fig. 1.

fig. 2.

15.3

1.3.a 2.a

~~14-5-4~~

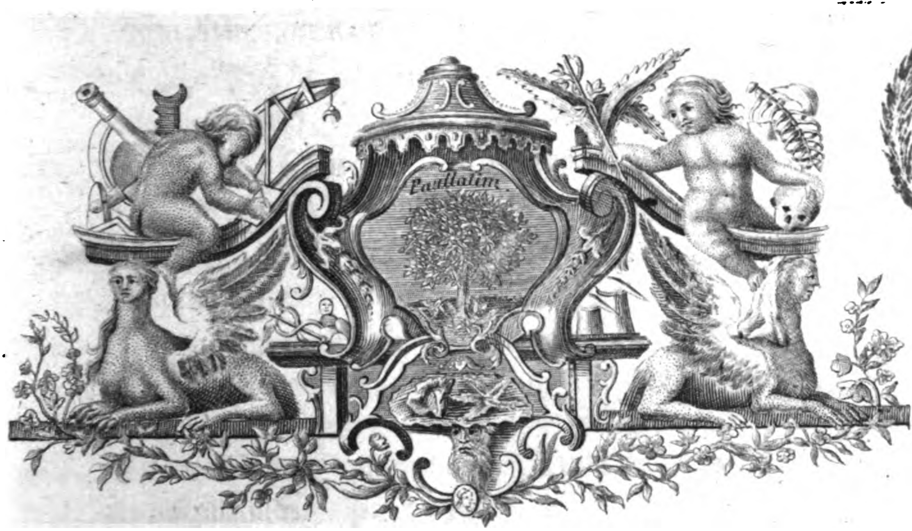
94-3-31

MED Rev. 5-10

COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS *PETROPOLITANAE.*

Tomus X.

AD ANNVM MDCCXXXVIII.



PETROPOLI,
TYPIS ACADEMIAE.
CIↃ IↃCCXLVII.

INDEX
COMMENTARIORVM

In Classe Mathematica.

Leonardi Euleri, Disquisitio de Bilancibus. p. 3.

Nicolai Bernoullii, Inquisitio in summam seriei $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}$ etc. pag. 19.

Leonardi Euleri, De motu cymbarum remis propulsarum in fluuiis. p. 22.

Eiusdem, De aequationibus differentialibus, quae certis tantum casibus integrationem admittunt. p. 40.

Georg. Wolfgang. Krafftii, Solutiones trium problematum Astronomicorum. p. 56.

Leonardi Euleri, De machinarum tam simplicium quam compositarum vsu maxime lucroso. p. 67.

Ioannis Bernoullii, Compendium Analyseos pro inuentione vis centralis in orbibus mobilibus planetarum p. 95.

Leonardi Euleri, De attractione corporum Sphaeroidico-Ellipticorum. p 102.

D. B. Commentationes de immutatione et extensione principii conseruationis virium viuarum, quae pro motu corporum coelestium requiritur. p. 116.

Euleri, Theorematum quorumdam Arithmeticorum Demonstrationes. p. 125.

Danielis Bernoullii, Commentationes de statu aequilibrii corporum humido insidentium. p. 147.

Leonardi Euleri, Solutio problematis cuiusdam a Celeb. Dan. Bernoullio propositi. p. 164.

In

In Classe Physica.

Georgii Wolfg. Krafftii, De reflexione lucis, in transitu per medium diaphanum oriunda, experimenta et explicationes. p. 183.

Eiusdem, De nouo oscillationum genere. p. 200.

Dissertationis hydraulicae, pars secunda, continens Methodum directam et vniuersalem soluendi omnia problemata Hydraulica, quaecunque de aquis per canales cuiuscunque figurae fluentibus formari ac proponi possunt. p. 207.

Iosiae Weitbrechtii, Solutio problematis Physiologici. p. 261.

I. Ammani, De Filicastro, nouo plantarum genere, aliisque minus notis rarioribus filicum speciebus. p. 278.

Ioannis Georgii Gmelini, De frigore et calore glaciei, niuis et aquae. p. 303.

I. Ammani, Descriptio Cameli Bactriani binis in dorso tuberibus, e scriptis D. G. Messerschmidii collecta. p. 326.

In Classe Historica.

Theophili Sigefridi Bayeri, Geographia Russiae vicinarumque regionum, circiter A. C. DCCCCXLVIII. Ex scriptoribus septentrionalibus. p. 371.

G. F. Mülleri, De Scriptis Tanguticis in Sibiria repertis commentatio. p. 420.

Obseruationes Astronomicae.

Godofredi Heinsii, De Transitu Lunae per Hyades d. $\frac{22.\ Dec.}{2.\ Ian.}$ An. 173$\frac{7}{8}$. Petropoli obseruato et methodo determinandi locum stellae ad lunam, quando haec istam transit. p. 469.

CLAS-

CLASSIS PRIMA.
CONTINENS
MATHEMATICA.

DISQVISITIO
DE
BILANCIBVS.
AVCTORE
L. Eulero.

Quanquam doctrina de bilancibus a plurimis auctoribus tanto ſtudio eſt pertractata, vt nil amplius hac in re deſiderari poſſe videatur: tamen fere omnes, duo capita, quae in fabrica bilancium maximi ſunt momenti, neglexerunt, vel potius animum ab iis abſtraxerunt, ne inquiſitio nimis fieret difficilis et intricata. Omnes enim propemodum, qui de bilancibus ſcripſerunt, ad pondus ipſius bilancis non attenderunt, ſed bilancem tanquam grauitatis expertem ſunt contemplati, quae poſitio, cum in rerum natura locum non inueniat, veram naturae bilancium cognitionem non parum impediuit; prout ex ſequentibus fuſius apparebit. Deinde etiam omnes tantum ad ſtatum aequilibrii reſpexerunt, nec de motu erant ſolliciti, quo bilanx ſeſe in ſitum quietis recipit. Ab hoc autem motu bonitas bilancis maxime pendet, ex eoque, ſi non recte ſe habeat, ingentia vitia oriri poſſunt. Hanc ob rem conſtitui in hac diſſertatione plenam theoriam de bilancibus ex certiſſimis mechanicis principiis euoluere; atque ex ea regulas deriuare, quae in conſtructione bilancium maximam habebunt vtilitatem. Etiamſi enim artifices ſola praxi edocti pleraſque harum regularum obſeruent, Tabula I. et II.

tamen cum vera earum fundamenta nondum fuerint satis cognita, non est dubitandum, quin theoria penitus exculta, ipsa praxis ad summum perfectionis gradum euehatur. Ita autem in hoc negotio versabor, vt primum, proprietates, quas perfectam bilancem habere oportet, exponam; atque deinceps rationem bilances construendi inuestigem, qua illis requisitis satisfiat, et intentae proprietates obtineantur.

REQVISITVM I.

Bilanx perfecta ita debet esse comparata, vt, si vtrinque aequalia pondera tangentibus imponantur, bilanx in situ erecto quiescat.

Situs erectus bilancis duplici modo cognosci solet; scilicet vel ex situ verticali examinis seu lingulae, vel ex situ horizontali scapi seu lineae rectae, quae puncta scapi, ex quibus lances cum ponderibus suspenduntur, coniungit: ad scapum enim seu potius hanc lineam examen situm tenet normalem. Commodissime autem situs erectus bilancis ex situ verticali examinis cognoscitur; tota namque bilanx ex agina libere dependente suspenditur, quae agina cum semper teneat situm verticalem, congruentia examinis cum agina simul situm erectum bilancis indicare debet. Ceterum vsus, cui bilances sunt destinatae, hanc proprietatem potissimum postulat, quo ope ponderum cognitorum cuiusque oneris pondus expedite cognosci queat. Quamuis quidem aeque facile cuiusuis oneris pondus explorari posset, si bilanx ita instrueretur, vt pondera datam inter se rationem tenentia bilancem in situm erectum constituerent, tamen cum huius generis bilances pluribus labo-

laborent incommodis, id genus tanquam praecipuum hic examini subiiciam, quod in ponderum aequalitate consistit.

Problema I.

Structuram bilancis determinare, quo in situ erecto quiescat, si lancibus vtrinque pondera aequalia imponantur.

Solutio.

Sit O centrum motus, circa quod bilanx mobilis existit, A et B puncta scapi, ex quibus lances cum ponderibus suspenduntur. Sint porro MM et NN lances, et P et Q onera seu pondera vtrinque imposita; lancis vero MM pondus sit $= m$, et lancis NN pondus $= n$. Solius bilancis sine lancibus et ponderibus sumtae pondus ponatur $= M$, eiusque centrum grauitatis sit in g. Ponamus iam rectam AB horizontalem, in quam per centrum motus O ducatur normalis IOC, quae lingulam seu examen repraesentabit, situmque verticalem tenebit. Quo ergo haec bilanx ponderibus et lancibus onusta istum situm erectum conseruet, oportet vt momenta vtrinque sint aequalia. Hanc ob rem erit $(P + m) AC = (Q + n) BC + M.Cc$ ducta ex g in AB verticali gc. Quia autem per hypothesin pondera P et Q sunt inter se aequalia, ponatur $P = Q = p$ eritque $(p + m) AC = (p + n) BC + M.Cc$ seu $p(AC - BC) = n.BC - m.AC + M.Cc$; cuius aequationis illa pars $p(AC - BC)$ vtcunque est variabilis, cum bilanx ad quaecunque pondera aequalia debeat esse accommodata; altera vero pars $n.BC - m.AC + M.Cc$ est constans, nec a ponderum impositorum quantitate pendet. Quocirca quo aequalitas inter has partes esse Tabula I. Figura 1.

esse queat, necesse est, vt vtraque sit $=o$; hinc obtinebimus has duas aequationes $AC = BC$ atque $m.AC = n.BC + M.Cc$ seu $m - n = \frac{M.Cc}{AC}$. Ex his aequationibus duae sequentes regulae consequuntur, pro structura bilancium.

Reg. I. Perpendicularis OC, quae ex centro motus O in rectam AB puncta suspensionum iungentem demissa, eam simul in duas partes aequales diuidere debet.

Reg. II. Lances ita debent esse comparatae ratione ipsarum grauitatis, vt etiam vacuae appensae bilancem in situ erecto conseruent; hinc enim fluit altera aequatio, $m - n = \frac{M.Cc}{AC}$. Q. E. I.

Corollarium 1. Cum ergo sit $AC = BC$ atque OC normalis in AB, erit triangulum AOB isosceles, et brachium $OA =$ brachio OB.

Corollarium 2. Si centrum grauitatis scapi g cadat in verticalem OC puta in G, tum ob $Cc = o$, fient lances inter se pondere aequales.

Corollarium 3. Si centrum grauitatis scapi g in rectam IOC cadat, tum etiam solus scapus non onustus situm erectum tenebit, quod non accidit, si g extra rectam IOC ceciderit.

Corollarium 4. Quia pondera P et Q aequalia bilancem in situ erecto tenent, perspicuum est, si pondera commutentur, tum bilancem aeque in situ erecto esse mansuram.

Scholion 1. Solent vulgo pro bilancibus hae duae praecipue regulae praescribi, vt primo scapi brachia inter se exacte sint aequalia, atque secundo vt sint etiam aeque

grauia,

grauia, ſeu quod eodem redit, vt ſcapi centrum grauitatis in rectam O C cadat. Sed ex ſolutione problematis ſatis apparet, hanc poſteriorem regulam non eſſe abſolute neceſſariam; ſed bilancem huic primo requiſito ſatisfacere poſſe, etiamſi ſcapi centrum grauitatis, g, extra O C cadat. Dummodo igitur ſcapi brachia ſint aeque longa, vtcunque pondere inter ſe diſcrepent, bilanx ad ponderandum apta reddi poterit lancibus ſcilicet ita inſtruendis, vt bilancem in aequilibrio ſeruent; tum enim aequalia pondera lancibus impoſita aeque bilancem in ſitum erectum conſtituent, ac ſi brachia eſſent aequiponderantia. Hanc ob rem quo primo requiſito ſatisfiat, ſufficit vt brachia conficiantur exacte aeque longa, neque opus eſt, vt de aequalitate ponderum brachiorum tantopere ſimus ſolliciti.

Scholion 2. Sin autem brachia A C et B C longitudine fuerint inaequalia, tum pondera aequalia lancibus impoſita bilancem in ſitu erecto non conſeruabunt, ſi quidem ſolae lances appenſae hunc ſitum produxerint; ſed quo ſitus erectus obtineatur, longiori brachio minus pondus breuiori vero maius debet appendi; inuerſam nimirum brachiorum rationem pondera tenere debent. Ex quo perſpicitur, ſi haec pondera, quibus bilanx in ſitum erectum fuit perducta, inter ſe commutentur, ita vt pondus P lanci N N, pondus Q vero lanci M M imponatur, tum ſitum erectum conſeruari non poſſe, ſed bilancem in eam plagam, in quam brachium longius vergit, inclinari debere; vnde tutiſſimus obtinetur modus explorandi, vtrum ſcapi brachia ſint inter ſe aequaliter longa. Interim tamen, etiamſi bilanx vitio hoc laboret, cuiusuis oneris verum

pondus

pondus poterit cognosci, si postquam bilanx solis lancibus in situm erectum fuerit reducta, onus in vtraque lance ponderetur, atque inter pondera inuenta medium proportionale capiatur.

REQVISITVM II.

Bilanx perfecta ita debet esse comparata, vt ponderum lancibus impositorum vel minimam inaequalitatem sensibili inclinatione patefaciat.

De bilancibus vtique non solum requiri solet, vt ponderum aequalitatem ostendant, sed etiam vt, quando pondera imposita fuerint inaequalia, hanc ipsam inaequalitatem declarent. Fit autem hoc inclinatione scapi circa centrum motus vel axem in illam plagam, vbi grauius pondus est suspensum; haec ergo inclinatio eo maior esse debet, quo maius fuerit discrimen ponderum. Sed ista inclinatio praecipue requiritur, cum pondera appensa vel minimum a se inuicem differunt; quam proprietatem cum bilanx habuerit, exactissime cognosci potest, vtrum pondera imposita sint inter se aequalia an secus. Contra vero bilanx, quae hac proprietate caret, insignem errorem in ponderando producere potest, dum etiam ponderum inaequalium aequalitatem mentitur. Hanc ob rem bilances requiruntur, vt vel minimam ponderum impositorum inaequalitatem sensibili inclinatione ob oculos ponant.

Problema II.

Inclinationem determinare, qua pondera inaequalia lancibus imposita bilancem ex situ erecto declinant.

Tabula I. Figura 2. *Solutio.* Sit vt ante O centrum seu axis motus, circa quem scapus AOB mobilis existit, A et B puncta, ex ex quibus lances M et N suspenduntur, g vero centrum grauitatis scapi, eiusque pondus $= M$. Ex O ad AB ducatur normalis OC, quae rectam AB per requisitum I bisecabit, eaque producatur, in eamque ex g perpendicularis ducatur gG. Iam lanci M cuius pondus sit m imponatur pondus p, lanci N vero, cuius pondus $= n$, impositum sit maius pondus $p+q$. Inclinabitur ergo scapus circa O, ad quam inclinationem commodius repraesentandam, ponam directionem grauitatis tanto angulo declinasse a verticali, quantum scapus inclinauit, ita vt nunc scapus in situ AB maneat, rectae vero AM, BN, gL, quae ante erant verticales, abeant in Am, Bn et gl; atque lances cum ponderibus progressae sint in m et n. Cum igitur ponamus bilancem in hoc situ inclinato in aequilibrio esse constitutum, oportet vt momenta omnia circa O se mutuo destruant. Sit anguli inclinationis bilancis, cui anguli MAm, NBn, et Lgl aequales sunt, sinus $= a$, cosinus $= \alpha$ posito sinu toto $= 1$: ex natura aequilibrii vero debet esse $(p+m)\,AO.\ \text{sin.}\ mAO + Ma.OG = (p+q+n)\,BO\ \text{sin.}\ nBO + M\alpha.Cc$; potentiam enim M seu pondus scapi, quae secundum directionem grauitatis gl agit, resoluo in suas laterales Ma et Mα, quarum illa in directione Gg haec vero in gL est sita. At est sinus $mAO = \text{sin.}\ (MAO - MAm) = \frac{AC.\alpha + OC.a}{AO}$; atque sinus $nBO = \text{sin.}\ (NBO + NBn) = \frac{AC.\alpha - OC.a}{AO}$ ponendo $BC = AC$ et $BO = AO$. His ergo substitutis habebimus hanc aequationem $(p+m)(AC\alpha + OC.a) + Ma.OG = (p+q+n)(AC\alpha - OC.a) + M\alpha.Cc$, quae propter $m.AC = n.AC + M.Cc$ per requisitum pri-

primum abit ordinata in hanc $\frac{a}{\alpha} = \frac{q.AC}{2p.OC+(m+n)OC+q.OC+M.OG}$ $=$ tangenti anguli inclinationis, ad quam pondera p et $p+q$ lancibus M et N impoſita bilancem deducunt. Q. E. I.

Corollarium 1. Ex hac formula apparet, quo maior ſit longitudo brachiorum, eo maiorem quoque fore angulum inclinationis, qui a data differentia ponderum oritur ceteris paribus. Hinc ergo naſcitur pro conficiendis bilancibus

Regula III. Scapus bilancis tam longus fiat, quam fieri poteſt; cauendum ſcilicet ne a ponderibus appenſis incuruetur; quo longior enim ſcapus accipitur, eo magis inflexioni eſt obnoxius.

Corollarium 2. Tangens anguli inclinationis, quo libra ex ſitu erecto declinatur ſeu $\frac{a}{\alpha}$ eſt $\frac{q.AC}{(2p+m+n+q+M)OC+M.CG}$; vbi notandum in denominatore $2p+m+n+q+M$ integrum bilancis lancibus et ponderibus oneratae pondus exprimere.

Corollarium 3. Dato ergo angulo inclinationis bilancis; cuius tangens ſit $=A$, et pondere leuiore p, exceſſus grauioris q ſupra p reperiri poterit, erit namque $q = \frac{A(OC(2p+m+n)+M.OG)}{AC-A.OC}$; vnde apparet, ſi fuerit $OC=o$, tum exceſſum q etiam incognito pondere p definiri poſſe.

Corollarium 4. Si fuerit $(2p+m+n+q)OC+M.OG=o$ tum quidem minimum ſuperpondium q maximum generaret angulum inclinationis nempe rectum, ſed et hoc non conueniret, cum ponderatio foret difficillima.

Corollarium 5. Hanc ob rem quantitatis $(2p+m+n+q)OC+M.OG$ nec nihil nec multominus quantitas negatiua eſſe poterit. Interim tamen quo fuerit minor, eo eo maior orietur inclinatio a data ponderum impositorum differentia.

Scholion 1. Quamuis per hoc requisitum quantitas $(2p+m+n+q)OC+M.OG$ tam parua esse deberet quam fieri posset, tamen aliae rationes suadent, vt ea mediocrem obtineat valorem. Quando enim tertio requisito satisfacere volumus, tum eidem quantitati maximus valor tribui debebit, quamobrem diligenter cauendum est ne alteri requisito satisfaciendo alteri nimis parum satisfiat. Ceterum ex solutione huius problematis patet methodus, cuius ope ex bilancis inclinatione dignosci poterit, quanto alterum pondus altero sit grauius. Cum igitur pro data bilance regula fuerit formata, tum ad ponderandum carere poterimus minimis ponduscculis, quae alias ad perfectum aequilibrium in statu erecto producendum non sine molestia vsurpantur. Angulus autem inclinationis in hoc negotio commodissime cognoscetur ex arcu circulari centrum in o habente, et in gradus diuiso, qui in aginae supremo annectitur, in quo examen tanquam index inclinationis angulum indicabit.

Scholion 2. Hic etiam non est praetereundum, locum centri grauitatis g, quatenus extra verticalem OG cadit, formulam inuentam minime afficere, sed eam inuariatam manere, dummodo eandem a recta AB distantiam seruet. Multo minus igitur tanta cura in id erit incumbendum, vt brachia scapi fiant aeque ponderosa, cum inaequalitas ponderum brachiorum nec primo nec secundo requisito vel minimum aduersetur. Neque vero etiam sequenti requisito aduersari deprehendetur. Deinde etiam

 quod

quod alias in examinandis bilancibus fieri ſolet, ſine ſufficienti ratione inquiritur, vtrum ſolus ſcapus ſuspenſus ſitum teneat erectum: et multo minore ratione illae bilances, in quibus hoc non deprehenditur, pro erroneis habentur. Cum ergo bilanx primo requiſito ſatisfaciens fuerit inuenta, quod examen, quemadmodum ſit inſtituendum, ſupra expoſui, ſi, quantum huic requiſito ſecundo ſatisfaciat, quis explorare velit, is poſtquam ponderibus impoſitis bilancem in ſitum erectum perduxerit, alteri ponderi tam parum adiiciat, quantum ad ſenſibilem inclinationem producendam ſufficit; quo minus enim additamentum ſuffecerit, eo magis bilanx huic requiſito ſatisfaciens. Saepius autem variae grauitatis ponderibus adhibendis iſtud examen ſuſcipi conuenit, cuius rationem ex aequatione inuenta intelligere licet.

REQVISITVM III.

Perfecta bilanx ita debet eſſe comparata, vt, cum lancibus aequalia pondera fuerint impoſita, atque bilanx ex ſitu erecto depellatur, tum ea maxima vi in ſitum erectum vrgeatur.

Requiſitum hoc maximi eſt momenti et in plurimis bilancibus vehementer deſideratur. Cum enim bilanx praecedentibus requiſitis ſatisfaciens aequalibus ponderibus fuerit onuſta, atque ex ſitu aequilibrii declinetur, tum neceſſe eſt, vt ſeſe in eum ſitum reſtituat. Reſtitutio autem ſine vi fieri nequit, quamobrem vis adeſſe debet, quae bilancem in ſitum erectum repellat; ſin enim haec vis nulla eſſet, tum bilanx in ſitu inclinato permaneret, etiamſi pondera aequalia eſſent, et propterea inepta foret, et nullius vſus. Praeterea quoniam reſtitutio ſemper

per

per a frictione aliquantulum impeditur, vis restituens frictioni superandae par esse debet. Quo maior autem fuerit vis restituens, eo citius et fortius bilancem in situm aequilibrii restituet, neque frictio aliaque impedimenta nocebunt, quemadmodum in pluribus bilancibus euenit, quae vix in quietem perduci possunt. Interim tamen frictio omni studio est vitanda, quod variis modis praestari potest, satis iam cognitis. Ex hac denique vis restituentis ratione tres bilancium species alias multum agitatae clare explicari possunt. Praeceps enim bilanx, quae etiam sed incongrue celer vocatur, est, in qua vis restituens fit negatiua, efficitque vt bilanx aliquantillum ex situ aequilibrii depulsa non solum non restituatur, sed adeo praeceps subuertatur. Pigra secundo est bilanx, quando vis restituens quidem est positiua, sed tam parua, vt vix frictionem superare queat. Tertia tandem species complectitur bilances bonas, quae illis vitiis carent, et quas hic describere constitui.

Problema III.

Si bilanx, cuius lances aequalibus ponderibus sint oneratae, dato angulo ex situ erecto inclinetur, inuenire vim, quae bilancem in situm erectum restituat.

Solutio. Vtrique lanci M et N onus sit impositum, cuius pondus $=p$; maneantque vt ante pondus scapi $=M$ eiusque centrum grauitatis in g, et pondera lancium M et N respectiue m et n. Inclinetur nunc bilanx angulo, cuius sinus $=a$ et cosinus $=\alpha$ ex situ erecto ita, vt bilanx tota situm teneat $mAOBn$, angulique MAm, NBn et Lgl aequales sint angulo inclinationis. His praemissis Figura 2.

erit

erit vis restituens quaesita aequalis excessui momentorum quibus brachium OA deprimitur supra momenta, quibus brachium OB deprimitur. Iste igitur excessus erit $= (p + m) AO. \text{fin.} \, mAO + M\alpha. OG - (p + a) BO. \text{fin.} \, nBO - M\alpha. Cc$; iste autem valor ob $AO = BO$ et $AC = BC$ atque fin. $mAO = \frac{AC\, \alpha + OC.a}{AO}$ nec non fin. $nBO = \frac{AC.\alpha - OC.a}{AO}$ induet hanc formam $(p + m)(AC.\alpha + OC.a) + M.a. OG - (p + n)(AC.\alpha - OC.a) - M.\alpha.Cc.$ quae cum sit $m.AC - n.AC - M.Cc = o$ reducetur ad $(2p + m + n) OC.a + M.OG.a$. Huic igitur expressioni vis restituens est aequalis; tantaque vi bilanx ponderibus aequalibus p et p vtrinque onerata, cum angulo cuius sinus est $= a$ inclinetur, in situm erectum restituitur. Q. E. I.

Corollarium 1. Ceteris ergo paribus vis restituens semper est proportionalis sinui anguli, quo bilanx ex situ erecto declinatur, ita vt quo magis bilanx inclinetur, eo maiori vi ea se restituat.

Corollarium 2. Si vis restituens inuenta per sinum anguli inclinationis a diuidatur, prodibit $(2p + m + n) OC + M.OG$, quo valore exprimitur firmitas, qua bilanx in situ suo erecto persistit.

Corollarium 3. Si ergo $(2p + m + n) OC + M.OG$ fuerit quantitas negatiua, bilanx erit praeceps; sin eadem quantitas habuerit valorem affirmatiuum quidem, sed nimis paruum, tum bilanx erit pigra; at si eiusdem expressionis valor fuerit affirmatiuus satis magnus, bilanx erit bona.

Corollarium 4. Quo ergo huic requisito plene satisfieret, oporteret $(2p + m + n) OC + M.OG$ maximum habere valorem: sed per requisitum secundum eidem

quan-

quantitati minimus valor postulatur. Quamobrem ne alterutri vis inferatur, mediocris valor huic quantitati erit tribuendus.

Corollarium 5. Si OC affirmatiuum habet valorem tum firmitas crescit maioribus ponderibus imponendis; sin OC fiat $=0$, tum firmitas bilancis in situ erecto perpetuo erit eadem, siue maioribus siue minoribus ponderibus fuerit onusta. Sin autem OC negatiuum habuerit valorem, cadente scilicet C supra O, tum pro minoribus ponderibus bilanx poterit esse bona, maioribus autem ponderibus imponendis fiet pigra atque etiam praeceps.

Corollarium 6. Si punctum G supra O cadat, tum bilanx pro minoribus ponderibus poterit esse praeceps, quamdiu scilicet $2p+m+n$ minus fuerit quam $\frac{M.\,OG}{OC}$; cum autem maiora pondera imponantur, libra fiet successiue pigra tandemque bona.

Corollarium 7. Bilances ergo confici possint, quae ad minora pondera satis sint bonae, ad maiora vero ineptae; contra etiam bilances idoneae esse possint pro maioribus ponderibus, pro minoribus vero nullius vsus.

Scholion 1. Quanquam haec duo requisita posteriora secundum scilicet et tertium ita inter se pugnant vt alterum formulae $(2p+m+n)\,OC+M.\,OG$ minimum, alterum vero eiusdem formulae maximum valorem postulet, tamen augenda scapi longitudine secundo requisito satisfieri potest sine detrimento tertii. Cum ergo scapus sit satis longus, in valore ipsius $(2p+m+n)\,OC+M.\,OG$ determinando magis ad tertium requisitum erit respiciendum quam ad secundum. Interim tamen sufficiet valorem illum mediocris magnitudinis assumsisse,

ſiſſe, cum id tantum intendatur; vt vis reſtituens frictioni ſuperandae par ſit. Quo magis ergo frictio minuetur, eo minor eſſe poterit valor formulae $(2p+m+n)$ $OC+M.OG$; quia inde tertium requiſitum nullam vim patitur, ſecundum vero eo fortius obtinetur. Quod autem ad frictionem attinet, probe notandum eſt, eam augeri, ſi maiora pondera bilanci imponantur; quo circa conueniet, bilancem ita conſtruere vt vis reſtituens eo magis augeatur, quo pondera appenſa ſint maiora. Hoc autem euenire non poteſt niſi OC affirmatiuum habuerit valorem; nam ſi punctum C ſupra O caderet, tum auctis ponderibus vis reſtituens minueretur, atque etiam negatiuum valorem conſequeretur, vnde bilanx praeceps et inutilis euaderet.

Scholion 2. Ex his annotationibus ſatis colligere licet, in bilancibus nec punctum C nec punctum G ſupra axem motus O commode conſtitui poſſe, niſi expreſſe bilanx deſideretur, quae vel ad minima vel ad maxima pondera tantum eſſet accommodata, pro reliquis vero inepta. Quamuis autem omnis bilanx vi ſtructurae et materiae ex qua eſt confecta, in ponderibus limites habeat, quos transgredi non licet, ne bilanci vis inferatur; tamen ob rationes iam expoſitas non conueniet alterutrum punctorum C et G ſupra O collocare. Exceptis igitur caſibus, quibus vel punctum C vel G ſupra axem motus O cadit, reliquarum ſpecierum bilancium duae praecipuae erunt, quibus vel punctum C vel punctum G in ipſum punctum O incidit; atque hae ſpecies ita ſunt comparatae, vt, ſi earum proprietates recenſuero, eo facilius reliquarum ſpecierum indoles cognoſci poſſit.

I. Ca-

I. Cadat igitur primo punctum C in axem motus O, centrum grauitatis autem ſcapi G infra rectam AB ſit collocatum interuallo GO, perinde enim eſt, ſiue in ipſam recta IOG incidat ſiue extra eam, quia eius diſtantia tantum ab AB in conſiderationem venit. Si nunc lanci MM pondus p lanci vero NN pondus $p+q$ imponatur iſta bilanx ex ſitu erecto inclinabitur ad angulum, cuius tangens erit $=\frac{q.AO}{M.OG}$. Iſta igitur bilanx hanc habebit proprietatem, vt ex data inclinatione facile diſcrimen ponderum innoteſcat, etiamſi neutrum pondus fuerit cognitum. Poſita enim tangente anguli inclinationis $=A$, erit ponderum differentia ſemper $=\frac{M.A.OG}{AO}$. huius igitur ſpeciei bilances commodiſſime arcu circulari inſtrui poſſunt, in quo inclinatio bilancis indicatur. Firmitas porro, qua bilanx cum pondera aequalia fuerint impoſita, in ſitu erecto perſiſtit erit $=M.OG$. vnde apparet in hoc bilancium genere firmitatem ſemper eſſe eandem ſiue pondera impoſita fuerint magna ſiue parua. Cum igitur frictio creſcat, creſcentibus ponderibus impoſitis, iſta bilanx exactior erit pro minoribus ponderibus explorandis, quam pro maioribus. Iſta igitur bilancium ſpecies potiſſimum vſum habebit in re docimaſtica, vbi minima tantum ponduſcula imponuntur et explorantur. Tabula II. Fig. 1.

II. Si centrum grauitatis ſcapi G in centrum motus O cadat, vel vtrumque ſaltem aequaliter diſtet a recta AB, habebitur altera primaria bilancium ſpecies, in qua punctum O ſupra recta AB poſitum erit. Si nunc huiusmodi bilancis lanci MM, cuius pondus ſit $=m$, imponatur pondus p, alteri vero lanci NN, cuius pondus ſit $=n$ pondus imponatur $=p+q$, bilanx ex ſitu erecto ad angulum inclinabitur cuius tangens erit $=\frac{q.AC}{(2p+m+n+q)OC}$. Tabula II. Fig. 2.

Ex data ergo inclinatione bilancis huius differentia ponderum cognoſci non poterit, niſi altero pondere cognito; vnde tamen alterius ponderis exceſſus q ope calculi facile determinabitur. Firmitas vero, qua bilanx iſta in ſitu erecto, cum pondera aequalia fuerint impoſita, perſiſtit eſt $= (2p + m + n)$ O C; ex qua formula apparet, firmitatem creſcere, ſi pondera maiora imponantur. Quocirca haec bilanx aeque apta erit ad pondera maiora exploranda quam ad minora; hoc vero a bilance prioris caſus deficiet, quod, in caſu ponderum impoſitorum inaequalium, diſcrimen minus ſenſibiliter indicet, ſi pondera fuerint maiora, quam ſi ſint minora. Vtraque igitur bilanx peculiaribus gaudet praerogatiuis, vnde reliquarum bilancium proprietates colligi poterunt.

Scholion 3. Tribus hiſce requiſitis continentur omnia quae alias in bilancibus requiri ſolent; ita vt bilanx, quae omnibus iſtis requiſitis ſatisfacit, merito pro perfecta haberi poſſit. Momenta igitur ad quae in confectione bilancium eſt attendendum, ſunt 1. punctorum ſcapi ex quibus lances ſuspenduntur intervallum, quod per regulam tertiam maximum eſſe debet. 2. Diſtantia centri motus a recta, puncta ſuſpenſionum, iungente, vbi notandum eſt hanc rectam a perpendiculari ex centro motus in eam ducta, in duas partes aequales ſecari debere per regulam primam. 3. Pondus ſcapi cum ſui centri grauitatis diſtantia a recta puncta ſuſpenſionum iungente. 4. Lances, quae ita debent eſſe comparatae, vt vacuae appenſae ſcapum in ſitu erecto teneant per requiſitum ſecundum. 5. Poſitio mutuo centri motus, centri grauitatis ſcapi, et puncti inter puncta ſuſpenſionum medii attente eſt conſideranda, cum inde efficiatur, vt vtrique requiſitorum ſecundi et tertii maxime ſatisfiat. In hoc autem negotio finis praeſertim inſpici debet, cui bilanx quaeque deſtinatur. IN-

INQVISITIO IN SVMMAM SERIEI $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+$ etc. PER

Nic. Bernoullium, J. V. D. et Prof.

