu + \mu n} + s : mr + s(m\nu + \mu n).$$

Vnde anguli QAV erit finus $= \frac{VP}{AV} = \frac{mr + s(m\nu + \mu n)}{c}$ vel fi anguli VqA, quem directio obiecti cum radio vifiuo conftituit, dicatur finus $= q$ erit anguli QAV finus $= \frac{mr + qs}{c}$.

§. 62. Confentit ifta formula cum omnibus praecedentibus easque tanquam cafus fpeciales fub fe complectitur. Namquae fi vti cafu primo fpectator et obiectum quiefcant, tum ob r et $s = 0$ fit aberratio $= 0$. Atque fi vti in cafu fecundo fpectator quiefcat obiectum vero in directione OV promoueatur, tum finus anguli QAV fit $= \frac{qs}{c}$ denotante q finum anguli, quem radius vifiuus AQ cum directione motus obiecti conftituit. Denique fi obiectum in quiete ponatur, fpectator vero moueatur, qui erat cafus tertius, tum fit vti inuenimus finus anguli aberrationis QAV $= \frac{mr}{c}$. Intelligitur porro fi r et s fint valde paruae refpectu ipfius c, tum angulum cuius finus eft $\frac{mr + qs}{c}$ proxime fore aequalem fummae angulorum, quorum finus fint $\frac{mr}{c}$ et $\frac{qs}{c}$, ex quo correctiones quae feorfim cum ex motu obiecti tum ex motu fpectatoris oriuntur, coniungere licet.

§. 63.

§. 63. Si obiectum O in eadem recta O V sed in plagam oppositam *o q* progrediatur, tum eius celeritas *s* negatiue debet accipi; atque angulus aberrationis loci apparentis a vero erit $= \frac{mr-qs}{c}$, licet enim, si *r* et *s* prae *c* sint vehementer paruae, ipsum angulum seu arcum loco sinus substituere. Fieri igitur potest vt aberratio euanescat locusque apparens cum vero congruat. Hoc scilicet eueniet, si fuerit $r : s = q : m =$ O Q : O *q*. At erit $r : s =$ AE : AF; vnde recta E F erit radio A Q parallela. Ponamus directiones A E et V O concurrere in Z, erit A E : A F = A Z : *q* Z vel O Z. Cum ergo obiectum O et spectator A mouentur versus punctum Z celeritatibus rationem distantiarum a puncto Z proportionalibus, locus apparens cum vero congruet.

§. 64. Applicemus hanc doctrinam ad obseruationes planetarum corrigendas, quos in circulis concentricis circa solem motu vniformi ferri ponamus, ipsasque orbitas in plano ecclipticae sitas; excentricitas enim, motus inaequabilitas et inclinatio orbitarum, quoniam hae res satis sunt exiguae, insensibile discrimen in correctionem a motu lucis oriundam inferent. Quoniam igitur celeritates planetarum in suis orbitis tenent rationem reciprocam subduplicatam distantiarum a sole, distantiae autem ita se habent vt sit

log. dist. ♄ a ⊙ = 6, 9794600
log. dist. ♃ a ⊙ = 6, 7160965
log. dist. ♂ a ⊙ = 6, 1829850
log. dist. ♁ a ⊙ = 6, 0000000
log. dist. ♀ a ⊙ = 5, 8593365
log. dist. ☿ a ⊙ = 5, 5878232

celeri-

celeritates planetarum ad celeritatem lucis naturalem c applicatae ita ſe habebunt:

$$l\frac{c}{\text{cel. } ♄} = 4,5098840$$

$$l\frac{c}{\text{cel. } ♃} = 4,3782022$$

$$l\frac{c}{\text{cel. } ♂} = 4,1116465$$

$$l\frac{c}{\text{cel. } ♁} = 4,0201540$$

$$l\frac{c}{\text{cel. } ♀} = 3,9498222$$

$$l\frac{c}{\text{cel. } ☿} = 3,8140656$$

Vtemur enim potiſſimum logarithmis harum quantitatum, quia hoc modo ipſa correctio obſeruationum in minutis ſecundis facillime obtinetur. Denique cum hae correctiones ſint ſatis paruae, tuto affirmare poterimus planetas, dum radii ab iis ad nos vsque perueniunt, interea in directum progredi.

§. 65. Incipiamus a planetis ſuperioribus, ſitque S ſol, T terra in ſua orbita ſita atque Oo orbita planetae cuiusdam ſuperioris. Obſeruetur in terra T planeta indirectione TO, ſitque celeritas terrae in directione TE ſecundum ſignorum ſeriem $= r$, celeritas planetae autem in directione tangentis OQ$= s$: noteturque punctum A quod ſoli eſt oppoſitum. Ponatur anguli OTE, ſub quo planeta conſpicitur ſinus $= m$, coſinus $= \mu$, erit ob angulum ATE rectum, μ ſinus anguli ATO, quo planeta ab oppoſi- Tab. III. fig. 3.

tione solis A versus consequentia distare obseruatur, m vero erit eiusdem distantiae cosinus. Nunc ad angulum QOT inueniendum, quem directio radii OT cum directione motus planetae constituit, sit distantia terrae a sole TS $= a$, distantia planetae a sole OS $= b$, erit $b :$ sin. OTS$(\mu) = a :$ sin. TOS $(\frac{\mu a}{b})$, vnde anguli TOQ sinus erit $= V(1 - \frac{\mu^2 a^2}{b^2})$.

§. 66. Cum autem sit ex natura motus planetarum $r : s = \frac{1}{Va} : \frac{1}{Vb}$ erit $r^4 : s^4 = b^2 : a^2$, atque sinus anguli TOQ $= V(1 - \frac{\mu^2 s^4}{r^4}) = 1 - \frac{\mu^2 s^4}{2r^4}$ ob $r > s$ et $\mu < 1$. Sit nunc verus planetae locus TV, verusque angulus, sub quo planeta cerni deberet VTE, superans angulum apparentem OTE angulo VTO, erit anguli huius VTO sinus $= \frac{mr}{c} - \frac{s}{c} V(1 - \frac{\mu^2 s^4}{r^4}) = \frac{mr}{c} - \frac{s}{c} V(1 - \frac{\mu^2 a^2}{b^2})$. Ex quo distantia planetae a loco oppositionis solis A obseruata diminui debet angulo, cuius sinus est $\frac{mr}{c} - \frac{s}{c} V(1 - \frac{\mu^2 a^2}{b^2})$, seu si posterior terminus priorem superet, augeri debet distantia planetae ab oppositione solis versus consequentia sumta angulo, cuius sinus est $\frac{s}{c} V(1 - \frac{\mu^2 a^2}{b^2} - \frac{mr}{c}$. Vel, quod perinde est, tanto angulo longitudo planetae obseruata augeri debet.

§. 67. Si planeta obseruetur in ipsa oppositione solis A, fiet $\mu = 0$ et $m = 1$: vnde longitudo planetae obseruata augeri debet angulo, cuius sinus est $= \frac{s}{c} - \frac{r}{c}$, vel cum $r > s$, longitudo obseruata diminui debet angulo, cuius sinus est $\frac{r-s}{c}$, sin planeta in coniunctione cum sole obseruetur, fiet $m = -1$ et $\mu = 0$, tum igitur longitudo obseruata augeri debebit angulo, cuius sinus est $\frac{s+r}{c}$: haecque erit maxima correctio adhibenda. Obseruetur autem

tem planeta in alterutra quadratura, tum ob $m = 0$ et $\mu = + 1$, longitudo planetae augeri debebit angulo, cuius sinus est $\frac{s}{c} \sqrt{(1 - \frac{a^2}{b^2})}$. Generatim autem haec adhibeatur regula, subtrahatur locus soli oppositus a loco planetae in ecclіptica obseruatae, residuique arcus sinus ponatur μ, cosinus $= m$: tum quaeratur angulus, cuius sinus sit $\frac{\mu a}{b}$, eiusdemque anguli cosinus ponatur $= q$: quo facto aequatio ad longitudinem planetae obseruatam addenda erit $\frac{qs}{c} - \frac{mr}{c}$, ipsum enim arcum loco sinus substituimus.

§. 68. Computus autem facillime instituetur quaerendo valores expressionum $\frac{qs}{c}$ et $\frac{mr}{c}$ seorsim, quae cum sint sinus vel multipla sinuum, instar sinuum considerari poterunt. Quia autem anguli iis sinibus aequales quaeruntur, sumantur logarithmi quantitatum $\frac{qs}{c}$, $\frac{mr}{c}$ ex tabula sinuum ab iisque auferatur logarithmus, 4, 6855749; quo facto residui logarithmi in tabula logarithmorum numerorum naturalium quaeratur numerus respondens, qui dabit angulum quaesitum in minutis secundis. Est autem $l\frac{c}{r} =$ 4, 0201540 et $l\frac{c}{s}$ pro dato planeta ex tabula superiore debet sumi, vnde etiam relatio distantiarum a et b seu fractio $\frac{a}{b}$ est petenda.

§. 69. Dum locus solis est 9 S, 15°, 37′, 45″ obseruatur Iouis longitudo 1 S, 20°, 8′, 25″ quaeriturque longitudo vera. Ante omnia autem notandum est in calculo minuta secunda tuto negligi posse, quia ne minutis quidem neglectis aequatio desiderata variatur. Calculus vero ita se habet

 a long.

a long. ♃ — 1 S, 20°, 8′
subtr. ☍ ☉ — 3 S, 15°, 37′

304°, 31′ = 10 S, 4°, 31′
cuius sinus $\mu = -$ sin. 55°, 29′ et
cosinus $m = +$ sin. 34°, 31′

Porro	log. b	=	6, 71 69065
	log. a	=	6, 0000000
	$l\,\frac{b}{a}$	=	0, 7160965
	$l\,\mu$	=	9, 9159069
	$l\,\frac{\mu a}{b}$	=	9, 1998104 = log. sinus

cui respond. log. cosinus seu $l\,q$ = 9, 9944789
atque est $l\,m$ = 9, 7533118
Deinde est $l\,\frac{c}{r}$ = 4, 0201540
et $l\,\frac{c}{s}$ = 4, 3782022

Ergo	$l\,q$	=	9, 9944789
subtr.	$l\,\frac{c}{s}$	=	4, 3782022
			5, 6162767
subtr.			4, 6855749
			0, 9307018 ergo $\frac{qs}{c}$ = 8″, 31‴
Ac	$l\,m$	=	9, 7533118
subtr.	$l\,\frac{c}{r}$	=	4, 0201540
			5, 7331578
subtr.			4, 6855749
			1, 0475829 ergo $\frac{mr}{c}$ = 11″, 6‴,

vnde $\frac{qs-mr}{c} = -$ 2″, 35‴, ex quo vera Iouis longitudo Geocentrica erit 1 S, 20°, 8′, 22″, 25‴

§. 70.

§. 70. Cum maxima differentia inter locum obſervatum et verum eueniat, cum planeta eſt in coniunctione cum ſole, videamus quanta ea ſit in tribus planetis ſuperioribus, quibus adiiciamus correctiones in quadraturis et oppoſitione adhibendas.

$$\left.\begin{array}{l} \text{In coniunctione ♄ cum ☉ differentia eſt } 26'',\ 4''' \\ \text{In coniunctione ♃ cum ☉ differentia eſt } 28'',\ 18''' \\ \text{In coniunctione ♂ cum ☉ differentia eſt } 35'',\ 35''' \end{array}\right\}\text{addenda}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{In oppoſitione ♄ et ☉ differentia eſt } 13'',\ 18''' \\ \text{In oppoſitione ♃ et ☉ differentia eſt } 11'',\ 4''' \\ \text{In oppoſitione ♂ et ☉ differentia eſt } 3'',\ 47''' \end{array}\right\}\text{auferenda}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{In quadrat ♄ et ☉ differentia eſt } 6'',\ 20''' \\ \text{In quadrat ♃ et ☉ differentia eſt } 8'',\ 28''' \\ \text{In quadrat ♂ et ☉ differentia eſt } 12'',\ 2''' \end{array}\right\}\text{addenda}$$

Inter oppoſitionem ergo et quadraturas dabitur locus, in quo aequatio eſt nulla, planetaque in vero loco conſpicitur: euenit autem hoc quando anguli ATO tangens obſeruatur $\frac{b}{\sqrt{a(a+b)}}$ idque vtrinque circa oppoſitionem.

§. 71. Reſtant nobis planetae inferiores ambo Venus et Mercurius, quorum motum apparentem vt corrigamus, ſit T locus terrae in quo habeat celeritatem r ſecundum tangentem TE ſuae orbitae: exiſtat ſol in S centro tum orbitae terrae tum etiam orbitae OAo planetae inferioris O. Sit ſemidiameter orbitae terrae ST $= a$, orbitae planetae OS $=$ AS $= b$, atque appareat planeta ſpectatori in terra conſtituto in directione TO ſub angulo OTE cuius ſinus ſit $= m$, coſinus $= \mu$. Erit ergo planetae elongationis a ſole verſus conſequentia ſeu anguli OTS Tab. III. fig. 4.

 ſinus

finus $= -\mu$, cofinus $= m$. Quare cum in triangulo T OS dentur latera SO $= b$, ST $= a$ et angulus STO erit $b : -\mu = a$: fin. TOS, feu fin. TOS $= \frac{-\mu a}{b}$, cuius anguli cofinus erit $= \sqrt{(1 - \frac{\mu^2 a^2}{b^2})}$ qui fimul erit finus anguli TOQ, quem radius vifiuus cum directione motus planetae conftituit.

§. 72. Exprimat s celeritatem planetae, quam habet fecundum directionem tangentis OQ orbitae fuae, qui motus vti in figura repraefentatur, cum fit motui terrae contrarius, verus planetae locus erit in directione TV angulum maiorem cum TE conftituente, quam directio apparens OT, ex quo ad locum planetae in ecclipticа obferuatum addi debet angulus OTV cuius finus fit $= \frac{mr}{c} + \frac{s}{c}\sqrt{(1 - \frac{\mu^2 a^2}{b^2})}$. Quare a loco planetae in ecclipticа obferuato fubtrahi debet locus folis, arcusque refidui cofinus ponatur $= m$; finus vero $= \mu$ fiue affirmatiuus fiue negatiuus fit perinde eft. Tum quaeratur angulus, cuius finus fit $= \frac{\mu a}{b}$, eiusdemque cofinus ponatur $= q$, quo facto ad longitudinem planetae obferuatam addatur angulus $\frac{mr}{c} + \frac{qs}{c}$; prodibitque longitudo planetae vera geocentrica; ac vera planetae elongatio a fole.

§. 73. Haec ita fe habent, quando planeta fub directione TO vifus magis a terra remotus eft quam fol, ac loco B poft folem in fua orbita eft propior; at cum planeta in eadem directione To confpicitur, propior autem terrae eft quam fol, tum alia correctio eft inftituenda. Hoc enim cafu angulus Toq, quem directio vifa cum directione motus oq conftituit, aequalis quidem eft angulo

TOQ

TOQ, at quia celeritas oq conſpirat cum motu terrae, erit angulus oTv, quo longitudo apparens augeri debet $= \frac{mr}{c} - \frac{s}{a} \sqrt{(1 - \frac{\mu^2 a^2}{b^2})} = \frac{mr}{c} - \frac{qs}{c}$.

§. 74. Maxima ergo aequatio locum habet, quando planeta poſt ſolen in B conſpicitur, tum enim $m = 1$ et $\mu = 0$, vnde longitudo apparens nimis eſt parua angulo $\frac{r}{c} + \frac{s}{c}$. In altera autem coniunctione qua planeta recte intra ſolem et terram conſpicitur, longitudo obſervata diminui debet angulo $\frac{s}{c} - \frac{r}{c}$, quia $s > r$. In maxima vero planetae elongatione a ſole viſa, quae proxime contingit cum $\frac{\mu^2 a^2}{b^2} = 1$ ſeu $\mu^2 = \frac{b^2}{a^2}$ et $m = \sqrt{(1 - \frac{b^2}{a^2})}$; erit aequatio longitudini obſeruatae addenda $= \frac{r}{c} \sqrt{(1 - \frac{b^2}{a^2})}$; quae ergo cum planeta in orbitae ſuae ſemiſſe AOB verſatur ad elongationem a ſole obſeruatam addi, at cum planeta in altera ſemiſſe deprehenditur ſubtrahi debet. Cum igitur vera elongatio maxima eueniat cum anguli VTS ſinus ſit vel $+ \frac{b}{a}$ vel $- \frac{b}{a}$, ſit tum anguli apparentis OTS ſinus $= \mu$ coſinus $= m$, erit $\mu + \frac{mr}{c} \sqrt{(1 - \frac{b^2}{a^2})} = \frac{b}{a}$ et $\mu = \frac{b}{a} - \frac{r}{c} (1 - \frac{b^2}{a^2})$; in altera autem elongatione maxima verſus D fiet $\mu = \frac{b}{a} + \frac{r}{c} (1 - \frac{b^2}{a^2})$. magis igitur a ſole elongari obſeruabitur verſus D quam verſus C.

§. 75. Obſeruatus ſit mercurius in eccliptica 4 S, 19°, 31′, 15″, dum ſol eſſet in 3 S, 27°, 14′, 55″, atque tum mercurius longius diſtet a terra quam ſol. Quare

a longitudine	☿	4 S, 19°, 31′
ſubtrahatur locus	☉	3 S, 27°, 15′
reſiduum		0 S, 22°, 16′

ergo

ergo $m =$ sin. $67°, 44'$, et $\mu =$ sin. $22°, 16'$.

Poro erit	$l\mu$	$= 9,5785450$
addatur	$l\,a$	$= 6,0000000$
		$15,5785450$
subtr.	$l\,b$	$= 5,5878232$
$l\frac{\mu a}{b}$		$= 9,9907218$
Hinc fit	$l\,q$	$= 9,3106849$
subtr.	$l\frac{c}{s}$	$= 3,8140656$
		$5,4966193$
auferatur		$4,6855749$
		$0,8110444$

ergo $\frac{qs}{c}$ dabit $6'', 28'''$

Cum iam sit	$l\,m$	$= 9,9663437$
subtrah.	$l\frac{c}{r}$	$= 4,0201540$
		$5,9461897$
auferatur		$4,6855749$
		$1,2606148$

vnde $\frac{mr}{c}$ praebet $18'', 13'''$.

Quocirca longitudo obseruata augeri debet angulo $\frac{mr}{c} + \frac{qs}{c} = 24'', 41'''$. At si mercurius terrae propior fuisset quam sol, in eadem autem directione apparuisset, tum ad longitudinem addi deberet $\frac{mr}{c} - \frac{qs}{c} = 11'', 45'''$.

§. 76. Aequationes autem veneris et mercurii in coniunctionibus atque elongationibus maximis ita se habent.

In

			Aequatio	
In coniunctione superiore	♀ et ☉.		42″, 50‴	add.
In coniunctione superiore	☿ et ☉.		51″, 20‴	add.
In coniunctionn inferiore	♀ et ☉.		3″, 28‴	subtr.
In coniunctione inferiore	☿ et ☉.		11″, 58‴	subtr.
In elongatione max.	♀ et ☉.		13″, 36‴	add.
In elongatione max.	☿ et ☉.		18″, 9‴	add.

Ope regularum itaque hic traditarum obseruationes tam stellarum fixarum quam planetarum ab iis erroribus, qui ex propagatione lucis successiua oriuntur, possunt liberari, earumque loco vera siderum loca geocentrica quidem definiri. Neque vero in his determinationibus multum inter est vtra hypothesis propagationis lucis assumatur, cum discrimen oriatur insensibile. Ceterum si lux vel celerius vel tardius propagetur, quam hic assumsimus, omnes aberrationes in eadem ratione debebunt vel diminui vel augeri. Denique si lux tempore opus habet definito, quo per datum interuallum transuehatur, nullum systema mundi, in quo terra immota ponitur, consistere potest; id quod nouum est argumentum pro hypothesi Copernicana.

METHODVS FACILIS COMPVTANDI ANGVLORVM SINVS AC TANGENTES TAM NATVRALES QVAM ARTIFICIALES

AVCTORE
Leonhardo Eulero.

§. 1.

Exposui anno praeterito methodum inueniendi valores eiusmodi expressionum, quae sint producta ex infinitis factoribus certa quadam lege progredientibus, eaque methodus deducta erat ex formulis integralibus, quarum integratio a se inuicem pendet. Nunc autem, cum nuper exposuissem modum summandi huiusmodi series

$$\frac{1}{1\pm p} \pm \frac{1}{4\pm p} + \frac{1}{9\pm p} \pm \frac{1}{16\pm p} + \frac{1}{25\pm p} \pm \text{etc.}$$

ex eo nactus sum commodam atque aptam methodum quam plurimorum productorum, ex infinitis factoribus constantium, valores determinandi, eiusque beneficio mihi licuit innumerabiles istiusmodi expressiones definire, quae per alteram mothodum vel omnino tractari non poterant, vel saltem tam expedite et concinne non absoluuntur. Quod negotium, quo clarius ob oculos ponatur, in sequentibus problematis sum complexurus.

Problema. 1.

§. 2. Inuenire valorem huius expressionis per continuos factores in infinitum progredientis.

1 +

$\frac{1+p}{1} \cdot \frac{4+p}{4} \cdot \frac{9+p}{9} \cdot \frac{16+p}{16} \cdot \frac{25+p}{25} \cdot \frac{36+p}{36} \cdot \text{etc.}$

Solutio.

Ponatur huius expressionis propositae valor quaesitus $= s$, et sumtis logarithmis, erit $ls = l(1+p) +$
$l(1+\frac{p}{4}) + l(1+\frac{p}{9}) + l(1+\frac{p}{16}) + l(1+\frac{p}{25}) + l(1+\frac{p}{36}) + \text{etc.}$
His igitur logarithmis per series notas expressis habebitur

$$\begin{aligned} ls = & + p - \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4} + \frac{p^5}{5} - \frac{p^6}{6} + \text{etc.} \\ & + \frac{p}{4} - \frac{p^2}{2\cdot 4^2} + \frac{p^3}{3\cdot 4^3} - \frac{p^4}{4\cdot 4^4} + \frac{p^5}{5\cdot 4^5} - \frac{p^6}{6\cdot 4^6} + \text{etc.} \\ & + \frac{p}{9} - \frac{p^2}{2\cdot 9^2} + \frac{p^3}{3\cdot 9^3} - \frac{p^4}{4\cdot 9^4} + \frac{p^5}{5\cdot 9^5} - \frac{p^6}{6\cdot 9^6} + \text{etc.} \\ & + \frac{p}{16} - \frac{p^2}{2\cdot 16^2} + \frac{p^3}{3\cdot 16^3} - \frac{p^4}{4\cdot 16^4} + \frac{p^5}{5\cdot 16^5} - \frac{p^6}{6\cdot 16^6} + \text{etc.} \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

Sumantur differentia; eritque

$$\begin{aligned} \frac{ds}{s\,dp} = & \; 1 - p + p^2 - p^3 + p^4 - p^5 + \text{etc.} \\ & + \frac{1}{4} - \frac{p}{4^2} + \frac{p^2}{4^3} - \frac{p^3}{4^4} + \frac{p^4}{4^5} - \frac{p^5}{4^6} + \text{etc.} \\ & + \frac{1}{9} - \frac{p}{9^2} + \frac{p^2}{9^3} - \frac{p^3}{9^4} + \frac{p^4}{9^5} - \frac{p^5}{9^6} + \text{etc.} \\ & + \frac{1}{16} - \frac{p}{16^2} + \frac{p^2}{16^3} - \frac{p^3}{16^4} + \frac{p^4}{16^5} - \frac{p^5}{16^6} + \text{etc.} \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

Cum nunc hae series omnes sint geometricae, summari poterunt, hocque facto prodibit

$$\frac{ds}{s\,dp} = \frac{1}{1+p} + \frac{1}{4+p} + \frac{1}{9+p} + \frac{1}{16+p} + \frac{1}{25+p} + \text{etc.}$$

Huius autem seriei summam nuper exhibui; vnde si circuli cuius diameter $= 1$, peripheria ponatur $= \pi$ erit
$\frac{ds}{s\,dp} = \frac{\pi\sqrt{p}-1}{2p} + \frac{\pi\sqrt{p}}{p(e^{2\pi\sqrt{p}}-1)}$. Ponatur facilitatis gratia $p =$
qq, erit $dp = 2q\,dq$, atque aequatio inuenta abibit in hanc

 $\frac{ds}{s} =$

$$\frac{ds}{s} = \pi dq - \frac{dq}{q} + \frac{2\pi dq}{e^{2\pi q}-1} = -\pi dq - \frac{dq}{q} + \frac{2e^{2\pi q}\pi dq}{e^{2\pi q}-1}$$

Cuius integrale eſt $ls = lC - \pi q - lq + l(e^{2\pi q}-1)$ ſeu

$$s = \frac{C(e^{2\pi q}-1)}{e^{\pi q}q} = \frac{C(e^{2\pi\sqrt{p}}-1)}{e^{\pi\sqrt{p}}\sqrt{p}},$$ vbi conſtantem C ita determinari oportet, vt poſito p vel $q=0$ fiat $ls = 0$. At facto $q=0$, fit $e^{2\pi q}-1 = 2\pi q$, ideoque $ls = 0 = lC - \pi q - lq + l2\pi q = lC + l2\pi$, ergo $C = \frac{1}{2\pi}$. Conſequenter expreſſionis propoſitae

$$\frac{1+p}{1}\cdot\frac{4+p}{4}\cdot\frac{9+p}{9}\cdot\frac{16+p}{16}\cdot\frac{25+p}{25}\cdot\frac{36+p}{36}\cdot\text{etc.}$$

valor erit $= \frac{e^{2\pi\sqrt{p}}-1}{2e^{\pi\sqrt{p}}\pi\sqrt{p}}$. Q. E. I.

Coroll. 1.

§. 3. Quodſi loco p ponatur $4p$, habebitur iſta expreſſio:

$$\frac{1+4p}{1}\cdot\frac{1+p}{1}\cdot\frac{9+4p}{9}\cdot\frac{4+p}{4}\cdot\frac{25+4p}{25}\cdot\frac{9+p}{9}\cdot\text{etc.}$$

cuius igitur valor erit $\frac{e^{4\pi\sqrt{p}}-1}{4e^{2\pi\sqrt{p}}\pi\sqrt{p}}$.

Coroll. 2.

§. 4. Cum iam in hac expreſſione praecedens contineatur, diuidatur haec per illam, prodibitque

$$\frac{1+4p}{1}\cdot\frac{9+4p}{9}\cdot\frac{25+4p}{25}\cdot\frac{49+4p}{49}\cdot\text{etc.}$$

cuius proinde valor eſt $\frac{e^{2\pi\sqrt{p}}+1}{2e^{\pi\sqrt{p}}}$.

Coroll.

Coroll. 3.

§. 5. Hinc igitur nanciſcimur valorem huius expreſſionis propoſitae affinis:

$$\frac{1+p}{1}\cdot\frac{9+p}{9}\cdot\frac{25+p}{25}\cdot\frac{49+p}{49}\cdot\frac{81+p}{81}\cdot\text{etc.}$$

quippe cuius valor erit $=\frac{e^{\pi\sqrt{p}}+1}{2e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{p}}}$.

Coroll. 4.

§. 6. Diuidatur per hanc ipſa expreſſio propoſita, fiet

$$\frac{4+p}{4}\cdot\frac{16+p}{16}\cdot\frac{36+p}{36}\cdot\frac{64+p}{64}\cdot\frac{100+p}{100}\cdot\text{etc.}$$

huius ſcilicet valor erit $=\frac{e^{\pi\sqrt{p}}-1}{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{p}}\pi\sqrt{p}}$.

Coroll. 5.

§. 7. Si nunc expreſſio §. 5. per expreſſionem §. 6. diuidatur, prodibit haec forma

$$\frac{1+p}{1}\cdot\frac{4}{4+p}\cdot\frac{9+p}{9}\cdot\frac{16}{16+p}\cdot\frac{25+p}{25}\cdot\frac{36}{36+p}\cdot\text{etc.}$$

cuius valor erit $=\frac{(e^{\pi\sqrt{p}}+1)\pi\sqrt{p}}{2(e^{\pi\sqrt{p}}-1)}$.

Coroll. 6.

§. 8 Si ſumantur binae huiusmodi ſeries, atque altera per alteram diuidatur, obtinebuntur ſequentes ſummationes.

$$\frac{1+p}{1+q}\cdot\frac{4+p}{4+q}\cdot\frac{9+p}{9+q}\cdot\frac{16+p}{16+q}\cdot\text{etc.}=\frac{e^{\pi\sqrt{q}}(e^{2\pi\sqrt{p}}-1)\sqrt{q}}{e^{\pi\sqrt{p}}(e^{2\pi\sqrt{q}}-1)\sqrt{p}}$$

 $\frac{1+p}{1+q}$

$$\frac{1+p}{1+q}\cdot\frac{4+q}{4+p}\cdot\frac{9+p}{9+q}\cdot\frac{16+q}{16+p}\cdot\text{etc.}=\frac{(e^{\pi\sqrt{p}}+1)(e^{\pi\sqrt{q}}-1)\sqrt{p}}{(e^{\pi\sqrt{p}}-1)(e^{\pi\sqrt{q}}+1)\sqrt{q}}$$

$$\frac{1+p}{1+q}\cdot\frac{9+p}{9+q}\cdot\frac{25+p}{25+q}\cdot\text{etc.}=\frac{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{q}}(e^{\pi\sqrt{p}}+1)}{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{p}}(e^{\pi\sqrt{q}}+1)}$$

$$\frac{4+p}{4+q}\cdot\frac{16+p}{16+q}\cdot\frac{36+p}{36+q}\cdot\text{etc.}=\frac{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{q}}(e^{\pi\sqrt{p}}-)\sqrt{q}}{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{p}}(e^{\pi\sqrt{q}}-1)\sqrt{p}}.$$

§. 9. Ex ſolutione igitur huius primi problematis conſequuti ſumus valores eiusmodi productorum infinitis fractionibus contentorum, quarum tam numeratores quam denominatores ſunt qnadrata vel numerorum omnium in ſerie naturali prpgredientium, vel imparium tantum vel parium, eaque datis numeris aucta. Cum igitur iſtiusmodi factores in ſimplices reales, qui arithmeticam teneant progreſſionem, reſolui nequeant, iſtae ſummationes methcdo iam ante expoſita abſolui non poterunt. At viciſſim hinc non intelligitur, quinam prodituri ſint valores, ſi vel p vel q negatiue accipiatur ob exponentes $\pi\sqrt{p}$ et $\pi\sqrt{q}$, qui hoc caſu fiunt imaginarii. Quamobrem hos caſus in ſequenti problemate euoluemus.

Problema 2.

§. 1. Inuenire valorem huius expreſſionis per continuos factores in infinitum progredientis

$$\frac{1-p}{1}\cdot\frac{4-p}{4}\cdot\frac{9-p}{9}\cdot\frac{16-p}{16}\cdot\frac{25-p}{25}\cdot\frac{36-p}{36}\cdot\text{etc.}$$

Solutio.

Ponatur valor quaeſitus $=s$, eritque logarithmis ſumendis,

$$ls=l(1-p)+l(1-\tfrac{p}{4})+l(1-\tfrac{p}{9})+l(1-\tfrac{p}{16})+l(1-\tfrac{p}{25})+\text{etc.}$$

His

His vero logarithmis in ſeries conuerſis habebitur:

$$ls = -\frac{p}{1} - \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{3} - \frac{p^4}{4} - \frac{p^5}{5} - \text{etc.}$$
$$-\frac{p}{4} - \frac{p^2}{2\cdot 4^2} - \frac{p^3}{3\cdot 4^3} - \frac{p^4}{4\cdot 4^4} - \frac{p^5}{5\cdot 4^5} - \text{etc.}$$
$$-\frac{p}{9} - \frac{p^2}{2\cdot 9^2} - \frac{p^3}{3\cdot 9^3} - \frac{p^4}{4\cdot 9^4} - \frac{p^5}{5\cdot 9^5} - \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Sumtisque differentialibus prodibit:

$$\frac{-ds}{sdp} = +1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + \text{etc.}$$
$$+\frac{1}{4} + \frac{p}{4^2} + \frac{p^2}{4^3} + \frac{p^3}{4^4} + \frac{p^4}{4^5} + \text{etc.}$$
$$+\frac{1}{9} + \frac{p}{9^2} + \frac{p^2}{9^3} + \frac{p^3}{9^4} + \frac{p^4}{9^5} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Quae ſeries cum ſingulae ſint geometricae, ſummae illarum loco ſubſtituantur, hincque erit

$$\frac{-ds}{sdp} = \frac{1}{1-p} + \frac{1}{4-p} + \frac{1}{9-p} + \frac{1}{16-p} + \frac{1}{25-p} + \text{etc.}$$

At iſtius ſeriei ſummam nuper elicui, quae, ſi ſubſtituatur, orietur

$$-\frac{ds}{sdp} = \frac{1}{2p} - \frac{\pi\sqrt{p}}{2p\,\text{tang.}\,A.\pi\sqrt{p}}$$

Sit commodi ergo $p = qq$ eritque

$$-\frac{ds}{s} = \frac{dq}{q} - \frac{\pi dq}{\text{tang.}\,A.\pi q} = \frac{dq}{q} - \frac{\pi dq\,\text{coſ.}\,A.\pi q}{\text{ſin.}\,A.\pi q}$$

Quoniam nunc eſt $d.\,\text{ſin.}\,A.\pi q = \pi dq\,\text{coſ.}\,A.\pi q$, erit integrale aequationis inuentae,

$lC - ls = lq - l\,\text{ſin.}\,A.\pi q$; conſtante autem C ita definita vt facto p vel $q = 0$ euaneſcat ls prodibit $lC = lq - l\pi q = -l\pi$. Quocirca erit $\frac{1}{\pi s} = \frac{q}{\text{ſin.}\,A.\pi q} = \frac{\sqrt{p}}{\text{ſin.}\,A.\pi\sqrt{p}}$ hincque $s = \frac{\text{ſin.}\,A.\pi\sqrt{p}}{\pi\sqrt{p}}$ ſiue

$$\frac{1-p}{1}\cdot\frac{4-p}{4}\cdot\frac{9-p}{9}\cdot\frac{16-p}{16}\cdot\frac{25-p}{25}\cdot\text{etc.} = \frac{\text{ſin.}\,A.\pi\sqrt{p}}{\pi\sqrt{p}}.$$

Q. E. I.

Coroll. 1.

Coroll. 1.

§. 11. Quodsi loco p ponatur $4p$, habebitur ista expressio:

$$\frac{1-4p}{1} \cdot \frac{1-p}{1} \cdot \frac{9-4p}{9} \cdot \frac{4-p}{4} \cdot \frac{25-4p}{25} \cdot \text{etc.}$$

cuius valor erit $= \frac{\text{fin. A} \cdot 2\pi\sqrt{p}}{2\pi\sqrt{p}} = \frac{\text{fin. A} \cdot \pi\sqrt{p} \cdot \text{cof. A} \cdot \pi\sqrt{p}}{\pi\sqrt{p}}$.

Coroll. 2.

§. 12. Diuidatur haec feries per illam, prodibitque

$$\frac{1-4p}{1} \cdot \frac{9-4p}{9} \cdot \frac{25-4p}{25} \cdot \text{etc.} = \text{cof. A} \cdot \pi\sqrt{p} \quad \text{fiue}$$

$$\frac{1-p}{1} \cdot \frac{9-p}{9} \cdot \frac{25-p}{25} \cdot \text{etc.} = \text{cof. A} \cdot \frac{\pi\sqrt{p}}{2}.$$

Coroll. 3.

§. 13. Cum iam fit $\frac{1-p}{1} \cdot \frac{4-p}{4} \cdot \frac{9-p}{9} \cdot \frac{16-p}{16} \cdot \text{etc.} =$

$$\frac{\text{fin. A} \cdot \pi\sqrt{p}}{\pi\sqrt{p}} = \frac{2 \text{ fin. A} \tfrac{1}{2} \pi\sqrt{p} \cdot \text{cof. A} \cdot \tfrac{1}{2} \pi\sqrt{p}}{\pi\sqrt{p}} \quad \text{erit}$$

$$\frac{4-p}{4} \cdot \frac{16-p}{16} \cdot \frac{36-p}{36} \cdot \frac{64-p}{64} = \frac{2 \text{ fin. A} \cdot \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{p}}{\pi\sqrt{p}}.$$

Coroll. 4.

§. 14. Diuidatur per hanc expressionum praecendens orietur.

$$\frac{1-p}{1} \cdot \frac{4}{4-p} \cdot \frac{9-p}{9} \cdot \frac{16}{16-p} \cdot \frac{25-p}{25} \cdot \frac{36}{36-p} \quad \text{etc.}$$

cuius valor erit $= \frac{\pi\sqrt{p}}{2 \text{ tang. A} \tfrac{1}{2} \pi\sqrt{p}}$.

Coroll.

Coroll. 5.

§. 15. Si ſumantur binae huiusmodi ſeries, earumque altera per alteram diuidatur, obtinebuntur ſequentes ſummationes.

$$\frac{1-p}{1-q}\cdot\frac{4-p}{4-q}\cdot\frac{9-p}{9-q}\cdot\frac{16-p}{16-q}\text{ etc} = \frac{\sqrt{q}\ \text{ſin. A. }\pi\sqrt{p}}{\sqrt{p}\ \text{ſin. A. }\pi\sqrt{q}}$$

$$\frac{1-p}{1-q}\cdot\frac{4-q}{4-p}\cdot\frac{9-p}{9-q}\cdot\frac{16-q}{16-p}\text{ etc.} = \frac{\sqrt{p}\ \text{tang. A. }\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{q}}{\sqrt{q}\ \text{tang. A. }\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{p}}$$

$$\frac{1-p}{1-q}\cdot\frac{9-p}{9-q}\cdot\frac{25-p}{25-q}\cdot\frac{49-p}{49-q}\cdot\text{ etc.} = \frac{\text{coſ. A. }\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{p}}{\text{coſ. A. }\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{q}}$$

$$\frac{4-p}{4-q}\cdot\frac{16-p}{16-q}\cdot\frac{36-p}{36-q}\cdot\frac{64-p}{46-q}\cdot\text{ etc.} = \frac{\sqrt{q}\ \text{ſin. A. }\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{p}}{\sqrt{p}\ \text{ſin. A. }\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{q}}$$

§. 16. In his expreſſionibus ſinus, coſinus et tangentes referuntur ad ſinum totum $= 1$, ſeu arcus circulares in circulo ſunt capiendi, cuius ſemidiameter eſt $= 1$. In tali igitur circulo exprimet π ſemiſſem peripheriae ſeu arcum 180. graduum. In numeris autem proximis erit, vt conſtat,

$$\pi = 3,14159265357989$$

Quodſi vero $\sqrt{p}$ et $\sqrt{q}$ fuerint numeri rationales, tum ſinus et tangentes, geometrice poterunt exhiberi, erit ſcilicet

ſin. A. $\pi = 0$	ſin. A. $\tfrac{1}{2}\pi = 1$	ſin. A. $\tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$	ſin. A. $\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{\sqrt{2}}$
coſ. A. $\pi = -1$	coſ. A. $\tfrac{1}{2}\pi = 0$	coſ. A. $\tfrac{1}{3}\pi = \tfrac{1}{2}$	coſ. A. $\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{\sqrt{2}}$
tang. A. $\pi = 0$	tang. A. $\tfrac{1}{2}\pi = \infty$	tang. A. $\tfrac{1}{3}\pi = \sqrt{3}$	tang. A. $\tfrac{1}{4}\pi = 1$.

§. 17. Expreſſionum harum vſus primum in hoc conſiſtit, vt earum ope peripheria circuli multifariam per iſtiusmodi producta continua concinne poſſit exhiberi. Quod vt appareat ponamus $p = \frac{m^2}{n^2}$ et cum π ſit arcus 180. graduum erit per §. 10.

$$\frac{n^2-m^2}{n^2} \cdot \frac{4n^2-m^2}{4n^2} \cdot \frac{9n^2-m^2}{9n^2} \cdot \frac{16n^2-m^2}{16n^2} \text{ etc.} = \frac{n \text{ ſin. A. } \frac{m}{n} 180^\circ}{m\pi}$$

ſeu

$$\pi = \frac{n}{m} \text{ ſin. A. } \frac{m}{n} 180^\circ \frac{n^2}{n^2-m^2} \cdot \frac{4n^2}{4n^2-m^2} \cdot \frac{9n^2}{9n^2-m^2} \cdot \frac{16n^2}{16n^2-m^2} \text{ etc.}$$

vnde emergunt ſequentes pro valore ipſius π expreſſiones.

Si $m = 1$, $n = 2$

$$\pi = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{64}{63} \cdot \frac{100}{99} \cdot \frac{144}{143} \cdot \text{ etc.}$$

$$\text{ſeu } \pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13} \text{ etc.}$$

quae eſt ipſa expreſſio Walliſii alibi a me demonſtrata.

Si $m = 1$ et $n = 3$

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{81}{80} \cdot \frac{144}{143} \cdot \frac{225}{224} \text{ etc. ſeu}$$

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 15}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 16} \text{ etc.}$$

Si $m = 1$ etc. $n = 4$

$$\pi = 2\sqrt{2} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{64}{63} \cdot \frac{144}{143} \cdot \frac{256}{255} \cdot \text{ etc. ſeu}$$

$$\pi = 2\sqrt{2} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 20}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21} \text{ etc.}$$

Si $m = 1$ et $n = 6$

$$\pi = 3 \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{144}{143} \cdot \frac{324}{323} \cdot \frac{576}{575} \text{ etc. ſeu}$$

$$\pi = 3 \cdot \frac{6 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 24 \cdot 24}{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 25} \text{ etc.}$$

§. 18. Expreſſiones hae, quanquam ſatis cito convergunt, tamen ſunt aptiores ad logarithmum ipſius π inueniendum, quam ad ipſum valorem π. Ita erit ex vltima expreſſione

$$l\pi = l3 + l\frac{36}{35} + l\frac{144}{143} + l\frac{324}{323} + \text{ etc. ſeu}$$

$$l\pi = l3 + \frac{1}{6^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{ etc.}\right)$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 6^4}\left(1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \text{ etc.}\right)$$

$$+ \frac{1}{3 \cdot 6^6}\left(1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \text{ete.}\right)$$
$$+ \frac{1}{4 \cdot 6^8}\left(1 + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \frac{1}{25^4} + \text{etc.}\right)$$
etc.

vnde calculus ſequenti modo inſtituetur ad logarithmum hyperbolicum ipſius π inueniendum

$$l\,3 = 1,098612288668$$
$$l\,\tfrac{36}{35} = 0,028170876966$$
$$0,017914835217 = \tfrac{1}{6^2}\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \text{etc.}\right)$$
$$0,000031760507 = \tfrac{1}{2 \cdot 6^4}\left(\tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{9^2} + \tfrac{1}{16^2} + \text{etc.}\right)$$
$$0,000000123907 = \tfrac{1}{3 \cdot 6^6}\left(\tfrac{1}{4^3} + \tfrac{1}{9^3} + \tfrac{1}{16^3} + \text{etc.}\right)$$
$$0,000000000607 = \tfrac{1}{4 \cdot 6^8}\left(\tfrac{1}{4^4} + \tfrac{1}{9^4} + \tfrac{1}{16^4} + \text{etc.}\right)$$
4

$$l\,\pi = 1,144729885879$$

Logarithmus hic hyperbolicus ſi multiplicetur per

0,434294481903251

prodibit logarithmus communis valoris π ſeu numeri

3,14159265357989 etc.

qui logarithmus a Cl. Sharpio in Tabulis mathematicis computatus eſt

0,49714,98726,94133,85435,12682,88290 etc.

§. 19. Cum autem peripheria circuli per ſe ſatis ſit cognita ex approximationibus iam diligentiſſime peractis, vſui harum expreſſionum in hoc negotio ſuperſedebimus. Alter autem vſus, qui ex his expreſſionibus duci poteſt, conſiſtit in inueniendis ſinibus et tangentibus et ſecantibus quorumcunque angulorum, qua quidem in re opus eſt posse valorem ipsius π. Ita si ponamus $\pi = 2\,q$ ita vt sit q arcus 90 graduum erit

$$\text{sin. A}\,.\,\frac{m}{n}q = \frac{m}{n}q \cdot \frac{4n^2-m^2}{4n^2} \cdot \frac{16n^2-m^2}{16n^2} \cdot \frac{36n^2-m^2}{36n^2} \cdot \frac{64n^2-m^2}{64n^2}\ \text{etc.}$$

hincque

$$\text{cosec. A}\,.\,\frac{m}{n}q = \frac{n}{mq} \cdot \frac{4n^2}{4n^2-m^2} \cdot \frac{16n^2}{16n^2-m^2} \cdot \frac{36n^2}{36n^2-m^2} \cdot \frac{64n^2}{64n^2-m^2}\ \text{etc.}$$

Porro ex §. 12. posito $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$ habebitur

$$\text{cos. A}\,.\,\frac{m}{n}q = \frac{n^2-m^2}{n^2} \cdot \frac{9n^2-m^2}{9n^2} \cdot \frac{25n^2-m^2}{25n^2} \cdot \frac{49n^2-m^2}{49n^2}\ \text{etc.}$$

hincque

$$\text{sec. A}\,.\,\frac{m}{n}q = \frac{n^2}{n^2-m^2} \cdot \frac{9n^2}{9n^2-m^2} \cdot \frac{25n^2}{25n^2-m^2} \cdot \frac{49n^2}{49n^2-m^2}\ \text{etc.}$$

Denique ex §. 14. deducitur pari modo

$$\text{tang. A}\,.\,\frac{m}{n}q = \frac{m}{n}q \cdot \frac{n^2}{n^2-m^2} \cdot \frac{4n^2-m^2}{4n^2} \cdot \frac{9nn}{9n^2-m^2} \cdot \frac{16n^2-m^2}{16n^2}\ \text{etc.}$$

hincque

$$\text{cot. A}\,.\,\frac{m}{n}q = \frac{n}{mq} \cdot \frac{n^2-m^2}{n^2} \cdot \frac{4n^2}{4n^2-m^2} \cdot \frac{9n^2-m^2}{9n^2} \cdot \frac{16n^2}{16n^2-m^2}\ \text{etc.}$$

Hae vero formulae, etsi vehementer conuergunt, tamen multo sunt aptiores ad logarithmos sinuum, tangentium et secantium inueniendos; quem vsum singularem antequam exponamus, methodum facilem aperiemus, ipsos sinus et tangentes expedite computandi; idque sine consuetis subsidiis ex multiplicatione arcuum, aliisque huc pertinentibus theorematis.

Problema 3.

§. 20. **Inuenire canonem generalem, ad sinus et cosinus angulorum quorumcunque inueniendos idoneum.**

Solutio.

Formulae, quas hic pro sinibus et cosinibus exhibuimus, si euoluantur, recidunt ad formulas iam pridem notas; scilicet posito arcu circuli $= s$, fit

sin. A

$$\text{fin. A} : s = s - \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{s^7}{1 \cdot 2 \cdots 7} + \text{etc.}$$

$$\text{cof. A} . s = 1 - \frac{s^2}{1 \cdot 2} + \frac{s^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{s^6}{1 \cdot 2 \cdots 6} + \text{etc.}$$

pofito finu toto $= 1$. Quodfi ergo ponatur q pro arcu 90. graduum, fumaturque arcus propofitus $s = \frac{m}{n} q$, fiet

$$\text{fin. A} . \frac{m}{n} q = \frac{m}{n} . q - \frac{m^3}{n^3} . \frac{q^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{m^5}{n^5} . \frac{q^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{etc.}$$

$$\text{cof. A} . \frac{m}{n} q = 1 - \frac{m^2}{n^2} . \frac{q^2}{1 \cdot 2} + \frac{m^4}{n^4} . \frac{q^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{etc.}$$

Cum igitur fit $q = \frac{\pi}{2}$ erit

$q = 1,5707963267948966192313132 16916$

Hoc vero valore loco poteftatum ipfius q computato ac fubftituto, obtinebuntur formulae numericae, quibus tam finus quam cofinus arcus $\frac{m}{n} q$ exprimentur. Quoniam vero tantum pro arcubus $45°$ minoribus finus et cofinus defiderantur erit $\frac{m}{n} < \frac{1}{2}$, et hanc ob rem feries datae maxime conuergent. Supputaui ego autem fingulos harum ferierum terminos a folo q pendentes in fractionibus decimalibus ad 28. figuras, quas, vt alios calculo tam taediofo liberem, hic appono.

Erit igitur finus arcus $\frac{m}{n}$ 90 graduum $=$

$+ \frac{m}{n} . 1,5707963267948966192313216916$
$- \frac{m^3}{n^3} . 0,6459640975062462536557565636$
$+ \frac{m^5}{n^5} . 0,0796926262461670451205055487$
$- \frac{m^7}{n^7} . 0,0046817541353186881006854633$
$+ \frac{m^9}{n^9} . 0,0001604411847873598218726605$
$- \frac{m^{11}}{n^{11}} . 0,0000035988432352120853404580$
$+ \frac{m^{13}}{n^{13}} . 0,0000000569217292196792681170$
$- \frac{m^{15}}{n^{15}} . 0,0000000006688035109811467225$

+

$+\frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0{,}0000000000060669357311061950$

$-\frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0{,}0000000000000437706546731370$

$+\frac{m^{21}}{n^{21}} \cdot 0{,}0000000000000002571422892855$

$-\frac{m^{23}}{n^{23}} \cdot 0{,}0000000000000000012538995403$

$+\frac{m^{25}}{n^{25}} \cdot 0{,}0000000000000000000051564550$

$-\frac{m^{27}}{n^{27}} \cdot 0{,}0000000000000000000000181239$

$+\frac{m^{29}}{n^{29}} \cdot 0{,}0000000000000000000000000549$

$-\frac{m^{31}}{n^{31}} \cdot 0{,}0000000000000000000000000001$

Atque simili modo erit cosinus arcus $\frac{m}{n}$ 90 grad. $=$

$+\quad 1{,}0000000000000000000000000000$

$-\frac{m^{2}}{n^{2}} \cdot 1{,}2337005501361698273543113745$

$+\frac{m^{4}}{n^{4}} \cdot 0{,}2536695079010480136365633659$

$-\frac{m^{6}}{n^{6}} \cdot 0{,}0208634807633529608730516364$

$+\frac{m^{8}}{n^{8}} \cdot 0{,}0009192602748394265802417158$

$-\frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0{,}0000252020423730606054810526$

$+\frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0{,}0000004710874778818171503665$

$-\frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0{,}0000000063866030837918522408$

$+\frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0{,}0000000000656596311497947230$

$-\frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0{,}0000000000005294400200734620$

$+\frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0{,}0000000000000034377391790981$

$-\frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0{,}0000000000000000183599165212$

$+\frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0{,}0000000000000000000820675327$

$-\frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0{,}0000000000000000000003115285$

$+\frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0{,}0000000000000000000000010165$

$-\frac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0{,}0000000000000000000000000026$

Quo-

Quocunque igitur angulo propofito, eius ratio ad 90° eft primum quaerenda, quae fit vt m ad n, qua inuenta, fi in his formulis fiat fubftitutio debito modo, reperietur tam finus quam cofinus anguli propofiti.

Q. E. I.

§. 21. Quodfi igitur ponatur $\frac{m}{n} = 1$, prior formula dare debebit finum totum $= 1$, quod vt appareat calculum fubiiciamus.

+	1,5707963267948966192313216916
−	0,6459640975062462536557565636
+	0,9248322292886503655755651280
+	0,0796926262461670451205055487
+	1,0045248555348174106960706767
−	46817541353186881006854633
+	0,9998431013994987225953852134
+	1604411847873598218726605
+	1,0000035425842860824172578739
−	35988432352120853404580
+	0,9999999437410508703319174159
+	569217292196792681170
+	1,00000000006627800900111855329
−	6688035109811467225
+	0,99999999999939765790300388104
+	60669357311061950
+	1,00000000000000435147611450054
−	437706546731370

+

+	0, 99999999999999997441064718684
+	2571422892855
+	1, 00000000000000000012487611539
−	12538995403
+	0, 99999999999999999999948616136
+	51564550
+	1, 00000000000000000000000180686
−	181239
+	0, 99999999999999999999999999447
	549
+	0, 99999999999999999999999999996

vnde intelligitur errorem tantum 5 vnitatum in vltimis figuris esse commissum, qui ob totuplices additiones et subtractiones euitari omnino non potuit.

§. 22. Exemplum hoc adieci, vt appareat in computo harum formularum errorem a me non esse commissum, easque ideo tuto adhiberi posse. Quod idem vt clarius perspiciatur, calculum etiam cosinus anguli 90° hic apponam, qui debet esse $=$ o.

+	1, 0000000000000000000000000000
−	1, 2337005501361698273543113745
−	0, 2337005501361698273543113745
+	2536695079010480136365633659
+	199689577648781862822519914
−	208634807633529608730516364

−	8945229984747745907996450
+	9192602748394265802417158
+	2473727636465198944420708
−	2520204237306060548105 26
−	46476600840861003898 18
+	47108747778818171503665
+	632146947320111113847
−	638660308379185 22408
−	6513361059074085 61
+	6565963114979472 30
+	526020559053866 9
−	529440020073462 0
−	34194610195951
+	34377391790981
+	182781595030
−	183599165212
−	817570182
+	820675327
+	3105145
−	3115285
−	10140
+	10165
+	25
−	26
−	1

Qui consensus cum veritate tantus est, vt de veritate datarum formularum dubitare amplius non liceat.

§. 23. Quaeramus speciminis loco sinum et cosinum anguli g graduum, qui casus est facilis ob valorem $\frac{m}{n} = \frac{1}{10}$. Ac primo quidem pro sinu erunt termini affirmatiui

	0, 1570796326794896619231321691
	7969262624616704502050
	160441184787359 8
	56921729
$+$	0, 1570804296059125047840629069

Termini vero negatiui sunt.

	0, 0006459640975062462536557565
	4681754135318688100
	35988432352 1
	6688
$-$	0, 0006459645656816957739575874
$+$	0, 1570804296059125047840629069
	0, 1564344650402308690101053195 $=$ sin. 9°

Pro cosinu autem sunt termini affirmatiui

	1, 0000000000000000000000000000
	253669507901048013636563
	919260274839426 58
	4710874778
	65
$+$	1, 0000253609599827080208454065

Termini vero negatiui

0,

$$\begin{array}{rl}
 & 0,0123370055013616982735431137 \\
 & 2086348076335296087 30 \\
 & 2520204237306 0 \\
 & 63866 0 \\
\hline
- & 0,0123370263648449818308051587 \\
+ & 1,0000253669599827080208454065 \\
\hline
 & 0,9876883405951377261900402478 = \text{cos. } 9^{\circ}
\end{array}$$

Hoc autem exemplum, etsi in suo genere est facillinum, tamen abunde declarat vtilitatem formularum datarum, atque compendium, quod illae calculo alias operosissimo afferunt.

§. 24. Labor autem istius computi multo fiet minor, si sinus et cosinus non ad tot figuras in fractionibus decimalibus desiderentur. Ponamus igitur sinum totum seu radium esse

10000000000

atque pro hoc radio erit

$$\begin{array}{rll}
\text{sin. A. } \frac{m}{n} 90^{\circ} = & + \frac{m}{n} \,. & 15707963267,94 \\
 & - \frac{m^3}{n^3} & 6459640975,06 \\
 & + \frac{m^5}{n^5} \,.. & 796926162,46 \\
 & - \frac{m^7}{n^7} \,... & 46817541,35 \\
 & + \frac{m^9}{n^9} \,.... & 1604411,84 \\
 & - \frac{m^{11}}{n^{11}} \,..... & 35988,43 \\
 & + \frac{m^{13}}{n^{13}} \,....... & 569,21 \\
 & - \frac{m^{15}}{n^{15}} \,......... & 6,68 \\
 & + \frac{m^{17}}{n^{17}} \,......... & ,06
\end{array}$$

Atque pari modo erit

$$\begin{aligned}\text{cof. A}.\tfrac{m}{n}\,90^\circ = &+ \;\; 10000000000{,}00\\ &-\tfrac{m^2}{n^2}\; 12337005501{,}36\\ &+\tfrac{m^4}{n^4}\; .2536695079{,}01\\ &-\tfrac{m^6}{n^6}\; ..208634807{,}63\\ &+\tfrac{m^8}{n^8}\; ...9192602{,}74\\ &-\tfrac{m^{10}}{n^{10}}\; ...252020{,}42\\ &+\tfrac{m^{12}}{n^{12}}\; .....4710{,}87\\ &-\tfrac{m^{14}}{n^{14}}\; ....63{,}86\\ &+\tfrac{m^{16}}{n^{16}}\; ....{,}65\end{aligned}$$

vbi partes centefimas adiecimus, vt de vltimis figuris penitus certi effe queamus.