Sit ſumma quaeſita $=s$, ponatur $Z \frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+$ etc. erit $s=Z+\frac{1}{4}s$, ſiue $\frac{3}{4}s=Z$ vel $s=\frac{4}{3}Z$. Sed Z eſt $=$ quadrato ſeriei $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+$ etc. demta dupla ſumma rectangulorum ſingulorum binorum terminorum eiusdem ſeriei. Ponantur $a=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+$ etc. $b=\frac{1}{1.5}+\frac{1}{3.7}+\frac{1}{5.9}+\frac{1}{7.11}+$ etc. $c=\frac{1}{1.7}+\frac{1}{3.9}+\frac{1}{5.11}+\frac{1}{7.13}+$ etc, $d=\frac{1}{1.9}+\frac{1}{3.11}+\frac{1}{5.13}+\frac{1}{7.15}+$ etc. $e=\frac{1}{1.11}+\frac{1}{3.13}+$ etc. et ita porro; ponatur item $q=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+$ etc. eritque $Z=qq+2a-2b+2c-2d+2e-$ etc. Eſt autem $a=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}$, $b=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)$, $c=\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)$, $d=\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)$ $e=\frac{1}{10}\times\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)$, etc. Oriuntur enim ſeries a, b, c, d, e etc. ſubtrahendo ſeriem $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+$ etc. mutilatam 1. 2. 3. 4. etc. primis terminis a ſe ipſa integra et diuidendo reliquum reſpectiue per 2, 4, 6, 8, 10, etc. quibus valoribus ſubſtitutis inuenitur $Z=qq+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)-$ etc. $=qq+\frac{1}{1}-\frac{4}{2.1.3.}+\frac{23.}{3.1.3.5.}-\frac{176}{4.1.3.5.7}+\frac{1689}{5.1.3.5.7.9}+\frac{19524}{6.1.3.5.7.9.11}+$ etc. Summa huius ſeriei (quae vocetur y, ita vt ſit $Z=qq+y$) expeditius inueſtigatur mutando eam in aliam, cuius omnes termini ſint affirmatiui, quod fieri poteſt coniungendo dimidia duorum quorumlibet terminorum contiguorum. Nimirum $y = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 3} - \frac{9}{2 \cdot 3\ 1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{58}{3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5\ 7} - \frac{582}{4 \cdot 5\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{6927}{5 \cdot 6 \cdot 1\ 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} - \text{etc.} = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{20}{3\ 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{144}{4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 3\ 5 \cdot 7 \cdot 9} - \frac{1538}{5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \text{etc.} = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 1 \cdot 3} + \frac{2}{6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{6}{4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{78}{4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{519}{5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} - \text{etc.} = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 1 \cdot 3} + \frac{2}{6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{6}{8 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{24}{5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} - \frac{384}{5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \text{etc.} = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 1 \cdot 3} + \frac{2}{6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{6}{8 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{24}{10 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{120}{6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} - \text{etc.}$ ita vt tandem in terminis mere affirmatiuis habeatur $y = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{8 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{10 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{12 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5\ 7 \cdot 9 \cdot 11} + \text{etc.}$, cuius ſeriei progreſſio manifeſta eſt, ſi enim T ſignificet terminum quemuis ordine n, et $\overset{1}{T}$ terminum ſequentem, cuius ordo ſit $n+1$, erit generaliter $nnT = (n+1)(2n+1)\overset{1}{T}$. Cum vero relatio horum terminorum componatur ex quantitatibus, in quibus indeterminata n aſcendit ad duas dimenſiones, hoc indicio eſt, ſummam dictae ſeriei definiri poſſe per aequationem differentialem ſecundi gradus. Proponatur enim inuenienda ſumma ſequentis ſeriei generalis $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{----} + Tx^n + \overset{1}{T}x^{n+1} + \text{etc.}$ in qua ſit generaliter $(a.n.(n-1) + bn + c.)T = (e.(n+1.)n + f.(n+1) + g)\overset{1}{T}$, id eſt, $(b+c)A = (2e+2f+g)B$, $(2a+2b+c)B = (be+3f+g)C$, $(6a+3b+c)C = (12e+4f+g)D$, $(12a+4b+c)D = (20e+5f+g)E$ etc. Summa eius definietur per ſequentem aequationem, ſumta dx conſtante; $gydx^2 + fxdydx + ex^2ddy = gAxdx^2 + fAxdx^2 + cxydx^2 + bx^2dydx + ax^3ddy$. Nam

haec

haec aequatio positis $y = Ax + Bxx + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 +$ etc. $dy = dx(A + 2Bx + 3Cxx + 4Dx^3 + 5Ex^4 +$ etc.$)$ $ddy = dx^2(2B + 6Cx + 12Dxx + 20Ex^3 +$ etc.$)$ et diuiso vtrinque per dx^2, transit in hanc

$$\begin{array}{l} gAx + gBxx + gCx^3 + gDx^4 + gEx^5 + \text{etc.} \\ fAx + 2fBxx + 3fCx^3 + 4fDx^4 + fEx^5 + \text{etc.} \\ \quad + 2eBxx + 6eCx^3 + 12eDx^4 + 20eEx^5 + \text{etc.} \end{array} = \begin{array}{l} gAx + cAxx + cBx^3 + cCx^4 + cDx^5 + \text{etc.} \\ fAx + 6Axx + 2bBx^3 + 3bCx^4 + 4bDx^5 + \text{etc.} \\ \quad + 2aBx^3 + 6aCx^4 + 12aDx^5 + \text{etc.} \end{array}$$

vbi omnes termini homogenei se inuicem destruunt. Quod si igitur proponatur summanda series $y = \frac{1}{2.1}x + \frac{1}{4.1.3}xx + \frac{1.2}{6.1.3.5}x^3 + \frac{1.2.3}{8.1.3.5.7}x^4 + \frac{1.2.3.4}{10.1.3.5.7.9}x^5 +$ etc., in qua est $A = \frac{1}{2}$ et $nn\mathrm{T} = (n+1)(2n+1)\overset{1}{\mathrm{T}}$, siue $(n(n-1)+n)\mathrm{T} = (2(n+1)n + (n+1))\overset{1}{\mathrm{T}}$, per consequens $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, $e = 2$, $f = 1$, $g = 0$: his valoribus in superiori aequatione substitutis obtinebitur $xdydx + 2x^2ddy = \frac{1}{2}xdx^2 + xxdydx + x^3ddy$, siue, per x diuidendo, $dydx + 2xddy = \frac{1}{2}dx^2 + xdydx + xxddy$, et per dy multiplicando $dy^2dx + 2xdyddy = \frac{1}{2}dydx^2 + xdy^2dx + xxdyddy$, cuius integralis est $xdy^2 = \frac{1}{2}ydx^2 + \frac{1}{2}xxdy^2$, quae aequatio separatis indeterminatis euadit $\frac{dy^2}{y} = \frac{dx^2}{2x - xx}$, siue $\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{\sqrt{(2x - xx)}}$, cuius integralis est $2\sqrt{y} = \int\frac{dx}{\sqrt{(2x - xx)}}$. Quia vero est $\int\frac{dx}{\sqrt{(2x - xx)}}$ dependet a longitudine arcus circularis, et in casu, vbi $x = 1$ est aequalis quadranti circuli, cuius radius $= 1$, vel semicircumferentiae circuli, cuius diameter $= 1$, et quia $q = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ etc. denotat etiam longitudinem quadrantis circuli, cuius diameter $= 1$, si peripheria eius integra vocetur p, erit $q = \frac{1}{4}p$ et $2\sqrt{y} = \frac{1}{2}p$, siue $y = \frac{1}{16}pp$, hinc $Z = qq + y = \frac{1}{8}pp$ et $s = \frac{4}{3}Z = \frac{1}{6}pp$. Q. E. I.

DE MOTV CYMBARVM REMIS PROPVLSARVM IN FLVVIIS

AVCTORE

L. Eulero.

Tabula III. et IV.

Duplici modo cymbarum motus ſub calculum mathematicum cadit, altero mechanico, altero geometrico, qui duo modi ratione tractandi prorſus inter ſe differunt. Qui enim hanc materiam mechanice tractare ſuſcipiet, is primo ex principiis hydroſtaticis in aptiſſimam cymbarum figuram inquiret; tum vero ex vi remorum cymbae accelerationem atque integrum motum tam in aqua quieſcente quam in fluuio determinabit. Idem vero argumentum qui geometrice pertractare voluerit, is primo viam, quam cymba vtcunque directa et remis propulſa deſcribet, definire tenetur; deinde autem varia problemata, quibus commodiſſimus et citiſſimus traiectus per fluuios poſtulatur, reſoluet. Equidem in hac diſſertatione conſtitui hanc rem, quatenus in geometriam incurrit, euoluere, praetermiſſa altera parte, quae a principiis mechanicis pendet. Antequam vero hoc opus aggrediar, neceſſe eſt, vt aliquot hypotheſes praemittam atque ſtabiliam, quibus haec tractatio ad forum mere geometricum reducatur.

Hypotheſis 1.

Cymba, quae in aqua quieſcente remis propellitur, motu aequabili progreditur in directione ſpinae ſeu rectae proram et puppem iungentis.

In

In hac hypothesi nihil pono nisi quod actu in omnibus cymbis, quae in aqua quiescente remis propelluntur, obseruatur. Primo enim remiges ex vtraque cymbae parte aequalibus viribus remigare solent, vnde fit vt cymba in ipsa spinae directione promoueatur. Deinde ab initio quidem cymbae motus est tardior, cum motus a quiete incipiat; at statim fit aequabilis. Quam primum enim cymba tantam nacta est celeritatem, vt resistentia aquae vim propellentem adaequet, tum neque accelerationem neque retardationem adipiscetur; atque idcirco motu aequabili feretur. Inaequalitatem autem, quae in ipso motus initio adest, hic tuto negligere licet, cum statim cesset, atque initium computi tum demum constitui queat, quando motus reuera aequabilis est factus. Haec eadem autem hypothesis locum habet, quando directio spinae vi gubernaculi immutatur; tum enim simul ipsius cymbae directio variatur, celeritate manente eadem. Ope gubernaculi ergo effici potest, vt cymba in quacunque curua data, motu aequabili promoueatur; dummodo spina perpetuo secundum curuae datae tangentem dirigatur.

Hypothesis 2.

Cymba in fluuio constituta et remis non propulsa, a fluuio abripitur, et in ipsa fluuii directione eademque, quam fluuius habet, celeritate promouebitur.

Si cymba minore quam fluuius celeritate mouetur, tum a vi fluuii acceleratur, donec aequalem celeritatem fuerit consecuta, quod cum euenerit, cymba cum fluuio pari celeritate, atque in eadem directione abripietur.

Tem-

Tempus autem, quo cymba adhuc tardius mouetur, quam fluuius, hic negligimus, cum sit exiguum, atque in mechanicam tractationem pertineat; quam hic non attingo. Deinde vero etiam si summo rigore hunc cymbae motum examinare vellemus, is vtique semper minor foret motu fluuii, propter aeris resistentiam, qua cymbae pars ex aqua eminens impeditur. Sed cum haec differentia satis sit parua, contentus ero, si istae hypotheses ad veritatem saltem prope accedant, atque in praxi tuto negligi queant. Meum enim propositum non est hanc materiam accuratissime secundum leges motus investigare, sed tantum per hypotheses a veritate non multum discrepantes ad geometriam puram reuocare, ad quod hae duae hypotheses sunt accommodatae.

Cum igitur per has hypotheses constet, quemadmodum tum cymba remis propulsa in aqua quiescente tum etiam remis destituta in fluuio moueatur; colligere hinc licebit, quomodo cymba remis propulsa in fluuio progredi debeat. Hoc enim casu cymba motu composito mouebitur, qui oritur ex duobus lateralibus, altero scilicet, quo moueretur, si aqua quiesceret, altero quo moueretur, si remi abessent. Compositione motus igitur in subsidium vocata, tota tractatio nostra per solam geometriam absolui poterit; quamobrem ad sequentia problemata huc spectantia soluenda progrediar.

Problema I.

Data fluuii in singulis locis celeritate atque directione, quam spina cymbae vbique tenet, inuenire curuam, quam cymba in fluuio describet.

So-

Solutio.

Traiiciat recta AB cursum fluminis normaliter, sitque AMC curua quaesita, in qua cymba seu potius eius centrum grauitatis M moueatur; erunt huius curuae applicatae MP ad rectam AB tanquam ad axem ductae in directione fluuii sitae. Ponamus cymbam in M peruenisse, hocque in loco directionem spinae esse aMb, quae cum directione fluminis PM angulum PMb constituat, cuius sinus sit $= m$, et cosinus $= n$, posito sinu toto $= 1$, ita vt sit $m^2 + n^2 = 1$. Exponat c celeritatem cymbae, qua in aqua quiescente remis propulsa vniformiter moueretur secundum directionem spinae; u vero exprimat celeritatem qua fluuius in loco M progreditur in directione sua Mq; quae celeritas vtcunque sit variabilis. Vera autem celeritas, qua cymba seu potius eius centrum grauitatis M actu in curua AMC mouetur, sit $= v$; quae quaeritur. Iam ponatur abscissa $AP = x$; applicata $PM = y$, et via emensa $AM = s$. atque ducatur applicata proxima pm, vt sit $Pp = Mn = dx$; $mn = dy$ atque $Mm = ds$. Si nunc euanescente fluuii celeritate cymba solis remis vrgeretur, tum progrederetur in directione spinae ab, celeritate c, qua puncto temporis centrum grauitatis M perueniat in b. (per hyp. 1.) At si cessante vi remorum cymba a solo fluminis cursu agitaretur, tum propelleretur M in directione PM, celeritate $= u$, qua eodem tempusculo pertingat ex M in q, (per hyp. 2.) ita vt futurum sit $Mb : Mq = c : u$. Si ergo cymba ab vtraque vi, remorum scilicet et fluuii coniunctim, vrgeatur, tum necesse est, vt in diagonali Mm, parallelogrammi $Mbmq$

Tabula III. Fig. 1.

incedat, celeritate huic ipſi diagonali proportionali, adeo vt ſit $Mm:Mb = v:c$ ſeu $Mm:Mq = v:u$. Quia autem eſt ſin. $PMb =$ coſ. $bMn = m$; et coſ. $PMb =$ ſin. $bMn = n$; erit tang. $bMn = \frac{n}{m} = \frac{bn}{Mn}$; vnde prodit $bn = \frac{ndx}{m}$ et $bm = Mq = dy + \frac{ndx}{m}$. At cum ſit $\frac{Mn}{Mb} = m$; erit $Mb = \frac{dx}{m}$. Quoniam vero eſt $Mb:Mq = c:u$ erit $dx:mdy + ndx = c:u$, vnde pro curua quaeſita iſta emergit aequatio $udx = cmdy + cndx$; ſeu $dy = \frac{dx(u-cn)}{cm}$. Vera autem cymbae celeritas v, qua in hac curua mouetur, cognoſcetur ex analogia $ds : \frac{dx}{m} = v : c$, vnde erit $v = \frac{cmds}{dx}$. Q. E. I.

Corollarium 1. Cum ſit $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, erit loco dy, valorem inventum $\frac{dx(u-cn)}{cm}$ ſubſtituendo, $ds = \frac{dx}{cm}\sqrt{(c^2 - 2cnu + uu)}$

Corollarium 2. Ex data in ſingulis locis celeritate cymbae vera innoteſcet tempus, quod cymba ad arcum curuae AM abſoluendum impendit: erit ſcilicet hoc tempus $= \int \frac{ds}{v} = \int \frac{dx}{cm}$

Corollarium 3. Si ergo directio cymbae ſeu angulus PMb per ſolam abſciſſam AP determinetur, tum etiam tempus, quo arcus datae abſciſcae reſpondens abſoluitur, per ſolam abſciſſam definietur, neque a fluuii celeritate huiusque mutabilitate pendebit.

Corollarium 4. Ex aequatione curuae AMC naturam exprimente $dy = \frac{dx(u-cn)}{cm}$ intelligitur, vbi fuerit $u > cn$ ibi cymbam in fluuio deſcendere, vbi vero ſit $u < cn$ ibi aſcendere; quo denique in loco ſit $u = cn$ ibi cymbam a recta AB maxime diſtare, eoque in loco curuae deſcriptae tangentem parallelam fore rectae AB.

Corol-

Corollarium 5. Si motus cymbae verus per Mm decomponatur in motum traiicientem, cuius directio parallela est rectae AB, et motum ascensus vel descensus, cuius directio ad priorem est normalis et cum directione cursus fluminis congruit, erit motus traiicientis celeritas $= cm$; motus descendentis vero celeritas $= \frac{cmdy}{udx} = u - cn$.

Corollarium 6. Celerrime igitur cymba fluuium traiiciet, si fuerit $m = 1$, hoc ergo fit, si spina cymbae perpetuo ad cursum fluuii normaliter dirigatur. Tempus autem, quo cymba hoc casu a ripa per interuallum AP $= x$ elongatur, erit $= \frac{x}{c}$.

Corollarium 7. Si cymba secundum ipsam fluuii directionem at contra cursum dirigatur, fiet $m = 0$, et $n = 1$, vnde motus traiiciens euanescet, cymbaque vel ascendet vel descendet, prout u vel minor vel maior fuerit quam c, erit scilicet celeritas, qua ascendit, $= c - u$.

Corollarium 8. Sin autem prora cymbae deorsum dirigatur fiet $n = -1$, atque cymba in fluuio recta descendet celeritate $c + u$, hoc est aggregato celeritatum fluuii et ipsius cymbae, qua in aqua quiescente moueretur.

Scholion. In solutione huius problematis posui proram cymbae b sursum directam, ita vt angulus PMb, quem directio spinae cum cursu fluminis allabentis constituit, sit acutus; sed eadem solutio aeque patet ad angulos obtusos. Nam si angulus PMb foret obtusus, tum eius cosinus n accipi debet negatiuus, eademque aequatio, quam inveni, pro hoc casu valebit. Ceterum cum ista solutio latissime pateat, ad clariorem cognitionem expediet nonnullos casus particulares euoluisse, ad quod sequentia problemata adiicere visum est.

Problema II.

Fig. 1. *Si Cymba ab cum directione fluuii* PM *perpetuo eundem conseruet angulum* PM*b*, *invenire curuam* AMC, *in qua cymba mouebitur.*

Solutio.

Sit AEFB alueus fluuii, et AB recta fluuium normaliter traiiciens, quae ducta sit ex puncto A, e quo cymba egressa. Sit cymbae celeritas, qua in aqua quiescente progrederetur $= c$, quam exprimat recta AD $= c$; curua vero AQB exponat fluuii celeritatem in singulis latitudinibus, ita vt eius applicatae PQ denotent celeritatem, qua portio fluuii PM*mp* labitur; posita ergo AP $= x$ erit PQ $= u$. Sit porro AMC curua quaesita, in qua cymbae *ab* centrum grauitatis M mouetur, atque eius applicata PM $= y$: vera vero celeritas, qua cymba elementum M*m* percurrit $= v$; anguli denique PMb sinus sit $= m$ et cosinus $= n$, posito sinu toto $= 1$, qui per hypothesin sunt constantes. His positis erit $dy = \frac{dx(u-cn)}{cm}$ atque $y = \int \frac{u\,dx}{cm} - \frac{nx}{m}$: vnde erit PM $= \frac{areae.\,APQ}{m.\,AD} - \frac{n}{m}$ AP; ex qua aequatione facilis constructio sequitur curuae quaesitae AMC per quadraturam curuae AQB. Tempus vero quo cymba arcum AM absoluit erit $= \int \frac{dx}{cm} = \frac{x}{cm} = \frac{AP}{m.\,AD}$.

Corollarium 1. Cum sit $dy = \frac{dx(u-cn)}{cm}$ erit $ddy = \frac{dx\,du}{cm}$ posito dx constante. Curua ergo AMC habebit punctum flexus contrarii, vbi est $du = 0$, hoc est, vbi celeritas fluuii est maxima.

Corol-

Corollarium 2. Tangens anguli AMP, quem curua a cymba descripta cum cursu fluminis PM constituit est $=\frac{dx}{dy}=\frac{cm}{u-cn}$. Vbi ergo celeritas fluuii u euanescit, ibi spinae directio curuam tangit.

Corollarium 3. Si C fuerit punctum in opposita fluuii ripa, in quo cymba appellit, erit $BC=\frac{areae.\,AQBA}{m.\,AD}-\frac{n}{m}AB$. Quare si fuerit area $AQBA=n\,AB.\,AD$, tum cymba in ipso puncto B appellet.

Corollarium 4. Si ponatur $AB=a$; area $AQBA=ab$, atque $BC=f$, erit $f=\frac{ab}{mc}-\frac{na}{m}$. Ex qua aequatione erit $mcf=ab-nac$. atque $m^2c^2f^2=c^2f^2-n^2c^2f^2=a^2b^2-2na^2bc+n^2a^2c^2$, vnde oritur $n=\frac{a^2b\pm f\surd(a^2c^2+c^2f^2-a^2b^2)}{(a^2+f^2)c}$ atque $m=\frac{abf\mp a\surd(a^2c^2+c^2f^2-a^2b^2)}{(a^2+f^2)c}$; at $\frac{m}{n}=\frac{ac^2f\pm ab\surd(a^2c^2+c^2f^2-a^2b^2)}{a^2b^2-c^2f^2}$

Corollarium 5. Si ergo cymba debeat appellere ad punctum datum C; tangens anguli PMB, quem cymba cum directione cursus fluuii constanter tenere debet, erit $=\frac{ac^2f\pm ab\surd(a^2c^2+c^2f^2-a^2b^2)}{a^2b^2-c^2f^2}$ Nisi ergo sit $c\surd(a^2+f^2)>ab$ hoc est nisi fuerit $AD>\frac{area\,AQBA}{AC}$, fieri nequit vt cymba ad punctum C appellat.

Corollarium 6. Quia m negatiuum valorem habere nequit, alias enim cymba non ad ripam oppositam accederet; vnica directione cymbae ad punctum C perueniri poterit, si fuerit $bf<\surd(a^2c^2+c^2f^2-a^2b^2)$ seu $b<c$.

Corollarium 7. At si fuerit $bf>\surd(a^2c^2+c^2f^2-a^2b^2)$ seu $b>c$. tum duplici modo cymba ad punctum C pertingere poterit, ob duplicem valorem ipsius m affirmatiuum. Oportet autem praeterea esse $f>\frac{a}{c}\surd(bb-cc)$; ne m prodeat imaginarium.

Corollarium 8. His autem caſibus, quibus duplici angulo directionis cymba ad C pertingit, ſemiſumma duorum horum angulorum aequalis eſt angulo BAC ducta chorda AC. Semidifferentiae vero horum angulorum ſinus eſt $\frac{ab}{c\sqrt{(aa+ff)}}$ atque coſinus $= \frac{2ab\sqrt{(aacc+ccff-aabb)}}{cc(aa+ff)}$. Vnde ex ſemiſumma et ſemidifferentia facile vterque angulus ſatis faciens reperitur.

Corollarium 9. Quando ergo fit, vt angulus, qui eſt ſemidifferentia, minor ſit angulo BAC, tum duplici angulo punctum C attingi poterit. Citius autem cymba ad C appellet, angulum ſequendo maiorem, ſeu potius eum cuius ſinus eſt maior; tempus enim, quo cymba fluuium traiicit eſt $= \frac{AB}{m\,AD}$, vbi m eſt ſinus anguli, quem directio cymbae cum curſu fluminis tenet.

Scholion Ex aequatione $PM = \frac{areae\,APQ}{m.AD} - \frac{n}{m}AP$, quam pro curua a cymba deſcripta inueni, ſequens ſatis facilis deducitur conſtructio huius curuae. Data enim curua ALQB, cuius applicatae celeritatem fluuii exprimunt, per A ducatur recta GAH parallela directioni, quam cymba perpetuo tenet, et ex D in eam demittatur perpendicularis DG erit $DG = m.AD$, et $PR = \frac{n}{m}AP$. Hanc obrem curuae deſcriptae quoduis punctum M reperitur ſumendo $PM = \frac{areae.\,APQ}{DG} - PR$. Tempus vero, quo cymba ex A in M peruenit exprimitur per $\frac{AP}{DG}$. Ceterum notandum eſt, ſi curua ALB per puncta A et B tranſeat, quod fere in omnibus fluuiis locum habet, quippe qui in medio celerrime ad ripas vero tardiſſime labuntur, tum non ſolum AH eſſe tangentem curuae in A, ſed etiam tangentem in C eſſe ipſi AH parallelam. Praeterea ſi fluuius

Tabula IV. Figura 1.

fluuius in aequalibus ab vtraque ripa diſtantiis aequales habeat celeritates, ita vt curua ALB diametro gaudeat LIK medium tenente inter ripas AE et BF, tum curua deſcripta AKC duas habebit partes ſimiles AK et KC cis et trans punctum K; in K vero habebit punctum flexus contrarii; prout ex ſuperioribus facile liquet.

Problema III.

Si *cymba fluuium traiiciens perpetuo dirigatur verſus punctum fixum* H, *definire curuam* AMC, *quam cymba ex* A *egreſſa in fluuio deſcribet*. Tabula III. Figura 3.

Solutio.

Sit vt ante curua AQB ſcala celeritatum fluminis, et AD celeritas c, qua cymba in aqua quieſcente promoueretur; atque $AP = x$ $PM = y$; $PQ = u$, ſin. $PMb = m$, coſ. $PMb = n$. Fluuii autem latitudo AB ſit $= a$, $BG = g$ et $GH = b$; ducta ex puncto fixo H in PM recta normali HGK. Erit ergo $HK = a + b - x$; et $KM = y - g$. Quia autem directio cymbae ab ad punctum H tendit, erit $\frac{a+b-x}{y-g}$ tangens anguli directionis PMb et propterea $= \frac{m}{n}$, vnde fit $m = \frac{a+b-x}{\surd((y-g)^2+(a+b-x)^2)}$. Cum igitur ſupra pro curua quaeſita iſta inuenta ſit aequatio $dy = \frac{u\,dx}{cm} - \frac{n\,dx}{m}$, erit pro noſtro caſu $dy = \frac{u\,dx\surd((y-g)^2+(a+b-x)^2) - c(y-g)dx}{c(a+b-x)}$. Tempus vero, quo cymba ex A in M pertingit, erit $= \int \frac{dx\surd((y-g)^2+(a+b-x)^2)}{c(a+b-x)}$ Q. E. I.

Corollarium 1, Quamuis in aequatione inuenta variabiles y et x et u, quae ab x pendet, ſint inter ſe permixtae, tamen ſi ponatur $y - g = (a + b - x)z$ a ſe inuicem

uicem ſeparabuntur, prodibit enim haec aequatio $\frac{c\,dz}{\sqrt{(1+zz)}} = \frac{u\,dx}{a+b-x}$.

Corollarium 2. Quia u ab x pendet, ponatur $\int \frac{u\,dx}{a+b-x} = lX$, quod integrale ita ſit acceptum, vt euaneſcat poſito $x=0$. Hinc ergo erit $c\,l(z+\sqrt{(1+zz)}) = lX + \text{Conſt.}$ ad quam conſtantem determinandam ponatur $x=0$, fietque $z = \frac{-g}{a+b}$; prodibit ergo Conſt. $= c\,l\,\frac{-g+\sqrt{(g^2+(a+b)^2)}}{a+b}$.

Corollarium 3. Poſito ergo $\int \frac{u\,dx}{a+b-x} = X$ ſeu $X = c^{\int \frac{u\,dx}{a+b-x}}$ habebitur ſequens aequatio integralis pro curua quaeſita $X^{\frac{1}{c}} = \frac{(a+b)z+(a+b)\sqrt{(1+zz)}}{-g+\sqrt{(g^2+(a+b)^2)}}$ ſeu $\frac{X^{\frac{1}{c}}(a+b-x)}{a+b} = \frac{y-g+\sqrt{((y-g)^2+(a+b-x)^2)}}{-g+\sqrt{(g^2+(a+b)^2)}}$.

Corollarium 4. Inuento autem ex his aequationibus y ſeu z per x, erit tempus, quo cymba ex A in M pertingit $= \int \frac{dx\sqrt{(1+zz)}}{c}$, quod propterea conceſſis quadraturis aſſignari poterit.

Corollarium 5. Si punctum H in punctum G ſeu ipſam ripam cadat, vt ſit $b=0$, habebitur $\frac{X^{\frac{1}{c}}(a-x)}{a} = \frac{y-g+\sqrt{((y-g)^2+(a-x)^2)}}{-g+\sqrt{(g^2+a^2)}}$. Si nunc ponatur $x=a$, quo inueniatur $y=BC=f$, ſeu punctum C cognoſcitur, vbi cymba in ripa BF appellet, reperietur $\frac{2f-2g}{-g+\sqrt{(a^2+g^2)}} = 0$, niſi forte hoc caſu $X^{\frac{1}{c}}$ fiat quantitas infinite magna, quae in $a-x=0$ ducta producat quantitatem finitam.

Corol-

Corollarium 6. Si ergo facto $x = a$ quantitas $\frac{X^{\frac{1}{c}}(a-x)}{a}$ euanescat, prodibit $f = g$, seu $BC = BG$. His ergo casibus cymba ad ipsum punctum G, ad quod perpetuo dirigebatur, appellet.

Corollarium 7. Ex ipsa autem rei natura intelligitur, si extrema curuae A B applicata in B fuerit vel $= 0$, vel minor quam c, hoc est, si fluuius ad ripam B F minori celeritate feratur, quam cymba propellitur, tum cymbam semper ad ipsum punctum G appellere debere, si quidem H in G cadit. Si enim in alio puncto appelleret, tum motum versus G dirigendo moueri pergeret, donec ad G peruenerit.

Scholion.

Quo autem eiusmodi cymbae motus clarius cognoscatur, exemplum afferam, quo aequationem inuentam penitus euoluere licet. Habeat nimirum fluuius vbique eandem celeritatem, quo scala celeritatum fiat recta $a\,b$ parallela axi A B, et dirigatur cymba perpetuo ad punctum fixum G in ripa opposita situm, vt sit $BG = g$. Fiet ergo u quantitas constans, quae sit $= \alpha c$. Hoc ergo casu habebitur

Tabula IV. Fig. 2.

$$lX = \alpha c \int \frac{dx}{a-x} = \alpha c\, l \frac{a}{a-x} \quad \text{seu} \quad X = \frac{a^{\alpha c}}{(a-x)^{\alpha c}}.$$

Hoc ergo valore in aequatione inuenta substituto prodibit $\frac{a^{\alpha-1}}{(a-x)^{\alpha-1}} = \frac{y-g+\sqrt{((y-g)^2+(a-x)^2)}}{-g+\sqrt{(g^2+a^2)}}$. Hinc patet, si fuerit $\alpha < 1$, tum cymbam in ipso puncto G esse appulsuram; sin autem fuerit $\alpha > 1$, tum cymbam omnino non ripam B F attingere posse. Casus autem quo fit $\alpha = 1$, seu $u = c$ habebitur $V(g^2 a^2) = y + V((y-g)^2 + (a-x)^2)$ sex $x^2 - 2ax = 2gy - 2yV(a^2 + g^2)$ quae est aequatio pro parabola axem habente BF et verticem in F, vbi est BF $= \frac{a^2}{2V(a^2+g^2) - 2g}$ eiusque parameter erit $2V(a^2 + g^2) - 2g$; ita vt ergo huius parabolae focus cadat in ipsum punctum G. Ex dato ergo foco G, positione axis FB et puncto A, per quod parabola transire debet, parabola describetur.

Problema 4.

Tab IV. Figura 3. *Data scala celeritatum fluuii* AQB, *inuenire cymbae directionem in singulis locis, qua fiat, vt cymba datam curuam* AMC *describat.*

Solutio.

Quemadmodum applicatae PQ curuae AQB celeritatem fluuii in singulis locis P designant, ita sit AD ceteritas qua cymba in directione spinae in aqua quiescente progrederetur. Sit igitur $AD = c$; $AP = x$; $PQ = u$; in curua vero a cymba describenda ponatur applicata PM $= y$; et arcus $AM = s$. vt ideo sit $ds = V(dx^2 + dy^2)$. Sit iam ab directio cymbae quaesita, quam in singulis punctis M habere debet, vt in data curua AMC moueatur; atque anguli PMb sinus ponatur $= m$ eiusdemque cosinus $= n$ posito sinu toto $= 1$. Dantur ergo tum aequatio inter x et u tum etiam aequatio inter x et y, ex quibus vel m vel n definiri oportet. Inuenimus autem in problemate primo hanc aequationem $u\,dx - c\,m\,dy = c\,n\,dx = c\,dx\,V(1 - m^2)$ ob $n = V(1 - mm)$. Sumendis

mendis igitur quadratis prodibit $u^2 dx^2 - 2cmudxdy + c^2m^2dy^2 = c^2dx^2 - c^2m^2dx^2$, quae abit in hanc $c^2m^2 = \frac{2cmudxdy + c^2dx^2 - u^2dx^2}{dx^2 + dy^2}$, ex qua per radicis extractionem reperitur $cm = \frac{udxdy \pm dx\sqrt{(c^2dx^2 + c^2dy^2 - u^2dx^2)}}{dx^2 + dy^2}$ atque $cn = \frac{udx^2 \mp dy\sqrt{(c^2dx^2 + c^2dy^2 - u^2dx^2)}}{dx^2 + dy^2}$. Ex his sequitur anguli PMb tangens, quae est $\frac{m}{n} = \frac{ccdydx \pm udx\sqrt{(ccdx^2 + ccdy^2 - u^2dx^2)}}{uudx^2 - ccdy^2}$ Cymba ergo angulum hunc tenens in curua data AMC incedet. Q. E. I.

Corollarium 1. Angulus PMb cuius tangens est $\frac{m}{n}$ commode in duos angulos resolui potest quorum alterius tangens est $\frac{dy}{dx}$ alterius vero tangens $\frac{\pm\sqrt{(ccdx^2 + ccdy^2 - u^2dx^2)}}{udx}$. Quamobrem erit ang. $PMb =$ Ang. tang. $\frac{dy}{dx} \pm$ Ang. tang. $\frac{\sqrt{(ccdx^2 + ccdy^2 - u^2dx)}}{udx}$.

Corollarium 2. Vbique ergo cymba duplicem angulum PMb tenere poterit, quo in data curua AMC ingrediatur; dummodo fuerit $c^2dx^2 + c^2dy^2 > u^2dx^2$ seu $c^2ds^2 > u^2dx^2$. Nam si alicubi saltem fuerit $c^2ds^2 < u^2dx^2$, tum omnino fieri nequit, vt curua proposita a cymba describatur.

Corollarium 3. Quo igitur curua proposita sit describtibilis, ita esse debet comparata, vt sit vbique $\frac{c}{u} > \frac{dx}{ds}$ hoc est vt sit vbique $\frac{AD}{PQ} > \frac{Mn}{Mm}$.

Corrollarium 4. Cum nusquam esse possit $Mn > Mm$, intelligitur, si nulla applicata curuae AQB maior sit quam AD, tum omnem curuam AMC a cymba absolui posse; quia hoc casu fieri nequit, vt vsquam sit $\frac{AD}{PQ} < \frac{Mn}{Mm}$.

Corollarium 5. Quod autem ad duplicem angulum directionis attinet, quibus curua data describi posse inuenta

 est,

eſt, notandum eſt, tum tantum vtrumque locum inuenire, quando vterque ſit affirmatiuus, ſi quidem motus initium in A collocetur. Duplex igitur angulus locum habebit, ſi fuerit Ang. tang. $\frac{dy}{dx} >$ Ang. tang. $\frac{\sqrt{(ccdx^2+ccdy^2-u^2dx^2)}}{udx}$ hoc eſt, ſi fuerit $udy > \sqrt{(cdx^2+c^2dy^2-u^2dx^2)}$ ſeu ſi fuerit $u > c$.

Corollarium 6. Cum vera cymbae celeritas in M, qua elementum Mm abſoluit, ſit $= \frac{cmds}{dx}$; erit noſtro caſu celeritas cymbae vera $= \frac{udy \pm \sqrt{(c^2ds^2-u^2dx^2)}}{ds}$ ob $dx^2 + dy^2 = ds^2$.

Corollarium 7. Tempus autem, quo arcus curuae AM abſoluitur erit $= \int \frac{ds^2}{udy \pm \sqrt{(c^2ds^2-u^2dx^2)}}$. idem vero tempus transformando formulam prodit $= \int \frac{udy \mp \sqrt{(c^2ds^2-u^2dx^2)}}{u^2-c^2}$; ſi ſcilicet numerator et denominator per $udy \mp \sqrt{(ccds^2 - u^2dx^2)}$ multiplicetur.

Scholion.

Cum celerior cymbae motus tardiori praeferendus ſit, ex duobus directionis angulis quibus cymba datam curuam deſcribit, eum eligere conuenit, cuius ſinus m eſt maior, hoc enim caſu tempus, quod eſt $\int \frac{dx}{cm}$, minus euadet. Hanc ob rem ex ſignis ambiguis vtemur ſuperiore, eritque $cm = \frac{udxdy + dx\sqrt{(c^2ds^2-u^2dx^2)}}{ds^2}$; $cn = \frac{udx^2 - dy\sqrt{(c^2ds^2-u^2dx^2)}}{ds^2}$; atque angulus PM$b$ aequabitur ſummae angulorum, quorum tangentes ſunt $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{\sqrt{(c^2ds^2-u^2dx^2)}}{udx}$, vel quorum ſinus ſunt $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{\sqrt{(c^2ds^2-u^2dx^2)}}{cds}$ Aequabitur ergo angulus PMb ſummae angulorum, quorum coſinus ſunt $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{udx}{cds}$, vnde iſte quaeſitus angulus facile reperitur. Tempus autem, quo cymba curuae praeſcriptae portionem AM abſoluit, erit $= \int \frac{udy - \sqrt{(c^2ds^2-u^2dx^2)}}{u^2-c^2}$

Quam-

Quamobrem, si linea AM fuerit recta, ita vt sit $y = Kx$, erit tempus per A M $= \int \frac{kudx - dx\surd(cc + cckk - uu)}{uu - cc}$. Apparet igitur hoc casu esse debere $u < c\surd(1 + kk)$.

Problema 5.

Cognita fluuii in singulis locis celeritate inuenire lineam citissimi traiectus AMC, *in qua cymba citius ex* A *in* C *pertingit, quam per vllam aliam lineam puncta* A *et* C *iungentem.*

Solutio.

Manentibus omnibus, vt in praecedente problemate, curua AMC eius indolis est inuestiganda, vt $\int \frac{udy - \surd(c^2ds^2 - u^2dx^2)}{uu - cc}$ minimum obtineat valorem; hac enim formula tempus exhibetur, qua cymba curuae arcum AM absoluit. Communicaui autem praeterito anno vniuersalem methodum quaestiones huiusmodi soluendi, quae, si curua quaeratur, in qua $\int Zdx$ maximum minimumue euadat, sitque $dZ = Fdy + Gdx + Hdp + Idq + Kdr$ etc. existente $dy = pdx$; $dp = qdx$; $dq = rdx$ etc. tum pro curua quaesita isthanc praebuit aequationem $o = Fdx - dH + \frac{ddI}{dx} - \frac{d^3K}{dx^2}$ etc. existente dx constante. Quo ergo formula nostra ad speciem $\int Zdx$ reducatur pono $dy = pdx$ secundum methodum datam; eritque $\int Zdx = \int \frac{pu - \surd(cc + ccpp - u^2)}{u^2 - c^2} dx$, seu $Z = \frac{pu - \surd(c^2 + c^2p^2 - u^2)}{u^2 - c^2}$. Prodit igitur Z functio variabilium u et p seu x et p, siquidem u ab x pendet, prout in problemate, vbi curua AQB ponitur data, posui. Habebitur ergo $dZ = Gdx + Hdp$ euanescentibus reliquis terminis, indeque pro curua quaesita resultabit dH

 $= o$,

$=o$, atque $H=$conſt. Sufficit itaque quantitatem H inueniſſe ex Z, quae obtinebitur differentiando Z, poſito tantum p variabili. Hanc ob rem reperietur $H=\frac{u}{uu-cc}-\frac{ccp}{(u^2-c^2)\sqrt{(cc+ccpp-uu)}}=$Conſt.$=\frac{1}{g}$, vnde pro curua quaeſita ſequens emergit aequatio $gu\sqrt{(cc+ccpp-uu)}-ccgp=(uu-cc)\sqrt{(cc+ccpp-uu)}$, quae ſumendis quadratis reducta abit in hanc $p=\frac{cc+gu-uu}{c\sqrt{((g-u)^2-cc)}}$. Cum autem ſit $dy=pdx$, natura curuae quaeſitae iſta exprimetur aequatione $dy=\frac{(cc+gu-uu)dx}{c\sqrt{((g-u)^2-cc)}}$, ex qua, quia variabiles ſunt a ſe inuicem ſeparatae, curua conſtrui poterit, erit enim $y=\int\frac{(cc+gu-uu)dx}{c\sqrt{((g-u)^2-cc)}}$ integrale ita capiendo, vt euaneſcente x fiat $y=o$. Q. E. I.