Problema 4.

§. 25. Inuenire canonem generalem pro inueniendis tangentibus et cotangentibus omnium angulorum.

Solutio.

Quod primum ad tangentes attinet, ponatur angulus rectus feu $90^\circ = q$, propofitusque fit angulus $\frac{m}{n}q$ graduum feu $\frac{m}{n}\,90^\circ$, erit pofito finu toto $= 1$, tang. A . $\frac{m}{n}\,90^\circ$
$= \frac{2m}{nq}\left(\frac{n^2}{n^2-m^2} + \frac{n^2}{9n^2-m^2} + \frac{n^2}{25n^2-m^2} + \text{etc.}\right)$

$$\begin{aligned}\text{tang. A}.\tfrac{m}{n}\,90^\circ = &\tfrac{2m}{nq}\left(1+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{5^2}+\tfrac{1}{7^2}+\text{etc.}\right)\\ &+\tfrac{2m^3}{n^3q}\left(1+\tfrac{1}{3^4}+\tfrac{1}{5^4}+\tfrac{1}{7^4}+\text{etc.}\right)\\ &+\tfrac{2m^5}{n^5q}\left(1+\tfrac{1}{3^6}+\tfrac{1}{5^6}+\tfrac{1}{7^6}+\text{etc.}\right)\\ &+\tfrac{2m^7}{n^7q}\left(1+\tfrac{1}{3^8}+\tfrac{1}{5^8}+\tfrac{1}{7^8}+\text{etc.}\right)\\ &\qquad\text{etc.}\end{aligned}$$

Quodfi

Quodſi autem termini primi harum ſerierum ſeorſim capiantur, vt reliqui eo magis conuergant erit

$$\begin{aligned}\text{tang. A}.\ \tfrac{m}{n}\,90^\circ = &+ \frac{2mn}{(nn-mm)q}\\ &+ \frac{2m}{nq}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{etc.}\right.\\ &+ \frac{2m^3}{3n^3}\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\text{etc.}\right.\\ &+ \frac{2m^5}{n^5q}\left(\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\text{etc.}\right.\\ &+ \frac{2m^7}{n^7q}\left(\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\text{etc.}\right.\\ &\qquad\text{etc.}\end{aligned}$$

Eſt vero $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2}q = 0,318309886183 79$ hincque $\frac{2}{q} = 1,2732395447351 6$. Quare ſi ſummae iſtarum ſerierum quae proxime habentur, per hunc valorem multiplicentur prodibit

$$\begin{aligned}\text{tang. A}.\ \tfrac{m}{n}\,90^\circ = &+ \frac{m}{n-m}\cdot 0,6366197723675\\ &+ \frac{m}{n+m}\cdot 0,6366197723675\\ &+ \frac{m}{n}\cdot 0,2975567820597\\ &+ \frac{m^3}{n^3}\cdot 0,0186886502773\\ &+ \frac{m^5}{n^5}\cdot 0,0018424752034\\ &+ \frac{m^7}{n^7}\cdot 0,0001975800714\\ &+ \frac{m^9}{n^9}\cdot 0,0000216977245\\ &+ \frac{m^{11}}{n^{11}}\cdot 0,0000024011370\\ &+ \frac{m^{13}}{n^{13}}\cdot 0,0000002664132\\ &+ \frac{m^{15}}{n^{15}}\cdot 0,0000000295864\\ &+ \frac{m^{17}}{n^{17}}\cdot 0,0000000032867\\ &+ \frac{m^{19}}{n^{19}}\cdot 0,0000000003651\\ &+ \frac{m^{21}}{n^{21}}\cdot 0,0000000000405\\ &+ \frac{m^{23}}{n^{23}}\cdot 0,0000000000045\\ &+ \frac{m^{25}}{n^{25}}\cdot 0,0000000000000\end{aligned}$$

 cuius

posse valorem ipsius π. Ita si ponamus $\pi = 2\,q$ ita vt sit q arcus 90 graduum erit

$$\text{sin. A} \,.\, \frac{m}{n} q = \frac{m}{n} q \,.\, \frac{4n^2-m^2}{4n^2} \,.\, \frac{16n^2-m^2}{16n^2} \,.\, \frac{36n^2-m^2}{36n^2} \,.\, \frac{64n^2-m^2}{64n^2} \text{ etc.}$$

hincque

$$\text{cosec. A} \,.\, \frac{m}{n} q = \frac{n}{mq} \,.\, \frac{4n^2}{4n^2-m^2} \,.\, \frac{16n^2}{16n^2-m^2} \,.\, \frac{36n^2}{36n^2-m^2} \,.\, \frac{64n^2}{64n^2-m^2} \text{ etc.}$$

Porro ex §. 12. posito $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$ habebitur

$$\text{cos. A} \,.\, \frac{m}{n} q = \frac{n^2-m^2}{n^2} \,.\, \frac{9n^2-m^2}{9n^2} \,.\, \frac{25n^2-m^2}{25n^2} \,.\, \frac{49n^2-m^2}{49n^2} \text{ etc.}$$

hincque

$$\text{sec. A} \,.\, \frac{m}{n} q = \frac{n^2}{n^2-m^2} \,.\, \frac{9n^2}{9n^2-m^2} \,.\, \frac{25n^2}{25n^2-m^2} \,.\, \frac{49n^2}{49n^2-m^2} \text{ etc.}$$

Denique ex §. 14. deducitur pari modo

$$\text{tang. A} \,.\, \frac{m}{n} q = \frac{m}{n} q \,.\, \frac{n^2}{n^2-m^2} \,.\, \frac{4n^2-m^2}{4n^2} \,.\, \frac{9nn}{9n^2-m^2} \,.\, \frac{16n^2-m^2}{16n^2} \text{ etc.}$$

hincque

$$\text{cot. A} \,.\, \frac{m}{n} q = \frac{n}{mq} \,.\, \frac{n^2-m^2}{n^2} \,.\, \frac{4n^2}{4n^2-m^2} \,.\, \frac{9n^2-m^2}{9n^2} \,.\, \frac{16n^2}{16n^2-m^2} \text{ etc.}$$

Hae vero formulae, etsi vehementer conuergunt, tamen multo sunt aptiores ad logarithmos sinuum, tangentium et secantium inueniendos; quem vsum singularem antequam exponamus, methodum facilem aperiemus, ipsos sinus et tangentes expedite computandi; idque sine consuetis subsidiis ex multiplicatione arcuum, aliisque huc pertinentibus theorematis.

Problema 3.

§. 20. Inuenire canonem generalem, ad sinus et cosinus angulorum quorumcunque inueniendos idoneum.

Solutio.

Formulae, quas hic pro sinibus et cosinibus exhibuimus, si euoluantur, recidunt ad formulas iam pridem notas; scilicet posito arcu circuli $= s$, fit

sin. A

$\sin. A : s = s - \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \frac{s^7}{1.2.....7} + \text{etc.}$

$\cos. A . s = 1 - \frac{s^2}{1.2} + \frac{s^4}{1.2.3.4} - \frac{s^6}{1.2...6} + \text{etc.}$

posito sinu toto $= 1$. Quodsi ergo ponatur q pro arcu 90. graduum, sumaturque arcus propositus $s = \frac{m}{n} q$, fiet

$\sin. A . \frac{m}{n} q = \frac{m}{n} . q - \frac{m^3}{n^3} . \frac{q^3}{1.2.3} + \frac{m^5}{n^5} . \frac{q^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}$

$\cos. A . \frac{m}{n} q = 1 - \frac{m^2}{n^2} . \frac{q^2}{1.2} + \frac{m^4}{n^4} . \frac{q^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$

Cum igitur sit $q = \frac{\pi}{2}$ erit

$q = 1,5707963267948966192313132169 16$

Hoc vero valore loco potestatum ipsius q computato ac substituto, obtinebuntur formulae numericae, quibus tam sinus quam cosinus arcus $\frac{m}{n} q$ exprimentur. Quoniam vero tantum pro arcubus 45° minoribus sinus et cosinus desiderantur erit $\frac{m}{n} < \frac{1}{2}$, et hanc ob rem series datae maxime conuergent. Supputaui ego autem singulos harum serierum terminos a solo q pendentes in fractionibus decimalibus ad 28. figuras, quas, vt alios calculo tam taedioso liberem, hic appono.

Erit igitur sinus arcus $\frac{m}{n}$ 90 graduum $=$

$+ \frac{m}{n} . 1,5707963267948966192313216916$

$- \frac{m^3}{n^3} . 0,6459640975062462536557565636$

$+ \frac{m^5}{n^5} . 0,0796926262461670451205055487$

$- \frac{m^7}{n^7} . 0,0046817541353186881006854633$

$+ \frac{m^9}{n^9} . 0,0001604411847873598218726605$

$- \frac{m^{11}}{n^{11}} . 0,0000035988432352120853404580$

$+ \frac{m^{13}}{n^{13}} . 0,0000000569217292196792681170$

$- \frac{m^{15}}{n^{15}} . 0,0000000006688035109811467225$

$+\frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0,0000000000060669357311061950$
$-\frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0,0000000000000437706546731370$
$+\frac{m^{21}}{n^{21}} \cdot 0,0000000000000002571422892855$
$-\frac{m^{23}}{n^{23}} \cdot 0,0000000000000000012538995403$
$+\frac{m^{25}}{n^{25}} \cdot 0,0000000000000000000051564550$
$-\frac{m^{27}}{n^{27}} \cdot 0,0000000000000000000000181239$
$+\frac{m^{29}}{n^{29}} \cdot 0,0000000000000000000000000549$
$-\frac{m^{31}}{n^{31}} \cdot 0,0000000000000000000000000001$

Atque ſimili modo erit coſinus arcus $\frac{m}{n}$ 90 grad. $=$

$+ \quad 1,0000000000000000000000000000$
$-\frac{m^{2}}{n^{2}} \cdot 1,2337005501361698273543113745$
$+\frac{m^{4}}{n^{4}} \cdot 0,2536695079010480136365633659$
$-\frac{m^{6}}{n^{6}} \cdot 0,0208634807633529608730516364$
$+\frac{m^{8}}{n^{8}} \cdot 0,0009192602748394265802417158$
$-\frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,0000252020423730606054810526$
$+\frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,0000004710874778818171503665$
$-\frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,0000000063866030837918522408$
$+\frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,0000000000656596311497947230$
$-\frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,0000000000005294400200734620$
$+\frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,0000000000000034377391790981$
$-\frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,0000000000000000183599165212$
$+\frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,0000000000000000000820675327$
$-\frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0,0000000000000000000003115285$
$+\frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0,0000000000000000000000010165$
$-\frac{m^{30}}{n^{30}} , 0,0000000000000000000000000026$

Quo-

Quocunque igitur angulo propoſito, eius ratio ad 90° eſt primum quaerenda, quae ſit vt m ad n, qua inuenta, ſi in his formulis fiat ſubſtitutio debito modo, reperietur tam ſinus quam coſinus anguli propoſiti.

Q. E. I.

§. 21. Quodſi igitur ponatur $\frac{m}{n} = 1$, prior formula dare debebit ſinum totum $= 1$, quod vt appareat calculum ſubiiciamus.

$$
\begin{array}{lr}
+ & 1,5707963267948966192313216916 \\
- & 0,6459640975062462536557565636 \\
\hline
+ & 0,9248322292886503655755651280 \\
+ & 0,0796926262461670451205055487 \\
\hline
+ & 1,0045248555348174106960706767 \\
- & 4681754135318688100685463 3 \\
\hline
+ & 0,9998431013994987225953852134 \\
+ & 1604411847873598218726605 \\
\hline
+ & 1,0000035425842860824172578739 \\
- & 3598843235212085340458 0 \\
\hline
+ & 0,9999999437410508703319174159 \\
+ & 569217292196792681170 \\
\hline
+ & 1,0000000006627800900111855329 \\
- & 668803510981146 7225 \\
\hline
+ & 0,99999999999397657903003881 04 \\
+ & 6066935731106195 0 \\
\hline
+ & 1,00000000000000435147611450054 \\
- & 4377065467313 70 \\
\hline
\end{array}
$$

+

+ 0, 99999999999999997441064718684

+ 2571422892855

+ 1, 00000000000000000012487611539

− 12538995403

+ 0, 99999999999999999999948616136

+ 51564550

+ 1, 00000000000000000000000180686

− 181239

+ 0, 99999999999999999999999999447

549

+ 0, 99999999999999999999999999996

vnde intelligitur errorem tantum 5 vnitatum in vltimis figuris esse commissum, qui ob totuplices additiones et subtractiones euitari omnino non potuit.

§. 22. Exemplum hoc adieci, vt appareat in computo harum formularum errorem a me non esse commissum, easque ideo tuto adhiberi posse. Quod idem vt clarius perspiciatur, calculum etiam cosinus anguli 90° hic apponam, qui debet esse = 0.

+ 1, 0000000000000000000000000000

− 1, 2337005501361698273543113745

− 0, 2337005501361698273543113745

+ 2536695079010480136365633659

+ 199689577648781862822519914

− 208634807633529608730516364

− 8945229984747745907996450
+ 9192602748394265802417158

+ 2473727636465198944207 08
− 2520204237306060548105 26

− 4647660084086100389818
+ 4710874777881817150366 5

+ 6321469473201111138 47
− 6386603083791852240 8

− 65133610590740856 1
+ 65659631149794723 0

+ 5260205590538669
− 5294400200734620

− 3419461019595 1
+ 3437739179098 1

+ 182781595030
− 183599165212

− 817570182
+ 820675327

+ 3105145
− 3115285

− 10140
+ 10165

+ 25
− 26

− 1

Qui consensus cum veritate tantus est, vt de veritate datarum formularum dubitare amplius non liceat.

§. 23. Quaeramus speciminis loco sinum et cosinum anguli g graduum, qui casus est facilis ob valorem $\frac{m}{n} = \frac{1}{10}$. Ac primo quidem pro sinu erunt termini affirmatiui

0, 15707963267948966192313216 91
7969262624616704502050
1604411847873598
56921729

$+$ 0, 15708042960591256478406290 69

Termini vero negatiui sunt.

0, 00064596409750624625365575 65
468175413531868 8100
3598843235 21
6688

$-$ 0, 00064596456568169577395758 74
$+$ 0, 15708042960591256478406290 69

0, 15643446504023086901010531 95 $=$ sin. 9°

Pro cosinu autem sunt termini affirmatiui

1, 00000000000000000000000000 00
253669507901048013636563
919260274839426 58
4710874778
65

$+$ 1, 00002536095998270802084540 65

Termini vero negatiui

0,

$$
\begin{array}{rr}
 & 0,01233700550136169827354311137 \\
 & 2086348076335296087 30 \\
 & 25202042373060 \\
 & 638660 \\
\hline
- & 0,01233702636484498183080515 87 \\
+ & 1,00002536695998270802084540 65 \\
\hline
 & 0,98768834059513772619004024 78 = \text{cos}. 9^{\circ}
\end{array}
$$

Hoc autem exemplum, etsi in suo genere est facillinum, ramen abunde declarat vtilitatem formularum datarum, atque compendium, quod illae calculo alias operosissimo afferunt.

§. 24. Labor autem istius computi multo fiet minor, si sinus et cosinus non ad tot figuras in fractionibus decimalibus desiderentur. Ponamus igitur sinum totum seu radium esse

10000000000

atque pro hoc radio erit

$$
\begin{aligned}
\text{sin. A.} \tfrac{m}{n} 90^{\circ} = & + \tfrac{m}{n} \,.\, 15707963267,94 \\
& - \tfrac{m^3}{n^3} \;\; 6459640975,06 \\
& + \tfrac{m^5}{n^5} \,..\, 796926162,46 \\
& - \tfrac{m^7}{n^7} \,...\, 46817541,35 \\
& + \tfrac{m^9}{n^9} \,....\, 1604411,84 \\
& - \tfrac{m^{11}}{n^{11}} \,.....\, 35988,43 \\
& + \tfrac{m^{13}}{n^{13}} \,.......\, 569,21 \\
& - \tfrac{m^{15}}{n^{15}} \,.........\, 6,68 \\
& + \tfrac{m^{17}}{n^{17}} \,..........\, ,06
\end{aligned}
$$

Atque pari modo erit

$$\begin{aligned}
\text{cos. A.}\,\tfrac{m}{n}\,90^\circ = &+ \quad 10000000000,00 \\
&- \tfrac{m^2}{n^2}\; 12337005501,36 \\
&+ \tfrac{m^4}{n^4}\; .2536695079,01 \\
&- \tfrac{m^6}{n^6}\; ..208634807,63 \\
&+ \tfrac{m^8}{n^8}\; ...9192602,74 \\
&- \tfrac{m^{10}}{n^{10}}\; ...252020,42 \\
&+ \tfrac{m^{12}}{n^{12}}\; .....4710,87 \\
&- \tfrac{m^{14}}{n^{14}}\; ....63,86 \\
&+ \tfrac{m^{16}}{n^{16}}\; ....,65
\end{aligned}$$

vbi partes centesimas adiecimus, vt de vltimis figuris penitus certi esse queamus.

Problema 4.

§. 25. Inuenire canonem generalem pro inueniendis tangentibus et cotangentibus omnium angulorum.

Solutio.

Quod primum ad tangentes attinet, ponatur angulus rectus seu $90^\circ = q$, propositusque sit angulus $\frac{m}{n} q$ graduum seu $\frac{m}{n}\, 90^\circ$, erit posito sinu toto $= 1$, tang. A . $\frac{m}{n}\, 90^\circ$
$= \frac{2m}{nq} \left(\frac{n^2}{n^2 - m^2} + \frac{n^2}{9n^2 - m^2} + \frac{n^2}{25n^2 - m^2} + \text{etc.} \right)$

$$\begin{aligned}
\text{tang. A}\,.\,\tfrac{m}{n}\,90^\circ = &\tfrac{2m}{nq} \left(1 + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{7^2} + \text{etc.}\right) \\
&+ \tfrac{2m^3}{n^3 q} \left(1 + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{5^4} + \tfrac{1}{7^4} + \text{etc.}\right) \\
&+ \tfrac{2m^5}{n^5 q} \left(1 + \tfrac{1}{3^6} + \tfrac{1}{5^6} + \tfrac{1}{7^6} + \text{etc.}\right) \\
&+ \tfrac{2m^7}{n^7 q} \left(1 + \tfrac{1}{3^8} + \tfrac{1}{5^8} + \tfrac{1}{7^8} + \text{etc.}\right) \\
&\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Quodsi

Quodsi autem termini primi harum serierum seorsim capiantur, vt reliqui eo magis conuergant erit

$$\begin{aligned}\text{tang. A}.\tfrac{m}{n}90^\circ = &+\frac{2mn}{(nn-mm)q}\\ &+\frac{2m}{nq}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{etc.}\right.\\ &+\frac{2m^3}{3n^3}\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\text{etc.}\right.\\ &+\frac{2m^5}{n^5q}\left(\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\text{etc.}\right.\\ &+\frac{2m^7}{n^7q}\left(\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\text{etc.}\right.\\ &\qquad\text{etc.}\end{aligned}$$

Est vero $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2}q = 0,318309886183 79$ hincque $\frac{2}{q} = 1,273239544735 16$. Quare si summae istarum serierum quae proxime habentur, per hunc valorem multiplicentur prodibit

$$\begin{aligned}\text{tang. A}.\tfrac{m}{n}90^\circ = &+\frac{m}{n-m}\,.\,0,6366197723675\\ &+\frac{m}{n+m}\,.\,0,6366197723675\\ &+\frac{m}{n}\,.\,0,2975567820597\\ &+\frac{m^3}{n^3}\,.\,0,0186886502773\\ &+\frac{m^5}{n^5}\,.\,0,0018424752034\\ &+\frac{m^7}{n^7}\,.\,0,0001975800714\\ &+\frac{m^9}{n^9}\,.\,0,0000216977245\\ &+\frac{m^{11}}{n^{11}}\,.\,0,0000024011370\\ &+\frac{m^{13}}{n^{13}}\,.\,0,0000002664132\\ &+\frac{m^{15}}{n^{15}}\,.\,0,0000000295864\\ &+\frac{m^{17}}{n^{17}}\,.\,0,0000000032867\\ &+\frac{m^{19}}{n^{19}}\,.\,0,0000000003651\\ &+\frac{m^{21}}{n^{21}}\,.\,0,0000000000405\\ &+\frac{m^{23}}{n^{23}}\,.\,0,0000000000045\\ &+\frac{m^{25}}{n^{25}}\,.\,0,0000000000000\end{aligned}$$

 cuius

cuius formulae ope tangentes in fractionibus decimalibus ad 12. figuras facile computari poterunt posito sinu toto $= 1$.

Quod secundo ad cotangentes attinet, erit iisdem positis

$$\text{cotang. A} . \tfrac{m}{n}\, 90^\circ = \frac{n}{mq} - \frac{m}{2nq}\left(\frac{4n^2}{4n^2-m^2} + \frac{4n^2}{16n^2-m^2} + \frac{4n^2}{36n^2-m^2} + \frac{4n^2}{64n^2-m^2} + \text{etc.}\right)$$

seu

$$\begin{aligned}\text{cot. A} . \tfrac{m}{n}\, 90^\circ = \frac{n}{mq} &- \frac{m}{2nq}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}\right)\\ &- \frac{m^3}{8n^3q}\left(1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \text{etc.}\right)\\ &- \frac{m^5}{32n^5q}\left(1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \text{etc.}\right)\\ &- \frac{m^7}{128n^7q}\left(1 + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \text{etc.}\right)\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Additis autem terminis primis erit

$$\begin{aligned}\text{cot. A} . \tfrac{m}{n}\, 90^\circ = \frac{n}{mq} - \frac{m}{2n-m} \cdot \frac{1}{2q} &- \frac{m}{2n+m} \cdot \frac{1}{2q}\\ &- \frac{2m}{nq} \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.}\right)\\ &- \frac{2m^3}{n^3q} \cdot \frac{1}{4^2}\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \text{etc.}\right)\\ &- \frac{2m^5}{n^5q} \cdot \frac{1}{4^3}\left(\frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \text{etc.}\right)\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

At tam serierum loco summis substituendis, quam loco q valore debito, obtinebitur

$$\begin{aligned}\text{cot. A} . \tfrac{m}{n}\, q = &+ \frac{n}{m} . 0,6366197723675\\ &- \frac{m}{2n-m} . 0,3183098861837\\ &- \frac{m}{2n+m} . 0,3183098861837\\ &- \frac{m}{n} . 0,2052888894145\\ &- \frac{m^3}{n^3} . 0,0065510747882\\ &- \frac{m^5}{n^5} . 0,0003450292554\\ &- \frac{m^7}{n^7} . 0,0000202791060\\ &- \frac{m^9}{n^9} . 0,0000012366527\end{aligned}$$

$$-\frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0{,}0000000764959$$
$$-\frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0{,}0000000047597$$
$$-\frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0{,}0000000002969$$
$$-\frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0{,}0000000000186$$
$$-\frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0{,}0000000000011$$

Huiusque formulae ope cotangentes angulorum omnium 90. gradibus minorum expedite reperiri poterunt.

Q. E. I.

§. 26. Quanquam ex datis anguli sinu et cosinu eiusdem tangens et cotangens inueniri possint, tamen diuisio, quae adhiberi debet, plerumque nimis molesta esse solet. Quamobrem formulas hic datas multo aptiores esse merito arbitramur ad tangentes et cotangentes quorumuis angulorum inueniendas. Vt autem veritas harum regularum perspiciatur, eiusmodi exempla tangentium et cotangentium euoluamus, quae per se sint cognita. Quaeratur itaque tangens anguli semirecti, seu 45°, quam constat esse aequalem sinui toti seu 1. Erit igitur $m = 1$ et $n = 2$: vnde termini prodibunt sequentes addendi:

0,6366197723675
0,2122065907891
 148778391 0298
 23360812847
 575773501
 15435943
 423784
 11724
 325
 9

1,0000000000000

vti

vbi in additione vltimae columnae tres vnitates ſunt adiectae, quippe quae proditurae fuiſſe cenſendae ſunt ex ſequentibus columnis, ſi affuiſſent. Ceterum ex formula manifeſtum eſt tangentem anguli recti fore infinitam ob $n-m=0$. Pro cotangente ſumamus exemplum anguli recti, cuius cotangens eſt $=0$. Cum igitur expreſſio noſtra cotangentis omnes terminos praeter primum habeat negatiuos addamus terminos negatiuos ſeorſim, qui ob $m=n=1$ ita ſe habebunt.

$$\begin{array}{r}
0,3183098861837 \\
0,1061032953946 \\
0,2052888894145 \\
65510747882 \\
3450292554 \\
202791060 \\
12366527 \\
764959 \\
47597 \\
2969 \\
186 \\
11 \\
\hline
0,6306197723675
\end{array}$$

Terminus autem affirmatiuus, a quo haec ſumma auferri debet eſt

$$0,6366197723675$$

ita vt cotangens anguli recti actu reperiatur $=0$.

§. 27. Etſi autem haec, quae de inuentione ſinuum et tangentium attulimus ex ſeriebus meis nuper expoſitis conſequuntur, tamen eaedem hae formulae ex aliis iam dudum cognitis ſeriebus deduci potuiſſent. His igitur re-

lictis

lictis grogredior ad ea, quae huic methodo fummandi feries funt propria, atque modum docebo facilem inueniendi logarithmos finuum, et tangentium quorumcunque angulorum; qui eo magis eft notatu dignus, quod logarithmos fiue finuum fiue tangentium praebeat, fine praeuia ipforum finuum ac tangentium cognitione. Cum autem logarithmi fint duplices, vel naturales feu hyperbolici, vel decadici, in quibus logarithmus 10 ponitur $= 1$, vtriusque generis logarithmos hic inuenire docebo.

Problema. 5.

§. 28. Definire logarithmum tam naturalem quam confuetum fiue finus fiue cofinus anguli cuiuscunque propofiti.

Solutio.

Ex paragr. 19. capiatur pro logarithmo finus inueniendo expreffio haec

$$\text{fin. A.}\, \tfrac{m}{n} q = \tfrac{m}{n} q \cdot \frac{4n^2 - m^2}{4n^2} \cdot \frac{16n^2 - m^2}{16n^2} \cdot \frac{36n^2 - m^2}{36n^2} \cdot \text{etc.}$$

quae in logarithmos conuerfa ftatim dat

$$l\,\text{fin. A.}\, \tfrac{m}{n} q = l\, \tfrac{m}{n} + (1 - \frac{m^2}{4n^2}) + l(1 - \frac{m^2}{16n^2}) + \text{etc.}$$

Quaeratur primo logarithmus naturalis finus anguli $\frac{m}{n} q$ feu $\frac{m}{n} 90^\circ$, eritque logarithmis per feries expreffis

$$\begin{aligned} l\,\text{fin. A.}\, \tfrac{m}{n} q = {} & l q + l \tfrac{m}{n} \\ & - \frac{m^2}{4n^2} (1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \text{etc.}) \\ & - \frac{m^4}{2 \cdot 4^2 n^4} (1 + \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{9^2} + \tfrac{1}{16^2} + \text{etc.}) \\ & - \frac{m^6}{3 \cdot 4^3 n^6} (1 + \tfrac{1}{4^3} + \tfrac{1}{9^3} + \tfrac{1}{16^3} + \text{etc.}) \\ & - \frac{m^8}{4 \cdot 4^4 n^8} (1 + \tfrac{1}{4^4} + \tfrac{1}{9^4} + \tfrac{1}{16^4} + \text{etc.}) \\ & \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

siue l sin. A $\frac{m}{n} q = lq - l\frac{n}{m} - l\frac{4n^2}{4n^2-m^2}$

$$- \frac{m^2}{1 \cdot 4 n^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.} \right)$$
$$- \frac{m^4}{2 \cdot 4^2 n^4} \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \text{etc.} \right)$$
$$- \frac{m^6}{3 \cdot 4^3 n^6} \left(\frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \text{etc.} \right)$$
$$- \frac{m^8}{4 \cdot 4^4 n^8} \left(\frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \frac{1}{25^4} + \text{etc.} \right)$$

etc.

Quodsi nunc loco harum serierum summae proximae substituantur, eaeque per coefficientes numericas multiplicentur prodibit l sin. A $\frac{m}{n} 90° =$

$$lq - 2l2 - 3ln + lm + l(2n-m) + l(2n+m)$$
$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,16123351671205660911810379$$
$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,00257260105347306848487511$$
$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,00009032844783567260267978$$
$$+ \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,00000398179316205501892449$$
$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,00000019425295465196979631$$
$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,00000001001328748812045486$$
$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,00000000053404135618987888$$
$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,00000000002914859658937808$$
$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,00000000000161797979778706$$
$$- \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,00000000000009097690905311$$
$$- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,0000000000000051682754587$$
$$- \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,0000000000000002960770778$$
$$- \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0,0000000000000000170813$$
$$- \frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0,00000000000000000009913$$
$$- \frac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0,0000000000000000000578$$
$$- \frac{m^{32}}{n^{32}} \cdot 0,00000000000000000000034$$

qui

qui termini postremi etsi non eousque sint continuati ac priores, tamen potestate vlterius porriguntur nisi sit $\frac{m}{n} = 1$. Dat autem haec forma logarithmum hyperbolicum sinus anguli $\frac{m}{n} 90^\circ$, posito sinu toto $= 1$ eiusque logarithmo $= 0$. Debent autem pro hoc negotio etiam numerorum $2, n, m$, $2n - m$ et $2n + m$ logarithmi hyperbolici accipi, itemque ipsius q, quem supra indicauimus. Hac vero ipsa methodo poterit lq accuratius exhiberi. Quodsi enim ponatur $m = 1$ et $n = 2$ erit l sin. A. $45' = l \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} l2$; serierum vero summae additae conficient vt sequitur.

0, 04030837917801415227952595
1607875658420667803046 9
14111381997432384416 87
155538795392774176 7
1897001510273142 5
24446502656544 1
325952976190 1
4447722868 3
61721031 1
867623 4
12322 1
176 5
2 5

0, 04047059387191103834465527

qui valor ponatur tantisper $= a$ eritque $lq = a + 5l2 - \frac{1}{2}l2 - l3 - l5$ est vero

$$\tfrac{9}{2}l2 = 3,1191623125197538923775 4454$$
$$l3 = 1,09861228866810969139524526$$
$$l5 = 1,60943791243410037460075935$$
$$\tfrac{9}{2}l2 - l15 = 0,41111211141754382638153993$$
$$a = 0,04047059387191103834465527$$
$$lq = 0,45158270528945486472619520$$
$$l2 = 0,69314718055994530941723212$$
$$l2q = 1,14472988584940017414342732$$

qui eſt valor pro logarithmo hyperbolico ipſius π, quem ſupra minus accurate §. 18. definiuimus. Quare ſi iſte valor loco lq ſubſtituatur, facili negotio logarithmi hyperbolici ſinuum quorumuis angulorum reperiri poterunt, vbi hoc tantum eſt monendum, numerorum 2, m, n, $2n - m$ et $2n + m$ logarithmos quoque hyperbolicos ſumi debere; qui vel facile computantur vel paſſim computati reperiuntur. Ex logarithmis autem hyperbolicis inueniuntur logarithmi communes, ſi illi multipliceutur per

$$0,4342944819325182$$

Fiat igitur haec multiplicatio, et tum addatur 10, eo quod in tabulis ordinariis logarithmus ſinus totius poni ſolet $= 10$, quo facto erit

$$\log.\ \text{ſin. A.}\ \tfrac{m}{n}\,90^\circ = l(2n+m) + l(1n-m) + lm - 3ln$$
$$+\ 9,5940598857021 8017$$
$$-\ \tfrac{m^2}{n^2}\,.\ 0,0700228266059019 1$$
$$-\ \tfrac{m^4}{n^4}\,.\ 0,0011172664416618 4$$
$$-\ \tfrac{m^6}{n^6}\,.\ 0,0000392291464539 1$$
$$-\ \tfrac{m^8}{n^8}\,.\ 0,0000017292707983 6$$
$$-\ \tfrac{m^{10}}{n^{10}}\,.\ 0,0000000843629862 9$$
$$-\ \tfrac{m^{12}}{n^{12}}\,.\ 0,0000000043487155 0$$

$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}.\ 0,0000000000023193121$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}.\ 0,0000000000001265907$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}.\ 0,0000000000000070268$$
$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}.\ 0,0000000000000003951$$
$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}.\ 0,0000000000000000224$$
$$-\frac{m^{24}}{n^{24}}.\ 0,0000000000000000013$$

Huius igitur expressionis ope logarithmi ſinuum ad duodecim atque etiam plures figuras computari poterunt: ſi quidem $\frac{m}{n}$ ſit $< \frac{1}{2}$ quibus caſibus termini duplo pauciores ſufficiunt.

Pergamus ergo ad logarithmos coſinuum definiendos, id quod commodiſſime fiet ex aequatione coſ. A. $\frac{m}{n}\, q =$
$$\frac{n^2-m^2}{n^2}\,.\,\frac{9n^2-m^2}{9n^2}\,.\,\frac{25n^2-m^2}{25n^2}\,.\ \text{etc.}$$
ex qua fit
$$l\,\text{coſ. A.}\,\frac{m}{n}\,90^\circ = l\,\frac{n^2-m^2}{n^2}$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\,.\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\text{etc.}\right)$$
$$-\frac{m^4}{2n^4}\,.\left(\frac{1}{9^2}+\frac{1}{25^2}+\frac{1}{49^2}+\text{etc.}\right)$$
$$-\frac{m^6}{3n^6}\,.\left(\frac{1}{9^3}+\frac{1}{25^3}+\frac{1}{49^3}+\text{etc.}\right)$$
$$-\frac{m^8}{4n^8}\,.\left(\frac{1}{9^4}+\frac{1}{25^4}+\frac{1}{49^4}+\text{etc.}\right)$$
etc.

ſeu ſummis proxime ſumendis erit
$$l\,\text{coſ. A.}\,\frac{m}{n}\,90^\circ = l(n-m)+l(n+m)-2\,ln$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\,.\,0,23370055013616982735$$
$$-\frac{m^4}{n^4}\,.\,0,00733901580209602727$$
$$-\frac{m^6}{n^6}\,.\,0,00048235888031404063$$
$$-\frac{m^8}{n^8}\,.\,0,00003879475632402982$$
$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}\,.\,0,00000340827260896510$$

$-\frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,00000031430809718659$

$-\frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,0000000298915 0274450$

$-\frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,00000000290464467239$

$-\frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,0000000002868263951 8$

$-\frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,000000000002868076974$

$-\frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,000000000000289697050$

$-\frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,0000000000000$[illegible]$506024$

$-\frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0,0$[illegible]$00000003026249$

$\frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0,0000000000000000312232$

$-\frac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0,0000000000000000032379$

$-\frac{m^{32}}{n^{32}} \cdot 0,0000000000000000003373$

$-\frac{m^{34}}{n^{34}} \cdot 0,0000000000000000000352$

$-\frac{m^{36}}{n^{36}} \cdot 0,0000000000000000000037$

$-\frac{m^{38}}{n^{38}} \cdot 0,0000000000000000000004$

Hoc modo igitur reperitur logarithmus hyperbolicus cosinus cuiusque anguli, existente logarithmo sinus totius $= 0$. At logarithmus ordinarius obtinebitur, si iste logarithmus multiplicetur per

$$0,43429448190325182$$

atque ad eum addatur 10. logarithmus scilicet sinus totius in tabulis receptus: erit igitur

$$\log.\ \mathrm{cos}.\ A \cdot \frac{m}{n}\, 90^\circ = 10,00000000000000$$

$$-2\,ln + l(n-m) + l(n+m)$$

$$-\frac{m^2}{n^2} \cdot 0,10149485934189 2$$

$$-\frac{m^4}{n^4} \cdot 0,00318729406545 1$$

$$-\frac{m^6}{n^6} \cdot 0,00020948580001 7$$

$$-\frac{m^8}{n^8} \cdot 0,00001684834859 7$$

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,0000014800193986$$
$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,0000000136502272$$
$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,0000000012981715$$
$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,0000000001261471$$
$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,0000000000124567$$
$$- \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,0000000000012456$$
$$- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,0000000000001258$$
$$- \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,0000000000000128$$
$$- \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0,0000000000000013$$
$$- \frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0,0000000000000001$$

Hinc igitur inuenientur logarithmi vulgares cosinuum quorumcunque angulorum, idque ad 14 figuras in fractionibus decimalibus.

Q E I.

§. 29. Ex datis logarithmis sinuum et cosinuum inveniuntur primo statim logarithmi secantium et cosecantium. Deinde cum tangentis logarithmus prodeat, si ab aggregato logarithmorum sinus totius et sinus anguli dati subtrahatur logarithmus cosinus, erit pro logarithmis hyperbolicis posito logarithmo sinus totius $= 0$;

$$l \text{ tang. } A \cdot \frac{m}{n} 90^0 = l \frac{n+m}{n+m} + l \frac{2n-m}{n-m} - l \frac{n}{m}$$
$$- 0,9347116558304 35$$
$$+ \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,0724670334241 03$$
$$+ \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,0047664147486 23$$
$$+ \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,0003920304324 78$$
$$+ \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,0000348129631 62$$

+

$$+\frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,000003214019654$$
$$+\frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,000000304294809$$
$$+\frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,000000029357461$$
$$+\frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,000000002875496$$
$$+\frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,000000000285208$$
$$+\frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,000000000028589$$
$$+\frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,000000000002891$$
$$+\frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,000000000000294$$
$$+\frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0,000000000000030$$
$$+\frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0,000000000000003$$

Huius expreſſionis autem negatiuum dabit cotangentis anguli $\frac{m}{n}\,90^\circ$ logarithmum hyperbolicum. Haecque expreſſio magnam afferet vtilitatem in Hydrographia, in quam ab Halleio logarithmi tangentium ſunt introducti.

§. 30 Simili modo logarithmi vulgares tangentium hinc inuenientur, erit, ſcilicet

$$\log.\ \text{tang. A.}\ \frac{m}{n}\,90^\circ = l\,\frac{2n+m}{n+m} + l\,\frac{2n-m}{n-m} - l\,\frac{n}{m}$$
$$+\ 9,594059885702190$$
$$+\frac{m^{2}}{n^{2}} \cdot 0,031472032735990$$
$$+\frac{m^{4}}{n^{4}} \cdot 0,002070027623789$$
$$+\frac{m^{6}}{n^{6}} \cdot 0,000170256653563$$
$$+\frac{m^{8}}{n^{8}} \cdot 0,000015119077799$$
$$+\frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,000001395831000$$
$$+\frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,000000132153556$$
$$+\frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,000000012749783$$
$$+\frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,000000001248812$$

+

$+ \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,000000000123864$
$+ \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,00000000000012416$
$+ \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,0000000000001256$
$+ \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,000000000000128$
$+ \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0,0000000000000013$
$+ \frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0,000000000000001$

Quodsi hinc quaeratur logarithmus tangentis anguli 45. graduum erit $n = 2$ et $m = 1$, fietque summa seriei

$$\begin{array}{r} 0,0078680081839977 \\ 1293767264868 \\ 2660260211 9 \\ 590588976 \\ 13631162 \\ 322640 \\ 7782 \\ 191 \\ 4 \\ \hline 0,0080001056257721 \end{array}$$

logarithmi vero numerorum naturalium sunt

$$\begin{array}{rr} l\,5 = & 0,6989700043360188 \\ -l\,2 = & 0,3010299956639811 \\ \hline & 0,3979400086720377 \\ \text{addatur} & 9,5940598857021902 \\ \hline \end{array}$$

$$
\begin{array}{rr}
 & 9,9919998943742279 \\
\text{itemque}, & 0,0080001056257721 \\
\hline
 & 10,0000000000000000
\end{array}
$$

qui eſt logarithmus tangentis anguli 45. grad.

§. 32. Quodſi quis igitur voluerit tabulas ſinuum et t ngentium eorumque logarithmorum computare ad duodecim figuras in fractionibus decimalibus, dum tabulae vſu receptae eas tantum ad ſeptem figuras exhibent; is ſequentibus regulis vti poterit. Propoſitus ſcilicet ſit angulus $\frac{m}{n}$ 90. graduum erit.

$$
\begin{aligned}
\text{ſin. } A \,.\, \tfrac{m}{n}\, 90^\circ = &+ \frac{m}{n} \,.\, 1,5707963267949 \\
&- \frac{m^3}{n^3} \,.\, 0,6459640975062 \\
&+ \frac{m^5}{n^5} \,.\, 0,0796926262461 \\
&- \frac{m^7}{n^7} \,.\, 0,0046817541353 \\
&+ \frac{m^9}{n^9} \,.\, 0,0001604411848 \\
&- \frac{m^{11}}{n^{11}} \,.\, 0,0000035988432 \\
&+ \frac{m^{13}}{n^{13}} \,.\, 0,0000000569217 \\
&- \frac{m^{15}}{n^{15}} \,.\, 0,0000000006688 \\
&+ \frac{m^{17}}{n^{17}} \,.\, 0,0000000000061
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{coſ. } A \,.\, \tfrac{m}{n}\, 90^\circ = &+ \quad 1,0000000000000 \\
&- \frac{m^2}{n^2} \,.\, 1,2337005501361 \\
&+ \frac{m^4}{n^4} \,.\, 0,2536695079010 \\
&- \frac{m^6}{n^6} \,.\, 0,0208634807633 \\
&+ \frac{m^8}{n^8} \,.\, 0,0009192602748 \\
&- \frac{m^{10}}{n^{10}} \,.\, 0,0000252020424
\end{aligned}
$$

+

$$+\frac{m^{12}}{n^{12}}.0,0000004710875$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}.0,0000000063866$$
$$+\frac{m^{16}}{n^{16}}.0,0000000000656$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}.0,0000000000005$$

$$\text{tang. A.}\frac{m}{n}90^\circ=\frac{m}{n-m}.0,6366197723675$$
$$+\frac{m}{n+m}.0,6366197723675$$
$$+\frac{m}{n}.0,2975567820597$$
$$+\frac{m^3}{n^3}.0,0186886502773$$
$$+\frac{m^5}{n^5}.0,0018424752034$$
$$+\frac{m^7}{n^7}.0,0001975800714$$
$$+\frac{m^9}{n^9}.0,0000216977245$$
$$+\frac{m^{11}}{n^{11}}.0,0000024011370$$
$$+\frac{m^{13}}{n^{13}}.0,0000002664132$$
$$+\frac{m^{15}}{n^{15}}.0,0000000295864$$
$$+\frac{m^{17}}{n^{17}}.0,0000000032867$$
$$+\frac{m^{19}}{n^{19}}.0,0000000003651$$
$$+\frac{m^{21}}{n^{21}}.0,0000000000405$$
$$+\frac{m^{23}}{n^{23}}.0,0000000000045$$
$$+\frac{m^{25}}{n^{25}}.0,0000000000005$$

$$\text{cot. A.}\frac{m}{n}90^\circ=\frac{n}{m}.0,6366197723675$$
$$-\frac{m}{2m-n}.0,3183098861837$$
$$-\frac{m}{2n+m}.0,3183098861837$$
$$-\frac{m}{n}.0,2052888894145$$
$$-\frac{m^3}{n^3}.0,0065510747882$$

$$
\begin{aligned}
&- \tfrac{m^5}{n^5} .\, 0,0003450292554 \\
&- \tfrac{m^7}{n^7} .\, 0,0000202791060 \\
&- \tfrac{m^9}{n^9} .\, 0,0000012366527 \\
&- \tfrac{m^{11}}{n^{11}} .\, 0,0000000764959 \\
&- \tfrac{m^{13}}{n^{13}} .\, 0,0000000047597 \\
&- \tfrac{m^{15}}{n^{15}} .\, 0,0000000002969 \\
&- \tfrac{m^{17}}{n^{17}} .\, 0,0000000000185 \\
&- \tfrac{m^{19}}{n^{19}} .\, 0,0000000000011
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log.\ \text{fin. A.} \tfrac{m}{n}\, 90^\circ = l(2n+m) + l(2n-m) + lm - 3\, ln& \\
+ 9,5940598857021& \\
- \tfrac{m^2}{n^2} .\, 0,0700228266059& \\
- \tfrac{m^4}{n^4} .\, 0,0011172664416& \\
- \tfrac{m^6}{n^6} .\, 0,0000392291464& \\
- \tfrac{m^8}{n^8} .\, 0,0000017292708& \\
- \tfrac{m^{10}}{n^{10}} .\, 0,0000000843629& \\
- \tfrac{m^{12}}{n^{12}} .\, 0,0000000043487& \\
- \tfrac{m^{14}}{n^{14}} .\, 0,0000000002319& \\
- \tfrac{m^{16}}{n^{16}} .\, 0,0000000000126& \\
- \tfrac{m^{18}}{n^{18}} .\, 0,0000000000007&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log.\ \text{cof. A.} \tfrac{m}{n}\, 90^\circ = 10,00000000050000& \\
+ l(n+m) + l(n-m) - 2\, ln&
\end{aligned}
$$

$$-\frac{m^2}{n^2}\,.\,0,1014948593419$$
$$-\frac{m^4}{n^4}\,.\,0,0031872940654$$
$$-\frac{m^6}{n^6}\,.\,0,0002094858000$$
$$-\frac{m^8}{n^8}\,.\,0,0000168483486$$
$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}\,.\,0,0000014801940$$
$$-\frac{m^{12}}{n^{12}}\,.\,0,0000001365023$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}\,.\,0,0000000129817$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}\,.\,0,0000000012614$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\,.\,0,0000000001245$$
$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}\,.\,0,0000000000126$$
$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}\,.\,0,0000000000013$$

$$\text{log. tang. A}\,\frac{m}{n}\,90^\circ = l\,\frac{2n+m}{n+m} + l\,\frac{2n-m}{n-m} - l\,\frac{n}{m}$$
$$+\,9,5940598857022$$
$$+\frac{m^2}{n^2}\,.\,0,0314720327359$$
$$+\frac{m^4}{n^4}\,.\,0,0020700276238$$
$$+\frac{m^6}{n^6}\,.\,0,0001702566535$$
$$+\frac{m^8}{n^8}\,.\,0,0000151190778$$
$$+\frac{m^{10}}{n^{10}}\,.\,0,0000013958310$$
$$+\frac{m^{12}}{n^{12}}\,.\,0,0000001321535$$
$$+\frac{m^{14}}{n^{14}}\,.\,0,0000000127498$$
$$+\frac{m^{16}}{n^{16}}\,.\,0,0000000012488$$
$$+\frac{m^{18}}{n^{18}}\,.\,0,0000000001238$$
$$+\frac{m^{20}}{n^{20}}\,.\,0,0000000000124$$

$$+\frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,0000000000012$$
$$+\frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,0000000000001$$

Quodsi hic logerithmus a 20. subtrahatur, prodibit logarithmus cotangentis eiusdem anguli $\frac{m}{n}$ 90°. Simili autem modo logarithmus cosinus a 20. subtractus relinquet logarithmum secantis, atque logarithmus sinus a 20. subtractus logarithmum cosecantis.

CLAS

CLASSIS SECVNDA,

CONTINENS

PHYSICA.

$$-\frac{m^{12}}{n^{12}}\,.\,0,00000031430809718659$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}\,.\,0,00000002989150274450$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}\,.\,0,00000000290464467239$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\,.\,0,00000000028682639518$$
$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}\,.\,0,00000000002868076974$$
$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}\,.\,0,00000000000289697050$$
$$-\frac{m^{24}}{n^{24}}\,.\,0,000000000000[illegible]9506024$$
$$-\frac{m^{26}}{n^{26}}\,.\,0,00000000000003026249$$
$$\frac{m^{28}}{n^{28}}\,.\,0,00000000000000312232$$
$$-\frac{m^{30}}{n^{30}}\,.\,0,00000000000000032379$$
$$-\frac{m^{32}}{n^{32}}\,.\,0,00000000000000003373$$
$$-\frac{m^{34}}{n^{34}}\,.\,0,00000000000000000352$$
$$-\frac{m^{36}}{n^{36}}\,.\,0,00000000000000000037$$
$$-\frac{m^{38}}{n^{38}}\,.\,0,00000000000000000004$$

Hoc modo igitur reperitur logarithmus hyperbolicus cosinus cuiusque anguli, existente logarithmo sinus totius $=0$. At logarithmus ordinarius obtinebitur, si iste logarithmus multiplicetur per

$$0,434294481903251 82$$

atque ad eum addatur 10. logarithmus scilicet sinus totius in tabulis receptus: erit igitur

$$\text{log. cos. A}\,.\,\tfrac{m}{n}\,90^{\circ} = 10,000000000000000$$
$$-2\,ln + l(n-m) + l(n+m)$$
$$-\frac{m^{2}}{n^{2}}\,.\,0,101494859341892$$
$$-\frac{m^{4}}{n^{4}}\,.\,0,003187294065451$$
$$-\frac{m^{6}}{n^{6}}\,.\,0,000209485800017$$
$$-\frac{m^{8}}{n^{8}}\,.\,0,000016848348597$$

$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0,000001480193986$$
$$-\frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0,000000136502272$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0,000000012981715$$
$$-\frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0,000000001261471$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0,000000000124567$$
$$-\frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0,000000000012456$$
$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}\cdot 0,000000000001258$$
$$-\frac{m^{24}}{n^{24}}\cdot 0,000000000000128$$
$$-\frac{m^{26}}{n^{26}}\cdot 0,000000000000013$$
$$-\frac{m^{28}}{n^{28}}\cdot 0,000000000000001$$

Hinc igitur inuenientur logarithmi vulgares cosinuum quorumcunque angulorum, idque ad 14 figuras in fractionibus decimalibus.

Q E I.

§. 29. Ex datis logarithmis sinuum et cosinuum inveniuntur primo statim logarithmi secantium et cosecantium. Deinde cum tangentis logarithmus prodeat, si ab aggregato logarithmorum sinus totius et sinus anguli dati subtrahatur logarithmus cosinus, erit pro logarithmis hyperbolicis posito logarithmo sinus totius $=0$;

$$l\,\text{tang. A}.\frac{m}{n}90^{\circ}=l\frac{2n+m}{n+m}+l\frac{2n-m}{n-m}-l\frac{n}{m}$$
$$-0,934711655830435$$
$$+\frac{m^{2}}{n^{2}}\cdot 0,072467033424103$$
$$+\frac{m^{4}}{n^{4}}\cdot 0,004766414748623$$
$$+\frac{m^{6}}{n^{6}}\cdot 0,000392030432478$$
$$+\frac{m^{8}}{n^{8}}\cdot 0,000034812963162$$

+

$$+\frac{m^{10}}{n^{10}} . 0,000003214019654$$
$$+\frac{m^{12}}{n^{12}} . 0,000000304294809$$
$$+\frac{m^{14}}{n^{14}} . 0,000000029357461$$
$$+\frac{m^{16}}{n^{16}} . 0,000000002875496$$
$$+\frac{m^{18}}{n^{18}} . 0,000000000285208$$
$$+\frac{m^{20}}{n^{20}} . 0,000000000028589$$
$$+\frac{m^{22}}{n^{22}} . 0,000000000002891$$
$$+\frac{m^{24}}{n^{24}} . 0,000000000000294$$
$$+\frac{m^{26}}{n^{26}} . 0,000000000000030$$
$$+\frac{m^{28}}{n^{28}} . 0,000000000000003$$

Huius expressionis autem negatiuum dabit cotangentis anguli $\frac{m}{n}\, 90^{\circ}$ logarithmum hyperbolicum. Haecque expressio magnam afferet vtilitatem in Hydrographia, in quam ab Halleio logarithmi tangentium sunt introducti.

§. 30 Simili modo logarithmi vulgares tangentium hinc inuenientur, erit, scilicet

$$\log.\ \text{tang. A.}\ \frac{m}{n}\, 90^{\circ} = l\,\frac{2n+m}{n+m} + l\,\frac{2n-m}{n-m} - l\,\frac{n}{m}$$
$$+\ 9,594059885702190$$
$$+\frac{m^{2}}{n^{2}} . 0,031472032735990$$
$$+\frac{m^{4}}{n^{4}} . 0,002070027623789$$
$$+\frac{m^{6}}{n^{6}} . 0,000170256653563$$
$$+\frac{m^{8}}{n^{8}} . 0,000015119077799$$
$$+\frac{m^{10}}{n^{10}} . 0,000001395831000$$
$$+\frac{m^{12}}{n^{12}} . 0,000000132153556$$
$$+\frac{m^{14}}{n^{14}} . 0,000000012749783$$
$$+\frac{m^{16}}{n^{16}} . 0,000000001248812$$

+

$$+\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0,00000000000123864$$
$$+\frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0,000000000012416$$
$$+\frac{m^{22}}{n^{22}}\cdot 0,0000000000001256$$
$$+\frac{m^{24}}{n^{24}}\cdot 0,00000000000000128$$
$$+\frac{m^{26}}{n^{26}}\cdot 0,000000000000000013$$
$$+\frac{m^{28}}{n^{28}}\cdot 0,0000000000000000001$$

Quodsi hinc quaeratur logarithmus tangentis anguli 45. graduum erit $n = 2$ et $m = 1$, fietque summa seriei

0,0078680081839977
1293767264868
266026602119
5905889 76
13631162
322640
7782
191
4
0,00800010562577 21

logarithmi vero numerorum naturalium sunt

$$l\,5 = 0,69897000433601 88$$
$$-l\,2 = 0,30102999566398 11$$

$$0,39794000867203 77$$
addatur $9,59405988570219 02$

$$\begin{array}{rr} & 9,9919998943742279 \\ \text{itemque}, & 0,0080001056257721 \\ \hline & 10,0000000000000000 \end{array}$$

qui eſt logarithmus tangentis anguli 45. grad.

§. 32. Quodſi quis igitur voluerit tabulas ſinuum et t ngentium eorumque logarithmorum computare ad duodecim figuras in fractionibus decimalibus, dum tabulae vſu receptae eas tantum ad ſeptem figuras exhibent; is ſequentibus regulis vti poterit. Propoſitus ſcilicet ſit angulus $\frac{m}{n}$ 90. graduum erit.

$$\begin{aligned} \text{ſin. A}.\tfrac{m}{n}90^\circ = &+ \tfrac{m}{n} . 1,5707963267949 \\ &- \tfrac{m^3}{n^3} . 0,6459640975062 \\ &+ \tfrac{m^5}{n^5} . 0,0796926262461 \\ &- \tfrac{m^7}{n^7} . 0,0046817541353 \\ &+ \tfrac{m^9}{n^9} . 0,0001604411848 \\ &- \tfrac{m^{11}}{n^{11}} . 0,0000035988432 \\ &+ \tfrac{m^{13}}{n^{13}} . 0,0000000569217 \\ &- \tfrac{m^{15}}{n^{15}} . 0,0000000006688 \\ &+ \tfrac{m^{17}}{n^{17}} . 0,0000000000061 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{coſ. A}.\tfrac{m}{n}90^\circ = &+ 1,0000000000000 \\ &- \tfrac{m^2}{n^2} . 1,2337005501361 \\ &+ \tfrac{m^4}{n^4} . 0,2536695079010 \\ &- \tfrac{m^6}{n^6} . 0,0208634807633 \\ &+ \tfrac{m^8}{n^8} . 0,0009192602748 \\ &- \tfrac{m^{10}}{n^{10}} . 0,0000252020424 \end{aligned}$$

+

$$+\frac{m^{12}}{n^{12}}\,.\,0,0000004710875$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}\,.\,0,0000000063866$$
$$+\frac{m^{16}}{n^{16}}\,.\,0,0000000000656$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\,.\,0,0000000000005$$

$$\text{tang. A.}\,\frac{m}{n}\,90^\circ = \frac{m}{n-m}\,.\,0,6366197723675$$
$$+\frac{m}{n+m}\,.\,0,6366197723675$$
$$+\frac{m}{n}\,.\,0,2975567820597$$
$$+\frac{m^3}{n^3}\,.\,0,0186886502773$$
$$+\frac{m^5}{n^5}\,.\,0,0018424752034$$
$$+\frac{m^7}{n^7}\,.\,0,0001975800714$$
$$+\frac{m^9}{n^9}\,.\,0,0000216977245$$
$$+\frac{m^{11}}{n^{11}}\,.\,0,0000024011370$$
$$+\frac{m^{13}}{n^{13}}\,.\,0,0000002664132$$
$$+\frac{m^{15}}{n^{15}}\,.\,0,0000000295864$$
$$+\frac{m^{17}}{n^{17}}\,.\,0,0000000032867$$
$$+\frac{m^{19}}{n^{19}}\,.\,0,0000000003651$$
$$+\frac{m^{21}}{n^{21}}\,.\,0,0000000000405$$
$$+\frac{m^{23}}{n^{23}}\,.\,0,0000000000045$$
$$+\frac{m^{25}}{n^{25}}\,.\,0,0000000000005$$

$$\text{cot. A.}\,\frac{m}{n}\,90^\circ = \frac{n}{m}\,.\,0,6366197723675$$
$$-\frac{m}{2m-n}\,.\,0,3183098861837$$
$$-\frac{m}{2n+m}\,.\,0,3183098861837$$
$$-\frac{m}{n}\,.\,0,2052888894145$$
$$-\frac{m^3}{n^3}\,.\,0,0065510747882$$

$- \frac{m^5}{n^5} . 0,0003450292554$

$- \frac{m^7}{n^7} . 0,0000202791060$

$- \frac{m^9}{n^9} . 0,0000012366527$

$- \frac{m^{11}}{n^{11}} . 0,0000000764959$

$- \frac{m^{13}}{n^{13}} . 0,0000000047597$

$- \frac{m^{15}}{n^{15}} . 0,0000000002969$

$- \frac{m^{17}}{n^{17}} . 0,0000000000185$

$- \frac{m^{19}}{n^{19}} . 0,0000000000011$

---

log. sin. A. $\frac{m}{n} 90^\circ = l(2n+m) + l(2n-m) + lm - 3ln$

$+ 9,5940598857021$

$- \frac{m^2}{n^2} . 0,0700228266059$

$- \frac{m^4}{n^4} . 0,0011172664416$

$- \frac{m^6}{n^6} . 0,0000392291464$

$- \frac{m^8}{n^8} . 0,0000017292708$

$- \frac{m^{10}}{n^{10}} . 0,0000000843629$

$- \frac{m^{12}}{n^{12}} . 0,0000000043487$

$- \frac{m^{14}}{n^{14}} . 0,0000000002319$

$- \frac{m^{16}}{n^{16}} . 0,0000000000126$

$- \frac{m^{18}}{n^{18}} . 0,0000000000007$

---

log. cos. A. $\frac{m}{n} 90^\circ = 10,00000000S0000$

$+ l(n+m) + l(n-m) - 2ln$

$-\frac{m^2}{n^2} \cdot 0,1014948593419$

$-\frac{m^4}{n^4} \cdot 0,0031872940654$

$-\frac{m^6}{n^6} \cdot 0,0002094858000$

$-\frac{m^8}{n^8} \cdot 0,0000168483486$

$-\frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,0000014801940$

$-\frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,0000001365023$

$-\frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,0000000129817$

$-\frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,0000000012614$

$-\frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,0000000001245$

$-\frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,0000000000126$

$-\frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,0000000000013$

$$\text{log. tang. } A\,\tfrac{m}{n}\,90^\circ = l\,\frac{2n+m}{n+m} + l\,\frac{2n-m}{n-m} - l\,\frac{n}{m}$$

$+\ 9,5940598857022$

$+\frac{m^2}{n^2} \cdot 0,0314720327359$

$+\frac{m^4}{n^4} \cdot 0,0020700276238$

$+\frac{m^6}{n^6} \cdot 0,0001702566535$

$+\frac{m^8}{n^8} \cdot 0,0000151190778$

$+\frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,0000013958310$

$+\frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,0000001321535$

$+\frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,0000000127498$

$+\frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,0000000012488$

$+\frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,0000000001238$

$+\frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,0000000000124$

$$+ \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,000000000012$$

$$+ \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0,0000000000001$$

Quodsi hic logerithmus a 20. subtrahatur, prodibit logarithmus cotangentis eiusdem anguli $\frac{m}{n}$ 90°. Simili autem modo logarithmus cosinus a 20. subtractus relinquet logarithmum secantis, atque logarithmus sinus a 20. subtractus logarithmum cosecantis.

CLAS

CLASSIS SECVNDA.

CONTINENS

PHYSICA.

DE
VI VENAE AQVEAE CONTRA PLANVM INCVRRENTIS
EXPERIMENTA,

AVCTORE

Georg. Wolffg. Krafft.

Misit ad Academiam nostram ante aliquod tempus Dissertationem eruditissimam Clar. Daniel Bernoulli, cui titulus est: *De legibus quibusdam Mechanicis, quas natura constanter affectat, nondum descriptis, earumque vsu Hydrodynamico pro determinanda vi venae aqueae contra planum incurrentis*; in qua calculo elegantissimo, et ex fundamentis ab intima motus natura petitis, profundo sane ingenio determinat vim, seu impetum, quem vena aquea ex vase repleto prosiliens, et in planum aliquod opposi-tum incurrens, contra hoc planum exserit. Cumque theoriam exinde formatam Experimento ibidem exposito confirmasset: iussus ab Ill. Academiae Praeside fui ego, vt idem repeterem, et quae deprehenderem Academiae exponerem. Feci ergo huius Theoriae periculum summa qua potui diligentia et exactitudine. Ante vero quam enarrare possim, quid per Experimenta mea edoctus fuerim, Tab. IV.

rim, haud abs re fore puto breuiter repetere ea, in quibus ingeniosissima Theoria Bernoulliana consistit. Pro determinanda vi venae aqueae in planum incurrentis prima Experimenta facta esse dicit in Academia Scientiarum Parisiensi, anno 1669, teste Duhammelio in Historia huius Academiae; post haec secuta esse multa alia; statuisse autem omnes Physicos ex his Experimentis, praedictam vim venae aqueae, mox ante foramen ab asserculo aliquo exceptae, aequalem esse ponderi cylindri aquei, cuius basis sit foramen per quod aqua exsilit, altitudo autem ea, quae est aquae totius supra foramen extantis. Ita iuxta hanc Hypothesin esset vis, quam aqua per GM exsiliens in planum asserculum OP exserit, aequalis ponderi cylindri aquei, cuius basis est area foraminis GM, et altitudo GA. Asserit porro, Hypothesi huic Experimenta nunquam ex asse respondisse, cuius dissensus inter Experimenta et Ratiocinia duplicem affert causam. Primo enim putant huius sententiae Patroni celeritatem aquae per GM exsilientis eam esse, quam graue aliquod libere per AG delapsum acquirere posset; quo ipso inducti sunt, vt cylindrum aqueum altitudinis AG assumerent. Sed notum hodie est, hoc non verum esse nisi foramen GM statuatur infinite paruum; in foramine autem finitae magnitudinis iactum venae aqueae exeuntis istum gradum celeritatis nunquam attingere. Secundo statuitur in hac opinione, amplitudinem venae exeuntis eandem esse quae est foraminis per quod effluit, aut vtriusque eandem esse Diametrum; sed cognitum hodie est, venam aqueam per foramen e vase erumpentem contrahi sensibiliter cum e foramine exiit; quam *venae contractionem* Newtonus primus

Tab. IV. fig. 1.

mus obseruauit. Remidium itaque his duobus incommodis allaturus Clar. Bernoulli statuit, celeritatem aquae per GM exsilientis non assumendam esse eam, quae debetur altitudini aquae supra foramen GA, sed pro quolibet casu Experimentis inquirendum esse in celeritatem realem, quam aqua effluens actu ipso habet, quod per Mechanicae regulas semper fieri potest. Deinde amplitudinem venae assumendam esse non eam, quae aequalis sit amplitudini venae contractae; aut vero euitandam esse hanc contractionem, quod fit, si aqua non per solum foramen GM, sed per tubulum YE foramini GM insertum effluit.

His praemissis appellat *cylindrum aqueum correctum* eum, cuius basis est amplitudo venae contractae, nisi scil. haec contractio venae, immisso foramini tubulo, impediatur; et cuius altitudo est ea, quae debetur celeritati reali et actuali quam vena aquea mox post effluxum suum habet, et quae in quolibet casu peculiari Experimento determinanda est; tandem vero statuit, vim venae aqueae per tubulum YE in planum OP incurrentis aequalem esse duplo ponderi huius cylindri aquei correcti.

Vt igitur in hanc Theoriam Experimentis inquirerem, assumsi vas ligneum ABCD quadratum, cuius latus AB est $\frac{15}{12}$ pedis Londinensis, et altitudo 2. pedum. Huic vasi inserui tubulum YE ex orichalco confectum, interne bene politum, vt aqua eo liberius effluere posset. Deinde in parte anteriori vasis adaptaui vectem STV e ligno quercino confectum, sub angulo recto inflexum, et circa hypomochlium H liberrime mobilem; huius vectis brachio HS inserui annulum I, ex quo dependebat lanx K

 pon-

ponduſculis oneranda, et quae ope annuli I facillime hinc et inde moueri ſupra brachium poterat. In parte inferiori vero huius vectis affixus erat orbiculus OP rotundus et quercinus, tubulo YE directe oppoſitus, in quem vena incurreret; totus vero hic vectis inflexus nullo pondere in I oneratus perfectum aequilibrium ſeruabat. Vaſi ligneo AD inferne adiuncta eſt ciſta etiam lignea NR, in cuius fundo NQ amplitudo NL iactus liberi, quem vena aquea ſibi relicta efficeret, obſeruari potuit. Tandem vero ſemper curaui, vt fundus hic NQ in quouis Experimento eſſet perfecte horizontalis, et vectis inflexus non niſi ſolo orbiculo OP oneratus, eſſet in exactiſſimo aequilibrio, dum nempe ſemper effeci, vt brachium TV eſſet perpendiculo proxime applicato parallelum. His ita praeparatis cepi

EXPERIMENTVM I.

Die 2. Iunii 1736. vbi primum obſeruaui, quam amplitudinem vena aquea libere, remoto nempe vecte, effluens efficeret, et inueni in ſcala Geometrica accuratiſſime confecta diſtantiam ZL = 4542 partium talium, qualium 2000 quamproxime efficiunt pedem Londinenſem, qua menſura in ſequentibus conſtanter vtar; demiſſa nempe a fine tubuli Y perpendiculari YZ in fundum ciſtae adiunctae; ipſa vero haec perpendicularis XZ, cuius initium e medio tubuli ſumſi, erat = 2017 part. Pro amplitudine autem iactus liberi aſſumſi diſtantiam ZL, quoniam vena XL in X incipit parabolam iactus ſui deſcribere. Pondus lancis cum annulo et filamentis ſimul erat 829 Granorum talium, qualium 7680 efficiunt libram Hollandicam, pondus vero K lanci adhuc impoſitum erat

erat 700 Gran. ita vt pondus totum, aequilibrium cum vi venae aqueae erumpentis producens fuerit 1549 Gran. porro inueni H I = 2010 part. T X, cuius initium a recta per mediam brachium S T transeunte sumsi, = 2218 part. Denique vt pondus aquae, qua vas repletum erat, deprehenderem, impleui eadem aqua cylindrum, cuius diameter est 675 part. altitudo autem 685, cuius voluminis aquei pondus, detracto pondere vasis, deprehendi 13111 Gran. Diameter G M erat 89 part. Igitur pro altitudine celeritate effluxus liberi debita notum est, quod haec altitudo, supponendo semitam venae ita erumpentis esse parabolicam; sit $= \frac{ZL^2}{4XZ}$, ex quo sequitur, altitudinem celeritati actuali, qua aqua per foramen X erumpebat, debitam fuisse = 2557 part. Erat autem altitudo ipsa aquae supra foramen in vase A G = 3738, vnde apparet, quod alias cognitum est, quod celeritas actualis aquae erumpentis plane non respondeat altitudini aquae supra lumen. Quoniam nunc indagari debet pondus cylindri aquei correcti, hoc est, cylindri aquei, cuius basis est area G M, ob euitatam per tubulum venae aqueae contractionem, et altitudo = 2557 part. Sit hunc in finem vas, cuius aqua repleti pondus examinaui, $\alpha\beta\gamma\delta$, atque erunt pondera, aquae in hoc vase contentae, et aquae cylindro correcto comprehensae, inter se vti volumina horum cylindrorum, ob densitatem aquae vtrobique eandem, hoc est, vti $\beta\gamma^2.\alpha\beta$ ad GM^2 2557. Ex qua analogia inuenitur pondus cylindri aquei correcti = 850 $\frac{3}{5}$ Gran. et huius duplum = 1701 $\frac{1}{5}$ Gr. quae est ex Theoria vis venae aqueae contra orbiculum O P incurrentis. At vero datum in K pondus totale, quod P vocabo, sustinet in Tab. IV. fig. 2. Tab. IV. fig. 1.

 stitu

ſtatu aequilibrii impetum in X factum aequalem $\frac{HI}{TX} \times P$, vnde ex obſeruatione colligitur hic impetus = 1403 $\frac{2}{3}$ Gr. ex quo ſequitur, Theoriam excedere pondus in Experimento obſeruatum 297$\frac{2}{3}$ Granis; quodſi autem ſequamur Theoriam reiectam, ea pro pondere praebet 1243 Gr. quare haec deficit a pondere in Experimento obſeruato 160 Granis. Fuit etiam in hoc Experimento prominentia tubi extra vas maius, nempe G Y = 218 part atque diſtantia orbiculi O P ab extremo tubuli Y = 135 part.

EXPERIMENTVM II.

Inſtitutum fuit die 3. Iunii, atque in eo vas maius, leniter aquam ſemper affundendo, conſtanter plenum fuit ſeruatum, tubus vero E Y vtrinque breuior factus eſt. Tum inueni diſtantiam Z L = 4608 part. Y Z = 2058, pondus totale in I appenſum 1549 Gran. H I = 2095, G M = 89; pondus vero aquae cylindrico vaſe $\alpha\beta\gamma\delta$ contentae retinui quale illud heri repereram. Ex his itaque fit altitudo debita celeritati aquae in X exſilientis = 2579 part. pondus cylindri aquei correcti = 860 Gran. et huius duplum = 1720 Gran. Colligitur vero ex obſeruatione impetus in orbiculum realiter factus = 1463 Gran. vnde Theoria rurſus pondus in Experimento obſeruatum excedit 257 Granis.

EXPERIMENTVM III.

Feci die 5. Iunii vaſe maiori conſtanter pleno ſeruato, tubi vero prominentiam G Y plane abſcindi curaui, retinuique ſolam G E. Atque tum inueni diſtantiam N L = 4755 part. M N e medio foraminis G M ſumtam = 2053, pondus totale in I appenſum = 1549 Gran.

H I =

HI = 2127, GM = 86, pondus aquae, cylindrico vaſe alio contentae, cuius diameter eſt = 453, altitudo = 744, deprehendi = 6191 Gran. ex quibus oritur altitudo debita celeritati aquae in GM exſilientis = 2753 part. Pondus cylindri aquei correcti = $825\frac{1}{2}$ Gran. et huius duplum 1651 Gran. Colligitur autem ex obſeruatione impetus in orbiculum realiter factus = 1486 Gran. vnde Theoria denuo pondus ab Experimento indicatum excedit 165 Granis.

EXPERIMENTVM IV.

Inſtitui die 18. Iunii praeſente et iuuante Clar. Eulero noſtro; et, maiori vaſe rurſus conſtanter pleno ſeruato per continuam lenem affuſionem aquae, inuenimus diſtantiam NL = 4557 part. MN = 2044 part. pondus totale in I appenſum = 1609 Gran. HI = 1928 part. GM = 88 part. TX = 2213, pondus aquae cylindricae, cuius diameter = 686, et altitudo = 442, erat 8477 Gran. Ex quibus emergit altitudo debita celeritati aquae in GM exſilientis = 2539 part. pondus cylindri aquei correcti = 801 Gran. et huius duplum = 1602 Gran. Colligitur autem ex obſeruatione actualis impetus in orbiculum factus = 1401 Gran vnde Theoria adhuc pondus ab Experientia indicatum excedit 201 Granis.

EXPERIMENTVM V.

Sumtum fuit die 2. Februarii 1737, et repetitum die 7. Febr. praeſente Ill. Praeſide et plerisque Membris Academiae. Inuenta autem fuit diſtantia NL = 4469, MN = 2015, pondus totale in I appenſum = 1549 Gran.

Gran. HI = 1983, GM = 86, TX = 2188, pondus aquae cylindricae, cuius diameter 128, altitudo 278, erat 190 Gran. Ex quibus emergit altitudo debita celeritati aquae in GM exſilientis = 2478 part., pondus cylindri aquei correcti = 764 Gran. et huius duplum = 1528 Gran. Colligitur autem ex obſeruatione actualis impetus in orbiculum OP factus = 1403 Gr. vnde rurſus Theoria pondus ab experientia indicatum excedit 125 Granis.

EXPERIMENTVM VI.

Sumtum eſt ab ipſo Clar. Bernoulli, et in laudatiſſima ipſius Diſſertatione deſcriptum, cuius circumſtantias ad meam Figuram referam. Erant itaque ZL = 900 part. quarum 400 faciunt pedem Pariſinum; YZ = 900 part. pondus in I appenſum dicit fuiſſe paulo maius quam 1020 Gran. ſumam ergo 1021 Gran. Erat autem in vecte ipſi adhibito HI = TX; et GM = 19 part. pondus aquae cylindricae, cuius diameter 92 et altitudo 131 part, erat 122 Drachmar. vel 7320 Gran. Ex his emergit altitudo debita celeritati aquae libere exſilientis = 225 part. pondus cylindri aquei correcti = 536 Gr. huius duplum = 1072. Obſeruatio vero ipſa dedit impetum aquae in orbiculum = 1021 Gr. hinc Theoria etiam tum pondus ab experientia indicatum exceſſit 51 Granis.

DE

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE. 1738. INSTITVTAE

A

Georgio Wolffg. Krafft.

§. 1.

Durante hoc anno 1738. obseruatae fuerunt a me altitudines Barometri singulis mensibus maximae et minimae sequentes:

		maxima	miuima	diff.
1738.	Ianuarius	— 30. 22	— 28. 55	— 1. 67
	Februarius	— 30. 67	— 28. 26	— 2. 41
	Martius	— 29. 90	— 28. 99	— 0. 91
	Aprilis	— 30. 15	— 29. 20	— 0. 95
	Maius	— 29. 98	— 29. 31	— 0. 67
	Iunius	— 29. 78	— 29. 38	— 0. 40
	Iulius	— 30. 04	— 29. 22	— 0. 82
	Augustus	— 30. 02	— 29. 15	— 0. 87
	September	— 30. 21	— 29. 38	— 0. 83
	October	— 30. 78	— 28. 90	— 1. 88
	Nouember	— 30. 74	— 28. 90	— 1. 84
	December	— 30. 27	— 28. 75	— 1. 52

vbi quidem rursus, numeri ante punctum positi denotant partes duodecimas pedis Londinensis, hoc est, pollices Londinenses; numeri autem post punctum positi significant horum pollicum partes centesimas, vti in praecedentium annorum obseruationibus factum est.

§. 2. Apparet ex his altitudinibus Barometri, earum maximam hoc anno fuisse die 31. Octobris, in perfecta serenitate aliquot dierum, spirante facili Euro, cum frigore mediocri; quia vero haec altitudo maxima illam quae praecedente anno 1737 obseruata fuit, nempe 30. 95, non excedit: haec adhucdum maxima omnium hic loci obseruatarum manet. Minima autem Barometri altitudo hoc anno fuit 28. 26, quae extitit die 23. Febr. coelo nubilo aliquot dierum, variante vento, vt plurimum tamen flante Austro, frigore adhuc mediocri, et multa cadente niue. Quae igitur minima altitudo huius anni, cum antea inuentam, nempe 28. 18 superet: manet adhuc idem spatium variationum Barometricarum praecedente anno stabilitum, nempe 2. 77. Atque id quoque, quod in praecedentibus obseruationibus Barometricis iam obseruaui, etiam hoc anno confirmatur; variationes nempe menstruas in primis et vltimis anni mensibus esse maiores, minores autem in mediis. Quam ipsam obseruationem stabilitam quoque deprehendo ex altitudinibus Barometricis Telone Martio (Toulon) in Gallia obseruatis, atque a Rev. P. Du Chatelard ad Clariss. De l'Isle missis.

§. 3. Sequentem adhuc annotationem, quamuis magni momenti non sit, tamen non puto plane contemnendam. Ex subitaneo lapsu vel ascensu mercurii in Barometro ventos oriri notum est; cum hoc indicio sit sublatum esse aëris nostri cum vicinis regionibus aequilibrium. Sin itaque aër omnino quietus hac ratione commouendus, et ventus excitandus sit, plerumque integri diei tempus, et plus aliquando, requiritur, antequam toti massae aëreae

motus

motus in plagam aliquam conſpirans communicetur, prout ex ſequentibus obſeruationibus pateſcit, in quibus ſignificat ventos N Boream, O Eurum, S Auſtrum, W Zephyrum, adſcriptique numeri exprimunt vim venti, 1 paruum, 2 ſenſibilem, 3 fortem, 4 firentem.

					Barom.	Ventus	
I.	1737	Decembr.	30	10 pm	30. 22	NW	2
			31	8 am	27	o	o
				1 pm	27	o	o
	1738	Ianuarii	1	8 am	14	o	o
				10 pm	00	o	o
			2	8 am	29. 80	o	o
				1 pm	65	SW	1
				11 pm	30	SW	4
II.	1738	Ianuarii	25	10 pm	34	NW	3
			26	8 am	56	o	o
				10 pm	12	o	o
			27	8 am	22	o	o
				10 pm	17	o	o
			28	8 am	07	W	3
				11 pm	10	W	3
III.	1738	Octobris	2	12 mer	30. 38	NO	2
				10 pm	35	o	o
			3	8 am	33	o	o
				9 pm	23	o	o
			4	2 pm	08	o	o
				11 pm	29. 99	SO	2
			5	3 pm	60	SO	2

§. 4. Multis obſeruationibus mihi conſtat, accidere quam ſaepiſſime vt oriente circa veſperam Luna nebulae et nubes, totum ante diem obfuſcantes, diſpellantur, reddaturque aër perfecte ſerenus, quod praecipue factum eſt diebus ſeptembris 11. 12. 13. 14 et 15. anni 1738. Cuius quidem phaenomeni cauſam in mutua actione Lunae et Terrae poſitam eſſe exiſtimo. Cum enim extra omne dubium conſtitutum ſit, Lunae actionem ſiue attractionem in Terras redundantem aeſtus marinos excitare, hoc eſt, aquas ad ſe quaſi rapere atque altius extollere: multo facilius eadem haec actio tenues nebulas in ſummo aëre circumuolitantes afficiet, atque eas altius attollendo rarefaciet, penitusque diſpellet; ita vt probabile ſit, extimam Atmoſphaerae ſuperficiem ab actione Lunae hic attolli, illic deprimi, atque ſic aeſtus marinos quodammodo imitari.

§. 5. Auroras Boreales hoc anno obſeruaui ſequentes:

1738.	Februarii	1.	in perfecta ſerenitate viſa fuit Lux Borea, ſed humilis tantum, flante Borea.
	Auguſti	8.	in perfecta quoque ſerenitate viſa eſt aurora Borealis, ſed debilis, nullo ſpirante vento.
		24.	poſt pluuias, et frequentes coruſcationes verſus SO, apparuit tenuis Lux Borea, nullo flante vento, quam inſecuta eſt poſtero die ſerenitas.
	Septembris	8.	in perfecta ſerenitate viſa fuit Lux Borea debilis, ſpirante Auſtro.

Octobris

1738. Octobris 1. in perfecta ſerenitate, aliquot dierum, flante Borea, apparuit Lux Borea, quam ſequebatur congelatio vniuerſalis.

Nouembris 21. poſt pluuias et nubes circa horam 10. p. m. coelum ſerenum redditum fuit, atque viſa Lux Borea, redeuntibus poſtea nubibus et pluuiis.

25. Aurora Borealis obſeruata fuit nubibus permixta, quam nix ſequebatur.

§. 6. Prima congelatio facta eſt hoc anno, in ſerenitate aliquot dierum, d. 2. Octobris, quae per aliquot dies ſubſtitit flante fortiter Euro-Borea. Contigit ergo haec prima congelatio ipſo die Nouilunii tum celebrati, quo die ſimul erat △☉♂, praecedente Aurora Boreali. Inſequente hanc primam congelationem die, nempe d. 3 Octobris obſeruatae ſunt horis matutinis ingens nebula, et pruina vniuerſalis. Cum enim per aliquot dies praecedentes perfecta fuiſſet ſerenitas, aërque ita grauis, vt Barometrum ad 30. 38 tandem eleuauerit, factum eſt, vt die 3. Octobris ſubito illud deprimeretur, atque ſic exhalationes praecedentium dierum calore e terra niue libera excitatae, delaberentur, et terris frigidis adſperſae congelarentur.

§. 7. Ope Thermometri mercurialis, quod in praecedentibus deſcriptum fuit, atque ſemper ita locato, vt ab aëre libero quidem afficeretur, ſed a ventis et Sole tutum eſſet, obſeruaui hoc anno maximum calorem fuiſſe d. 22. Iulii, quo die h. 2. p. m. Thermometrum oſtendebat gradum 112 $\frac{4}{10}$, qui reſpondet Thermometri Fahrenheitiani gradui 77. Mutantur enim gradus Thermometri Delisliani in Fahrenheitianos, ſi illi gradus ſubſtituantur pro *m* in hac formula, $212 - \frac{6m}{5}$, quia illius gradus o et 150 respondent huius gradibus 212 et 32. In sequente die 25 Iulii idem fere calor rediit, nempe graduum 112 $\frac{5}{10}$, quo die Thermometrum libero soli expositum hora 2 $\frac{1}{2}$ p. m. monstrauit tandem gradum 91, vel Fahrenheitianum 103, quo etiam die grauis tempestas cum imbre vehementi ingruit. Maximum vero frigus obtinuit die 1 Decembris, ostendente Thermometro in ipso meridie gradum 176 $\frac{5}{10}$, qui congruit cum Fahrenheitiano o $\frac{1}{2}$, flante mediocri Euro, in serenitate aliquot dierum.

§. 8. Tonitrua hoc anno audita fuerunt diebus sequentibus, Maii 30, cum pluuia et vehementi Zephyro hora 8 p. m. Iunii 5 sine pluuia; 19 cum imbre subito et breui, 21 sub iisdem circumstantiis, 26 orta est grauis tempestas, cum imbre vehementi et vento fortissimo ex plaga Zephyro-Australi. Iulii 15 cum pluuia, 17 cum pluuia breui, redeuntibus tonitruis circa vesperam, 19 cum imbre vehementi, 21. 22. 23. aëre semper nubilo et pluuio, 25 oriebatur grauis tempestas et imber vehemens, flante fortissimo Borea-Zephyro per horae spatium, 27 toto tempore antemeridiano, cum forti pluuia, 30 inter pluuias. Augusti 10 cum forti pluuia, praecedente er redeunte serenitate, 19. 22 cum pluuiis, 24 insequente Aurora Boreali. Septembris 5 post pluuiam; quibus adiungo, primas hirundines mihi visas fuisse d. 4 Maii.

§. 9. Pluuias et Niues aestimatione tantum perpendens inuenio in hoc anno dies 61 integros pro pluuiosis et niuosis esse habendos, atque mensium habita ratione

Ianua-

Ianuarium niuium fuisse feracissimum. Fluuii nostri Neuae tumores experti sumus Ianuarii 9, quo die flante fortissimo Austro-Zephyro inundatio magna extitit, quae coepit hora matutina sexta, 24. Iunii 15. Septembris 2.

§. 10. Procellas experti sumus diebus sequentibus, Ianuarii 2. 8. 9 cum inundatione, 17. 18. Martii 27. Iunii 15 cum egressu fluuii, 26 cum graui tempestate, Septembris 2.

§. 11. Reliqua, quae referri huc debent, comprehendam sequentibus. Februarii 17 hora 11 p. m. Halo Lunaris obseruatus fuit breui tempore durans, cum coelum per multos antea dies serenus, nec nisi nebulis quolibet fere mane obortis turbatum, nubibus obduci inciperet, cadente Barometro, et tandem biduo post insecuta niue copiosa. Aprilis 27 hora 4 p. m. visa fuit Iris duplex post subitas pluuias cadente Barometro obortas. Octobris 30, in perfecta serenitate, obseruati fuerunt vapores e fluuio ascendentes ita copiosi, vt nebulae instar aquae soli insiderent, toto die durantes, circa meridiem autem tenuiores redditae; quod idem quoque accidit Nouembris 1. Reliquae nebulae terram occupantes hoc anno fuerunt Ianuarii 24. 31. Februarii 7. 9. 13. 14. 16. 17. Martii 9. 12. 22. Aprilis 3. 4. 7. 10. 20. Iunii 28. Iulii 11. 13. 14. 21. Augusti 15. 17. 21. 22. Septembris 12. 15. 24. 26. 27. Octobris 3. 7. 21. Nouembris 9. 16 18. Decembris 4. 7. 22. De ventis quoque id adhuc obseruandum est, accidisse huius anni die 13 Nouembris, quod silentibus iis per plures dies, hoc die circa horam 8. a. m. coeperit spirare Austro-Zephyrus satis fortis, remittens vero aliquid de vi sua circa horam 1. p. m. pluuiis et

niuibus

niuibus interea mixtim cadentibus; hora autem 8. p. m. ſubito mutatus is eſt in Boream fortem et increſcentem, qui, ceſſante omni pluuia et regelatione, niuem copioſam attulit, dum toto die Barometrum caderet, poſtero vero die aſcenderet iterum, cum frigore mediocri ſed increſcente. Illud denique praeterire non poſſum, quamuis praefiſcine id dictum velim, accidiſſe a menſis Nouembris die 17 vsque ad 24, vt continua regelatio regnaret; ſed cum die 24 celebrata fuiſſet ☍☉♂, ſubito mutatum eſſe aërem, vt frigus eo ipſo die auctum fuerit, et die 26 vsque ad gradum 15 Thermometri Fahrenheitiani peruenerit.

§. 12. Referam nunc annotationes quosdam ad rem Meteorologicam forſan non inutiles, quos e Diario ſimilium obſeruationum a Clariſſ. Gmelino in itinere verſus Kamtſchatkam verſante ſummo ſtudio factas, et ab Academia mecum communicatas deprompſi. Fertilior enim in hoc ſtudii genere ſemper eſt ſeges ea, quae alienis ipſa ſe adauget herbis; et falcem in propriam et peregrinam ſimul immittit meſſem; quippe quae compilatio horrea Meteorologiae ſola ditat. Factae ſunt obſeruationes, quas in vſum nunc meum vertam, in Kirengenſi munimento, ad confluentem fluuiorum Kirengae et Lenae ſito, ab Octobris 1. 1737 ad 28 Febr. 1738. Latitudo huius munimenti ex recentiſſimis Mappis Geographicis deſumta inuenitur $57°\frac{1}{2}$, et diſtantia inter illud et Petropolin reperitur milliarium Germanicorum iuxta Homannum 525, iuxta Stralenbergium $577\frac{1}{2}$, iuxta Kirilouium vero $637\frac{1}{2}$, quorum aſſumam medium 580 dictorum milliarium, quae in parallelo 60 graduum efficiunt quam proxime differen-

tiam

tiam miridianorum Petropolitani et Kirengensis 5^h $9'$. Quibus praemonitis sequentia deduxi ex istis obseruationibus Corollaria.

§. 13. Primo quidem Kirengae altitudo maxima Barometri in hoc quadrimestri tempore fuit partium millesimarum pedis Regii Parisiensis 2770 Decembris 10, 1737, coelo sereno per aliquot dies. Minima autem fuit Decembris 26, 1737, et Februarii 14, 1738, nempe 2627 dictarum partium, coelo niuoso, et flante Zephyro cum vi summa, vtraque vice. Harum altitudinum differentia, siue variatio Barometri quadrimestris, ergo ibi fuit 143 partium earundem. Hic vero loci obseruata fuit eodem durante tempore variatio Barometri $2\frac{69}{100}$ pollicum duodecimalium pedis Londinensis, qui coincidunt cum 224 partibus millesimis huius pedis, quae, posita ratione inter pedem Parisinum et Londinensem vti 16 ad 15, efficivnt 210 partes millesf. pedis Parisini. Itaque in hoc spatio quadrimestri variatio Barometri Petropolitana maior fuit quam Kirengensis.

§. 14. Secundo maximum frigus Kirengae obseruatum fuit die 9 Ianuarii 1738, notante Thermometro Delisliano gradum 275, qui congruit cum Fahrenheitiano — 118, siue 118 infra 0; quod frigus sane ingens fuit; cum omni adhibito artificio, ope nimirum spiritus nitri adeo frigefacti vt gelari inciperet, Fahrenheitianum Thermometrum non potuerit magis deprimi quam ad gradum 40 infra 0, vel ad gradum 210 nostri Thermometri, vti apparet ex *Elementis Chemiae Boerhauianis pag.* 162 *Tomi I.*

§. 15. Tertium est, quod in eodem Thermometro Kirengensi prorsus inexspectatum accidit, mutatio nempe adeo subita, vt ascensus mercurii oculis distingui potuerit. Nam Nouembris 27, 1737, erat illud Thermometrum tempore matutino in gradu 218, tempore meridiano in gradu 270, qua obseruatione vix consignata cum denuo accurreret Clar. Gmelinus ad Instrumentum, iam illud notabat 265, et continuo ipso praesente et adstante altius ascendit, donec post effluxum semihorii ostenderet 195, et vesperi hora 11 monstraret 176. Eodem hoc tempore ventorum mutatio sequens obseruata fuit. Die Nouembris 25 desinebat spirare Boreas, diebus 26 et 27 nullus erat ventus; d. 28 vero hora 4 matutina flare coepit Auster cum vi summa, secutae sunt eodem die niues minutae humidae, cadente Barometro, incaluitque aër post aliquot dies vsque ad gradum 163. Idem hoc phaenomenon accidit quoque 1737 Decembris 11, vt nempe Thermometrum circa horam 3 p. m. tempore 13 minutorum primorum a gradu 252 subito et continuo motu ascenderit ad gradum 210, hoc est per 42 gradus. Venti eodem quo antea modo se habuerunt. Erat enim diebus 9[b], 10, et 11, nullus ventus, die vero 12 primo mane exoriebatur vehementissimus Zephyrus, Barometro cadente, et insequente tempestate calida aliquot dierum vsque ad gradum 168.

§. 16. Huius quidem vtriusque inconsueti phaenomeni caussa ex eo mihi deriuanda esse videtur, quod in vtroque casu vehementes et subiti venti exorti fuerint. Cum enim durante primo ascensu, hoc est, Nouembris 27 hora 11 p. m. nullus ventus spiraret, et deinde post me-

diam

diam noctem insequentem procellosius Auster insurgeret: concludere licet, hunc ventum e terris versus Austrum sitis egressum iam tum initium sumsisse cum praecipiti ascensu Thermometrum variatum fuit, atqne primum quidem aëri Kirengensi vicinorumque regionum magnam vim vaporum humidorum et calidorum infudisse, qua is subito incalescebat; hac itaque vaporum accumulatione aëri permixda Thermometrum multo citius affectum fuisse, quam motus ipse aëri Kirengensi potuerit imprimi, vt et is omnis eadem directione et celeritate, quam incurrens aër, tandem latus fuerit, quod post 5 circiter horas demum factum est. Idem de altero casu iudicium ferri poterit, quo aliquot post phaenomenon horis vehemens Zephyrus exoriebatur. Cum enim eo, et multis praecedentibus diebus constans regelatio Petropoli, et sine dubio etiam in locis Kirengam inter et Petropolin iacentibus sentiretur: etiam hoc casu fieri potuit, vt excitatus in loco occidentaliori ventus subitus aërem Kirengensem maxima humidorum et calidorum humorum copia inundauerit, atque ea ascensum subitum Thermometrorum prius effecerit, quam violentus is motus toti aëris Kirengensis massae conciliaretur.

§. 17. Quarto vt aliquid etiam de ratione directionis ventorum in tanta distantia 580 milliarium Germanicorum innotescat, apponam eorum aliquot exempla:

			Kirenge		Petropoli
Octobris	10	—	W 4	—	W 4
	14	—	W 4	—	0 0
	20	—	W 4	—	0 0
	24	—	W 4	—	W 3

Nouembris 18	–	W	4	–	S	1
20	–	W	4	–	S	3
Decembris 19	–	W	4	–	O	2
23	–	W	4	–	O	2
24	–	W	4	–	O	2
26	–	W	4	–	o	o

Ex his deduci poteſt, probabile eſſe dari quandoque Zephyrum, qui ex hac regione noſtra vſque ad Kirengam, et multo longius, continuo tractu feratur, adeoque milliaria forſan 600 aut 700 peruagetur, quod ex Octobris 10, 24, apparet. Illud enim praetereo, quod in tanto locorum interuallo diuerſi et directione et impetu venti exiſtere poſſint, quippe quod in locis etiam multo minus diſtantibus ſaepiſſime obſeruatum fuit.

§. 18. Quinto, quod phaenomenum die 5 Decembris 1737 apud nos conſpicuum in Diario Meteorologico praecedentis anni retuli, rubedo nimirum coeli inconſueta, et multorum ſpectatorum animos terrens, de qua etiam in Nouis publicis mentio facta eſt, viſam eam fuiſſe aliquibus in locis ſimul cum globo igneo in aëre diſrupto: eius iam cauſa vera, quae eo tempore in ſuſpicionem tantum veniebat, nunc nobis conſtat. Cum enim rubedo haec fortiſſime appareret apud nos circa horam 10 nocturnam, hoc eſt, in tempore Kirengenſi die 6 Decembris circa horam 3 matutinam, (§. 12.) refert Clariſſ. Gmelinus die 6 Decembris hora circiter 1 poſt mediam noctem ibi viſam fuiſſe magnam Auroram Borealem, rubro colore ludentem, et radiis fere in ipſum Zenith eleuatis; teſtatur vero ſimul, *plagam occidentalem, licet nullis radiis*, directis ſcilicet, reflexi enim non impediebantur,

tur, *aut arcu lucido conſpicua fuerit*, *luce tamen neſcio quadam* inconſueta oculos feriiſſe. Similis rubedo viſa fuit hic Decembris 22; ſed Kirengenſe coelum nubibus obtectum fuit, adeoque eandem cauſam, vti etiam hic factum eſt, nebulis abſcondidit. Similis rubedo coeli, orta ex eadem hac cauſa, obſeruata fuit Vpſaliae, anno 1726 d. 8. Octobris, ſt. v. memorante Clariſſ. *Er. Burman* in Actis Literariis Sueciae ad annum 1727 p. 256.

§. 19. Sexto denique neſcio annon nimis ſim audax, ſi ex comparatione Obſeruationum Kirengenſium et Petropolitanorum aliquid de ventorum celeritate ſtatuere velim. Anno 1737 d. 10 Octobris mane hora 8 notatum apud me reperio Zephyrum cum violentia 3, cum praecedens veſpera a ventis plane quieta fuiſſet. Ponam itaque ventum hunc apud nos coepiſſe hora 6 a. m. coepit ergo in tempore Kirengenſi $11^h 9'$ a. m. ſed diſerte notatum eſt a Clar. Gmelino, incepiſſe ibi furere Zephyrum violentia magna $8' 30'$ p. m. cum antea ventus modicus eſſet ex plaga Cephyro-Auſtrali. Sin ergo ponam eundem ventum noſtri aëris continuo motu illuc delatum eſſe, ſequitur abſoluta eſſe ab eo 580 milliaria Germ. tempore $9^h 21'$. Efficiunt autem haec 580 milliaria Werſtas 4060, hoc eſt pedes Londinenſes 14210000; ergo ſtante hypotheſi noſtra idem ventus fortiſſimus ſpatio vnius minuti ſecundi abſoluit 422 pedes Londinenſes, quod ſpatium eidem tempori debitum communiter non niſi 50 pedum Authores ſtatuunt.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE ANNI 1739.

AVCTORE

Georgio Wolffg. Krafft.

§. 1.

Currente hoc anno 1739 obſeruatae fuerunt a me altitudines Barometri ſingulis menſibus, maximae et minimae, ſequentes, in quibus numeri ante punctum poſiti denotant partes duodecimas, ſiue pollices, pedis Londinenſis, numeri autem poſt punctum poſiti denotant horum pollicum partes centeſimas, quam diuiſionem in praecedentibus quoque adhibui obſeruationibus

1739	Ianuarius	— 30 . 01	— 28 . 48	— 1 . 53
	Februarius	— 29 . 88	— 28 . 60	— 1 . 28
	Martius	— 30 . 13	— 28 . 68	— 1 . 45
	Aprilis	— 30 . 09	— 29 . 05	— 1 . 04
	Maius	— 30 . 12	— 29 . 18	— 0 . 94
	Iunius	— 29 . 80	— 29 . 08	— 0 . 72
	Iulius	— 29 . 80	— 29 . 31	— 0 . 49
	Auguſtus	— 29 . 87	— 29 . 30	— 0 . 57
	September	— 30 . 21	— 29 . 05	— 1 . 16
	October	— 30 . 24	— 29 . 45	— 0 . 79
	Nouember	— 30 . 08	— 28 . 77	— 1 . 31
	December	— 30 . 36	— 29 . 23	— 1 . 13

§. 2.

§. 2. Apparet ex his altitudinibus Barometri earum maximam hoc anno fuisse 30. 36, quae obseruata fuit die 7 Decembris in perfecta serenitate aliquot dierum, spirante leni Austro-Euro, cum frigore summo; quia vero haec altitudo maxima illam quae anno 1737 obseruata fuit, nempe 30. 95, non excedit; haec adhuc dum maxima omnium hic loci obseruatarum manet. Minima autem Barometri altitudo hoc anno fuit 28. 48, quae extitit die 6 Ianuarii, coelo nubilo aliquot dierum, flante adhuc leui Austro-Euro, frigore mediocri. Quae igitur minima altitudo huius anni cum in praecedentibus annis inuentam, nempe 28. 18, superet: manet adhuc idem spatium variationum Barometricarum, antea stabilitum, nempe 2. 77: suntque adhuc variationes menstruae in primis et vltimis anni mensibus maiores, minores autem in mediis.

§. 3. Auroras Boreales hoc anno obseruaui sequentes.

1739	Ianuarii	19	in perfecta Serenitate aderant vestigia lucis Borealis aëre tranquillo, quam nubes tenues secutae sunt.
		21	in aliqua serenitate iterum aderant vestigia tantum lucis Borealis, aëre tranquillo, quam iterum nubes secutae fuerunt.
	Febr.	16	in aliqua serenitate aderat lux Borea, trabe rubra vna, et quibusdam aliis albis conspicua, subsequente perfecta serenitate.

1739

pro *m* in hac formula, $212 - \frac{6m}{5}$, quia illius gradus 0 et 150 respondent huius gradibus 212 et 32. In sequente die 25 Iulii idem fere calor rediit, nempe graduum $112\frac{5}{10}$, quo die Thermometrum libero soli expositum hora $2\frac{1}{2}$ p.m. monstrauit tandem gradum 91, vel Fahrenheitianum 103, quo etiam die grauis tempestas cum imbre vehementi ingruit. Maximum vero frigus obtinuit die 1 Decembris, ostendente Thermometro in ipso meridie gradum $176\frac{5}{10}$, qui congruit cum Fahrenheitiano $0\frac{1}{3}$, flante mediocri Euro, in serenitate aliquot dierum.

§. 8. Tonitrua hoc anno audita fuerunt diebus sequentibus, Maii 30, cum pluuia et vehementi Zephyro hora 8 p. m. Iunii 5 sine pluuia; 19 cum imbre subito et breui, 21 sub iisdem circumstantiis, 26 orta est grauis tempestas, cum imbre vehementi et vento fortissimo ex plaga Zephyro-Australi. Iulii 15 cum pluuia, 17 cum pluuia breui, redeuntibus tonitruis circa vesperam, 19 cum imbre vehementi, 21. 22. 23. aëre semper nubilo et pluuio, 25 oriebatur grauis tempestas et imber vehemens, flante fortissimo Borea-Zephyro per horae spatium, 27 toto tempore antemeridiano, cum forti pluuia, 30 inter pluuias. Augusti 10 cum forti pluuia, praecedente et redeunte serenitate, 19. 22 cum pluuiis, 24 insequente Aurora Boreali. Septembris 5 post pluuiam; quibus adiungo, primas hirundines mihi visas fuisse, d. 4 Maii.

§. 9. Pluuias et Niues aestimatione tantum perpendens inuenio in hoc anno dies 61 integros pro pluuiosis et niuosis esse habendos, atque mensium habita ratione Ianua-

Ianuarium niuium fuiſſe feraciſſimum. Fluuii noſtri Neuae tumores experti ſumus Ianuarii 9, quo die flante fortiſſimo Auſtro-Zephyro inundatio magna extitit, quae coepit hora matutina ſexta, 24. Iunii 15. Septembis 2.

§. 10. Procellas experti ſumus diebus ſequentibus, Ianuarii 2. 8. 9 cum inundatione, 17. 18. Martii 27. Iunii 15 cum egreſſu fluuii, 26 cum graui tempeſtate, Septembris 2.

§. 11. Reliqua, quae referri huc debent, comprehendam ſequentibus. Februarii 17 hora 11 p. m. Halo Lunaris obſeruatus fuit breui tempore durans, cum coelum per multos antea dies ſerenus, nec niſi nebulis quolibet fere mane obortis turbatum, nubibus obduci inciperet, cadente Barometro, et tandem biduo poſt inſecuta niue copioſa. Aprilis 27 hora 4 p. m. viſa fuit Iris duplex poſt ſubitas pluuias cadente Barometro obortas. Octobris 30, in perfecta ſerenitate, obſeruati fuerunt vapores e fluuio aſcendentes ita copioſi, vt nebulae inſtar aquae ſoli inſiderent, toto die durantes, circa meridiem autem tenuiores redditae; quod idem quoque accidit Nouembris 1. Reliquae nebulae terram occupantes hoc anno fuerunt Ianuarii 24. 31. Februarii 7. 9. 13. 14. 16. 17. Martii 9. 12. 22. Aprilis 3. 4. 7. 10. 20. Iunii 28. Iulii 11. 13. 14. 21. Auguſti 15. 17. 21. 22. Septembris 12. 15. 24. 26. 27. Octobris 3. 7. 21. Nouembris 9. 16 18. Decembris 4. 7. 22. De ventis quoque id adhuc obſeruandum eſt, accidiſſe huius anni die 13 Nouembris, quod ſilentibus iis per plures dies, hoc die circa horam 8. a. m. coeperit ſpirare Auſtro-Zephyrus ſatis fortis, remittens vero aliquid de vi ſua circa horam 1. p. m. pluuiis et

niuibus

niuibus interea mixtim cadentibus; hora autem 8. p. m. ſubito mutatus is eſt in Boream fortem et increſcentem, qui, ceſſante omni pluuia et regelatione, niuem copioſam attulit, dum toto die Barometrum caderet, poſtero vero die aſcenderet iterum, cum frigore mediocri ſed increſcente. Illud denique praeterire non poſſum, quamuis praefiſcine id dictum velim, accidiſſe a menſis Nouembris die 17 vsque ad 24, vt continua regelatio regnaret; ſed cum die 24 celebrata fuiſſet ☍☉♂, ſubito mutatum eſſe aërem, vt frigus eo ipſo die auctum fuerit, et die 26 vsque ad gradum 15 Thermometri Fahrenheitiani peruenerit.

§. 12. Referam nunc annotationes quosdam ad rem Meteorologicam forſan non inutiles, quos e Diario ſimilium obſeruationum a Clariſſ. Gmelino in itinere verſus Kamtſchatkam verſante ſummo ſtudio factas, et ab Academia mecum communicatas deprompſi. Fertilior enim in hoc ſtudii genere ſemper eſt ſeges ea, quae alienis ipſa ſe adauget herbis; et falcem in propriam et peregrinam ſimul immittit meſſem; quippe quae compilatio horrea Meteorologiae ſola ditat. Factae ſunt obſeruationes, quas in vſum nunc meum vertam, in Kirengenſi munimento, ad confluentem fluuiorum Kirengae et Lenae ſito, ab Octobris 1. 1737 ad 28 Febr. 1738. Latitudo huius munimenti ex recentiſſimis Mappis Geographicis deſumta inuenitur $57°\frac{1}{8}$, et diſtantia inter illud et Petropolin reperitur milliarium Germanicorum iuxta Homannum 525, iuxta Stralenbergium $577\frac{1}{2}$, iuxta Kirilouium vero $637\frac{1}{8}$, quorum aſſumam medium 580 dictorum milliarium, quae in parallelo 60 graduum efficiunt quam proxime differentiam

tiam miridianorum Petropolitani et Kirengensis 5^h $9'$. Quibus praemonitis sequentia deduxi ex istis obseruationibus Corollaria.

§. 13. Primo quidem Kirengae altitudo maxima Barometri in hoc quadrimestri tempore fuit partium millesimarum pedis Regii Parisiensis 2770 Decembris 10, 1737, coelo sereno per aliquot dies. Minima autem fuit Decembris 26, 1737, et Februarii 14, 1738, nempe 2627 dictarum partium, coelo niuoso, et flante Zephyro cum vi summa, vtraque vice. Harum altitudinum differentia, siue variatio Barometri quadrimestris, ergo ibi fuit 143 partium earundem. Hic vero loci obseruata fuit eodem durante tempore variatio Barometri $2\frac{69}{100}$ pollicum duodecimalium pedis Londinensis, qui coincidunt cum 224 partibus millesimis huius pedis, quae, posita ratione inter pedem Parisinum et Londinensem vti 16 ad 15, efficiunt 210 partes millesf. pedis Parisini. Itaque in hoc spatio quadrimestri variatio Barometri Petropolitana maior fuit quam Kirengensis.

§. 14. Secundo maximum frigus Kirengae obseruatum fuit die 9 Ianuarii 1738, notante Thermometro Delisliano gradum 275, qui congruit cum Fahrenheitiano — 118, siue 118 infra 0; quod frigus sane ingens fuit; cum omni adhibito artificio, ope nimirum spiritus nitri adeo frigefacti vt gelari inciperet, Fahrenheitianum Thermometrum non potuerit magis deprimi quam ad gradum 40 infra 0, vel ad gradum 210 nostri Thermometri, vti apparet ex *Elementis Chemiae Boerhauianis pag.* 162 *Tomi I.*

§. 15. Tertium eſt, quod in eodem Thermometro Kirengenſi prorſus inexſpectatum accidit, mutatio nempe adeo ſubita, vt aſcenſus mercurii oculis diſtingui potuerit. Nam Nouembris 27, 1737, erat illud Thermometrum tempore matutino in gradu 218, tempore meridiano in gradu 270, qua obſeruatione vix conſignata cum denuo accurreret Clar. Gmelinus ad Inſtrumentum, iam illud notabat 265, et continuo ipſo praeſente et adſtante altius aſcendit, donec poſt effluxum ſemihorii oſtenderet 195, et veſperi hora 11 monſtraret 176. Eodem hoc tempore ventorum mutatio ſequens obſeruata fuit. Die Nouembris 25 deſinebat ſpirare Boreas, diebus 26 et 27 nullus erat ventus; d. 28 vero hora 4 matutina flare coepit Auſter cum vi ſumma, ſecutae ſunt eodem die niues minutae humidae, cadente Barometro, incaluitque aër poſt aliquot dies vſque ad gradum 163. Idem hoc phaenomenon accidit quoque 1737 Decembris 11, vt nempe Thermometrum circa horam 3 p. m. tempore 13 minutorum primorum a gradu 252 ſubito et continuo motu aſcenderit ad gradum 210, hoc eſt per 42 gradus. Venti eodem quo antea modo ſe habuerunt. Erat enim diebus 9^b, 10, et 11, nullus ventus, die vero 12 primo mane exoriebatur vehementiſſimus Zephyrus, Barometro cadente, et inſequente tempeſtate calida aliquot dierum vſque ad gradum 168.

§. 16. Huius quidem vtriusque inconſueti phaenomeni cauſa ex eo mihi deriuanda eſſe videtur, quod in vtroque caſu vehementes et ſubiti venti exorti fuerint. Cum enim durante primo aſcenſu, hoc eſt, Nouembris 27 hora 11 p. m. nullus ventus ſpiraret, et deinde poſt me-

diam

diam noctem insequentem procellosus Auster insurgeret: concludere licet, hunc ventum e terris versus Austrum sitis egressum iam tum initium sumsisse cum praecipiti ascensu Thermometrum variatum fuit, atque primum quidem aëri Kirengensi vicinorumque regionum magnam vim vaporum humidorum et calidorum infudisse, qua is subito incalescebat; hac itaque vaporum accumulatione aëri permixda Thermometrum multo citius affectum fuisse, quam motus ipse aëri Kirengensi potuerit imprimi, vt et is omnis eadem directione et celeritate, quam incurrens aër, tandem latus fuerit, quod post 5 circiter horas demum factum est. Idem de altero casu iudicium ferri poterit, quo aliquot post phaenomenon horis vehemens Zephyrus exoriebatur. Cum enim eo, et multis praecedentibus diebus constans regelatio Petropoli, et sine dubio etiam in locis Kirengam inter et Petropolin iacentibus sentiretur: etiam hoc casu fieri potuit, vt excitatus in loco occidentaliori ventus subitus aërem Kirengensem maxima humidorum et calidorum humorum copia inundauerit, atque ea ascensum subitum Thermometrorum prius effecerit, quam violentus is motus toti aëris Kirengensis massae conciliaretur.

§. 17. Quarto vt aliquid etiam de ratione directionis ventorum in tanta distantia 580 milliarium Germanicorum innotescat, apponam eorum aliquot exempla:

			Kirenge		Petropoli
Octobris	10	—	W 4	—	W 4
	14	—	W 4	—	0 0
	20	—	W 4	—	0 0
	24	—	W 4	—	W 3

Nouembris 18	—	W 4	—	S	1
20	—	W 4	—	S	3
Decembris 19	—	W 4	—	O	2
23	—	W 4	—	O	2
24	—	W 4	—	O	2
26	—	W 4	—	o	o

Ex his deduci poteſt, probabile eſſe dari quandoque Zephyrum, qui ex hac regione noſtra vſque ad Kirengam, et multo longius, continuo tractu feratur, adeoque milliaria forſan 600 aut 700 peruagetur, quod ex Octobris 10, 24, apparet. Illud enim praetereo, quod in tanto locorum interuallo diuerſi et directione et impetu venti exiſtere poſſint, quippe quod in locis etiam multo minus diſtantibus ſaepiſſime obſeruatum fuit.

§. 18. Quinto, quod phaenomenum die 5 Decembris 1737 apud nos conſpicuum in Diario Meteorologico praecedentis anni retuli, rubedo nimirum coeli inconſueta, et multorum ſpectatorum animos terrens, de qua etiam in Nouis publicis mentio facta eſt, viſam eam fuiſſe aliquibus in locis ſimul cum globo igneo in aëre diſrupto: eius iam cauſa vera, quae eo tempore in ſuſpicionem tantum veniebat, nunc nobis conſtat. Cum enim rubedo haec fortiſſime appareret apud nos circa horam 10 nocturnam, hoc eſt, in tempore Kirengenſi die 6 Decembris circa horam 3 matutinam, (§. 12.) refert Clariſſ. Gmelinus die 6 Decembris hora circiter 1 poſt mediam noctem ibi viſam fuiſſe magnam Auroram Borealem, rubro colore ludentem, et radiis fere in ipſum Zenith elevatis; teſtatur vero ſimul, *plagam occidentalem, licet nullis radiis*, directis ſcilicet, reflexi enim non impediebantur,

tur, *aut arcu lucido conſpicua fuerit*, *luce tamen neſcio quadam* inconſueta oculos feriiſſe. Similis rubedo viſa fuit hic Decembris 22; ſed Kirengenſe coelum nubibus obtectum fuit, adeoque eandem cauſam, vti etiam hic factum eſt, nebulis abſcondidit. Similis rubedo coeli, orta ex eadem hac cauſa, obſeruata fuit Vpſaliae, anno 1726 d. 8. Octobris, ſt. v. memorante Clariſſ. *Er. Burman* in Actis Literariis Sueciae ad annum 1727 p. 256.