Corollarium 1. Quo ergo curua AMC inueniatur, per quam cymba tempore breuiſſimo ex A ad datum punctum C pertingat, conſtans arbitraria g ita eſt definienda, vt poſito $x=AB=a$, fiat $y=BC=b$.

Corollarium 2. Quia ergo curua AMC eſt inuenta, innoteſcet angulus directionis PMb, quem cymba in quouis loco M tenere debet, quo in curua inuenta moueatur. Cum enim ſit $\sqrt{(cc+ccpp-uu)}=\frac{ccgp}{cc+gu-uu}=\frac{cg}{\sqrt{((g-u)^2-cc)}}$ erit $\sqrt{(c^2ds^2-u^2dx^2)}=\frac{cgdx}{\sqrt{((g-u)^2-cc)}}$; indeque tangens anguli PM$b=\frac{-\sqrt{((g-u)^2-cc)}}{c}=\frac{-(cc+gu-uu)dx}{ccdy}$.

Corollarium 3. Secans ergo anguli PMb eſt $\frac{-g+u}{c}$ eiusque adeo coſinus $=\frac{-c}{g-u}$, quia anguli bMn ſinus. Cymba ergo ſemper in hoc angulo directa breuiſſimo tempore ex loco A in locum C pertingit.

Co-

Corollarium 4. Si fluuius vbique eadem celeritate feratur, seu u fierit constans, tum linea citissimi traiectus fiet recta: hoc ergo casu cymba in recta linea progrediendo celerrime ex A ad M pertinget.

Corollarium 5. Si ponatur $g = \infty$, fiet angulus PMb rectus; cymba ergo perpetuo ad cursum fluuii normaliter directa tempore breuissimo fluuium traiiciet; curua autem, quam describet, hanc habebit aequationem $y = \int \frac{u\,dx}{c}$. Appellet ergo cymba in C, vt sit $BC = \frac{\text{areae AQBA}}{AD}$.

Corollarium 6. Quod autem ad constantem g attinet, intelligitur eam ita debere accipi, vt $(g-u)^2$ sit maius quam c^2. Nisi enim hoc obseruetur, curua inuenta fit imaginaria.

Corollarium 7. Cum sit m seu sinus anguli PMb $= \frac{\sqrt{((g-u)^2 - cc)}}{g-u}$, erit tempus quo cymba ex A in M peruenit $= \int \frac{dx}{cm} = \int \frac{(g-u)\,dx}{c\sqrt{((g-u)^2 - cc)}}$. Hocque tempus est breuissimum quo cymba ex A in M peruenire potest.

DE

DE AEQVATIONIBVS DIFFERENTIALIBVS QVAE CERTIS TANTVM CASIBVS INTEGRATIONEM ADMITTVNT.

AVCTORE
L. Eulero.

§. 1.

Cum ad aequationes differentiales, quae generaliter integrari nequeunt methodis adhuc vſitatis, peruenitur; non parum augmenti analyſis accipere cenſenda eſt, ſi caſus ſaltem particulares aſſignentur, quibus integratio locum inueniat. Dum enim integratio caſuum ab integratione generalis aequationis non pendet, eo magis erit abſcondita atque inuentu difficilis, quo minus per generaliores integrandi methodos perfici poterit. Talis aequatio iam ante complures annos a *Comite Riccato* eſt producta, atque a nonnullis inſignibus geometris multum agitata, ex qua ſatis perſpicere licet, quam difficulter caſus integrabiles per alias methodos tractarentur, niſi reductione difficiliorum caſuum ad ſimpliciores vti vellemus. Caſus ſcilicet iſti integrabiles ita ſunt inuenti, vt idonea facta ſubſtitutione caſus ſimpliciſſimus, cuius integratio in promtu eſt, in alium transmutetur eadem forma generali contentum, hicque denuo in alium et ita porro in infinitum, quo facto horum caſuum omnium integratio ex ſimpliciſſimo conſequitur.

§. 2.

§. 2. Proponam hic autem aliam methodum latius patentem, qua non solum in aequatione illa *Riccatiana*, sed etiam in plurimis aliis generalem integrationem pariter respuentibus, casus integrabiles erui poterunt. Methodus vero mea in hoc consistit, vt integrationem aequationis generalis per seriem absoluam, quae in casibus certis abrumpatur; hoc enim facto horum ipsorum casuum integralia finitis aequationibus exprimentur. Sed cum quaelibet aequatio plurimis modis per seriem integrari possit; difficillimum plerumque est in eiusmodi seriem incidere, quae certis casibus abrumpatur; ita aequationem illam *Riccatianam* per varias substitutiones in aliam formam transmutari oportet, antequam integratio per seriem eiusmodi absolui queat, quae casibus integrabilibus abrumpatur.

§. 3. Talis autem praeparatio, quae ad seriem idoneam manuducat, alio modo fieri nequit, nisi vt aequatio proposita in aequationem differentialem secundi vel altioris cuiusdam gradus transmutetur, in qua altera variabilis vbique vnam tantum obtineat dimensionem; huiusmodi enim aequatio facile et commode per seriem integrari potest. At hoc solum non sufficit ad propositum nostrum; series enim praeterea haec ita debet esse comparata, vt certis casibus abrumpi queat, quod euenit, si facto coefficiente vniuscuiusque termini $= 0$, sequentium terminorum omnium coefficientes simul euanescant. Cum igitur haec praeparatio tantis laboret difficultatibus, expediet negotium a posteriori aggredi, atque primo aequationem differentialem secundi gradus generalissimam contemplari, cuius integratio per seriem absoluta hac gaudeat praerogatiua, vt infinitis casibus fiat finita; quibus adeo casibus aequatio assumta integrari poterit. Hoc facto aequationem istam differentialem secundi gradus ad differentialem primi gradus reducam, eamque in varias formas transmutabo, quo plurimas imo infinitas obtineam aequationes differentiales primi gradus, quae iisdem casibus sint integrabiles. Hinc autem non solum perspicuum erit, aequationes inuentas illis casibus esse integrabiles, sed retrogrediendo etiam ipsa aequatio integralis assignari poterit.

§. 4. Huiusmodi autem aequatio differentialis secundi gradus, quae requisitis illis satisfaciat, atque latissime pateat, est haec:

$$(a+bx^n)x^2 ddv + (c+fx^n)x dx dv + (g+hx^n) v dx^2 = 0,$$

in qua variabilis x elementum dx positum est constans. Ex hac autem aequatione valor ipsius v duplici modo per seriem definiri potest, quorum alter est, si ponatur $v = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + Ex^{m+4n} +$ etc. Hinc enim valoribus loco v, dv et ddv substitutis, et terminis homogeneis factis $= 0$, sequentes prodibunt coefficientium A, B, C, D etc. et exponentis m determinationes. Primo enim debet esse $g + cm + am(m-1) = 0$, vnde ne ad irrationalia perveniamus, m potius tamquam numerum cognitum spectemus ex eoque g determinemus, eritque $g = -cm - am(m-1)$. Deinde vero habebimus hoc valore loco g vbique substituto

$$B = \frac{-A(h + fm + bm(m-1))}{cn + an(2m+n-1)}$$

$$C = \frac{-B(h + f(m+n) + b(m+n)(m+n-1))}{2cn + 2an(2m+2n-1)}$$

$$D = \frac{-C(h + f(m+2n) + b(m+2n)(m+2n-1))}{3cn + 3an(2m+3n-1)}$$

$$E = \frac{-D(h + f(m+3n) + b(m+3n)(m+3n-1))}{4cn + 4an(2m+4n-1)} \text{ etc.}$$

Erit

Erit ergo A quantitas constans arbitraria, a qua sequentes coefficientes omnes pendent.

§. 5. Ex his coefficientium valoribus inuentis intelligitur, si vnicus coefficiens euanuerit, sequentes omnes simul euanescere, ita, vt his casibus valor ipsius v fiat finitus, atque idcirco aequatio assumta

$$(a+bx^n)x^2ddv+(c+fx^n)xdxdv+(g+hx^n)vdx^2=0$$

integrationem admitat. Si enim fuerit $h+fm+bm(m-1)=0$, tum erit $v=Ax^m$; sin autem sit $h+f(m+n)+b(m+n)(m+n-1)=0$, tum erit $v=Ax^m+Bx^{m+n}$, atque si $h+f(m+2n)+b(m+2n)(m+2n-1)=0$, erit $v=Ax^m+Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}$. Semper igitur aequatio proposita integrationem admittet, quoties fuerit $h+f(m+in)+b(m+in)(m+in-1)=0$; seu $h=-f(m+in)-b(m+in)(m+in-1)$ denotante i numerum quemcunque integrum affirmatiuum cyphra non excepta. Interim tamen ii excipiendi sunt casus quibus denominatores euanescunt, ita ista integratio non succedit, si fuerit $c=-a(2m+(i+1)n-1)$, si quidem hoc casu i minor fuerit quam illo.

§. 6. Alter modus ex nostra aequatione valorem ipsius v per seriem eruendi, in hoc constat, vt ponatur $v=Ax^k+Bx^{k-n}+Cx^{k-2n}+Dx^{k-3n}+Ex^{k-4n}+$ etc. Hinc enim pro v, dv et ddv debitis valoribus surrogandis reperietur; $h+fk+bk(k-1)=0$, quare ponamus $h=-fk-bk(k-1)$. Porro vero erit

$$B=\frac{A(g+ck+ak(k-1))}{nf+nb(2k-n-1)}$$

$$C=\frac{B(g+c(k-n)+a(k-n)(k-n-1))}{2fn+2bn(2k-2n-1)}$$

$$D=\frac{C(g+c(k-2n)+a(k-2n)(k-2n-1))}{3fn+3bn(2k-3n-1)}$$

$$E=\frac{D(g+c(k-3n)+a(k-3n)(k-3n-1))}{4fn+4bn(2k-4n-1)}\text{ etc.}$$

Quo-

Quoties ergo fuerit $g = -c(k-in) - a(k-in)(k-in-1)$ denotante vt ante i numerum quemcunque integrum affirmatiuum, toties aequatio propoſita erit integrabilis. Namque ſi $i=0$ erit $v = Ax^k$, ſi $i=1$ erit $v = Ax^k + Bx^{k-n}$; ſi $i=2$ erit $v = Ax^k + Bx^{k-n} + Cx^{k-2n}$ et ita porro.

§. 7. Aequatio ergo noſtra generalis

$$(a+bx^n)x^2 ddv + (c+fx^n)x dx dv + (g+hx^n) v dx^2 = 0$$

in qua eſt $g = -cm - am(m-1)$ atque $h = -fk - bk(k-1)$, quibus definitionibus nulla vis amplitudini aequationis infertur, cum loco arbitrariarum quantitatum g et h duae nouae arbitrariae m et k introducantur. Haec, inquam, aequatio integrationem admittit, quoties fuerit

vel $f = \frac{(m+in)(m+in-1)-k(k-1)}{k-m-in} b = (1-k-m-in)b$,

vel $c = \frac{(k-in)(k-in-1)-m(m-1)}{m-k+in} a = (1-k-m+in)a$

Duplici ergo modo infiniti caſus aſſignari poſſunt, quibus aequatio propoſita integrabilis exiſtit; atque inſuper his ſingulis caſibus ipſa integralia ſeu valores ipſius v per x algebraice exprimi poterunt, quaerendo valores coefficientium B, C, D, etc. quippe quorum numerus iſtis caſibus fiet finitus.

§. 8. Quamuis autem hoc modo caſuum erutorum integralia algebraica inueniantur, tamen non eſt putandum haec integralia aeque latere, ac aequationes differentiales ex quibus ſunt ortae. Quemadmodum enim integrale ipſius dx non ſolum eſt x ſed etiam $x+a$, ita haec integralia algebraica, quae hoc modo inueniuntur, ſunt tantum caſus particulares plenorum integralium, qui oriuntur ſi conſtans quaepiam arbitraria vel nihilo vel infinito aequalis ponatur. Interim tamen in his omnibus caſibus, quibus

bus

bus integrale speciale inuenitur, ope ipsius huius integralis specialis generale et plenarium integrale facile inueniri potest. Sit enim aequatio differentio differentialis $Pddv + Qdxdv + Rvdx^2 = o$ + vbi P, Q, R sint functiones quaecunque ipsius x, cuius iam inuentum sit integrale particulare per huiusmodi viam scilicet $v = X$ hoc est functioni cuidam ipsius x. Iam ad aequationem integralem completam eruendam pono $v = Xz$ erit $dv = zdX + Xdz$ atque $ddv = zddX + 2dXdz + Xddz$, quibus substitutis aequatio proposita abibit in hanc

$$\begin{aligned}&+PzddX + 2PdXdz + PXddz = o.\\&+QzdXdx + QXdxdz\\&+RzXdx^2\end{aligned}$$

sed cum X sit valor, qui pro v substitutus satisfacit erit $PddX + QdXdx + RXdx^2 = o$, Quo circa deletis his terminis restabit $2PdXdz + QXdxdz + PXddz = o$ seu $\frac{2dX}{X} + \frac{Qdx}{P} + \frac{ddz}{dz} = o$; in qua cum P et Q sint functiones ipsius x, ponatur $\int\frac{Qdx}{P} = S$ eritque integrando $X^2dz = Ce^{-s}dx$; atque $z = C\int e\frac{^{-s}dx}{X^2}$: denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus est 1. Aequationis ergo $Pddv + Qdxdv + Rvdx^2 = o$, cui satisfacit $v = X$ completum integrale erit $v = CX\int e\frac{^{-\int\frac{Qdx}{P}}dx}{X^2}$

§. 9. Cum igitur constet quibusnam casibus aequatio nostra differentio-differentialis $(a + bx^n)x^2ddv + (c + fx^n)xdxdv + (g + hx^n)vdx^2 = o$ integrationem admittat, atque simul etiam horum casuum integralia completa inueniri queant; inquiramus in aequationes differen-

 tiales

tiales primi gradus, quae ex ista resultent, atque ideo iisdem casibus integrabiles existant. Aequatio autem proposita facile in aequationem differentialem primi gradus transmutatur ponendo $v = e^{\int z dx}$, ita vt sit $z = \frac{dv}{vdx}$. vnde cognito valore ipsius v, simul valor ipsius z innotescit. Erit vero $dv = e^{\int z dx} z dx$ et $ddv = e^{\int z dx}(dx dz + z^2 dx^2)$ quibus valoribus substitutis aequatio nostra transibit in hanc. $(a + bx^n) x^2 dz + (c + fx^n) x z dx + (a + bx^n) x^2 z^2 dx + (g + hx^n) dx = 0$. Haec ergo aequatio differentialis primi gradus, factis $g = -cm - am(m-1)$ et $h = -fk - bk(k-1)$ semper est integrabilis, si fuerit vel $f = \frac{(m+in)(m+in-1) - k(k-1)}{k-m-in} b = (1-k-m-in)b$

vel $c = \frac{(k-in)(k-in-1) - m(m-1)}{m-k+in} a = (1-k-m+in)a$

quibus casibus etiam ex valore ipsius v inuento, valor ipsius z tam completus quam incompletus ope aequationis $z = \frac{dv}{vdx}$, inuenietur.

§. 10. Quo autem clarius appareat, quales aequationes simpliciores in hac generali contineantur, in aliam formam aequationem inuentam transmutemus, in qua tres tantum insint termini huius formae $P dz + Q z^2 dx + R dx = 0$ denotantibus P, Q, et, R, functiones ipsius x. Haec vero reductio pluribus modis fieri potest, quorum primus est, si ponatur $z = Ty$, vbi T est functio ipsius x etiamnum incognita. Facta ergo hac substitutione erit

$$(a + bx^n) T x^2 dy + (a + bx^n) y x^2 dT + (a + bx^n) T^2 x^2 y^2 dx + (g + hx^n) dx = 0 + (c + fx^n) T y x dx$$

in qua ponatur $(c + fx^n) T dx + (a + bx^n) x dT = 0$ quo terminus, qui y continet, euanescat; habebitur ergo

$(c + f$

$\frac{(c+fx^n)dx}{(a+bx^n)x} + \frac{dT}{T} = o$, vnde valorem ipsius T erui oportet. Reducetur autem haec aequatio ad istam $\frac{cdx}{ax} + \frac{(af-bc)x^{n-1}dx}{a(a+bx^n)} + \frac{dT}{T} = o$, cuius integrale est $\frac{c}{a}lx + \frac{af-bc}{abn}l(a+bx^n) + lT = C$ atque $T = \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}}}{x^{\frac{c}{a}}}$. Posito ergo $z = \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}}}{x^{\frac{c}{a}}}$ aequatio nostra abibit in hanc

$$dy + \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{anb}}y^2dx}{x^{\frac{c}{a}}} + \frac{(g+hx^n)x^{\frac{c}{a}-2}dx}{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1}} = o$$ quae propterea iisdem casibus, quibus superiores aequationes, integrationem admittit.

§. 11. Hinc iam specialiores formemus aequationes ponendo primo $bc = af$ vt sit $dy + x^{-\frac{c}{a}}y^2dx + \frac{(g+hx^n)x^{\frac{c}{a}-2}dx}{a+bx^n} = o$

Ponatur porro $x^{\frac{a-c}{a}} = t$ seu $x = t^{\frac{a}{a-c}}$ habebitur $dy + \frac{ay^2dx}{a-c} + \frac{a(g+ht^{\frac{na}{a-c}})dt}{(a-c)(a+bt^{\frac{an}{a-c}})tt} = o$. Haec ergo aequatio, si fuerit $g = -cm - am(m-1)$ et $h = -\frac{b}{a}(ck + ak(k-1))$ semper integrationem admittet, quoties erit vel $c = (1-k-m-in)a$ vel $c = (1-k-m+in)a$ hoc est quoties erit $\frac{c+ak+m-1)}{an}$ numerus integer siue affirmatiuus siue negatiuus.

§. 12.

§. 12. Si insuper fuerit $c = o$, habebitur loco g et b actu substitutis suis valoribus $dy + y^2 dt = \frac{(am(m-1) + bk(k-1)t^n)dt}{(a+bt^n)tt}$ quae aequatio integrabilis erit, quoties fuerit vel $\frac{1-k-m}{n}$ vel $\frac{k+m-1}{n}$ numerus integer affirmatiuus; hoc est quoties fuerit $\frac{k+m-1}{n}$ numerus integer siue affirmatiuus siue negatiuus. Haec ergo aequatio $dy + y^2 dt = \frac{am(m-1)dt}{(a+bt^n)t}$. integrabilis erit, si fuerit vel $\frac{m-1}{n}$ vel $\frac{m}{n}$ numerus integer siue affirmatiuus siue negatiuus. Atque haec aequatio $dy + y^2 dt = \frac{bk(k-1)t^n dt}{(a+bt^n)t}$ integrabilis erit, si vel $\frac{k-1}{n}$ vel $\frac{k}{n}$ fuerit numerus integer siue affirmatiuus siue negatiuus.

§. 13. At si fuerit $c = a$, habebitur ista aequatio $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{(mma + kkbx^n)dx}{(+bx^n)x}$ quae semper integrationem admittet quoties fuerit $\frac{k+m}{n}$ numerus integer siue affirmatiuus siue negatiuus. Quare haec aequatio $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{m^2 adx}{(a+bx^n)x}$ integrabilis erit, quoties $\frac{m}{n}$ fuerit numerus integer; haec vero aequatio $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{k^2 bx^{n-1}dx}{a+bx^n}$ quoties $\frac{k}{n}$ fuerit numerus integer.

§. 14. Resumamus aequationem generalem $dy + \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} y^2 dx}{x^{\frac{a}{c}}} + \frac{(g+bx^n)x^{\frac{c}{a}-2} dx}{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1}} = 0$, et ponamus

namus $c=-a(n-1)$, fiatque $(a+bx^n)^{\frac{b-f}{bn}}=t$, vt fit $x^n=\frac{t^{\frac{bn}{b-f}}-a}{b}$; prodibit ista aequatio $dy+\frac{y^2dt}{b-f}+\frac{b(bg-ab+bt^{\frac{bn}{b-f}})t^{\frac{bn}{b-f}-2}dt}{(b-f)(t^{\frac{bn}{b-f}}-a)^2}=0$, in qua est $g=am(n-m)$ et $h=-fk-bk(k-1)$. Haec vero aequatio toties integrabilis euadit, quoties fuerit vel $\frac{k+m-n}{n}$ numerus integer affirmatiuus seu i vel $\frac{f+b(m+k-1)}{bn}$ numerus integer negatiuus. Si insuper fuerit $f=b-nb$, orietur ista aequatio $dy+\frac{y^2dt}{nb}+\frac{b(am(n-m)-ak(n-k)+k(n-k)t)dt}{nt(t-a)^2}=0$, quae semper integrationem admittet dummodo $\frac{k+m}{n}$ fuerit numerus integer siue affirmatiuus siue negatiuus. Hinc posito $k=n$, ista aequatio $dy+\frac{y^2dt}{nb}+\frac{abm(n-m)dt}{nt(t-a)^2}=0$, integrationem admittet, si fuerit $\frac{m}{n}$ numerus integer. At facto $m=n$, haec aequatio $dy+\frac{y^2dt}{nb}+\frac{bk(n-k)dt}{nt(t-a)}=0$, integrabilis erit, quando fuerit $\frac{k}{n}$ numerus integer siue affirmatiuus siue negatiuus.

§. 15. Reuertamur ad aequationem primitiuam inter x et z inuentam
$(a+bx^n)x^2dz+(c+fx^n)xzdx+(a+bx^n)x^2z^2dx+(g+hx^n)dx=0$, quae posito $g=-cm-am(m-1)$ et $h=-fk-bk(k-1)$ integrabilis est, si fuerit vel $f=(1-k-m-in)b$, vel $c=(1-k-m+in)a$. Alio autem modo eam transformemus in aequationem tribus tantum terminis constantem. Ponamus scilicet $z=Ty+S$, denotantibus T et S fun-

ctionibus ipsius x; erit $dz = T\,dy + y\,dT + dS$ his substitutis prodibit ista aequatio

$$\begin{array}{ll}(a+bx^n)Tx^2dy+(a+bx^n)x^2y\,dT+(a+bx^n)x^2T^2y^2dx+(a+bx^n)x^2dS=0 & \\ \quad +(c+fx^n)Txydx & +(c+fx^n)xSdx \\ \quad +2(a+bx^n)x^2TSydx & +(a+bx^n)x^2S^2dx \\ & +(g+hx^n)dx\end{array}$$

ex qua, quo terminus y continens egrediatur, ponatur $(a+bx^n)x\,dT + 2(a+bx^n)x\,T\,S\,dx + (c+fx^n)T\,dx = 0$, seu $\frac{dT}{T} + 2S\,dx + \frac{(c+fx^n)dx}{(a+bx^n)\,x} = 0$. Ponamus ante omnia $T = x^p$, quo post diuisionem per $(a+bx^n)Txx$ coefficiens ipsius y^2dx fiat simplex potestas ipsius x; erit $\frac{p}{x} + 2S + \frac{c+fx^n}{x(a+bx^n)} = 0$ atque $S = \frac{-c-ap-(f+bp)x^n}{2x(a+bx^n)}$.

Hinc fiet $dS = \frac{a(c+ap)dx-a(n-1)(f+bp)x^ndx+b(f+bp)x^{2n}dx+b(n+1)(c+ap)x^ndx}{2xx(a+bx^n)^2}$.

Atque his valoribus substitutis obtinebitur ista aequatio $(a+bx^n)x^{p+2}dy + (a+bx^n)x^{2p+2}y^2dx + \frac{p(p+2)(a+bx^n)dx}{4} + \frac{(c+2g)dx+(f+2h)x^ndx}{2}$ $\frac{-ccdx+2n(bc-af)x^ndx-2cfx^ndx-ffx^{2n}dx}{4(a+bx^n)} = 0$ quae per $(a+bx^n)x^{p+2}$ diuisa reducitur ad hanc $dy + x^py^2dx + \frac{p(p+2)dx}{4x^{p+2}} + \frac{(c+2g)dx+(f+2h)x^ndx}{2(a+bx^n)x^{p+2}} - \frac{(c+fx^n)^2dx+2n(bc-af)x^ndx}{4(a+bx^n)^2x^{p+2}}$ Quae aequatio ita est comparata, vt posito $g = -cm-am(m-1)$ et $h = -fk-bk(k-1)$, sem-

ſemper ſit integrabilis, ſi fuerit vel $\frac{-(k+m-1)b-f}{bn}$ vel $\frac{(k+m-1)ac+}{an}$ numerus integer affirmatiuus.

§. 16. Ponamus primo $bc-af=0$ ſeu $f=\frac{bc}{a}$; et aequatio inuenta tranſibit in hanc $dy+x^py^2dx+\frac{(p+1)^2dx}{4x^{p+2}}-\frac{(a-c)^2dx}{4a^2x^{p+2}}+\frac{(g+hx^n)dx}{(a+bx^n)x^{p+2}}=0$, quae ſi ſit $g=-cm-am(m-1)$ et $h=-\frac{b}{a}(ck+ak(k-1))$, integrabilis exiſtit, ſi $\frac{(k+m-1)a+c}{an}$ fuerit numerus integer ſiue affirmatiuus ſiue negatiuus. Ponamus porro $c=a$, quo prodeat iſta aequatio $dy+x^py^2dx+\frac{(p+1)^2dx}{4x^{p+2}}=\frac{(amm+bkkx^n)dx}{(a+bx^n)x^{p+2}}$, quae integrabilis erit ſi $\frac{k+m}{n}$ fuerit numerus integer.

§. 17. Ponamus in aequatione generali vltimo §. 15. inuenta $b=0$, quo meri termini ſimplices prodeant, habebitur iſta aequatio $dy+x^py^2dx+\frac{(p+1)^2dx}{4x^{p+2}}-\frac{(a-c)^2dx}{4aax^{p+2}}+\frac{gdx}{ax^{p+2}}+\frac{(af-naf+2ah-cf)x^ndx}{2a^2x^{p+2}}-\frac{ffx^{2n}dx}{4aax^{p+2}}=0$, quae poſito $g=-cm-am(m-1)$ et $h=-fk$ integrabilis exiſtit, ſi vel $\frac{(k+m-1)a+c}{an}$ fuerit numerus integer affirmatiuus, vel ſi ſit $f=0$; qui quidem caſus per ſe conſtat. Ponamus $a^2(p+1)^2-(a-c)^2+4ag=\alpha a^2$, atque $af-naf-2afk-cf=\beta af$. erit $g=\frac{\alpha a^2+(a-c)^2-a^2(p+1)^2}{4a}$ et $c=a-na-2ak-\beta a)$; vnde erit $g=\frac{\alpha a+a(n+2k+\beta)^2-a(p+1)^2}{4}$;

 qui-

quibus substitutis erit $dy + x^p y^2 dx + \frac{\alpha dx}{4x^{p+2}} + \frac{\beta f x^n dx}{2ax^{p+2}}$ $-\frac{ffx^{2n}dx}{4aax^{p+2}} = o$, estque ob valorem ipsius g iam ante definitum $n + 2k + \beta = 2m + \sqrt{((p+1)^2 - \alpha)}$, at aequatio integrationem admittet, si fuerit $\frac{m-n-k-\beta}{n}$ seu $\frac{-n-\beta\pm\sqrt{((p+1)^2-\alpha)}}{2n}$ numerus integer affirmatiuus. Sit $\alpha = o$ et $\beta = o$ habebitur ista aequatio $dy + x^p y^2 dx = \frac{ffx^{2n-p-2}dx}{4aa}$ quae toties integrationem admittit, quoties fuerit $\frac{-n\pm(p+1)}{2n}$ numerus integer affirmatiuus. Sit ergo $i = \frac{-n\pm(p+1)}{2n}$ erit $n = \frac{\pm(p+1)}{2i+1}$; atque aequatio $dy + x^p y^2 dx = \frac{ffx^{\frac{\pm 2(p+1)}{2i+1}-p-2}dx}{4aa}$ semper erit integrabilis. Haec autem aequatio ipsa est Riccatiana; nam posito $p = 0$ prodit $dy + y^2 dx = \frac{ffx^{\frac{\pm 2-4i-2}{2i+1}}dx}{4aa}$.

§. 18. Ponamus tantum $\alpha = o$, habebimus hanc aequationem $dy + x^p y^2 dx = \frac{ffx^{2n-p-2}dx}{4aa} - \frac{\beta f x^{n-p-2}dx}{2a}$, quae integrabilis erit, si fuerit $\frac{\pm(p+1)-n-\beta}{2n}$ numerus integer affirmatiuus puta i. Facto autem $\pm(p+1) - n - \beta = 2ni$ erit $\beta = \pm(p+1) - n(2i+1)$. Quamobrem haec aequatio $dy + x^p y^2 dx = \frac{ffx^{2n-p-2}dx}{4aa} + \frac{(nf(2i+1)\pm f(p+1))x^{n-p-2}dx}{2a}$ semper est integrabilis. Hinc sequuntur sequentes aequationes simpliciores

$dy+$

$$dy + y^2\, dx = \frac{ffxxdx}{4aa} + \frac{f(4i+2\pm 1)dx}{2a}$$
$$dy + y^2\, dx = \frac{ffdx}{4ax} + \frac{f(2i+1\pm 1)dx}{2ax}$$
$$dy + \frac{y^2dx}{x} = \frac{ffxdx}{4aa} + \frac{f(2i+1)dx}{2a}$$

quae omnes ſunt integrabiles. Quare haec aequatio $dy + Ay^2du = Buudu + Cdu$ integrabilis exiſtit, quando $\frac{C\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ fuerit numerus integer affirmatiuus impar, namque $4i + 2 \pm 1$ omnes numeros impares complectitur in ſe.

§. 19. Ponamus in ſuperiore aequatione tantum $\varepsilon = 0$; et prodibit iſta aequatio $dy + x^py^2dx = \frac{ffx^{2n}dx}{4aax^{p+2}} - \frac{\alpha dx}{4x^{p+2}}$, quae integrabilis erit, quoties fuerit $\frac{-n \pm \sqrt{((p+1)^2 - \alpha)}}{2n}$ numerus integer affirmatiuus, qui ſit i, erit ergo $n(2i+1) = \sqrt{((p+1)^2 - \alpha)}$ atque $\alpha = (p+1)^2 - n^2(2i+1)^2$. Quamobrem haec aequatio $dy + x^py^2dx = \frac{ffx^{2n-p-2}dx}{4aa} + \frac{(n^2(2i+1)^2 - (p+1)^2)dx}{4x^{p+2}}$ ſemper integrabilis erit. Si ſit $p = 0$, erit iſta aequatio $dy + y^2dx = \frac{ff}{4aa}x^{2n-2}dx + \frac{(n^2(2i+1)^2 - 1)dx}{4xx}$ pariter ſemper integrabilis. Hinc ponendo $\frac{ff}{4aa} = A$, quia f et a ſunt quantitates arbitrariae, integrabiles erunt ſequentes aequationes

$$dy + y^2dx = A\,dx + \frac{i(i+1)dx}{xx}$$
$$dy + y^2dx = Ax^2dx + \frac{(4i+3)(4i+1)dx}{4xx}$$
$$dy + y^2dx = Ax^4dx + \frac{(3i+2)(3i+1)dx}{xx}$$

atque huius generis innumerabiles aliae.

§. 20. Fiat in aequatione $dy + x^p y^2 dx = \frac{dx(ffx^{2n} - 2a\beta f x^n - \alpha a^2)}{4a^2 x^{p+2}}$ §. 17. inuenta $\alpha = -\beta^2$, quo fit $dy + x^p y^2 dx = \frac{(fx^n - \beta a)^2 dx}{4a^2 x^{p+2}}$ quae aequatio toties integrabilis erit, quoties fuerit $\frac{-n-\beta \pm \sqrt{((p+1)^2+\beta^2}}{2n}$ numerus integer affirmatiuus puta $= i$. Erit ergo $(2i+1)n+\beta = \sqrt{((p+1)^2+\beta^2)}$ atque $\beta = \frac{(p+1)^2 - n^2(2i+1)^2}{2n(2i+1)}$. quoties ergo β huiusmodi habuerit valorem, aequatio $dy + x^p y^2 dx = \frac{(fx^n - \beta a)^2 dx}{4a^2 x^{p+2}}$ integrationem admittet. Posito igitur $p = 0$ ista aequatio $dy + y^2 dx = \frac{dx}{xx}\left(\frac{n^2(2i+1)^2 - 1}{4n(2i+1)} + \frac{f}{2a}x^n\right)^2$ integrabilis erit. At si $p = -1$ prodibit ista aequatio $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{dx}{x}\left(\frac{n(2i+1)}{4} + \frac{f}{2a}x^n\right)^2$ integrabilis. Sit autem $x^{p+1} = t$, erit $x^p dx = \frac{dt}{p+1}$; $x^n = t^{\frac{n}{p+1}}$; et $\frac{dx}{x^{p+2}} = \frac{dt}{(p+1)tt}$, habebitur ergo ista aequatio $(p+1)dy + y^2 dt = \frac{(ft^{\frac{n}{p+1}} - \beta a)^2 dt}{4a^2 tt}$ quae integrabilis erit, si fuerit $\beta = \frac{(p+1)^2 - n^2(2i+1)^2}{2n(2i+1)}$.

§. 21. Multo quidem plura consectaria ex nostra aequatione generali non parum elegantia deduci possent; sed ampliorem euolutionem aliis, quos haec iuuant, relinquo. Interim notari conuenit praeter hanc methodum, quam sum secutus, alias dari innumeras, quarum ope aequationes differentiales, quae certis duntaxat casibus integrabiles euadunt, inueniri possunt, sed operatio nimis fit laboriosa. Ita si consideretur haec aequatio $(a+bx^n+cx^{2n})x^2 ddv + (f+gx^n+hx^{2n})xdxdv + (p+qx^n+rx^{2n})vdx^2 = 0$, po-

ponaturque $v = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} +$ etc. hos coefficientes quidem definire licebit, ſed binos contiguos euaneſcere oportet, quo ſequentes omnes euaneſcant. Scilicet quo fiat $v = Ax^m$ neceſſe eſt vt ſit $p + fm + am(m-1) = 0$; ſimulque $q + gm + bm(m-1) = 0$ et $r + hm + cm(m-1) = 0$. Quo autem fiat $v = Ax^m + Bx^{m+n}$, requiritur vt ſit primo $B = -\frac{A(q + gm + bm(m-1))}{nf + na(2m+n-1)}$, ſecundo $p + fm + am(m-1) = 0$; tertio $r + h(m+n) + c(m+n)(m+n-1) = 0$ et quarto $n^2(h + c(2m+n-1))(f + a(2m+n-1)) + (q + gm + bm(m-1))(q + g(m+n) + b(m+n)(m+n-1)) = 0$. Ex quo ſatis liquet, vlterius progrediendo laborem in immenſum excreſcere.

§. 22. Vnicum tamen coronidis loco exemplum ſimplicius afferam, quo feci $b = 0$, $c = 0$, $f = 0$ et $g = 0$, poſitoque $v = e^{\int z dx}$ poſui $z = y - \frac{h}{2a} x^{2n-1}$, quo facto ſequens prouenit aequatio $dy + y^2 dx = \frac{hh}{4aa} x^{4n-2} dx + \frac{x^{2n-2} dx}{2a}(h(2n-1) - 2r) - \frac{q}{a} x^{n-2} dx + \frac{m(m-1) dx}{xx}$; quae per duos caſus expoſitos integrabilis eſt, primo ſi fuerit $q = 0$ et $r = -mh$, ſecundo ſi fuerit $q = n \sqrt{ah}(1-n-2m)$ et $r = -h(m+n)$, preter hos vero caſus infiniti dantur alii, quibus iſta aequatio pariter integrabilis exiſtit, ſed ad eos determinandos reſolutiones aequationum plurium dimenſionum requiruntur. Poſito $r = \frac{h(2n-1)}{2}$ per ſecundum caſum iſta aequatio $dy + y^2 dx = \frac{hh}{4aa} x^{4n-2} dx \pm \frac{n}{a} x^{n-2} dx \sqrt{3ahn} + \frac{(16nn-1) dx}{4xx}$ integrabilis erit.

SOLVTIONES TRIVM PROBLEMATVM ASTRONOMICORVM.

AVTHORE
Georg. Wolffg. Krafft.

Problema Primum

Tabula V. VI. et VII.

Sit in plano horizontali à Sole illuminato erectus stylus verticalis, datae longitudinis: quaeritur quamnam curuam descriptura sit, durante toto aliquo die, extremitas vmbrae huius styli, à Sole in planum proiectae.

Solutio.

Sit in Fig. I. Meridiani planum DAFB; proiectiones in hoc plano sint, Aequatoris ED, Paralleli, quem Sol aliquo die describit, FG, Horizontis AB; et in centro Terrae erectus stylus perpendicularis ad horizontem CH. His positis euidens est, Solem durante toto die describere circa hunc stylum Conum vmbrosum HKI.

Primo quidem angulus ad verticem KHI huius Coni definitur à radio Solis emisso è meridie FHK, et emisso è media nocte GHI. Est igitur hic angulus ad verticem Coni $KHI = 180° - FHI = 180° - FGH - GFH = 180° - 2GFH$, quia HF et HG censendae sunt aequales, ob longitudinem styli CH infinite paruam respectu ipsarum FH et GH, et punctum H fere coincidens cum C. Sunt autem,

autem, ob allegatam rationem, rectae FH et FC censendae coincidentes; quare ob parallelas FG et ED erit $2GFH = 2FCE =$ duplo Declinationis Borealis EF; et hinc angulus $KHI = 180° - 2FCE = 2(90° - \text{Decl.})$, et $\frac{1}{2}KHI = 90° - \text{Decl.}$ consequenter angulus ad verticem Coni vmbrosi, quem Sol aliquo die describit circa apicem styli erecti, est duplum complementum Declinationis, quam Sol eo die tenet. Si Declinatio Solis fuerit Australis, *hoc* est, prioris negatiua: erit idem angulus ad verticem $= 2(90° + \text{Decl.})$ quae expressio dat angulum gibbum GHF, Fig. II. vel similem gibbum KHI, id quod indicat, Conum vmbrosum hoc casu descriptum praecedentis tantum esse oppositum.

Secundo, Conus hic secatur ab Horizonte ita, vt sectionis huius proiectio sit MN. Angulus vero, quem planum secans, hoc est, Horizon, efficit cum latere Coni, versus verticem Coni sumtus, id est, in Declinatione Boreali angulus AMH, in Declinatione autem Australi angulus BMH, aequalis est, in illo casu, semicirculo, minus altitudine meridiana Solis pro illo die; in hoc vero casu, soli altitudini meridianae Solis; ob angulos FMB et FCB inclinatione infinite paruâ differentes. Cum igitur angulus HMC aequalis censendus sit, altitudini meridianae Solis: erit

Tertio, in triangulo HMC, et posito sinu toto $= 1$. haec analogia: sinus alt. meridianae Solis est ad longitudinem styli perpendiculariter erecti CH, vti sinus totus ad longitudinem ipsius HM; itaque initium sectionis fit semper sic, vt habeatur $HM = \frac{\text{long. styli}}{\text{sin. alt. merid.}}$ denique etiam

Quarto, euidens eſt, verticem huius Coni ſpectare Septentrionem in Declinatione Solis Boreali; nam in Fig. I. ob HC infinite paruam reſpectu ipſius CE, cadet quilibet parallelus FG Declinationis Borealis ſupra punctum H, adeoque vertex et latera Coni habebunt ſitum quem Figura repraeſentat. In Declinatione Auſtrali autem vertex Coni ſpectabit meridiem, vti in Fig. II. Ex his igitur conditionibus ſectio huius Coni vmbroſi pro quolibet die poterit determinari, et conſequenter curua quaeſita inueniri per Aequationem Algebraicam. Sit igitur pro Declinatione Solis Boreali in Fig. III. Conus vmbroſus HKLI, qui ſecetur ab Horizonte AMB, efficiatque Curuam MQL, cuius ſit Abſciſſa $MP = x$, ſemiordinata $PQ = y$, intelligaturque per punctum P tranſire planum circulare RQS, baſi KLI quippe parallelum. Angulus KHI eſt $2(90° -$ Decl.) dependet igitur à ſola Declinatione Solis, quae cum 24 gradus nunquam excedat: euidens eſt, angulum ad verticem Coni KHI ſemper eſſe obtuſum. Itaque ſi ſtatuatur pro die aliquo Declinationis Solis ſinus $= m$, coſinus $= n$, altitudinis meridianae Solis ſinus $= p$, coſinus $= q$, poſito ſinu toto $= 1$, altitudo ſtyli erecti $= a$, erit ex his angulus RPA = AMR − MRP = 180° − AMH − MRP; ſed in Declinatione Boreali eſt per praemiſſum II. AMH = 180° − alt. merid. Solis, et, demiſſa HN perpendiculari ad RS, MRP = 90° − RHN = 90° − $\frac{1}{2}$KHI = 90° − 90° + Declinat. per praemiſſum I. = Declinationi; quibus ſubſtitutis fit RPA = alt. merid. Solis − Decl.; quare cum illius ſinus et coſinus ſint p et q, huius vero m et n, erit ſinus differentiae, hoc eſt ſin. RPA $= pn - qm$. Exinde fluit analogia in Triangulo MRP ſequens:

ſin.

ſin. MRP (m): MP (x) $=$ ſin. RPA ($pn-qm$): MR ($\frac{pnx-qmx}{m}$). Eſt autem per praemiſſum III. MH $=\frac{a}{p}$ hinc exiſtit RH $=$ MH $+$ MR $=\frac{a}{p}+\frac{pnx-qmx}{m}$; triangulum ergo RHN praebet hanc analogiam, ſinus totus (1): RH ($\frac{a}{p}+\frac{pnx-qmx}{m}$) $=$ ſin. RHN (n): RN ($\frac{an}{p}+\frac{pn^2x-qmnx}{m}$). In triangulo RMP eſt ſin. MRP (m): MP (x) $=$ ſin. AMH (p): RP ($\frac{px}{m}$), igitur PS $=$ 2RN $-$ RP $=\frac{2an}{p}+\frac{2pn^2x-2qmnx-px}{m}$; et denique ob $PQ^2 = RP \times PS$ ex natura Circuli, habebitur aequatio generalis pro ſectione Coni MQL, quae, membris in ordinem redactis, fit ſequens: $y^2+\frac{(p^2+2pn.(qm-pn))x^2}{m^2}-\frac{2anx}{m}=0$. Statuatur nunc denuo Eleuationis Aequatoris in loco aliquo Terrae ſinus k coſinus l, atque cum in Declinatione Boreali Solis, et dato aliquo loco in Hemiſphaerio Boreali, ſit altitudo meridiana Solis $=$ Eleu. Aequatoris $+$ Declinat. Solis, erit ex hac conſideratione per regulas Trigonometricas $p=kn+ml$, $q=nl-km$, ex quibus fit $qm-pn=-k(m^2+n^2)=-k$, quo ſubſtituto ſuperior aequatio abit in hanc:

$$y^2+\frac{p^2-2pnk}{m^2}x^2-\frac{2an}{m}x=0$$

quae rurſus, ſubrogato primum valore ipſius $p=kn+ml$, et deinde in ſecundo aequationis membro poſitis $n^2=1-m^2$, et $l^2=1-k^2$, abit in hanc:

$$y^2+\frac{m^2-k^2}{m^2}x^2-\frac{2an}{m}x=0$$

Valet autem haec aequatio pro eo caſu, in quo Declinatio Solis eſt Borealis, et locus datus eſt in Hemiſphaerio Boreali. Si ergo deſideretur aequatio pro Declinatione Solis Auſtrali, euidens eſt, Coſinum Declinationis n manere inuariatum, ſed Sinum Declinationis fieri negatiuum, quare in hoc caſu pro $+ m$ ſcribendum erit $- m$; quoniam vero etiam x hoc caſu fit negatiua : euidens eſt, aequationem ipſam manere inuariatam in terminis et ſignis. Pro locis Terrae autem in Hemiſphaerio Auſtrali ſitis, fiet Eleuatio Aequatoris angulus obtuſus, atque ibi erit k ſinus anguli illius obtuſi.

Corollarium I.

Habeat Sol nullam Declinationem, ſed verſetur in Aequatore, eritque $m = o$, $n = 1$, quare mutabitur aequatio generalis in hanc $y^2 - \frac{k^2}{o^2}x^2 - \frac{2a}{o}x + o$, vbi reſpectu termini medii reliqui duo extremi euaneſcunt; quare habebitur $k^2x^2 = o$, vel $x = o$, quod indicat, lineam eo die ab vmbra ſtyli deſcriptam eſſe Rectam. Quoniam enim generaliter angulus coni vmbroſi ad verticem KHI eſt 2 (90-Decl.) erit poſitâ Declinatione nullâ idem angulus = 180, adeoque hoc caſu nullus generatur Conus, ſed eius loco prodit tantum planum circulare Aequatoris, ſiue Conus, cuius angulus ad verticem eſt 180 graduum, quare eius ſectio ab Horizonte facta erit Linea recta.

Corollarium II.

Vt aequatio generalis abeat in Ellipſin, neceſſe eſt, vt coefficiens ipſius x^2, qui eſt $\frac{m^2 - k^2}{m^2}$ ſit affirmatiuus, hoc eſt, vt ſit $m > k$, vel Declinatio Solis maior quam Eleuatio Aequatoris; quod accidere poteſt in omnibus locis, quorum Eleuatio Aequatoris comprehenditur inter gradus 0 et $23\frac{1}{2}$, hoc eſt, in vtraque Zonâ frigidâ.

Erit

Erit vero Ellipſeos ſic generatae Axis transuerſus $= \frac{2amn}{m^2-k^2}$ et Parameter $= \frac{2an}{m}$. Quae Ellipſis vt mutetur in Circulum, opus eſt, vt Ellipſeos Axis transuerſus et Parameter ſint aequales, vnde fit $\frac{2amn}{m^2-k^2} = \frac{2an}{m}$, vel $m^2 = m^2 - k^2$, vel $k=0$, hoc eſt, Eleuatio Aequatoris nulla, quod accidit ſub vtroque Polo, vbi deſcribitur Circulus, cuius radius $= \frac{an}{m}$.

Corollarium III.

Vt aequatio generalis mutetur in Hyperbolam, debet eſſe $\frac{m^2-k^2}{m^2}$ quantitas negatiua, vel $m < k$, hoc eſt, Declinatio minor quam Eleuatio Aequatoris; quod accidere poteſt in omnibus locis, quorum Eleuatio Aequatoris comprehenditur inter $23\frac{1}{2}^{\circ}$ et 90°; hoc eſt, in vtrâque Zona Temperatâ et Torridâ. Erit vero Hyperbolae ſic generatae Axis transuerſus $= \frac{2amn}{k^2-m^2}$, et Parameter $= \frac{2an}{m}$.

Corollarium IV.

Vt eadem aequatio generalis exhibeat Parabolam, requiritur vt cöefficiens $\frac{m^2-k^2}{m^2}$ euadat nullus, quo efficitur $m=k$, vel Declinatio Solis = Eleuationi Aequatoris; quod accidere poteſt in iis Terrae locis, quorum Eleuatio Aequatoris comprehenditur inter gradus 0 et $23\frac{1}{2}$, hoc eſt in Zona Frigida vtraque. Prodit autem in hoc caſu Parabola, cuius Parameter $= \frac{2an}{m}$.

Corollarium V.

Soluitur hinc haud difficulter Problema *Iacobi Bernoullii*, in quo alicubi locorum obſeruatur, Sole obtinente altitudinem meridianam 45. grad. extremitatem vmbrae, a bacillo ad planum horizontale verticaliter erecto, proiectae, deſcribere illo die Hyperbolam, cuius axis transuerſus aequatur longitudini bacilli; quaeritur, quo Terrae loco, et quo anni die obſeruatio ſit facta? Erit enim per Coroll. III. ob deſcriptam a bacilli vmbra Hyperbolam, cuius axis transuerſus aequalis altitudini bacilli, $\frac{2amn}{k^2-m^2}=a$, aut $2mn=k^2-m^2$; ſed ob Solis altitudinem meridianam 45°, erit $p=kn+ml=\frac{1}{\sqrt{2}}$, vnde deducitur $k=\frac{n\pm m}{\sqrt{2}}$, quo valore ſubſtituto in aequatione praecedente, fit $4mn = n^2 \pm 2mn - m^2$, vnde deducuntur duo valores ipſius m; eſt nempe primo $m^2=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$, aut etiam ſecundo $m^2=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{10}}$; adeoque m quatuor habet valores ſequentes $\frac{491}{532}$, $\frac{203}{532}$, $\frac{785}{795}$, et $\frac{127}{795}$, pro ſinu toto 1. vnde fiunt Declinationes ipſae ſequentes: I. $67^\circ 21'$. II. $22^\circ 26'$. III. $80^\circ 54'$. IV. $9^\circ 11'$. quarum ſolae ſecunda et quarta in Solem cadunt, reliquae vero excluduntur. Si itaque requiſita Problematis locum inuenire debeant, neceſſe eſt, vt Declinatio Solis ſit vel $22^\circ 16'$, vel $9^\circ 11'$; quarum vtraque cum poſſit eſſe vel Borealis vel Auſtralis, et in Declinatione Solis Boreali ſit Eleuatio aequatoris = alt. merid. − Decl.; in Declinatione Solis autem Auſtrali ſit Eleuatio aequatoris = alt. Merid. + Decl. dabuntur in Hemiſphaerio Boreali caſus ſequentes:

Decl.

Decl. Solis.	Eleu. Aequ.
22° 26′ Bor. - - - -	22° 34′.
9° 11′ Bor. - - - -	35° 49′.
22° 26′ Auſtr. - - -	67° 26′.
9° 11′ Auſtr. - - -	54° 11′.

quae omnia cum in Hemiſphaerio quoque Auſtrali dantur: patet, dari in vniuerſum ſolutiones octo Problematis propoſiti.

Corollarium VI.

Deriuatur quoque ex huius Problematis reſolutione modus ſequens inueniendi Declinationem Solis, et Eleuationem aequatoris. In plano horizontali ducta ſit linea meridiana, BAp Fig. VI. atque in huius extremo erectus verticaliter ſtylus BC altitudinis a. Obſeruetur primo extremitas vmbrae meridianae, quae ſit A; deinde tempore aliquo elapſo capiatur extremum quodcunque huius vmbrae M, e quo demittatur perpendicularis in Meridianam MP; ſimili modo notetur etiam ſubſequens aliquod extremum vmbrae m, et noua perpendicularis mp excitetur; quibus factis, dico fore tangentem Declin. Solis $= \frac{2a.\,AP \times Ap \times Pp}{PM^2.Ap^2 - pm^2.AP^2}$. Cum enim puncta M et m ſint in ſectione Conica AMm, cuius datur aequatio, ſubſtituantur tantum in hac, primo AP et PM, deinde Ap et pm, loco x et y, obtinebiturque duplex valor ipſius k; exinde noua aequatione formata, reperietur indicatum. Declinatione autem ſic inuenta, et altitudine meridiana data, ex longitudine ſtyli BC et vmbrae meridianae BA, Eleuatio Aequatoris non latebit.

Pro-

Problema Secundum.

Sint in Fig. IV. Meridianus GBH *Horizon.* GH, *Aequator* KI, *Polus* A, *et Zenith* B. *Atque ſint duae ſtellae* E *et* F, *quarum Declinationes, et Aſcenſiones Rectae ſint cognitae; obſeruetur vtraque ſimul in eadem altitudine quacunque; atque oportet ex his inuenire Eleuationem Aequatoris loci, in quo obſeruatio haec facta eſt.*

Solutio.

Reſoluitur hoc Problema per ſimplicem Trigonometriam ſphaericam ſequenti modo. Intelligatur per puncta E et F ductus arcus circuli maximi in Sphaera; atque in Triangulo EAF dati ſunt arcus AE, AF, qui dependent a Declinationibus ſtellarum LE et MF, vna cum angulo EAF, qui eſt differentia aſcenſionum rectarum vtriusque ſtellae; ex his ergo inuenietur arcus EF, nec non angulus AEF. In Triangulo BEF aequicruro iam datus eſt arcus EF, vna cum BE aut BF, quod eſt complementum altitudinis inuentae; itaque ex his inueniri poterit angulus BEF. Subtrahatur hic angulus BEF ab altero iam reperto angulo AEF, atque remanebit angulus AEB; quo obtento, in Triangulo BEA, ex datis angulo AEB, complemento altitudinis BE, et Declinatione AE, reperietur arcus AB, qui aequalis eſt Eleuationi Aequatoris. Obſeruationem vero ad hoc Problema requiſitam commodiſſime ope fili horizontaliter extenſi abſolui poſſe puto.

Pro-

Problema Tertium.

Repraesentet in Fig. V. CZPF *Meridianum*, CGD *Horizontem*, EGF *Aequatorem*, Z *Zenith*, *et* P *Polum loci, cuius Eleuatio Aequatoris quaeritur; Sint* A *et* b *duae stellae, quarum dentur Declinationes* HA, et Ib, *et distantia* Ab. *Obseruetur prioris stellae* A *altitudo quaecunque* KA, *atque eo momento, quo altitudo haec capitur, altera stella sit in* b; *post interiectum tempus quodcunque datum promoueantur stellae motu primo,* A *quidem in* a, b *autem in* B; *atque in hoc situ capiatur iam quoque altitudo alterius stellae* B, *quae sit* LB. *Ex his datis debet inueniri eleuatio aequatoris* PZ.

Solutio.

Concipiatur ductus arcus circuli maximi BA per duo loca, in quibus captae sunt altitudines, transiens; atque ex datis *b*P, complemento Declinationis stellae *b*, AP complemento Declinationis stellae A, et A*b* distantia harum stellarum, inuenietur in Triangulo *b*AP angulus ad Polum *b*PA, cui adiiciatur angulus BP*b*, ex tempore inter captas altitudines obseruato cognitus, vt habeatur integer angulus APB.

In Triangulo ABP, ex modo inuento angulo APB, et ex complementis Declinationum stellarum AP, BP, inuenientur arcus AB, nec non angulus BAP.

In Triangulo ZBA, ex datis complementis altitudinum ZB, ZA, et arcu AB, indagabitur angulus BAZ, qui ab inuento BAP ablatus, relinquet angulum ZAP, ergo denique in Triangulo ZAP, ex cognitis angulo ZAP, complemento Declinationis AP. et complemento altitudinis ZA, inuenietur latus ZP quaesitum.

Commodus hic locus est exponendi, qua ratione confici possit Horologium solare aequinoctiale, quod sine praeuia descriptione lineae meridianae horas monstret; quae quidem horologia solaria eo magis horizontalibus, simili artificio constructis, praeferenda sunt, quo facilius ea delineantur, et quo maiori exinde gaudent exactitudine. In plano igitur iuxta altitudinem Aequatoris eleuato, et cum Aequatoris plano coincidente, erigatur perpendiculariter stylus arbitrariae longitudinis; è puncto, cui infixus est hic stylus, describantur plurimi circuli, tot nempe, quot amplitudo plani sine confusione patitur, quorum cuilibet adscribantur illi dies anni, in quibus vmbrae, ab hoc stylo proiectae, extremitas illum circulum describit; quorum circulorum radii facili opera per calculum Trigonometricum eruuntur; quibus factis circulorum horum concentricorum intimus et extremus diuidantur in horas 24, et earum partes, capto initio a recta per medium plani transeunte, cui hora 12 meridiana adscribenda erit; horae eaedem lineis rectis coniungantur; atque paratum erit hoc horologium solare. Vsus autem eius in his consistit, vt primò sciatur dies et mensis anni; secundo horologium tamdiu hinc et inde conuertatur, donec extremitas vmbrae stylaris illum circulum attingat, qui diei proposito conuenit; quo obtento eadem vmbra, iuxta longitudinem suam protensa, horam quoque illius diei ostendet.

DE

DE MACHINARVM TAM SIMPLICIVM QVAM COMPOSITARVM VSV MAXIME LVCROSO.

AVCTORE

L. Eulero.

§. 1.

De Machinis simplicibus, cuiusmodi sunt Vectis, Axis in peritrochio, Trochlea, Cochlea, Cuneus et planum inclinatum, atque machinis ex his compositis tantum iam antiquissimis temporibus est disputatum, vt haec doctrina iam penitus exhausta esse videatur. Sed si *rem* curatius inspiciamus, omnes fere, qui de machinis scripserunt, in iis examinandis ita sunt versati, vt tantum aequilibrium, quod in quaque machina potentia cum onere tenet, definirent; ipsum vero motum, quo onus a potentia eleuatur prorsus neglexerunt. Quod cum in machinarum doctrina praecipuum sit, quippe quae non tam ad aequilibrium conseruandum, quam ad onera actu mouenda *adhiberi* solent, non parum is praestitisse censendus erit, qui leges, quibus machinarum motus determinatur exposuerit atque stabiliuerit.

§. 2. Duobus scilicet iisque diuersis modis tractationem de machinis institui conuenit, quorum alter ad staticam pertinet, atque statum aequilibrii in omnibus machinis inuestigat, alter vero ad mechanicam est referendus, quo ipſe motus machinarum, cum aequilibrium ceſſat, indagatur. Harum tractationum prior igitur iam ita eſt occupata atque exculta, vt nihil amplius in ea deſiderari queat; poſterior vero contra ita adhuc eſt derelicta atque neglecta, vt propemodum nihil eo ſpectans conſtet, nemoque in eo laborauerit. Solum fere, quod ex hac parte notum eſt, in hoc conſiſtit, vt ad onus mouendum maior potentia applicari debeat, quam quae ad aequilibrium ſufficit; et hoc quidem tam obuium eſt, vt nullum vnquam qui tantum de machinis cogitarit, fugere potuerit. Praeterea etiam iſtud principium paſſim circumfertur, quod quantum per diminutionem potentiae lucremur, tantundem ratione temporis perdamus: quod principium vtique ad tractationem mechanicam pertineret; indeque demonſtrandum fuiſſet: ſed hoc ipſum principium nullo nititur fundamento, nec niſi vehementer reſtringatur, admitti poteſt, prout ex ſequentibus fuſius apparebit.

§. 3. Mirandum quidem non eſt, praecipuam atque maxime vtilem doctrinae de machinis partem tamdiu incultam iacuiſſe. Cum enim non admodum pridem mechanica excoli coeperit, ante etiam principia latuerunt, quibus aditus ad hanc tractationem patuiſſent. Nunc vero, etiamſi in mechanica plurima capita ſint pertractata, tamen ea pars, quae motum corporum finitorum complectitur, tam parum etiamnum inueſtigata, vt nequidem de principiis adhuc ſatis conſtet. Pertinet autem vtique haec de machinis tractatio ad iſtam mechanicae partem, cum machinae ſint corpora finitae magnitudinis, quae inſtar punctorum conſiderare non licet, atque propterea motus ex

ipſarum

ipsarum structura et ratione potentiae et oneris debeat determinari. Cum igitur non ita pridem vera et genuina huius mechanicae partis principia detexissem et demonstrassem, licebit eorum beneficio desideratam illam machinarum tractationem aggredi, atque motum cuiusuis machinae determinare.

§. 4. In omni machina multiplicatio potentiae praecipue intenditur, quo minori potentia ope machinae tantum praestari queat, quantum maiori potentia nuda. Ante omnia igitur in quauis machina consideranda venit ratio multiplicationis potentiae; qua indicatur quoties potentia machinae applicata multiplicetur. Pendet autem haec multiplicationis ratio a structura machinae, atque secundum praecepta statica pro quauis machina facile definitur; vnde simul constat, si ratio oneris ad potentiam aequalis fuerit rationi multiplicationis, tum aequilibrium adesse debere. Quo ergo onus a potentia superetur, et actu moueatur, necesse est, vt ratio multiplicationis maior sit, quam ratio oneris ad potentiam, seu, vt potentia per machinam aucta maior euadat quam onus eleuandum seu promouendum. Cuiusmodi igitur hoc casu in quaque machina oriatur motus, et quanta velocitate onus promoueatur, est id, in quod hoc loco inquirere constitui, et in quo primarius machinarum vsus consistit, quippe quae non ad aequilibrium sed ad motum producendum sunt accommodatae.

§. 5. Post machinarum structuram diligenter perpendenda est tam oneris quam potentiae indoles. Potentia autem omnino est corpus vi praeditum machinam mouendi, cuiusmodi sunt pondera, elateres, flumina, venti, atque vires animales hominum bestiarumue; quae diuersitas, prout in statica tractatione machinarum parui seu potius nullius est momenti, ita in tractatione mechanica inprimis est attendenda. In statica enim sufficit nosse quantitatem vis siue trahendi, siue pellendi, qua quaeque potentia gaudet; haecque quantitas congrue per pondera exponitur; namque cuiuscunque etiam indolis fuerit potentia machinae applicata, semper pondus assignari potest, quod aequali vi machinam afficeret. Ita non solum vires elaterum animaliumque cum ponderibus comparari possunt, sed etiam illae vires, quae ab allisione fluminum atque ventorum cum ponderibus sunt homogeneae, atque per pondera mensurantur. Dummodo igitur potentiae applicatae, cuiuscunque etiam fuerit naturae, pondus aequiualens constet, id ad staticam contemplationem prorsus sufficit.

§. 6. Ad mechanicam autem machinarum pertractionem praeter quantitatem virium sollicitantium, quae quidem hoc etiam loco aptissime per pondera indicantur, ipsa potentiae indoles diligenter est consideranda. In motus productione enim plurimum refert, an potentia machinam mouens sit pondus, an elater, an flumen ventusue, an vis animalis, etiamsi omnes inter se quantitate conueniant, atque ratione aequilibrii nihil discrepent. Hic enim etiam motus ipsius potentiae, dum machinam mouet, in considerationem venit, qui sine dispendio effectus, quem potentia in machinam mouendam exerit, generari non potest; iste autem potentiae motus, seu potius pars effectus, qui in potentia mouenda consumitur, ex vi inertiae po-

tentiae

tentiae eſt diiudicanda. In quaque potentia igitur duas res contemplari oportet, vim ſcilicet, quae cum pondere aequiparatur, atque inertiam, quae ex quantitate materiae ipſius potentiae aeſtimari debet, quatenus ea ſimul mouetur. Hinc igitur ingens naſcitur diſcrimen inter potentias mouendas ſupra memoratas; ſi enim ponderibus machinae mouentur, inertia maſſis ponderum, hoc eſt, ipſis ponderibus eſt proportionalis. Elateres autem, etſi ingentibus ponderibus aequiualent, tamen plerumque tam paruam habent inertiam, vt cum exiguis maſſis ſint comparandae. Similis fere eſt ratio virium animalium, quibus longe minor quantitas materiae ad motum cietur, quam ſi earum loco aequiualentia pondera ſubſtituantur. In viribus autem fluuiorum et ventorum inertia plane eſt nulla, cum in aqua vel aere, dum machina mouetur, nullus nouus motus generetur.

§. 7. Pari ratione circa onera, quae machinarum ope moueri debent, duplex inquiſitio eſt inſtituenda. Primo enim videndum eſt, an onus vi quapiam inſita motui machinae renitatur et quanta vi, quae vis iterum commodiſſime cum pondere comparari poteſt. Ita ſi pondus ope machinae debeat eleuari, id vi grauitatis renititur motui machinae; ſin autem ſuper plano horizontali ſit promouendum, nullus adeſt reniſus. Perinde res ſe habet, ſi elaſtrum machinae ope ſit tendendum, quippe quod ſua vi elaſtica machinae reluctatur. Secundo loco maſſa oneris mouendi ſeu inertia eſt attendenda, qua fit, vt pars potentiae mouentis ad motum in onere generandum inſumatur, haecque inertiae vis, ſi machinae tantum ſtatice tractentur, prorſus non in computum ingreditur, ſed re-

luctatio

luctatio solum spectatur, cum qua potentia machinae applicata in aequilibrio consistit. Nisi ergo onus obluctetur, tum nequidem statica tractatio locum habet, quia sponte adest aequilibrium, nullaque opus est potentia, sed in mechanica machinarum consideratione plurimum eiusmodi onera occurrunt, quae non reluctantur, sed ad quae tantum mouenda omnis vis impenditur; sic in omnis generis molendinis nulla adest reluctantia, nilque adest, quod nisu contrario machinam sollicitaret, sed omnis vis impenditur ad inertiam solam superandam motumque generandum. Ex quo satis perspicitur in mechanica tractatione istam distinctionem maximi esse momenti, neque ea neglecta certi quicquam de effectu machinarum statui posse.

§. 8. Deinceps etiam de ipsa machina non sufficit eius structuram tantum nosse, a qua multiplicatio potentiae sollicitantis pendet, et quae sola in statica contemplatione adhibetur: sed insuper necesse est, vt eius massa et materia inspiciatur. Cum enim onus moueri nequeat, machina immota, motus quoque in machina generari debet, quod sine dispendio potentiae sollicitantis fieri nequit. Ad hunc ergo motum machinae definiendum inertia ipsius machinae in computum est ducenda, simulque ad relatiuas celeritates, quibus singulae machinae particulae mouentur, est respiciendum. In quibusdam etiam machinis partes existunt, quae non solum sunt mouendae, sed etiam eleuandae, quarum propterea non tantum inertia, sed reluctantia superari debet. Hoc scilicet euenit in vecte, nisi eius grauitatis centrum in ipso hypomochlio sit situm; atque praecipue in trochleis compositis seu polyspastis, in quibus inferiorem partem non solum moueri, sed etiam

attolli

attolli opportet, si quidem polyspasta ad onera eleuanda adhibeantur: secus enim se res habet, si eorum ope onera horizontaliter protrahantur.

§. 9. Frictio denique praecipue est attendenda sine qua nulla omnino machina confici potest. Non solum autem ipsa machina frictione laborat, sed etiam onus, interdum quoque potentia sollicitans, quae sine frictione moueri non possunt. In exemplo molarum enim supra allato tota fere vis, quae ad machinam mouendam requiritur, in frictione superanda absumitur. Atque si onus super plano siue horizontali siue inclinato est promouendum; frictio imprimis superari debet, quemadmodum euenit in plaustris et rhedis promouendis. Quamquam autem frictio mirum in modum diminui potest, tamen semper omnino tolli nequit, atque in machinis eius ratio imprimis est habenda, cum per eam effectus, qui sine ea oriri deberet, vehementer turbetur. Quantumuis autem prima fronte consideratio frictionis difficilis et molesta videatur, tamen integrum calculum fere aeque facile institui, ac si frictio prorsus abesset. Quando enim machina cum onere in motum est constituenda, certa atque determinata pars potentiae sollicitantis ad frictionem superandam requiritur, quae eadem manet, siue machina celerius siue tardius moueatur. Quouis igitur casu ista vis frictionem superans practice cognoscetur, si ea potentia tentando inuestigetur, quae machinam mouere incipiat: oneris autem vis renitens, si quae adest, in hoc negotio tolli debet. Haec ergo si semel fuerit inuenta, perpetuo a tota vi sollicitante subtrahi debet, atque ex vi residua ipse motus perinde consequetur, prorsus ac si nulla frictio adesset.

§. 10. Praeterea de omnibus fere machinis est notandum, earum motum non esse acceleratum, sed ad sensum aequabilem existere; etiamsi potentia sollicitans indesinenter agat. Nisi enim machina celerrime moueatur, statim ac vis sollicitans cessat, eodem quasi momento totus machinae motus sistitur, cuius rei causa tam frictioni, quam aliis impedimentis, quibus omnes machinae obnoxiae sunt, est tribuenda. Cum igitur machina eadem celeritate, qua motum incepit, moueri pergat, si quidem potentia sollicitans indesinenter agat, hanc constantem celeritatem tuto ex effectu potentiae sollicitantis, quae alias in acceleratione consistit, colligere licebit, quippe quo acceleratio est maior, eo celerius etiam machina mouetur. Hoc autem eo magis a quolibet admittetur, cum principalis noster scopus in hoc versetur, vt pro quouis casu ea machina eligatur, qua onus celerrime moueri queat. His igitur praemissis ipsam tractationem aggredior, atque praecipuas machinarum species contemplabor, inuestigaturus, quanta celeritate datum onus a data potentia ope cuiusque machinae promoueatur.

Propositio I.

Tabula VIII. Fig. 1. §. 11. *Si vecti* AOC *super hypomochlio* Y *in eius centro grauitatis* O *sito, applicata sit in* A *potentia* P, *in* B *vero onus* Q; *inuenire celeritatem, qua onus* Q *a potentia* P *ope vectis mouebitur.*

Solutio.

Exprimat p vim, qua vectis punctum A a potentia P in directione AP sollicitatur; atque q vim, qua onus Q vectem in directione BQ trahit. Praeterea vero denotet

tet P inertiam potentiae P, et Q inertiam oneris Q. Sit porro massa ipsius vectis AC seu eius inertia $=A$, eiusque longitudo $AC=2AO=2a$ posito vecte vbique eiusdem crassitiei; at BO sit $=b$. Iam ex statica constat momentum ad vectem super hypomochlio mouendum esse $=ap-bq$; quod per momentum inertiarum diuisum dabit celeritatem angularem circa O. Momentum vero ipsius vectis habetur, multiplicando singulas vectis particulas in quadrata suarum distantiarum a centro motus, quod proinde, si latitudo vectis negligatur, vt plerumque fieri potest, per calculum reperietur $=\frac{Aa^2}{3}$. Inertiae vero potentiae P momentum prodibit multiplicando inertiam P in AO^2, eritque $=Pa^2$; quia in motu P eadem celeritate mouetur qua punctum A, punctum A vero per quadratum ipsius AO multiplicari debet. Pari modo momentum ex inertia oneris Q ortum est Qb^2, ita vt vniuersum momentum ex cunctis inertiis ortum sit $\frac{Aa^2}{3}+Pa^2+Qb^2$. Hanc ob rem erit celeritas angularis, qua vectis super hypomochlio Y conuertetur $=\frac{ap-bq}{\frac{Aa^2}{3}+Pa^2+Qb^2}$; quae ducta in $BO=b$ dabit veram celeritatem, qua onus Q mouebitur, nempe $\frac{abp-bbq}{\frac{Aa^2}{3}+Pa^2+Qb^2}$. Haecque formula locum habet, si nulla adesset frictio; at si frictio affuerit, ponamus ad eam superandam vim Φ requiri in A applicandam, debebitque Φ a p auferri, atque in formula inuenta loco p substitui, $p-\Phi$, ita vt prouentura sit celeritas oneris $Q=\frac{ab(p-\Phi)-bbq}{\frac{Aa^2}{3}+Pa^2+Qb^2}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

Vt igitur onus Q in directione QB moueatur, necesse est, vt sit $a(p-\Phi) > bq$, seu $\frac{a}{b} > \frac{q}{p-\Phi}$; id quod etiam ex staticis liquet; nam si $ap = bq$, tum onus a potentia in aequilibrio tenetur. Quare ad onus mouendum debet esse $ap > bq$; ad frictionem autem simul superandam oportet, vt sit etiam $a(p-\Phi) > bq$.

Corollarium 2.

Si onus nulla vi actioni potentiae reluctetur, sed tantum eius inertia motui resistat, tum erit $q = o$. Hoc ergo casu onus mouebitur, si modo fuerit $a(p-\Phi) > o$, hoc est si $p > \Phi$. Quare hoc casu requiritur vt potentia sollicitans maior sit, quam vis frictioni superandae par; quod si fuerit, erit celeritas oneris $= \frac{ab(p-\Phi)}{\frac{Aa^2}{3} + Pa^2 + Qb^2}$. Locum habet iste casus, si onus etsi ponderosum motu horizontali sit promouendum.

Corollarium 3.

Si potentia sollicitans P inertia careat, quemadmodum fit, si vectis ab allisione aquae seu venti vrgeatur, tum erit $P = o$. Celeritas oneris igitur hoc casu erit $= \frac{ab(p-\Phi)-b^2q}{\frac{Aa^2}{3}+Qb^2}$; maior igitur est, quam si potentia sollicitans inertiam habeat.

Corollarium 4.

Ex formula inuenta intelligitur duobus casibus celeritatem oneris euanescere, quorum primus est si $a(p-\Phi) =$ bq seu

bq ſeu $b = \frac{a(p-\Phi)}{q}$; alter vero ſi $b = 0$, ex quo ſponte ſequitur, inter hos quaſi extremos valores ipſius b dari medium quempiam, quo onus celerrime moueatur.

Scholion.