§. 19. Sexto denique neſcio annon nimis ſim audax, ſi ex comparatione Obſeruationum Kirengenſium et Petropolitanorum aliquid de ventorum celeritate ſtatuere velim. Anno 1737 d. 10 Octobris mane hora 8 notatum apud me reperio Zephyrum cum violentia 3, cum praecedens veſpera a ventis plane quieta fuiſſet. Ponam itaque ventum hunc apud nos coepiſſe hora 6 a. m. coepit ergo in tempore Kirengenſi $11^h\,9'$ a. m. ſed diſerte notatum eſt a Clar. Gmelino, incepiſſe ibi furere Zephyrum violentia magna $8^h\,30'$ p. m. cum antea ventus modicus eſſet ex plaga Cephyro-Auſtrali. Sin ergo ponam eundem ventum noſtri aëris continuo motu illuc delatum eſſe, ſequitur abſoluta eſſe ab eo 580 milliaria Germ. tempore $9^h\,21'$. Efficiunt autem haec 580 milliaria Werſtas 4060, hoc eſt pedes Londinenſes 14210000; ergo ſtante hypotheſi noſtra idem ventus fortiſſimus ſpatio vnius minuti ſecundi abſoluit 422 pedes Londinenſes, quod ſpatium eidem tempori debitum communiter non niſi 50 pedum Authores ſtatuunt.

OBSERVATIONES METEOROLOGICAE ANNI 1739.

AVCTORE

Georgio Wolffg. Krafft.

§. 1.

Currente hoc anno 1739 obſeruatae fuerunt a me altitudines Barometri ſingulis menſibus, maximae et minimae, ſequentes, in quibus numeri ante punctum poſiti denotant partes duodecimas, ſiue pollices, pedis Londinenſis, numeri autem poſt punctum poſiti denotant horum pollicum partes centeſimas, quam diuiſionem in praecedentibus quoque adhibui obſeruationibus

1739	Ianuarius	— 30 . 01	— 28 . 48	— 1 . 53
	Februarius	— 29 . 88	— 28 . 60	— 1 . 28
	Martius	— 30 . 13	— 28 . 68	— 1 . 45
	Aprilis	— 30 . 09	— 29 . 05	— 1 . 04
	Maius	— 30 . 12	— 29 . 18	— 0 . 94
	Iunius	— 29 . 80	— 29 . 08	— 0 . 72
	Iulius	— 29 . 80	— 29 . 31	— 0 . 49
	Auguſtus	— 29 . 87	— 29 . 30	— 0 . 57
	September	— 30 . 21	— 29 . 05	— 1 . 16
	October	— 30 . 24	— 29 . 45	— 0 . 79
	Nouember	— 30 . 08	— 28 . 77	— 1 . 31
	December	— 30 . 36	— 29 . 23	— 1 . 13

§. 2.

§. 2. Apparet ex his altitudinibus Barometri earum maximam hoc anno fuisse 30. 36, quae obseruata fuit die 7 Decembris in perfecta serenitate aliquot dierum, spirante leni Austro-Euro, cum frigore summo; quia vero haec altitudo maxima illam quae anno 1737 obseruata fuit, nempe 30. 95, non excedit; haec adhuc dum maxima omnium hic loci obseruatarum manet. Minima autem Barometri altitudo hoc anno fuit 28. 48, quae extitit die 6 Ianuarii, coelo nubilo aliquot dierum, flante adhuc leui Austro-Euro, frigore mediocri. Quae igitur minima altitudo huius anni cum in praecedentibus annis inuentam, nempe 28. 18, superet: manet adhuc idem spatium variationum Barometricarum, antea stabilitum, nempe 2. 77: suntque adhuc variationes menstruae in primis et vltimis anni mensibus maiores, minores autem in mediis.

§. 3. Auroras Boreales hoc anno obseruaui sequentes.

1739	Ianuarii	19	in perfecta Serenitate aderant vestigia lucis Borealis aëre tranquillo, quam nubes tenues secutae sunt.
		21	in aliqua serenitate iterum aderant vestigia tantum lucis Borealis, aëre tranquillo, quam iterum nubes secutae fuerunt.
	Febr.	16	in aliqua serenitate aderat lux Borea, trabe rubra vna, et quibusdam aliis albis conspicua, subsequente perfecta serenitate.

1739

1739 Febr. 25 in perfecta ſerenitate, poſt niuem turbulentam conſpiciebatur lux Borea, arcu pallido, ſed virgis et ſaculis praedita, flante violento Borea-Zephyro et continuata ſerenitate.

28 iterum in perfecta ſerenitate apparuit lux Borea debilis, flante vehementi Borea-Zephyro, et manente ſerenitate.

Martii 1 erat lux Borea, virgis inordinatis ludens, in perfecta ſerenitate, flante Zephyro ſequente niue copioſa.

2 in perfecta ſerenitate, veſperi oborta, apparuit lux Borea debilis, inſequente niue.

3 denuo aderat lux Borea debilis, in perfecta ſerenitate, flante Auſtro, inſequente nebula inſigni.

4 adhuc apparuit lux Borea debilis, in perfecta ſerenitate, flante forti Auſtro, et inſequente niue turbulenta.

18 apparuit lux Borea nubibus permixta, Ratisbonae quoque viſa, teſtantibus nouis publicis, flante admodum tenui Euro.

30 in perfecta ſerenitate, flante forti Borea, apparuit lux Borea, confuſis virgis in Zenith aſcendentibus.

Aprilis 20 in ſerenitate fere integra, flante tenui Auſtro, conſpiciebatur lux Borea, in toto Horizonte, praeter eas plagas quas crepuſculum occupat, virgis aſcendentibus manifeſta.

1739

1739 Augusti 17 in perfecta serenitate, spirante nullo vento, apparuit lux Borea fortis, quam nubes et pluuiae insequebantur.

20 iterum in perfecta serenitate aderat lux Borea humilis.

26 in multa serenitate aderant vestigia Lucis Borealis.

29 Vestigia Lucis Borealis in serenitate perfecta.

Sept. 12 in perfecta serenitate comparuit lux Borea, multis virgis oblongis, et prope Zenith polum formantibus, conspicua.

16 vestigia Lucis Borealis, insequente pruina et leui glacie.

17 lux Borea mediocris.

Dec. 22 flante forti Borea Zephyro, inter nubes visa est lux Borea, antecedentibus praecedente die coruscationibus versus Austro-Zephyrum, et insequente niue.

23 lux Borea in perfecta serenitate.

§. 4. Prima congelatio facta est hoc anno d. 6 Octobris, coelo nubilo, nullo vento spirante. Contigit ergo haec prima congelatio die plenilunium insequente, et in quo simul erat □ ☉ ♄.

§. 5. Maximum frigus huius anni incidit in d. 7 Decembris, monstrante Thermometro meo in libero aëre hora 10 nocturna 188 gradus, siue $13\frac{3}{5}$ gradus frigoris Thermometro Fahrenheitiano, in perfecta serenitate aliquot dierum, flante leui Austro-Euro. Praeterea quoque

d. 5 Februarii frigus ita intensum regnabat, vt spiritus vini Gallicus ordinarius, per noctem libero aëri expositus, crusta forti glaciali obduceretur, infra quam crustam reliquum spiritus quasi coagulatum erat, instar cerae mollis.

§. 6. Tonitrua hoc anno audita fuerunt diebus sequentibus: Aprillis 26 die nouilunii, cum pluuia subita et breui, flante tenui Austro-Zephyro. Maii 7 cum pluuia forti. Iunii 23 cum imbre subito et forti, flante leui Zephyro. Iunii 27 sine pluuia et vento. Iunii 29 cum pluuia forti. Iunii 30 pluente adhuc coelo. Iulii 13 cum breui pluuia, Augusti 1 cum pluuia modica, Augusti 25 cum imbre longo. Decembris 21 coruscationes solae versus Austro-Zephyrum animaduersae sunt, flante forti Zephyro, in sequente simul altero die luce Borea. Primas quoque hirundines, vt etiam hoc adiiciam, vidi Aprilis 30, aëre existente perfecte sereno, et ad gradus 46 Thermometri Fahrenheitiani calente.

§. 7. Pluuias et Niues aestimatione tantum perpendens, inuenio, in hoc anno dies 45 integros pro pluuiosis et niuosis esse habendos, atque mensium habita ratione Iunium pluuiarum fuisse feracissimum. Fluuii nostri Neuae tumores experti sumus Iulii 10 flante vehementi Austro-Zephyro et Octobris 26 flante leniter eodem vento.

§. 8. Ventos vehementes experti sumus diebus sequentibus: Ianuarii 5. 25. 26. 27. 31. Febr. 1. 2. 13. 14. 16. 18. 22. 23. 24. 25. 26. 28. Martii 5. 6. 10. 12. 15. 19. 30. Aprilis 16. 17. 18. 19. 22. 27. Maii 2. 3. 8. 14. 19. 22. 26. 27. 28. Iunii 4. 14.. Iulii 5. 10. 14. 15. 28. Augusti 9. 11. 20. 22. 23. Sepsembris 13. 30. Octobris 1. 8. 9. 11. 14. 27. 28. 29. Nouembris 15.

15. 16. 17. 23. 24. 25. Decembris 2. 10. 11. 12. 19. 21. 22. 24. Procellas autem Februarii 14. Martii 6. Aprilis 17. 18. 19. Maii 28. Iulii 14. Octobris 11.

§. 9. Cum Iulii 24 huius anni esset Eclipsis solis visibilis apud nos fere totalis, 11 nimirum digitorum, durante illa attendi quoque ad Thermometrum et Barometrum atque sensibilem in vtroque mutationem deprehendi, quam sequenti laterculo ob oculos ponam:

Iulii 24.	1^h	0′	p. m. —	123, 0 —	29.	69	
	5	6	— — —	122, 0 —		70	Initium
		55	— — —	122, 0 —		70	
	6	10	— — —	122, 8 —		70	
		14	— — —	123, 0 —		70	Med.
		20	— — —	122, 7 —		70	
		30	— — —	122, 8 —		70	
		50	— — —	123, 0 —		68	
	7.	17	— — —	123, 0 —		68	Finis
		30	— — —	124, 0 —		68	
	10	25	— — —	125, 9 —		70	

coelum toto hoc die, post Eclipsin quoque, erat perfecte serenum, flante tenui Zephyro. Apparet itaque ex his numeris, calorem aëris incrementum cepisse a meridie ad horam 5, qua incipiebat solis deliquium; quo properante versus medium descendit Thermometrum successiue vno gradu; versus finem deinde vergente Eclipsi, iterum ascendit, et denique restituta luce rursus descendit a frigore vespertino; vnde certum est, aërem ab Eclipsi hac frigus aliquod contraxisse, respondens $1\frac{1}{2}$ gradui Thermometri Fahrenheitiani. Quod idem primo obseruatum

 fuit

fuit ab Academia Scientiarum Parisiensi; in Eclipsi solari anno 1666 Iulii 2; postea in Eclipsi solis totali, cum mora; anno 1706, Maii 12, a Clar. I. H. Hoffmanno, testantibus Miscellaneis Berolinensibus, editis 1710, p. 227 et denique a Clar. Delisle, Iuniori, in Commentar. Acad. Scient. Paris. ad annum 1715. Apparet quoque, Barometrum circa finem Eclipseos per $\frac{1}{10}$ pollicis Londinensis duodecimalis descendisse; et postea ad pristinam altitudinem ascendisse. Caeterum circa medium huius Eclipsis Lens caustica diametri 6 poll. phases Eclipseos accuratissime in chartam proiecit, sed luce ita debili, vt imaginem sui chartae etiam nigrae non inureret; et lucis in aëre decrementum parum sensibile fuit etiam in maxima obscuritate solis.

§. 10. Haud incongruum fore puto, si hoc loco mentionem quoque faciam Instrumenti alicuius noui, Meteorognosiae inseruientis, cuius ope sciri possit, quemnam thermometri gradum frigus maximum attigerit in loco aliquo qui obseruatore quotidiano destitutus sit. Relinquatur enim tale Instrumentum ex gr in Noua-Sembla, saxo vel arbori affixum, a nautis in autumno hanc regionem deserentibus, poterit ope eius ab iisdem, futura aestate redeuntibus, cognosci, quemnam gradum frigus elapsae hyemis praeteritae maximum attigerit. Adhibeo autem huic scopo formam Thermometri vulgaris Drebbeliani, sed ita formati, vt in tubulo, in quo liquor ascendit et descendit, ad latus vnum efficiantur plura foraminula parua, in sacculos vitreos prominentes, et deorsum inclinatos *a*, *b*, *c*, *d*, etc. hiantia, quales tubi, vt experientia didici, haud adeo difficulter ab artificibus peritis conflari possunt. Si enim
Tab IV. Fig. 3.

in

in frigore aliquo vehementi liquor ascendat vsque ad *b*, implebuntur eo omnes sacculi vsque ad *b*, et impleti manebunt, etiamsi postea cessante gelu liquor iterum descendat; sin postea oriatur vehementius frigus; pari modo replebitur sacculus *a*, praeter praecedentes, vt ita is, qui supremus inter repletos, finita hyeme, deprehendatur, indicium satis accuratum de intensitate frigoris in tali loco maximi praebere possit, etsi, quod diffitendum non est, hoc Instrumentum expositum quoque sit vitio Thermometri Drebbeliani ordinario, pressioni nempe atmosphaericae. Si denique timendum sit ne liquor ordinarius, his Thermometris adhiberi solitus, congeletur, in eius locum poterimus mercurium substituere. (*)

(*) Instrumentum modo descriptum excogitaui Ao. 1740. cum in *Academia Scientiarum Petropolitana* adhuc versarer, eiusdemque aliquod exemplum confici curaui, quod inter instrumenta Physica eiusdem Academiae asseruatur, *Camera F. Diuis. VII. No.* 43; inscius plane idem tale thermometrum propositum fuisse ab *Ill. Ioh. Bernoullio*, iam anno 1698. in Epistola ad *G. G. Leibnitium* sub titulo Thermometri *calorem praeteritum indicantis*, cuius descriptionem legi in *Virorum celeberr. Leibnitii et Ioh. Bernoulli Commercio Philosophico et Mathematico*, *Tomo I. pag.* 373. quod insigne opus editum est demum anno hoc 1745. Qua igitur innocentia mihi hoc inuentum attribui primum: simili nunc, candore illud Illustri huic suo Auctori meliora edoctus, lubentissime totum assero, nihi'que ex hac laude mihi decerptum cupio; excelsa tanti viri in res Physicas atque Mathematicas, merita, ex hac etiam parte, impense veneratus. Scripsi Tubingae d. 12. Iul. 1745.

SCHEDIASMA DE VENTORVM OBSERVATIONE QVOTIDIANA, PER INTEGRVM AMPLISSIMVM IMPERIVM RVSSICVM, INSTITVENDA, CVM MAXIMO SCIENTIAE METEOROLOGICAE EMOLVMENTO.

AVCTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Tab. IV. Nondum elapsum est seculum, ex quo celebris ille Guerikius, obseruata casu quodam mercurii in tubo Toricelliano inconstanti altitudine, ansam praebuit Barometrorum obseruationi quotidie instituendae. Est enim is primus qui detexit hanc altitudinem mercurii in tubo Toricelliano sustentati, et libero aëri expositi, indies mutari, et consequenter per hanc altitudinis suae mutationem indicare, quod variis temporibus et diebus vario etiam pondere integra aëris atmosphaera premat telluris superficiem. Quam primum itaque elegans hoc inuentum orbi erudito innotuit, factum est, vt quam plurimi his obseruationibus quotidie cum cura instituendis solicite incubuerint, ita vt earum catalogus hodie in ingentem cumulum accreuerit, et quotidie adhuc maiora capiat incrementa.

§. 2. Circa idem fere tempus ad maiorem etiam perfectionis gradum euecta fuerunt Thermometra. Haec, vti notum est, a Cornelio Drebbelio, Batauo, primum inuenta, sed multis naeuis adhuc laborantia, ab Academicis

micis Florentinis emendata fuerunt. Quoniam itaque et in his libero aëri expositis mutatio insignis singulis diebus obseruata fuit: accessit priori Barometrorum obsernationi etiam horum Thermometrorum inspectio quotidiana, quae effecit, vt hodie non minori Thermometricarum quam Barometricarum obseruationum numero gaudeamus, in variis terrae locis institutarum.

§. 3. Praetereo reliqua Instrumenta, quae ad aëris nostri atmosphaerici varias et mutabiles qualitates deprehendendas successu temporis excogitata fuerunt; qualia sunt Hygrometra, quae aëris humiditati aut siccitati; Manometra, quae eiusdem aëris densitati vel grauitati specificae, quam quouis tempore tenet, cognoscendis inseruiunt; quorsum pertinent quoque Hyetometra, quibus pluuiarum cadentium quantitas, Anemometra, quibus ventorum spirantium vis et vehementia, aestimari et mensurari solent; quoniam ea partim ob ipsorum imperfectionem, partim etiam ob difficilem elaborationem, neglecta fere hucusque fuerunt, et rariores cum iis institutae obseruationes occurrunt.

§. 4 Haec Instrumenta, cum quodlibet eorum seorsim ad scientiae Meteorologicae emendationem inuentum fuerit, atque palam sit, ea omnia coniuncta huic eidem scientiae propagandae esse quam aptissima, si et omni adhibita circumspectione construantur, et deinde cum dexteritate ad vsus suos vocentur; vt adeo vere dici queat, nos ad Meteorologiae principia stabilia ponenda Instrumentis idoneis non destitui; haec, inquam, Instrumenta quid vtilitatis huic scientiae attulerint, si quis quaerat, responderi certe possunt sequentia.

§. 5.

§. 5. Barometrorum vſus 1. inſeruit ad cognoſcendum illud pondus atmoſphaericum, quo quauis hora et die pars aliqua ſuperficiei terreſtris premitur; 2. praeuideri poteſt, ex eorum lapſu aut aſcenſu ſubito, exoriturum eſſe ventum aliquem vehementem, ſed quis aut qualis ille futurus ſit, profunde ignoratur; 3. ſi altiorem teneat in ſe mercurium ſuſpenſum, quam ordinarie fieri ſolet, ſerenitatem conſpicimus vtplurimum, ſed praedicere eam vix poſſumus; 4. ſcimus etiam variationes eius maiores eſſe in locis ſeptentrionalibus quam verſus meridiem ſitis; 5. ope eius montium altitudines metiri vt cunque didicimus; ſi vero alii praeterea quidam harum machinarum vſus ſunt, illi certe, aeque vt hi iam allegati, ita comparati ſunt, vt tempeſtatum et mutationum aëris in poſterum futurarum ne minima quidem exinde hauriri poſſit ſuſpicio. Quod idem cum et magis adhuc de Thermometro, et reliquis Inſtrumentis Meteorognoſiae inſeruientibus, affirmari debeat: apertum aſt, detectas quidem eſſe ope horum Inſtrumentorum veritates phyſicae cognitioni aëris perutiles, neque eas parui momenti habendas, ſed nec adhucdum ita comparatas eſſe, vt Theoriae alicui praeſpiciendarum tempeſtatum et mutationum aëris vtiles eſſe poſſint; ſic vt omnis vtilitas in iis iam fere ſit exhauſta, omnisque ex iis, quem praebere poſſunt, ſuccus iam videatur expreſſus, vtque hinc vtraeque obſeruationes, et Barometricae et Thermometricae, incipiant hodie inter eruditos aliquantum vileſcere.

§. 6. Quodſi in cauſas inquiramus, quare factum ſit hucusque, vt ope horum Inſtrumentorum, nullo fere amplius defectu laborantium, nondum tamen illud aſſecuti ſimus, quod

quod folicite femper quaefitum fuit, praedictionem fcilicet tempeftatum et mutationum aëris: eas non tam in harum tempeftatum mira et inconftanti varietate, quam in methodo has obferuandi, quaerendas effe mihi videtur. Aeque enim multiplex et varia fideribus cunctis, eorumque motibus ineft inconftantia, quam tamen feliciter hodie ad certas et conftantes leges reuocarunt Aftronomi; cuius euentus, qui illuftris exempli loco in hoc noftro negotio effe poteft, nullas alias reperio rationes, quam quod 1. fiderum obferuationes ab antiquiffimis temporibus ad noftram aetatem peruenerunt; 2. cura maxima habetur in Inftrumentis ad has obferuationes Aftronomicas inftituendas exactiffime elaborandis; 3. Regum et fummorum Imperantium et iuffus et clementia huic Scientiae prouehendae fere nunquam defuerunt; 4. Omnium obferuatorum Aftronomicorum in toto terrarum orbe eft quidam quafi mutuus nexus, quo deuincti inter fe magnam quandam focietatem conftituere videntur, quae in vno eodemque fcopo obtinendo coniunctim laborat. Ad horum mediorum primum quidem recens aetas fcientiae meteorologicae, et eius quafi iuuentus, hodie nos non admittit; in fecundo defiderari quid poffe, quod fundamentis faltim Meteorognofiae ponendis magis fauere poffit, vix video; tertium vero et quartum nulla aetate atque in nulla regione fperari atque exfpectari confidentius poteft, quam in hac noftra, qua munificentia Auguftae Imperatricis noftrae, atque iuffibus etiam et exhortationibus Eius ad fublimia et hactenus incognita quaeuis inueftiganda non inuitamur tantum indulgentiffime, fed quoque excitamur.

§. 7. Quod itaque maximum in Meteorognofia adhuc ſupereſt, et votis tot Virorum hodie perſpicaciſſimorum expetitum atque peroptatum iamdiu fuit: id Imperio Ruſſico, eiusque Dominatrici Potentiſſimae relictum eſſe videtur, fauentibus huic negotio et Auguſtae munificentia, et Imperii huius mirum extenſi amplitudine. Cum igitur tempeſtates omnes, aut aëris et coeli temperies, ſint vel Statae, vel Vagae, quarum illae innuunt generales mutationes aëris quae telluri noſtrae accidunt ob varium Solis erga nos ſitum, vti dum apud nos generaliter menſibus Decembris, Ianuarii et Februarii frigore et niue omnia conſtringuntur et teguntur; menſibus autem aeſtiuis calor redit; hae vero ſignificant intenſitates, harum mutationum generalium, modo minores, quibus accidit, vt ex. gr. vna hyeme ſaeuius frigus regnet, quam altera; vna aeſtate remiſſior calor ſentiatur, aut pluuiae copioſiores cadant quam altera: atque apud omnes ſcientiae naturalis authores in confeſſo ſit, praecipuam, et fere vnicam, harum tempeſtatum vagarum cauſam poſitam eſſe in Ventis inque horum vehementia et qualitatibus reliquis; neſcio quid ad Meteorognoſiae ſcientiam ſtabiliendam conducere magis poſſit, quam in ampliſſimo aliquo regno, quale eſt Ruſſicum, inſtituta ex animo deliberato, et per annorum aliquam ſeriem continuata, Ventorum Obſeruatio, vel potius Hiſtoria.

§. 8. Proponam itaque methodum, cuius ope obſeruationes hae ventorum inſtitui poſſint, ita vt vtilitas, quae exinde quaeritur; actu ipſo obtineatur, et tempore quidem, vt ſperare audeo, non nimis diuturno, ſed quinque aut ſex tantummodo annorum. Seligo igitur ad hoc opus Vrbes duodecim totius Ruſſiae ſequentes: 1. Riga, 2. Peters-

2. Perersburg, 3. Moſcau, 4. Caſan, 5. Aſtrachan, 6. Tobolski, 7. Kiof, 8. Archangel, 9. Iakutskoi, 10. Selinginskoi, 11. Wergolinskoi, 12. Nouogrod; atque has quidem eum in finem, vt primo Zephyrus et Eurus obſeruari poſſint in tribus Terrae parallelis, perque tractus longiſſimos, nempe in parallelo 50 graduum in Kiof et Selinginskoi, per ſpatium 617 milliarium Germanicorum; in parallelo 58 graduum in Riga, Petersburg, Nouogrod, Moſcau, Caſan, Tobolski, Wergolenskoi, per ſpatium 673 milliar. Germ. denique in parallelo 64 graduum in Archangel et Iakutskoi. per ſpatium 390 milliar. Germ. ſecundo, vt Auſter et Aquilo obſeruari queant per vrbes Aſtrachan, Caſan, Moſcau, Archangel, per interuallum 270 milliar. Germ. Sunt igitur hae Vrbes allegatae commodiſſimae, vt mihi quidem videtur, in quibus et Obſeruatores conſtitui, et Inſtrumenta mox indicanda locari, oportet.

§. 9. In qualibet deinde harum vrbium obſeruationibus inſtituendis accommodanda erit talis aliqua domus, quae et altiſſima reliquarum ſit, et recens adhuc aedificata, et ſatis firma, ne metus adeſſe poſſit, fore vt aliquot annorum ſpatio corruat, vel linea meridiana, ibidem ducenda, ſenſibili aliquo angulo mutetur; quae et ſimul in loco aliquo totius vrbis editiſſimo ſita ſit, liberum horizontem habeat, ita vt venti ſine vllo impedimento ad eam ex omni plaga affluere poſſint, et cuius altitudo ſupra proximum fluuium ſciatur. Quam ob cauſam, ſi quaedam harum vrbium nominatarum montibus cinctae ſint, neceſſe erit ipſas omittere in hoc negotio, atque eius loco eligere pagum aliquem proxime ſitum, in quo

 domus

domus conditionibus modo dictis praedita inueniri possit. In hac domo ita inuenta si obseruator simul habitare possit, commodissimum id erit: sin autem fieri hoc nequeat, aedicula propria ipsi prope hanc domum denuo aedificari debet.

§. 10. Domus inuenta iam ad instituendas obseruationes adaptanda erit; quod breui tempore, sine multis sumptibus, a quouis fabro lignario, fieri potest; si, destructa tecti aliqua parte, in eius locum planities lignea substituatur, ex duris lignis, bene et diu ante siccatis, et dupliciter sibi impositis, atque firmiter coagmentatis inter se; quae planities spatium non maius quam 9 pedum quadratorum, quale est mensae alicuius quadratae mediocris, vt occupet, necesse est. Ipsum hoc tabulatum et horizontaliter poni, et cum cura laeuigari debet in parte superiori; et prope illud scala admota sit, per quam commode et sine periculo adscendere ad hanc planitiem obseruator possit quouis tempore.

§. 11. Quoniam itaque ventorum praecipue cura haberi debet in his Obseruatoriis hucusque descriptis, atque omnis fere horum obseruatio restringitur ad eorum Directionem et Vehementiam: dicam primo, qua ratione, meo quidem iudicio, obseruari debeat directio ventorum, vt scopo intento ea sufficere possit. In tabulato igitur antea memorato describenda primum erit linea meridiana, et circa hanc diuisio horizontis in 16 plagas accurate adornanda, distinctisque lineis rectis depingenda. Puto enim, cum aliis ventorum obseruatoribus, his 16 plagis obseruationes has ea omni exactitudine absolui posse, quae hic requiri potest.

§. 12.

§. 12. Abſoluta diuiſione horizontis in plagas, adſcriptisque earum nominibus ordinario modo, erigatur in centro harum diuiſionum ſtylus ferreus, altitudinis vnius pedis, verticaliter poſitus, et in apice cuſpide acuta, politaque, inſtructus, cui vexillum imponi poſſit ſequenti modo elaborandum. Fiat ex quatuor virgis ligneis, aridis, et probe exſiccatis, vt machinula pondus exiguum habeat, rectangulum ABCD, cui dein ex vtraque parte charta agglutinanda erit; poteritque eſſe longitudo AB $1\frac{1}{2}$ pedis, latitudo AD 1 pedis; huic rectangulo affigantur ſupra et infra duo brachia orichalcina BE et CG, quorum illud BE in parua diſtantia a B, et in medio ſui, teneat capitellum F, quale acubus magneticis tribui ſolet, conice excauatum, et optime politum, imo in vſu ipſo plumbagine adhuc inducendum, vt ad modum acus magneticae ſtylo prius memorato impoſitum quam maxime volubile exiſtat; alterum brachium inferius CG in medio ſui habeat annulum H, qui interiorem ſuperficiem, vbi nempe ſtylum prius indicatum circumdare debet, habeat politiſſimam, plumbagine etiam in vſu illinendam, cui fini quoque ſtyli pars ea, quae huic annulo inſeritur, pari cura poliri debet; idem vero hoc brachium CG continuetur in linea recta vsque ad K, vt HK ſit longitudinis circiter 2 pedum, ſed in loco aliquo intermedio I habeat pondus plumbeum affixum, quod paruum quidem erit, ſed efficiet tamen vt vexillo hoc cuſpidi prius memoratae in F impoſito, et ſtylo per annulum H tranſeunte, partes machinalae vtrinque axi aut ſtylo FH adiacentes in exacto ſint aequilibrio, ita, vt nullum adſit impedimentum, quo minus etiam leuiſſime ſpirans Tab. IV. fig. 4.

ventus vexillo huic ſuam directionem imprimat; quam directionem cum cuſpis HK indicare debeat, curandum maxime eſt, vt recta haec HK exactiſſime in directum iaceat cum plano CDAB. Vtrumque vero hoc brachium connectitur virga orichalcina transuerſa EG, ad maiorem toti vexillo firmitatem conciliandam. Quotiescunque igitur obſeruatio venti capienda eſt, imponatur hoc vexillum cuſpidi ſtyli in meridiana fixi, extra hunc vſum in loco ſicco cuſtodiendum, ne ſtyli acies nimis cito, continua affrictione, atteratur et obtuſa fiat; atque ſic directio venti accurate, et ad hoc negotium aptiſſime, poterit determinari.

§. 13. Requirunt vero haec omnia curam et cognitionem haud vulgarem; quare conſilium meum eſt, vt primum apud nos Petroburgi in tecto domus alicuius, in ſcopum hunc ſelectae, ope fabri cuiusdam lignarii ordinarii et communis, ſub inſpectione Academiae Scientiarum, et tale tabulatum quale in §. 10. memoraui, conſtruatur, et omnia reliqua quae indicaui in eo efficiantur. Hoc enim obtento, quoniam omnes inexpectatae circumſtantiae praeuideri nequeunt, facile erit defectus corrigere; atque praeterea talis faber hoc exercitio optime diſcet, quae ad ſimilia in vrbibus reliquis obſeruatoria aedificanda obſeruanda ſint; vt praeteream, hoc poſtea obſeruatorium illud ipſum futurum eſſe, quocum Petropoli obſeruationes correſpondentes inſtitui debent. Sed praeparationibus his Petropoli abſolutis neceſſarium erit eundem fabrum lignarium vna cum Academicorum aliquo in omnes vrbes allegatas mittere, vt ſub huius attentione et iuſſu ille ſimilia obſeruatoria, vbicunque conſultum id viſum fuerit conſtruat

et

et aedificet; atque ſimul poſt aedificatum obſeruatorium Academicus obſeruatorem futurum inſtruat et exerceat in obſeruationibus, et hac et reliquis, probe et exacte inſtituendis.

§. 14. Quoniam vero Expetimentis hucusque inſtitutis, et obſeruationibus captis, ſatis innotuit, ventos non omnes horizontali motu progredi, ſed eos quandoque ex loco ſublimiori deorſum, vel ex loco profundiori ſurſum, ferri; quod phaenomenon ventorum vocabo eorundem inclinationem; hinc neceſſe eſt, vt obſeruatori ventorum ad manus ſit aliud inſtrumentum, quod vti prius Directorium vocari voteſt, inclinatorii nomine appellabo. Hoc inſtrumentum aeque facile ac reliqua ſequenti modo conſtruitur. Agglutinetur parallelogrammo ligneo ABCD, Tab. IV. fig. 5.
eiusdem magnitudinis cum praecedente vexillo, vtrinque charta, atque hoc vexillum horizontale ABCD liberrime mobile ſit circa axem BC, qui incumbat duobus fulcris BH et CI; circa medium axis E exeat virga ferrea tenuis EF, eius longitudinis, vt ipſa in F cuſpidata, aequilibrium ſeruet cum ABCD. Pondus aliud virgae EF, quam quod ipſa tenet, annectendum eſſe non ſuadeo, ne ventus in illud quoque irruat, et obſeruationes turbet. Hoc inſtrumento vento expoſito, et in ſitum horizontalem redacto ope perpendiculi GK, quod pedum alterutri annexum ſit, ſi adiunctus ſit ipſi ad latus arcus circularis LM, qui 150 circiter gradus comprehendat, obſeruari poterit commode venti inclinatio, ex notatis gradibus, qui in modo dicto arcu numerari poterunt, atque annotari, an directio venti ſurſum vel deorſum inclinata fuerit. Vt ne vero inclinatio ventorum ab ipſo tecto, in quo obſeruatorium aedificatum eſt, mutetur: iubet neceſſitas, vt tabulata

bulata in §. 10. descripta, paulo altius supra tectum ipsum attollantur.

§. 15. Cum praeterea etiam multiplici experientia constet, ventos in superiori aëris regione regnantes habere directionem diuersam ab ea, quae in ventis inferioribus obseruatur: necesse erit, vt obseruator ventorum ex nubium, si quae adsint, ductu de ventis his superioribus aestimatione iudicet, et quamnam plagam sequantur annotet. Ex nullo enim alio indicio horum ventorum superiorum directio capi potest.

§. 16. Quod ad alterum pertinet, nempe ad vim et violentiam ventorum, ea dependet a celeritate aëris moti, et cognoscitur distincte, si sciatur quotnam pedes ventus aliquis in tempore vnius minuti secundi absoluat horizontaliter. Hoc obseruari potest facillime et simplicissime ope sequentis instrumenti, quod Anemometrum vocatur. Obseruetur enim ad quamnam altitudinem in annexo
Tab. IV. quadrante DE a vi venti attollatur asserculus ABCD,
fig. 6. circa axem AB perfecte mobilis, et cuius pondus antea examinatum fuit, atque gradus obseruatae altitudinis annotentur in Diario; poterit deinde ex his obseruatis calculo deduci, quamnam ea tempestate celeritatem ventus habuerit.

§. 17. Sunt hae hucusque expositae qualitates ventorum tales, ad quas praecipue respici solet, et de quibus sperare licet, eas legitime et recte obseruatas leges periodicas ventorum tandem prodituras esse. Quoniam vero et aliae adhuc ventorum affectiones sunt, non inutiles, et eadem opera cum praecedentibus obseruandae: poterit obseruator tenere Thermometrum, vt eius ope de calore

calore aut frigore venti iudicare liceat. Hic necesse quidem esset, vt Thermometrum vento ipsi quauis vice exponeretur, et gradus huius calori et frigori respondens annotaretur: sed quoniam hoc nonnunquam lucente sole fieri deberet, cuius calor obseruationem de calore venti irritam redderet, consultius est, vt Thermometrum fixum in loco aliquo suspensum maneat, qui aëri libero et ventis peruius sit, sed ab omni sole tutus, quod facile fieri potest; atque sic certum semper indicium haberi poterit de calore aut frigore per quemcunque ventum aduecto, et cum illo aëre, qui Thermometro circumfluus est, statim communicato.

§. 18. Cum deinde certum sit, magnam inter aëris agitationes et Barometri mutationes dari connexionem: necessarium quoque erit Barometri rationem tenere, atque eius gradum in quauis ventorum obseruatione annotare; cuius Barometri locus fixus ibidem esse potest, vbi Thermometrum asseruatur.

§. 19. Vt denique etiam sciatur, quamnam humiditatis aut siccitatis mutationem ventus quisque produxerit: adhibenda erunt Hygrometra, et eorum in eodem cum Barometro et Thermometro loco positorum obseruationes solicite etiam faciendae.

§. 20. De obseruatore tandem ipso hoc adhuc monendum est, requiri omnino, vt is instrumentorum suorum cognitionem et constructionem probe teneat, quo eodem mutationes, atque exinde hauriendas obseruationes, recte instituere possit. Hinc antequam talis aliquis obseruatorio suo admoueatur, necessario antea exercendus erit a perito quodam in omnibus et singulis expositarum obseruationum faciendis, donec methodum haec omnia persequendi accurate didicerit.

DISSERTATIO
DE
MACHINIS SIMPLICIBVS,

AVCTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

Tabula V. In Mechanicis generaliter vocatur *Potentia* omne id, quod, cuicunque obiecto applicatum, motum in illo producere, aut vero si motus iam adfuerit, eum immutare et alterare valet. Ex actione igitur Potentiarum in obiectum aliquod oritur aut *Motus*, cum nempe vna potentiarum applicatarum reliquas superat; aut vero *Aequilibrium* siue *Quies*, cum nulla potentiarum applicatarum reliquas vincere potest, sed cuiuslibet actio ab actionibus reliquarum impeditur. De illo, Motu scilicet, agitur in *Mechanica* stricte sic dicta; de hoc vero, Aequilibrio nempe aut Quiete tractatur in *Statica* vel *Geostatica*, quemadmodum quibusdam hanc scientiam, ad distinguendam eam ab *Hydrostatica*, vocare placuit. Mallem vero dici, Staticam agere de aequilibrio potentiarum, quam de quiete simpliciter. Quies enim potius dicitur de obiecto motu carente ob hanc rationem, quia nulla plane potentia in illud agit; obiecta autem in Statica tanquam a potentiis, quanquam impeditis inter se, affecta considerantur, quae potentiarum inter se impeditio vocatur Aequilibrium. Obiectis itaque in Statica consideratis potius

tius conuenit aequilibrium quam quies; quamuis hanc diſtinctionem non adeo magni momenti eſſe lubens confitear.

§. 2. Praecipuam Staticae tractationem abſoluunt *Machinae* ſic dictae *ſimplices*, vel *Potentiae Mechanicae*, quae in conſtructionem machinarum compoſitarum omnium ingrediuntur, ita vt harum quaſi Elementa dici posſint. Quamuis autem hae machinae ſimplices, humanam quippe audaciam mire iuuantes, iam ab antiquis temporibus fuerint admodum excultae, et recentiori hac aetate vſu quotidiano praecipue eniteſcant: duo tamen ſunt, quae deſideranda in iis, meo quidem iudicio, videri poſſunt.

§. 3. Primum eſt, quod diuiſio et enumeratio earum ab antiquis tradita hucusque retineatur, neglecta tamen ea ratione, qua a priori, ſolo ratiocinio, inueniri potuiſſent; vnde fit vt tenebris neſcio quibusdam obfundantur, neque enumeratio earum perfecta, demonſtrationibus ex Statica petitis, hucusque inſtitui poſſit, vti Geometria ex gr. elegantiſſime hoc praeſtat circa quinque corpora regularia. Statuit quidem Vitruuius Architect. libro X. cap. 1. homines antiquiſſimos a motu planetarum, praecipue Solis et Lunae, qui in oculos eorum incurrit, occaſionem arripuiſſe, machinas inueniendi, arrepta nimirum exinde idea motus circularis, cuius virtuti Ariſtoteles omnem Staticae facultatem attribuit. Sed nimis remota et difficilis haec cauſa eſt; et potius credi debet ſola experientia fortuita adiutos primos homines, quod praecipue circa vectem vulgarem contingere potuit, in cognitionem machinarum ſenſim ſenſimque veniſſe, atque tum hanc doctrinam vtilitati et commoditati generis humani mirum in modum fauentem ſubinde vlterius excoluiſſe.

§. 4. Alterum, quod machinarum ſimplicium tractationi adhuc deeſſe video, eſt particularis atque exacta deſcriptio regularum Cunei, qui pro vltima harum machinarum ordinarie habetur, et cuius naturam alii in Vecte, alii in plano inclinato quaerunt, diuerſiſſimasque exinde rationes potentiae ad onus, vel reſiſtentiam ſuperandam, in ſtatu aequilibrii eius, protrahunt. Cauſa huius confuſionis nulla alia videtur eſſe, quam quod ab Authoribus, qui de eo ſcripſerunt, non primum in abſtracto, ad ſimilitudinem vectis, conſideratus, et deinde demum, legitima cautione adhibita, ad findenda ligna, et alias corporum circumſtantias, applicatus fuerit; ita vt elegans et ſimpliciſſima haec machina, in ſolas mercenariorum et baiulorum manus quaſi detruſa, neſcio quo mucore obducta et contemptu neglecta iaceat. His duobus deſideratis itaque praeſenti ſcripto lucis quantum potero affundere conabor.

§. 5. In potentiarum, obiecto cuidam applicatarum, aequilibrio, quotiescunque accidit vt potentia vnica minor cum altera vnica maiore aequilibrium ſeruet, vocatur illud obiectum *Machina*, et quidem *Machina ſimplex*, ſi obiectum illud ſit vnicum. Potentiarum vero huic machinae applicatarum minor more conſueto votatur *Vis*, maior autem *Onus*. Vitruuius l. c. definit machinam, quod ſit collectio materiae bene iunctae, cuius ope grauiſſima onera leuari poſſint; ſed, optime notante Perralto in notis Verſioni eius Gallicae ſubiunctis, materiae cuiuscunque conſideratio exulare debet ex conſideratione machinarum, praecipue ſimplicium. Obiecta igitur, quibus potentiae noſtrae debent applicari, exuta ſint oportet ab omni materia;

teria; extensa tamen plerumque debent esse, vt in diuersis eorum locis potentias queant recipere. Erunt igitur extensa omni materia destituta, hoc est, quantitates Geometricae, lineae nempe superficies et corpora Geometrica, non excluso etiam puncto.

§. 6. His obiectis Geometricis applicari potest potentia vel vna; quae vero cum motum necessario directioni suae conuenientem producat, Machinae inueniendae, quippe quae aequilibrium requirit, inutilis plane erit. Possunt porro adhiberi potentiae duae; sed de his notum est ex Staticis, quod aequilibrium gignere non possint, nisi sint in directum contrariae et aequales. Cessat igitur in his illa machinarum proprietas, qua requiritur, vt vna potentiarum applicatarum sit altera minor; neque igitur ex duabus potentiis Machinae inuentio sperari potest. Possunt vlterius adhiberi potentiae tres, de quibus notum est ex Staticis, eas, quamuis inaequales, ita temperari et accommodari tamen posse, vt sub diuersa magnitudine et intensione earum aequilibrium nihilominus seruent. Itaque trium potentiarum consideratio machinae inueniendae poterit inseruire. Possunt insuper plures quam tres potentiae obiectis applicari; sed iterum notum est ex Staticis quod, pluribus potentiis in eodem plano eidem obiecto applicatis, substitui possit semper vnica duabus quibusuis aequiualens; poterit itaque applicatio plurium potentiarum semper reduci ad illum casum, quo earum tres tantum adsunt, vt itaque huic soli casui potentiarum trium debeamus insistere, et videre, quid machinarum exinde sequatur.

§. 7. Cum vero naturaliter impossibile sit, vt in quocunque obiecto, duabus potentiis inaequalibus applicatis, maior minorem non vincat et secum abripiat, sed aequilibrium efficiat: hoc tamen in machinis requiratur, et actu ipso etiam fiat; necesse est, vt aliquid causae hic subsit, cur hoc fiat. Inuenitur autem facili opera duplex huius rei, quae tamen vnice admirationem nostram circa machinas excitat, causa. Prima est *Destructio* partialium quarundam virium in potentiis applicatis, cum Statica nos doceat, duas vires contrarie nitentes se inuicem quasi destruere et tollere. Altera vocari potest *Absorptio*, cum nempe potentiarum trium adhibitarum aliqua aut ex toto, aut ex parte, ab obiecto firmissimo quasi absorbetur, et in hoc transit, ita tamen, vt propter huius obiecti vim inertiae motum in eo excitare localem non possit. Quae duae causae, cum in occulto adsint machinis, et latenter agant, omne id constituunt, quod inexpertos in admirationem rapit. Quomodo vero vtraque haec causarum allegatarum agat, distinctius patebit ex sequentibus.

§. 8. His praemissis solui poterit sequens problema Staticum, *inuenire omnes machinas simplices possibiles*. Requiritur enim tantum, vt tres potentiae sese aequilibrantes applicatae considerentur primum puncto, dein successiue lineae, superficiei, et corpori, Geometrico sensu intellectis; quo facto opera detur, vt aliqua harum potentiarum, aut partes quaedam earum, in selectum ad hunc finem obiectum occulte agant, vel per *Destructionem*, vel per *Absorptionem*; habebitur hoc modo machina, quam obiectum ad hunc finem selectum sistet; eaque simplex, si obiectum selectum fuerit vnicum tantum.

§. 9.

§. 9. Circa potentias quidem corpori Geometrico applicatas notandum est, iis, nisi in eodem sint plano, aequiualentem, hoc est vnicam et solam quae omnem plane motum a potentiis impressum impediat et sistat, dari non posse, quod in Staticis demonstratur. Tribus igitur potentiis tali corpori applicatis, quae non in eodem plano sunt, nullum aequilibrium potest, obtineri, itaque nec machina exinde inueniri. Nisi enim omnes tres potentiae fuerint in eodem plano, corpus tamdiu modo huc modo illuc iuxta directionem potentiae fortioris semper rotabitur, donec eae veniant in vnum idemque planum. Si vero potentiae dictae sint in eodem plano, idem est, ac si superficiei vnicae lateribus applicatae essent; ex quo fit, vt tria tantum habeamus obiectorum genera quae machinis simplicibus producendis sunt apta, punctum nempe, *lineam* et *superficiem*. Sed excludi quoque debet punctum, vtpote quod extensione omni, quae in machina tamen necessario requiritur, plane caret.

§. 10. Applicemus ergo nunc tres potentias primum lineae rectae A B. Harum potentiarum duae sint expressae per A H et B K, quae duae rectae et intensitatem et directionem potentiarum designent. Notum est ex staticis, si producantur HA et KB vsque dum se secuerint in D, factisque DE = HA, et DG = BK, Diagonalem D F parallelogrammi DEFG repraesentare directionem et magnitudinem tertiae cuiusdam potentiae CI, quae actionibus priorum duarum AH et BK sola aequipollet; vt itaque, hac tertia in directione CD applicata, linea recta AB futura sit in aequilibrio. Erit autem demissis ex puncto C perpendicularibus CL et CM in Tab. V. fig. 1.

conti-

continuatas directiones AD et BD, positoque sinu toto $=1$, in Triangulo ALC analogia $1 : AC =$ sin. HAC : LC, vnde $LC = AC$. sin. HAC. Deinde Triangulo BMC dabitur proportio $1 : BC =$ sin. KBC : CM, vnde CM $= BC$. sin. KBC. His positis erit $BK : AH = DG : DE = EF : DE =$ sin. EDF : sin. EFD $=$ sin. EDF : sin. FDG $= \frac{LC}{DC} : \frac{CM}{DC} = LC : CM = AC$. sin. HAC : BC. sin. KBC. Ex quo fundamento leuissimo negotio prodit machina simplex *Vectis* dicta. Nam si alterutram trium harum potentiarum in suppositum aliquod obstaculum immobile per Absorptionem transire concipias: habebis totidem Vectis species. Tres potentiae AH, BK, et CI, sunt in aequilibrio, si nempe CI agat iuxta directionem CD; vel duabus praecedentibus aequipollet in omnibus vnica CI; si ergo haec vnica impeditur; etiam duae priores impediuntur, hoc est, aequilibrium seruant. Impeditur vero aequipollens CI subiecto fulcro firmissimo, quod Hypomochlium dicitur; ergo habebitur hinc Vectis species quae *Heterodromus* dicitur, et in quo generaliter est Vis BK ad Onus $AH = AH$. sin. AHC : BK. sin. CBK. si vero abscondatur vel absorbeatur extremarum potentiarum alterutra, ex. gr. AH, notum est ex staticis, esse pro aequilibrio $BK : CI = AC$. sin. ACI : AB. sin. ABK; ex quo fit Vectis secunda species, quae *Homodromus* vocatur. Duae hae species Vectis Heterodromi et Homodromi vi minori onus maius in aequilibrio tenent, quae Energia ex eo solo proficiscitur, quod potentiarum vna hypomochlii ope absorbeatur quasi, et abscondatur, quam facultatis in hac machina caussam apud solum de la Hire, Traité de Mecanique pag. 38. obseruatam inueni. In vecte Homodromo concipi etiam potest, vim

vim medium locum inter onus et fulcrum occupare, quam tertiam Vectis speciem aliqui appellant; at vero cum sic dispositus, vim onere maiorem requirat: e machinarum simplicium numero excludi debet haec tertia species, vnde factum quoque est, vt nullo peculiari nomine insigniatur, quamuis vtiliter in quibusdam casibus, vbi virium copia adest, ad celeritatem augendam adhiberi possit.

§. 11. Inuento sic semel Vecte, ingenio veterum debemus eiusdem varias emendationes. Cum enim hoc praecipuo incommodo Vectis laboret, quod desinat habere energiam, quam primum ex situ horizontali verticalem nactus est: medelam huic malo attulerunt inueniendo *Trochleam*, quae nihil aliud est, nisi *Vectis* heterodromus aequalium brachiorum *perpetuus*, ex qua sola quidem nihil virium lucramur, si centrum eius immobile sit; si vero mobile fuerit, aut aliquot trochleae inter se coniungantur, multum eae vires augent, et reuocantur ad Vectem compositum. Obtenta sic trochlea facile fuit inuenire *Axem in peritrochio*; nam cum Trochlea simplex vectis sit aequalium brachiorum, qui vim oneri requirit aequalem: cogitatum fuit de Trochlea inaequalium brachiorum, quorum breuiori onus, longiori autem vis applicari posset, ex quo ortus fuit Axis in peritrochio, qui nihil aliud est quam Vectis perpetuus inaequalium brachiorum.

§. 12. Applicemus nunc tres potentias superficiebus Geometricis, et quidem earum simplicissimae, nempe Triangulo. Possunt hic occurrere varii casus. Aut enim potentiae omnes applicatae erunt vni lateri; aut duae earum tantum vni lateri, tertia alteri lateri; aut vero singulis lateribus applicatae erunt singulae potentiae. Primum si

 acci-

acciderit: necesse est, vt omnes tres potentiae applicatae sint vni eidemque puncto; quod si non fiat, Vectis redibit. Quae potentiae igitur, si vni puncto sint applicatae, poterunt earum duae componi in vnam, quam
Fig. 2. repraesentabo per rectam EF, quae sola duarum aliarum non expressarum sit aequiualens. Resoluatur haec EF in duas EG et EH, quarum illa sit perpendicularis in latus Trianguli AB, et haec cum latere AB coincidat: euidens est, si Triangulum firmum sit et immobile potentiarum aliquam partem, nempe EG absorberi a firmitate obstaculi huius immobilis, et consequenter ad producendum aequilibrium inter tres has potentias requiri vnicam quae sit expressa per EL, et aequalis ipsi EH, hoc est minor quam EF. Non minus autem patet quoque, si in continuata GE capiatur EI minor quam EG, atque ex EL exque hac EI componatur noua EK; fore vt etiam haec EK aequilibrium seruet cum duabus EF, sed non eo compendio quod ante fuit, cum iam EK sit maior quam EL, neque latus AB omne id quod fieri potest absorbeat. Vocatis igitur $EF = p$, et $EK = q$, erit in triangulo rectangulo EHF, sinus totus (1): EF (p) $=$ cos. HEF : HE vnde $HE = p$ cos. HEF; eodem modo eruitur in triangulo rectangulo ELK, sinus totus (1) : EK (q) $=$ cos. KEL : EL vnde $EL = q$. Cos. KEL; cum itaque pro Onere, dabitur analogia $V : O =$ cos. HEF : cos. EH et EL sint inter se aequales; ponendum erit p. Cos. HEF $=$ q. Cos. KEL, vel si q accipiatur pro Vi, et p requiratur, vt ad aequilibrium efficiendum solae KEL; vel demissa perpendiculari AD in latus BC, erit $V : O = \frac{BD}{AB}$: cos. KEL $=$ BD : AB. cos. KEL, si AD ducta accipiatur pro linea horizon-

rizontali, et EF ad hanc perpendicularis, vt directionem grauis naturaliter cadentis exprimat. Apparet igitur ex hac applicatione trium potentiarum oriri machinam ſimplicem, quae *Planum inclinatum* ordinarie vocatur, vnde ſimul patet, planum hoc inclinatum optimo iure machinis ſimplicibus adnumerari. Energiam vero ſuam accipit ab abſorptione, dum pars aliqua ponderis abſoluti, nempe E·G, intra planum abſorbetur ab eius firmitate.

§. 13. Cum machinae ſimplices maxime ad eleuanda onera ingentia in vſum vocentur: ſine dubio prima praxis cum plano inclinato inſtituta docuit, hypotheneuſam eius longitudinem talem requirere, quae vel difficulter vel plane non dari poſſit, ſi onus ad mediocrem altitudinem ſit eleuandum. Huic incommodo medelam attulit ingenium primaeuorum, dum tale planum cylindro circumuolutum imaginati ſunt, ex quo planum inclinatum idem aliam formam accipit, et *Cochlea* vocatur; idem enim praeſtant ſulci ſpirales, quibus cochleae ordinariae exarantur, quod efficeret planum inclinatum cylindro circumuolutum, ſed illud commodi lucramur in cochlea, quod et multo minus ſpatium occupet, et facilius parari poſſit. Cum itaque Cochlea nitatur eodem fundamento quo planum inclinatum, et ex §. 12 facile intelligatur, Vectis et plani inclinati naturas nimis eſſe diuerſas, quam vt vnam ex altera deriuare liceat: patet recte aſſertum eſſe a *Dechales*, mundi Mathem. Mechan. lib. 1. p. 397, Cochleam ad Vectem reuocari non poſſe.

§. 14. Si caſuum enumeratorum contingat ſecundus, vt nempe duae potentiae vrgeant vnum latus, et tertia ſola alterum: poterit duarum in vnum latus directarum actio componi in vnam ſolam potentiam, vt ita vnicui-

 que

que horum duorum laterum vna sola vis sit applicata. Quo facto, cum tertia potentia absit quae his duabus aequilibrium inferre possit: nihil aderit, quod triangulum hoc modo a potentiis solicitatum vel a motu progressiuo, vel a motu rotatorio, liberet; quare hoc casu impossibile erit obtinere machinam simplicem.

§. 15. In casu autem tertio, qui nempe singulis lateribus singulas applicatas exhibet potentias, sint duobus Fig. 3. lateribus CA et CB applicatae potentiae qualescunque FG et DE, quae resoluantur in binas FH et FI, nec non DM et DN, quarum FH et DN sint in ipsis lateribus Trianguli; FI autem et DM sint ad haec perpendiculares. Euidens est, duas potentias FH et DN nullum effectum edituras esse in ipsum triangulum; ipsas vero FI et DM hoc perpendiculariter ad latera esse solicitaturas. Resoluantur hae denuo in binas FK, FL, et DP, DO, quarum FK et DP sint verticales, FL et DO autem horizontales. Nisi iam horizontales FL et DO sint in eadem horizontali, atque inter se aequales, vt vna alteram per *Destructionem* tollat: non poterit triangulum vel a motu progressiuo, vel a motu rotatorio liberari, sin itaque punctum F et D concipiantur in eadem horizontali, potest recta FD considerari vt Vectis, cuius extremis potentiae FK et DP applicatae sint; his tertia, in aequilibrio ipsas seruans, applicari deberet in earum centro, vel hypomochlio, si fuerint inaequales; quod cum casus infinite multos pariat: simplicissimum erit, potentias FK et DP considerare aequales, ortas ex aequalibus FG et DE, in eadem horizontali, et sub iisdem angulis AFG et BDE triangulo aequicruro ACB, cuius basis AB horizontalis

quo-

quoque sit, applicatis. Quo facto Machina simplex oritur, quae Cuneus dicitur, cuius ratio ex natura Vectis deducenda erit, cuius iam machinae simplicis leges erunt inuestigandae.

§. 16. In his itaque circumstantiis simplicissimis sollicitetur triangulum aequicrurum ABC, et cuius latus AB horizontale sit, a duabus potentiis aequalibus FG et DE, in eadem horizontali FD, et sub iisdem angulis ad latera, applicatis, eaeque resoluantur in suas collaterales eo modo, vti paulo ante dictum fuit; quo facto duae potentiae FL et DO sibi mutuo directe occurrentes et aequales sese destruent, atque triangulum ABC a solis FK et DP, itidem aequalibus sursum vrgebitur verticaliter, quibus nunc tertia in medio ipsius AB opponenda venit ad seruandum aequilibrium. Sit haec tertia potentia RQ, cuius quantitas et relatio ad ipsas DP et FK ita definietur. Positis $DE = FG = p$, et sinu toto $= 1$, erit in triangulo EMD, sinus totus $(1) : ED\ (p) =$ sinus $EDN : DM$, vnde $DM = p.$ sin. EDN. Porro in triangulo MDP erit sinus totus $(1) : MD\ (p.$ sin. $EDN) =$ sin. $DMP\ (\frac{BR}{CB}) : DP$, hinc $DP = \frac{p.BR.\,sin.\,EDN}{CB}$. Triangulum itaque sursum agitur, ob $FK = DP$, a potentia quae aequalis est $\frac{2p.BR.\,sin.\,EDN}{CB}$, cui potentia tertia RQ etiam aequari debet. Sin itaque vires DE et FG simul agentes vocentur Onus, hoc est $O = 2p$, et vis RQ sit vis, hoc est $V = RQ$, habebitur haec aequatio, $V.CB = O.BR.$ sin. EDN, aut haec proportio, efficaciam Cunei declarans $V : O = BR.$ sin. $EDN : CB$. Vnde patet, in Cuneo vim requiri onere minorem; ipsumque energiam suam accipere Fig. 4.

 ex

ex eo, quia duae potentiae partiales DO et FL sese mutuo destruunt, et in firmitatem ipsius redundant; ipsum denique dependere a natura Vectis.

§. 17. Cum itaque appareat, angulum EDN, hoc est directionem potentiae DE ad latus, in computum et calculum efficaciae ingredi: patet simul, non vnam et solam huius machinae rationem quae vim inter et onus obtinet, dari posse, vti communiter ab Authoribus hoc fit, qui et ob id ipsum in diuersas sententias abeunt. Considerata igitur memorata hac directione, ponam primo coincidere ipsam DE cum latere trianguli CB; atque sic erit sin. EDN $=$ o, emergetque proportio sequens, V: O $=$ o : CB, hoc est, vis nulla adesse debet ad aequilibrium obtinendum, quod per se patet. Secundo ponam, efficere DE angulum rectum cum latere CB, qui casus obtinet, cum ligna huius machinae ope diffindenda veniunt; huius enim partes, separatae iam aliquantum, iuxta arcum circuli, hoc est, in directione ad vtrumque latus CA et CB perpendiculari, cuneum vrgebunt, et sese restituere conabuntur; atque erit iam sin. EDN $=$ 1, quare hoc casu obtinebit proportio V : O $=$ BR : CB. Tertio ponam, potentiam DE habere directionem in cuneum horizontalem, quo facto erit sin. EDN $=$ sin. FDB $=$ sin. FDC $=$ sin. ABC $= \frac{RC}{CB}$, et dabitur proportio V : O $=$ BR. RC : CB².

§. 18. Cum itaque laborauerint Authores vt Cuneum ad Vectem reuocent, de quo vid. Dechales in Mundo Math. Mechanices lib. 1. p. 397. patet ex allegatis, Cuneum esse quidem Vectem, sed non talem qualem considerauit Aristoteles, qui statuit; posito corpore diffringendo ST

VX,

VX, et cuneo intruso ACB, idem praestare cuneum, quod efficeret Vectis duplex A*a*C et B*b*C, primi generis quilibet, quorum hypomoclia sint *a* et *b*, vires applicatae in A et B, onera vero vtrinque in C; esset enim hoc modo V : O = C*a* : *a*A, quod inuentae proportioni repugnat. Neque etiam verum attigit Guido Vbaldus, qui statuit adesse duos Vectes secundi generis, quorum commune hypomochlium sit C, vires applicatae in A et B, onera autem in *a* et *b*; nam iuxta haec placita esset V : O = *a*C : AC, quod iterum rationi inuentae contrarium est. Sed cuneus est Vectis primi generis FLD, cuius hypomochlium est in medio, et onera vtrinque in D et F sunt applicata. Est autem huius Vectis haec natura, vt, manente semper eadem ratione inter Vim et Onus, brachia eius continuo fiant longiora, si cuneus percussione intrudatur; quo ipso haec machina simplex corporibus diuellendis quam maxime est accommodata.

§. 19. Requireret nunc ordo huius tractationis vt considerarentur etiam tres potentiae figuris Geometricis multilateris applicatae. Sed hac inquisitione vlteriori opus non est, partim quia machinarum non nisi simplicium perfectam enumerationem instituere mihi proposui, ad quas proinde non nisi figura etiam simplicissima, qualis Triangulum est, requiritur; partim vero etiam, si qua machina ad simplices proxime accedens ex figura multilatera, et potentiarum ad eam applicatione, sperari posset, ea commode Cuneo accenseretur. Prodeunt itaque Machinae simplices non nisi duae, *Vectis* scilicet, et *Planum Inclinatum*, ex eo deducuntur *Trochlea*, *Axis in peritrochio*, et *Cuneus*; ex hoc vero deriuatur *Cochlea*.

SPE-

SPECIMEN EMENDATIORIS THEORIAE ORDINVM ARCHITECTONICORVM

AVCTORE
Georgio Wolffg. Krafft.

§. 1.

Quamuis negari nequeat, inesse receptis atque ab antiquissimis temporibus ad nos perductis *Ordinibus Architectonicis* talem venustatem, et eiusmodi decus, quod distincte quidem vix exprimi possit, sed in quo animus tamen spectatoris intelligentis plane acquiescat, et placida quadam voluptate perfundatur; ita quidem, vt *Sturmius* putauerit *Doricum* et *Corinthium* Ordines ab ipso Deo immediate fuisse hominibus reuelatos, cum eorum elegantia vires humanas plane superare videatur, et reliqui Ordines non sint nisi ad eorum imitationem expressi; *Vilalpandus* quoque consuerit, *Capitula* columnis Templi Salomonis imposita ab artifice *Hiram* Phoenicio, diuino instinctu, prout e sacris constat, ad hoc aedificium exstruendum praedito, originem deinceps dedisse *Capitulo* Corinthio, cum vtriusque nationis huius mutuum iam eo tempore floruerit commercium: certum tamen est, Theoriam horum *Ordinum* ita tenebris adhuc esse inuolutam, vt, fatentibus ipsis celeberrimis Architectis, vix dici queat in quo character essentialis vnius cuiusque *Ordinis* consistat, et quidnam illud sit, quod quemlibet a reliquis omnibus distinguat.

§. 2.

§. 2. Hoc assertum vt eo magis fiat manifestum, consideremus Definitiones quae in Architectorum scriptis *Ordinibus* tribuuntur. Audies hic *Davillerium* dicentem, *Ordinem architectonicum confusioni opponi, atque esse connexionem plurium membrorum iuxta regulas artis elaboratam eum in finem vt totum exinde resultans aspectui appareat iucundum.* Cum autem regulae generales, quarum iussu membra archetectonica connecti debent, non prohibeant, vt infinitis fere modis ea inter se combinentur: videtur certe ex hac Definitione inferri posse, infinite multos etiam dari diuersos *Ordines*; cui vero illationi Authores reliqui plane reffragantur, dum in quinario eorum numero fere omnes acquiescunt, de sexto Sturmiano adhuc sub iudice lis est, de pluribus autem excogitandis omnes desperant. Idem obiicere licet alteri huic Definitioni, *Ordo est ornatus architectonicus, constans Stylobata, Columna, et Trabeatione*; nihil enim ex ea deduci potest vnde vnam compositionem harum trium partium essentialium ab altera quadam earundem combinatione distinguere liceat. Melius mea opinione characterem intrinsecum *Ordinis architectonici* expressit *Perraltus* in praeclara illa traductione *Vitruuii*, in nota 1. Praefationi Libri IV. adiecta, vbi talem *Ordinem* ita definit, vt is sit, *Regula proportionem columnarum exhibens, characteremque columnae, et figuras membrorum eam ingredientium, exprimens*; neque quicquam in hac Definitione desiderari posset, si has regulas, earumque fundamenta stabilia, et characteres cuiusque columnae, distinctius tradidisset; quod vnicum adhuc scientificae huius negotii doctrinae deesse videtur.

§. 3. Quodsi deinde notas characteristicas *Ordinum* ab Auctoribus allegatas specialius perlustremus, deprehendimus, in *Tuscano* capitulum et volutis et cymatio carere, Zophorum vel nudum esse, vel antepagmentis tantum ornari debere; in *Dorico* capitulum volutis itidem carere, sed cymatia admittere, Zophorum vero triglyphis et guttis distingui; in *Ionico* volutas adesse octo, sed folia abesse; in *Corinthio* volutas sedecim cum tribus foliorum seriebus comparere, in *Romano* denique octo tantum volutas et duas foliorum series conspici. In his autem, si vel maxime differentia specifica columnarum in eiusmodi extrinsecis et accidentibus tantum quaeri possit, iterum ita variant Auctores, vt fere nulli eorum cum alio constet. Ita ex. gr. quidam in Ordine *Tuscano* cymatium admittunt; Ordinis *Dorici* inueniuntur columnae, antiquitus constructae, sed triglyphis et metopis destitutae, teste *Dauillerio* pag. 15. Ordini *Ionico* quidam *del Duca* Italus vnam foliorum seriem addidit; *Romano* Francisc. *Borromini* sedecim volutas tribuit. Ita porro, cum *Tuscanus* simplicissimus omnium debeat esse, nec nisi aedificiis rudioribus tribui, videmus tamen eundem admoueri interdum palatiis cultissimis et splendidissimis. Quae omnia abunde docent, intrinsecum *Ordinis* alicuius characterem in eiusmodi circumstantiis peregrinis quaerendum minime esse.

§. 4. Ad haec accedunt quoque sequentia adhuc, quod nempe neque in proportionibus partium essentialium inter celeberrimos Architectos conueniat. Ita ex. gr. *Palladius* omnium Ordinum stylobatis assignat partem quartam altitudinis columnae, quintam vero trabeationi; *Vignolus* vero,

vero, aliter ſentiens, conſtanter tribuit columnae partem tertiam ſtylobatae, quartam trabeationi. *Vitruuius* lib. IV. cap. 7. *Tuſcanae* columnae altitudini ſeptem aſſignat modulos, *Serlius* vero eidem non plures concedit quam ſex. In Gallia quidam nouo ſe *Ordine* Architecturam ditaſſe cenſuit, cum integrum ſcapum foliis veſtiret, loco volutarum ab antiquis receptarum gallos gallinaceos poneret, atque vbique liliorum folia interſpergeret. Fatentur denique omnes, Ordinem *Romanum* non eſſe niſi compoſitum ex *Ionico* et *Corinthio*, ex qua ratione etiam ſub titulum *Compoſiti* venit; et ſextus Ordo a *Sturmio* excogitatus honorem ſibi ex hoc ſolo tueri conatur, quod *Ionici* ſit aemulus, eodem modo, quo *Doricus Tuſcanum*, *Corinthius Romanum* aliquantum refert. Ita igitur animus inter varias Architectorum ſententias fluctuans modo huc modo illuc agitur, neque quicquam inuenit in quo acquieſcere et verum tenere poſſit.

§. 5. Haec omnia ſolicite perpendens incidi tandem in eam ſententiam, vt putem duos ſtatuendos eſſe *Ordinum architectonicorum* quorumcunque characteres eſſentiales, quorum ope quam diſtinctiſſime illi inter ſe ſeparari, atque omnis confuſio euitari poſſit. Horum characterum vnum ſtatuo *Hiſtoricum*, *Externum*, auctoritate ſola gentium ſtabilitum et introductum, ad quem ſolum Architecti hucusque reſpexerunt, alterum vero mox memorandum plane deſeruerunt. Huc refero ex. gr. columnas *Caryatides* dictas, *Volutas* et *folia acanthina*, cum *cauliculis*, *Strias* ſcapis induci ſolitas, et alia quaedam, quorum origo hiſtorica ex Architectorum libris abunde conſtat, et quae tamen, etiamſi peregrina in hoc negotio

 ſint,

sint, omnino tamen excludi non debent, sed nec vnice ad constituendum criterium operum tam nobilium concurrere. Pro altero horum characterum assumo *Philosophicum*, *Internum*, ex natura intima humanae mentis petitum, qui in proportionibus et earum perceptione, sensibus haurienda, consistit. In quam rem egregie loquitur *Vignolus*, curiosus antiquitatum architectonicarum scrutator, affirmans, se obseruasse, quod in columnis antiquitus constructis ex membris etiam minimis maxima omnia liceat dimetiri, hoc est, quod membra minima et maxima omnia inter se facile, ope proportionis, comparari possint. Quod igitur Architecti, cognitionis philosophicae, plerumque ignari, confusae tantum perceptionis ope pulchrum deprehenderunt; id ope Matheseos rectificandum et confirmandum, sed simul suis limitibus circumscribendum est, eo plane modo, quo in Musica citius harmoniae quaedam auditui gratae inuentae, quam earum rationes in proportionibus delitescentes a *Pythagora* demum detectae fuerunt, et nostra aetate extra omne dubium positae tenentur.

§. 6. Est enim omnino etiam Architectura bene constituta quaedam quasi Musica, et palatium decore suo se commendans nihil aliud quam cantio, aut congeries harmoniarum oculo spectatoris intelligentis sese simul sistentium, veluti in cantione auribus accommodata illae se successiue monstrant. Natura mentis humanae ita comparata est, vt proportionibus facile percipiendis maxime delectetur; quae si a sola ratione detegi debeant, neque alium effectum quam in animam hominis et eius facultatem rationalem edant, non placent nisi in his rebus exercitatis, et harum proportionum gnaris; cuius rei exemplum

emplum apertissimum habere possumus in serie aliqua numerorum certas leges tenente et chartae inscripta, quae certe legis huius ignarum non am[illegible], sed gnarum voluptate perfundit. Si vero proportiones, numeris primum expressae tantum, deinde aut motu aliquo magis nitescant, vt cum *Keplero* loquar, aut vero simultaneitate rerum corporearum in ista proportione existentium perdurescant, atque sic per organa mentis sensitiua animo illabantur: tum vero etiam proportionum inscientibus placent; prout illud quotidie obseruare licet in hominibus rudi ingenio praeditis, in quibus aliquae saltim harmoniae musicae laetitiam excitant. In quo quidem genere Architectura Musicae adhuc multum praeferenda videtur, cum illius opera non soli delectationi sed etiam vsui maxime necessario destinata sint, et longo tempore perdurent; huius vero effectus, etiamsi variis vicibus repeti possint, cito tamen transeant, neque aeque diuturnum vt illa animo alimentum praebeant.

§. 7. Incipiam autem a characterum modo indicatorum altero, qui in proportione partium columnae consistit, atque verum criterium nobis pandit, quo *Ordines architectonici* inter se possunt distingui. Suppono igitur, proportiones partium in quacunque columna ita comparatas esse debere, vt primo facile possint visu percipi quod generale omnium Architectorum praeceptum est; deinde secundo, vt in quolibet Ordine imperium teneat determinatus tantum, non vero quilibet promiscuus proportionum numerus. Cum igitur ex Arithmeticis notum sit, numerum quemlibet compositum posse resolui in determinatum numerum suorum factorum simplicium et primorum, atque hos primos numeros deinde omnifariam inter se com-

 binatos

binatos varias ſiſtere proportiones; conſtitui me cum tentare, quid ex numeris ſimpliciſſime compoſitis, atque eorum ita combinatis diuiſoribus primis, in *Ordines architectonicos* influere poſſit.

§. 8. Sequor autem in his fere methodum Clariſſimi *Euleri* noſtri, qui in Egregio Opere, quod nuperrime ſub titulo: *Tentamen nouae Theoriae Muſicae*, publice prodiit, ſonos omnes, qui in cognitis hucusque Generibus Muſicis recepti fuerunt, ex aſſumto quodam numero compoſito, et eius factoribus ſimplicibus, ingenioſiſſime eruit; atque ex. gr. ex numeri compoſiti 3^2, eiusque diuiſoribus 1, 3, 9, Genus Muſicum a Mercurio quondam inuentum et Tetrachordo expreſſum; ex numeri compoſiti 3^2, 5^2, eiusque diuiſoribus ſimplicibus Genus Muſicum Diatonico Chromaticum hodie vſitatum, ad amuſſim deducit. Quemadmodum ergo ibi numerus compoſitus aſſumtus *Exponens Generis Muſici* ex eo prodeuntis vocatur: ita hic ego ſimilem numerum compoſitum aſſumam, quem Ordinis architectonici ex eo deriuati *Canonem* appellabo.

§. 9. Cum igitur in qualibet columna quatuor partes principales veniant conſiderandae, nimirum 1. Modulus, 2. Stylobata, 3. Columna, et 4. Trabeatio: ſelegi tales numeros compoſitos, qui primo ſint maxime ſimplices quia ſimplicitas in hoc negotio maxime placet, et deinde qui non in plures quam quatuor diuiſores poſſint diſcerpi, vt nempe proportiones inde eruendae ex vno aliquo *Canone* deriuentur, atque vt ſimul hoc Canone proportionum in aliqua columna adhibendarum numerus exhauriatur, neque aliqua ſuperſit aut deficiat. Vti ex. gr. ſi capiatur numerus

numerus

merus compositus 2, 3, constans ex duobus numeris primis: habet is diuisores sequentes, 1, 2, 3, et 6, vnde non plures erui possunt proportiones quam sequentes quinque, terminis omnibus inter se comparatis, nempe 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3, 1 : 6, et 2 : 3. Id circo diuisorum quemlibet assigno partium columnae principali alicui, et deinde proportionem partium nullam aliam assumo quam talem, quae ex omnifaria diuisorum facta combinatione eruitur. Ipsum vero numerum compositum, ex quo omnia haec deriuantur, voco *Canonem Ordinis Architectonici*; ex quo solo Ordines hos inter se distinguo, et in quo solo character essentialis Ordinum consistere videtur.

§. 10. Vt vero hoc institutum generalius persequar, assumo numerum compositum $m \times n$ ortum ex multiplicatione duorum numerorum primorum m et n, inter quos sit n maior quam m. Resoluetur hic numerus compositus in diuisores sequentes, 1, m, n, mn, atque exinde eruentur proportiones non plures quam sequentes quinque, nimirum $1:1$, $1:m$, $1:n$, $1:mn$, $m:n$; Vt deinceps diuisorum quilibet suam sibi conuenientem partem columnae principalem nanciscatur: assumo 1 pro modulo columnae, m pro trabeationis, n pro stylobatae, mn vero pro columnae longitudine, quoniam ex regulis generalibus patet, trabeationis altitudinem minorem debere esse stylobatae altitudine, et columnae altitudinem vtramque priorum vt superet, necesse quoque esse. Si vero quis ordinem hunc, et hanc assignationem malit inuersam, inter stylobatam nempe et trabeationem, mihi perinde erit; in vtroque enim casu id efficitur, vt partes principales

columnae

columnae nullam aliam inter ſe teneant proportionem; quam eas quae ex *Canone Ordinis* eruuntur.

§. 11. Iam vero etiam id requiro, vt partes columnae *ſecundariae* nullam aliam inter ſe ſeruent proportionem, quam quae ex generali *Canone Ordinis* eruuntur. Partes autem columnae *ſecundariae* comprehenduntur vel ſub ſtylobata, quae ſunt *baſis ſtylobatae*, *truncus*, et *coronis ſtylobatae*; vel ſub columna ſpecialius ſic dicta, quae ſunt *baſis columnae*, *ſcapus*, et *capitulum*; aut vero ſub trabeatione, quorſum referuntur *epiſtylium*, *zophorus*, et *coronix*. Harum partium ſecundariarum triga quaelibet nullam aliam tenere debet proportionem, quam quae ex Canone deriuatur. Leui itaque adhibito calculo analytico eruuntur altitudines partium ſecundariarum columnae totius, ſub *Canone Ordinis* $m \times n$ contentae, hunc in modum:

Stylobata A D $= n$.

baſis ſtylobatae A B $= \frac{mn}{1+m+n}$.

truncus B C $= \frac{n^2}{1+m+n}$.

coronis ſtylobatae C D $= \frac{n}{1+m+n}$.

Columna D G $= mn$.

baſis columnae D E $= \frac{mn}{2+mn}$.

ſcapus E F $= \frac{m^2n^2}{2+mn}$.

capitulum F G $= \frac{mn}{2+mn}$.

Trabeatio G K $= m$.

epiſtylium G H $= \frac{m}{m+2}$.

zophorus H I $= \frac{m}{m+2}$.

coronix I K $= \frac{m^2}{m+2}$.

§. 12. Quae igitur altitudines partium ſecundariarum ſi alicui columnae tribuantur, efficietur, vt et partes principales

cipales omnes inter ſe quomodocunque combinatae nullam aliam producant proportionem quam *Canone Ordinis* comprehenſam, et partes ſecundariae, quae ſub eadem principali continentur, etiam inter ſe quomodocunque combinatae ad earundem proportionum numerum reſtringatur. Ita ex. gr. *ſcapus* ad *capitulum* tenebit rationem $\frac{m^2n^2}{2+mn} : \frac{mn}{2+mn} = mn : 1$, quae ſub Canone continetur; atque ſic de caeteris partibus. Efficit denique quaelibet triga partium ſecundariarum ſimul ſumta altitudinem ſuae partis principalis, vti ex. gr. $AB + BC + CD = AD = \frac{mn+n^2+n}{1+m+n} = \frac{(1+m+n)n}{1+m+n} = n$, atque ſic pariter in caeteris.

§. 13. Hoc vnicum exinde naſcitur incommodum, quod partes diuerſarum trigarum ſecundariae proportionem inter ſe nanciſcantur aliquando inconcinnam; veluti ſi comparetur baſis ſtylobatae A B cum epiſtylio G H, eruetur proportio $\frac{mn}{1+m+n} : \frac{m}{m+2}$ vel $n. m + 2 : 1 + m +$. Sed vt taceam proportionem hanc in caſibus ſpecialibus aliquando fieri poſſe concinnam, et *Canoni Ordinis* conuenientem, conſiderandum eſt, impoſſibile hoc requiſitum eſſe, niſi regulis Generalibus Architectonicis contrariari velimus; atque inſuper easdam regulas id poſcere, vt partes ſecundariae ſub diuerſis trigis comprehenſae data opera a ſe inuicem diſcernantur; quarum legum iuſſu ſtabilitum quoque eſt, vt ne diuerſarum trigarum partes finitimae, veluti *coronis ſtylobatae* et *baſis columnae apophygi* inter ſe iungantur, atque ſic caueatur, ne in vnum coalitae hae partes credantur, quae diuerſae eſſe debent. Cuius quidem rei, ſi prolixus eſſe vellem, quamplurima exempla ſimilia in Muſicis quotidie vſitatiſſima allegare liceret.

§. 14. Quod autem iam de partibus columnae principalibus monui §. 10. nolle me insistere earum altitudini quam iis hic tribuo: id etiam de partibus secundariis intellectum volo. Potest ex. gr. basis stylobatae esse maior eiusdem coronide, potest esse minor; potest aequalis esse epistylio zophorus, potet esse inaequalis; sunt enim hae circumstantiae accidentales tantum, neque ad rei essentiam pertinent. Sed id solum obseruari debet, vt ne alia ex mutatione facta exsurgat proportio, quam quae intra limites Canonis continetur, qui solus diuersitatem Ordinibus inducit. Neque etiam id ita strictim interpretandum esse velim, vt columna sine stylobata esse nequeat. Notum enim est, *Vitruuium* fere nullis, et hodiernos *Tuscanis* rarissime, stylobatam concedere. Quae vero cum nonnunquam necessario requiratur, non potest non partibus principalibus accenseri, atque, si alicubi deficiat, non tamen extra reliquarum proportionum *Canoni* debitarum limites extrauagari licet.

§. 15. His ita generaliter iam pertractatis nihil amplius restat, quam vt loco numerorum generalium m et n substituamus successiue alios atque alios determinatos, videamusque quales ex quolibet Canone Ordinis columnarum figurae et proportiones proditurae sint. Sit igitur primus Canon hic 2×3, hoc est $m = 2$, $n = 3$, erunt eius diuisores 1, 2, 3, 6, atque eruentur exinde rationes sequentes, 1 : 1, 1 : 2, 1 : 3, 1 : 6, 2 : 3, erunt itaque:

Stylobata AD = 3 modulis.

basis stylobatae AB = 1.

truncus BC = $1\frac{1}{2}$.

coronis stylobatae = $\frac{1}{2}$.

Columna

Columna DG $=$ 6.
basis columnae DE $= \frac{3}{4}$.
scapus EF $= 4\frac{1}{2}$.
capitulum FG $= \frac{3}{4}$.
Trabeatio GK $=$ 2.
epistylium GH $= \frac{1}{2}$.
zophorus HI $= \frac{1}{2}$.
coronix IK $=$ 1.

quibus ita delineatis exsurgit columna *Ordinis Primi*, Canonis 2×3, cuius formam repraesentat Figura 5.

§. 16. Assumatur secundus Canon hic 2×5, in quo nunc est $m = 2$, $n = 5$, erunt diuisores hi 1, 2, 5, 10, atque eruentur rationes sequentes 1 : 1, 1 : 2, 1 : 5, 1:10, 2 : 5, quae partim eaedem sint cum rationibus Canonis praecedentis, partim vero ab iis discrepant. Deducetur ex his

Stylobata AD $=$ 5.
basis stylobatae AB $= 1\frac{1}{4}$.
truncus BC $= 3\frac{1}{8}$.
coronis CD $= \frac{5}{8}$.
Columna DG $=$ 10.
basis DE $= \frac{5}{8}$.
Scapus EF $= 8\frac{3}{4}$.
capitulum FG $= \frac{5}{8}$.
Trabeatio GK $=$ 2.
epistylium GH $= \frac{1}{2}$.
zophorus HI $= \frac{1}{2}$.
coronix IK $=$ 1.

quibus ita delineatis exsurgit columna Ordinis secundi, Canonis 2×5, cuius formam exhibet Figura 6.

§. 17. Assumatur tertius Canon hic 2×7, in quo est $m = 2$, $n = 7$, erunt diuisores hi $1, 2, 7, 14$, atque eruentur rationes sequentes $1:1$, $1:2$, $1:7$, $1:14$, $2:7$, in quibus nouae iterum sunt in nullo praecedentium Canonum occurrentes. Deducetur ex his,

Stylobata $AD = 7$.
basis $AB = 1\frac{3}{4}$.
truncus $BC = 4\frac{13}{16}$.
coronis $CD = \frac{7}{16}$.
Columna $DG = 14$.
basis $DE = \frac{7}{8}$.
scapus $EF = 12\frac{1}{4}$.
capitulum $FG = \frac{7}{8}$.
Trabeatio $GK = 2$,
epistylium $GH = \frac{1}{2}$.
zophorus $HI = \frac{1}{2}$.
coronix $IK = 1$.

quibus ita delineatis exsurgit columna Ordinis Tertii, Canonis 2×7, cuius formam exhibet Figura 7. Sed vlterius iam hoc modo, vbi nempe vnus factorum numeri compositi est 2, progredi non licet; ob hanc rationem: cum longitudo totius columnae generaliter prodeat $= n + mn + m$, esset, si assumeretur Canon 2×11, eius columnae longitudo $= 11 + 22 + 2 = 35$ modulis; sed vetant Architecti in altitudine columnae 30 modulos excedere, imo praestantissimi eorum infra hunc numerum subsistunt; quare hanc Canonum formam vlterius extendere non licebit.

§. 18. Supponamus igitur aliam Canonis formam, nempe hanc 3×5, in quo est $m = 3$, $n = 5$, erunt diuisores hic, $1, 3, 5, 15$, atque eruentur rationes sequenquentes, 1 : 1, 1 : 3, 1 : 5, 1 : 15, 3 : 5. in quibus denuo nouae sunt, et in praecedentibus absentes. Deducetur ergo ex his:

Stylobata $AD = 5$.
- basis $AB = 1\frac{2}{3}$.
- truncus $BC = 2\frac{7}{9}$.
- coronis $CD = \frac{5}{9}$.

Columna $DG = 15$.
- basis $DE = \frac{15}{17}$.
- scapus $EF = 13\frac{4}{17}$.
- capitulum $FG = \frac{15}{17}$.

Trabeatio $GK = 3$.
- epistylium $GH = \frac{3}{5}$.
- zophorus $HI = \frac{3}{5}$.
- coronix $IK = 1\frac{4}{5}$.

quibus ita delineatis exsurgit columna Ordinis Quarti, Canonis 3×5, cuius formam Figura 8. sistit. Tab. V.

§. 19. Assumatur quintus Canon hic 3×7, in quo est $m = 3$, $n = 7$, erunt diuisores hi, 1, 3, 7, 21, atque eruentur rationes sequentes, 1 : 1, 1 : 3, 1 : 7, 1 : 21, 3 : 7; deducetur ex his:

Stylobata $AD = 7$.
- basis $AB = 1\frac{10}{11}$.
- truncus $BC = 4\frac{5}{11}$.
- coronis $CD = \frac{7}{11}$.

Columna $DG = 21$.
- basis $DE = \frac{21}{23}$.
- scapus $EF = 19\frac{4}{23}$.
- capitulum $FG = \frac{21}{23}$.

 Trabea-

Trabeatio $GK = 3$.
epiſtylium $GH = \frac{8}{5}$.
zophorus $HI = \frac{3}{5}$.
coronis $IK = 1\frac{4}{5}$.

quibus ita delineatis exſurgit columna Ordinis Quinti, Canonis 3×7, cuius forma repraeſentatur Figura 9. Sed hic denuo ſubſiſtendum eſt, cum et huius Canonis columna altitudine ſua iam habeat 31 modulos, quod tolerari adhuc poteſt; ſed ſi aſſumeretur Canon 3×11, prodiret longitudo columnae iam 47 modulorum, et plurium adhuc ſi aſſumerentur Canones altiores, vti 5×7, 5×11, etc.

Tab. V.

§. 20. Mirum in hac Theoria accidit, quod non plures eruantur quam quinque Columnarum Ordines, quot nempe ad hunc vsque diem ſunt ab omnibus Architectis recepti. Stante ergo hac Hypotheſi, quod *Ordo Architectonicus* ſit congeries partium columnae, eam inter ſe rationem tenentium, quae ex numero e duobus primis compoſito erui poſſunt, neque alias praeterea includat; patet, plures quam quinque Ordines inuentu impoſſibiles eſſe, niſi in generales regulas Architecturae velimus impingere. Caeterum de *Ecphoris* partium in his delineationibus non adeo ſolicitus fui; poſſunt enim illae haud difficulter eodem modo inter ſe aptari, vt nullas niſi *Canonicas* aſpectui offerant proportiones.

§. 21. Ex altitudinibus et firmitatibus harum columnarum facile apparet, primam nimis paruam et humilem eſſe; ſecundam congruere cum *Tuſcano*; tertiam cum *Ionico*; quartam cum *Dorico*, et quintam cum Romano

et

Corinthio; quod ex instituta comparatione inter mensuras meas, et illas quae in *Traité d'Architecture par Seb. le Clerc*, singulis Ordinibus tribuuntur, satis accurate colligere licet; quare vt iis accedant etiam *characteres Historici externi*, quaelibet earum ornamentis ad ipsam pertinentibus facile adhuc poterit adaugeri, quo facto deinde vtroque charactere praeditae apparebunt, quem in iis requiri ostensum est. Haec vero pro *specimine* tantum *emendatioris Theoriae Ordinum Architectonicorum* hac vice sufficiant.

DE

DE FVNGO INSOLITAE MAGNITVDINIS OBSERVATIO.

AVCTORE
Ioanne Ammano.

Anno praeterito, nempe 1739 mihi ex Ingria allata fuit fungi ſpecies, quae inferna capituli ſuperficie loco lamellarum tubulos obtinet. Erat hic fungus tam inſolitae et vaſtae magnitudinis, vt illum delineare et breuiter ſequentibus deſcribere operae pretium duxerim.

Pileus diametro pedem, craſſitie tres pollices aequabat eratque vtrinque conuexus, magis tamen ſuperficie ſuperna, quam inferna. Pediculus longitudine dimidii pedis, colore praeditus fuit dilute luteo et hinc inde albente, craſſitie prope baſin vbi craſſior erat, quam parte ea, qua capitulo inſerebatur, facile tres pollices ſuperans. Materies pediculi alba et leuis erat atque ſpongioſa. Pilei duplex fuit, ſuperior intus alba, extus luteo fuſca, illi ex qua pediculus conſtabat, ſimilis; inferior vero fiſtuloſa ex meris tubulis albentibus compoſita erat. Pertinet ergo ad fungorum eſculentorum genus, quod Clar. Michelius ſub Suilli titulo inſtituit. Repertus fuit autumno in villa Comitis Goloffkin.

DE-

DESCRIPTIO ET ICON
NOVAE BERMVDIANAE SPECIEI.

AVCTORE
Ioanne Amman.

Inter res naturales plures, quas R. R. P. P. Societatis Iesu Pekino Sinensis Imperii Capite ad Academiam Petropolitanam ante aliquot annos miserunt, semina etiam erant globosa et aterrima YEN TSCHI titulo insignita. Haec terrae calore equini stercoris tepenti Iunio mense in horto Academico commisi. Breui temporis spatio exinde enascebantur plantae Iridum iunioribus admodum similes, quae fictilibus inditae et in hybernacula positae hyemem quamuis longam et rigidam facile tolerabant.

Sequenti autem anno primo Vere e radicibus harum plantarum, quae Iridum adinstar carnosae, oblongae et repentes sunt, quam plurimas fibras longas, crassas, luteas emittentes, duo tres, aut plures oriebantur caules bipedales plus minus, prope radicem calami olorini crassitie, nec compressi, nec alati, vt in aliis huius generis speciebus fieri solet, sed teretes fere, laeues, pallide virentes, octo nouem aut decem geniculis distincti ad incerta prorsus interualla.

Singulis hisce geniculis folia adnascebantur Iridis hortensis, latifoliae C. Bauhini valde similia, dilute viridia, lata basi caulium genicula amplexantia, arcuata, in medio sescunciam praeter propter lata, in tenuissimum mucronem terminata, secundum longitudinem striata, glabra, consistentiae satis firmae. Folia, quae circa medium caulis crescebant, iis quae prope radicem et caulium summitates nascebantur, multo erant maiora.

E superiorum foliorum finubus temporis progressu ramuli emittebantur foliosi itidem et geniculati, teretes et glabri, in alios minores diuaricati, e quorum geniculis tandem et ex accretorum foliolorum alis pediculi surgebant vnciales plus minus, tenues, e viridi flauescentes, tres quatuor aut plures, quorum singuli in cacumine embryonem gerebant triquetrum, oblongum, splendentem, dilute viridem. His autem innascebantur flores satis ampli, hexapetali, interdiu expansi, noctu clausi. Florum petala singula semunciam circiter longa erant, trientem pollicis praeter propter lata, vtrinque angustata, e flauo rubentia, intus maculis plurimis coccineis, elegantissimis insignita, prope basin, interna scilicet eorum superficie, ad medium vsque parum sulcata, in quibus sulcis liquor mellei saporis continebatur. Petala haec durabilia non erant, sed spatio vnius aut alterius diei flaccescebant, contorquebantur, et embryonis summitati spirae in modum contorta eidem ad maturitatem vsque inhaerebant.

Embryonum porro singulorum summitatibus innascebatur pistillum vnciam circiter longum, prope basin valde tenue et teres, extremum versus ampliatum, triquetrum, coloris dilute rubentis, apice in sex segmenta, tria scilicet exteriora et maiora, atque in interiora minora, oblonga, pallida et pilosa fissum.

E tribus autem petalorum interiorum vnguibus, quae exterioribus subinde paullo maiora sunt, stamina oriebantur in singulis petalis solitaria, pistillo dimidio fere breviora, dilute itidem rubentia, apicibus praedita trientem vnciae longis, dimidiam circiter lineam latis, subtilissimo luteo puluere aspersis.

Embryo

Embryo floribus marcescentibus excrescebat in fructum obtuse trigonum, glabrum, pallide virescentem, extremitatem versus ampliatum, in tria loculamenta diuisum et per maturitatem trifariam dehiscentem. In singulis hisce loculamentis baccae continebantur plures, sphaericae, Coriandri seminis magnitudine, aterrimae, splendentes, axi affixae; pulpae autem medium occupabat semen durum, sphaericum itidem, coloris fusci. Hiscente per maturitatem fructu baccae axi medio satis firmiter adhaerescentes exiguam uvam quodammodo et aspectu pulchram repraesentabant.

Iulio mense in horto Academico florere incipiebant supra descriptae plantae et per integrum Augustum flores magna copia proferebant, versus finem autem Septembris et Octobri mense fructus maturabant.

Increscente hyeme folia et caules moriuntur. Radices, quae perennes sunt, in hybernaculis modice calidis seruari et parum sed sepius irrigari debent.

Florum petalis et fructu nostra haec planta cum Bermudianae speciebus a Celeberrimo Tournefortio in Institutionibus rei herbariae recensitis conuenit, differt staminibus a prima Eius specie et ab alia illa exiliori Virginiana, quas ambas, accuratissime, vt solet, Celeberr. Dillenius in horto Elthamensi descripsit et delineauit, in quibus staminum apices pistillo appressi sunt, secus ac in nostra planta, quae stamina obtinet libere fluctuantia; differt seminibus pulpa obductis; fructus membranis per maturitatem penitus reflexis, seminibus interim non deciduis; pistilli summitate in sex segmenta diuisa. Differt denique ab Ixiae genere a Clariss. Linnaeo in Corollario generum plantarum instituto petalis florum vt plurimum inaequalibus; pistillo staminibus duplo fere longiori, eiusdem stigmate in ſex ſegmenta diſſecto; ſeminibus non ſaepius, vt ſcribit, ſolitariis, ſed pluribus ſemper in ſingulis fructus loculamentis. Verum ſi omnes has minutias ad conſtituenda genera adhibere velimus, tot erunt genera, quot ſunt plantarum ſpecies.

Retuli elegantem hanc plantam ad Bermudianae genus a Tourneſortio primo definitum et a Dillenio confirmatum, poſtea vero a Linnaeo ſub alio, Siſyrinchii nempe titulo in generibus ſuis plantarum deſcriptum, quia petalorum numero, calyce vel embryone ceu futuri fructus rudimento cum eo conuenit. Reliquae differentiae ſpeciem non genus determinant.

Haec igitur Bermudianae ſpecies, vt clarius ab aliis diſtinguatur, ſequenti nomine inſigniri poteſt:

BERMVDIANA RADICE CARNOSA, FLORIBVS MACVLATIS, SEMINIBVS PVLPA OBDVCTIS;

His enim notis a reliquis ſpeciebus, de quibus bonae et perfectae deſcriptiones apud rei herbariae ſcriptores extant facillime, vel ſolo nomine diſtinguitur

Explicatio Tabulae.

Fig. 1. Plantam repraeſentat integram, radice excepta.
Fig. 2. Radicem plantae iunioris, quae nondum flores protulit.
Fig. 3. Floris magnitudinem naturalem. Lit. a piſtillum eius.
Fig. 4. Fructum nondum prorſus maturum cum reſiduis floris petalis ſpirae in modum contortis.
Fig. 5. Fructum maturum dehiſcentem.
Fig. 6. Baccas demonſtrat. Quae lit. a inſignita eſt, in China creuit; quae lit. b, Petropoli nata eſt e ſeminibus ex China miſſis.
Fig. 7. Semen repraeſentat.

CLASSIS

CLASSIS TERTIA

CONTINENS

HISTORICA.

DE VESTRITIO SPVRINNA LYRICO ET EIVS FRAGMENTIS.

AVCTORE
T. S. Bayero.

OPVS POSTVMVM.

Caſpar Barthius Veſtritii Spurinnae fragmenta, vt erant in MS. Martispurgenſi, inter venaticos ſcriptores et poſt aliquanto in Aduerſariis edidit. Cum *Veſprucii ad Martium* inſcriberentur, e Plinio, Martiale ipſisque fragmentis oſtendit, illum Veſtritium Spurinnam fuiſſe, hunc Marium. Veſtritii Romae familia equeſtris, quod quidem Thomas Reyneſius in titulo Vrbinate ſibi viſus eſt reperiſſe: (1)

VESITIO. DEXTRO. E
QVIT. ROMAN. PATRON.
MVNICIPI. ET. PLEBIS
OMNIBVS. HONORIB.
PERFVNCT.

Nimirum Reyneſius pro VESITIO reponit VESTRITIO. Equidem non video, quid id ſit, quod non etiam Veſitios equites Romae fuiſſe patitur Reyneſius. In alio titulo apud Ianum Gruterum: (2)

DIS. MANIBVS
T. VESTRITIO
HYGINO. ET.
VESTRITIAE
CONIVGI
CARISSIMAE. FECIT
RHAMNVS. LIBERT.

Ve

(1) Exſtat hic titulus etiam in Corpore Inſcriptionum Gruteriano, poſtremae edit. p. 392. 1. (2) p. 957. 5.

Vt huic Vestritio cognomen fuit Hygini, ita isti nostro, Spurinnae, qui generis sui memoriam tum belli tum pacis artibus insignitam reliquit. Natus mihi videtur A. C. XIII. dicam commodius postea, cur ita sentiam. Tota illius adolescentia et pars maxima virilis aetatis in foedissima tempora C. Caesaris, Tib. Claudii et Claudii Neronis incidit. Summum fere in amicitia locum apud M. Saluium Othonem ante principatum tenuit: hunc nihil ita commendauit Neroni, quam morum ad omnem turpitudinem congruentia, elegantiam ipsi interpretabantur. Quare dubium non est aut obscurum, Spurinnam iis moribus inseruiisse, quibus et Otho delectatus est et Nero Caesar. Coniectus deinde est in turbas reipublicae et Othonis Vitelliique contentiones de principatu. M. Saluius Otho aere alieno ingenti ad nouandum aliquid motus, militibus corruptis et Sulpitio Galba Imp. sublato, principatum inuasit. At A. Vitellius Germanicis legionibus suffultus ipse imperare malebat, quam Othoni subiici. In Dalmatia et Pannonia exercitus Othoni dicto audientes erant: his contra Vitellium mouentibus alia ab Vrbe manus, quinque praetoriae cohortes et equitum vexilla cum legione prima duobusque millibus gladiatorum profecta sunt ad Padum. Rectores his copiis vrbanis dati Annius Gallus et Vestritius Spurinna: ita Cornelius Tacitus tradit (1) et iis quidem verbis, vt haud multo maior ad imperandum auctoritas Annio tributa fuisse videatur, quam Spurinnae. Cum deinde dubio Marte inter Othonem atque Vitellium in Liguribus esset concursum, Caecina Alienus Vitellianis cum copiis

(1) Hist. l. II. c. 11.

copiis Cispadanam prouinciam intrauit, in qua Spurinna cum exercitu erat. Hic cernens Caecinae resisti non posse, se suosque intra Placentiae moenia recepit. Ibi constituit hostium vim repellere, si oppugnaretur: egredi et conserere manum cum hoste non e re est visum. Miles in diuersa tendebat, eam non prouidentiam ducis ratus, nihil temere statuentis, sed segnitiem. Tumultu militari coactus Vestritius ducere, sub noctem castra posuit ad Padum, eoque obsequio mitigatos suorum animos docendo monendoque tractare coepit, donec in potestate habuit, vt se in vrbem reduci paterentur. At Caecina vbi sensit Spurinnam rem certamini non committere, Placentiam obsidet. Primum atque iterum a munimentis repulsus, multis suorum desideratis, obsidionem soluit, Cremonam petit. Quo cognito Spurinna Annium Gallum de consiliis hostium certiorem fecit: is cum prima legione Placentiam venit, secutusque Caecinam parum abfuit, quin seditionibus militaribus agitatum opprimeret. Post non ita multo Otho Imp. superuenit: vocatus in castra Vestritius cum praesidio quod Placentiae habebat: erat enim constitutum Imperatori, ducibus nequidquam aduersantibus de summa rei praelio decernere. Pugnatum haud procul Bedriaco: Othoniani victi. Tamen militum fides victum non destituit: ipse casuum dubia metuens manus sibi intulit: ita partes in potestatem victoris concesserunt. Cum deinde Fl. Vespasianus ex Oriente aduentaret, auersis omnium ab A. Vitellio animis, non modo qui antea Othoni studuerant, sed Caecina quoque, qui magnas res pro Vitellio gesserat, ad nouum Imperatorem defecerunt.

Laeta reipublicae tempora ſub Veſpaſianis principibus: tanto infeſtiora claris viris Domitiano Imp. Obiit interim Spurinna variis perſimctus officiis, geſſit magiſtratus, prouincias rexit, (1) deinde etiam exercitibus Germanicis praefuit, Bructerum regem vi et armis induxit in regnum, et ferociſſimam gentem terrore nominis Romani perdomuit: quas ob res geſtas Spurinnae ſtatua triumphalis auctore Principe a Senatu eſt decreta. (2) Sunt, qui hanc expeditionem Traiani temporibus inſerunt: at Ioannes Iacobus Maſcouius, vir ſumma doctrina, graui argumento Neruae Imp. vindicauit. Cui ſententiae confirmandae tametſi quaedam etiam a nobis produci poſſe ſentio, tamen cum alia e contrario obſtare videntur, ampliandum potius duco. Magis apparet, Plinium ad Caluiſium de Spurinnae moribus ſcripſiſſe (4) eo anno, quo conſulatum adiit, tamen ante Septembrem menſem, quo menſe A. C. 100. a Traiano eſt ſuffectus Plinius. Eius enim anni epiſtolas liber tertius continet. Agebat tum in otio Spurinna, annum ſeptimum et ſeptuageſimum exceſſerat, aurium oculorumque vigore integro, agili viuidoque corpore. Ex quo poteſt confici, A. C. XXIII. natum. Quemadmodum otium collocauerit, Plinius venuſtiſſime more ſuo pinxit. Inter cetera ait: *ſcribebat, et quidem vtraque lingua, lyrica doctiſſime.* Habuit in matrimonio Cottiam, e qua Cottium filium nomine materni aui ſuſcepit. Is deceſſit, cum pater bello Germanico diſtineretur: adoleſcens, non tam ſtatua ob virtutem publice poſita nobilis, rato iis

(1) Plinius Epiſt. l. III. 1. (2) ib l. II. ep. 7. (3) In Hiſtoria Germanica p. 142. (4) l. III. ep. 1.

iis temporibus honoris genere, quam quod praeconem nactus est Plinium. (1) Ad quem autem Marium Vestritius haec sua scripserit, non ita certo adseuerauerim: tamen ad Marium Celsum puto. Is Galbae fidus, Illyricos exercitus sollicitauit. (2) Transgressus deinde ad Othonem cum Annio Gallo, Vestritio Spurinna, et Suetonio Paullino res contra Caecinam gessit. Ante praelium ad Bedriacum Marius Celsus Cos. cum ceteris ducibus sensit, summam rei in vnius diei certamen non oportere committi. A praelio A. Vitellio Imp. conciliatus in magistratu permansit, quamquam et dignitati eius insidiabatur Caecilius Simplex et vitae. (3) Si Barthium audias, hic quoque Spurinnae Marius quieti se dedit et voluptati, quae ex otio liberari ab ambitione seiuncto capi potest. Nam ad eum hoc Martialis epigramma trahit: (4)

Mari, quietae cultor et comes vitae,
Quo ciue prisca gloriatur Atina,
Has tibi gemellas, barbari decus luci,
Commendo pinus ilicesque Fauni.

Sin Martialis epigramma consideres, non Marium Celsum consularem, sed hominem obscurum dicit Atinatem secum rusticantem, nec dignum satis Vestritii amicitia. Contra ea opinor, Martialem alio epigrammate (5) vellicare Marium Celsum, tamquam ob pristinam dignitatem a multis cultum clientibus vt hominem nobilem, at fortuna tenui, aut modicis in opibus, quae tum iam paupertas Romae censebatur, et vt partium victarum ducem.

 Nec

(1) l. II, 7. l. III. 19. (2) Tacitus Hist. l. I. c. 31. l. II. c. 23. (3) Tacitus l. II. c. 60. (4) l. X. 92. (5) l. X. qui liber editus est Traiano Imp. epigr. 92.

Nec vocat ad coenam Marius, nec munera mittit,
Nec spondet, nec vult credere, sed nec habet.
Turba tamen non deest, sterilem quae curet amicum,
Heu quam persatuae sunt tibi, Roma, togae.

VESTRITII SPVRINNAE FRAGMENTA EX EMENDATIONE NOSTRA.

ODE PRIMA.

Dulces Vestritii iocos,
Seras Socraticae relliquias domus,
Ne laudes nimium, Mari:
Contemnit placitas nobilibus viris,
Soli qui sapientiae,
Post florem, tepidum nec stabilem gradum
Aetatis, senium dicat
Mentis compositae, qualis ab arduis
Ad se versa laboribus,
Quos non dat patriae, seposuit sibi
Annos, orba lucro graui,
Cum non ambitio tegmine candida
Illudat grauidae spei.
Nos sero pelagus vicimus inuium,
Quidquid viximus, interiit.
Aetas quem decies septima diuidit,
An leues memoret iocos,
Atque aptos citharae conciliet modos,
Surdis auriculis strepens?
Quisquis decrepiti corporis est, reus

Sat

Sat ſeſe eloquii probat,
Si ſeruet placidi iura ſilentii,
Si patrocinium otii.
Hoc cani grauitas verticis abſtitit,
Non vt ſponte ſua fugax:
Sed multi numeris carminis *

Deſunt reliqua.

ODE SECVNDA.

Faue, ſancta deûm ſata,
Nullis, pauperies, numinibus minor,
Tecum ſi ſapias tibi,
Vitae, magnificis hoſpes honoribus,
Abſoluens numerum tuae.

Deſunt aliqua.

In te laetitiae, ſordida cum quies
Lautis nuda tumultibus,
Ambit ſe patria fertilis in domo.

Deſunt quaedam.

Nullis vendita plauſibus,
Contemtrix querulí magno animo fori,
Nil non ſola potens, vbi
Furtiuis procerum ſuppliciis procul,
Regnas in proprio ſinu.
Felix, quem teneris mater ab vnguibus
Et regina rapis ſimul.
Non illum tumidis faſcibus arduum
Verſat nobilitas mala.
Curarum, facilem fluctibus, vt ſuis

Orbum sideribus rotet.
Illum splendida nox et decor improbe
*Caecus praecipitant ***

Cetera desunt.

ODE TERTIA.

Postquam fixa solo semel,
Spernit fluctiuagos ancora nauitas
In saeuum pelagus sequi,
Quam vitat grauido perniciem mari,
In sicco reperit sinu:
Haerentem tumidis littore dentibus
Aerugo propria exedit.
Ni desidia sancta quies leuet,
Turbas dum populi fugis,
Priuatis quaties fata tumultibus,
In te ludere peruicax.
Noctes et vigilans somnia si furor
Tortis non librat anguibus,
At presso gracilis cura manet pede.

ODE QVARTA.

Deest principium.

Ingrati nebulae desidii caput
Circumstant tepidum: sors nimia in probos
Incestis facilis annuit ausibus.
Sta contra assiduo pede.
*Multum turba tenax * fidei **
Vltra fata furit, non docilis fugae
*Desider ** praemio.*

Vestri-

Vestritii] In MS. Martispurgensi: Incipit Vesprucius Spurinna de contemtu seculi ad Martium. De Vesprutio siue potius Vestritio satis diximus. Barthius has odas pingue quiddam et minime eruditum sonare iudicauit: at ille, vt de Pane dicebat caprarius, ἐντί γε πικρὸς ϗ οἱ ἀεὶ δριμεῖα χολὰ ποτὶ ῥινὶ κάθηται. Primum in titulo aliquid barbari deprehendere sibi est visus, cum *seculum* more maiorum nostrorum, sanctorum hominum, dicatur, *quod viuimus aeui*; addit astute: *votis coelestia anhelantes*; sed nihil ad rem. *Seculum* aetate Vestritii dixere, vt *aeuum* et αἰῶνα. Late patuit istarum vis vocum; nam *aeuum*, vt Censorinus de die natali c. 16. *tempus immensum sine origine et fine*, vt Varro de lingua Latina p. 46. ed. Scal. *aetas omnium annorum*. Tamen etiam arctissimo spatio, vitae decursum dixere *aeuum*. Lucretius l. II. v. 16.

quantisque periclis
Degitur hoc aeui quodcumque est?

Sic αἰῶνα Homerus Odyss. E. 151.

οὐδέ ποτ' ὄσσε
Δακρυόφιν τέρσοντο, κατείβετο δε γλυκὺς αἰών.

Loca sunt in eo alia paene infinita. Eustathius ad istum locum interpretatur τὴν ζωὴν, ἡ φθίνοι τοῖς μακροῖς θρήνοις, sic scholia minora quoque. Solon apud Herodotum l. I. c. 32. τελευτήσαντα καλῶς τὸν αἰῶνα. Ita *seculum* non modo centum annorum aeuitatem dicebant, sed etiam suam quisque aetatem et suorum aequalium. Cicero in Paradoxis: *ego etiam in huius seculi errore versor*, et alibi, *insolentia huius seculi*. Post id coeptum est dici non, vt oratorem delectauit, *hoc seculum*, sed dumtaxat, *seculum*.

Plinius

DE VESTRITIO SPVRINNA LYRICO ET EIVS FRAGMENTIS.

AVCTORE
T. S. Bayero.

OPVS POSTVMVM.

Caspar Barthius Vestritii Spurinnae fragmenta, vt erant in MS. Martispurgensi, inter venaticos scriptores et post aliquanto in Aduersariis edidit. Cum *Vesprucii ad Martium* inscriberentur, e Plinio, Martiale ipsisque fragmentis ostendit, illum Vestritium Spurinnam fuisse, hunc Marium. Vestritii Romae familia equestris, quod quidem Thomas Reynesius in titulo Vrbinate sibi visus est reperisse: (1)

VESITIO. DEXTRO. E
QVIT. ROMAN. PATRON.
MVNICIPI. ET. PLEBIS
OMNIBVS. HONORIB.
PERFVNCT.

Nimirum Reynesius pro VESITIO reponit VESTRITIO. Equidem non video, quid id sit, quod non etiam Vesitios equites Romae fuisse patitur Reynesius. In alio titulo apud Ianum Gruterum: (2)

DIS. MANIBVS
T. VESTRITIO
HYGINO. ET.
VESTRITIAE
CONIVGI
CARISSIMAE. FECIT
RHAMNVS. LIBERT.

Ve

(1) Exstat hic titulus etiam in Corpore Inscriptionum Gruteriano, postremae edit. p. 392. 1. (2) p. 957. 5.

Vt huic Veſtritio cognomen fuit Hygini, ita iſti noſtro, Spurinnae, qui generis ſui memoriam tum belli tum pacis artibus inſignitam reliquit. Natus mihi videtur A. C. XIII. dicam commodius poſtea, cur ita ſentiam. Tota illius adoleſcentia et pars maxima virilis aetatis in foediſſima tempora C. Caeſaris, Tib. Claudii et Claudii Neronis incidit. Summum fere in amicitia locum apud M. Saluium Othonem ante principatum tenuit: hunc nihil ita commendauit Neroni, quam morum ad omnem turpitudinem congruentia, elegantiam ipſi interpretabantur. Quare dubium non eſt aut obſcurum, Spurinnam iis moribus inſeruiiſſe, quibus et Otho delectatus eſt et Nero Caeſar. Coniectus deinde eſt in turbas reipublicae et Othonis Vitelliique contentiones de principatu. M. Saluius Otho aere alieno ingenti ad nouandum aliquid motus, militibus corruptis et Sulpitio Galba Imp. ſublato, principatum inuaſit. At A. Vitellius Germanicis legionibus ſuffultus ipſe imperare malebat, quam Othoni ſubiici. In Dalmatia et Pannonia exercitus Othoni dicto audientes erant: his contra Vitellium mouentibus alia ab Vrbe manus, quinque praetoriae cohortes et equitum vexilla cum legione prima duobusque millibus gladiatorum profecta ſunt ad Padum. Rectores his copiis vrbanis dati Annius Gallus et Veſtritius Spurinna: ita Cornelius Tacitus tradit (1) et iis quidem verbis, vt haud multo maior ad imperandum auctoritas Annio tributa fuiſſe videatur, quam Spurinnae. Cum deinde dubio Marte inter Othonem atque Vitellium in Liguribus eſſet concurſum, Caecina Alienus Vitellianis cum copiis

(1) Hiſt. l. II. c. 11.

copiis Cispadanam prouinciam intrauit, in qua Spurinna cum exercitu erat. Hic cernens Caecinae resisti non posse, se suosque intra Placentiae moenia recepit. Ibi constituit hostium vim repellere, si oppugnaretur: egredi et conserere manum cum hoste non e re est visum. Miles in diuersa tendebat, eam non prouidentiam ducis ratus, nihil temere statuentis, sed segnitiem. Tumultu militari coactus Vestritius ducere, sub noctem castra posuit ad Padum, eoque obsequio mitigatos suorum animos docendo monendoque tractare coepit, donec in potestate habuit, vt se in vrbem reduci paterentur. At Caecina vbi sensit Spurinnam rem certamini non committere, Placentiam obsidet. Primum atque iterum a munimentis repulsus, multis suorum desideratis, obsidionem soluit, Cremonam petit. Quo cognito Spurinna Annium Gallum de consiliis hostium certiorem fecit: is cum prima legione Placentiam venit, secutusque Caecinam parum abfuit, quin seditionibus militaribus agitatum opprimeret. Post non ita multo Otho Imp. superuenit: vocatus in castra Vestritius cum praesidio quod Placentiae habebat: erat enim constitutum Imperatori, ducibus nequidquam aduersantibus de summa rei praelio decernere. Pugnatum haud procul Bedriaco: Othoniani victi. Tamen militum fides victum non destituit: ipse casuum dubia metuens manus sibi intulit: ita partes in potestatem victoris concesserunt. Cum deinde Fl. Vespasianus ex Oriente aduentaret, auersis omnium ab A. Vitellio animis, non modo qui antea Othoni studuerant, sed Caecina quoque, qui magnas res pro Vitellio gesserat, ad nouum Imperatorem defecerunt.