§. 12. Poſuimus in hac propoſitione hypomochlium Y in ipſo centro grauitatis vectis eſſe conſtitutum, ne ipſius vectis pondus potentiam ſollicitantem vel augeret vel dimi-nueret; ſed ex principiis hic adhibitis aeque facile erit ſolutionem ad alios quoque caſus accommodare. Deinde vectem ideo vbique eiusdem feci craſſitiei, quo eius momentum facilius calculo poſſet exponi, ſin autem vectis aliter ſit comparatus eius momentum per calculum eſt inueſtigandum et in formula inuenta loco $\frac{Aa^2}{3}$ ſubſtituendum. Neque vero etiam iſtud momentum $\frac{Aa^2}{3}$ pro vectibus vbique aeque craſſis valet, niſi ipſa craſſities prae longitudine euaneſcat, atque hypomochlium in ipſum grauitatis centrum incidat. Generalis autem regula pro inueniendo momento vectis prismatici ABCD reſpectu hypomochlii Y vbicunque poſiti haec eſt. Querendum eſt primo momentum reſpectu centri grauitatis O, quod eſt $\frac{A.AC^2}{12}$, ducta diagonali AC, et denotante A maſſam vectis; ad hocque addi debet $A.OY^2$, ſeu factum ex maſſa in quadratum diſtantiae hypomochlii a centro grauitatis; quo facto aggregatum $\frac{A.AC^2}{12} + A.OY^2$ dabit momentum vectis deſideratum. Denique notandum eſt, etſi hic vectem tantum heterodromum contemplatus ſum, tamen ſolutionem etiam vectes homodromos in ſe complecti. Namque his caſibus fit quidem $BO = b$ negatiua, ſed potentia ſollicitans quoque in con- Figura 2. Figura 1.

 trariam

trariam plagam trahere debet, ita vt p vel $(p-\Phi)$ negatiuum obtineat valorem. His autem permutatis formula inuenta celeritatem oneris exprimens manet inuariata, scilicet $\frac{ab(p-\Phi)-b^2q}{\frac{Aa^2}{3}+Pa^2+Qb^2}$, ita vt solutio ad omnis generis vectes aeque pateat.

Propositio 2.

Fig. 1. §. 13. *Data potentia* P *vecti* AC *circa hypomochlium* Y *mobili applicata, inuenire punctum* B, *in quo onus* Q *applicatum celerrime moueatur.*

Solutio.

Ex praecedente propositione est oneris Q celeritas $= \frac{ab(p-\Phi)-b^2q}{\frac{Aa^2}{3}+Pa^2+Qb^2}$, in qua expressione p denotat vim potentiae sollicitantis, P eiusdem inertiam; q vim oneris reluctantem, et Q eiusdem inertiam; $\frac{Aa^2}{3}$ momentum vectis inertiae, a, distantiam potentiae a hypomochlio, b distantiam oneris ab eodem: Φ denique vim ad frictionem superandam requisitam. His expositis problema propositum resoluetur, si in formula celeritatem oneris exprimente b fiat variabile atque formulae differentiale nihilo aequetur. Prodibit autem $(\frac{A}{3}+P)(p-\Phi)a^3-2(\frac{A}{3}+P)a^2bq=Q(p-\Phi)ab^2$, seu $b^2=-\frac{2(\frac{1}{3}A+P)abq}{Q(p-\Phi)}+\frac{(\frac{1}{3}A+P)a^2}{Q}$ vnde prodit

$$b=\frac{-aq(\frac{1}{3}A+P)\pm aV(q^2(\frac{1}{3}A+P)^2+Q(\frac{1}{3}A+P)(p-\Phi)^2)}{Q(p-\Phi)}$$

De-

Debebit ergo esse $BO : AO = -1 \pm \sqrt{(1 + \frac{Q(p-\Phi)^2}{(\frac{1}{3}A+P)qq})}$ $: \frac{Q(p-\Phi)}{q(\frac{1}{3}A+P)}$, vnde punctum quaesitum B facile definitur Q. E. I.

Corollarium 1.

Si onus Q omni reluctantia extrinseca careat, solaque inertia motui resistat, tum celerrime mouebitur, si capiatur $BO = b = \pm a\sqrt{\frac{\frac{1}{3}A+P}{Q}}$, quia hoc casu q euanescit. Quare punctum B hoc casu perinde est, in quonam vectis brachio capiatur, modo sit $BO : AO = \sqrt{(\frac{1}{3}A+P)} : \sqrt{Q}$.

Corollarium 2.

Sin autem onus inertia careat, atque vi tantum extrinseca q motui vectis resistat. Prout fere euenit, si lamina vehementer elastica debeat tendi, tum erit $Q = 0$. quo casu aequatio vltimo inuenta absurdum indicare videtur ob denominatorum $= 0$; sed ex initiali statim prodit $(p-\Phi)a = 2bq$. Erit ergo $BO : AO = p - \Phi : 2q$.

Scholion.

§. 14. Duplex situs puncti B, qui ob radicis quadratae extractionem prodiit, indicat quaesito satisfieri posse, punctum B tam in brachio OA quam OC accipiendo; alter enim valor ipsius B est affirmatiuus, alter negatiuus. Harum autem solutionum prior tantum nostro problemati ea significatione, qua est propositum, stricte intellecto satisfacit. Altera vero solutio, qua punctum B in brachium

chium AO cadit, isti quaestioni, quae quidem quoque in problemate continetur, satisfacit, qua quaeritur punctum in brachio OA, in quo si applicetur onus Q, id celerrime moueatur. Casus autem iste non spectat vectem homodromum, in vulgari sensu acceptum, hic enim tam potentia P quam onus Q viribus suis conspirant ad vectem in eandem plagam conuertendum, ita vt isto casu ne aequilibrium quidem locum habeat. Interim tamen manifestum est dari locum B in brachio OA, in quo onus Q celerrime moueatur, quem locum alter solutionis casus indicat.

Propositio 3.

Fig. 3. 4. §. 15. *Inuenire celeritatem, qua onus datum* Q *a potentia* P *ope axis in peritrochio* AOB *promouetur.*

Solutio.

Sit in hac machina radius maior, cui potentia P est applicata, $AO = a$; radius minor $OB = b$, in qua a centro O distantia onus Q trahitur. Massa autem ipsius machinae ponatur $= A$, eiusque momentum respectu axis per O transeuntis, circa quem machina mobilis existit $=$ M; erit scilicet M aggregatum ex singulis machinae particulis in suarum ab axe distantiarum quadrata multiplicatis, quod aggregatum pro quouis casu proposito calculo est determinandum. Habebit ergo M semper huiusmodi formam Ak^2; atque si machina fuerit cylindrus ex materia homogenea constans erit $M = \frac{Aa^2}{2}$; vnde si machina ex duobus constet cylindris, eius momentum erit aggregatum ex momentis vtriusque cylindri. Sit porro vis, qua po-

potentia P machinam sollicitat $= p$, eiusque inertia $= P$. Oneris vero Q vis extrinseca, si quam habet, qua effectui potentiae P obluctatur sit $= q$, inertia vero $= Q$. In figuris allegatis duo casus repraesentantur, quorum priore onus est pondus eleuandum, quo propterea tam q quam Q eius massae sunt proportionales; posteriore vero figura onus est moles, motu horizontali promouenda, quo igitur q euanescit. Quicquid autem sit, momentum virium ad rotam conuertendam erit $ap-bq$, frictione neglecta; at si frictio affuerit, ad quam superandam potentia Φ in radio maiore applicata requiritur, erit momentum virium $= a(p-\Phi)-bq$. Momentum autem inertiarum erit $= M+Pa^2+Qb^2$, quia P eadem celeritate mouetur, qua machinae punctum, A, Q vero eadem celeritate, qua punctum B; prout in prima propositione iam notauimus. Ex his momentis igitur erit celeritas angularis genita vt $\frac{a(p-\Phi)-bq}{M+Pa^2+Qb^2}$, ideoque celeritas ipsa qua onus Q in directione QB ad machinam trahitur, erit vt $\frac{ab(p-\Phi)-b^2q}{M+Pa^2+Qb^2}$ Q. E. I.

Corollarium 1.

Quo igitur onus Q ad machinam attrahatur necesse est, vt sit $a(p-\Phi) > bq$. Si enim sit $ap = bq$, tum onus a potentia in aequilibrio conseruatur; quare ad onus mouendum oportet vt ap tanto maius sit quam bq, vt etiam frictioni superandae par sit.

Corollarium 2.

Si onus nulla vi extrinseca actioni machinae resistat, prout fit in casu figurae quartae, tum ob $q = 0$, erit celeritas, qua onus promouebitur vt $\frac{ab(p-\Phi)}{M+Pa^2+Qb^2}$. Hoc ergo casu onus semper promouebitur, modo potentia applicata maior sit, quam ad frictionem superandam opus est.

Corollarium 3.

Duo hic iterum casus sunt notandi, quibus celeritas oneris euanescit, qui sunt, quando est vel $a(p-\Phi)=bq$ vel $b=o$. Interque hos duos casus reliqui omnes, quibus onus ad machinam trahitur continentur. Quamobrem necesse est, vt inter hos casus vnus contineatur, quo onus celerrime moueatur.

Corollarium 4.

Si nullum adsit onus mouendum, sed tantum celeritas requiratur, qua potentia rotam in gyrum agit; fiet $q=o$ et $Q=o$. Celeritas igitur, qua rotae punctum B circumuertetur erit $=\frac{ab(p-\Phi)}{M+Pa^2}$ ideoque celeritas angularis machinae prodibit $=\frac{a(p-\Phi)}{M+Pa^2}$.

Corollarium 5.

Si potentia P euanescat, atque onus vi trahente polleat, machina in sensum contrarium conuertetur celeritate angulari, quae est vt $\frac{bq-a\Phi}{M+Qb^2}$. Frictio enim semper a potentia sollicitante auferri debet, cum motui perpetuo resistat.

Propositio 4.

§. 16. *Datis massa et momento machinae definire radium minorem* OB, *quo efficitur vt datum onus a data potentia ope machinae celerrime moueatur.*

So-

Solutio.

Manentibus omnibus denominationibus, quibus in propositione praecedente sumus vsi, erit celeritas, qua moles Q a potentia P ope machinae mouebitur vt $\frac{ab(p-\Phi)-b^2q}{M+Pa^2+Qb^2}$ Quare ad propositum problema soluendum quantitas radii minoris b ita est determinanda, vt ista expressio maximum obtineat valorem. Facto ergo b variabili atque formulae illius differentiali posito $=0$ habebitur, $Ma(p-\Phi)+Pa^3(p-\Phi)=2(M+Pa^2)bq+Qab^2(p-\Phi)$, quae praebet $b^2=-\frac{2(M+Pa^2)bq}{Qa(p-\Phi)}+\frac{M+Pa^2}{Q}$. ex qua oritur $b=-\frac{(M+Pa^2)q}{Qa(p-\Phi)}\pm\frac{\sqrt{((M+Pa^2)^2q^2+Qa^2(p-\Phi)^2(M+Pa^2))}}{Qa(p-\Phi)}$; quae aequatio quidem duplicem dat valorem ipsius b, sed pro instituto nostro tantum affirmatiuus locum habet, cum negatiuus in alio casu huc non pertinente maximi proprietate gaudeat. Erit ergo quaesitus radius minor $b=-\frac{(M+Pa^2)q+\sqrt{(q^2(M+Pa^2)^2+Qa^2(p-\Phi)^2(M+Pa^2))}}{Qa(p-\Phi)}$ Q. E. I.

Corollarium 1.

Si igitur radius minor b eius quantitatis accipiatur, quam formula inuenta indicat, onus celerrime promouebitur. Ipsa autem celeritas haec maxima erit $=\frac{q}{2Q}\left(-1+\sqrt{\left(1+\frac{Qa^2(p-\Phi)^2}{(M+Pa^2)q^2}\right)}\right)$, quae expressio reperitur, si loco b eius valor inuentus in formula $\frac{ab(p-\Phi)-b^2q}{M+Pa^2+Qb^2}$ substituatur.

Corollarium 2.

Si onus mouendum Q nulla vi extrinseca sit praeditum, sed eius sola inertia a potentia sollicitante superari debeat erit $q=0$, atque onus celerrime mouebitur, si radius

dius minor b capiatur $= \sqrt{\frac{M+Pa^2}{Q}}$. Tum autem celeritas erit $= \frac{a(p-\Phi)}{2\sqrt{Q(M+Pa^2)}}$.

Corollarium 3.

Sin autem onus mouendum inertia careat, atque tantum vis eius extrinſeca quaedam, cuiusmodi eſt vis elaſtica ſuperanda ſit, tum ob $Q=0$, erit $b=\frac{a(p-\Phi)}{2q}$. Ipſa autem celeritas maxima, qua hoc caſu onus mouebitur, erit $= \frac{a^2(p-\Phi)^2}{4q(M+Pa^2)}$. Hique ſunt duo caſus praecipui, inter quos reliqui omnes quibus onus et inertiam et vim extrinſecam habet, continentur.

Scholion.

§. 17. Ex hac propoſitione non ſolum axis in peritrochio vſus maxime lucroſus cognoſcitur, ſed etiam quantum interſit pro quouis caſu machinam maxime idoneam elegiſſe, abunde intelligitur. Niſi enim machina ita conficiatur, prout ſolutio poſtulat, fieri poteſt, vt idem onus a maxima potentia tardiſſime promoueatur, quod a longe minore potentia, machinae idoneae ope, celerius moueri poteſt. Cum igitur in vſu machinarum hoc precipue requiratur, vt datum onus a data potentia non ſolum moueatur, ſed etiam celerrime et minimo temporis diſpendio moueatur, perſpicuum eſt hanc propoſitionem in vita communi maximam vtilitatem afferre. Praeterea etiam hinc inſufficientia principii vulgo recepti ſatis ſuperque patet, quo ſtatuitur, quantum diminutione potentiae ſollicitantis lucremur, tantumdem per diminutionem celeritatis perdi. Celeritas enim oneris non a ſola potentia ſollicitante pendet, ſed etiam ab ipſius machinae indole, prout formulae inuentae ſatis declarant. Interim tamen id certum erit,

ſi

si semper machinae maxime idoneae adhibeantur, tum idem onus a maiore potentia celerius motum iri, quam a minore; ipsae autem celeritates non tenent potentiarum rationem; in casu enim coroll. 2. rationem fere simplicem, in casu autem coroll. 3. rationem habent fere duplicatam. Denique manifestum est in hac de motu machinarum doctrina, minime sufficere vires potentiae et oneris tantum considerasse, sed etiam rationem inertiarum tam potentiae, quam oneris imprimis esse habendam, quae tamen vulgo, cum haec doctrina secundum statica principia solum tractari solet, penitus negliguntur. Casus autem superest, quo radius maior determinari debet, vt onus velocissime a data potentia moueatur, posito radio minore dato, qui casus praecipue locum habet, quando circumuolutione cylindri onus ope funis circumuoluendi moueri debet, quem igitur in sequente propositione euoluam.

Propositio 5.

§. 18. *Determinare longitudinem vectis* AC, *quo datum onus* Q *a data potentia* P *ope cylindri circa axem* O *mobilis celerrime promoueatur.*

Solutio.

Sit vt ante radius cylindri $BO = b$, et integer radius maior quaesitus $ACO = a$, oneris Q vel eleuandi vel horizontaliter promouendi, prout vtrumque in figura repraesentatur inertia $= Q$, et vis reluctans $= q$, potentiae P inertia $= P$ et vis sollicitans $= p$. Massa vero cylindri ponatur $= A$, erit momentum ex eius inertia ortum $= \frac{Ab^2}{2}$, siquidem cylindrus ex materia vniformi constet, momentum autem ex inertia vectis AC ortum tuto negligi Tab. IX. Fig. 1.

poterit. Ad frictionem porro superandam requiratur potentia Φ in distantia OC a centro O applicanda; cum enim frictio sit constans, expedit eam a loco constante computare, quam ab etiamnum incognito A. His igitur praemissis erit celeritas, qua onus mouebitur $= \frac{abp - b^2\Phi - b^2 q}{\frac{1}{2}Ab^2 + Pa^2 + Qb^2}$, quae, quo fiat maxima, ponatur a variabile, et differentiale ortum ponatur $= 0$. Prodibit autem $b^3 p(\frac{1}{2}A + Q) + 2ab^2 P(\Phi + q) = Pa^2 bp$; vnde oritur $a^2 = \frac{2ab(\Phi + q)}{p} + \frac{b^2(\frac{1}{2}A + Q)}{P}$ quae aequatio praebet $a = \frac{b(\Phi+q)}{p} + \sqrt{(\frac{b^2(\Phi+q)^2}{pp} + \frac{b^2(\frac{1}{2}A+Q)}{P})}$ Debebit ergo fieri $AO:BO = 1 + \sqrt{(1 + \frac{pp(\frac{1}{2}A+Q)}{(\Phi+q)^2 P})} : \frac{p}{\Phi+q}$; vnde longitudo vectis AC adhibendi aptissima cognoscitur. Q. E. I.

Corollarium 1.

Cum igitur sit $a = \frac{b(\Phi+q)}{p} + b\sqrt{(\frac{(\Phi+q)^2}{pp} + \frac{\frac{1}{2}A+Q}{P})}$ erit ipsa celeritas, qua onus Q ope machinae hoc modo applicatae promouebitur $=$

$$\frac{\sqrt{((\Phi+q)^2 + \frac{pp(\frac{1}{2}A+Q)}{P})} - \Phi - q}{A + 2Q}$$

vnde perspicitur, quo minor sit massa cylindri, eo celerius onus motum iri.

Co-

Corollarium 2.

Si vis ſollicitans nullam habeat inertiam, tum radius maior AO ſit infinite magnus. Quare in machinis, quae vento mouentur motus eo celerior exiſtit, quo longiores fuerint alae ventum excipientes, etiamſi maiorem non habeant ſuperficiem quam breuiores.

Corollarium 3.

Sequitur porro ex formula inuenta, quo maior fuerit vis ſollicitans p eo minorem vectem AC applicari debere, quo onus celerrime moueatur. Semper autem ceteris paribus maior potentia onus celerius mouebit quam minor.

Scholion.

§. 19. Supra iam monui, modum hunc, quo vtor celeritates exprimendi, ſtrictiſſimo ſenſu veritati non eſſe conſentaneum, ſed has expreſſiones ita tantum eſſe comparatas, vt ex earum quantitate celeritatis quantitas ſaltem colligi queat. Accurate enim loquendo iſtae expreſſiones, quas ad celeritates deſignandas vſurpo, accelerationem momentaneam tantum definiunt; ſatis autem perſpicuum eſt, quo maior ſit acceleratio, eo maiorem quoque fore ipſam celeritatem genitam. Hoc autem ad meum inſtitutum, quo potiſſimum in eos caſus inquiro, quibus onus celerrime moueatur, prorſus ſufficit; ea ipſa enim machina, in qua acceleratio oneris maxima exiſtit, onus quoque celerrime mouebit. Interim tamen non arduum eſt ex iisdem expreſſionibus veram oneris quouis loco celeritatem determinare. Cum enim in noſtro praeſenti caſu, cui praecedentum in eadem ratione duplicata, ita vt ſit $L\frac{e^2}{d^2}$; atque ſimili modo proueniet momentum inertiae primae rotae $= \frac{Kc^2.e^2}{b^2.d^2}$. Momentum autem, quod ex inertia potentiae ſollicitantis naſcitur erit $= \frac{Pa^2c^2.e^2}{b^2.d^2}$; ita vt vniuerſum momentum, ex omnibus inertiis coniunctis ortum, ſit $= \frac{Pa^2c^2e^2}{b^2d^2} + \frac{Kc^2e^2}{b^2d^2} + \frac{Le^2}{d^2} + M + Qf^2$. Ex his naſcitur vis acceleratrix tertiae rotae $= \frac{\frac{ace(p-\Phi)}{bd} - fq}{\frac{Pa^2c^2e^2}{b^2d^2} + \frac{Kc^2e^2}{b^2d^2} + \frac{Le^2}{d^2} + M + Qf^2}$ $= \frac{abcde(p-\Phi) - b^2d^2fq}{Pa^2c^2e^2 + Kc^2e^2 + Lb^2e^2 + Mb^2d^2 + Qb^2d^2f^2}$; cui cum ipſam celeritatem angularem tertiae rotae proportionalem ponamus, erit celeritas oneris $= \frac{abcdef(p-\Phi) - b^2d^2f^2q}{Kc^2e^2 + Lb^2e^2 + Mb^2d^2 + Pa^2c^2e^2 + Qb^2d^2f^2}$. Ex qua formula ſimul intelligitur, ſi numerus rotarum adhuc maior ponatur, quemadmodum celeritas oneris ſit exprimenda. Q. E. I.

Corollarium 1.

Cum quaeuis rota ex duobus diſcis conſtet maiore et minore, erit $K = Aa^2 + Bb^2$; vbi A denotat partem quampiam maſſae diſci maioris primae rotae, B vero partem quamdam maſſae diſci minoris, quae partes erunt dimidiae, ſi diſci fuerint cylindri. Simili modo habebit L eiusmodi formam $Cc^2 + Dd^2$, atque M talem $Ee^2 + Ff^2$. His igitur formis ſurrogatis erit oneris celeritas, qua mouebitur $= \frac{abcdef(p-\Phi) - b^2d^2f^2q}{a^2c^2e^2(A+P) + b^2c^2e^2(B+C) + b^2d^2e^2(D+E) + b^2d^2f^2(F+Q)}$ ex qua formula facilius caſus plurium rotarum euoluentur.

Co-

Corollarium 2.

Si nunc ponatur ratio radii maioris ad minorem in prima rota vt $k:1$ seu $\frac{a}{b}=k$, atque $\frac{c}{d}=l$; et $\frac{e}{f}=m$, erit celeritat oneris $=\frac{klm(p-\Phi)-q}{k^2l^2m^2(A+P)+l^2m^2(B+C)+m^2(D+E)+F+Q}$.

Corollarium 3.

Duobus ergo casibus celeritas oneris potest esse nulla, quorum primus est, si sit $klm(p-\Phi)=q$, alter vero si vel k, vel l, vel m fuerit $=0$, illo enim casu numerator euanescit, hoc autem denominator fit infinite magnus. Inter hos autem casus omnes illi continentur, quibus onus actu mouetur.

Corollarium 4.

Dabitur ergo talis rotarum dispositio pro datis potentia et onere, qua onus celerrime mouebitur; quae cum in vsu machinarum maximi sit momenti, operae pretium erit eam inuestigare, id quod in propositione sequente praestabitur.

Propositio 7.

§. *Inter omnes machinas, quae ex pluribus constant rotis coniunctis, quarum quaeque sequentem mouet, eam determinare, cuius ope datum onus a data potentia celerrime promoueatur.*

Solutio.

Retentis omnibus denominationibus, quibus in praecedente propositione sum vsus, exprimet formula coroll. 2. commodissime celeritatem, qua onus Q ope machinae ex tribus rotis coniunctis compositae a potentia P mouebi-

 tur,

tur, et quae facillime ad quemcunque rotarum numerum accommodari potest. Erit ergo celeritas oneris $= \frac{klm(p-\Phi)-q}{kl^2m^2(A+P)+l^2m^2(B+C)+m^2(D+E)+F+Q}$ quae maxima est reddenda positis p, q, P et Q constantibus. Ponamus autem quoque quantitates A, B, C, D, E, F constantes, quae ex massis maiorum et minorum discorum, ex quibus rotae constant, determinantur. Quanquam enim hae quantitates a diametris rotarum pendent, atque istae diametri etiamnum sunt incognitae, tamen quoque a crassitie pendent, quae est arbitraria, et hanc ob rem sine errore pro constantibus haberi possunt. Praeterea ad illam formam maximam efficiendam, non tam ipsam rotarum et discorum magnitudinem definimus, quam eorum mutuam relationem, numeros scilicet k, l, et m, ita vt ab harum variabilitate ipsa discorum quantitas non afficiatur. Sit ergo $klm = x$; numerusque x indicabit, quoties per machinam totam potentia applicata multiplicetur; atque sit etiam $lm = y$, et $m = z$. Praeterea sit breuitatis gratia $p-\Phi = r$; $A+P=K$; $B+C=L$; $D+E=M$ et $F+Q=N$, quibus suffectis erit celeritas oneris $= \frac{rx-q}{Kx^2+Ly^2+Mz^2+N}$ atque numeri x, y, z ita determinari debebunt, vt ista expressio maximum obtineat valorem. Facile autem perspicitur celeritatem fore eo maiorem, quo minores sint numeri y et z, ita vt hos numeros definire non sit opus. Quamobrem tantum x per methodum maximorum determinasse sufficiet. Prodibit autem ista aequatio $(Ly^2+Mz^2+N)r = Krx^2-2Kqx$, seu $x^2 = \frac{2qx}{r} + \frac{Ly^2+Mz^2+N}{K}$ ex qua oritur $x = \frac{q}{r} + \sqrt{(\frac{q^2}{r^2} + \frac{Ly^2+Mz^2+N}{K})}$ seu restitutis prioribus valoribus erit $klm = \frac{q}{p-\Phi} + \sqrt{(\frac{q^2}{(p-\Phi)^2} + \frac{(B+C)l^2m^2+(D+E)m^2+F+Q}{A+P})}$ qua aequatione problema soluitur. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

Si valor ipſius x inuentus in expreſſione celeritatis ſubſtituatur, prodibit celeritas oneris maxima quaeſita $= \frac{rr}{2Kr\sqrt{\left(\frac{q^2}{r^2} + \frac{Ly^2 + Mz^2 + N}{K}\right)} + 2Kq}$ quam apparet eo maiorem fore, quo minores fiant numeri y et z, ſeu numeri l et m.

Corollarium 2.

Ad problema propoſitum ergo ſoluendum machinam ita inſtrui oportet, vt potentiae multiplicatio per totam machinam facta tanta fiat, quanta eſt inuenta. Rotae autem ipſae quotquot fuerint, ita ſint disponendae, vt eae, prima excepta, potentiam quam minime augeant.

Corollarium 3.

Intelligitur porro, quo minor ſit rotarum numerus, eo celerius onus a data potentia promoueri. Cum enim numeri y, z, nec quantitates L, M, N neque euaneſcere neque negatiuos valores induere queant, manifeſtum eſt, quo pauciores literae L, M, N, hoc eſt quo pauciores rotae adhibeantur, eo celerius onus promoueri poſſe.

Corollarium 4.

Si igitur aliae circumſtantiae machinam plurium rotarum requirant, tum ſcopus intentus obtinebitur, ſi in prima rota ratio inter radium maiorem et minorem ſeu k tam magna conſtituatur, quam fieri poteſt. Si enim k etiam maior fiat quam klm, tum ob l et m numeros vnitate minores, celeritas oneris eo maior euadet.

Scholion.

§. 22. Machinae ex pluribus rotis conſtantes tum praecipue adhiberi ſolent, quando per vnam rotam tanta potentiae multiplicatio produci nequit, quanta ad onus mouendum requiritur. His igitur caſibus primae rotae radius maior ad minorem maximam, quam fieri poteſt rationem tenere debebit; quo in ſequentibus autem rotis ratio inter radios maiores et minores, rationem aequalitatis minime ſuperet. Quando autem aliae circumſtantiae plures rotas requirunt, tum data regula maiore vtilitate adhiberi poteſt, qua in ſola prima rota maxima potentiae multiplicatio conſtitui debet. Hinc naſcitur regula ſumme vtilis pro molis tam ab aqua quam vento mouendis, quae ex ſua natura plures rotas non vero virium multiplicationem requirunt. Hoc caſu ergo fit inertia potentiae ſollicitantis $P = 0$; atque cum nullum onus ſit mouendum praeter ipſas rotas erit et q et $Q = 0$; contritio enim granorum ſub frictione comprehendi poteſt. Vt igitur mola velociſſime molat neceſſe eſt vt ſit $klm = \frac{\sqrt{(B+C)l^2m^2+(D+E)m^2+F}}{A}$. Accepta igitur maxima ratione inter radium maiorem et minorem primae rotae, quae immediate vel a dente vel aqua agitatur; l et m ita accipi debent, vt fiat $Ak^2l^2m^2 = (B+C)l^2m^2 + (D+E)m^2 + F$ ſeu ob $F = 0$, quia nullum adeſt onus erit $Ak^2l^2 - (B+C)l^2 = D+E$, ideoque $l = \frac{\sqrt{(D+E)}}{\sqrt{(Ak^2-B-C)}}$; vnde vtiliſſima ſtructura molarum, ex tribus rotis conſtantium conſequitur. His autem obſeruatis erit celeritas qua lapis molaris in gyrum agetur directe vt potentia ſollicitans et reciproce vt diameter vltimae rotae: vltimam ergo rotam molae connexam minimam fieri conueniet. Reliquarum machinarum examen, ne nimis ſim prolixus, in aliud tempus differam.

Iob.

Ioh. Bernoulli
COMPENDIVM ANALYSEOS
PRO
INVENTIONE VIS CENTRALIS IN ORBIBVS MOBILIBVS PLANETARVM:

Vid. Newton. Principia Mathem. Philos. Natur. Prop. 43. *et* 44. *Lib.* I. *Confer. Phoron. Herm. pag.* 95.

Supponitur hic orbitam datam quamcunque esse ABE, eamque moueri ea lege, vt vbi venerit in quemlibet situm *abe*, mobile vi centrali attractum perueniat ad locum *b* ad aequalem distantiam a centro virium C, ad quam peruenisset eodem tempore, si orbita ABE maneret immobilis. Supponitur praeterea a Newtono motum orbitae ita attemperari, vt angulus *b*CA ad angulum BCA semper obseruet rationem constantem, puta vt n ad 1. Vnde statim sequitur curuam veram AN*bg* ex motu duplici combinato resultantem eam debere habere naturam, vt sit vbique $gm . dm :: n . 1$;

Sit nunc $BD = ds$, $DM = dm = dy$, $BC = bC = x$, $BM = bm = dx$, $bg = dS$, radius euolutae in $B = v$, radius euolutae in $b = R$. Erit $v = \frac{xdx}{d(xdy : ds)}$, $R = \frac{xdx}{d(nxdy . dS)}$. Tempusculum per bg = temp. per BD = areolae $BCD = xdy$, vnde velocitas in B (si orbita esset immobilis) $= \frac{ds}{xdy}$, velocitas in b (in curua vera Abg) $= \frac{dS}{xdy}$. Vis normalis ad quamlibet curuam habetur, qua nempe vi mobile in curua retinetur, diuidendo quadratum velocitatis per radium euolutae; adeoque vis normalis

malis in B $= \frac{ds^2 d(xdy:ds)}{x^3 dy^2 dx}$. Quia autem vis centralis eſt ad vim normalem, quae ex illa reſultat, vt ds ad dy, oportet vt vis centralis in B ſit $= \frac{ds^3 d(xdy:ds)}{x^3 dy^3 dx}$ quae dicatur $= f$. Simili ratione vis normalis in b in curua vera $= \frac{dS^2 d(nxdy:dS)}{x^3 dy^2 dx}$ adeoque vis centralis, ex qua illa generari debet (nam et heic areae circumcentrales temporibus ſunt proportionales), vis, inquam, centralis $= \frac{dS^3 d(nxdy:dS)}{nx^3 dy^3 dx} = \frac{\frac{nn}{dx} \times d(nxdy:dS)}{n^3 x^3 dy^3 : dS^3} = \frac{-nn}{2dx} \times d\left(\frac{1}{nnxxdy^2 : dS^2}\right) = \frac{-nn}{2dx} \times d\left(\frac{dS^2}{nnxxdy^2}\right)$ quae dicatur $=$ F. Pari artificio transformatur f ſeu $\frac{ds^3 d(xdy:ds)}{x^3 dy^3 dx}$ in $\frac{-1}{2dx} \times d\left(\frac{ds^2}{xxdy^2}\right)$ ſeu in $\frac{-1}{2dx} \times d\left(\frac{nnds^2}{nnxxdy^2}\right)$. Habetur itaque $F - f = \frac{-nn}{2dx} \times d\left(\frac{dS^2}{nnxxdy^2}\right) + \frac{1}{2dx} \times d\left(\frac{nnds^2}{nnxxdy^2}\right) =$ ($dS^2 = nndy^2 + dx^2$, ob $nnds^2 = nndx^2 + nndy^2$) $\frac{-nn}{2dx} \times d\left(\frac{nndy^2 + dx^2}{nnxxdy^2}\right) + \frac{1}{2dx} \times d\left(\frac{nndy^2 + nndx^2}{nnxxdy^2}\right) = \frac{-nn}{2dx} \times d\left(\frac{1}{xx} + \frac{dx^2}{nnxxdy^2}\right) + \frac{1}{2dx} \times d\left(\frac{1}{xx} + \frac{nndx^2}{nnxxdy^2}\right) =$ (differentiando actu ipſum $\frac{1}{xx}$) $\frac{nn}{x^3} - \frac{nn}{2dx} \times d\left(\frac{dx^2}{nnxxdy^2}\right) - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2dx} \times d\left(\frac{nndx^2}{nnxxdy^2}\right) = \frac{nn-1}{x^3} - \frac{nn}{2dx} \times d\left(\frac{dx^2}{nnxxdy^2}\right) + \frac{1}{2dx} \times d\left(\frac{nndx^2}{nnxxdy^2}\right) =$ (quia ob conſtantem n duo poſtremi termini ſe mutuo deſtruunt) $\frac{nn-1}{x^3}$.

Corollarium I.

Eſt itaque exiſtente n inuariabili, virium centralium differentia in orbita mobili et immobili reciproce vt cubus communis altitudinis x, ſicuti habet Newtonus in propoſ. 44. operoſe et obſcure demonſtrata; ſed et inſuper hoc patet, quod Newtonus non docet, ſi duae ſint orbitae mobiles, quarum velocitates angulares ſint vt n ad N, et vtraque ad velocitatem angularem in orbita immobili habeat conſtantem rationem, fore differentiam illam virium in vna ad differentiam virium in altera vt $nn-1$ ad NN-1.

Co-

Corollarium 2.

Si manente n inuariabili, x sit infinita, h. e. si directiones virium sint parallelae, erit $\frac{nn-1}{x^3} = \frac{nn-1}{\infty^3} = 0$, adeoque $F - f = 0$, id est, in orbita mobili et immobili eadem vis ad infinitum tendens requiritur, quia illarum differentia est nulla.

Processus Analyseos

pro hypothesi generali velocitatis angularis qualiscunque.

Sit iam n ad 1 in ratione quacunque etiam variabili: vidimus pro orbita immobili vim normalem in B esse $= \frac{ds^2 d(xdy:ds)}{x^3 dy^2 dx}$, ex qua deducta est vis centralis $f = \frac{-1}{2dx} \times d(\frac{ds^2}{xxdy^2})$, quae monstrata est $= \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2dx} \times d(\frac{dx^2}{xxdy^2})$. Porro vis normalis in b etiamnum est $= \frac{dS^2 d(nxdy:dS)}{x^3 dy^2 dx}$. Sed quia, existente n variabili, C non amplius est centrum virium pro describenda curua vera A N b, nam area ACb cum non habeat rationem constantem ad aream ACB, erit illa ACb non amplius proportionalis tempori per arcum ANb; Ad habendam ergo vim in b, quae ad C deriuatur, non recte procederetur dicendo vis normalis in b est ad vim centralem versus C vt ndy ad dS, sed ad hanc vim determinandam opus est vt in considerationem trahatur vis tangentialis in b, quae prius inuenienda est hoc modo: vocatur haec vis tang. $= g$, patet ex lege accelerationis (quia dS est spatiolum percurrendum tempusculo $\frac{dS}{xdy}$) fore $g \times dS : \frac{dS}{xdy}$, hoc est, $g x dy = -d(\frac{dS}{xdy})$ vnde $g = \frac{-1}{xdy} d(dS : xdy)$. Nunc vtraque vis tam normalis quam tangentialis per decompositionem deriuanda est ope triangulorum similium ad directionem rectae bC, quod fit

fit: Vt dS ad ndy ita vis normalis in b seu $\frac{dS^2 d(nxdy:dS)}{x^3 dy^2 dx}$ ad vim quae ex normali deriuatur a b versus C, et quae proin erit $= \frac{ndSd(nxdy:dS)}{x^3 dydx}$, cui addenda est vis deriuanda ex tangentiali, et quae inuenitur dicendo vt dS ad dx, ita vis tang. in b seu $\frac{-1}{xdy}\, d(dS:xdy)$ ad quaesitam, quae proin erit $= \frac{-dx}{xdydS}\, d(dS:xdy)$, et sic tota vis in b versus C habetur $= \frac{ndSd(nxdy:dS)}{x^3 dydx} - \frac{dx}{xdydS}\, d(dS:xdy) =$ (quia generaliter $dz = -zzd(1:z)$ nominando hic $\frac{1}{z} = dS: xdy$) $\frac{ndSd(nxdy:dS)}{x^3 dydx} + \frac{dSdxd(xdy:dS)}{x^3 dy^3} = \frac{n^4 dy^2}{dS^2 dx} \times \frac{d(nxdy:dS)}{n^3 x^3 d^3 : dS^3} + \frac{dx}{dS^2} \times \frac{d(xdy:dS)}{x^3 dy^3 : dS^3} = \frac{-n^4 dy^2}{2dS^2 dx}\, d\left(\frac{dS^2}{nnxxdy^2}\right) - \frac{dx}{2dS^2}\, d\left(\frac{dS^2}{xxdy^2}\right) ==$ [Quia $d\left(\frac{dS^2}{nnxxdy^2}\right) = \frac{1}{nn}\, d\left(\frac{dS^2}{xxdy^2}\right) + \frac{dS^2}{xxdy^2}\, d\left(\frac{1}{nn}\right)$], $\frac{-nndy^2}{2dS^2 dx}\, d\left(\frac{dS^2}{xxdy^2}\right) - \frac{n^4}{2xxdx}\, d\left(\frac{1}{nn}\right) - \frac{dx}{2dS^2}\, d\left(\frac{dS^2}{xxdy^2}\right) =$ [addendo actu primum et tertium], $-\frac{1}{2dx}\, d\left(\frac{dS^2}{xxdy^2}\right) - \frac{n^4}{2xxdx}\, d\left(\frac{1}{nn}\right) = -\frac{1}{2dx}\, d\left(\frac{dS^2}{xxdy^2}\right) + \frac{ndn}{xxdx} = -\frac{1}{2dx}\, d\left(\frac{nndy^2 + dx^2}{xxdy^2}\right) + \frac{ndn}{xxdx} = -\frac{1}{2dx}\, d\left(\frac{nn}{xx}\right) - \frac{1}{2dx}\, d\left(\frac{dx^2}{xxdy^2}\right) + \frac{ndn}{xxdx} =$ [differentiando primum terminum actu], $\frac{nn}{x^3} + \left(\frac{n}{xx} - \frac{n}{xx}\right)\frac{dn}{dx} - \frac{1}{2dx}\, d\left(\frac{dx^2}{xxdy^2}\right) =$ [ob destructionem medii], $\frac{nn}{x^3} - \frac{1}{2dx}\, d\left(\frac{dx^2}{xxdy^2}\right) = F$; Inuenimus autem $f = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2dx}\, d\left(\frac{dx^2}{xxdy^2}\right)$, Hinc ergo $F - f = \frac{nn-1}{x^3}$. Atque ita per hanc operationem prodit eadem formula, quae per priorem pro hypothesi, particulari, vbi n supposita fuit inuariabilis, quae proin tamquam casus particularis in generali includitur.

Corollarium 1.

Igitur vniuersaliter verum est, quod in Coroll. 1. praecedentis ostendi tantum de duobus numeris constantibus n et N; si nimium orbita ABE iam primo hac lege mo-

moueatur, vt angulus ACb ad angulum ACB habeat rationem quamcunque etiamsi variabilem n ad 1, deinde eadem ABE moueatur alia lege, vt illi duo anguli rationem habeant etiam vtcunque variabilem N ad 1: Erit in aequalibus a centro virium C distantiis differentia virium in vna ad differentiam virium in altera vt $nn-1$ ad $NN-1$; Hinc posito $N > 1$, erit differentia differentiarum virium $= \frac{(NN-1)-(nn-1)}{x^3} = \frac{NN-nn}{x^3}$.

Corollarium 2.

Centro virium existente in distanti infinita, adeoque earum directione parallela: erit etiam hic, qualiscunque sit ratio variabilis inter n et 1, differentia virium nulla, nam $\frac{nn-1}{x^3} = \frac{nn-1}{\infty^3} = 0$. Vnde sequitur, quacunque vi mobile solicitetur secundum directiones parallelas ad describendam aliquam traiectoriam, vim illam non mutari, siue quiescat traiectoria, siue moueatur secundum lineam rectam quamcunque, vniformiter seu non vniformiter: Theorema elegans et a nemine hactenus demonstratum.

Corollarium 3.

Si n est variabilis, euidens est $\frac{nn-1}{x^3}$ non esse proportionalem ipsi $\frac{1}{x^3}$ in diuersis locis. Hoc ergo in casu liquet, demonstrationem in Phoron. p. 97. datam esse paralogisticam, vtpote in qua non fit attentio ad variabilitatem aut inuariabilitatem ipsius n, siquidem Auctoris ratiocinium ad vtrumque aequali iure applicari posset.

Corollarium 4.

Si orbita mobilis habeat motum angularem vniformem, sicuti obseruatur in orbitis planetarum, quarum

N 2 apsi-

apsides vniformiter progrediuntur, in quo casu determinationem ipsius F−f intactam praeteriit Newtonus, licet ipsi rei naturae conuenientem, erit (nominando CA = a, et assumta arbitraria = b) $n = \frac{ab + xx}{ab}$. Atque inuenietur ex nostro theoremate: $F - f = \frac{nn-1}{x^3} = \frac{2}{abx} + \frac{x}{aabb}$; Si praeterea $ab = 1$, habebitur $F - f = \frac{2}{x} + x$. Quod si vero ponatur $ab = \frac{1}{2}$, prodibit $F - f = \frac{4}{x} + 4x$.

Corollarium 5.

Si $ab = \infty$, ita vt n euadat $= 1$, per consequens motus angularis nullus seu infinite lentus, quo casu $F - f$ $\frac{2}{abx} + \frac{x}{aabb} = 0$, vt fieri debet. Reuera tunc valor ipsius F fit $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{2dx} d\left(\frac{dx^2}{xxdy^2}\right)$, qui est etiam valor ipsius f, fieri vt par est.

Corollarium 6.

Si lubeat efficere, vt vis centralis in orbita mobili superet vim centralem in orbita immobili dato excessu constante, hoc est, vt $F - f = \frac{1}{a^3}$, faciendum tantum est $\frac{nn-1}{x^3} = \frac{1}{a^3}$, vnde oritur $n = \sqrt{\left(\frac{a^3 + x^3}{a^3}\right)}$; Quare $(n-)dy = -dy + dy\sqrt{\left(\frac{a^3+x^3}{a^3}\right)}$, quod diuisum per x, dat $\frac{n-1}{x}dy$ seu angulum $bCg = -\frac{dy}{x} + \frac{dy}{x}\sqrt{\left(\frac{a^3+x^3}{a^3}\right)}$, qui porro diuisus per tempusculum xdy, dabit velocitatem motus angularis $= -\frac{1}{xx} + \frac{1}{xx}\sqrt{\left(\frac{a^3+x^3}{a^3}\right)}$.

Scholion.

Falsitas ratiocinii Hermanniani ex hoc quoque elucet, quod ex eo (etiamsi n sit constans) sequeretur esse $F - f = \frac{nn - 2n + 1}{x^3}$, quod licet daret differentiam virium centralium reci-

reciproce vt cubum distantiae, tamen cum nostra $\frac{nn-1}{x^3}$ non conueniret respectu intensitatis virium, etenim $nn - 2n + 1$ non potest esse aequale ipsi $nn - 1$, nisi in solo casu vbi $n = 1$, hoc est, vbi orbita ABE circulatur motu infinite paruo seu nullo. Erroris origo in hoc consistit, quod vim centralem in curua vera AN*bg* progenitam, quae vtique in elemento quolibet *bg* dependet a sola eius curuedine et corporis velocitate, eam tamen vim decomponat in collaterales secundum *bm* et *mg*, et quidem ita vt *mg* non tanquam rectam sed tanquam arculum cuius centrum C consideret; quis autem vnquam docuit ita decomponere vires? Quando corpus peruenit ad *b*, vim suam generatam iam habet, adeo vt *mg* vel *md* non magis pro centro haberet punctum C quam aliud quoduis in recta *b*C pro lubitu assumtum. Sed si dicendum quod res est, vis centrifuga, quam corpus habet dum acquisita sua velocitate percurrit particulam curuam *bg*, est vnica et simplex, quae quatenus existit in corpore, a nulla alia circumstantia dependet, atque si eam in mente nostra, quod licet, decomponere velimus in *bm* et *mg*, vtraque harum considerari debet vt recta secundum quas vires componentes agere posse concipiuntur, vt inde tertia resultet secundum directionem *bg*, etiamsi actu ipso componentes non existant, nedum habeant directiones suas (aut saltem alterutram) in arcum formatas, quod absonum esset et a vero claroque concipiendi modo alienissimum.

DE ATTRACTIONE CORPORVM SPHAEROIDICO-ELLIPTICORVM.

AVCTORE
L. Eulero.

Problema I.

Tab. XI. Fig. 1.

Sit in plano horizontali ſeu plano chartae ellipſis, cuius ſingulae particulae vniformiter attrahant in ratione reciproca duplicata diſtantiarum; Ellipſis vero huius axes ſint AB, EF centrumque C, atque in recta verticali per C ducta CO, poſitum ſit punctum O; de quo quaeritur quanta vi id ab ellipſi attrahatur.

Solutio.

Primo perſpicuum eſt, quia ſingulae ellipſis particulae aequali vi attractiua praeditae ponuntur, et punctum O, quippe in verticali CO poſitum, centro ellipſis imminet, id ab omnibus viribus coniunctim ad centrum C tractum iri. Quamobrem vires quibus ad ſingulas ellipſis particulas attrahitur, reſoluendae ſunt in laterales, quarum alterae in OC incidant, alterae directiones habeant horizontales, quae poſteriores negligi poſſunt, cum omnes ſe mutuo deſtruant, ita vt ad problema ſoluendum ſufficiat, vires eas conſiderare, quarum directiones in verticalem OC cadant.

Ponatur iam ſemiaxis $AC = a$; ſemiaxis $CF = b$; et diſtantia $CO = c$. Axi EF ducatur ordinata parallela MM, MM, eique proxima mm; eodemque interuallo ex altera parte ordinatae NN et nn vt habeantur ellipsis elementa MmmM, NnnN, ad quae quanta vi punctum O in directione OC trahatur, inuestigemus. Sit igitur $CP = CQ = x$; $Pp = dx$; erit ex natura ellipsis $PM = QN = \frac{b}{a}\sqrt{(aa-xx)}$. In elemento MmmM consideretur quaeuis particula Xz existente $PX = z$ et $Xx = dz$; eritque ipsa particula $Xz = dxdz$; cuius a puncto O distantia est $\sqrt{(c^2+x^2+z^2)}$. Vis igitur qua punctum O ad hanc particulam trahetur erit vt $\frac{dxdz}{c^2+x^2+z^2}$; ex qua obtinebitur vis lateralis, qua O in directione OC trahitur si fiat vt $\sqrt{(cc+xx+zz)}$ ad c ita vis $\frac{dxdz}{c^2+x^2+z^2}$ ad quaesitum quae ergo erit $= \frac{cdxdz}{(cc+xx+zz)^{\frac{3}{2}}}$; quae integrata posito x constante dabit vim in directione OC, qua O ab elemento PpZX trahitur, integrale vero est $\frac{czdx}{(cc+xx)\sqrt{(c^2+x^2+z^2)}}$. Ponatur $z = PM = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$ habebitur vis, qua O ab elemento PpmM ad C vrgetur, eritque $= \frac{bcdx\sqrt{(aa-xx)}}{(cc+xx)\sqrt{(aacc+aabb+aaxx-bbxx)}}$. Vis ergo, qua punctum O ad C vrgebitur, ab vtroque elemento MmmM et NnnN coniunctim, erit $= \frac{4bcdx\sqrt{(a^2-x^2)}}{(cc+xx)\sqrt{(aa(bb+cc)+(aa-bb)xx)}}$. Huius ergo integrale ita sumtum vt euanescat posito $x = o$, dabit vim qua punctum O ad C attrahitur ab elipsis portione MENNFM. Atque si tum ponatur $x = a$, prodibit vis attractiua ex tota ellipsi orta, quae postulatur.

Formula autem propositi differentialis ita est comparata, vt ad rationalitatem reduci et proinde integrari nequeat, nisi sit $a = b$, quo quidem casu, scilicet quando ellipsis abit in circulum, formula differentialis satis manet perplexa, vt difficulter inde attractio, quae alias facile considerandis elementis circularibus ipsi C concentricis eruitur, inueniri queat. Ingens autem in hoc negotio subsidium adhiberi posse obseruaui, si non integrale indefinitum formulae propositae, sed statim id integrale posito $x = a$ inuestigetur. Quod quo commode perfici queat, sequentes integrationes sunt praemittendae, quae ad hypothesin $x = a$ sunt accommodatae; vbi $\pi : 1$ denotat rationem peripheriae ad diametrum

$$\int dx V(a^2 - x^2) = \frac{\pi a^2}{4}$$
$$\int x^2 dx V(a^2 - x^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi a^4}{4}$$
$$\int x^4 dx V(a^2 - x^2) = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 6} \cdot \frac{\pi a^6}{4}$$
$$\int x^6 dx V(a^2 - x^2) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{\pi a^8}{4}$$

Inventio harum expressionum hoc nititur fundamento, quod sit

$$\int x^{m+2} dx V(aa - xx) = \frac{-x^{m+1}(aa-xx)^{\frac{3}{2}}}{m+4} + \frac{(m+1)a^2}{m+4} \int x^m dx$$

$V(aa-xx)$ generaliter quidem, vti differentialia sumenti patebit. Casu ergo quo $x = a$ erit $\int x^{m+2} dx V(aa-xx) = \frac{(m+1)a^2}{m+4} \int x^m dx V(aa-xx)$. Vt nunc formulas has adhibere queamus, resoluendus est factor ipsius $dx V(aa-xx)$ in seriem, cuius termini teneant potestates ipsius x parium exponentium. Atque primo quidem est $\frac{4bc}{cc-xx} = \frac{4b}{c} - \frac{4bxx}{c^3} + \frac{4bx^4}{c^5} - \frac{4bx^6}{c^7} + \frac{4bx^8}{c^9} -$ etc. atque $\frac{1}{V(aa(bb+cc)+(aa-bb)xx)} = \frac{1}{aV(bb+cc)} - \frac{1(aa-bb)xx}{2a^3(bb+cc)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1 \cdot 3(aa-bb)^2 x^4}{2 \cdot 4 a^5 (bb+cc)^{\frac{5}{2}}} -$ etc. His seriebus in se ductis prodibit $\frac{4bcdx V(aa-xx)}{(cc+xx)V(aa(bb+cc)+(aa-bb)xx)} =$

4bdx

$$4bdx\sqrt{(aa-xx)}\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{ac\sqrt{(bb+cc)}}-\frac{xx}{ac^3\sqrt{(bb+cc)}}+\frac{x^4}{ac^5\sqrt{(bb+cc)}}-\frac{x^6}{ac^7\sqrt{(bb+cc)}}+\text{etc.}\\&\qquad-\frac{1(aa-bb)xx}{2a^3c(bb+cc)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1(aa-bb)x^4}{2a^3c^3(bb+cc)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1(aa-bb)x^6}{2a^3c^5(bb+cc)^{\frac{3}{2}}}+\text{etc.}\\&\qquad\qquad+\frac{1.3(aa-bb)^2x^4}{2.4.a^5c(bb+cc)^{\frac{5}{2}}}-\frac{1.3.(aa-bb)^2x^6}{2.4a^5c^3(bb+cc)^{\frac{5}{2}}}\text{etc.}\\&\qquad\qquad\qquad-\frac{1.3.5(aa-bb)^3x^6}{2.4.6a^7c(bb+cc)^{\frac{7}{2}}}\text{etc.}\end{aligned}\right.$$

Siue sequente forma succinctiori adhibita, habebitur

$$4bdx\sqrt{(aa-xx)}\left\{\begin{aligned}&+\frac{1}{ac\sqrt{(bb+cc)}}\left(1-\frac{xx}{cc}+\frac{x^4}{c^4}-\frac{x^6}{c^6}+\frac{x^8}{c^8}-\text{ect.}\right)\\&+\frac{1(aa-bb)c}{2a^3(bb+cc)^{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{xx}{cc}+\frac{x^4}{c^4}-\frac{x^6}{c^6}+\frac{x^8}{c^8}-\text{etc.}\right)\\&+\frac{1.3(aa-bb)^2c^3}{2.4.a^5(bb+cc)^{\frac{5}{2}}}\left(+\frac{x^4}{c^4}-\frac{x^6}{c^6}+\frac{x^8}{c^8}-\text{etc.}\right)\\&+\frac{1.3.5(aa-bb)^3c^5}{2.4.6a^7(bb+cc)^{\frac{7}{2}}}\left(-\frac{x^6}{c^6}+\frac{x^8}{c^8}-\text{etc.}\right)\\&+\frac{1.3.5.7.(aa-bb)^4c^7}{2.4.6.8a^9(bb+cc)^{\frac{9}{2}}}\left(+\frac{x^8}{c^8}-\frac{x^{10}}{c^{10}}+\text{etc.}\right)\\&+\frac{1.3.5.7.9(aa-bb)^5c^9}{2.4.6.8.10a^{11}(bb+cc)^{\frac{11}{2}}}\left(-\frac{x^{10}}{c^{10}}+\text{etc.}\right)\end{aligned}\right.$$

Si nunc huius expressionis singuli termini seorsim integrentur per formulas datas pro hypothesi $x=a$, attractio quaesita habebitur; at commode hic accidit, vt post integrationem singulae series summationem admittant; quod quo melius pateat consideremus cuiusque seriei integrale seorsim, eritque integrale huius $4bdx\sqrt{(aa-xx)}\left(1-\frac{xx}{cc}+\frac{x^4}{c^4}-\frac{x^6}{c^6}+\frac{x^8}{c^8}-\text{etc.}\right)$ quod reperietur $=\pi\left(a^2b-\frac{1}{4}\frac{a^4b}{cc}+\frac{1.\ 3}{4.\ 6}.\frac{a^6b}{c^4}-\frac{1.3.5a^8b}{4.6.8c^6}+\frac{1.3.5.7a^{10}b}{4.6.8.10c^8}-\text{etc.}\right)$ Simili modo erit $\int 4bdx\sqrt{(aa-xx)}.\ \left(-\frac{xx}{cc}+\frac{x^4}{c^4}-\frac{x^6}{c^6}+\text{etc.}\right)$

=

$=\pi(-\frac{1a^4b}{4c^2}+\frac{1.3.a^6b}{4.6.c^4}-\frac{1.3.5a^7b}{4.6.8c^6}+$ etc.) atque $\int 4bdx\sqrt{(aa-xx)}.(\frac{x^4}{c^4}-\frac{x^6}{c^6}+\frac{x^8}{c^8}-$ etc.$)=\pi(\frac{1.3a^6b}{4.6c^4}-\frac{1.3.5a^7b}{4.6.8.c^6}+$ etc.), etc. Vnde intelligitur si vnica serierum harum sit summabilis etiam omnium summas exhiberi posse. Considero igitur primam, cui hanc do formam $\pi bcc(\frac{aa}{cc}-\frac{1a^4}{4c^4}+\frac{1.3a^6}{4.6c^6}-\frac{1.3.5a^8}{4.6.8c^8}+$ etc.) positoque $\frac{a}{c}=r$, pono $r^2-\frac{1}{4}r^4+\frac{1.3}{4.6}r^6-\frac{1.3.5}{4.6.8}r^8+$ etc. $=s$. hinc erit differentiando $\frac{ds}{dr}=2r-1r^3+\frac{1.3}{4}r^5-\frac{1.3.5}{4.6.}r^7+$ etc. atque $\frac{ds}{r^3}=\frac{2dr}{r^2}-1dr+\frac{1.3}{4}r^2dr-\frac{1.3.5}{4.6}r^4dr+$ etc. et integrando $\int\frac{ds}{r^3}=-\frac{2}{r}-r+\frac{1}{4}r^3-\frac{1.3}{4.6}r^5+$ etc. $=-\frac{2}{r}-\frac{s}{r}$ Ex aequatione ergo $\int\frac{ds}{r^3}+\frac{2+s}{r}=0$ oritur $\frac{ds}{r}+rds-2dr-sdr=0$ seu $ds-\frac{srdr}{1+rr}=\frac{2rdr}{1+rr}$, quae per $\sqrt{(1+rr)}$ diuidendo abit in $\frac{ds}{\sqrt{(1+rr)}}-\frac{srdr}{(1+rr)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2rdr}{(1+rr)^{\frac{3}{2}}}$, cuius integrale est $\frac{s}{\sqrt{(1+rr)}}=C-\frac{2}{\sqrt{(1+rr)}}$ $(=2-\frac{2}{\sqrt{(1+rr)}})$ quia facto $r=0$ fit $s=0$. Erit igitur $s=2\sqrt{(1+rr)}-2=\frac{2\sqrt{(aa+cc)}-2c}{c}=\frac{aa}{cc}-\frac{1a^4}{4c^4}+\frac{1.3a^6}{4.6c^6}-$ etc. Consequenter habebitur $\pi(aab-\frac{1a^4b}{4c^2}+\frac{1.3a^6b}{4.6c^4}-\frac{1.3.5a^8b}{4.6.8c^6}+$ etc.$)=2\pi bc(\sqrt{(aa+cc)}-c)$. Quocirca superiores integrationes erunt

$\int 4bdx\sqrt{(aa-xx)}.(1-\frac{xx}{cc}+\frac{x^4}{c^4}-$ etc.$)=\pi(2bc\sqrt{(aa+cc)}-2bcc)$

$\int 4bdx\sqrt{(aa-xx)}.(-\frac{xx}{cc}+\frac{x^4}{c^4}-$ etc.$)=\pi(2bc\sqrt{(aa+cc)}-2bcc-aab)$

$\int 4bdx\sqrt{(aa-xx)}(\frac{x^4}{c^4}-\frac{x^6}{c^6}+$ etc.$)=\pi(2bc\sqrt{(aa+cc)}-2bcc-aab+\frac{1a^4b}{4cc})$.

$\int 4bdx\sqrt{(aa-xx)}(-\frac{x^6}{c^6}+\frac{x^8}{c^8}-$ etc.$)=\pi(2bc\sqrt{(aa+cc)}-2bcc-aab+\frac{1a^4b}{4cc}-\frac{1.3a^6b}{4.6c^4})$

etc.

Pro singularum ergo serierum superioris formulae differentialis integralibus nacti sumus expressiones finitas. Tantum igitur super est, vt eas substituamus, quo facto pro integrali

grali formula $\frac{4bcdx\sqrt{(aa-xx)}}{(cc+xx)\sqrt{(aa(bb+cc)+(aa-bb)xx)}}$ atque ideo pro quantitate attractionis quaesitae puncti O ad centrum ellipsis AEBFA sequens orietur valor. $\pi\left(\frac{2b\sqrt{(aa+cc)}}{a\sqrt{(bb+cc)}}-\frac{2bc}{a\sqrt{(bb+cc)}}+\frac{bcc(aa-bb)\sqrt{(aa+cc)}}{a^3(bb+cc)^{\frac{3}{2}}}-\frac{bc^3(aa-bb)}{a^3(bb+cc)^{\frac{3}{2}}}-\frac{bc(aa-bb)}{2a(bb+cc)^{\frac{3}{2}}}+\right.$ etc.

Vel cum ad applicationem ad computum expediat ipsas series retinere, quo singulorum terminorum integralia algebraice exhiberi queant, praecipue casibus quibus a et b non multum a se inuicem differunt, pono $\sqrt{(aa+cc)}=\sqrt{(bb+cc+aa-bb)}$ eritque $\sqrt{(aa+cc)}=\sqrt{(bb+cc)}+\frac{1(aa-bb)}{2\sqrt{(bb+cc)}}-\frac{1.1(aa-bb)^2}{2.4(bb+cc)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1.1.3(aa-bb)^3}{2.4.6(bb+cc)^{\frac{5}{2}}}$ &c. Quo substituto prodibit atractio quaesita $=$

$$\pi\left\{\begin{array}{l}
\frac{2b}{a}+\frac{b(aa-bb)}{a(bb+cc)}-\frac{1b(aa-bb)^2}{4a(bb+cc)^2}+\frac{1.3b(aa-bb)^3}{4.6a(bb+cc)^3}\\
-\frac{2bc}{a\sqrt{(bb+cc)}}+\frac{bcc(aa-bb)}{a^3(bb+cc)}+\frac{1bc^2(aa-bb)^2}{2a^3(bb+cc)^2}-\frac{1.1bc^2(aa-bb)^3}{2.4a^3(bb+cc)^3}\\
\qquad-\frac{bc^3(aa-bb)}{a^3(bb+cc)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3bc^4(aa-bb)^2}{4a^5(bb+cc)^2}+\frac{1.3bc^4(aa-bb)^3}{2.4a^5(bb+cc)^3}\\
\qquad-\frac{bc(aa-bb)}{2a(bb+cc)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3bc^5(aa-bb)^2}{4a^5(bb+cc)^{\frac{5}{2}}}+\frac{3.5bc^6(aa-bb)^3}{4.6a^7(bb+cc)^3}\\
\qquad\qquad-\frac{1.3bc^3(aa-bb)^2}{2.4a^3(bb+cc)^{\frac{5}{2}}}-\frac{3.5bc^7(aa-bb)^3}{4.6a^7(bb+cc)^{\frac{7}{2}}}\\
\qquad\qquad+\frac{1.1.3bc(aa-bb)^2}{4.2.4a(bb+cc)^{\frac{5}{2}}}-\frac{1.3.5bc^5(aa-bb)^3}{2.4.6a^5(bb+cc)^{\frac{7}{2}}}\\
\qquad\qquad\qquad+\frac{1.1.3.5bc^3(aa-bb)^3}{4.2.4.6a^3(bb+cc)^{\frac{7}{2}}}\\
\qquad\qquad\qquad-\frac{1.3.1.3.5bc(aa-bb)^3}{4.6.2.4.6a(bb+cc)^{\frac{7}{2}}}
\end{array}\right.$$

Huius progreſſionis altera terminorum pars eſt rationalis altera irrationalis, et quemadmodum ſinguli progrediantur exceptis vnciis facile patet. Vnciae autem rationalium ita formantur quaeque ex ſuperiore, vt factor ad dextram reiiciatur, et ad ſiniſtram praecedens apponitur, ſic ex $\frac{1.3}{4.6}$ reiiciendo $\frac{3}{6}$ fit $\frac{1}{4}$ et praecedens, qui prodit minuendo tam numeratorem quam denominatorem binario, et eſt $-\frac{1}{2}$ appoſitus dat $-\frac{1.1}{2.4}$ vnciam ſequentem. Vnciae vero irrationalium ex ſuperioribus formantur ſola appoſitione ad ſiniſtram. Qua lege obſeruata, quousque libuerit hanc expreſſionem continuare licebit; termini autem, quos hic appoſuimus abunde ſufficiunt, ſi differentia inter axes ſit ſatis exigua, ſeu ellipſis circulo propinqua; pro quibus caſibus potiſſimum hoc problemate vtemur. Q. E. I.

Corollarium.

Caſu ergo, quo ellipſis abit in circulum, cuius ſemidiameter eſt $=b$, ſeu quo fit $a=b$, ob omnes terminos praeter primos euaneſcentes, attractio puncti O ad centrum circuli C erit $=\pi\left(2-\frac{2c}{\sqrt{(bb+cc)}}\right)$, prorſus vt altero modo, quo elementa circularia conſiderantur, facilius reperitur.

Problema II.

Fig. 2. Si ſphaeroides generetur conuerſione ellipſis AEBF circa ſuum axem minorem EF eiusque particulae omnes aequali vi attractiua praeditae fuerint, quae diſtantiarum quadratis reciproce ſit proportionalis, inuenire vim attractiuam corporis in polo E ſiti, verſus centrum ſphaeroidis.

So-

Solutio.

Posito semiaxe minore CE $= n$, maiore AC $= m$; et abscissa EP $= x$, erit PM $= \frac{m}{n}\sqrt{(2nx - xx)}$. Concipiatur sectio huius sphaeroidis ad axem EP normalis et per P transiens, erit ea circulus cuius radius erit PM $= \frac{m}{n}\sqrt{(2nx - xx)}$, a quo corpusculum in E distat interuallo EP $= x$. Facta ergo coroll. praec. applicatione erit ob $c = x$ et $b = \frac{m}{n}\sqrt{(2nx - xx)}$, attractio corporis in E ad hunc circulum $= \pi\left(x - \frac{nxx}{\sqrt{(2mmnx + nnxx - mmxx)}}\right)$. Atque ad discum rotundum elemento PpmM genitum $= 2\pi\left(dx - \frac{nxdx}{\sqrt{(2mmnx - (mm-nn)xx)}}\right)$, cuius integrale dabit attractionem portionis sphaeroidis ab EPM genitae; quod vt commode exprimatur pono $(2m^2nx - (mm-nn)xx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{m\sqrt{2nx}} + \frac{1(mm-nn)\sqrt{x}}{4m^3n\sqrt{2n}} + \frac{1.3(m^2-n^2)^2x\sqrt{x}}{4.8m^5n^2\sqrt{2n}} + \frac{1.3.5(m^2-n^2)^3x^2\sqrt{x}}{4.8.12m^7n^3\sqrt{2n}}$ — etc.

Vnde integrale erit $2\pi\left(x - \frac{2nx^{\frac{3}{2}}}{3m\sqrt{2n}} - \frac{1(mm-nn)x^2\sqrt{2nx}}{4.5m^3nn} - \frac{1.3(m^2-n^2)^2x^3\sqrt{2nx}}{4.8.7m^5n^2} - \text{etc.}\right)$ Hincque ponendo $x = 2n$ prodibit totalis attractio ad sphaeroides $2\pi\left(2n - \frac{4nn}{3m} - \frac{1.(mm-nn)4n^3}{4.5m^3} - \frac{1.3(m^2-n^2)^2 16n^4}{4.8.7m^5} - \frac{1.3.5(mm-nn)^3 32n^5}{4.8.12.9.m^7} - \text{etc.}\right) = 4\pi n - 8\pi nn\left(\frac{1}{3m} + \frac{1(mm-nn)}{2.5m^3} + \frac{1.3(mm-nn)^2}{2.4.7m^5} + \frac{1.3.5(mm-nn)^3}{2.4.6.9m^7} + \text{etc.}\right.$ quae series vehementer conuergit et cito verum valorum exhibet nisi sphaeroides multum a sphaera discrepet. Q. E. I.

Corollarium 1.

Si sphaeroides abeat in globum cuius radius $= n$, fiet $m = n$ atque attractio in quoque eius superficiei puncto erit $= \frac{4\pi n}{3}$ euanescentibus reliquis terminis omnibus;

Attractiones ergo diuersarum sphaerarum homogenearum in ipsis superficiebus sunt vt diametri.

Corollarium 2.

Si sphaeroides sit admodum propinquum sphaerae vt differentia $m-n$ sit quasi infinite parua, ponatur $m=n+dz$; erit attractio in polis huius sphaeroidis $=4\pi(\frac{n}{3}+\frac{4dz}{15}-\frac{4dz^2}{42n}+\frac{199dz^3}{945n^2}-\text{etc.})$. Qui termini abunde sufficiunt, si dz respectu n fuerit valde paruum.

Problema III.

Fig. 3. In praecedente sphaeroide, quae generatur conuersione ellipsis AEBF circa axem EF, inuenire attractionem, qua corpus sub aequatore in A situm ad centrum C vrgetur.

Solutio.

Maneat vt ante $AC=m$; $CE=n$ sitque abscissa $AP=x$ erit $PM=\frac{n}{m}\sqrt{(2mx-xx)}$. Per P concipiatur sectio facta ad AB normalis quae erit ellipsis, cuius alter semiaxis erit $=\frac{n}{m}\sqrt{(2mx-xx)}$ alter vero $=\sqrt{(2mx-xx)}$; ad hanc ergo ellipsin quanta vi corpus in A positum attrahatur, determinari oportet; id quod subsidio primi problematis efficietur. Erit autem facta applicatione $c=x$; $b=\sqrt{(2mx-xx)}$ et $a=\frac{n}{m}\sqrt{(2mx-xx)}$ atque $\sqrt{(bb+cc)}=\sqrt{2mx}$; et $aa-bb=-\frac{(mm-nn)(2mx-xx)}{mm}$, quibus valoribus substitutis sequens prodibit expressio pro attractione quaesita in A, a sectione elliptica per M M facta. =

π

$$\pi\begin{cases}\frac{2m}{n} - \frac{\sqrt{2mx}}{n} - \frac{(mm-nn)}{mn} - \frac{(mm-nn)^2 x}{2mmn^3} \\ + \frac{(mm-nn)}{4m^2n^3\sqrt{2m}}((2mm-nn)x\sqrt{x}+2mnn\sqrt{x}) \\ + \frac{(mm-nn)^2}{16m^5n^5}((3m^4-2mmnn-n^4)x^2+4mn^2(m^2+n^2)x-4m^2n^4) \\ - \frac{3(mm-nn)^2}{120m^5n^5\sqrt{2m}}((8m^4-4mmnn-n^4)x^2\sqrt{x}+4mn^2(2m^2+n^2)x\sqrt{x}- \\ \qquad 4m^2n^4\sqrt{x}) \text{ etc.}\end{cases}$$

Quae expressio multiplicata per dx dabit attractionem corpusculi in A siti ad discum ellipticum crassitiei dx. Huius ergo integrale si ponatur $x=2m$ dabit attractionem puncti A ad totam sphaeroidem; quae attractio sequentem habebit valorem

$$\pi\begin{cases}\frac{4mm}{n} - \frac{2(mm-nn)}{n} \\ \frac{-8mm}{3n} - \frac{(mm-nn)^2}{n^6} \\ \qquad + \frac{4(mm-nn)}{n^3}(\frac{1}{3}mm+\frac{1}{15}nn) \\ \qquad + \frac{(m^2-n^2)^2}{2m^2n^5}(m^4+\frac{1}{3}m^2n^2-\frac{1}{3}n^4) \\ \qquad - \frac{3(m^2-n^2)^2}{m^2n^5}(\frac{1}{7}m^4+\frac{1}{7.5}m^2n^2-\frac{1}{7.5.3}n^4)\end{cases}$$

qui reductus in sequentem formam abit

$$\pi\left(\frac{4mm}{3n} - \frac{(mm-nn)}{5n^3}(mm+\tfrac{11}{3}nn) + \frac{(mm-nn)^2}{14m^2n^5}(m^4+\tfrac{17}{15}m^2n^2-\tfrac{29}{15}n^4)\text{etc.}\right)$$

Q. E. I.

Corollarium.

Si differentia inter m et n sit minima ita vt sit $m = n + dz$ erit grauitas sub aequatore in nostra sphaeroide $= 4\pi(\frac{n}{3}+\frac{dz}{5}-\frac{2dz^2}{35n})$, cum contra grauitas sub polo inuenta sit $= 4\pi(\frac{n}{3}+\frac{4dz}{15}-\frac{2dz^2}{21n})$, ita vt grauitas sub polo maior sit parte $4\pi(\frac{dz}{15}-\frac{dz^2}{105n})$. Si sit $n:m = 100:101$ fiet grauitas sub polo ad grauitatem sub aequatore vt 509 ad 508.

Proble-

Problema IV.

Si planeta conſtans ex materia vniformi, cuius ſingulae particulae attrahant in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, habeat motum vertiginis circa axem, indeque grauitas vera ſub aequatore a vi centrifuga diminuatur parte ſua $\frac{1}{k}$; inuenire eius planetae rationem inter axes per polos et aequatorem ductos.

Solutio.

Ponamus decrementum grauitatis a vi centrifuga ortum tam eſſe exiguum ratione ipſius grauitatis, vt figura planetae non multum a ſphaera diſcrepet. Si enim nulla eſſet vis centrifuga dubium non eſt, quin planeta ipſam ſphaericam figuram induere debeat. Cum ergo figura planetae tantillum a ſphaerica diſcrepet, ea pro ſphaeroide elliptica tuto haberi poterit, cuius ellipſis generantis axes non multum a ſe inuicem diſcrepent. Erit vero planeta ſolidum rotundum circa axem per polos ductum; ita vt eius figura concipi queat, tanquam ſphaerois elliptica, cuius poli cum polis planetae congruant.