Laeta reipublicae tempora sub Vespasianis principibus: tanto infestiora claris viris Domitiano Imp. Obiit interim Spurinna variis perfunctus officiis, gessit magistratus, prouincias rexit, (1) deinde etiam exercitibus Germanicis praefuit, Bructerum regem vi et armis induxit in regnum, et ferocissimam gentem terrore nominis Romani perdomuit: quas ob res gestas Spurinnae statua triumphalis auctore Principe a Senatu est decreta. (2) Sunt, qui hanc expeditionem Traiani temporibus inserunt: at Ioannes Iacobus Mascouius, vir summa doctrina, graui argumento Neruae Imp. vindicauit. Cui sententiae confirmandae tametsi quaedam etiam a nobis produci posse sentio, tamen cum alia e contrario obstare videntur, ampliandum potius duco. Magis apparet, Plinium ad Caluisium de Spurinnae moribus scripsisse (4) eo anno, quo consulatum adiit, tamen ante Septembrem mensem, quo mense A. C. 100. a Traiano est suffectus Plinius. Eius enim anni epistolas liber tertius continet. Agebat tum in otio Spurinna, annum septimum et septuagesimum excesserat, aurium oculorumque vigore integro, agili viuidoque corpore. Ex quo potest confici, A. C. XXIII. natum. Quemadmodum otium collocauerit, Plinius venustissime more suo pinxit. Inter cetera ait: *scribebat, et quidem vtraque lingua, lyrica doctissime.* Habuit in matrimonio Cottiam, e qua Cottium filium nomine materni aui suscepit. Is decessit, cum pater bello Germanico distineretur: adolescens, non tam statua ob virtutem publice posita nobilis, raro iis

(1) Plinius Epist. l. III. 1. (2) ib l. II. ep. 7. (3) In Historia Germanica p. 142. (4) l. III. ep. 1.

iis temporibus honoris genere, quam quod praeconem nactus est Plinium. (1) Ad quem autem Marium Vestritius haec sua scripserit, non ita certo adseuerauerim: tamen ad Marium Celsum puto. Is Galbae fidus, Illyricos exercitus sollicitauit. (2) Transgressus deinde ad Othonem cum Annio Gallo, Vestritio Spurinna, et Suetonio Paullino res contra Caecinam gessit. Ante praelium ad Bedriacum Marius Celsus Cos. cum ceteris ducibus sensit, summam rei in vnius diei certamen non oportere committi. A praelio A. Vitellio Imp. conciliatus in magistratu permansit, quamquam et dignitati eius insidiabatur Caecilius Simplex et vitae. (3) Si Barthium audias, hic quoque Spurinnae Marius quieti se dedit et voluptati, quae ex otio liberari ab ambitione seiuncto capi potest. Nam ad eum hoc Martialis epigramma trahit: (4)

Mari, quietae cultor et comes vitae,
Quo ciue prisca gloriatur Atina,
Has tibi gemellas, barbari decus luci,
Commendo pinus ilicesque Fauni.

Sin Martialis epigramma consideres, non Marium Celsum consularem, sed hominem obscurum dicit Atinatem secum rusticantem, nec dignum satis Vestritii amicitia. Contra ea opinor, Martialem alio epigrammate (5) vellicare Marium Celsum, tamquam ob pristinam dignitatem a multis cultum clientibus vt hominem nobilem, at fortuna tenui, aut modicis in opibus, quae tum iam paupertas Romae censebatur, et vt partium victarum ducem.

Rr 2 *Nec*

(1) l. II. 7. l. III. 19. (2) Tacitus Hist. l. I. c. 31. l. II. c. 23. (3) Tacitus l. II. c. 60. (4) l. X. 92. (5) l. X. qui liber editus est Traiano Imp. epigr. 92.

Nec vocat ad coenam Marius, nec munera mittit,
Nec spondet, nec vult credere, sed nec habet.
Turba tamen non deest, sterilem quae curet amicum,
Heu quam persatuae sunt tibi, Roma, togae.

VESTRITII SPVRINNAE FRAGMENTA
EX EMENDATIONE NOSTRA.

ODE PRIMA.

Dulces Vestritii iocos,
Seras Socraticae relliquias domus,
Ne laudes nimium, Mari:
Contemnit placitas nobilibus viris,
Soli qui sapientiae,
Post florem, tepidum nec stabilem gradum
Aetatis, senium dicat
Mentis compositae, qualis ab arduis
Ad se versa laboribus,
Quos non dat patriae, seposuit sibi
Annos, orba lucro graui,
Cum non ambitio tegmine candida
Illudat grauidae spei.
Nos sero pelagus vicimus inuium,
Quidquid viximus, interiit.
Aetas quem decies septima diuidit,
An leues memoret iocos,
Atque aptos citharae conciliet modos,
Surdis auriculis strepens?
Quisquis decrepiti corporis est, reus

Sat

Sat sese eloquii probat,
Si seruet placidi iura silentii,
Si patrocinium otii.
Hoc cani grauitas verticis abstitit,
Non vt sponte sua fugax:
*Sed multi numeris carminis **

Desunt reliqua.

ODE SECVNDA.

Faue, sancta deûm sata,
Nullis, pauperies, numinibus minor,
Tecum si sapias tibi,
Vitae, magnificis hospes honoribus,
Absoluens numerum tuae.

Desunt aliqua.

In te laetitiae, sordida cum quies
Lautis nuda tumultibus,
Ambit se patria fertilis in domo.

Desunt quaedam.

Nullis vendita plausibus,
Contemtrix queruli magno animo fori,
Nil non sola potens, vbi
Furtiuis procerum suppliciis procul,
Regnas in proprio sinu.
Felix, quem teneris mater ab vnguibus
Et regina rapis simul.
Non illum tumidis fascibus arduum
Versat nobilitas mala.
Curarum, facilem fluctibus, vt suis

Orbum sideribus rotet.
Illum splendida nox et decor improbe
*Caecus praecipitant ***

Cetera desunt.

ODE TERTIA.

Postquam fixa solo semel,
Spernit fluctiuagos ancora nauitas
In saeuum pelagus sequi,
Quam vitat grauido perniciem mari,
In sicco reperit sinu:
Haerentem tumidis littore dentibus
Aerugo propria exedit.
Ni desidia sancta quies leuet,
Turbas dum populi fugis,
Priuatis quaties fata tumultibus,
In te ludere peruicax.
Noctes et vigilans somnia si furor
Tortis non librat anguibus,
At presso gracilis cura manet pede.

ODE QVARTA.

Deest principium.

Ingrati nebulae desidii caput
Circumstant tepidum: sors nimia in probos
Incestis facilis annuit ausibus.
Sta contra assiduo pede.
*Multum turba tenax * fidei **
Vltra fata furit, non docilis fugae
*Desider ** praemio.*

Vestri-

Vestritii] In MS. Martispurgensi: Incipit Vesprucius Spurinna de contemtu seculi ad Martium. De Vesprutio siue potius Vestritio satis diximus. Barthius has odas pingue quiddam et minime eruditum sonare iudicauit: at ille, vt de Pane dicebat caprarius, ἐντί γε πικρὸς καὶ οἱ ἀεὶ δριμεῖα χολὰ ποτὶ ῥινὶ κάθηται. Primum in titulo aliquid barbari deprehendere sibi est visus, cum *seculum* more maiorum nostrorum, sanctorum hominum, dicatur, *quod viuimus aeui*; addit astute: *votis coelestia anhelantes*; sed nihil ad rem. *Seculum* aetate Vestritii dixere, vt *aeuum* et αἰῶνα. Late patuit istarum vis vocum; nam *aeuum*, vt Censorinus de die natali c. 16. *tempus immensum sine origine et fine*, vt Varro de lingua Latina p. 46. ed. Scal. *aetas omnium annorum*. Tamen etiam arctissimo spatio, vitae decursum dixere *aeuum*. Lucretius l. II. v. 16.

quantisque periclis
Degitur hoc aeui quodcumque est!

Sic αἰῶνα Homerus Odyss. E. 151.

οὐδέ ποτ' ὄσσε
Δακρυόφιν τέρσοντο, κατείβετο δε γλυκὺς αἰών.

Loca sunt in eo alia paene infinita. Eustathius ad istum locum interpretatur τὴν ζωὴν, ἡ φθίνει τοῖς μακροῖς θρήνοις, sic scholia minora quoque. Solon apud Herodotum l. I. c. 32. τελευτήσαντα καλῶς τὸν αἰῶνα. Ita *seculum* non modo centum annorum aeuitatem dicebant, sed etiam suam quisque aetatem et suorum aequalium. Cicero in Paradoxis: *ego etiam in huius seculi errore versor*, et alibi, *insolentia huius seculi.* Post id coeptum est dici non, vt oratorem delectauit, *hoc seculum*, sed dumtaxat, *seculum.*

Plinius

Plinius ad hunc ipsum Spurinnam l. V. ep. 17. *faueo seculo, ne sit sterile et effoetum*, et ad Cornelium Tacitum l. VII. ep. 33. *Diuus Nerua non mihi solum, sed etiam seculo gratulatus est, cui exemplum simile antiquis contigisset.* Tacitus ipse Hist. l. II. c. 37. Paullinum *non sperasse corruptissimo seculo tantam vulgi moderationem.* In nummis frequens: SECVLVM FRVGIFERVM. SECVLVM FOECVNDVM.

Igitur de *seculo*, Barthii accusatio nihili est: at totum isthuc *de contemtu seculi*, non item vetustatem et Vestritium sapit; est igitur totum hoc librarii christiani.

Seras Socraticae] Domus Socratica Horatio l. I. Ode XXIX. 14. philosophia Socratis et disciplina:

Cum tu coëmtos vndique nobiles
Libros Panaetl, Socraticam et domum,
Mutare loricis Iberis,
Pollicitus meliora, tendis.

At Vestritius non philosophiam respicit, verum Socratis festiuam in dicendo cauillationem, quam et domus eius, omnes Socraticae scholae philosophi consectati sunt, cum tota eius μαιευτική, nemo tamen excellentius Platone. Erant ioci liberales, digni philosophiae grauitate. Post id credo certi homines spurcitiem omnem leuandae caussa inuidiae Socraticos iocos dixere. Ita εὐτραπελίαν Aristotelis aetate Graeci dicebant vitae genus plenum officiis, gratia, comitate, verbis quodam sale conditis, oris corporisque motu ad omnem honestatem et humanitatem composito. At M. Tullii temporibus, vt solent virtutum et honestarum

nestarum rerum nomina turpiculis praetexi, adeo nihil casti et decori ἐν εὐτραπελίᾳ et in *vrbanitate* esse videbatur, vt Volumnius et Papirius Paetus vel ea caussa εὐτράπελοι haberentur, quod essent spurcissimi, Paetus adeo, vt eum Cicero reprimeret l. IX. ep. 22. *amo verecundiam.* Et iterum eximius orator, *seruo et seruabo Platonis verecundiam.* Adi l. VII. ep. 32. Octauius Minucii Felicis c. 28. *apud vos tota impudicitia vocatur vrbanitas.* Paullus Apostolus ad Ephes. V. 4. αἰσχρότης καὶ μωρολογία ἢ εὐτραπελία, quo loco εὐτραπελία, vt tum in ore vulgi erat, vtrumque comprehendit et αἰσχρότητα et μωρολογίαν, cui opponit εὐχαριστίαν siue *comitatem*, qualem c. IV. v. 29. descripsit, λόγον ἀγαθὸν πρὸς οἰκοδομὴν τῆς χρείας, ἵνα δῷ χάριν τοῖς ἀκούουσι. Vestritius, vt eius mores in Othonis Neronisque contubernio fuisse comperimus, obscoeni oris foetores *Socraticae domus reliquias* dixit, *seras* vero, cum tempus perpetui aeui inde a Socrate metiretur, a quo essent quasi ductae.

contemnit placitas] *reliquias placitas*, quae placuere et placent. Virgilius Aen. IV. 38. *placitone etiam pugnabis amori?* In Ciri: *et placitum paucis ausa est adscendere collem.*

nobilibus viris] In MS ** *bilibus*: ergo Barthius *mobilibus*: malo *nobilibus*, vt dicat *nobiles* philosophos Socraticae domus, eo modo quo Horatius *nobiles libros Panaeti.* Etiam apud Rutilium Numantianum Barthius scribi maluit;

Factus et Alcides mobilitate deus,

Almelouenius *ferocitate.* Nihil opus est his tumultibus, bene habet *nobilitate.* Paullo post is ipse Rutilius:

Nobilis ad summas gloria venit opes.

De hac nobilitate Herculis considera Pindarum in Nemeis, Ode A, et Tzetzen ad Lycophronem v. 33. 39.

Soli] Est, vt vides, a *solo*, quod non notarem, nisi Barthius a *sole* maluisset.

Post florem] Ego ita distinxi, quae ac Barthio confusa erant. *Tepidum*, quo sensu praetextatum est Horatio, Ode IV. 19.

quo calet iuuentus
Nunc omnis: et mox virgines tepebunt.

Etiam *adolescentes tepidos* dixere Romani, propter aetatem lasciuiae obnoxiam: *non stabilem gradum*, procliuem in vitia. Et *florem* Vestritius, vt *ver* Catullus ad Manlium:

Tempore quo primum vestis mihi tradita pura est,
Iucundum cum aetas florida ver ageret,
Multa satis lusi.

Instabili et tepido gradui adolescentiae *senium mentis compositae* opponitur. Seneca ep. II. *primum argumentum compositae mentis existimo, posse consistere et secum morari: ista lectio multorum auctorum habet aliquid vagum et instabile.* Anicius Boethius initio Consolationis philosophicae: *Qui cecidit, stabili non erat ille gradu* Id l. I. metro IV.

Quisquis composito serenus aeuo
Fatum sub pedibus dedit superbum.

ab arduis] *mens ab arduis laboribus ad se versa*, quod otium erat honestum atque liberale rei publicae muneribus defuncto. Sallustius principio Catilinariae historiae: *vbi animus ex multis miseriis atque periculis requieuit, et mihi reliquam aetatem a re publica procul habendam decreui.*

dat patriae] Sine dubio sic, cum in MS. esset, *det pa* **

orba

orba lucro] lucro ait mentem carere, quod molestiam et fastidium contineat. Terentius in Heautont. A. IV. Sc. IV. v. 25. *nae ille haud scit, paullum lucri quantum ei damni apportet.*

cum non ambitio] Erat in MS. ** *ambitio tegmine candida.* Credidi initio, *tegmine candido* esse *capite operto canis*, qua quis aetate non vltra honores ambiat, vt apud Virgilium Tityrus: *candidior postquam tondenti barba cadebat.* Malim vero nunc *ambitionem tegmine candidam.* Respicit non modo candidatos priscos, sed etiam ambitionis speciem externam, laetam illam quidem, at cum interiori molestia coniunctam: candidam, splendentem et laetam, vt Catullus *candidos soles.* Ambitio illudit *grauidae spei.* Grauida, quod spes alia nascatur ex alia, et subinde nos recreet: habet enim ψεύδεα θ' αἱμυλίυς τε λόγυς in pectore: tandem saepe atque multum ab ambitione atque spe illusus animus, rebus quas sperauerat partis, neque expletus tamen, isthuc Aiacis Sophoclei ingemiscit, ἰώ μοι γέλωτος, οἷον ὑβρίσθην ἄρα.

pelagus] Res dicit gestas et munera rei publicae plena procellis et periculis, vt alia in re Horatius Ode V. 1.

me tabula sacer
Votiua paries indicat humida
Suspendisse potenti
Vestimenta maris deo.

Archilochus apud Cedrenum p. 792. senectuti ait συμφέρειν τὴν ἀπραγμοσύνην.

quidquid viximus] Prudentius venuste in principio:

Per quinquennia iam decem,
Ni fallor, fuimus:

Inſtat terminus, et diem
Vicinum ſenio. iam deus applicat.

Et poſt paullo:

Cum iam quidquid id eſt, mors aboleuerit.

Aetas quem decies ſeptima diuidit] Decies ſeptima aetas ab anno ſeptuageſimo decurrens ita me in dies ſuos et annos diuidit, vt quaeque dies illo in ſpatio quandam mei partem decerptura ſit. *Diuidit*, vt apud Martialem l. X. 10.

Diuiſit noſtras purpura veſtra togas.

Malo enim *diuiſit* quam Gruterianum *dimiſit*, quod Ms. Berolinenſe quoque habet. Tua, inquit, purpura noſtras togas exuit, et nemine in partem admiſſo, rapuit ſola omnes. Id eo dicit, quod Paullus homo nobilis, potens et locuples humillima quaeque officia ita accurate obiret, vt nulli quidquam concederet.

an leues] Etiam Horatius Carm. l. I. Ode XV. v. 35. in choriambico trimetro choreum poſuit:

Poſt certas hiemes vret Achaicus
Ignis Iliacas domos.

Tibullus l. I. El. I. v. 85.

Iam ſubrepet iners aetas, nec amare decebit,
Dicere nec cano blanditias capite.

Olympius Nemeſianus Ecl. I. 9.

Hos annos canamque meam, mihi care, ſenectam
Tu iuuenis carusque deis in carmina cogis?
Viximus et calamis verſus cantauimus olim,
Dum ſecure hilares aetas ludebat amores:
Nunc album caput, et Veneres tepuere ſub annis.

Surdis auriculis] meis, quae iam obriguere ad voluptates.

Quis-

Quisquis decrepiti] Haec ita restitui, cum esset e Ms. editum a Barthio:

Quisquis decrepiti corporis est reus,
Sat sese eloquii probat.
Si ser placidi iura silentii.*

Reus eloquii, vt apud Tullium, *Milo reus praeclari facti.* Leuis est traiectio: *senex*, *cum reus est eloquentiae*, *sat sese probat*, siue, *se purgat et aliis satisfacit.* Ceterum vt ait Horatius l. III. Ode II. 25.

Est et fideli tuta silentio
Merces.

Quem versum seu Augustus Horatio siue Horatius Augusto Caesari debuit: est enim apud Plutarchum in Apophthegmatis Augusti ad Athenodorum: ἔςι ϗ σιγῆς ἀκίνδυνον γέρας. Euripides in Oreste v. 639.

ἔςι δ' ȣ̃ σιγὴ λόγȣ
Κρείσσων γένοιτ' ἂν. ἔςι δ' ȣ̃ σιγῆς λόγος.

Tacitus de Afro oratore Annal. l. IV. c. 52. *prosperiore eloquentiae quam morum fama fuit: nisi quod aetas extrema multum etiam eloquentiae demsit, dum fessa mente retinet silentii impatientiam.*

Si patrocinium otii.] Censeo ἀπὸ κοινȣ̃, *seruet.*

hoc] ab hoc vitae genere mea senectus, non tamen sponte sua abstitit. Ceteris mederi non possum.

Faue] Verbum solemne multum gratiae hoc loco habet. Tibullus *Phoebe faue*, Naso *Vesta faue*, Virgilius *Lucina faue.* Iambus vt in illo Catulli carmine seculari:

Dianae sumus in fide
Puellae et pueri integri.

 Sancta

Sancta deûm sata] Graecorum imitatione θεογενὴς, διογενὴς diis genita, quod et ipsi pauperes essent dii, praesertim, vt cauillatur Aristophanes in Pluto v. 540. Iupiter. Aelianus apud Eustathium in Periegeten v. 45. aras paupertati dedicatas commemorat, sicuti apud Athenaeum Callisthenes tradit, Lacedaemone famis simulacrum iuxta solium Apollinis consecratum fuisse. At hi vt pestem colebant, ita et paupertatem et famem, ne noceret. Spurinna vt Socratica e domo tamquam beneficium deorum immortalium respicit; erat enim tota domus illa araneis plena. Aristophanes in Nubibus v. 101. μεριμνοφροντιστὰς, ὠχριῶντας, ἀνυποδήτους vocat Socraticos, et vbique illuuiem sordesque familiae obiicit. Deinde Socratis exemplo philosophi in commendanda paupertate multi fuere, vt sunt in ea quaedam vitae commoda, nisi si esurias et plores, quod non pauperis est sed mendici. Theocritus in Ἀλιεῦσι,

> Ἀ πενία, Διόφαντε, μόνα τὰς τέχνας ἐγείρει,
> Αὐτὰ τῶ μόχθοιο διδάσκαλος.
> *Paupertas, Diophante, sola artes excitat,*
> *Ipsa miseri magistra.*

tecum si sapias tibi] Si tuis contenta bonis a cupiditatibus abstineas. Aristophanes in Pluto v. 551.

> πτωχοῦ μὲν γὰρ βίος, ζῆν ἐστι μηδὲν ἔχοντα
> τοῦ δὲ πένητος, ζῆν φειδόμενον καὶ τοῖς ἔργοις προσ-
> έχοντα
> περιγίγνεσθαι δ᾽αὐτῷ μηδὲν, μὴ μέντοι μηδ᾽ἐπιλείπειν.
> *Mendici vita est, nihil habentem viuere,*
> *At pauperis vita, viuere parce et rebus suis vacare,*
> *Nihil vt supersit ipsi, nihil vero etiam vt desit.*

Vitae

Vitae magnificis hospes honoribus absoluens numerum tuae] In MS. *Vlta*, inde Barthius, *Vltra*. Hoc quidem nihil est. Scripsisse puto Spurinnam, vt nos edidimus,

Magnificis hospes honoribus,

vitam peragens alienus ab honoribus et ambitione.

Lautis nuda] In MS. *vnda*. Recordare *lautos tumultus* in domo Euclionis apud Plautum in Aulularia.

ambit se patria fertilis in domo] MS. *patriae*. Se ipsam sordida ob paupertatem quies ambit et amplectitur, se contenta est ipsa, vt apud illum Horatianum colonum, qui paterna rura colebat Epodon II.

Beatus ille, qui procul negotiis,
Vt prisca gens mortalium,
Paterna rura bubus exercet suis,
Solutus omni foenore.

nullis vendita plausibus] Sic Barthius, cum esset in MS. *vendibilis*. Corrumpi se non sinit a populi assentationibus. Euclio Plautinus: *nemini credo, qui large blandu'st diues pauperi.*

contemtrix queruli magno animo fori] In MS. *magnanima*. Si te isthuc *magnanima* metri caussa offendit, lege *magno animo*. At Boëthius tamen etiam tribrachyn recepit, de Consolatione philosophica l. IIII. metro III. v. 14.

Flere dum parat, vlulat.

Sed hoc perquam insolens.

furtiuis] clandestinis procerum cruciatibus, quippe qui cum suis cupiditatibus, et cum aliorum inuidia, criminationibus, occultis insidiis, mille incommodis aliis conflictantur.

mater]

mater] quem paupertas inopi in domo natum ſibi vindicauit, proprium tota vita, quem inſtituit et formauit ſibi, μόνη ἀγαθῶν ἁπάντων ὅσα αἰτία, vt Comicus ait.

regina] vt Comicus in Pluto δέσποινα. Quem paupertas veluti mater et ſimul regina ſuo ſub imperio tenet. Regina et domina, amantium voces.

non illum tumidis faſcibus] Barthius e MS. *illum ** faſcibus.* ſublimem magiſtratibus et muneribus rei publicae.

nobilitas] *nobilitas curarum*, nobiles curae; magiſtratuum curae. Et *facilem fluctibus*, expoſitum fluctibus, periculis. Eſt enim *facilis* Maroni, tractabilis, mobilis.

ſuis orbum ſideribus] Ductum a nauigantibus, qui noctu cynoſuram ſuam reſpiciebant. Sidera paupertatis dicit ſapientiam, temperantiam, modeſtiam, humanarum rerum contemtum, quibus qui orbatus ſit, in eum quid ſibi fortuna non permittit?

ſplendida nox] Honores coniuncti cum obſcuris periculis. *Decor improbe caecus.* iidem honores in quibus inſidiae tectae non ſentiuntur. Seneca in Octauia v. 878.

bene paupertas
Humili tecto contenta latet;
Quatiunt altas ſaepe procellae
Aut euertit fortuna domos.

Hanc cantilenam Seneca perpetuo nobis inſuſurrat.

poſtquam] Eum dicit, qui relictis et magiſtratibus et honoribus otio ſe tradit, ſed minime liberali.

in

in suo reperit] reperit sine dubio, in MS *in suo repetit*: at si cui choreus non placet, legat *sicco*, quod etiam sensus postulat.

tumidis littore dentibus] Barthius e MS. *tumidis dentibus*. Etiam Virgilius *dentes* atque *morsus* ancorae attribuit.

ni te] nisi te sancta quies, philosophiae studium ab desidia leuet.

noctes et vigilans] In MS:

*Nos * vigilans somnis furor*
Tortis liberat anguibus.

Si, inquit, vigilans furor noctes et somnia non librat tortis anguibus, si facinorum conscientia noctes et somnia non suis exagitat terroribus, tamen minor aliqua cura inerti semper molesta erit. *Presso*: pede. Vt Horatius L. I. Ode XXVII.

et cubito remanete presso.

circumstant] *nebulae ingrati desidii circumstant*. Erat in MS. *circumstans*.

DE HYPERBOREIS

AVCTORE

T. S. Bayero.

Nulla res Hyperboreos per omnem Graeciam ita celebres fecit, quam quod facra ab iis in Delum mitterentur. Eas fuiffe frugum primitias triticeis mergitibus inuolutas Herodotus tradidit. (1) Virgines Hyperboreae pertulere. Antiquiffimarum nomina Delii ediderunt apud Herodotum, Ἄργιν ϗ Ὦπιν *Argin et Opin*, quae mox poft Apollinem et Dianam natos in Delo fuerint, Ilithyiae ob felices matrum Hyperborearum partus diuinam rem ex voto facturae: vita vero defunctae, et prope Artemifium (hoc eft, ad vulturnum feu orientem hibernum infulae, vbi fimulacrum Dianae erat, quod Ἀρτεμίσιον ἰδίως dicebant Delii, vt Hyperides in oratione Deliaca teftatur apud Harpocrationem) igitur prope Artemifium fepultae, quotannis folemni Deliorum carmine ludisque cultae funt. A Deliis hymnos eos accepere Iones et infulani. Erat autem praeterea haec cultus ratio, vt, poftquam facrificauerant, cinerem fpargerent ex ara fuper loculis Hyperborearum virginum. Hymnos primus Olen Lycius compofuit. (2) Paullo poft Argin et Opin in Delum venerunt ab Hyperboreis *Hyperoche* et *Laodice*. (3) In earum comitatu fuerunt quinque viri, qui deducerent. Verum etiam illae in Delo defunctae et in Artemifio,

(1) l. IV. c. 35. (2) Herodotus l. c. (3) Herodotus l. IV. c. 33. 35.

misso compositae sunt : (1) nec viri redierunt ad suos, qui quid virginibus factum sit, nunciarent. In Hyperoches et Laodices memoriam pueri Delii, et puellae tondebantur : et pueri quidem crines cum certa herba permistos consecrabant, puellae vero Deliae ante nuptias ponebant crines, et fuso circumuolutos super Hyperborearum monumento dedicabant. Callimachi hymnus in Delum *Vpin*, *Hecaërgen*, et *Loxo* nuncupat. *Vpis* est Herodoti *Opis*, et *Hecaërge* est *Argis*; sequitur *Laxo* Callimachi esse Herodoti *Laodicen*, haud difficili vocabulorum corruptela. Pausaniae, cum haec attingit, nescio quid accidit; aut lapsus aliquis memoriae eruditissimum scriptorem, aut ingens librariorum incuria nos fefellit. Apponam totum locum ex Eliacis prioribus. Herculem ait, (2) stirpem oleastri ab Hyperboreis deportasse ad Graecos: εἶναι δὲ ἀνθρώπους, οἱ ὑπὲρ τὸν ἄνεμον οἰκοῦσι τὸν βορέαν, πρῶτος μὲν ἐν ὕμνῳ τῷ ἐς Ἀχαιίαν ἐποίησεν Ὠλὴν ὁ Λύκιος· ἀφικέσθαι τὴν Ἀχαιίαν ἐς Δῆλον ἐκ τῶν ὑπερβορέων τούτων. ἔπειτα ᾠδὴν Μελάνωπος Κυμαῖος ἐς Ὦπιν καὶ Ἑκαέργην ᾖσεν ὡς ἐκ τῶν ὑπερβορέων καὶ αὗται πρότερον ἐς τὴν Ἀχαιίαν ἀφίκοντο καὶ ἐς Δῆλον. Venit mihi aliquando in mentem, locum Pausaniae ita emendandum esse: κομισθῆναι δ' ἐκ τῆς ὑπερβορέων γῆς τὸν κότινόν φασιν ὑπὸ τοῦ Ἡρακλέους ἐς Ἕλληνας. εἶναι δ' ἀνθρώπους, οἱ ὑπὲρ τὸν ἄνεμον οἰκοῦσι τὸν βορέαν. πρῶτος μὲν ἐν ὕμνῳ τῷ ἐς Ἄργιν ἐποίησεν Ὠλὴν ὁ Λύκιος, ἀφικέσθαι τὴν Ἄργιν ἐς Δῆλον ἐκ τῶν ὑπερβορέων τούτων. ἔπειτα ᾠδὴν Μελάνωπος Κυμαῖος ἐς Ὦπιν καὶ Ἑ-

 καέργην

(1) Praeter Herodotum Clemens Alexandrinus in paraenetico p. 29. (2) p. 392.

καέργην ἦσεν, ὡς αἱ Ἀθηναῖ ἐκ Ὑπερβορέων φυτὸν ἐλαίας ἐνέγκῃ ἐς τὴν Ἀχαΐαν ἀφίκοντο ἢ ἐς Δῆλον. (1) Ferunt stirpem oleastri ex Hyperboreis allatam fuisse ab Hercule ad Graecos: esse autem eos homines, qui ultra Boream ventum colunt: primus Olen Lycius, in hymno, quem in Argin cecinit, auctor est, Argin in Delum venisse ab his Hyperboreis. Post eum Melanopus Cumaeus carmen fecit in Opin et Hecaergen, quod ex his Hyperboreis etiam ipsae primum quidem in Achaiam; tum vero etiam in Delum venerint. Apud eundem Pausaniam Βοιὼ ἐπιχωρία γυνὴ Boea mulier Phocica auctor est, (2) cum alios Hyperboreos, tum Olenem Delphis oraculum Apollinis condidisse: Olenem vero primum et vaticinatum et ἑξάμετρον genus commentum.

Ἔνθα

(1) Liceat mihi, quod Deli et corrupti in Pausania loci mentio in memoriam reuocat, apponere bona cum venia lectorum. Stephanus Byzantius: Ὀλυμπίειον τόπος ἐν Δήλῳ, ὃν κτίσαντες Ἀθηναῖοι χρήμασιν Ἀδριανοῦ Νέας Ἀθήνας Ἀδριανὰς ἐκάλεσαν, ὡς Φλέγων ἐν Ὀλυμπιάδων πεντεκαιδεκάτῳ. τὸ ἐθνικὸν Ὀλυμπιεὺς ἢ Ὀλύμπιος, ὡς Βυζάντιος. In epistola de Theophrasti Delii praesidis monumento p. 59. sic forte emendari Stephanum posse suspicatus sum: Ὀλυμπίειον τόπος ἐν Δήλῳ, ὃν ἔκτισαν Ἀθηναῖοι χρήμασιν Ἀδριανοῦ (οὗ τῇ ἐς ἑαυτοὺς εὐνοίᾳ χρώμενοι, μηρίδα τῆς πόλεως) Νέας Ἀθήνας Ἀδριανὰς ἐκάλεσαν. Tandem subiunxi: verum ne sic quidem Stephanum scripsisse credo, ac ἐν Δήλῳ potius irrepsisse, et expungendum esse. Sic tum quasi pro imperio, aliisque, ut aliimus hariolabatur. Vatem me fuisse non pessimum vidi, postquam Phlegontis Olympionica exstare sensi in Scaligeriana Ἱστοριῶν συναγωγῇ e codice

Ἔνθα τοι εὔμνηςοι χρηςήριον ἐκτελέσαντο
Παῖδες ὑπερβορέων Παγασὸς, καὶ δῖος Ἀγυιεύς.
Ibi (inquit Boeo) *celebre oraculum tibi, Phoebe, condiderunt*
Filii Hyperboreorum Pagasus et diuinus Agyieus.

Enumeratis deinde aliis Hyperboreis, ita desinit carmen:
Ὠλήν θ', ὃς γένετο πρῶτος Φοίβοιο προφάτας,
Πρῶτος δ' ἀρχαίων ἐπέων τεκτήνατ' ἀοιδάν.
Et Olen, qui primus fuit Phoebi vates,
Primusque vetera carmina instituit scribere.

Ex his intelligo, antiquissimam fuisse Hyperboreorum in Apollinem Delium et Dianam religionem; ipsa autem nomina virginum Hyperborearum argumento sunt, Graecas fuisse, quae a septemtrione venerunt sacra ferentes

Parisiensi regio. Nam ad Olymp. 227. Ἀδριανὸς τότε Ὀλυμπιεῖον τὸ ἐν ταῖς Ἀθήναις, ἐν ᾧ καὶ αὐτὸς ἵδρυται, ἐξεποίησε, καὶ δράκοντα ἐς αὐτὸ Ἰνδίας κομισθέντα ἀνέθηκε. Nihil de Delo. Recte Stephanus *decimo quinto libro*. Holstenius: *scribe* πεντεκαιδεκάτῃ, *vt referatur non ad librum, sed ad Olympiadem*. Immo Phlegon in libros diuiserat totum opus chronicum. Cetera quoque in Stephano turbauit, vt puto, Hermolaus CPlitanus, non modo hoc ἐν Δήλῳ. Nam τὸ ἐθνικὸν Ὀλυμπιεὺς κ. τ. λ. totum hoc, inquam, nihil ad Ὀλυμπιεῖον, sed ad Ὀλύμπια, quod antecedit, vbi nunc in Stephano τὸ ἐθνικὸν omissum est. Miror Holstenium istum errorem non obseruasse, aut Thomam Pinedum: hos enim ad manus habeo. De Ryckio viderint alii. Veteres sane errores in Stephano, quibus Perusinus codex nullam medelam attulit. (2) p. 809.

tes Apollini. Scholiasta Callimachi (1) et Seruius censent, ab earum via Dianam nuncupatam fuisse Ουπιν. Crediderim potius, Dianam παρὰ τὴν ὄπιν dictam, ex quo Ionice Ουπις, Dorice Ωπις. Erat Diana etiam Nemesis, quae in consecratione templi Herodis Attici nomen ΡΑΜΝΟΥΣΙΑΣ ΟΥΠΙΣ gerit. Neque enim dubito, Argin seu Hecaergen a Dianae venationibus nomen habuisse. Hyperoche a cursu solis et lunae dicta, quae Apollinis et Dianae numina erant. Quis deinde Ἀπόλλωνα τὸν Λόξιον ab obliquo cursu Solis, aut Αγυιέα a viarum vrbanarum custodia ignorat? Inde Loxo et Agyeus ille. Hanc Apollinis religionem contemplanti mihi in mentem venit, Hyperboreos Graecos fuisse eos, qui sedem sibi in Thracia tractuque omni ad Pontum Euxinum atque Adriatici maris septemtrionem quaesiuere inde a Troiano bello. Tales fuisse reperio Hyllos in Liburnia, vt notum est e Dionysio Periegete, de quibus Scymnus Chius ex Eratosthene et Timaeo. Liburnis, inquit, finitimi sunt Bulini.

Ἑξῆς δὲ μεγάλη χερσόνησος Ὑλλικὴ,
Πόλεις δ' ἐν αὐτῇ φασι πέντε καὶ δέκα
Ὕλλους κατοικεῖν, ὄντας Ἕλληνας γένει.
Τὸν Ἡρακλέους γὰρ Ὕλλον οἰκιστὴν λαβεῖν,
Ἐκβαρβαρωθῆναι δὲ τούτους τῷ χρόνῳ
Τοῖς ἤθεσιν ἱστοροῦσι τοῖς τῶν πλησίον.

Post

(1) in Dianam v. 204.

Post haec magna est Chersonnesus Hyllica,
Vrbes autem in ea dicunt quindecim
Hyllos incolere, qui ab stirpe sint Graeci;
Nam Herculis filium Hyllum conditorem habuisse,
Barbaros autem factos esse paullatim
Narrant, e moribus vicinarum gentium.

Apollonii Rhodii Scholiasta (1) Eustathius ad Dionysium atque Stephanus Byzantius ab Hyllo Herculis filio deductam fuisse coloniam produnt. Is est Herculis ex Deianira filius, vt Apollodorus ceterique eum γενεαλογῦσι. Iam tota vita eius, vt ob res Peloponnesiacas ab eo gestas nota est, ab hac deductae fama coloniae abhorrere videtur: nihilo minus Hylli sunt antiquissimi iis in regionibus, quae Thracibus ab occasu vicinae sunt. Ab ortu et ad Pontum nihil dicam de Hylaea regione ad Borysthenem, quoniam id nomen quidem Graecum, non autem quod sciam, incolas Graecos habuit. Itaque Laurentius Begerus (2) frustra se torquet in numo inscripto ΥΛΑΙΥ (ο ante Υ tam parum reperitur in numis, vt oculos clarissimi antiquarii in hoc nomine facile fugere potuerit) atque eum numum neque referre audet ad hos Hylaeos, neque iisdem adimere. Nihil sane ad Hylaeos illos, immo neque ad illos in Liguria, (est enim eorum ἐθνικὸν ὑλλῆς) at verius ad Hylaeos in Locris. Stephanus: ἔςι καὶ πόλις Λοκρῶν τῶν Ὀζολῶν, ἧς τὸ ἐθνικὸν Υλαῖος. Id igitur Begero accidit in hoc numo, quod Goltio et Nonio in numo ΑΓΑΘΥΡΣΩΝ, qui non his Scythicis Agathyrsis, sed Siculis tribuen-

(1) Ad Argonauticorum l. IV. v. 525. (2) l. I. p. 368. Thes. Brand.

tribuendus fuit, quamquam Siculae vrbis ἐϑνικὸν Ἀγαϑυρσαῖος tantummodo exstat. At Callipidés noti ex Herodoto, qui illa aetate iam ita desciuerant a Graecis moribus, vt Ελληνες Σκύϑαι dicerentur. Iisdem temporibus Geloni antea Graeci Budinis Scythis permisti, eorum etiam linguam, parum aberat, quin et mores omnes adsciuerant, vt alias ostendi ex Herodoto. Geloni longe ante Megaricas Heracleotarum colonias, longe ante Milesias ingressi terras Thracum et Getarum traiectoque Istro Budinis permisti sunt. Panticapaeum ipso in ore Maeotidis situm Milesiorum colonia fuit Plinio (1) et Strabone (2) testibus. Eustathius ad Dionysium Periegeten, (3) κτίσμα παιδὸς Αἰήτου. Si is fuit Aeetes Solis filius, qui Ephyraeae imperauit, inde profectus est in Colchidem, pater Medeae et tot fabularum, fuit filius eius haud ita multo iunior Hercule. Stephanus Byzantius: Παντικάπαιον ἐκτίσθη παρὰ Αἰήτου παιδὸς, λαβόντος τὸν τόπον παρὰ Ἀγαήϑου τοῦ Σκυϑῶν βασιλέως. Nugae: quis enim Colchicis fabulis tantum tribuet? tamen fama videtur vetus, Panticapaeum iam ante Milesios colonos Graecam vrbem fuisse. Milesii autem eodem tempore Olbiam et Istrum vrbem condiderunt Plinio et Strabone testibus. Olbiam, quae et Borysthenes, (auctorem habemus Herodotum) perperam Pomponius Mela et Iornandes et Geographus Rauennas vrbes diuersas fuisse tradunt. Teste Herodoto ciues se malebant Olbitas vocari, Borysthenitarum enim nomen Scythis vicinis ad Borysthenem relinquebant. Tamen Herodotus ipse Olbitas etiam Borysthenitas appellauit, et

(1) l. IV. c. 12. (2) p. 358. (3) v. 311.

et Bion ille Olbita haud aliter quam Borysthenita a Diogene Laertio, Athenaeo, Hesychio Milesio, ceteris nuncupatur. Quare Graecis notius semper hoc nomen fuit, adeo vt alterius memoria etiam apud ipsos Olbitas intermortuum sit, cum Dio Chrysostomus ipsa in vrbe haud aliter ciues diceret quam Borysthenitas. Ab Olbia est *Olbiopolis*, Plinii et geographi Rauennatis *Olbiapolis* et *Oliuapolis*. (1) Situm vrbis Strabo (2) ducentis a Borysthene stadiis definiuit. Herodotus, Stephanus, Dio Chrysostomus, Scymnus Chius, incertus auctor peripli Pontici intra Borysthenem et Hypanim fluuios. Scilicet eo in loco, vbi fluuii exonerantur, magis tamen ad Hypanim. Quare in Herodoto ὑπὸ τῷ Ὑπάνι sine dubio emendari debet ἐπὶ τῷ Ὑπάνι. Nam Dio Chrysostomus disertissime omnium scribit, (3) vrbem a Borysthene nomen accepisse ob magnitudinem et pulcritudinem fluminis, sitam vero esse ad Hypanim supra Hippolai promontorium, quod rostri naualis ad modum excurrat in stagnum, quod ducentorum amplitudine stadiorum a promontorio ad mare est, neque minorem esse eo loco fluminum latitudinem. Fuit autem Milesiorum colonia teste Strabone, Stephano, et quem ante alios dicere conueniebat, Herodoto. Hinc Miletopolis Plinio. Claudius Ptolemaeus ad occidentem hibernum Olbiae ponit μητρόπολιν, nescio quam. Credo μιλητόπολιν in animo habuisse, et censuisse vrbem esse diuersam ab Olbia. Video idem existimasse Ioannem Harduinum. Eusebius Olbiam conditam ponit Olymp. XXXI. anno 2. qui est A. P. I. 4059. Retinuere Olbitae linguam et

(1) p. 267. 354. ed. Porch. (2) p. 151. (3) p. 144.

mores metropoleos. Immo de vultu quoque cuiusdam Callistrati Borysthenitae Dio, πολὺ Ἰωνικὸν τοῦ εἴδους habuisse dixit. Amor masculus isthic vt apud Milesios: colebant etiam Achillem in heroibus omnibus maxime, et Homerum in poëtis. Homerum enim Iones sibi vindicabant, quod fama esset, teste Eusebio, Homerum in migratione Ionica fuisse. Achillis autem sepulcrum apud se esse Borysthenitae gloriati sunt, et alia eius herois monumenta in suo solo conseruarunt. Descitum tamen est in colonia et a Graeci puritate sermonis et ab habitu, quem a Melanchlaenis acceperunt. Mercatura cum alia, tum salis fuit. (1) Vrbs calamitates multas perpessa, ad extremum a Getis occupata et aequata solo est. Neque enim cum Dio eam cerneret, satis ampla pro veteri gloria fuit et male in primis aedificata. Turres tantum e vetustis monumentis antiquae amplitudinis testes in circumiacentis agri ruinis sunt conspectae. Vna res saluti fuit euerso oppido, quod barbari cernerent, se mercaturis Graecis aegre carere, vt necesse esset Graecorum frequentiam hominum in agro permitti. Dixi supra, iisdem temporibus Istrum vrbem Plinii, et Rauennatis Istriopolin, Arriani Istriam conditam fuisse ad Pontum. Ioannes Harduinus numos Septimii Seueri et Alexandri Seueri adfert ΙΣΤΡΙΗΝΩΝ inscriptos: Goltius vnum ΙΣΤΡΙΗΩΝ inscriptum signatumque duobus capitibus, quorum vnum ad septemtrionem, alterum ad meridiem versum videtur. Laurentius Begerus eodem in numo legit ΙΣΤΡΙΗΑ. Nos in hoc numo argenteo, quem Buxbaumius CPli attulit, nunc vir amplissimus Iosephus Nicolaus Delislius collega noster cum ceteris

(1) Omnia ex Dione p. 437.

tellus possidet, diserte legimus ..ΣΤΡΙΑ.. vt sit ΙΣΤΡΙ-ΑΝΩΝ. Stephanus Byzantius: Ἴςρος ἐν τῷ πόντῳ. Ἀῤῥιανὸς δ' Ἰςρίαν αὐτήν φησι. τὸ ἐθνικὸν Ἰςριανός. Sic sane Arrianus in periplo Ponti Euxini (1) et fragmentum periplì alterius (2) Ἰςριανῶν λιμήν. Begeri iudicio duo inuersa capita situm vrbis significant, vt testudo Peloponnesi, τρίσκελον Siciliae: inuersa autem sunt, quod Istrus in confiniis Europae Asiaeque, quas dirimat Ister, sita duas orbis terrarum regiones respiceret, vt Ianus bifrons sua tempora. Metuo ne coniectura magis sit ingeniosa, quam vera. An potius eo hoc pertinet, quod vrbs duas in diuersas partes esset scissa muro per medium oppidum ducto, vt Emporiis in Hispania fuisse T. Liuius (3) testatur? In auersa phocaenam magis dixerim, quam cum Begero delphinum. Pertinet sane ad piscaturam diuitem et in flumine et in mari. Percussus enim nummus videtur paullo post Alexandri Macedonis aetatem, cum Graecae coloniae opibus maxime florerent. Milesii etiam ad Pontum condiderunt Apolloniam, circiter Olymp. XLII. Sic Scymnus Chius ἐν περιηγήσει (4)

Μεθ' ἣν πόλις σύνορος ἡ Ἀπολλωνία
Ταύτην δὲ πρότερον ἔτεσι πεντήκοντά που
Κτίζουσι τῆς Κύρου βασιλείας τὴν πόλιν.
Εἰς τοὺς τόπους ἐλθόντες οἱ Μιλήσιοι.

Finitima, inquit, *postea est Apollonia: eam annis admodum quinquaginta ante Cyrum regem Milesii in haec loca profecti, vrbem condidere.* Quinquaginta annis ante Cyrum regem est circiter Olymp. XLII. Scythis iam regiones

 inter

(1) p. 21. (2) p. 9. (3) l. XXXIV, 9. (4) v. 729.

inter Istrum Borysthenem et Volgam obtinentibus. Milesios deduxisse Strabo (1) confirmat. Idcirco Stephanus Byzantius: Ἀπολλωνίαν τῶν Ἰώνων vocat. Ioannes Harduinus in numis vrbium: *est altera quidem* Ἀπολλωνία τῶν Ἰώνων *in Thracia eodem auctore Stephano: Ioniam tamen dictam esse aliquam Thraciae regionem fidenter negamus.* Tamquam id dixerit Stephanus, aut tamquam isthuc, quod dicit, non modo ad sublestae fidei, sed ad νοθείας quoque maculam geographo inurendam idoneum sit. Quis non videt Stephanum saltem Ionum coloniam dicere. Est sane numus ΑΠΟΛΛΩΝΙΕΩΝ ΕΝ ΙΩΝΙΑ, non tamen ex eo numo finxit Stephanus ΑΠΟΛΛΩΝΙΑΝ ΤΩΝ ΙΩΝΩΝ. *Ionum* dicitur, vt diuersa esset ab *Apollonia*, eadem in Thracia *ad Strymonem*. Sunt denique aliae vrbes ad Pontum magno numero partem a Milesiis conditae, partem ab Heracleotis.

Ab his Graecis iuxta mare Adriaticum, aut ab Gelonis, ceterisque ad Pontum legationes istas Hyperboreas venisse puto. Non est contemnendum, quod Scholiasta Pindari ad Pythionicorum odam quartam annotauit: Βορέους ἐκάλουν οἱ Ἕλληνες τοὺς τὴν Θράκην οἰκοῦντας, διὰ τὰ τοῦ βορέου πνεύματα. *Boreos Graeci vocarunt Thraciae incolas ob ventum boreum.* Atque idcirco raptum Orithyae (illa Erechthei filia, Pandionis neptis fuit) ita interpretatur, quod non vtique aquilo ventus, ἀλλ' ἀνήρ τις τῶν ἐν Θράκῃ ἐνοίκων eam secum abduxerit, vt ille quoque περὶ ἀπίστων siue Heraclitus siue Heraclides. Itaque fortassis Hyperborei, *qui vltra Thracas*, vt Constantinus Porphyrogenneta (2) καὶ ἔθνη πολλά τε καὶ μέγιστα μέχει

(1) p. 370. (2) de administr. imperio p. 78. ed Band.

μέχει τῦ Δανεβίε ἐν τοῖς Ὑπερβορέοις τόποις κατῳκισμένα, *gentes multae et maximae ad Danubium usque in Hyperboreis regionibus degentes.* Hippocrates libro de aëre aquis et locis, cum de Scythia: (1) κεῖται γὰρ ὑπ' αὐταῖς ἄρκτοις καὶ τοῖς ὄρεσι τοῖς Ριπαίοισιν, ὅθεν ὁ βορέης πνέει, *sita est sub ipsis ursis et montibus Riphaeis, unde boreas flat.* Quare vetustissimi mortales in Graecia; cum vix vltra Ponti littora et vltra Danubii ripam venerant, inde iam boreae regnum ordiri credebant, et interiora colentes aut etiam sub ipso borea Graecos suos Hyperboreos dixerunt. Huc accedit, quod caeremonias Hyperborearum mulierum in Delo apud Paeonas et Thracias mulieres sua quoque aetate obseruari Herodotus animaduertit. (2) Neque enim sine stipula triticea sacra Dianae faciebant, siue id a Graecis acceperint mulieribus, seu Graecae a Threissis. Postquam virgines ab Delo ad Hyperboreos non sunt reuersae, non ausi sunt ab eo tempore filias tanto discrimini committere, itaque sacra sua ad vicinas gentes misere, vt adeo intelligi possit, super Thracia hos Hyperboreos coluisse. Id ostendam postea ex Herodoto: nam mihi adhuc aliud in mentem venit, quod hoc loco obseruem. Vetustissimam eam caeremoniam Hyperboreorum fuisse, vt virgines filias mitterent in Delum, vel ex eo adparet, quod scriptores commemorant, tempora vicina partui Apollinis et Dianae fuisse. Postea plane desiisse videtur illa religio apud Hyperboreos, cum se magis miscuissent barbaris populis. Nam hymnus in Apollinem, quem Homero Thucydides attribuit, Cynaetho Chio autem Eustathius in Homerum, et Scholiasta Pindari in Nemeis, nihil de his

 Hyper-

(1) c. 45. (2) l. IV. c. 33.

καέργην ἦσεν, ὡς ἐκ Πελοπονήσου ... αὐτοῦ ... κεον ἐς τὴν Ἀχαΐαν ἀφίκοιτο καὶ ἐς Δῆλον. (1) *Ferunt stirpem oleastri ex Hyperboreis allatam fuisse ab Hercule ad Graecos: esse autem eos homines, qui ultra Boream ventum colunt: primus Olen Lycius, in hymno, quem in Argin cecinit, auctor est, Argin in Delum venisse ab his Hyperboreis. Post eum Melanopus Cumaeus carmen fecit in Opin et Hecaergen, quod ex his Hyperboreis etiam ipsae primum quidem in Achaiam, tum vero etiam in Delum venerint.* Apud eundem Pausaniam Βοιὼ ἐπιχωρία γυνὴ *Boea mulier Phocica* auctor est, (2) cum alios Hyperboreos, tum Olenem Delphis oraculum Apollinis condidisse: Olenem vero primum et vaticinatum et ἑξάμετρον genus commentum:

Ἔνθα

(1) Liceat mihi, quod Deli et corrupti in Pausaniae loci mentio in memoriam reuocat, apponere bona cum venia lectorum Stephanus Byzantius: Ὀλυμπίειον τόπος ἐν Δήλῳ, ὃν κτίσαντες Ἀθηναῖοι χρήμασιν Ἀδριανοῦ Νέας Ἀθήνας Ἀδριανὰς ἐκάλεσαν, ὡς Φλέγων ἐν Ὀλυμπιάδων πεντεκαιδεκάτῳ. τὸ ἐθνικὸν Ὀλυμπιεὺς ἢ Ὀλύμπιος, ὡς Βυζάντιος. In epistola de Theophrasti Delii praesidis monumento p. 59. sic forte emendari Stephanum posse suspicatus sum: Ὀλυμπίειον τόπος ἐν Δήλῳ, ὃν ἔκτισαν Ἀθηναῖοι χρήμασιν Ἀδριανοῦ (οὗ τῇ εἰς ἑαυτοὺς εὐνοίᾳ χρώμενοι, μνείδα τῆς πόλεως) Νέας Ἀθήνας Ἀδριανὰς ἐκάλεσαν. Tandem subiunxi: *verum ne sic quidem Stephanum scripsisse credo, ac* ἐν Δήλῳ *potius irrepsisse, et expungendum esse.* Sic tum quasi pro imperio edicebam, vt adsolent hariolabantur. Vatem me fuisse non pessimum vidi, postquam Phlegontis Olympionica exstare sensi in Scaligeriana Ἱστοριῶν συναγωγῇ e codice

Ἔνθα τοι εὔμνηστον χρηστήριον ἐκτελέσαντο
Παῖδες ὑπερβορέων Παγασὸς, καὶ δῖος Ἀγυιεύς.
Ibi (inquit Boeo) *celebre oraculum tibi, Phoebe, condiderunt*
Filii Hyperboreorum Pagasus et diuinus Agyieus.

Enumeratis deinde aliis Hyperboreis, ita desinit carmen;

Ὠλήν θ', ὃς γένετο πρῶτος Φοίβοιο προφάτας,
Πρῶτος δ'ἀρχαίων ἐπέων τεκτήνατ' ἀοιδάν.
Et Olen, qui primus fuit Phoebi vates,
Primusque vetera carmina instituit scribere.

Ex his intelligo, antiquissimam fuisse Hyperboreorum in Apollinem Delium et Dianam religionem; ipsa autem nomina virginum Hyperborearum argumento sunt, Graecas fuisse, quae a septemtrione venerunt sacra ferentes

Parisiensi regio. Nam ad Olymp. 227. Ἀδριανὸς τότε Ὀλυμπιεῖον τὸ ἐν ταῖς Ἀθήναις, ἐν ᾧ καὶ αὐτὸς ἵδρυται, ἐξεποίησε, καὶ δράκοντα ἐς αὐτὸ Ἰνδίας κομισθέντα ἀνέθηκε. Nihil de Delo. Recte Stephanus *decimo quinto libro.* Holstenius: *scribe* πεντεκαιδεκάτῃ, *vt referatur non ad librum, sed ad Olympiadem.* Immo Phlegon in libros diuiserat totum opus chronicum. Cetera quoque in Stephano turbauit, vt puto, Hermolaus CPlitanus, non modo hoc ἐν Δήλῳ. Nam τὸ ἐθνικὸν Ὀλυμπιεὺς κ. τ. λ. totum hoc, inquam, nihil ad Ὀλυμπιεῖον, sed ad Ὀλύμπια, quod antecedit, vbi nunc in Stephano τὸ ἐθνικὸν omissum est. Miror Holstenium istum errorem non obseruasse, aut Thomam Pinedum: hos enim ad manus habeo. De Ryckio viderint alii. Veteres sane errores in Stephano, quibus Perusinus codex nullam medelam attulit. (2) p. 809.

tes Apollini. Scholiasta Callimachi (1) et Seruius censent, ab earum vna Dianam nuncupatam fuisse Ουπιν. Crediderim potius, Dianam παρὰ τὴν ὄπιν dictam, ex quo Ionice Ουπις, Dorice Ωπις. Erat Diana etiam Nemesis, quae in consecratione templi Herodis Attici nomen ΡΑΜΝΟΥΣΙΑΣ ΟΥΠΙΣ gerit. Neque enim dubito, Argin seu Hecaergen a Dianae venationibus nomen habuisse. Hyperoche a cursu solis et lunae dicta, quae Apollinis et Dianae numina erant. Quis deinde Ἀπόλλωνα τὸν Λόξιον ab obliquo cursu Solis, aut Ἀγυιέα a viarum vrbanarum custodia ignorat? Inde Loxo et Agyeus ille. Hanc Apollinis religionem contemplanti mihi in mentem venit, Hyperboreos Graecos fuisse eos, qui sedem sibi in Thracia tractuque omni ad Pontum Euxinum atque Adriatici maris septemtrionem quaesiuere inde a Troiano bello. Tales fuisse reperio Hyllos in Liburnia, vt notum est e Dionysio Periegete, de quibus Scymnus Chius ex Eratosthene et Timaeo. Liburnis, inquit, finitimi sunt Bulini.