Fig. 4. Sit ergo planetae figura quam quaerimus ſphaerois elliptica genita conuerſione ellipſis APBQ circa axem PQ ita vt P et Q futuri ſunt poli planetae et PC ſemiaxis planetae; et AC ſemidiameter aequatoris. Ponatur $PC = n$ et $AC = m$; et quia differentia inter hos ſemiaxes eſt valde parua ſit $m = n + dz$. Sit grauitas ſub polo $P = g$, et ſub aequatore ſi nullum haberet motum vertiginis $= \gamma$, erit per coroll. praec. $g:\gamma = \frac{n}{3} + \frac{4dz}{15} - \frac{2dz^2}{21n} : \frac{n}{3} + \frac{dz}{5} - \frac{3dz^2}{35n} = n + \frac{4dz}{5} - \frac{2dz^2}{7n} : n + \frac{3dz}{5} - \frac{9dz^2}{35n}$. Figura autem planetae ita debet eſſe comparata, vt eam planeta con-

ſer-

seruare posset, etiamsi totus fluidus foret; quod eueniet si omnes pressiones versus centrum tam ex vi grauitatis quam vi centrifuga ortae sese in aequilibrio teneant. Si ergo concipiatur tubus reflexus ACP a polo per centrum ad aequatorem pertingens; atque aqua repletus, pondus aquae in tubo AC contentae aequale esse debebit ponderi aquae in tubo PC contentae, siquidem tubus vbique eandem habeat amplitudinem. Nam si pressio aquae in altero crure praeualeret, tum aqua ex altero efflueret, figuramque planetae immutaret. Pressio vero aquae in vtroque tubo contentae habebitur, si singularum particularum pondera colligantur; quo facto vtrobique eadem summa emergere debebit. Ad quod praestandum notari debet in eodem crure grauitates seu nisus ad centrum esse distantiis a centro proportionales, si quidem figura a sphaerica non multum differat; et simili modo vim centrifugam eandem retinere rationem. Quamobrem aquae in canali AC vera pressio obtinebitur si eius pondus a grauitate ortum, diminuatur sui parte $\frac{1}{k}$. Ad vtramque ergo pressionem inueniendam consideretur in tubo AC aquae particula $Xx = dx$, posita $CX = x$; cuius pondus si in A esset posita foret γdx; quod ergo se habebit ad pondus eiusdem particulae in suo loco X versantis vt CA (m) ad CX(x). ita vt pondus huius particulae futurum sit $= \frac{\gamma x dx}{m}$; cuius integrale $\frac{\gamma xx}{2m}$ dabit pondus columnae CX et posito $x = m$ habebitur pondus totius columnae $AC = \frac{\gamma m}{2}$ a sola grauitate ortum. Simili modo pondus columnae PC erit $= \frac{gn}{2}$. At inuentum pondus columnae AC ob vim centrifugam minuendum est sui parte $\frac{1}{k}$, ita vt vera pressio columnae AC deorsum futura sit $= \frac{\gamma m}{2}\left(\frac{k-1}{k}\right)$ quae aequalis esse de-

 bet

bet pressioni columnae $PC = \frac{gn}{2}$; vnde sequens obtinetur aequatio $\gamma mk - \gamma m = gnk$. Cum vero sit $m = n + dz$; et $g : \gamma = n + \frac{4dz}{5} - \frac{2dz^2}{7n} : n + \frac{3dz}{5} - \frac{9dz^2}{35n}$ erit substituendo $nnk + \frac{4nkdz}{5} - \frac{2kdz^2}{7} = (n + dz)(k - 1)(n + \frac{3dz}{5} - \frac{9dz^2}{35n} =$ $n^2k + \frac{8nkdz}{5} - \frac{12kdz^2}{35} - n^2 - \frac{8ndz}{5} + \frac{12dz^2}{35}$ vnde sequens concinnatur aequatio $\frac{4nkdz}{5} - \frac{2kdz^2}{35} = n^2 - \frac{8ndz}{5} + \frac{12dz^2}{35}$ ex qua eruitur $dz = \frac{5n}{4(k+2)} + \frac{25n(k+6)}{8(k+2)(26k^2+107k+32)}$, qui posterior terminus ob k valde magnum facile negligitur. Erit itaque $AB : PQ = 4k + 13 : 4k + 8$. Q. E. I.

Corollarium 1.

In terra ergo nostra, vbi vis centrifuga sub aequatore est pars $\frac{1}{289}$ ipsius grauitatis, fiet $K = 289$; ideoque per regulam inuentam erit diameter aequatoris ad axem terrae vt 1169 ad 1164 hoc est proxime vt 234 ad 233. pro qua ratione Newton inuenit ut 230 ad 229.

Corollarium 2.

In superficie solis ponit Newton pondus corporis cuiusque $\frac{1000}{41}$ quod in terra esset 1. Deinde cum sol vertatur circa axem suum diebus circiter 25. eiusque diameter sit ad diametrum terrae 10000 ad 104 erit vis centrifuga sub aequatore solis $= \frac{10000}{104} \cdot \frac{1}{625} \cdot \frac{1}{289}$ ideoque erit $K = \frac{104 \cdot 625 \cdot 289}{410} = 17666$. In sole ergo erit diameter aequatoris ad eius axem vt 14136 ad 14135.

Co-

Corollarium 3.

In Ioue ponit Newton pondus corporis, quod in terra 1 esset $= \frac{167}{82}$. Deinde cum Iupiter conuertatur horis 9, 56′ eiusque diameter sit ad diametrum terrae vt 1077 ad 104 erit vis centrifuga sub aequatore Iouis $= \frac{1077}{104} \cdot \frac{29}{5} \cdot \frac{1}{289}$. Ergo pro Ioue fit $K = \frac{167 \cdot 104 \cdot 5 \cdot 289}{82 \cdot 29 \cdot 1077} = 9\frac{4}{5}$. Vnde inuenitur diameter aequatoris Iouis ad eius axem vt 261 ad 236 hoc est proxime vt 10 : 9.

In his autem ponuntur corpora solis et planetarum horum ex materia uniformi composita.

D. B.

COMMENTATIONES DE IMMVTATIONE ET EXTENSIONE PRINCIPII CONSERVATIONIS VIRIVM VIVARVM, QVAE PRO MOTV CORPORVM COELESTIVM REQVIRITVR.

§. 1.

In corporibus simplicibus, siue verticaliter siue sub directione quacunqne variata cadentibus, velocitates acquisitas ex sola lapsus altitudine verticali determinari res est notissima, istaque proprietas extendi potest ad systema corporum nexu quocunque a se inuicem pendentium, eo qui ab aliquo tempore omnibus pariter notus est, modo. Istae quidem leges dynamicae, quas nomine conseruationis virium viuarum designant, consideratae tantum fuerunt in corporibus prope superficiem terrae cadentibus, vbi viae descriptae pro infinite paruis haberi possunt ratione distantiae a centro terrae tamquam centro virium, versus quod corpora terrestria grauitate sollicitantur, sed tamen incredibili rerum mechanicarum successu et incremento fuerunt consideratae; interim non difficile admodum est praefatas leges extendere, atque ad plura centra virium reuocare, ita vt ad motum corporum coelestium definiendum, non sine calculorum astronomicorum compendio, vtiliter applicari possint. Quae hanc in rem animum subierunt, breuibus calamoque festinante exponam.

§. 2.

§. 2. Quamuis res per se sit satis perspicua, quomodo pro simplici centro virium simplicique puncto graui calculus sit ponendus, quum accessus ad centrum virium rationem habet finitam ad distantiam eius initialem, nolo tamen casum istum omittere; iuuat enim ordine procedere.

Fuerit itaque centrum virium in C (Fig. 1), fueritque corpus simplex quiescens positum in A, indeque peruenerit in punctum D viam describens qualemcunque, suamque velocitatem a sola grauitatis actione versus C mutans: Ducatur centro C arcus circuli DB secans rectam AC in B: dico velocitatem corporis in D non aliam fore atque foret in B, cum corpus A rectam describit AB.

Demonstrationem non addo, quia facilis est, et tanquam corollarium patebit ex iis, quae de pluribus centris virium, ceu paullo minus obuia, demonstrabo.

§. 3. Igitur si fuerit distantia initialis $AC = a$; DC vel $BC = x$; grauitatio in D vel B (pono enim grauitatis vim a sola pendere distantia inter corpus centrumque virium) $= \xi$; velocitas in D vel $B = v$, erit $\frac{1}{2} vv = \int - \xi dx$, vbi integratio ita erit instituenda, vt facta $x = a$, fiat $\int - \xi dx = 0$.

§. Haec motum corporum coelestium propius respicient, si ponatur $\xi = \frac{mm}{xx}$, intelligendo per mm quantitatem constantem, hocque modo fiet $vv = \frac{2mm}{x} - \frac{2mm}{a}$ siue $v = \sqrt{(\frac{2mm}{x} - \frac{2mm}{a})}$ istamque hypothesin, qua ponimus grauitatis vim sequi rationem inuersam quadratorum distantiarum a centro virium, in sequentibus retinebimus.

§. 5. Ponatur iam corpus a quiete primo rectam describere $AE = b$ (Fig. 2.) deinde velocitate acquisita

$\sqrt{}(\frac{2mm}{a-b}) - \frac{2mm}{a})$ ſeu $\sqrt{\frac{2mmb}{aa-2b}}$ ſub directione ad priorem perpendiculari deſcribere ſponte curuam EDFGE, erit velocitas in D adhuc $= \sqrt{}(\frac{2mm}{x} - \frac{2mm}{a})$: Natura autem curuae EDFGE ex eo etiam deduci poſſet, quod ducta tangente DH et ad hanc perpendiculari CH, ſit, vt notum eſt, velocitas iſti CH reciproce proportionalis: Quia vero haec iamdiu a Newtono accuratiſſime definita fuerunt, ponemus cum eo pro hac curua ellipſin ſpecie datam cuius focus alter ſit in centro virium C et quae centrum habeat in L. Hoc poſito ſi conſideretur eſſe velocitatem in E ad velocitatem in F ſicut CF ad CE, habetur ex iſta analogia theorema concinnum *quod ſit* AE(b)$=$CF *et* AC(a)$=$EF; vnde cum fuerit $v = \sqrt{}(\frac{2mm}{x} - \frac{2mm}{a})$ ſequitur, eſſe iam $v = \sqrt{}(\frac{2mm}{CD} - \frac{2mm}{EF})$, ex qua formula velocitates expedite habentur.

§. 6. In orbitis fere circularibus, quales planetae deſcribunt, poteſt cenſeri CD$=$EL$+p$.LC, intelligendo per p rationem coſinus anguli ECD ad ſinum totum: ſicque fit $v = \sqrt{}(\frac{2mm}{EL+p.LC} - \frac{2mm}{EF}) =$ (proxime) $\sqrt{}(\frac{mm}{EL} - \frac{2mm.p.LC}{EL^2}) = \frac{m}{\sqrt{EL}} - \frac{m.p.LC}{EL\sqrt{EL}}$. Ex qua formula conſequitur, ſi velocitas minima planetae in aphelio conſtituti dicatur A, atque ſinus verſus anguli heliocentrici ECD vocetur q, fore velocitatem planetae vbique $= A + q\frac{LC}{CF}A$. Eſt itaque in vna eademque orbita incrementum velocitatis proportionale ſinui verſo anguli quem facit linea apſidum cum linea a ſole ad planetam ducta. In diuerſis autem planetis ſunt incrementa velocitatum pro ſimili poſitione in ratione directa excentricitatum et reciproca temporum periodicorum.

rum. Haec ita in orbitis planetarum ceu tantum non circularibus.

§. 7. Si orbitae ſint fere parabolicae, quales cometae faciunt, euaneſcit in formula §. 5. terminus $\frac{2mm}{EF}$, fitque ſimpliciter $v = \sqrt{\frac{2mm}{CD}}$, ſic vt velocitates proxime ſequantur rationem ſubduplicatam diſtantiarum a ſole. Conuenit haec propoſitio cum iis, quae Newtonus habet in *phil. nat. princ. math. edit.* 2. *p.* 445. vbi dicit, *velocitas cometae omnis erit ſemper ad velocitatem planetae cuiusuis circa ſolem in circulo reuoluentis in ſubduplicata ratione duplae diſtantiae planetae a centro ſolis ad diſtantiam cometae a centro ſolis quam proxime.* Nam ſi diſtantia planetae circulum circa ſolem facientis ſit $= s$, erit ſecundum formulas noſtras §. 5. velocitas planetae exprimenda per $\sqrt{\frac{mm}{s}}$ atque ſic habebitur $\sqrt{\frac{mm}{CD}} : \sqrt{\frac{mm}{s}} = \sqrt{2s} : \sqrt{CD}$, quae analogia propoſitionem Newtoni demonſtrat.

§. 8. Docet theorema §. 2. expoſitum, quo ſenſu principium conſeruationis virium viuarum in corpore ſimplici ſit accipiendum, quando centrum virium non infinite diſtat: Nunc vero perpendamus, quemadmodum idem principium pro ſyſtemate corporum compoſito adhiberi ſolitum pro noſtro praeſenti negotio immutandum atque extendendum ſit.

Hunc in finem obſeruabimus non dari centrum grauitatis in corpore, cuius extenſio rationem finitam habet ad diſtantiam a centro virium, ſi per centrum grauitatis intelligatur punctum, ex quo corpus ſuſpenſum in omni ſitu ad aequilibrium compoſitum eſſe debeat.: Nec datur punctum ex cuius acceſſu ad centrum virium liceat definire incrementum virium viuarum, quod punctum in

cor-

corporibus finitae magnitudinis et a centro virium infinite distantibus est ipsum centrum grauitatis: Erit autem conseruatio virium viuarum pro ea, quam hucusque commentati sumus hypothesi grauitationis, hunc in modum accipienda.

Si nempe systema corporum quocunque nexu a se inuicem pendentium sola grauitatione motum acquisiuerit a quiete, fiet vt in quouis situ summa singulorum corporum per quadratum suae velocitatis multiplicatorum sit aequalis summae omnium quantitatum $M \times \left(\frac{2mm}{x} - \frac{2mm}{a}\right)$, intelligendo per M corpus seu massam corporis cuiusuis ad systema pertinentis, per x distantiam eiusdem a centro virium pro dato situ et per a distantiam similem pro situ initiali.

Si vero grauitatio in distantia x generaliter ponatur ξ, erit loco quantitatis $M \times \left(\frac{2mm}{x} - \frac{2mm}{a}\right)$ vbique accipienda quantitas $M \times \int -2\xi dx$. *conf.* §. 3.

Denique quum corpora non a quiete moueri incipiunt, tunc a singulis velocitatum quadratis modo nominatis subtrahenda sunt quadrata velocitatum initialium.

Ad normam huius principii sequens tractabimus exemplum.

§. 9. *Problema.* Sit centrum virium in C (Fig. 3.) versus quod omnia corpora trahantur in ratione reciproca quadrata distantiarum et directa massarum: concipiatur virga rigida AB grauitatis expers, mota circa punctum fixum D: His positis quaeruntur in quouis virgae situ velocitates corporum A et B virgae adhaerentium.

So-

Solutio. Consideretur statim virga in situ AB, quo corpora in directum posita sunt cum centro virium, sitque massa corporis $A = M$; massa corporis $B = N$; velocitas corporis $A = f$, velocitas corporis $B = \frac{BD}{AD} f$: Deinde fingatur virga peruenisse in situm $A'B'$, ponaturque velocitas in $A' = v$: velocitas in $B' = \frac{BD}{AD} v$: tum centro C ducantur arcus circulares $A'E$ et $B'F$, atque sic habetur vi superioris paragraphi,

$$M \times (vv - ff) + N \times \frac{BD^2}{AD^2} \times (vv - ff) = M \times \left(\frac{2mm}{CE} - \frac{2mm}{CA}\right) + N \times \left(\frac{2mm}{CF} - \frac{2mm}{CB}\right),$$

ex qua aequatione obtinetur haec altera:

$$vv = ff + \left[M \times \left(\frac{2mm}{CE} - \frac{2mm}{CA}\right) + N \times \left(\frac{2mm}{CF} - \frac{2mm}{CB}\right)\right] : \left[M + \frac{BD^2}{AD^2} N\right].$$

§. 10. *Corollarium* 1. Si punctum fixum D sit in ipso corporum *gravitatis centro* communiter sic dicto (aptius autem hic dicitur centrum inertiae) id est, si sit $BD = M : N$, fiet

$$vv = ff + \left[M \times \left(\frac{2mm}{CE} - \frac{2mm}{CA}\right) + N \times \left(\frac{2mm}{CF} - \frac{2mm}{CB}\right)\right] : \left[M + \frac{MM}{N}\right]$$

Ducatur iam $A'P$ perpendiculariter ad AB, ponaturque $AD = a$; $CD = A$; $DP = x$, reperietur subducto calculo $CE = \surd(AA + 2Ax + aa)$; $CA = A + a$; $CF = \surd(AA - \frac{2M}{N} Ax + \frac{MM}{NN} aa)$; $CB = A - \frac{M}{N} a$.

§. 11. *Corollarium* 2. Velocitas minima corporum non est in situ $A''B''$ ad situm AB perpendiculari, sed quod calculus docet in situ tali, in quo puncta E et F coincidunt; coincidunt autem, si sumitur $x = -\left(\frac{N-M}{2N}\right) \times \frac{aa}{A}$. Cadit itaque tunc punctum P infra D, si corpus A minus sit corpore B, et sit angulus ADA' recto maior.

§. 12. *Corollarium* 3. Aequatio paragraphi decimi non quidem eſt admodum prolixa; poteſt tamen ſine ſenſibili errore contrahi in caſu quo valor A admodum excedit valores a et x: caute tamen procedendum eſt, vt omnes valores inter ſe comparabiles retineantur: atque hoc modo cenſendum erit

$$\frac{1}{CE} = \frac{1}{A} - \frac{x}{AA} + \frac{3xx - aa}{2A^3},$$
$$\frac{1}{CA} = \frac{1}{A} - \frac{a}{AA} + \frac{aa}{A^3},$$
$$\frac{1}{CF} = \frac{1}{A} + \frac{Mxx}{NAA} + \frac{3MMxx - MMaa}{2NNA^3},$$
$$\frac{1}{CB} = \frac{1}{A} + \frac{Maa}{NAA} + \frac{MMaa}{NNA^3}.$$

His ſubſtitutis valoribus in aequatione paragraphi decimi, deſignatoque ſinu toto per vnitatem, ſinu anguli ADA per z, prodit formula praeter ſpem ſimpliciſſima

$$vv = ff - \frac{3mm}{A} \times \frac{aa}{AA} \times zz.$$

§. 13. *Coroll.* 4. Vt calculus abſolui poſſit omnibus modis, requiritur vt ambo termini in quantitatibus homogeneis definiantur; proptereaque valor ff, qui quadratum velocitatis in A exprimit, alio modo eſt deſignandus. Sumatur igitur in linea CA prolongata $DM = DC = A$ puteturque corpus verſus centrum virium C ſolicitatum delabi a quiete per altitudinem MD; ſic erit velocitas corporis in $D = \frac{m}{\sqrt{A}}$ (per §. 4.) hacque velocitate vi §. 5. circulum deſcribere poterit corpus circa centrum C. Sit nunc iſta, quam diximus, corporis velocitas ad velocitatem f vt n ad 1, eritque $nf = \frac{m}{\sqrt{A}}$ et $ff = \frac{mm}{nnA}$.

Notabimus hic, quando haec ad ſyſtema lunae applicare animus ſit, ſi C ſit centrum ſolis, B centrum terrae, A centrum lunae, poſſe tunc velocitatem $\frac{m}{\sqrt{A}}$, quam

nemp

nempe corpus libere a quiete cadendo per altitudinem MD acquirit, haberi pro velocitate, quacum terra circa solem reuoluitur: Si vero statuatur $\frac{AD}{CD} = \frac{60}{22000}$; tempus periodicum lunae 27 dierum, 7 hor, 43 min. tempus periodicum terrae 365 dier. 6 hor. 9 min. colligi inde potest, esse velocitatem terrae, circa solem ad velocitatem lunae circa terram vt 274 ad 10. Est igitur $\frac{m}{\sqrt{A}} : f = 274 : 10$; poterit igitur censeri $ff = \frac{100mm}{75076A}$; vnde si velocitas f designetur per 10000, erit $ff = 100000000$ et $\frac{mm}{A} = 75076000000$, sicque fiet pro hoc instituto

$$vv = 100000000 - 225228000000 \times \frac{aa}{AA} \times zz,$$

Cumque sit $\frac{a}{A}$ seu $\frac{AD}{CD} = \frac{60}{22000}$ atque $\frac{aa}{AA} = \frac{9}{1210000}$, fiet tandem

$$vv = 100000000 - 1675249zz, \text{ ac proxime}$$

$$v = 10000 - 84zz.$$

§. 14. *Scholium.* Haec nunc propius ad inaequalitates motuum lunarium, quatenus a diuersis lunae cum sole aspectibus pendent, definiendos applicabimus. Dico itaque

I°. Decrementa velocitatum a statu plenilunii sumta proportionem sequi quadratam sinuum angulorum horariorum ADA'.

II°. Velocitatem lunae in syzygiis esse ad eiusdem velocitatem in quadraturis vt 10000 ad 9916: posito enim $z = 1$ in aequatione vltima superioris paragraphi, fit $v = 9916$.

Haec autem postquam iamiam calculo subieceram, animaduerti demum Newtoni prop. 26. lib. 3. qua gratum fuit intelligere, eodem plane modo vsum fuisse virum incomparabilem ad praefatas motuum inaequalitates

 cal-

calculo subiiciendas, haecque nostra ex longe diuersissimis principiis, imo ab aliquibus Anglis nescio quo fato etiamnum iniuste obiurgatis, accuratissime inter se conuenire. Sed ex §. §. 11. et 12. sequitur vlterius.

III°. Velocitatem minimam non esse exactissime in quadraturis, sed paullo proprius ad nouilunium quam ad plenilunium: angulum autem horarium inter quadraturas et statum minimae velocitatis esse fere 5′.

IV°. Velocitates non esse exactissime aequales in syzygiis, sed esse paullo maiorem in nouilunio quam in plenilunio. Sequitur hoc ex paragrapho decimo.

§. 15. Haec omnia ita forent, si terra et luna circulos perfectos circa centrum commune grauitatis, et id quidem immotum, describerent; hic itaque consideramus tantum illas inaequalitates, quae a diuersis lunae positionibus, oriuntur, et ad reliquas inaequalitates non attendimus, quae ab aliis oriuntur causis et fontibus: Et cum hae reliquae inaequalitates parum aut nihil impediunt, quo minus areae, quas luna radiis ad terram ductis temporibus aequalibus facit, sint perpetuo aequales, Newtonus non sine ratione loco velocitatum a me consideratarum atque definitarum, definit areas modo memoratas, vtpote quae a reliquis causis vix alterantur. Reuera autem vtroque modo res eodem recidit. Magis haec illustrabuntur ex sequentibus, postquam theorema indicauero pro conseruatione virium viuarum aestimanda, quum plus quam vnum adest centrum virium. Ista vero proxime.

THE-

THEOREMATVM
QVORVMDAM ARITHMETICORVM
DEMONSTRATIONES.

AVCTORE
L. Eulero.

Theoremata arithmetica, cuiusmodi Fermatius aliique plurima detexerunt, eo maiore attentione sunt digna, quo magis eorum veritas est abscondita, et demonstratu difficilis. Fermatius quidem satis magnam talium theorematum copiam reliquit, nusquam autem demonstrationes exposuit, etiamsi firmiter asserat, sibi de eorum veritate certissime constare. Maxime igitur dolendum est eius scripta adeo periisse, vt etiamnum omnes demonstrationes ignorentur. Similis quoque est ratio propositionum in vulgus notarum, quibus neque summam neque differentiam duorum biquadratorum quadratum constituere posse asseritur; quamuis enim de earum veritate nemo dubitet, tamen nusquam extat demonstratio, quantum mihi quidem constat, rigida, praeter libellum quemdam a Freniclio olim editum, cuius Titulus est *Traité des triangles rectangles en nombres.* Demonstrat autem hic Autor inter alia in nullo triangulo rectangulo, cuius latera rationalibus exprimuntur numeris, aream posse esse quadratum, vnde facile veritas memoratarum propositionum de summa et differentia duorum biquadratorum deducitur. Sed ista demonstratio tantopere proprietatibus triangulorum est inuoluta, vt nisi summa attentio adhibeatur, vix perspicue intelligi possit. Hanc ob rem operae pretium fore arbitror, si harum propositionum demonstrationes a triangulis rectangulis abstraxero, easque analytice et clare proposuero. Eo maiorem autem hoc meum institutum afferet vtilitatem, quo plura alia theoremata multo difficiliora ex iis elici possunt. Huc scilicet pertinet Theorema illud celebre Fermatii, quo statuit, nullum numerum trigonalem esse posse biquadratum praeter vnitatem, cuius demonstrationem ex illis formare mihi contigit. Eo difficilior autem ista demonstratio videtur, cum propositio exceptioni sit obnoxia, atque tantum ad numeros integros pertineat; numeris enim fractis infinitis modis effici potest, vt $\frac{x(x+1)}{2}$ fiat biquadratum. Ad hoc igitur aliaque nonnulla theoremata demonstranda necesse erit lemmata quaedam praemittere, quibus sequentes demonstrationes innituntur. ante autem monuisse oportet, perpetuo omnes litteras mihi numeros integros designare.

Lemma 1.

Factum ex duobus pluribusue numeris inter se primis nec quadratum nec cubus nec vlla alia potestas esse potest, nisi singuli factores sint quadrata vel cubi vel eiusmodi aliae potestates.

Demonstratio huius Lemmatis facilis est atque ab Euclide iam est tradita, ita vt superfluum foret eam hic exponere.

Lemma 2.

Si a^2+b^2 fuerit quadratum, atque a et b sint numeri inter se primi, erit $a=pp-qq$; et $b=2pq$, existentibus p et q numeris inter se primis altero pari altero impari. De-

Demonstratio.

Quia est a^2+b^2 quadratum, ponatur eius radix $= a+\frac{bq}{p}$, vbi fractionem $\frac{q}{p}$ in minimis terminis pono expressam ita vt p et q sint numeri inter se primi. Facta autem aequatione erit $a^2+b^2 = a^2 + \frac{2abq}{p} + \frac{bbqq}{pp}$. Vnde fit $a:b = pp-qq:2pq$. Numeri autem $pp-qq$ et $2pq$ inter se vel primi sunt, vel communem habent diuisorem 2. Illo igitur casu, quo $pp-qq$ et $2pq$ sunt numeri inter se primi, quod accidit, si numerorum p et q alter fuerit par alter impar, necesse est vt sit $a = pp-qq$ et $b = 2pq$: quia a et b numeri ponuntur inter se primi. Casu autem quo numeri $pp-qq$ et $2pq$ communem diuisorem habent 2; quod erit, si numerorum p et q vterque fuerit impar; (vterque enim par esse nequit, quia inter se ponuntur primi), erit $a = \frac{pp-qq}{2}$ et $b = qq$. Ponatur autem $p+q = 2r$ et $p-q = 2s$, erunt r et s numeri inter se primi, eorumque alter par alter impar. vnde fit $a = 2rs$ et $b = rr-ss$; quae expressio, quia cum priore congruit, indicat si $aa+bb$ fuerit quadratum, et numeri a et b sint inter se primi, alterum eorum esse differentiam duorum quadratorum inter se primorum, quorum alter par est alter impar, alterum vero numerum aequari duplici facto ex radicibus istorum quadratorum. Hoc est esse $a = pp-qq$ et $a = 2pq$, existentibus p et q numeris inter se primis altero pari altero impari. Q. E. D.

Coroll. 1. Si ergo summa duorum quadratorum inter se primorum fuerit quadratum, alterum quadratum par sit necesse est, alterum vero impar: ex quo sequitur summam duorum quadratorum imparium non posse esse quadratum.

Co-

Coroll. 2. Si ergo $aa+bb$ eſt quadratum numerorum a et b, alter puta a erit impar alter b vero par. Impar vero a erit $= pp-qq$, et par $b=2pq$.

Coroll. 3. Quia porro numerorum p et q alter eſt par alter impar, erit b numerus pariter par ſeu per 4 diuiſibilis. Deinde ſi nec p nec q fuerit per 3 diuiſibilis, neceſſe eſt vt vel $p-q$ vel $p+q$ diuiſionem per 3 admittat. Vnde ſequitur alterum numerorum a et b, quorum quadratorum ſumma facit quadratum, eſſe per 3 diuiſibilem.

Coroll. 4. Cum ſit $a=pp-qq$ et $b=2pq$ ſi $aa+bb$ conſtituat quadratum, facile intelligitur numeros p et q minores eſſe quam a et b. Quoniam enim eſt $a=(p+q)(p-q)$ erit $a>p+q$ niſi $p-q$ ſit $=1$; atque ob $b=2pq$ erit b maior, quam p vel q. Potiore ergo ratione numeri a et b maiores erunt quam numeri p et q. Fieret quidem $a=0$ ſi foret $p=q$, ſed hic caſus locum non habet, quia p et q ponuntur numeri inter ſe primi, eorumque alter par alter impar.

Scholion.

In demonſtratione huius lemmatis ex analogia $a:b=pp-qq:2pq$ ideo ſequitur eſſe $a=pp-qq$ et $b=2pq$, quia a et b ſunt numeri inter ſe primi, pariter que numeri $pp-qq$ et $2pq$. Si enim fuerit $a:b=c:d$, atque tam numeri a et b quam numeri c et d ſint primi inter ſe, neceſſe eſt vt ſit $a=c$ et $b=d$; prout facile ex natura proportionum conſtat.

Lem-

Lemma 3.

Si fuerit $aa-bb$ quadratum, existentibus a et b numeris inter se primis; erit $a=pp+qq$ et vel $b=pp-qq$ vel $b=2pq$, vbi numeri p et q sunt inter se primi, eorumque alter par alter impar.

Demonstratio.

Quia $aa-bb$ est quadratum, ponatur $a^2-b^2=c^2$, eritque $a^2=b^2+c^2$, atque b et c numeri inter se primi. Cum igitur per coroll. 1 lemmatis praecedentis numerorum b et c alter par sit alter impar, necesse est vt a sit numerus impar; b vero vel par erit vel impar.

Sit primo b impar et c par; erit per lemma praecedens $b=pp-qq$ et $c=2pq$, existentibus p et q numeris inter se primis altero pari altero impari. Hinc autem fit $a=pp+qq$. At si b fuerit par et c impar; erit $b=2pq$ et $c=pp-qq$, vnde denuo fit $a=pp+qq$. Quocirca si $aa-bb$ fuerit quadratum, erit $a=pp+qq$, atque vel $b=pp-qq$ vel $b=2pq$ Q. E. D.

Coroll. 1. Si ergo differentia duorum quadratorum est numerus quadratus, maius quadratum debet esse numerus impar, si quidem illa quadrata inter se fuerint numeri primi.

Coroll. 2. simili porro modo intelligitur numeros p et q minores esse quam numeros a et b, cum sit $a=pp+qq$ atque b vel $=pp-qq$ vel $=2pq$.

Coroll. 3. si fuerit $aa-bb=cc$, vnus numerorum a, b, c semper per 5 diuisibilis existit. Nam cum sit $a=pp+qq$, $b=pp-qq$ et $c=2pq$; vel alter numerorum p et q per 5 diuisibilis est vel neuter; illo autem casu fit

 c di-

c diuisibile per 5. Hoc vero casu erunt pp et qq numeri eiusmodi formae $5n \pm 1$. ergo vel $pp-qq$ vel $pp+qq$ per 5 diuisibile erit.

Theorema 1.

Summa duorum biquadratorum vt a^4+b^4 non potest esse quadratum, nisi alterum biquadratum euanescat.

Demonstratio.

In theoremate hoc demonstrando ita versabor, vt ostendam si vno casu fuerit a^4+b^4 quadratum, quantumuis etiam magni fuerint numeri a et b, tum continuo minores numeros loco a et b assignari posse, atque tandem ad minimos numeros integros perueniri oportere. Cum autem in minimis numeris tales non dentur, quorum biquadratorum summa quadratum constitueret, concludendum erit nec inter maximos numeros tales extare. Ponamus ergo a^4+b^4 esse quadratum, atque a et b inter se esse numeros primos; nisi enim primi forent, per diuisionem ad primos reduci possent. Sit a numers impar, b vero par, quia necessario alter par alter impar esse debet. Erit ergo $aa = pp-qq$ et $bb = 2pq$, numerique p et q inter se erunt primi, eorumque alter par alter impar. Cum autem sit $aa = pp-qq$, necesse est vt p sit numerus impar, quia alias $pp-qq$ quadratum esse non posset. Erit ergo p numerus impar et q numerus par. Quia porro $2pq$ quadratum esse debet, necesse est, vt tam p quam $2q$ sit quadratum, quia p et $2q$ sunt numeri inter se primi. Vt vero $pp-qq$ sit quadratum, necesse est, vt sit $p = mm+nn$ et $q = 2mn$; existentibus iterum m et n numeris inter se primis eorumque altero pari altero impari. Sed quoniam

2q

$2q$ quadratum eſt, erit $4mn$ ſeu mn quadratum; vnde tam m quam n quadrata erunt. Poſito ergo $m=xx$ et $n=yy$, erit $p=m^2+n^2=x^4+y^4$. quod quadratum pariter eſſe deberet. Hinc ergo ſequitur ſi a^4+b^4 foret quadratum, tum quoque x^4+y^4 fore quadratum, manifeſtum autem eſt numeros x et y longe minores fore quam a et b. Pari igitur via ex biquadratis x^4+y^4 denuo minora orientur, quorum ſumma eſſet quadratum, atque pergendo ad minima tandem biquadrata in integris perueniretur. Cum ergo non dentur minima biquadrata, quorum ſumma efficeret quadratum, palam eſt nec in maximis numeris talia dari. Si autem in vno biquadratorum pari alterum ſit $=0$, in omnibus reliquis paribus alterum euaneſcet, ita vt hinc nulli noui caſus oriantur. Q. E. D.

Coroll. 1. Cum igitur ſumma duorum biquadratorum non poſſet eſſe quadratum, multo minus duo biquadrata coniuncta biquadratum efficere poterunt.

Coroll. 2. Quamquam demonſtratio haec tantum ad numeros integros pertinet, tamen etiam per eam conficitur, ne in fractis quidem duo biquadrata exhiberi poſſe, quorum ſumma eſſet quadratum. Nam ſi $\frac{a^4}{m^4}+\frac{b^4}{n^4}$ foret quadratum, tum quoque in integris eſſet $a^4n^4+b^4m^4$ quadratum, quod fieri nequit, per ipſam demonſtrationem.

Coroll. 3. Ex eadem demonſtratione colligere licet, non dari eiusmodi numeros p et q, vt p, $2q$ et $pp-qq$ ſint quadrata, ſi enim tales exiſterent, tum haberentur valores pro a et b, qui redderent a^4+b^4 quadratum, foret namque $a=\sqrt{(pp-qq)}$ et $b=\sqrt{2pq}$.

Coroll. 4. Poſitis ergo $p=xx$ et $2q=4yy$ erit $pp-qq=x^4-4y^4$. Fieri ergo omnino nequit, vt x^4-4y^4 ſit quadratum. Neque igitur $4x^4-y^4$ quadratum esse poterit, foret enim quadratum $16x^4-4y^4$, qui casus ob $16x^4$ biquadratum ad priorem recidit.

Coroll. 5. Sequitur hinc etiam $ab(a^2+b^2)$ quadratum nunquam esse posse. Ob factores enim a, b, a^2+b^2 inter se primos, singulos quadrata esse oporteret, quod fieri nequit.

Coroll. 6. Similiter tales etiam numeri inter se primi a et b non dabuntur, qui producerent $2ab(aa-bb)$ quadratum. Sequitur hoc ex coroll. 3. vbi monstratum est non dari numeros p, et q, vt essent p, $2q$, $pp-qq$ quadrata. Haec omnia autem quoque valent pro numeris inter se non primis atque adeo fractis, per coroll. 2.

Theorema 2.

Differentia duorum biquadratorum vt a^4-b^4 non potest esse quadratum, nisi sit vel $b=0$ vel $b=a$.

Demonstratio.

Theorema hoc pari modo demonstrabo quo praecedens. Sint igitur biquadrata iam ad minimos terminos reducta, atque ponamus a^4-b^4 esse quadratum: erit a numerus impar, b vero vel par erit vel impar.

Casus I. Sit primo b numerus par, erit $a^2=pp+qq$ et $b^2=2pq$, existentibus p et q inter se primis, eorumque altero p pari altero q impari. Ob $b^2=2pq$ debebunt ergo $2p$ et q esse quadrata. Quia porro $pp+qq$ ipsi a^2 aequatur, erit $q=mm-nn$ et $p=2mn$, existentibus m et n numeris inter se primis. Cum autem $2p$ sit quadratum, erit $4mn$ hoc est mn quadratum; adeoque m

et

et n sigillatim quadrata. Factis ergo $m=x^2$ et $n=y^2$ fiet $q=x^4-y^4$, vbi cum numerorum m et n alter sit par alter impar, erit quoque numerorum x et y alter par alter impar. At ob q quadratum, quadratum erit x^4-y^4, vbi x erit numerus impar, y vero par. Quo circa si fuerit a^4-b^4 quadratum, quadratum quoque erit x^4-y^4, existentibus x et y longe minoribus quam a et b. Cum ergo in minimis numeris non dentur duo biquadrata, differentiam quadratam habentia, nec in maximis dabuntur, saltem casu quo minus biquadratum est numerus par Q. E. Vnum.

Casus II. sit nunc b numerus impar, eritque $a^2=pp+qq$ et $bb=pp-qq$; existentibus p et q numeris inter se primis, eorumque altero pari altero impari. Quia vero $pp-qq$ est quadratum, erit p numerus impar, et propterea q par. Ductis autem a^2 et b^2 in se inuicem, prodibit $a^2b^2=p^4-q^4$, quae expressio per casum primum quadratum esse ideoque ipsi a^2b^2 aequari non potest. Differentia ergo duorum biquadratorum nullo modo esse potest quadratum, nisi vel ambo sint aequalia, vel minus $=0$. Q. E. Alterum Dem.