Εξῆς δὲ μεγάλη χερσόνησος Υλλικὴ,
Πόλεις δ' ἐν αὐτῇ φασι πέντε καὶ δέκα
Υλλους κατοικεῖν, ὄντας Ελληνας γένει.
Τὸν Ηρακλέους γὰρ Υλλον οἰκιστὴν λαβεῖν,
Εκβαρβαρωθῆναι δὲ τούτους τῷ χρόνῳ
Τοῖς ἤθεσιν ἱστοροῦσι τοῖς τῶν πλησίον.

Post

(1) in Dianam v. 204.

Post haec magna est Chersonnesus Hyllica,
Vrbes autem in ea dicunt quindecim
Hyllos incolere, qui ab stirpe sint Graeci;
Nam Herculis filium Hyllum conditorem habuisse,
Barbaros autem factos esse paullatim
Narrant, e moribus vicinarum gentium.

Apollonii Rhodii Scholiasta (1) Eustathius ad Dionysium atque Stephanus Byzantius ab Hyllo Herculis filio deductam fuisse coloniam produnt. Is est Herculis ex Deianira filius, vt Apollodorus ceterique eum γενεαλογῦσι. Iam tota vita eius, vt ob res Peloponnesiacas ab eo gestas nota est, ab hac deductae fama coloniae abhorrere videtur: nihilo minus Hylli sunt antiquissimi iis in regionibus, quae Thracibus ab occasu vicinae sunt. Ab ortu et ad Pontum nihil dicam de Hylaea regione ad Borysthenem, quoniam id nomen quidem Graecum, non autem quod sciam, incolas Graecos habuit. Itaque Laurentius Begerus (2) frustra se torquet in numo inscripto ΥΛΑΙΥ (ο ante Υ tam parum reperitur in numis, vt oculos clarissimi antiquarii in hoc nomine facile fugere potuerit) atque eum numum neque referre audet ad hos Hylaeos, neque iisdem adimere. Nihil sane ad Hylaeos illos, immo neque ad istos in Liguria, (est enim eorum ἐθνικὸν ὑλλῆς) at verius ad Hylaeos in Locris. Stephanus: ἔστι καὶ πόλις Λοκρῶν τῶν Ὀζολῶν, ἧς τὸ ἐθνικὸν Ὑλαῖος. Id igitur Begero accidit in hoc numo, quod Goltio et Nonio in numo ΑΓΑΘΥΡΣΩΝ, qui non his *Scythicis* Agathyrsis, sed Siculis tribuen-

(1) Ad Argonauticorum l. IV. v. 525. (2) l. I. p. 368. Thes. Brand.

tribuendus fuit, quamquam Siculae vrbis ἐθνικὸν Αγαθυρσαῖος tantummodo exstat. At Callipidés noti ex Herodoto, qui illa aetate iam ita desciuerant a Graecis moribus, vt Ελληνες Σκύθαι dicerentur. Iisdem temporibus Geloni antea Graeci Budinis Scythis permisti, eorum etiam linguam, parum âberat, quin et mores omnes adsciuerant, vt alias ostendi ex Herodoto. Geloni longe ante Megaricas Heracleotarum colonias, longe ante Milesias ingressi terras Thracum et Getarum traiectoque Istro Budinis permisti sunt. Panticapaeum ipso in ore Maeotidis situm Milesiorum colonia fuit Plinio (1) et Strabone (2) testibus. Eustathius ad Dionysium Periegeten, (3) κτίσμα παιδὸς Αιήτυ. Si is fuit Aeetes Solis filius, qui Ephyraeae imperauit, inde profectus est in Colchidem, pater Medeae et tot fabularum, fuit filius eius haud ita multo iunior Hercule. Stephanus Byzantius: Παντικάπαιον ἐκίσθη παρὰ Αιήτυ παιδὸς, λαβόντος τὸν τόπον παρὰ Αγαήθυ τῦ Σκυθῶν βασιλέως. Nugae: quis enim Colchicis fabulis tantum tribuet? tamen fama videtur vetus, Panticapaeum iam ante Milesios colonos Graecam vrbem fuisse. Milesii autem eodem tempore Olbiam et Istrum vrbem condiderunt Plinio et Strabone testibus. Olbiam, quae et Borysthenes, (auctorem habemus Herodotum) perperam Pomponius Mela et Iornandes et Geographus Rauennas vrbes diuersas fuisse tradunt. Teste Herodoto ciues se malebant Olbitas vocari, Borysthenitarum enim nomen Scythis vicinis ad Borysthenem relinquebant. Tamen Herodotus ipse Olbitas etiam Borysthenitas appellauit, et

(1) l. IV. c. 12. (2) p. 358. (3) v. 311.

et Bion ille Olbita haud aliter quam Borysthenita a Diogene Laertio, Athenaeo, Hesychio Milesio, ceteris nuncupatur. Quare Graecis notius semper hoc nomen fuit, adeo vt alterius memoria etiam apud ipsos Olbitas intermortuum sit, cum Dio Chrysostomus ipsa in vrbe haud aliter ciues diceret quam Borysthenitas. Ab Olbia est *Olbiopolis*, Plinii et geographi Rauennatis *Olbiapolis* et *Oliuapolis*. (1) Situm vrbis Strabo (2) ducentis a Borysthene stadiis definiuit. Herodotus, Stephanus, Dio Chrysostomus, Scymnus Chius, incertus auctor peripli Pontici intra Borysthenem et Hypanim fluuios. Scilicet eo in loco, vbi fluuii exonerantur, magis tamen ad Hypanim. Quare in Herodoto ὑπὸ τῷ Ὑπάνι sine dubio emendari debet ἐπὶ τῷ Ὑπάνι. Nam Dio Chrysostomus disertissime omnium scribit, (3) vrbem a Borysthene nomen accepisse ob magnitudinem et pulcritudinem fluminis, sitam vero esse ad Hypanim supra Hippolai promontorium, quod rostri naualis ad modum excurrat in stagnum, quod ducentorum amplitudine stadiorum a promontorio ad mare est, neque minorem esse eo loco fluminum latitudinem. Fuit autem Milesiorum colonia teste Strabone, Stephano, et quem ante alios dicere conueniebat, Herodoto. Hinc Miletopolis Plinio. Claudius Ptolemaeus ad occidentem hibernum Olbiae ponit μητρόπολιν, nescio quam. Credo μιλητόπολιν in animo habuisse, et censuisse vrbem esse diuersam ab Olbia. Video idem existimasse Ioannem Harduinum. Eusebius Olbiam conditam ponit Olymp. XXXI. anno 2. qui est A. P. I. 4059. Retinuere Olbitae linguam et

(1) p. 267. 354. ed. Porch. (2) p. 151. (3) p. 144.

motes metropoleos. Immo de vultu quoque cuiusdam Callistrati Borysthenitae Dio, πολὺ Ιωνικὸν τοῦ εἴδους habuisse dixit. Amor masculus isthic vt apud Milesios: colebant etiam Achillem in heroibus omnibus maxime, et Homerum in poëtis. Homerum enim Iones sibi vindicabant, quod fama esset, teste Eusebio, Homerum in migratione Ionica fuisse. Achillis autem sepulcrum apud se esse Borysthenitae gloriati sunt, et alia eius herois monumenta in suo solo conseruarunt. Descitum tamen est in colonia et a Graeci puritate sermonis et ab habitu, quem a Melanchlaenis acceperunt. Mercatura cum alia, tum salis fuit. (1) Vrbs calamitates multas perpessa, ad extremum a Getis occupata et aequata solo est. Neque enim cum Dio eam cerneret, satis ampla pro veteri gloria fuit et male in primis aedificata. Turres tantum e vetustis monumentis antiquae amplitudinis testes in circumiacentis agri ruinis sunt conspectae. Vna res saluti fuit euerso oppido, quod barbari cernerent, se mercaturis Graecis aegre carere, vt necesse esset Graecorum frequentiam hominum in agro permitti. Dixi supra, iisdem temporibus Istrum vrbem Plinii, et Rauennatis Istriopolin, Arriani Istriam conditam fuisse ad Pontum. Ioannes Harduinus numos Septimii Seueri et Alexandri Seueri adfert ΙΣΤΡΙΗΝΩΝ inscriptos: Goltius vnum ΙΣΤΡΙΗΩΝ inscriptum signatumque duobus capitibus, quorum vnum ad septemtrionem, alterum ad meridiem versum videtur. Laurentius Begerus eodem in numo legit ΙΣΤΡΙΗΑ. Nos in hoc numo argenteo, quem Buxbaumius CPli attulit, nunc vir amplissimus Iosephus Nicolaus Delislius collega noster cum ceteris

(1) Omnia ex Dione p. 437.

seflis possidet, diserte legimus .. ΣΤΡΙΑ .. vt sit ΙΣΤΡΙΑΝΩΝ. Stephanus Byzantius: Ἴστρος ἐν τῷ πόντῳ. Ἀῤῥιανὸς δ' Ἰστρίαν αὐτήν φησι. τὸ ἐθνικὸν Ἰστριανός. Sic sane Arrianus in periplo Ponti Euxini (1) et fragmentum peripli alterius (2) Ἰστριανῶν λιμήν. Begeri iudicio duo inuersa capita situm vrbis significant, vt testudo Peloponnesi, τρίσκελον Siciliae: inuersa autem sunt, quod Istrus in confiniis Europae Asiaeque, quas dirimat Ister, sita duas orbis terrarum regiones respiceret, vt Ianus bifrons sua tempora. Metuo ne coniectura magis sit ingeniosa, quam vera. An potius eo hoc pertinet, quod vrbs duas in diuersas partes esset scissa muro per medium oppidum ducto, vt Emporiis in Hispania fuisse T. Liuius (3) testatur? In auersa phocaenam magis dixerim, quam cum Begero delphinum. Pertinet sane ad piscaturam diuitem et in flumine et in mari. Percussus enim nummus videtur paullo post Alexandri Macedonis aetatem, cum Graecae coloniae opibus maxime florerent. Milesii etiam ad Pontum condiderunt Apolloniam, circiter Olymp. XLII. Sic Scymnus Chius ἐν περιηγήσει (4)

Μεθ' ἣν πόλις σύνορος ἡ Ἀπολλωνία.
Ταύτην δὲ πρότερον ἔτεσι πεντήκοντά που
Κτίζουσι τῆς Κύρου βασιλείας τὴν πόλιν.
Εἰς τοὺς τόπους ἐλθόντες οἱ Μιλήσιοι.

Finitima, inquit, *postea est Apollonia: eam annis admodum quinquaginta ante Cyrum regem Milesii in haec loca profecti, vrbem condidere*. Quinquaginta annis ante Cyrum regem est circiter Olymp. XLII. Scythis iam regiones

 inter

(1) p. 21. (2) p. 9. (3) L. XXXIV, 9. (4) v. 729.

inter Istrum Borysthenem et Volgam obtinentibus. Milesios deduxisse Strabo (1) confirmat. Idcirco Stephanus Byzantius: Ἀπολλωνίαν τῶν Ἰώνων vocat. Ioannes Harduinus in numis vrbium: *est altera quidem* Ἀπολλωνία τῶν Ἰώνων *in Thracia eodem auctore Stephano: Ioniam tamen dictam esse aliquam Thraciae regionem fidenter negamus.* Tamquam id dixerit Stephanus, aut tamquam isthuc, quod dicit, non modo ad sublestae fidei, sed ad νοθείας quoque maculam geographo inurendam idoneum sit. Quis non videt Stephanum saltem Ionum coloniam dicere. Est sane numus ΑΠΟΛΛΩΝΙΕΩΝ ΕΝ ΙΩΝΙΑ, non tamen ex eo numo finxit Stephanus ΑΠΟΛΛΩΝΙΑΝ ΤΩΝ ΙΩΝΩΝ. *Ionum* dicitur, vt diuersa esset ab *Apollonia*, eadem in Thracia *ad Strymonem*. Sunt denique aliae vrbes ad Pontum magno numero partem a Milesiis conditae, partem ab Heracleotis.

Ab his Graecis iuxta mare Adriaticum, aut ab Gelonis, ceterisque ad Pontum legationes istas Hyperboreas venisse puto. Non est contemnendum, quod Scholiastes Pindari ad Pythionicorum odam quartam annotauit: Βορέους ἐκάλουν οἱ Ἕλληνες τοὺς τὴν Θράκην οἰκοῦντας, διὰ τὰ τοῦ βορέου πνεύματα. *Boreos Graeci vocarunt Thraciae incolas ob ventum boreum.* Atque idcirco raptum Orithyae (illa Erechthei filia, Pandionis neptis fuit) ita interpretatur, quod non vtique aquilo ventus, ἀλλ' ἀνήρ τις τῶν ἐν Θράκῃ ἐνοίκων eam secum abduxerit, vt ille quoque περὶ ἀπίστων siue Heraclitus siue Heraclides. Itaque fortassis Hyperborei, *qui vltra Thracas*, vt Constantinus Porphyrogenneta (2) καὶ ἔθνη πολλά τε καὶ μέγιστα μέχει

(1) p. 370. (2) de administr. imperio p. 78. ed Band.

μέχρι τοῦ Δανουβίου ἐν τοῖς Ὑπερβορέοις τόποις καλούμενα, *gentes multae et maximae ad Danubium usque in Hyperboreis regionibus degentes.* Hippocrates libro de aëre aquis et locis, cum de Scythia: (1) κεῖται γὰρ ὑπ' αὐταῖς ἄρκτοις καὶ τοῖς ὄρεσι τοῖς Ριπαίοισιν, ὅθεν ὁ βορέης πνέει, *sita est sub ipsis vrsis et montibus Riphaeis, unde boreas flat.* Quare vetustissimi mortales in Graecia; cum vix vltra Ponti littora et vltra Danubii ripam venerant, inde iam boreae regnum ordiri credebant, et interiora colentes aut etiam sub ipso borea Graecos suos Hyperboreos dixerunt. Huc accedit, quod caeremonias Hyperborearum mulierum in Delo apud Paeonas et Thracias mulieres sua quoque aetate obseruari Herodotus animaduertit. (2) Neque enim sine stipula triticea sacra Dianae faciebant, siue id a Graecis acceperint mulieribus, seu Graecae a Threissis. Postquam virgines ab Delo ad Hyperboreos non sunt reuersae, non ausi sunt ab eo tempore filias tanto discrimini committere, itaque sacra sua ad vicinas gentes misere, vt adeo intelligi possit, super Thracia hos Hyperboreos coluisse. Id ostendam postea ex Herodoto: nam mihi adhuc aliud in mentem venit, quod hoc loco obseruem. Vetustissimam eam caeremoniam Hyperboreorum fuisse, vt virgines filias mitterent in Delum, vel ex eo adparet, quod scriptores commemorant, tempora vicina partui Apollinis et Dianae fuisse. Postea plane desiisse videtur illa religio apud Hyperboreos; cum se magis miscuissent barbaris populis. Nam hymnus in Apollinem, quem Homero Thucydides attribuit, Cynaetho Chio autem Eustathius in Homerum, et Scholiasta Pindari in Nemeis, nihil de his

(1) c. 45. (2) l. IV. c. 33.

Hyperboreis sacris habet, cum seu Homerus seu ille ὁ πρῶτος τὰ Ὁμήρου ῥαψῳδήσας Cynaethus, seu quisquis ille caecus senex e Chio quae adhuc exstant, cecinit, isthuc ipsum non praeteriisset, quod quotannis fieri in Delo cognoscere poterat. At Thucydides auctor est, Delum maxime frequentatum fuisse, quoad Ionum fuit, non item postea. *Postea* cum dicit, tempora ea putat, cum a Polycrate Samio et Delus et Cyclades ceterae occupatae sunt. Mox in Epigonis Homeri et Hesiodo et illo Olene Lydio memoria Hyperboreorum instaurata est. (1) Nempe quod tum altius ad boream mergites Apollini transmittere per populos vicinos inciperent. Accipiebant autem haec sacra Delii a Teneis, Tenii a Carystiis, Carystii a ceteris Euboeis, Euboei a Meliaco sinu et inde a Dodonaeis, Dodonaei a populis ad Adriam: inde iam fama erat a Scythis sacra perferri, Hyperboreis tradentibus. Ex quo itinere nisi Hyllos, certe Gelonos deprehendes Apollinis cultores.

Sed haec etiam sacra desierunt ante Herodoti aetatem: Graeci tamen tum maxime quaerebant suos illos Hyperboreos. Atque cum Ὑπερβόρειος significet gentem, quae incolit τὰ ὑπάρκτια κλίματα, vt Plutarchi sensu vtar, sicut et Strabo explicat, (2) tum vero illi vsque et vsque sub septemtrione Hyperboreos illos quaesiuere, donec

Hyperboreae claustrum glaciale sub vrsae

atque vltra anni solisque vias sibi visi sunt peruenisse. Alii Ὑπερβορέους tamquam ὑπερβαίνοντας ὅρον, *seculi humani terminum egredientes* dici, censuere apud Festum: et hoc iacto ab etymologia fundamento tam lubrico infinitas fabulas

(1) Herodotus l. IV. c. 32. (2) p. 986.

bulas de longaeuitate eorum confixerunt, quales exstabant apud Pindarum, Simonidem, Megasthenem. Martianus Capella p. 141. *Post (Riphaeos) montes trans aquilonem Hyperborei, apud quos mundi axis continua motione torquetur, gens moribus, prolixitate vitae, deorum cultu, aëris clementia, semestri die, fine etiam habitationis humanae praedicanda.* Alii ὑπὲρ βορέαν interpretati sunt, tamquam boreas ventus illo populo sit citerior. Pindarus in Olympionicis (1)

ἰδὲ καὶ κείναν χθόνα
πνοιᾶς ὄπιθεν Βορέα
ψυχρᾶς,

en illorum terram vltra flatum boreae frigidi.

Seu vt Seruius: *supra quos boreas flat.* Macrobius vera falsis miscens: (2) *locorum,* inquit, *super Scythiam omnium incolas vetustas Hyperboreos vocauit, quasi originem boreae introrsum recedendo transissent, adeo aeterna paene premuntur pruina, vt non facile explicetur, quanta sit illic frigidae nimietatis iniuria.* Isthuc cum Herodotus iam ante se iactari videret, ab adsensu se sustinuit, idque ea caussa censuit absurdum esse, quod Hypernotios quoque esse oporteat, si in hunc modum sint Hyperborei. Ob hanc caussam Eratosthenes (3) Herodoto σοφίσματος calumniam impingit, cum aeque probabile sit, Hypernotios esse, vt ex eo, absurdum alterum esse, minime intelligamus. Sed Olen ille Lycius et prisci Delii nihil aliud dicebant, quam vltra Thraciam, quae Graecis est sub septemtrione, homines Graecos genere fuisse, qui Apollinem summa religione colerent, et

(1) Ode III. v. 55. (2) p. 247. (3) apud Strabonem p. 57. 58.

et in Delum mitterent sacra. Sine certo gentis nomine frustra quaesiti sunt septemtrionales illi seu hyperborei. Scythae autem, cum quis de Hyperboreis quaereret, non aliter interpretabantur, quam gentes ad septemtrionem sitas, Melanchlaenos puta Androphagos: vltra enim ad septemtrionem nullos se populos nosse ferebant. Issedones autem Ponticis percunctantibus primum Arimaspas et Aegipodas ad boream colere narrabant, vltra eos gentem quidem ignotam, attamen septemtrionalem quemcunque populum. Hic protinus Graeci (in quibus est Herodotus) Hyperboreos posuere vltra Verchoturios montes seu vltra Riphaeos, vt habet quoque Hellanicus Milesius Herodoto superior. (1) Ex Herodoto aut a magistro suo Hellanico hausit Damastes Sigeensis Herodoti aequalis, qui vnum hoc adiecit, hos montes ὑπερβορέους καθήκειν εἰς τὴν ἑτέραν θάλασσαν, *Hyperboreos pertingere vsque ad extremum mare.* Itaque Sibiria est, quae commodum a Daurico vocabulo *Sibir* (nam ita et Persis سيبير) nomen accepit: nam *Sibir* est *septemtrio*. Hi vtique non sunt illi Delio deuoti Hyperborei. Nulla tanta vanitas mihi in mentem veniat: attamen sunt Hyperborei Herodoti. Pausanias quidem (2) in ea sententia fuit, a qua abhorremus. Nam magnifice se gerit et viam ostendit, qua mergites triticei missi fuerint in Graeciam. Ad Arimaspas et Issedonas et Scythas et Sinopen, et Graecis iam perferentibus ad Prasienses in Apollinis templum in agro Attico, hinc Delum. Iter ex Herodoto confictum fortassis non a Pausania, sed a poetis ante eum, qui nihil pensi habebant, quantum quidque verum esset, modo populo placerent, quas fecissent fabulas. Hero-

(1) apud Clementem Alexandrinum p. 305. (2) p. 17.

Herodoti aetate fama erat, vt fupra dixi, facra Hyperborea in mari Adriatico miffa fuiffe. Protarchus apud Stephanum, homo, vt puto, Bargyliates, τὰς Ἄλπας Ῥίπαια ὄρη προσηγορεῦσθαι, καὶ τοὺς ὑπὸ τὰ Ἄλπεια ὄρη κατοικοῦντας πάντας Ὑπερβορέους ὀνομάζεσθαι. Pindarus vero quafi veftigia fugientium ab Hadriatico finu ad interiorem feptemtrionem odoratus, fedem Hyperboreorum ad Iftri fontes conftituit in Olympionicis; (1) cautus tamen prouidusque futuri, pone fe veftigia viae eius deterfit in Pythionicis: (2)

ναυσὶ δ' οὔτε πεζὸς ἰὼν
εὕροις ἂν ἐς Ὑπερβορέων ἀγῶνα
θαυμαστὰν ὁδόν.

non nauibus, non pedeftri itinere ad Hyperboreos penetrare datum eft. Heraclides Ponticus vicinus temporibus captae a Gallis Romae, vt habet Plutarchus in Camillo, is, inquam, Heracleota, cuius vitam fcripfit Diogenes Laertius, gentes, quae Romam ceperunt, ab Hyperboreis profectas tradit. Cimbros dicit, qui vtique a feptemtrione venerunt.

Cum tam longe et in incerta regione fiti effent Hyperborei a veteri fama vifi funt mereri poëtis, vt fabularum feraces effent. Ne dicam quae de Apolline et Perfeo et Hercule inter eos commorantibus Pindarus cecinit, ne, quae de felicitate populi, de iuftitia, de vita longa et cetera in modum Platonicae reipublicae aut Innaris a poetis finguntur, vt recte viderit Clemens Alexandrinus (3) τὰς τῶν Ὑπερβορέων καὶ Ἀριμασπῶν πόλεις καὶ Ἠλύσια πεδία δικαίων πολιτεύματα γεγονέναι.

(1) l. c. (2) Ode X. (3) P. 543.

ne dicam de templo Apollinis et luco, de pomis aureis et hortis Hesperidum. Lucianus saltem in Philopseude inspiciatur, quam ridiculas praestigias Hyperborei hominis impune commentus sit. Nec sibi, ne faceret, interdictum putauit, et exstitere exempla, quae imitaretur.

Ex his colligi potest, quomodo nos gerere oporteat, cum viri magno et excellenti ingenio omnem operam in eo consumunt, vt quaecumque de Hyperboreis in omni antiquitate commemorantur, ea ad Scandinauiam applicent. In illis suis tesquis regnant et auguria capiunt. Olaus Verelius in notis ad Bosianae fabulam contendit: Hyperboreos ait, nusquam gentium aut in Scandinauia vel certe in extremis regionibus ad glacialem oceanum sedes suas habuisse. Cum enim, inquit, ipsi Scandiani veteres septentrionalem hanc plagam semper appellauerint *Nordurhalfo heimsins et Nordurland* et se ipsos *Nordmenn*, istius nominis significationem famae ad se delatam vocabulo Hyperboreorum expressere Graeci. Immo alia via incessit Olaus Rudbequius in Atlantica, et αὐτὸ τοῦτο τὸ Ὑπερβόρειον non Graecum, sed Scandinauicum sonare edixit. Esse enim *Hyperboreos* quasi *Yfferborne, illustri loco natos.* Atque tum ille vero omnia vndique ex vetustis monumentis congerit et in hac arce sua dedicat. Non inuideo Scandinauiae Hyperboreorum nomen homo Prutenus, qui memini eos in patria mea sub borea respici. At pati non potest Thormodus Torfaeus (1) Neruagis suis id eripi nomen, quod maiori iure vindicare possint, tanquam totius Scandinauiae Hyperborei. Cetera quae aduersus Rudbequium disputat, non minus sunt docta, quam ingeniosa.

(1) Hist. Norw. T. I. p. 7. seq.

gnositia. Etiam hic notus est amor in Scandinavia, natus sub intemperanti eruditione, ut Hyperboreos se esse arbitrantes Abarim philosophum suum fuisse praedicarint. In historia Hialmari regis Biarmlandiae atque Thulemarkiae, quam secundum Ioannem Peringskioldum Georgius Hickesius edidit, (1) haec leguntur ex Peringskioldi interpretatione: *ex Graecia aduenerunt Abaris et Samolis (Abar ok Samolis) cum pluribus eximiis viris, qui mox grati acceptique sunt: inclutus ea tempestate erat Hialmarus rex.* Abarin fabulam putat et respuit Herodotus. Alii eum Hyperboreis inserunt, (ex quo auctor Hialmarianae historiae Scandinauis vindicauit) et Olympiad. III. inscribunt. Ὀλυμπιάδων ἀναγραφή, quam Phlegonti Tralliano et vetustioribus Eratostheni atque Aristoteli tribuunt Ol. γ΄. Ἄβαρις ἐξ Ὑπερβορέων πρεσβευτὴς εἰς τὴν Ἑλλάδα ἦλθε. Sic etiam Hippostratus tradidit apud Harpocrationem; (2) alii apud eundem κατὰ τὴν εἰκοστὴν καὶ πρώτην Ὀλυμπιάδα. Pindarus κατὰ Κροῖσον τὸν Λυδῶν βασιλέα, itaque sane ante Olymp. LVIII. Eusebius Hieronymo fere concinit, qui Olymp. LIV. 2. *Abaris de Scythia venit in Graeciam*, hoc est, ex eius rationibus annum annum ante Croesum regem. Quorum si quis verum cognouit in tam obscura re, aequalis Zamolxis esse non potuit Abaris. Nam Zamolxin consentiunt fere omnes Pythagorae famulum fuisse. (3) At Abaris aetas secundum hos auctores incidit aut annos ducentos ante Pythagoram natum, aut annos CXXIV. aut denique in

Xx 2 annum

(1) Thesauri linguarum Septemtr. T. II. p. 128. (2) p. 5. (3) [illegible] p. 337.

[illegible] [illegible] Pythagorae, secundum Hen. Dodwelli [illegible]tiones in exercitatione de aetate Pythagorae, cum nondum natus esset Zamolxis. Eusebius aliis [illegible] Olymp. LXXXIII. 4. *Abarin Hyperboreanus* [illegible] [illegible]. Hoc solum congruit Zamolxis aetati. Sed quis in tanta varietate aliquid veri statuet, cum jam sua aetate Herodotus Abarin exploserit?

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE

IN SPECVLA ACADEM. IMPER. SCIENTIAR. AB ANNO MDCCXXXIX — MDCCXLV.

Ipsis ipso Nicolao Delilio cum sociis institutae.

St. n.	Temp. ver.	Anno 1739.
Ianuarii 5	7° 7′ 34″	Tertius satelles euanescens, intrauit in vmbram admodum exiguus; nebula autem in ipso momento introitus superueniens, illum aeque ac reliquos satellites oculis subduxit; hinc dubium oritur, annon immersio totalis dimidia minutii primi parte tardius acciderit. Obseruatio tubo reflectente 5. pedum instituta.
	5 10 55	Ioue e nebula emergente tertius satelles eodem tubo ex vmbra emersus conspiciebatur. Ceterum nondum tanto lumine, quo fulgere alias solet, gaudebat; hinc emersionem primam saltim ante minutum primum accidisse coniicio.
22	6 3 15	Emersio I. Coelo admodum sereno obseruata eo em fere momento tubo 15. pedum Campaniano, et tubo reflectente 5. pedum.

Xx 2 Emersio

n. st.		temp. ver.			Anno 1739.
Febr.	10	5^b	4′	3″	Emersio 3. Tubo reflectente, crepusculum autem admodum sensibile, obseruationem quarta minuti primi parte circiter dubiam reddit.
	17	7	17	10	Immersio 3. Tubo reflectente } tempore
		9	8	27	Emersio 3. Tubo reflectente } sereno
	18	6	38	11	Emersio 2. Tubo reflectente, tempore sereno.
	21	8	12	40	Emersio 1. Tubo reflectente, tempore sereno.
	25	9	20		Secundus satelles nondum apparuit, etsi per tubum reflectentem emersio iam ante 22. minuta, secundum calculum obseruanda fuisset. Ceterum aëris constitutio diutius obseruationibus inuigilare non permisit.
Iulii	30	13	18	29	Immersio 1. Tubo reflectente, quae forte nonnulla minuta secunda serius accidit, prouti e circumstantiis temporis conieci.
August.	25	12	58	30	Immersio 2. Tubo 15. pedum Campaniano.
			58	35	Dubitatum fuit annon idem satelles adhuc eodem tubo appareat.
			59	15	Eadem Immersio tubo reflectente, obseruata fuit.
	31	9	57	26	Immersio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
Septemb.	1				
		15	38	10	Immersio 2. Tubo reflectente coelo sereno et tranquillo.

Im-

n. st.	temp. ver.	Anno 1739.
Septemb. 7	11h 54′ 18″	Immersio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
	54 37	Eadem tubo reflectente coelo sereno.
23	10 16 5	Immersio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
	16 25	Eadem tubo reflectente coelo claro et sereno.
30	12 11 27	Immersio 1. Tubo reflectente. Nebula in instanti superueniens satellitem oculis eripuit, qui iam satis diminutus erat, ex quo colligo, immersionem totalem aliquot minutis secundis serius accidisse.
Octobr. 14	16 3 54	Immersio 1. Tubo reflectente coelo sudo.
16	10 32 48	Immersio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
	33 0	Dubitatum fuit annon adhuc appareat.
	33 17	Eadem Immersio tubo reflectente coelo sereno.
23	12 28 45	Immersio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
	28 47	Eadem Tubo reflectente 5. pedum obseruata.
Nouemb. 1	8 56 28	Immersio 1. Tubo 15. pedum coelo nonnihil nebuloso.
9	12 18 42	Immersio 3. Tubo reflectente.
Decemb. 1	13 0 12	Emersio 1. Eodem tubo.

Eadem

n. st.		temp. ver.			Anno 1739.
Decemb.	1	13h	0'	55''	Eadem immersio tubo 15. pedum Campaniano obseruata. Coelum equidem serenum erat, nimia autem satellitis et Iouis vicinia, obseruationis certitudini quodammodo impedimento esse potuit.
	3	7	28	2	Emersio 1. Tubo reflectente.
			28	25	Eadem tubo 15. pedum Campaniano propinquitas Iouis et satellitis, obseruationem tamen quodammodo incertam reddere potuit.
	17	9	12	5	Emersio 2. Tubo reflectente, coelo sereno.
		11	10	18	Emersio 1. Tubo reflectente, coelo sereno.
	29	5	38	27	Emersio 1. Tubo reflectente, coelo sereno.

st. n.		temp. ver.			Anno 1740.
Ianuar.	27	7h	53'	13''	Immersio 3. Tubo reflectente, coelo sereno.
		9	55	0	Satelles iam emersus magnitudine consueta conspiciebatur.
Februar.	3	5	51	47	Primus satelles ex vmbra emersus apparere incipit tubo reflectente. Nebula autem forte emersionem aliquanto tardius conspiciendam praebuit.

Emersio

ſt. n.		temp. ver.	Anno 1740.
Febr.	12	$6^h\ 5'\ 39''$	Emerſio 2. Tubo 15. pedum Campaniano, dubia, per aliquot minuta ſecunda, ob nebulam tenuem exortam.
Martii	4	8 2 20	Emerſio 1. aeſtimata. Satelles dimidia minuti primi parte ſerius ſe conſpiciendum praebuit; tubus nimirum reflectens, obſeruationi inſeruiens e loco mouendus erat.
			Finis obſeruationum, ante iter in Sibiriam ſuſceptum, inſtitutarum.

Obſeruationes Satellitum Iouis Petropoli inſtitutae, poſtquam e Sibiria redux eſſem.

ſt. n.		temp. ver.	Anno 1741.
Ianuar.	25	$13^h\ 16'\ 6''$	Emerſio 2. Tubo reflectente, aliquot minutis ſecundis circiter incerta.
	27	12 45 5	Emerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
		45 18	Tubo reflectente 7. pedum, non melioris notae.
Februar.	8	4 57 13	Quartus ſatelles in vmbram intrans, adhuc debili apparet lumine tubo reflectente 5 et 7 pedum.
		58 0	Certe vtroque Tubo non amplius conſpicuus.
	10	6 34 24	Emerſio 3. Tubo reflectente 5. pedum.

Eadem

ſt. n.	temp. ver.	Anno 1741.
Februar. 10	6° 34′ 26″	Eadem Emerſio Tubo reflectente 7. pedum.
	16 37 49	Emerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum admodum incerta, quoniam ſatellites non bene conſpiciendae erant, ob Iouis exiguam admodum altitudinem.
14	5 31 35	Emerſio 1. Tubo reflectente 7. pedum. Prima Emerſio quinque minutis ſecundis citius accidere potuit.
17	10 35 15	Emerſio 3. Tubis reflectentibus 5. et 7. pedum, ſi aliquot minuta ſecunda excipias, certa.
19	10 30 20	Emerſio 2. Tubo reflectente 5. et 7. pedum. Iupiter e nubibus emergebat, ſatelles autem admodum debilis erat, ita, vt obſeruatio non ſatis certa ſit cenſenda.
Mart. 25	6 48 50	Emerſio 3. Tubo reflectente 5. pedum, certa, ſi aliquot minuta ſecunda exceperis, ob claritatem diei et viciniam ſatellitis.
30	11 18 17	Immerſio totalis 4. ſatellitis, tubo reflectente 5. pedum, admodum difficilis obſeruatu, ob motum nimis lentum huius ſatellitis. Immerſio haec 10. minutis ſecundis citius tubo reflectente maiori 7. pedum obſeruata fuit, qui Iouem et ſatellites non aeque diſtinctos, ac alter exhibebat.

Emer-

ſt. n.		temp. ver.			Anno 1741.
Mart.	30	11^h	40′	10″	Emerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano. Hic ſatelles aliquot minutis ſecundis ſaltim ſerius per tubos reflectentes 5. et 7. pedum apparuit.
		13	11	45	Emerſio 2. Tubo reflectente 5. pedum et tubo 15. pedum Campaniano. Vicinia huius et primi ſatellitis, emerſionem hanc quinque vel ſex minutis ſecundis ſerius conſpiciendam praebuerunt.
April.	8	8	6	50	Emerſio 1. Tubo reflectente quinque pedum.
		11	43	24	Immerſio totalis 3. ſat. tubo 15. pedum Campaniano.
			43	46	Tubo reflectente quinque pedum.
	15	10	3	29	Emerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
	16	9	15	30	Emerſio 4. Tubo reflectente 7. pedum.
	24	10	30	14	Emerſio 2. Tubo reflectente 5. pedum.
			30	28	Eadem obſeruata tubo 15. pedum Campaniano.
Aug.	29	14	33	0	Immerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum, dubia.
Sept.	21	14	50	46	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
			50	50	Eadem tubo reflectente 5. pedum.
	28	16	46	27	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
			46	46	Eadem obſeruata per tubum reflectentem 5. pedum.

ſt. n.		temp. ver.	Anno 1741.
Octobr.	4	$15^h\,29'\,18''$	Immerſio 3. Tubo 5. pedum reflectente, dubia.
Nov.	13	17 10 30	Immerſio 1. Tubo reflectente. Nubes rariores obſeruationi impedimento eſſe potuerunt.
	20	19 3 50	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
		4 3	Eadem obſeruata tubo 5. pedum.
	29	15 23 0	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano et reflectente: dubia, ob nubem ipſo momento immerſionis ſuperuenientem.
Decemb.	8	11 42 13	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
		42 27	Eadem tubo reflectente 5. pedum.
	15	10 42 22	Emerſio 3. tubo reflectente 5. pedum.
		42 35	Eadem emerſio obſeruata tubo 15. pedum Campaniano; Satelles Ioui nimis erat vicinus vt de tempore ſat certi eſſe haud poſſimus.
		13 32 4	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
		32 10	Eadem tubo reflectente 5. pedum.
	24	9 50 5	Immerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
		50 20	Eadem tubo reflectente.

Immerſio

ſt. n.		temp. ver.			Anno 1742.
Ianuar.	8	17^h	42′	20″	Immerſio 2. Tubo 15. pedum Campaniano.
			42	26	Eadem Tubo reflectente 5. pedum.
	19	9	29	42	Immerſio 2. Tubo 15. pedum Campaniano.
			29	57	Eadem tubo reflectente 5. pedum.
	26	12	0		Immerſio 2. Tubo reflectente 5. pedum, difficilis obſervatu propter Iovem oppoſitioni cum ſole admodum propinquum.
Febr.	15	14	8	13	Emerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
	20	11	57	16	Emerſio 2. Tubo 15. pedum Campaniano.
	27	14	34	0	Emerſio 2. Tubo 15. pedum Campaniano.
	28	15	59	32	Emerſio 4. Tubo reflectente 5. pedum.
Mart.	10	14	25	30	Emerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
	12	8	54	5	Emerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
			54	21	Eadem emerſio. Tubo 15. pedum Campaniano.
	17	16	22	28	Emerſio 1. Tubo 15. pedum Campaniano.
	18	10	40	0	Immerſio 3. Tubo 15. pedum Campaniano.
			40	25	Eadem immerſio. Tubo reflectente 5. pedum.
		14	15	35	Emerſio 3. Tubo reflectente 5. pedum.
	24	11	49	22	Emerſio 2. Tubo reflectente 5. pedum.

 Eadem

st. n.		temp. ver.	Anno 1742.
Mart.	24	$11^h 49' 43$	Eadem emersio. Tubo 15. pedum Campaniano.
	25	14 41 0	Immersio 3. Tubo 15. pedum Campaniano, si 10. l. 12 minuta secunda excipias, certa.
	26	12 48 0	Emersio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
		48 20	Eadem tubo 15. pedum Campaniano.
	28	7 17 45	Emersio primi. Tubo reflectente 5. pedum, nimia claritas diei obseruationi obesse potuit.
April.	4	9 14 45	Emersio 1. Tubo 15 pedum Campaniano.
	18	9 7 56	Emersio 2. Tubo reflectente 5. pedum, hinc emersio forte 15. vel 20. minuta secunda citius accidere potuit.
		13 7 56	Emersio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
	23	10 23 8	Emersio 3. Tubo reflectente 5. pedum.
Maii	20	9 47 33	Emersio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
	23	10 25 35	Emersio 4. Tubo reflectente 5. pedum.
Octobr	30	18 9 52	Immersio 2. Tubo reflectente 5. pedum.
Decembr.	1	13 42 27	Emersio 3. Tubo reflectente 5. pedum.
	15	18 3 1	Immersio 3. Tubo reflectente 5. pedum.

st. n.		temp. ver.	Anno 1743.
Ianuar.	26	$14^h 37' 36''$	Immersio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
	27	13 34 15	Immersio 2. Tubo reflectente 5. pedum.
		17 33 56	Immersio 3. Tubo reflectente 5. pedum.
Febr.	11	12 52 54	Immersio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
Mart.	11	7 46 30	Emersio 2. Nouo tubo reflectente 5. pedum.

Ioue

ſt. n.	temp. ver.	Anno 1743.
Mart. 25	13ʰ 2′ 23″	Ioue a nebula liberato ſecundus ſatelles ex vmbra emerſus conſpiciebatur, tubo nouo reflectente 5. pedum.
29	15 41 43	Emerſio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
31	10 10 3	Emerſio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
	10 4	Eadem emerſio tubo veteri reflectente 5. pedum obſeruata.
April. 6	11 0 46	Immerſio 4. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
	0 57	Eadem immerſio tubo veteri reflectente 5 pedum.
	14 56 56	Emerſio 4. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
9	12 53 14	Ioue e nube emerſo 3. ſatelles iam ex vmbra exiuerat, nondum autem magnitudine conſueta gaudebat. Tubus ad obſeruationem adhibitus fuit reflectens 5. pedum vetus.
12	7 32 22	Emerſio 2. Nouo tubo reflectente 5. pedum.
16	8 32 51	Emerſio 1. Nouo tubo reflectente 5. pedum.
	13 34 23	Immerſio 3. Nouo tubo reflectente 5. pedum.
23	8 56 55	Emerſio 4. Nouo tubo reflectente 5. pedum.
	10 29 [illegible]	Immerſio 1. Nouo tubo reflectente 5. pedum.

Eadem

st. n.		temp. ver.	Anno 1743.
April.	23	$10^h 29' 10''$	Eadem obseruata. Tubo veteri reflectente 5. pedum.
Maii	7	14 22 40	Emersio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum. Iupiter admodum profundus erat.
	9	18 49 02	Emersio 1. Tubo nouo reflectente. Crepusculum magnum.
	22	9 35 30	Immersio 3. dub. Tubo nouo reflectente 5 pedum.
		12 48 43	Emersio 3. Tubo maiori Gregoriano valde bono.
		48 49	Emersio 3. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
Iun.	12	11 9 54	Immersio 4. Tubo nouo reflectente 5. pedum. 1. Crepusculum magnum.
Nov.	28	19 23 8	Immersio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
Dec.	7	15 41 9	Immersio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.

st. n.		tempu vero.	Anno 1744.
Febr.	4	$11^h 2' 10''$	Emersio 3. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
	7	13 50 17	Immersio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
Mart.	17	12 22 19	Immersio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
	18	8 12 7	Immersio 3. Tubo nouo reflectente 5. pedum. Iupiter erat profundus.

Im-

st. n.		temp. ver.	Anno 1744.
Mart.	18	9ʰ 3′ 22″	Immersio 2. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
April.	18	11 17 17	Emersio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
	19	11 13 48	Emersio 2. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
		14 2	Eadem emersio. Tubo Campaniano 15. pedum.
April.	25	13 13 58	Emersio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
		14 9	Eadem obseruata tubo Campaniano 15. pedum.
	26	13 50 41	Emersio 2. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
	30	10 44 10	Emersio 3. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
Maii.	11	11 33 50	Emersio 1. Tubo nouo reflectente 5. pedum.
		34 0	Eadem emersio. Tubo 15. pedum Campaniano.
	21	10 49 27	Emersio 2. Tubo 15. pedum Campaniano.

st. n.		temp. ver.	Anno 1745.
Mart.	1	15ʰ 58′ 8″	Immersio 2. Tubo reflectente 5. pedum.
	4	12 50 5	Emersio 3. Tubo reflectente. Coelo satis sereno, Iupiter non bene terminatus, neque satis eleuatus ab Horizonte conspiciebatur.

st. r.		temp. ver.	Anno 1745.
Mart.	4	$16^h 53' 29''$	Immersio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
	11	14 58 57	Immersio 3. Tubo reflectente 5. pedum; dubia ob vapores, quibus coelum repletum erat.
Maii.	7	12 22 20	Emersio 1. Tubo reflectente Gregoriano 5. pedum, difficilis ob nimiam Iouis et satellitis viciniam.
	14	14 19 50	Emersio 1. Tubo reflectente 7. pedum. Haec obseruatio non satis certa ad minutum primum vsque, propter nimium crepusculum et Iouem admodum profundum.
	15	9 27 48	Emersio 2. Tubo reflectente 5. pedum. Crepusculum nimium obstitit exactitudini obseruationis, cuius incertitudo ad plurima minuta secunda se extendit.
	29	10 51 50	Immersio 3. aestimata, quoniam ante minutum primum nube tectus fuisset, cum iam admodum diminutus apparuisset per tubum reflectentem 5. pedum
		12 36 25	Emersio 3. tubo reflectente 5. pedum.
Iun.	23	11 33 19	Emersio 2. tubo reflectente 5. pedum. Incerta ad minutum primum vsque, ob nimium crepusculum et nebulam crassam, quae reliquos vix conspiciendos praebebat satellites. Accedebat quod Iupiter non admodum eleuatus esset.

OCCVI.

OCCVLTATIO PALILICII A LVNA

d. $\frac{21.\ \text{Septembr.}}{2.\ \text{Octobr.}}$ 1738.

PETROPOLI OBSERVATA

a

G. Heinſio.

Occultationes quarundam ſtellarum ex Hyadibus a luna, circa ipſum eius ortum videndi ſpes erat, quam vero denſiſſima ad horizontem nebula fruſtrata eſt. Luna non niſi longum tempus poſt ortum ſuum in conſpectum venit, et tunc quoque tam craſſis inuoluta vaporibus, vt Palilicium in vicinia eius exiſtens, per tubos quoque maiores videri non poſſet. Palilicium tandem conſpicitur, luna 10. gradus ſupra horizontem eleuata. Tubo aſtronomico 15. ped. lunam deinceps diligenter contemplatus ſum, an duplicem ſtellam, a Bayero θ deſignatam in vicinia lunae cernere poſſem, 9^h. 12$'$. tempore vero ſtellam 2 ad θ ad limbum lunae obſcurum iam emerſam vidi, altera 1 ad θ tunc temporis non apparuit. Notato priori momento et tubo iterum ad lunam directo, altera quoque ſtella 1 ad θ, 9^h. 31$'$. in conſpectum venit. An circa hoc momentum reuera emerſerit, aſſerere non audeo; nebulae enim craſſiores ſubinde interuenientes obſeruationem hanc dubiam reddunt. Interim momentum poſterius, a vero emerſionis momento non admodum diſcrepare debet, cum ſtellae confinio lucis et vmbrae diſci lunaris valde vicinae exiſterent, ſic vt colligerem iſtas, praeſertim 1 ad θ, limbo lunae obſcurae admodum propinquas fuiſſe. Conuerſo nunc tum lunae, tum Palilicii adſpectu, per tubum quadrantis portatilis, radii 2. pedum, loca lunae ad Palilicium iuxta methodum infra commemorandam determinata ſequentia.

Ordo obſerv	Momenta obſeruationum Temporis veri	Differentiae aſcenſ. rectae centri ☽. et Palilicii in temp. primi mobilis.	Differentiae declinationum centri ☽. et Palilicii in part. circuli maximi.	Altitudo limbi ☽. inferioris (apparenter ſuperioris in tubo aſtron.) neque parallaxi, neque refractione correcta.
1.	10^h. 0'. 40''	4'. 42''½	27'. 0''	15°. 33'½
2	— 24. 24	3. 52⅔	32. 53	18. 28.
3	— 33. 0	2. 25	22. 43	19. 31
4	— 50. 13	40½	19. 52	
5	11. 14. 42	3. 17	17. 32	24. 36½
6	— 25. 58	1. 58½	15. 45	25. 57½
7	— 31. 43	1. 46	15. 14	26. 29½
8	— 37. 43	1. 37½	14. 12	
9	— 45. 52	1. 22	13. 20	28. 18
10	12. 6. 36	0. 45	10. 52	
11.	8. 31	Immerſio Palilicii ad limbum lunae lucidum, tum per tubum Newton. 5. ped. tum per tub. aſtron. 15. ped.		
12.	— 38. 32	Coniunctio viſa centri lunae et Palilicii. Diſtantia centrorum minima deducta eſt 7'. 44''. part. circuli maximi, qua centrum lunae auſtralius erat Palilicio.		

13.

13.	13. 8. 48.	Emersio Palilicii ad limbum lunae obscurum per tubum quadrantis [illegible] quatuor [illegible] ita versus lunam direxi, vt [illegible] care solet, [illegible] vt [illegible] lunae [illegible] modo [illegible] ea temporis [illegible] lic[illegible] runt [illegible]
14.	[illegible]	
15.	[illegible]	
16.	[illegible]	
17.	[illegible]	
18.	[illegible]	
19.	[illegible]	
20.	[illegible]	

Vltima haec obseruatio ipsum momentum culminationis centri lunae respicit, et altitudo notata est, altitudo meridiana limbi inferioris lunae.

Ex obseruata per Cl. De L'Isle centri lunae culminatione d. 3. Octobr. deducitur interuallum temporis inter vtrumque lunae per meridianum transitum d. 2. et 3. Octobr. $24^h. 46'. 56\frac{1}{2}''$ temporis veri; huic autem interuallo ex obseruationibus respondet mutatio declinationis lunae interea facta $1°. 53'. 50''$, prouti e superficie terrae visa est. Declinatio est borealis crescens.

Cum in transitu lunae per meridianum d. 2. et 3. Octobr. linea cuspidum disci lunaris situm verticalem haberet, vtriusque limbi tum superioris, tum inferioris altitudinem meridianam obseruare licuit; vnde deducta est diameter lunae apparens in Culminatione eius d. 2. Octobr. $29'. 54''$; d. 3. Octobr. $30'. 15''$; vtraque ad altitudinem lunae meridianam istis diebus referenda.

Loca centri lunae ad Palilicium iuxta eandem methodum determinata sunt, quam in dissert: de transitu lunae [illegible] Hyadum [illegible] exposui. Scilicet ope quadrantis portatilis [illegible] pedum, in cuius foco quatuor fila ad angulos semirectos se decussantia extabant, ita versus lunam direxi, vt filum, quod horizontale vocare solet, situm horizontalem exactum nancisceretur, et vt tum luna, tum Palilicium, immoto quadrante, commode tria fila traiicere possent. Notaui deinceps momenta temporis, quibus tum limbus lunae lucidus, tum Palilicium ad tria eiusmodi fila, quaecunque fuerint, appulerunt. Hac obseruatione peracta altitudinem, quam perpendiculum in limbo quadrantis notabat, designaui. Hoc modo ex appulsibus limbi lunaris et Palilicii ad tria fila, iuxta methodum citatam cognoui differentias ascensionum rectarum et declinationum centri lunae et Palilicii, prout istae in obseruatione ponuntur, nec non diametrum lunae apparentem, quam habito diuersarum lunae altitudinum super horizonte respectu, optime conuenientem deprehendi cum diametro quae in culminatione lunae per altitudines meridianas vtriusque limbi, superioris et inferioris, eruta est. Tandem ex datis momento obseruationis et tempore appulsus limbi inferioris lunae ad filum horizontale, nec non ex data altitudine, ad quam quadrans in obseruatione repositus fuit, innotuit ad momentum obseruationis altitudo limbi inferioris lunae super horizonte, prout in obseruatione adscripta est.

Figura I. declarat positiones centri lunae ad Palilicium eiusque diurnum, et numeri ibi adscripti conspirant cum numeris, quibus ordo obseruationum supra indicatur. Figura autem accommodata est apparentiae tubi astronomici, vt reuera supra meridies, infra septentrio, ad dextram ortus, ad sinistram occasus subintelligi debeant. Ab observatione 1. usque ad 16. centrum lunae a Palilicio declinavit austrum versus; ab observatione 17. usque ad 20. versus boream. Centrum lunae ab observatione 1. usque ad coniunctionem visam cum Palilicio in Ascensione recta hoc occidentalius fuit; post coniunctionem vero orientalius. Ceterum circumstantias omnes supra notavi, quibus ad cognitionem parallaxeos ascensionis rectae et altitudinis lunae ex data eius positione ad Palilicium in culminatione d. 2. Octobr. et data quavis alia observatione loci lunae ad Palilicium pervenire liceat. Notandum autem est, tres ultimas priores observationes loci lunae ad Palilicium propter lunae viciniam ad horizontem et vapores, observationem subinde turbantes mihi paulisper dubias esse.

Phaenomena quaedam in Occultationibus stellarum a luna obvia, et a me quoque tum in praesenti, tum in observatione transitus lunae per Hyades d. 2. Ianuar. 1731 notata, silentio praeterire nequeo; quae vero antequam recenseam, sequentia praemittenda duco.

Quando Iovem per tubos maiores contemplamur, distincto quidem disci eius limbo repraesentatio, interstitium non omnino ad limbum disci fuscum cessat, sed spatium aliquod circa discum Iovis luminosum, cuius limbus inaequalis est intensitatis, et recedendo a limbo Iovis continuo decrescit, donec in notabili a Iove distantia in caeruleo coeli colore penitus confundatur. Phaenomeni huius ratio haec videtur. Referat charta fig. 2. retinam oculi, in qua obiecta depinguntur, quando ista videmus. Sit *a m b* imago disci Iovis in retina. Lumen

in

in hoc spatio *amb* retinae conciliat motum vibratorium, cui sensatio intensitatis luminis respondet; et haec eo maior est, quo fortior est iste motus. Hic retinae motus intra spatium *amb*, in quo repraesentatio fit, contineri nequit, sed ad partes retinae adiacentes propagatur, et recedendo a spatio repraesentationis *amb* continuo decrescit, donec euanescat. Descripti sint circa discum Iouis *amb*, circuli *cd*, *ef*, *gh*, *ik* etc. disco concentrici ad exigua interualla, hunc in finem, vt in istorum peripheriis diuersos gradus motus a spatio repraesentationis *amb* propagati distinguere possimus. Hoc pacto motus, qui est in spatio *amb* propagabitur eiusdem fere intensitatis per zonam inter peripherias *cd*, *amb* contentam; quae proinde zona aeque luminosa apparebit, ac discus Iouis *amb*, hoc est, propter luminis intensitatem discus Iouis maior apparet, ac reuera est; videtur scilicet sub magnitudine circuli *cnd*, cum discus tantummodo magnitudinem *amb* habeat. In zona inter peripherias *ef*, *cd* posita minor datur gradus motus retinae, vnde et sensatio luminis, quae huic motui respondet, minor erit, hoc est circa discum Iouis sub circulo *cnd* apparentem, videbitur lumen circumfusum, minoris tamen intensitatis, quam in disco ipso est, ab hoc proinde distinguendum. In sequenti zona inter peripherias *gh*, *ef*, adhuc minor dabitur retinae motus, habent quoque minoris intensitatis ibi lumen, et sic porro per gradus continuo minuetur motus retinae et minor quoque luminis sensatio erit, donec nullibi amplius esset. Referat haec ad vicem.

Si circulus *amb* sumatur pro disco lunae, dicta etiam de luna valebunt; eius discus maior apparebit propter

inten-

intensitatem luminis, ac re vera est, et circa istum corona lucida dabitur, quae tamen propter fortius lunae lumen ad maius spatium se extendet, quam in Ione. Sit in S stella, quae ad lunam pro immota habitam, iuxta directionem SF feratur. Ponamus in periphería *ik* desinere coronam lunae luminosam. Igitur si stella est in S, imago eius depingitur in spatio retinae, in quo nullus datur motus a lumine lunae effectus, vnde stella soluto lumine fulgebit, et certam quandam, licet valde paruam, coronam circa se formabit, vt ante de Ioue vidimus. Quando stella peruenit ad K, offendit spatium retinae, in quo motus aliquis a lumine lunae datur. Sentimus ergo non integrum motum, quem lumen stellae efficere potest, sed tantum excessum eius super motum quem iam retina in K habet. Stella ergo in K lumine decrescere videtur, et eius corona lucida contrahitur. Quando stella ad *b* pertingit, quia motus retinae in *b* fortior est, quam in K; excessus motus, quem lumen stellae retinae imprimere valet, super motum retinae in *b*, minor erit ac antea; vnde et stellae adhuc minor erit claritas, eiusque corona magis minuetur. Et sic porro stella accedendo ad limbum lunae continuo lumine decrescet. Si intensitas luminis stellae ita comparata sit, vt solitarie motum tantum in retina efficere valeat, qui aequalis sit motui in *f* a lumine lunae producto; tunc quando stella peruenit ad *f*, disparebit, cum excessus motus a stella producti super motum retinae in K hic euanescat. Hinc ratio manifesta est, cur stellae 4^{tae}, 5^{tae}, 6^{tae} etc. magnitudinis dum ad limbum lunae lucidum accedunt, in notabili ab eo distantia iam dispareant, antequam discum lunae subeunt. E contrario

 quoque

quoque patet, cur eaedem stellae post emersionem non nisi in notabili a limbo lunae lucido distantia, veluti in e appareant, quia in propiori distantia veluti in i motus retinae fortior est, quam iste, quem lumen stellae retinae imprimere valet. Inde phaenomena, quae de emersione duplicis stellae θ in transitu lunae per Hyades d. 2. Januar. 1788. notavi, facile intelliguntur.

Si lumen stellae S ita comparatum sit, vt si solum agat, motum retinae conciliare valeat, qui maior sit quovis motu in k, h, f, d etc. a lumine lunae producto, manifestum est, stellam transeundo k, h, f, d continua quidem decrementa suae lucis pati, disparere tamen non posse antequam discum ipsum amb subeat. Stella igitur, quando peruenit ad d, tangere videbitur limbum lunae falsum cnd; in transitu vero per spatiolum db stella in disco lunae persistere videbitur, donec subeundo discum lunae penitus in b, disparear. Scilicet per hyp: fortior est motus a lumine stellae productus motu retinae in bd a lumine lunae effecto, vnde excessus istius super hoc datur positiuus. In hoc ergo casu lumen falsum, quod discum lunae producit in cnd, ex praesentia stellae distinguere valemus a limbo lunae vero amb. Phaenomenum hoc obuium est in occultationibus fixarum primae magnitudinis a luna, et in praesenti quoque obseruatione se conspiciendum praebuit.

Palilicium in accessu ad lunam per tubum 15. pedum primo tangere vidi limbum lunae falsum cnd in d; deinceps vero Palilicium intra spatium db se recepit, et transeundo hoc spatium $1\frac{1}{4}$ secunda temporis insumsit, antequam ad limbum verum amb in b dispareret. Sic Palilicium in disco lunae ad $b\ d$ apparuit et discussum

optime

optime terminatum exhibuit paululum lucidiorem, quam spatium erat intra peripherias *cnb*, *amb*, contentum, hoc est lumen lunare ipsum. Diameter Palilicii apparens exacte repleuit spatium *bd* seu interuallum peripheriarum *cnb*, *amb*, et in hoc situ deinceps stella in instanti quasi disparuit. Simile phaenomenum sese exhibuit in emersione Palilicii d. 2. Ianuar. 1738.

Ex obseruatione praesenti tum augmentum disci lunaris propter luminis intensitatem, tum Diameter Palilicii apparens, facile determinari possunt. Sint *amb* discus lunae pro immoto habitus, *cnd* limbus eius propter luminis effectum auctus, *da* semita, in qua stella lunam traiiciat, CD distantia centrorum minima, C*b* vel C*f* semidiameter disci veri, C*d* semidiameter disci aucti, adeoque *fd* ipsius augmentum. Ad tempus immersionis Palilicii est C*b* = 14′. 54″, = 894″, C*d* = 7′. 44″ = 464″; et exinde D*b* = 12′. 44″ = 764″. Temporis semimorae occultationis seu tempus per D*b* fuit 30′. 13″. temporis horologii, quo nondum correcto in obseruatione vsus fui. Palilicium spatium *db* traiecit in 1½″, vnde facta analogia 30′. 13″; 764″ = 1½″; quaesitum; habebuntur pro spatio *db* 38, scrupula tertia circuli maximi. Iam Triangula C*a*D, *dbf*, seu, propter *bd* admodum exiguam, triangula CD*b*, *dbf* inter se sunt similia; vnde C*b* : D*b* = *bd* ; *fd*; quare *fd* inuenitur 32‴, seu ½″ cuius ergo magnitudinis est augmentum semidiametri lunaris ex effectu luminis, vel etiam diameter Palilicii, siquidem vi obseruationis disculus Palilicii exacte repleuit spatium inter limbum lunae verum et falsum comprehensum.

Fig. 3.

ſt. r.		temp. ver.			Anno 1745.
Mart.	4	16^h	53′	29″	Immerſio 1. Tubo reflectente 5. pedum.
	11	14	58	57	Immerſio 3. Tubo reflectente 5. pedum; dubia ob vapores, quibus coelum repletum erat.
Maii.	7	12	22	20	Emerſio 1. Tubo reflectente Gregoriano 5. pedum, difficilis ob nimiam Iouis et ſatellitis viciniam.
	14	14	19	50	Emerſio 1. Tubo reflectente 7. pedum. Haec obſeruatio non ſatis certa ad minutum primum vsque, propter nimium crepuſculum et Iouem admodum profundum.
	15	9	27	48	Emerſio 2. Tubo reflectente 5. pedum. Crepuſculum nimium obſtitit exactitudini obſeruationis, cuius incertitudo ad plurima minuta ſecunda ſe extendit.
	29	10	51	50	Immerſio 3. aeſtimata, quoniam ante minutum primum nube tectus fuiſſet, cum iam admodum diminutus apparuiſſet per tubum reflectentem 5. pedum
		12	36	25	Emerſio 3. tubo reflectente 5. pedum.
Iun.	23	11	33	19	Emerſio 2. tubo reflectente 5. pedum. Incerta ad minutum primum vsque, ob nimium crepuſculum et nebulam craſſam, quae reliquos vix conſpiciendos praebebat ſatellites. Accedebat quod Iupiter non admodum eleuatus eſſet.

OCCVL-

OCCVLTATIO PALILICII A LVNA

d. 21. Septembr. / 2. Octobr. 1738.

PETROPOLI OBSERVATA

a G. Heinsio.

Occultationes quarundam stellarum ex Hyadibus a luna, circa ipsum eius ortum videndi spes erat, quam vero densissima ad horizontem nebula frustrata est. Luna non nisi longum tempus post ortum suum in conspectum venit, et tunc quoque tam crassis inuoluta vaporibus, vt Palilicium in vicinia eius extans, per tubos quoque maiores videri non posset. Palilicium tandem conspicitur, luna 10. gradus supra horizontem eleuata. Tubo astronomico 15. ped. lunam deinceps diligenter contemplatus sum, an duplicem stellam a Bayero θ designatam in vicinia lunae cernere possem. $9^h. 12'$. tempore vero stellam 2 ad θ ad limbum lunae obscurum iam emersam vidi, altera 1 ad θ tunc temporis non apparuit. Notato priori momento et tubo iterum ad lunam directo, altera quoque stella 1 ad θ $9^h. 13'$. in conspectum venit. An circa hoc momentum 1 ad θ reuera emerserit, asserere non audeo; nebulae enim crassiores subinde interuenientes obseruationem hanc dubiam reddunt. Interim momentum posterius, a vero emersionis momento non admodum discrepare debet, cum stellae confinio lucis et vmbrae disci lunaris valde vicinae existerent, sic vt colligerem istas, praesertim 1 ad θ, limbo lunae obscurae admodum propinquas fuisse. Conuerso nunc tum lunae, tum Palilicii

cii adſpectu, per tubum quadrantis portatilis, radii 2. pedum, loca lunae ad Palilicium iuxta methodum infra commemorandam determinatur ſequentia.

Ordo obſerv	Momenta obſeruationum Temporis veri	Differentiae aſcenſ. rectae centri ☽. et Palilicii in temp. primi mobilis.	Differentiae declinationum centri ☽. et Palilicii in part. circuli maximi.	Altitudo limbi ☽. inferioris (apparenter ſuperioris in tubo aſtron.) neque parallaxi, neque refractione correcta.
1.	10h. 0'. 40''	4'. 42½''	27'. 0''	15°. 33⅛'
2	— 24. 24	3. 52⅔	32. 53	18. 28.
3	— 33. 0	2. 35	22. 43	19. 3½
4	— 52. 13	1. 40½	19. 52	
5	11. 4. 42	0. 17	17. 38	24. 36½
6	— 25. 58	1. 58½	15. 45	25. 57½
7	— 31. 43	1. 46	15. 34	26. 29½
8	— 37. 43	1. 37¼	14.	
9	— 45. 52	1. 33	14. 31	28. 18
10	12. 6. 36	0. 45	13. 53	
11.	8. 31	Immerſio Palilicii ad limbum lunae lucidum, tum per tubum Newton. 5. ped. tum per tub. aſtron. 15. ped.		
12.	— 35. 32	Coniunctio viſa centri lunae et Palilicii. Diſtantia centrorum minima deducta eſt 7'. 44''. part. circuli maximi, qua centrum lunae auſtralius erat Palilicio.		

13.	13. 8. 48.	Emersio Palilicii ad limbum lunae obscuriorem per tubum quadrantis pro- [illegible]
15.	[illegible]	[illegible]
16.	[illegible]	[illegible]
17.	[illegible]	[illegible]
18.	[illegible]	[illegible]
19.	[illegible]	[illegible]
20.	[illegible]	[illegible]

Vltima haec obferuatio ipfum momentum culminationis centri lunae refpicit, et altitudo notata eft, altitudo meridiana limbi inferioris lunae.

Ex obferuata per Cl. De L'Isle centri lunae culminatione d. 3. Octobr. deducitur interuallum temporis inter vtrumque lunae per meridianum tranfitum d. 2. et 3. Octobr. $24^h. 46'. 56\frac{1}{2}''$ temporis veri; huic autem interuallo ex obferuationibus refpondet mutatio declinationis lunae interea facta $1°. 53'. 50''$. prouti e fuperficie terrae vifa eft. Declinatio eft borealis crefcens.

Cum in tranfitu lunae per meridianum d. 2. et 3. Octobr. linea cufpidum difci lunaris fitum verticalem haberet, vtriusque limbi tum fuperioris, tum inferioris altitudinem meridianam obferuare licuit; vnde deducta eft diameter lunae apparens in Culminatione eius d. 2. Octobr. $29'. 54''$; d. 3. Octobr. $30'. 15''$; vtraque ad altitudinem lunae meridianam iftis diebus referenda.

Loca centri lunae ad Palilicium iuxta eandem methodum determinata funt, quam in differt: de tranfitu lunae

per

[illegible] Hyadum [illegible] exposui. Scilicet tubum [illegible] quadrantis portatilis [illegible] pedum, in cuius foco quatuor fila ad angulos [illegible] decussantia extabant, ita versus lunam direxi, vt filum, quod horizontale vocare solet, situm horizontalem exactum nancisceretur, et vt tum luna, tum Palilicium, immoto quadrante, commode tria fila traiicere possent. Notaui deinceps momenta temporis, quibus tum limbus lunae lucidus, tum Palilicium ad tria eiusmodi fila, quaecunque fuerint, appulerunt. Hac obseruatione peracta altitudinem, quam perpendiculum in limbo quadrantis notabat, designaui. Hoc modo ex appulsibus limbi lunaris et Palilicii ad tria fila, iuxta methodum citatam cognoui differentias ascensionum rectarum et declinationum centri lunae et Palilicii, prout istae in obseruatione ponuntur, nec non diametrum lunae apparentem, quam habito diuersarum lunae altitudinum super horizonte respectu, optime conuenientem deprehendi cum diametro quae in culminatione lunae per altitudines meridianas vtriusque limbi, superioris et inferioris, eruta est. Tandem ex datis momento obseruationis et tempore appulsus limbi inferioris lunae ad filum horizontale, nec non ex data altitudine, ad quam quadrans in obseruatione repositus fuit, innotuit ad momentum obseruationis altitudo limbi inferioris lunae super horizonte, prout in obseruatione adscripta est.

Figura I. declarat positiones centri lunae ad Palilicium eiusque diurnum, et numeri ibi adscripti conspirant cum numeris, quibus ordo obseruationum supra indicatur. Figura autem accommodata est apparentiae tubi astronomici, vt reuera supra meridies, infra septentrio, ad dextram

dextram ortus, ad sinistram occasus subintelligi debeant. Ab obseruatione 1. usque ad 16. centrum lunae a Palilicio declinauit austrum versus; ab obseruatione 17. vsque ad 20. versus boream. Centrum lunae ab obseruatione 11 vsque ad coniunctionem visam cum Palilicio in Ascensione recta hoc occidentalius fuit; post coniunctionem vero orientalius. Ceterum circumstantias omnes supra notaui; quibus ad cognitionem parallaxeos ascensionis rectae et altitudinis lunae ex data eius positione ad Palilicium in culminatione d. 2. Octobr. et data quauis alia obseruatione loci lunae ad Palilicium peruenire licet. Notandum autem esse tres vltimas priores obseruationes loci lunae ad Palilicium propter lunae viciniam ad horizontem et vapores, obseruationem subinde turbantes mihi paulisper dubias esse.

Phaenomena quaedam in Occultationibus stellarum a luna obuia, et a me quoque tum in praesenti, tum in obseruatione transitus lunae per Hyades d. 4. Ianuar. 1731 notata, silentio praeterire nequeo; quae vero antequam recenseam, sequentia praemittenda duco.

Quando Iouem per tubos maiores contemplamur, distincta quidem disci eius datur repraesentatio, interim tamen non omnino limes ad limbum disci finitus est, sed spatium aliquod circa discum Iouis luminosum, cuius lumen quidem non est intensitatis, et recedendo a limbo Iouis continuo decrescit, donec in notabili a Ioue distantia cum coeli colore penitus confundatur. Phaenomeni huius ratio haec videtur. Referat charta fig. 2. retinam oculi, in qua obiecta depinguntur, quando ista videmus. Sit ab imago disci Iouis in retina. Lumen in hoc spatio amb retinae conciliat motum vibratorium, cui sensatio intensitatis luminis respondet; et haec eo maior est, quo fortior est iste motus. Hic retinae motus intra spatium amb, in quo repraesentatio fit, contineri nequit, sed ad partes retinae adiacentes propagatur, et recedendo a spatio repraesentationis amb continuo decrescit, donec euanescat. Descripti sint circa discum Iouis amb, circuli cd, ef, gb, ik etc. disco concentrici ad exigua interualla, hunc in finem, vt in istorum peripheriis diuersos gradus motus a spatio repraesentationis amb propagati distinguere possimus. Hoc pacto motus, qui est in spatio amb propagabitur eiusdem fere intensitatis per zonam inter peripherias cd, amb contentam; quapropter inde zona aeque luminosa apparebit, ac discus Iouis amb, hoc est, propter luminis intensitatem discus Iouis maior apparet, ac reuera est; videtur scilicet sub magnitudine circuli cnd, cum discus tantummodo magnitudinem amb habeat. In zona inter peripherias ef, cnd posita minor datur gradus motus retinae, vnde et sensatio luminis, quae huic motui respondet, minor erit; hoc est circa discum Iouis sub circulo cnd apparentem, videbitur lumen circumfusum, minoris tamen intensitatis, quam in disco ipso, ita ab hoc probe distinguendum. In sequenti zona inter peripherias gb, ef, adhuc minor dabitur retinae motus, lumen quoque minoris intensitatis ibi apparebit, et sic porro per gradus continuo diminuto motu retinae et minor quoque luminis sensatio erit, donec tandem alicubi cesset.

Si circulum amb formaret pro disco lunae, dicta etiam de luna valebunt; eius discus maior apparebit propter inten-

intensitatem luminis, ac reuera est, et circa istam corona lucida dabitur, quae tamen propter fortius lunae lumen ad maius spatium se extendet, quam in Ioue. Sit in S. stella, quae ad lunam pro immota habitam, iuxta directionem SF feratur. Ponamus in periphesia ik desinere coronam lunae luminosam. Igitur si stella est in S, imago eius depingitur in spatio retinae, in quo nullus datur motus a lumine lunae effectus, vnde stella solito lumine fulgebit, et certam quandam, licet valde paruam, coronam circa se formabit, vt ante de Ioue vidimus. Quando stella peruenit ad K, offendit spatium retinae, in quo motus aliquis a lumine lunae datur. Sentimus ergo non integrum motum, quem lumen stellae efficere potest, sed tantum excessum eius super motum quem iam retina in K habet. Stella ergo in K lumine decrescere videtur, et eius corona lucida contrahitur. Quando stella ad b pertingit, quia motus retinae in b fortior est, quam in K; excessus motus, quem lumen stellae retinae imprimere valet, super motum retinae in b, minor erit ac antea; vnde et stellae adhuc minor erit claritas, eiusque corona magis minuetur. Et sic porro stella accedendo ad limbum lunae continuo lumine decrescet. Si intensitas luminis stellae ita comparata sit, vt solitarie motum tantum in retina efficere valeat, qui aequalis sit motui in f a lumine lunae producto; tunc quando stella peruenit ad f, disparebit, cum excessus motus a stella producti super motum retinae in K hic euanescat. Hinc ratio manifesta est, cur stellae 4^{tae}, 5^{tae}, 6^{tae} etc. magnitudinis, dum ad limbum lunae lucidum accedunt, in notabili ab eo distantia iam disparegant, antequam discum lunae subeunt. E contrario

 quoque

quoque patet, cur eaedem stellae post emersionem non nisi in notabili a limbo lunae lucido distantia, veluti in *e* appareant, quia in propiori distantia veluti in *i* motus retinae fortior est, quam iste, quem lumen stellae retinae imprimere valet. Inde phaenomena, quae de emersione duplicis stellae θ in transitu lunae per Hyades d. 2. Januar. 1788. notavi, facile intelliguntur.

Si lumen stellae S ita comparatum sit, vt si solum agat, motum retinae conciliare valeat, qui maior sit quovis motu in *k*, *h*, *f*, *d* etc. a lumine lunae producto; manifestum est, stellam transeundo *k*, *h*, *f*, *d* continua quidem decrementa suae lucis pati, disparere tamen non posse antequam discum ipsum *amb* subeat. Stella igitur, quando pervenit ad *d*, tangere videbitur limbum lunae falsum *cnd*; in transitu vero per spatiolum *db* stella in disco lunae persistere videbitur, donec subeundo discum lunae penitus in *b*, disparebit. Scilicet per hyp. fortior est motus a lumine stellae productus motu retinae in *bd* a lumine lunae effecto, vnde excessus istius super hoc datur positiuus. In hoc ergo casu lumen falsum, quod discum lunae producit in *cnd*, ex praesentia stellae distinguere valemus a limbo lunae vero *amb*. Phaenomenum hoc obuium est in occultationibus fixarum primae magnitudinis a luna, et in praesenti quoque obseruatione se conspiciendum praebuit.

Palilicium in accessu ad lunam per tubum 15. pedum primo tangere vidi limbum lunae falsum *cnd* in *d*; deinceps vero Palilicium intra spatium *db* se recepit, et transeundo hoc spatium 4¼ secunda temporis insumsit, antequam ad limbum verum *amb* in *b* disspareret. Sic Palilicium in disco lunae ad *bd* apparuit et discursum

optime

optime terminatum exhibuit paululum lucidiorem, quam spatium erat intra peripherias *cnb*, *amb*, contentum, hoc est lumen lunare ipsum. Diameter Palilicii apparens exacte repleuit spatium *bd* seu interuallum peripheriarum *cnb*, *amb*, et in hoc situ deinceps stella in instanti quasi disparuit. Simile phaenomenum sese exhibuit in emersione Palilicii d. 2. Ianuar. 1738.

Ex obseruatione praesenti tum augmentum disci lunaris propter luminis intensitatem, tum Diameter Palilicii apparens, facile determinari possunt. Sint *amb* discus lunae pro immoto habitus, *cnd* limbus eius propter luminis effectum auctus, *da* semita, in qua stella lunam traiiciat, CD distantia centrorum minima, C*b* vel C*f* semidiameter disci veri, C*d* semidiameter disci aucti, adeoque *fd* ipsius augmentum. Ad tempus immersionis Palilicii est C*b* = 14′. 54″ = 894″, C*d* = 7′. 44″ = 464″; et exinde D*b* = 12′. 44″ = 764″. Tempus semimorae occultationis seu tempus per D*b* fuit 30′. 13″. temporis horologii, quo nondum correcto in obseruatione vsus sum. Palilicium spatium *db* traiecit in 1¼″, vnde facta analogia 30′. 13″ : 764″ = 1¼″ : quaesitum, habebantur pro spatio *db* 38 scrupula tertia circuli maximi. Iam Triangula C*d*D, *dbf*, seu, propter *bd* admodum exiguam, triangula CD*b*, *dbf* inter se sunt similia; vnde C*b* : D*b* = *bd* : *fd*; quare *fd* inuenitur 32‴, seu ½″ cuius ergo magnitudinis est augmentum semidiametri lunaris ex effectu luminis, vel etiam diameter Palilicii, siquidem vi obseruationis disculus Palilicii exacte repleuit spatium inter limbum lunae verum et falsum comprehensum. Fig. 3.

Cassini in Commentar. Acad. reg. Scient. Parif. 1717. p. 333. ed. Batav. ex comparatione Sirii cum disco Iovis per tubum 34. ped. diametrum apparentem Sirii aestimauit 5,″ adeoque multo maiorem diametro Palilicii, quae in praecedentibus ½″ inuenta est. Etsi autem concedere possim, discum Sirii reuera maiorem esse Palilicio; ex circumstantiis tamen obseruationis Cassinianae colligo, diametrum Sirii apparentem nimis magnam, non ex defectu obseruationis, sed propter luminis intensitatem, aestimatam fuisse. Disculus scilicet eiusmodi fixae ex eadem causa auctus videtur, ex qua disci Iouis et lunae, vi praecedentium, nobis maiores apparent. Augmentum hoc in fixis sensibilius esse debet, quam in Ioue et luna. Imago istarum in retina oculi spatium occupat fere infinite paruum, quod vt sensibile nobis fiat, speciem finitae magnitudinis, licet valde paruae, referre debet. Intensitas luminis fixae, quod punctum retinae ferit, motum eius per sensibile spatium propagare valet. Hoc modo fixae multo maiores apparere debent, ac apparerent, si dictus luminis effectus cessaret. Idem *Cassini* Commentar. Acad. Reg. Scient. 1720. p. 182, ed. Bat. eleganti obseruatione hoc confirmat, vbi ex occultatione duplicis stellae γ in virgine a luna deducit, diametrum stellae tertiae magnitudinis, non obstante lunae vicinia, 30. vicibus maiorem vera apparuisse propter luminis sui intensitatem. Exinde colligere licet, quod cum *Cassini* in determinatione diametri Sirii, hunc solitarium, accedente nullo lumine alieno, per tubum contemplatus sit, iste nimis magnus ipsi apparere debuerit; vt adeo diameter Sirii multo minor 5″ censenda sit. Econtrario in praesenti determinatione

tione diametri apparentis Palilicii, propius ad magnitudinem eius veram peruenisse videor cum effectus intensitatis luminis Palilicii in contactu disci lunaris, propter lumen huius intensum, admodum diminutus fuerit. Interim diametrum Palilicii obseruata adhuc minorem esse posse non nego, imo ea, que hactenus exposui, hoc suadent. Magis quoque conuenit haec obseruatio cum aestimationibus diametrorum apparentium in fixis ab *Hugenio* et *Keillio* institutis. Prior in Cosmetheor. p. 137. diametrum apparentem Sirii 4.''' concludit ex hypothesi, quod Sirius aequalis sit Soli et a nobis 27664 vicibus plus distat, quam Sol a terra. Posterior in Lectionibus astronomicis Lect. 4, dum *Ricciolum* refellit, diametrum Sirii 18.'' statuentem, euincit, istam $\frac{1}{20}$ vnius secundi vix esse maiorem.

Caeterum haec de augmento magnitudinum apparentium in syderibus ex intensitate luminis doctrina, ad plura alia phaenomena sese extendit, qualia sunt, auctior repraesentatio phaseos lunae corniculatae prae reliquo disco eius obscuro, diminutio disci lunaris in Eclipsi Solis, diminutio discorum Veneris et Mercurii in transitu per Solem; et alia.

OBSERVATIO
TRANSITVS LVNAE AD PALILICIVM d. $\frac{4}{15}$ Martii 1739. PETROPOLI HABITA
a
G. Heinsio.

Quo maior vtilitas ex obseruationibus occultationum stellarum a luna in Astronomiam et Geographiam redundat; eo auidius obseruatores istam occasionem arripere solent, qua et frequens et diuturna occultationum obseruatio conceditur. Eiusmodi occasionem praebent fixae, quibus sequentes competunt conditiones 1) vt claritate sint conspicuae, ne tamen intensum lunae obseruationibus istarum officiat; 2) vt sibi inuicem admodum sint vicinae, quo discus lunae amplus plures earum exiguo temporis intervallo tegere possit; 3) vt habeant latitudinem satis notabilem ad 5. circiter gradus assurgentem; haec enim conditio efficit, vt luna stellas istas, nisi circa limites versetur, oculis eripere non valeat. Hoc autem casu, licet nodi orbitae lunaris velociter regrediantur, positio orbitae ad fixas circa limites sitas diu commoda pro effectu occultationum conseruatur, sic vt per duos tresue annos frequentes dentur eiusmodi fixarum a luna Eclipses. Conditiones iam memoratae optime conueniunt Hyadibus; vnde etiam factum est, vt cum annis praecedentibus limes orbitae lunaris austrinus ad istas haereret, frequentes illarum a luna occultationes contigerent, quarum aliquas in Obseruatorio imperiali obseruatas Academiae iam exhibui. Licet autem nunc lunae nodi eiusmodi positionem respectu Hyadum nacti sint, vt luna istas amplius quidem tegere non

non possit, sed ad distantiam non adeo magnam eas transeat; eiusmodi tamen transitus obseruare aeque conuenit ac occultationes ipsas, cum eundem praestent vsum. Hanc etiam ob caussam Transitus lunae ad Palilicium d. 15. Mart. 1739. st. n. obseruationem praetermittere nolui, quam coelo fauente iisdem instrumentis et eadem methodo, prout in praecedentium occultationum descriptionibus exposui, peractam, sequentem in modum exhibeo.

Ordo obseruat.	Tempus verum.	
1.	$4^h. 35' 53''$.	Culminauit centrum lunae, cuius altitudo meridiana ope sextantis muralis deprehensa est $64°. 1'. 0''$. Haec altitudo neque refractione neque parallaxi liberata intelligi debet. Ex culminatione Palilicii paulo post obseruata cognoscitur differentia ascensionum rectarum centri lunae et Palilicii $4'. 56\frac{1}{2}''$ temp. primi mobilis; differentia autem declinationum centri lunae et Palilicii $1'. 35''$. circuli maximi, qua centrum lunae australius fuit Palilicio.
		Post solis occasum, cum distinctus et lunae et Palilicii concederetur adspectus, per tubum quadrantis portatilis radii 2. pedum, loca lunae ad Palilicium per reticulum

culum istius tubi obseruaui iuxta eam methodum, quam in dissert. de transitu lunae per Hyades d. 2. Ianuar. 1738. st. n. exposui, et hactenus in eiusmodi obseruationibus semper secutus sum. Hac methodo deprehensa est diameter lunae 30'. 20''. circuli maximi, obseruationibus, ex quibus determinata est, optime inter se consentientibus. Haec lunae diameter referri debet ad momenta obseruationum sequentium, ex quibus et ipsa diameter et differentiae ascensionum rectarum ac declinationum centri lunae et Palilicii innotuerunt. Erat autem

		Differentia Ascensionum rectarum centri lunae et Palilicii in tempore primi mobilis, qua centrum lunae occidentalius fuit Palilicio.	Differentia Declinationum centri lunae et Palilicii in partibus circuli maximi, qua centrum lunae borealius fuit Palilicio.
2.	6^h 28'. 21''.	1'. $57\frac{3}{4}$''	9'. 34''.
3.	6. 44. 15.	1. $31\frac{2}{3}$	11. 2.
4.	6. 56. 59.	1. $11\frac{3}{4}$	11. 55.
5.	7. 9. 1.	0. $51\frac{2}{3}$	13. 13.
6.	7. 31. 40.		

Coniunctio visa centri lunae et Palilicii ex comparatione obseruationum praecedentium deducta.

Distan-

Distantia centrorum minima ex definita centri lunae semita colligitur 15'. 38''. qua centrum lunae borealius exstitit Palilicio.

7. 7. 34. 2. Pallilicium coniungitur cum cuspide phaseos lunae inferiori, seu in linea recta ponitur cum vtraque phaseos cuspide. Coniunctionem hanc obseruaui per tubum astronomicum 15. pedum, cuius ope tam exacte obseruatio successit, vt de momento coniunctionis ad secundum temporis certus essem, vnde eiusmodi obseruationem aeque aptam censeo ad differentias meridianorum determinandas, ac si stella a luna occultata fuisset. Per eundem tubum aestimaui distantiam Palilicii a proxima cuspide lunae in coniunctione, comparando istam cum macula lunari, quae a *Ricciolo* St. Theophilus vocatur, eamque aequalem $1\frac{1}{4}$ diametri huius maculae deprehendi. Ex cognita maculae huius ad diametrum lunae ratione, distantiam istam determinaui in partibus circuli maximi, eamque exactissime conuenientem inueni cum eadem distantia ex positione

ſemitae lunaris reſpectu lunae et ſtellae definita, aequali ſcilicet 31″. circuli maximi.

Figura adiecta oſtendit poſitiones centri lunae ad Palilicium ſitu inuerſo, in quo per tubum aſtronomicum obſeruatae ſunt; numeri autem adſcripti indicant loca centri lunae in ſemita viſa ad ea temporis momenta, quae in recenſione obſeruationum iisdem reſpectiue numeris inſigniuntur.

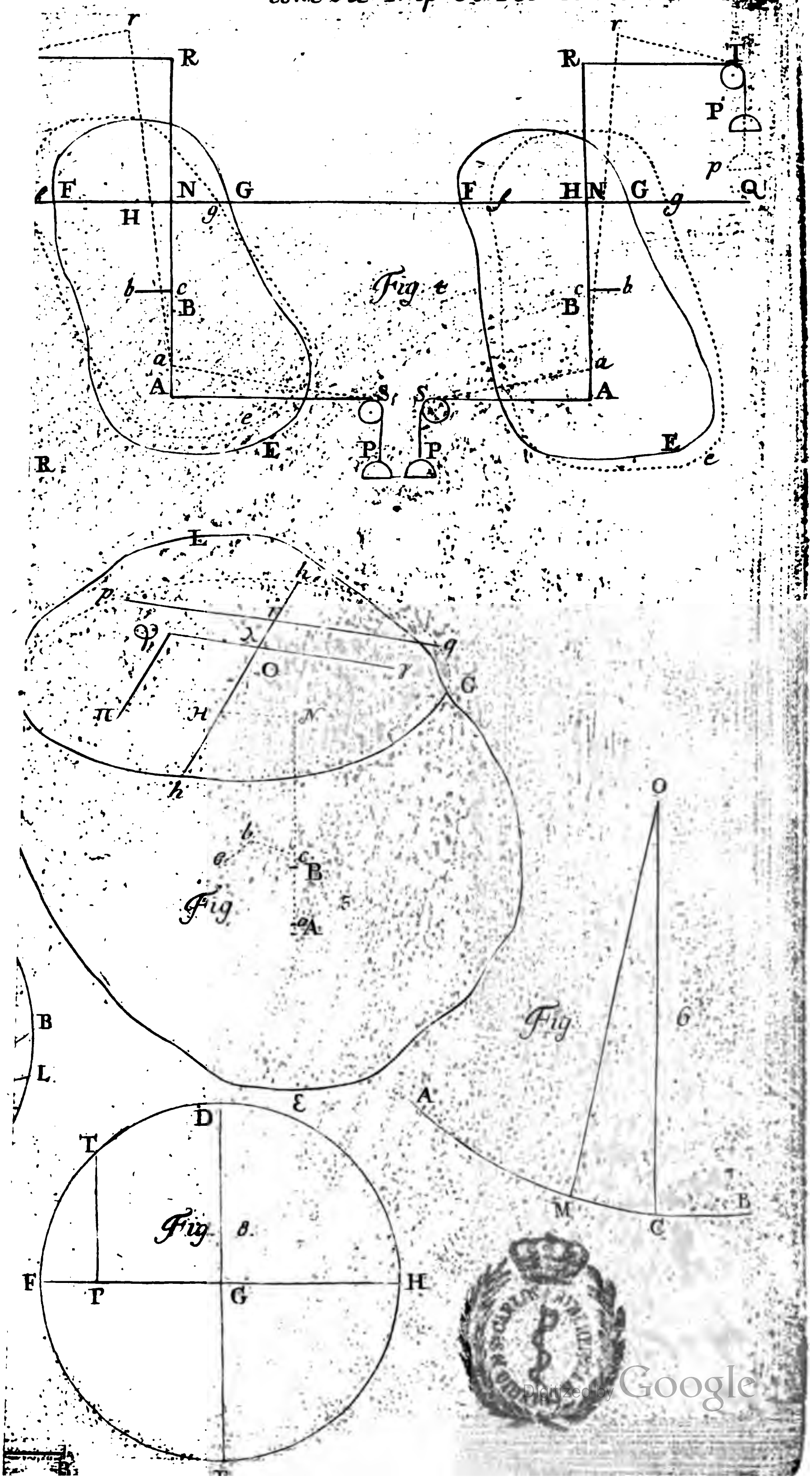


Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 8

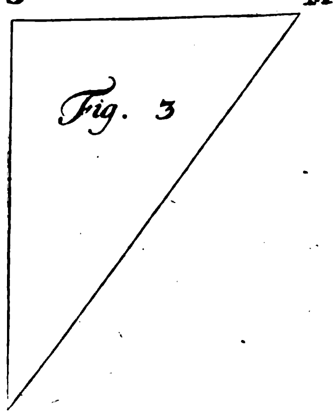


Fig. 3

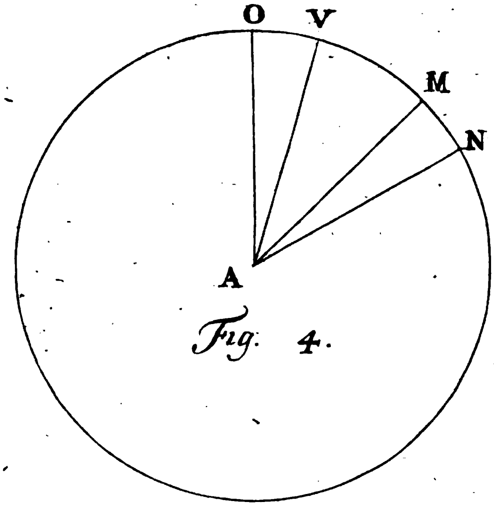
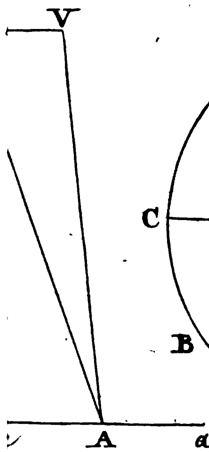


Fig. 4.



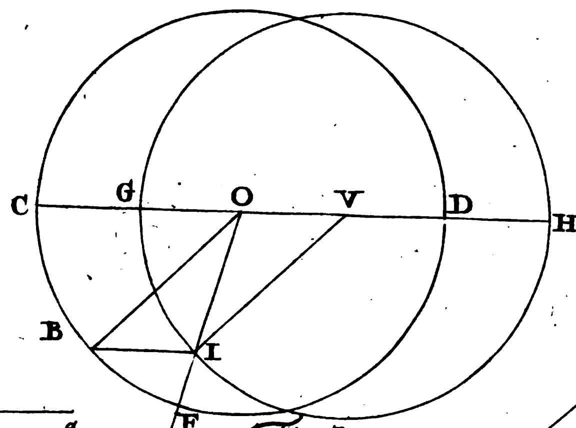


Fig: 7.

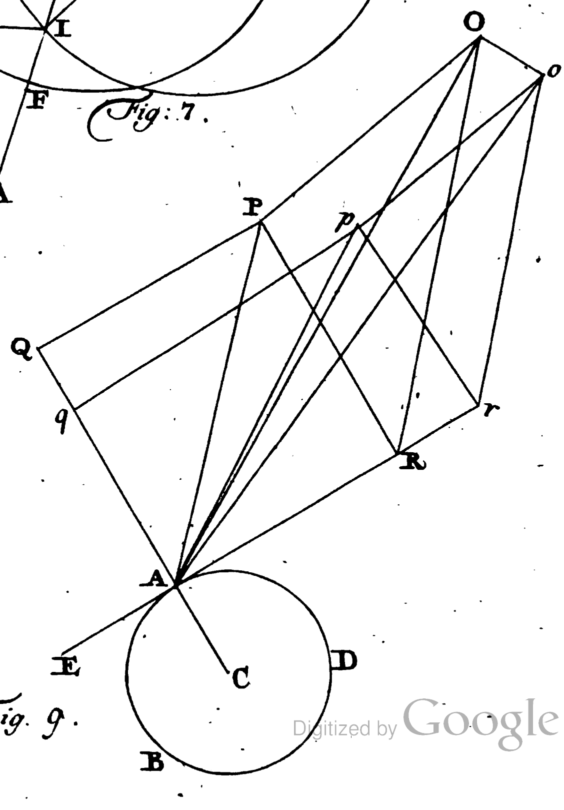


Fig. 9.

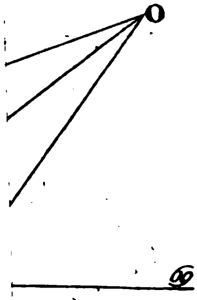


Fig: 1.

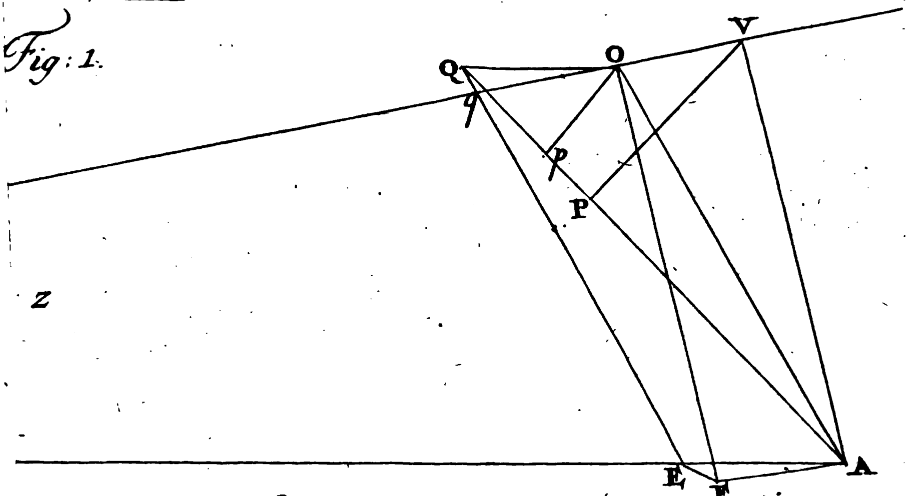
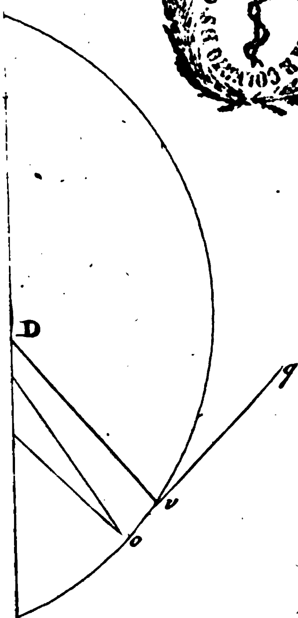


Fig: 2.



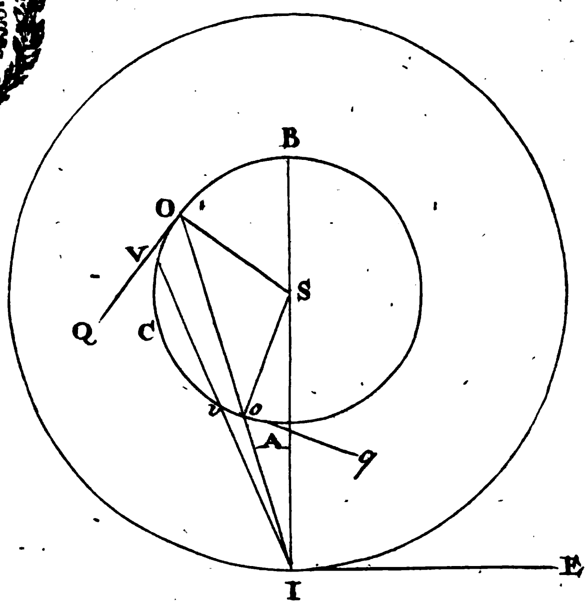
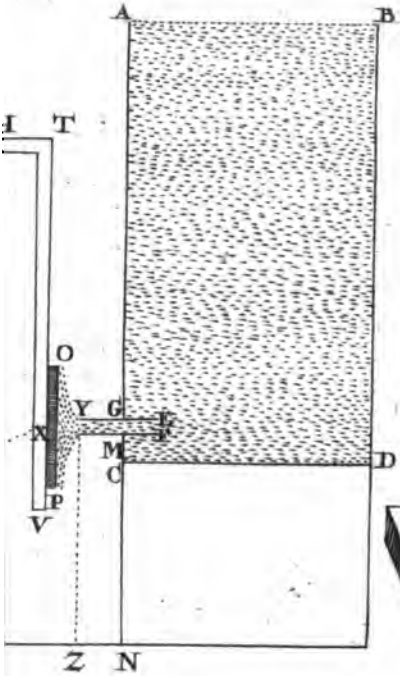


Fig. 4.



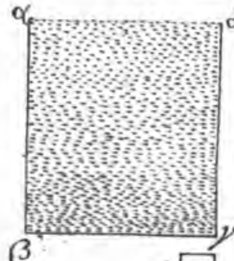


Fig. 2.

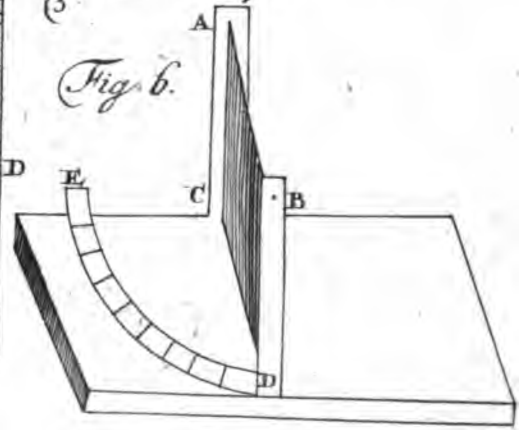


Fig. 6.

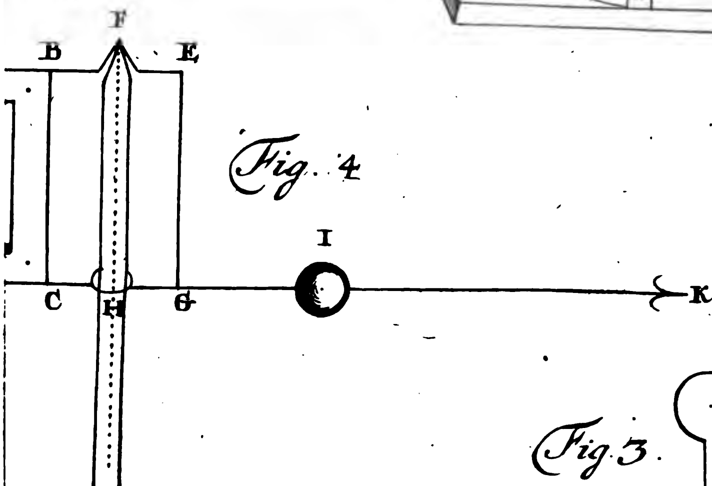


Fig. 4

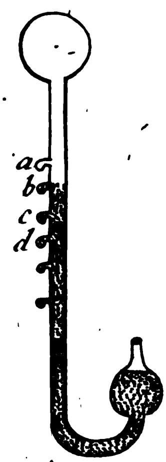


Fig. 3.

Fig. 5.

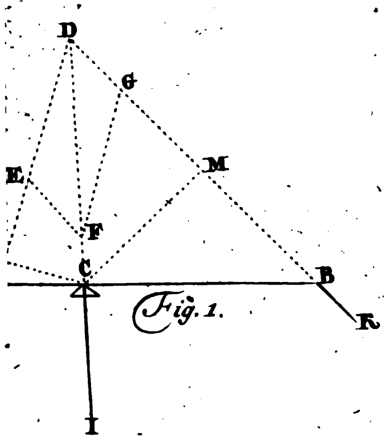


Fig. 1.

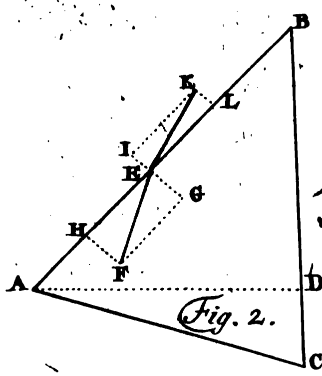
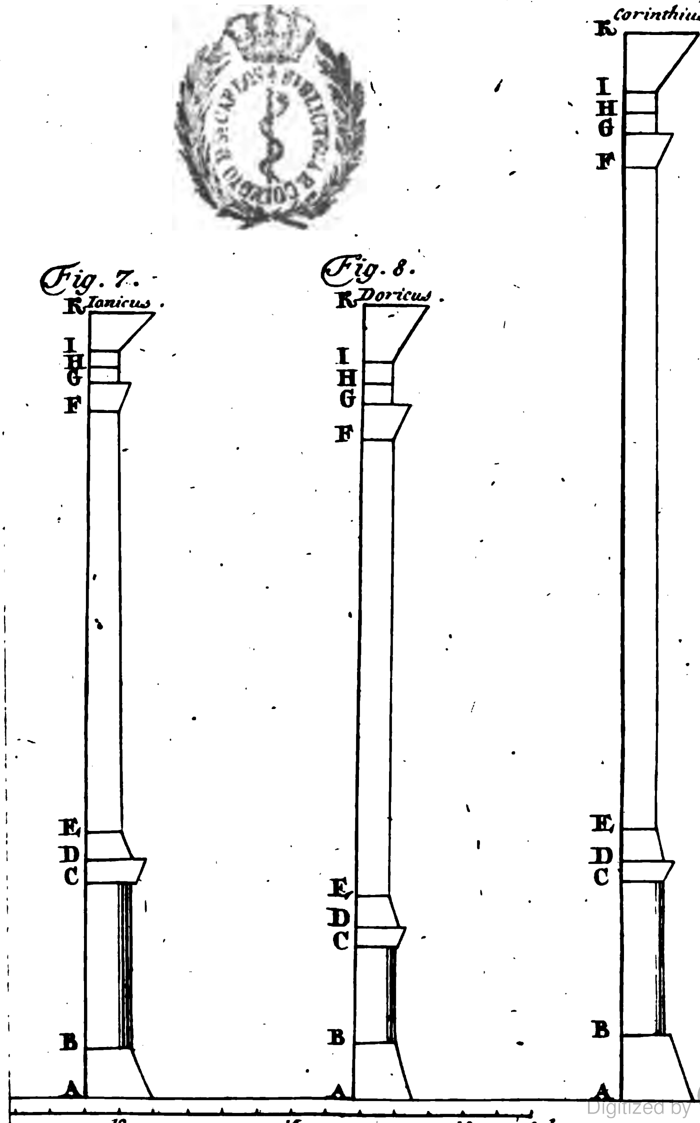


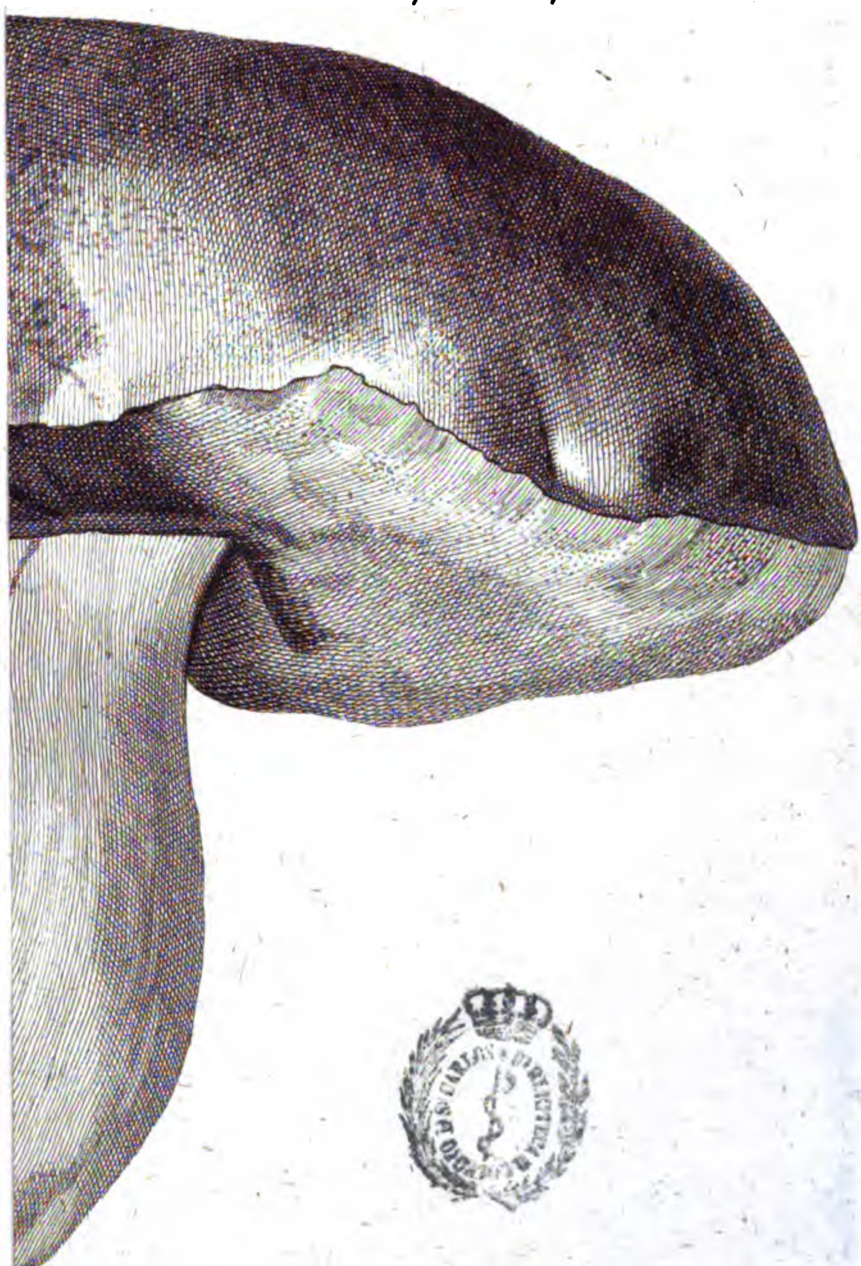
Fig. 2.

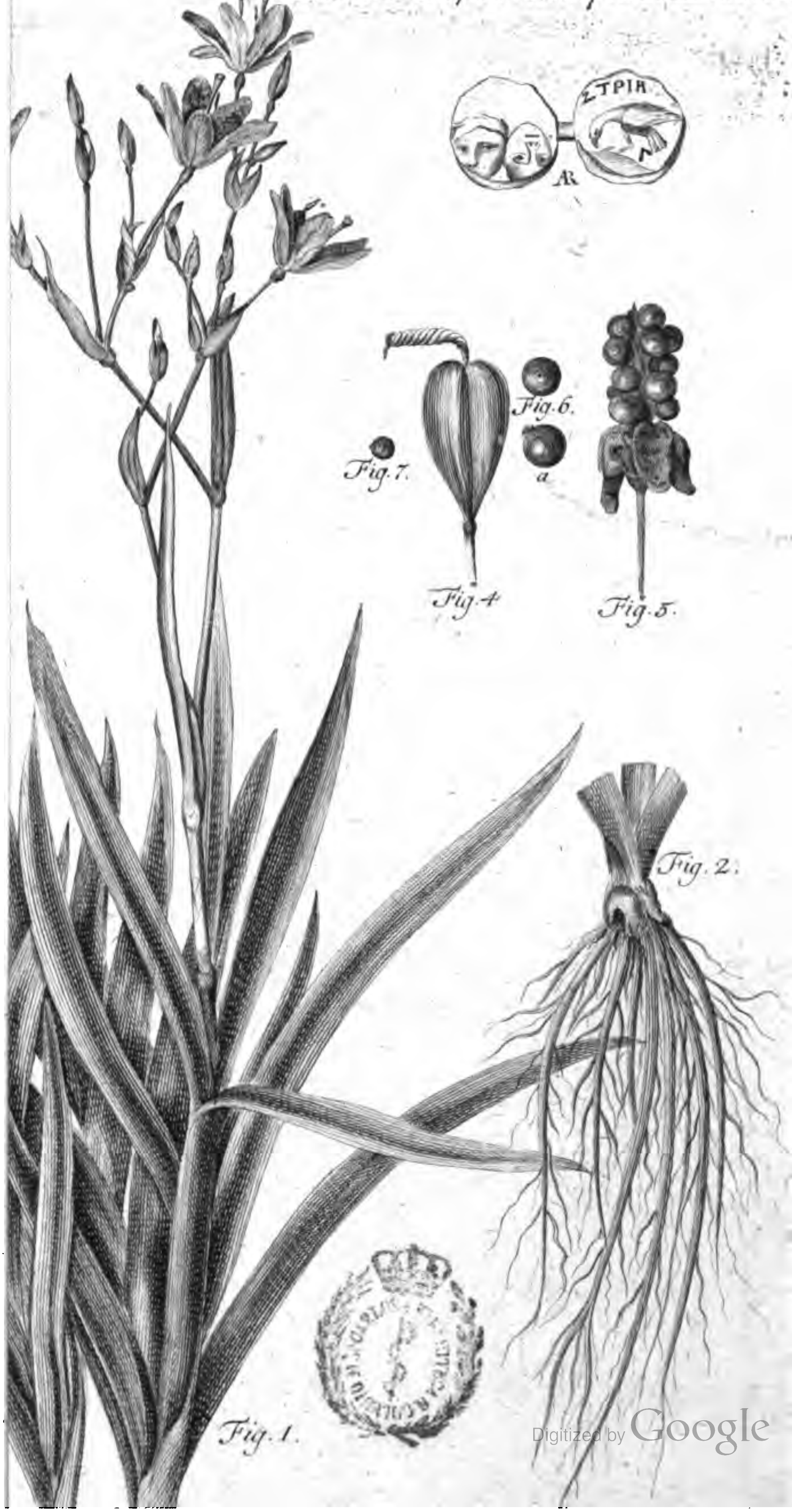
Fig. 9.
Romanus & Corinthius.

Fig. 7.
Ionicus.

Fig. 8.
Doricus.






ΣΤΡΙΑ
Æ
Fig. 6.
a
Fig. 7.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 2.
Fig. 1.

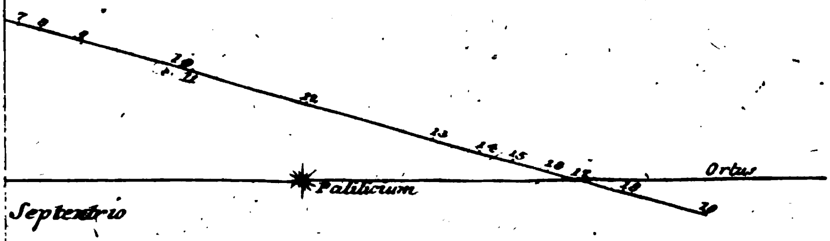
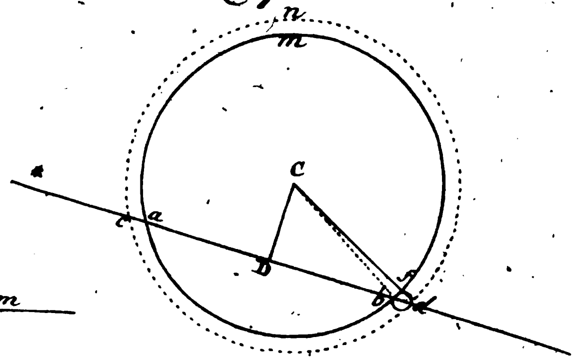


Fig. 3.



Meridies

Fig. 4.