Coroll. 1. Cum sit $a^2=pp+qq$ et $b^2=2pq$ itemque $q=mm-nn$ et $p=2mn$; atque porro $m=x^2$ et $n=y^2$; erit $a^2=(x^4+y^4)^2$ et $b^2=4x^2y^2(x^4-y^4)$. Ex quo habebitur $a=x^4+y^4$ et $b=2xy\sqrt{(x^4-y^4.)}$

Coroll. 2. Si ergo in numeris exiguis x et y darentur tales, quorum biquadratorum differentia constitueret quadratum; tum ex iis statim multo maiores numeri eadem proprietate gaudentes a et b inueniri possent.

Coroll. 3. Hinc clarius perſpicitur ex caſu quo biquadrata vel ſint aequalia, vel alterum $=0$, nouos caſus non praebere, facto enim vel $x=y$ vel $y=0$, fit ſimul b $=0$, vnde vis demonſtrationis eo magis percipitur.

Coroll. 4. Ex demonſtratione porro ſequitur non dari numeros p et q eius indolis, vt eſſent $2p$, q et $pp+qq$ quadrata. Poſito ergo $2p=4xx$ et $q=yy$, non poterit eſſe quadratum iſta forma $4x^4+y^4$.

Coroll. 5. Ex his formulis quoque ſequitur, nec $ab(aa-bb)$ nec $2ab(aa+bb)$ vnquam fieri poſſe quadrata, id quod non ſolum valet, ſi a et b ſint numeri inter ſe primi, ſed etiam ſi compoſiti atque adeo fracti. Fractiones enim eiusmodi facile ad integros, atque integri ad numeros inter ſe primos reducuntur.

Coroll. 6. In his igitur duabus propoſitionibus euictum eſt, ſequentes nouem expreſſiones nunquam fieri poſſe quadrata

I.	$a^4 + b^4$	VI.	$a^4 - b^4$
II.	$a^4 - 4b^4$	VII.	$4a^4 + b^4$
III.	$4a^4 - b^4$	VIII.	$ab(aa-bb)$
IV.	$ab(aa+bb)$	IX.	$2ab(aa+bb)$
V.	$2ab(aa-bb)$	X.	$2a^4 \pm 2b^4$

decimam expreſſionem ideo adieci, quia eius veritas mox demonſtrabitur.

Theorema 3.

Summa duorum biquadratorum bis ſumta, vt $2a^4+2b^4$ quadratum eſſe nequit, niſi ſit $a=b$.

De-

Demonstratio.

Pono primo a et b numeros esse inter se primos, nam nisi tales essent, formula per diuisionem eo reduci posset. Facile autem perspicitur, vtrumque numerum a et b esse debere imparem, si enim alter par esset, tum fieret $2a^4+2b^4$ numerus impariter par, qui quadratum esse nequit. Porro haec forma congruit cum ista $(aa+bb)^2+(aa-bb)^2$, quam ideo demonstrari oportet quadratum esse non posse, nisi sit $a=b$. At ob a et b numeros impares, erunt a^2+b^2 et a^2-b^2 numeri pares, ille quidem impariter, hic vero pariter par. Peruentum ergo est ad hanc formam $(\frac{aa+bb}{2})^2+(\frac{aa-bb}{2})^2$, in qua $\frac{aa+bb}{2}$ et $\frac{aa-bb}{2}$ sint numeri inter se primi, ille impar, iste vero par; quamobrem si forma proposita esset quadratum, foret $\frac{aa+bb}{2}=pp-qq$ et $\frac{aa-bb}{4}=2pq$, vnde reperitur $a^2=pp+2pq-qq$ et $b^2=p^2-2pq-qq$. quarum expressionum differentia est $4pq=aa-bb$; ideoque erit $a+b=\frac{2mp}{n}$ et $a-b=\frac{2nq}{m}$; vnde $a=\frac{mp}{n}+\frac{nq}{m}$ et $b=\frac{mp}{n}-\frac{nq}{m}$. Facta autem hac substitutione erit $\frac{mm}{nn}pp+\frac{nn}{mm}qq=pp-qq$ atque $\frac{pp}{qq}=\frac{nn(mm+nn)}{mm(nn-mm)}=\frac{nn(n^4-m^4)}{mm(nn-mm)^2}$. Oporteret ergo esse quadratum n^4-m^4, quod per praecedens theorema fieri nequit. Q. E. D.

Coroll. 1. Si ergo a et b fuerint numeri impares, etiam $2ab(aa+bb)$ nequit esse quadratum; deberent enim a, b et $2aa+2bb$ esse quadrata, quod per hoc theorema fieri nequit.

Coroll. 2. Demonstratio ergo etiam formari potuisset ex formula nona $2ab(aa+bb)$, sed ibi numerorum a et b

alter

alter positus erat par, alter impar, quod etiam si nihil impediret, tamen praestabat peculiarem dare demonstrationem.

Coroll. 3. Hac igitur demonstratione ipsa formulae nonae veritas magis confirmatur, cum hinc iam constet $2ab(aa+bb)$ quadratum esse non posse, etiam si numeri a et b ambo sint impares.

Coroll. 4. Breuius vero etiam veritas huius theorematis ostendi potest, ex forma $(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2$; quae ideo quadratum esse nequit, quia $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$ est quadratum. Fieri autem nequit, vt summa duorum quadratorum sit quadratum, si eorundem quadratorum differentia fuerit quadratum. Si enim tam $pp+qq$, quam $pp-qq$ foret quadratum, quadratum esset p^4-q^4, quod fieri nequit.

Coroll. 5. Simili modo $a^4-6aabb+b^4$ quadratum esse nequit. Est enim $a^4-6aabb+b^4=(aa-bb)^2-4aabb$, quae est differentia eiusmodi quadratorum, quorum summa facit quadratum.

Coroll. 6. Atque pari modo $a^4+6a^2b^2+b^4$ quadratum esse nequit, quia est $=(a^2+b^2)^2+4aabb$, quorum quadratorum summa quadratum esse nequit, quia eorundem differentia $(a^2+b^2)^2-4aabb$ est quadratum.

Theorema 4.

Duplum differentiae duorum biquadratorum, vt $2a^4-2b^4$ quadratum esse nequit, nisi sit $a=b$.

De-

Demonstratio.

Ponamus a et b numeros inter se primos et $2a^4 - 2b^4$ esse quadratum, erunt a et b numeri impares. Foret ergo $2(a-b)(a+b)(aa+bb)$ quadratum, ideoque etiam eius pars decima sexta, seu $(\frac{a-b}{2})(\frac{a+b}{2})(\frac{aa+bb}{2})$; qui factores cum sint inter se primi, singuli esse deberent quadrata. Sit ergo $\frac{a-b}{2} = pp$ et $\frac{a+b}{2} = qq$; erit $a = pp+qq$ et $b = qq-pp$. vnde fit $\frac{aa+bb}{2} = p^4+q^4$. cum igitur q^4+q^4 quadratum esse nequeant, etiam $\frac{aa+bb}{2}$, ideoque $2a^4-2b^4$ quadratum esse nequit. Q. E. D.

Theorema 5.

Neque $ma^4-m^3b^4$ neque $2ma^4-2m^3b^4$ potest esse quadratum.

Demonstratio.

Ponamus a et b esse numeros inter se primos, atque m numerum esse nec quadratum nec per quadratum diuisibilem: si enim m esset diuisibilis per quadratum, tum factor quadratus per diuisionem tolli posset. Ponatur porro m esse numerum tam ad a quam b primum, erunt ob $ma^4-m^3b^4 = m(aa-mbb)(aa+mbb)$ toti factores inter se primi, ideoque singuli esse deberent quadrata. Facto ergo $m=pp$, deberet $(aa-ppbb)(aa+ppbb)$ esse quadratum, quod fieri nequit. Simili modo ob $2ma^4-2m^3b^4 = 2m(aa-mbb)(aa+mbb)$, atque factores inter se vel primos vel binarium pro communi mensura habentes, erit vel $2m$ vel m quadratum: priori vero casu facto $2m=4pp$, oporteret esse $a^4-4p^4b^4$ quadratum, quod pariter

pariter fieri nequit. Sin autem $m = pp$, tum foret $2a^4 - 2p^4b^4$ quadratum, quod per theorema praecedens fieri nequit. At si m non fuerit primus respectu ipsius a; ponamus $m = rs$ atque $a = rc$, vbi notandum est r et s numeros esse inter se primos, quia m nullum factorem quadratum habere ponitur. Quadrata ergo esse deberent istae formae $r^5sc^4 - r^3s^3b^4$ et $2r^5sc^4 - 2r^3s^3b^4$ seu $r^3sc^4 - rs^3b^4$ et $2r^3sc^4 - 2rs^3b^4$.

Ob factores autem harum formularum inter se primos vel rs vel $2rs$ deberent esse quadrata, adeoque r et s vel $2s$ singulatim, vnde formulae orirentur, quas quadrata esse non posse iam est ostensum. Q. E. D.

Coroll. 1. Huiusmodi igitur formae $mn(m^2a^4 - n^2b^4)$ et $2mn(m^2a^4 - n^2b^4)$ quadrata esse non possunt, quicunque etiam numeri loco m, n, a et b accipiantur.

Coroll. 2. Si igitur $maa + nbb$ fuerit quadratum, nec $m^2naa - mn^2bb$ nec $2m^2naa - 2mn^2bb$ quadrata esse poterunt. Atque si $maa - nbb$ fuerit quadratum, nec $m^2naa + mn^2bb$ nec $2m^2naa - 2mn^2bb$ quadrata esse poterunt.

Coroll. 3. Ponamus $maa + nbb = cc$; erit $m = \frac{cc - nbb}{aa}$, quadratum ergo esse neque $n(cc - nbb)(cc - 2nbb)$ neque $2n(cc - nbb)(cc - 2nbb)$ poterit. Atque si fuerit $m = \frac{cc + nbb}{aa}$; tum neutra istarum formularum $n(cc + nbb)(cc + 2nbb)$ et $2n(cc + nbb)(cc + 2nbb)$ poterit esse quadratum.

Coroll. 4. Si ponatur $c = \pm pp + nqq$ et $b = 2pq$, sequentes obtinebuntur formulae $n(p^6 \pm 6nppqq + n^2q^4)$ et $2n(p^6 \pm 6nppqq + n^2q^4)$, quae nullo modo quadrata effici poterunt.

Theo-

Theorema 6.

Neque $ma^4 + m^3b^4$ neque $2ma^4 + 2m^3b^4$ poteſt eſſe quadratum.

Demonſtratio.

Dico primo, ſi fuerit $mp^2 \mp mq^2$ quadratum, tum nec $mp^2 + mq^2$ nec $2mp^2 + 2mqq$ quadratum vllo modo eſſe poſſe: fieret enim vel $m^2(p^4 - q^4)$ vel $2m^2(p^4 - q^4)$ quadratum contra iam demonſtrata. Faciamus autem $mp^2 - mq^2$ quadratum ponendo radicem eius $= \frac{(p-q)a}{b}$, erit $mp + mq = \frac{a^2p - a^2q}{bb}$, vnde reperitur $q = \frac{p(aa - mbb)}{a^2 + mbb}$. Sit igitur $p = a^2 + mb^2$, erit $q = aa - mb^2$, adeoque $p^2 + q^2 = 2a^4 + 2m^2b4$. Quadratum ergo eſſe non poterit primo $mp^2 + mq^2 = 2ma^4 + 2m^3b^4$; deinde $2mp^2 + 2mq^2 = 4ma^4 + 4m^3b^4$. Ex his colligitur neque $ma^4 + m^3b^4$ neque $2ma^4 + 2m^3b^4$ quadratum eſſe poſſe. Q. E. D.

Coroll. In his igitur duobus theorematis euictum eſt, nullos numeros in iſtis formis $ma^4 \pm m^3b^4$ et $2ma^4 \pm 2m^3b^4$ poſſe eſſe quadratos. In his autem formulis praecedentes omnes continentur.

Theorema 7.

FERMATIANUM.

Nullus numerus trigonalis in integris poteſt eſſe biquadratum praeter vnitatem.

Demonſtratio.

Omnis numerus trigonalis hac forma $\frac{x(x+1)}{2}$ continetur. Demonſtrandum ergo hanc formulam $\frac{x(x+1)}{2}$ nunquam eſſe poſſe biquadratum: ſiquidem loco x numeri integri ſubſtituantur, excepto caſu $x = 1$. Notandum autem est vel x esse numerum parem vel imparem; priori igitur casu $\frac{x}{2}(x+1)$, posteriori vero $x\frac{(x+1)}{2}$) esse debere biquadratum; in quorum factorum vtroque bini factores sunt inter se primi, ideoque vterque esse deberet biquadratum. Sit igitur priori casu $\frac{x}{2}=m^4$ seu $x=2m^4$, debebitque $x+1=2m^4+1$ esse biquadratum. Posteriori vero casu sit $\frac{x+1}{2}=m^4$, vt sit $x=2m^4-1$, quod itidem oportet, est biquadratum. Hanc ob rem biquadratum esse deberet $2m^4+1$. Ponatur $2m^4+1=n^4$, erit $4m^4=2n^4+2$, deberet ergo $2n^4+2$ esse $4m^4$ hoc est quadratum. Supra autem demonstratum est $2a^4+2b^4$, adeoque etiam $2n^4+2$ nunquam quadratum esse posse praeter casum $n=1$. Posito autem $n=1$ fit m vel $=0$ vel $=1$; atque x vel $=0$ vel $=1$. Nullus igitur numerus integer datur, qui loco x substitutus redderet $\frac{x(x+1)}{2}$ biquadratum, praeter casus $x=0$ et $x=1$. Quamobrem in integris nullus extat numerus trigonalis, qui esset biquadratus praeter vnitatem et cyphram Q. E. D.

Coroll. 1. Si ponatur $\frac{xx+x}{2}=y^4$, erit $4xx+4x+1=8y^4+1=(2x+1)^2$. Ex quo sequitur numeris integris loco y substituendis hanc formam $8y^4+1$ nunquam esse posse quadratum, praeter casus $y=0$ et $y=1$.

Coroll. 2. Si ponatur $8y^4+1=z^2$, fiet $16y^4=2z^2-2$. Quocirca $2z^2-2$ nunquam esse potest biquadratum; quicunque numerus integer loco z substituatur, praeter casus $z=1$ et $z=3$.

Theorema 8.

Summa trium biquadratorum, quorum duo sunt aequalia inter se, seu istiusmodi forma a^4+2b^4 quadratum esse nequit, nisi sit $b=0$.

Demon-

Demonstratio.

Ponamus a^4+2b^4 esse quadratum, eiusque radicem $a^2+\frac{m}{n}b^2$; vbi tam a et b quam m et n numeri erunt inter se primi. Facta autem aequatione erit $2n^2b^2 = 2mna^2+m^2b^2$, atque $\frac{b^2}{a^2}=\frac{2mn}{2n^2m^2}$; quae fractio vel simplicissimam iam habet, vel diuisione per 2 ad simplicissimam erit reducibilis. Ponamus primo $2mn$ et $2n^2-m^2$ numeros esse inter se primos, quod euenit, si m sit numerus impar; eritque $b^2=2mn$ et $a^2=2n^2-m^2$; hic duo euoluendi sunt casus, quorum alter est si n est numerus impar, alter si n est par; illo casu, quo n est impar, manifestum est ob m etiam imparem $2mn$ fieri non posse quadratum. hoc vero casu, quo n est numerus par, fieri nequit $a^2=2n^2-m^2$ seu $a^2+m^2=2n^2$, ob a et m numeros imparer, et $2n^2$ numerum pariter parem. Habeant igitur $2mn$ et $2n^2-m^2$ communem diuisorem 2, quod accidit si m sit numerus par, puta $m=2k$, eritque n numerus impar; habebitur ergo $\frac{b^2}{a^2}=\frac{4kn}{2nn-4kk}=\frac{2kn}{nn-2kk}$, vbi $2kn$ et $nn-2kk$ numeri erunt inter se primi. Hinc igitur ob b^2 et a^2 pariter inter se primos erit $b^2=2kn$ et $a^2=n^2-2kk$. At hic $2kn$ fieri nequit quadratum, nisi sit k numerus par. Sit ergo k numerus par, atque tam n quam $2k$ debebunt esse quadrata; Fiat igitur $n=cc$ et $2k=4dd$, vbi erit c numerus impar, hocque facto habebitur $a^2=c^4-8d^4$. Quo igitur inuestigemus an c^4-8d^4 possit esse quadratum, ponamus eius radicem esse $c^2-\frac{2p}{q}dd$. eritque $2q^2d^2=pqc^2-ppd^2$; seu $\frac{dd}{cc}=\frac{pq}{pp+2qq}$; vbi iterum tam c et d quam p et q sunt numeri inter se primi. Hic denuo duo casus sunt notandi, siue p sit numerus impar siue par. Sit ergo primo p numerus impar; habebitur ob pq et $pp+2qq$ numeros inter se primos, $dd=pq$ et $cc=pp+2qq$; Necesse ergo est vt tam p quam q sit quadratum. quamobrem pono $p=x^2$ et $q=y^2$, prodibitque $cc=x^4+2y^4$; quare si a^4+2b^4 esset quadratum, tum quoque foret x^4+2y^4 quadratum, numerique x et y vehementer erunt minores, quam a et b; ex iisque denuo minores inueniri possent, quod in integris fieri nequit. Pro secundo casu, quo p est numerus par, ponamus $p=2r$, eritque $\frac{dd}{cc}=\frac{2qr}{4rr+2qq}=\frac{qr}{2rr+qq}$; et ob q imparem erunt qr et $2rr+qq$ numeri inter se primi. Erit ergo $dd=qr$ et $cc=2rr+qq$, quare numerorum q et r vterque debet esse quadratus; positis itaque $q=xx$ et $r=yy$, fiet $cc=2y^4+x^4$; vnde patet, si a^4+2b^4 esset quadratum, tum quoque in numeris longe minoribus fore similem formam x^4+2y^4 quadratum. Quo circa a^4+2b^4 quadratum esse nequit, nisi sit $b=0$. Q. E. D.

Coroll. 1. Quoniam inuenimus $\frac{b^2}{a^2}=\frac{2mn}{2n^2-m^2}$ posito a^4+2b^4 quadrato, sequitur $2mn(2n^2-m^2)$ quadratum esse non posse; quicunque etiam numeri loco m et n substituantur.

Coroll. 2. Factis ergo $m=x^2$ et $n=y^2$, quadratum non erit haec forma $4y^4-2x^4$. Simili modo posito $2m=4x^2$ et $n=yy$, quadratum non erit haec forma $2y^4-4x^4$. Atque facto $m=x^2$ et $2n=4y^4$, haec formula $8y^4-x^4$ quadratum esse nequit.

Coroll. 3. Si generaliter fiat $m=\alpha x^2$, et $n=\beta y^2$, prodibit haec formula $2\alpha\beta(2\beta^2y^4-\alpha^2x^4)$ seu $4\alpha\beta^3y^4-2\alpha^3\beta x^4$, quae nullo modo quadratum esse poterit.

The-

Theorema 9.

Si haec forma a^4+kb^4 quadratum esse non potest, tum etiam haec forma $2k\alpha\beta^3 4^4-2\alpha^3\beta x^4$ nullo pacto quadratum effici poterit.

Demonstratio.

Ponamus formam propositam a^4+kb^4 esse quadratum, eiusque radicem $=a^2+\frac{m}{n}b^2$ erit $kn^2b^2=2mna^2+m^2b^2$ atque $\frac{b^2}{a^2}=\frac{2mn}{kn^2-m^2}$. Quia ergo a^4+kb^4 quadratum esse nequit, tum etiam $\frac{2mn}{kn^2-m^2}$ seu $2mn(kn^2-m^2)$ quadratum esse non poterit. Fiat $m=\alpha x^2$ et $n=\beta y^2$, prodibit $2\alpha\beta(k\beta^2y^4-\alpha^2x^4)$ seu $2k\alpha\beta^3y^4-2\alpha^3\beta x^4$. quae formula propterea quadratum esse non potest; quicunque numeri siue affirmatiui siue negatiui loco α et β substituantur. Q. E. D.

Coroll. 1. Fiat siue α siue β negatiuum vt, prodeat haec forma $2\alpha^3\beta x^4-2k\alpha\beta^3y^4$, atque ponatur $2\alpha^3\beta=p^2$, erit $\beta=\frac{p^2}{2\alpha^3}$, vnde illa forma transit in hanc $p^2x^4-\frac{kp^6}{4\alpha^8}y^4$. Quadratum ergo esse nequit haec formula x^4-4ky^4 posito $4r^4$ pro $\frac{p^4}{4\alpha^8}y^4$. Ex hac ergo formula vlterius sequitur hanc expressionem $2\alpha^3\beta x^4+8K\alpha\beta^3y^4$ quadratum fieri non posse.

Coroll 2. Ponatur in formula inuenta $2k\alpha\beta^3y^4-2\alpha^3\beta x^4$, $2k\alpha\beta^3=pp$, vt sit $\alpha=\frac{pp}{2k\beta^3}$: transibit illa in hanc $p^2y^4-\frac{p^6}{4k^3\beta^8}x^4$, ex qua sequitur a^4-4kb^4 quadratum esse non posse; vnde vt ante $2\alpha^3\beta x^4+8k\alpha\beta^3y^4$ quadratum esse non poterit.

Coroll. 3.

Coroll. 3. Si ergo a^4+kb^4 quadratum esse nequit, tum nec haec formula $2k\alpha\beta^3y^4-2\alpha^3\beta x^4$ nec haec $\alpha^3\beta x^4+k\alpha\beta^3y^4$ quadratum esse poterit: quae posterior ex corollariis praecedentibus sequitur scribendo 2α loco α.

Coroll. 4. Cum igitur a^4+b^4 non possit esse quadratum, sequentes binae formulae $\alpha^3\beta x^4+\alpha\beta^3y^4$ et $2\alpha\beta^3y^4-2\alpha^3\beta x^4$ quadrata esse omnino non poterunt.

Coroll. 5. Atque quia a^4-b^4 quadratum esse non potest, orientur hae duae nouae formulae $\alpha^3\beta x^4-\alpha\beta^3y^4$ et $2\alpha^3\beta x^4+2\alpha\beta^3y^4$, quae nullo modo quadrata reddi possunt.

Coroll. 6. Quoniam denique a^4+2b^4 quadratum esse nequit, istae quoque formulae $\alpha^3\beta x^4+2ab^3y^4$ et $4\alpha\beta^3y^4-2\alpha^3\beta x^4$ non poterunt effici quadrata.

Scholion.

Ex iis igitur, quae hactenus demonstraui, prodierunt sex sequentes formulae generaliores, quae nullo modo in quadrata transmutari possunt.

I.	$\alpha^3\beta x^4+\alpha\beta^3y^4$	IV.	$2\alpha^3\beta x^4-2\alpha\beta^3y^4$
II.	$\alpha^3\beta x^4-\alpha\beta^3y^4$	V.	$2\alpha^3\beta x^4+2\alpha\beta^3y^4$
III.	$\alpha^3\beta x^4+2\alpha\beta^3y^4$	VI.	$2\alpha^3\beta x^4-4\alpha\beta^3y^4$

Atque in his sex formulis omnes continentur, quas in praecendentibus formulis tractauimus. Ex his autem formulis possent, vt iam ante feci, formulae trinomiales elici, quas aeque certum esset, quadrata neutiquam reddi posse; sed iis exhibendis supersedeo, ad alia nonnulla theoremata progressurus, quae circa cubos versantur, atque ex istis formulis expediri nequeunt.

Theo-

Theorema 10.

Nullus Cubus, ne quidem numeris fractis exceptis, vnitate auctus quadratum efficere potest, praeter vnicum casum, quo cubus est 8.

Demonstratio.

Propositio ergo huc redit, vt $\frac{a^3}{b^3}+1$ nunquam esse possit quadratum, praeter casum quo $\frac{a}{b}=2$. Quocirca demonstrandum erit hanc formulam a^3b+b^4 nunquam fieri posse quadratum, nisi sit $a=2b$.

Haec autem expressio resoluitur in istos tres factores $b(a+b)(aa-ab+bb)$ qui primo quadratum constituere possint si esse posset $b(a+b)=a^2-ab+bb$, vnde prodit $a=2b$, qui erit casus, quem excepimus. Pono autem, vt vlterius pergam, $a+b=c$, seu $a=c-b$, qua facta substitutione habebitur $bc(cc-3bc+3bb)$, quam demonstrandum est quadratum esse non posse, nisi sit $c=3b$; sunt autem b et c numeri inter se primi. Hic autem duo occurrunt casus considerandi prout c vel multiplum est ternarii vel secus: illo enim casu factores c et $cc-3bc+3bb$ communem diuisorem habebunt 3, hoc vero omnes tres inter se erunt primi. Sit primo c non diuisibile per 3, necesse erit, vt singuli illi tres factores sint quadrata, scilicet, b, et c, et $cc-3bc+3bb$ seorsim. Fiat ergo $cc-3bc+3bb=(\frac{m}{n}b-c)^2$, erit $\frac{b}{c}=\frac{3nn-2mn}{3nn-mm}$ vel $\frac{b}{c}=\frac{2mn-3nn}{mm-3nn}$, cuius fractionis termini erunt primi inter se, nisi m sit multiplum ternarii; sit ergo m per 3 non diuisibile, erit vel $c=3nn-mm$ vel $c=mm-3nn$; et vel $b=3nn-2mn$, vel $b=2mn-3nn$. At cum $3nn-mm$ quadratum esse nequeat, ponatur $c=mm-3nn$, quod quadratum fiat radicis

$m - \frac{p}{q}n$. hincque oritur $\frac{m}{n} = \frac{3qq+pp}{2pq}$, atque $\frac{b}{nn} = \frac{2m}{n} - 3 = \frac{3qq-3pq+pp}{pq}$. Quadratum ergo esset haec formula $pq(3qq-3pq+pp)$, quae omnino similis est propositae $bc(3bb-3bc+cc)$ et ex multo minoribus numeris constat. At sit m multiplum ternarii, puta $m=3k$, erit $\frac{b}{c} = \frac{nn-2kn}{nn-3kk}$; vnde erit vel $c=nn-3kk$ vel $c=3kk-nn$; quia autem $3kk-nn$ quadratum esse nequit, ponatur $c=nn-3kk$, eiusque radix $n-\frac{p}{q}k$, vnde fiet $\frac{n}{k} = \frac{3qq+pp}{2pq}$; seu $\frac{k}{n} = \frac{2pq}{3qq+pp}$; atque $\frac{b}{nn} = 1 - \frac{2k}{n} = \frac{pp+3qq-4pq}{3qq+pp}$. Quadratum ergo esse deberet $(pp+3qq)(p-q)(p-3q)$. ponatur $p-q=t$ et $p-3q=u$, erit $q=\frac{t-u}{2}$ et $p=\frac{3t-u}{2}$, illaque formula abit in hanc $tu(3tt-3tu+uu)$ quae iterum similis est priori $bc(3bb-3bc+cc)$. Restat ergo posterior casus, quo est c multiplum ternarii, puta $c=3d$; atque quadratum esse debet $bd(bb-3bd+3dd)$, quae cum iterum similis sit priori, manifestum est vtroque casu euenire non posse, vt formula proposita sit quadratum. Quamobrem praeter cubum 8, alius ne in fractis quidem datur, qui cum vnitate faciat quadratum. Q. E. D.

Coll. 1. Simili modo demonstrari potest nullum cubum vnitate minutum esse posse quadratum; hocque ne quidem in fractis.

Coroll. 2. Hinc sequitur nec x^6+y^6 nec x^6-y^6 esse posse quadrata: atque nullum numerum trigonalem esse cubum praeter vnitatem.

COM-

COMMENTATIONES DE STATV AEQVILIBRII CORPORVM HVMIDO INSIDENTIVM.

A. Daniele Bernoulli.

§. 1.

Duplicis sunt generis quaestiones, quarum examen Cel. Eulerus noster de hocce argumento mihi etiam atque etiam commendauit, commendatumque pro amicitia nostra simul ac iustissima mea in Academiam obseruantia lubens suscepi: alterae statum aequilibrii concernunt, alterae motus oscillatorios, quum corpora sibi relicta semel statum aequilibrii amiserunt: Hac vero praesenti dissertatiuncula genus primum complectar, alterumque in proximam reseruabo occasionem.

§. 2. Corpus fluido immersum vrgetur duabus potentiarum classibus sibi inuicem contrariis; classis prima oritur a grauitate singularum corporis partium, potestque summa potentiarum considerari tanquam vnita in corporis centro grauitatis ibidemque corpus verticaliter deorsum premens; classis altera oritur ab actione fluidi, potestque summa potentiarum considerari in centro grauitatis partis submersae vnita, si haec pars submersa esset homogenea. (huiusmodi centrum grauitatis, cuius saepe erit mentio facienda, deinceps vocabo *centrum grauitatis homogeneae*) *Haec* classis posterior priori aequalis est sed contraria et *corpus* verticaliter sursum vrget.

§. 3. Si corpus ita fluido insideat, vt ambo praefata centra grauitatis sint in vna eademque linea verticali, tunc patet corpus in aequilibrio positum fore: verum huiusmodi aequilibrii status non sunt eiusdem indolis: datur aequilibrium firmum et stabile, et datur aequilibrium, vt ita dicam, labile, non secus atque si conus rectus homogeneus basi sua tabulae horizontali insistat, aequilibrium adest firmum, si vero vertice suo tabulae ita insistat, vt axem habeat verticalem, aequilibrium ipsius dici potest labile. Situs aequilibrii firmi pro ratione corporis est modo vnus modo plures; pro altero autem aequilibrio sunt plerumque situs infiniti; sed vis minima tunc corpus ex situ suo deiicit, nec corpus cessante vi illa in situm pristinum redit, quo ambo aequilibrii situs ab inuicem distinguuntur; minima quidem vis quaeuis corpora etiamsi in aequilibrio firmo posita aliquantillum mutare facit, sublata autem vi corpus rursus ad situm naturalem tendit, nisi mutatio certos quosdam terminos transgressa fuerit. Ista vero omnia pro aequilibrio firmo accuratius perpendere atque geometrice definire constitui.

§. 4. Notabimus itaque ante omnia, quoties corpus fluido insidens a situ suo aequilibrii vel minimum perturbatum, eundem repetit, partis submersae centrum grauitatis homogeneae continue locum mutare, quod cum ita sit, ne in ipso limine obscurior fiam, mutationem corporis per omnes gradus intermedios primo ponam fieri in plano vno eodemque, quod transeat per centrum grauitatis totius corporis et per partis submersae centrum grauitatis homogeneae, vbi in situ aequilibrii fuit; vel potius loco corporum prius tantum plana vtcunque grauia humido verticaliter

ticaliter insidentia considerabimus, planumque inclinationis constanter esse in ipso plano graui ponemus: Tum etiam totius plani centrum grauitatis situm mutat, dum modo eleuatur modo deprimitur; motum vero horizontalem nullum habere potest, quia planum sola grauitate fluidi atque solidi, quae vbique verticaliter agit, deprimi aut eleuari quidem potest, potentiae autem horizontales in omnes plagas se destruunt; nisi enim se destruerent, planum perpetuo in eadem directione progrederetur. Iam vero incipiam exponere, quomodo firmitas aequilibrii dignoscenda sit.

§. 5. Sit superficies fluidi MQ, cui insideat planum graue EFG (fig. 1. et 2.) huiusque centrum grauitatis sit in A, partis vero submersae centrum grauitatis homogeneae sit in B; sitque recta AB verticalis. Putetur nunc planum relinquere situm hunc aequilibrii, atque inclinari siue versus partem M, vt in figura prima, siue ad partem oppositam Q, vt in figura secunda, assumto situ *efg*: sintque pro hoc altero situ centra grauitatis praefata in *a* et *b*: His ita constitutis, apparet ex §. 2. potentiam concipiendam esse applicatam in puncto *a*, planum verticaliter deorsum trahentem et ponderi plani aequalem, aliamque potentiam in *b* priori aequalem et planum verticaliter sursum trahentem: Manifestum autem est pro vtraque figura a concursu harum potentiarum fore, vt planum ad pristinum situm EFG tendat, atque in hoc consistit natura aequilibrii firmi.

Si vero post plani situm mutatum, partis submersae centrum grauitatis homogeneae peruenisset ad alterum latus lineae *AB*, (quod fieri potest, quando punctum A altius positum est quam punctum B) tunc planum non tendit ad pristinum situm, quin magis ab eo recedere conatur, hocque si ita fuerit, posita nutatione plani minima, tunc aequilibrium situs EFG firmum dici non potest.

§. 6. Ex dato situ *efg* determinari facile potest, vbi et quaenam sint potentiae applicandae, vt planum in isto situ violento detineatur: sumantur nempe in plano *efg* duo puncta ad libitum, veluti *a* et *r*, quibus potentiae applicatae sint, nempe ponduscula *p*, P mediantibus trochleis T, S funiculisque *r*T*p*, *a*SP haeque potentiae planum insitu *efg* detineant: His positis quaeritur natura potentiarum: Statim vero liquet 1°. directiones *r*T, *a*S fore in plano *efg*; 2°. constituendas esse horizontales, ne planum magis minusue immergatur; 3°. ponendas esse sub directione contraria aequales, quia alias, vt iam monui, planum vt nauis a vento perpetuo propelleretur.

Sunt igitur nunc plano oblique posito quatuor potentiae applicatae in diuersis punctis; ponatur vero potentia in *a* aut *r* applicata $= x$; massa siue pondus plani $= M$; et fingatur punctum quodcunque, circa quod quatuor istae potentiae planum rotare conentur; quia enim potentiae in aequilibrio sunt, oportet vt vbicunque punctum rotationis esse putes, sint semper ratione illius puncti potentiae in aequilibrio positae; ponatur compendii causa punctum rotationis in *a* siue in centro grauitatis plani et reperietur per notissimas staticae leges, ducta prius horizontali *bc*,

$$x = \frac{bc}{AR} \times M$$

pono AR pro *ar*, quas angulum infinite paruum facere intelligendum est, quasi distantia RT esset infinita; atque eadem expressio oritur, vbicunque potentiae *p*, P applicatae putentur et vbicunque punctum rotationis esse fingatur:

tur: Valet igitur talis analogia: vt diſtantia verticalis punctorum, quibus potentiae planum declinantes applicantur, ad lineam *bc*, ita pondus plani ad potentiam alterutram horizontalem planum in ſitu violento detinentem.

§. 7. Quum potentiae P, P ad datam inuariatam diſtantiam applicantur verticalem, erunt potentiae datum planum vtcunque inclinantes ſimpliciter proportionales lineis *b c*, id eſt, diſtantiis horizontalibus centrorum grauitatis homogeneae in parte ſubmerſa a verticali A B. Igitur cum fuerit pro minima inclinatione lineola *bc* negatiua, aequilibrium non reſtituetur, indicio non fuiſſe firmum: ſi *bc* ſit affirmatiua, firmum eſt aequilibrium; et tum eo firmius eſt dicendum, quo maior eſt *bc* pro eodem inclinationis angulo.

Apparet etiam, cum planum continue magis inclinatur auctis potentiis P, P alicubi lineam *b c* maximam fore, tuncque adeſſe vltimum inclinationis gradum poſſibilem, planumque alium aequilibrii firmi ſitum eſſe petiturum, niſi potentia planum declinans diminuatur.

§. 8. Quum itaque rei totius cardo vertatur in hoc vt pro quouis plani ſitu centrum grauitatis homogeneae in parte ſubmerſa determinetur, huc animum applicabimus, duosque formabimus caſus? *primus* erit, cum angulus nutationis eſt admodum paruus, qui nobis pro oſcillationibus minimis definiendis deinceps inſeruiet; *ſecundus* cum angulus inclinationis eſt qualiscunque magnitudinis datae: prior pro omnibus planis determinationem admittit, alter vero pro quouis plano ſpeciali calculo eſt definiendus, niſi ad quantitates differentiales ſignaque ſummatoria recurrere velimus. Incipiam a primo, cuius duplicem ſolutionem dabo vel potius ſolutionis methodum indicabo.

§. 9.

§. 9. Postquam planum ex situ EFG peruenit in situm efg; hanc mutationem motu duplici factam fuisse considerari potest; altero verticali parallelo (quo singulae partes eleuatae fuerint per altitudinem aequalem altitudini A a et ratione cuius motus pars plani sic emergatur, quae sit $= FG \times Aa$) altero rotatorio, quo totum planum circa centrum grauitatis gyretur; et ambo motus hanc mutuam inter se relationem habere debent, vt in vtroque plani situ EFG et efg pars aequalis extra aquam emineat: Respectu motus rotatorii circa centrum grauitatis notandum est, ab eo fieri, vt spatiolum minimum triangulare, quod extra aquam ante rotationem eminuit, submergatur, aliudque prius submersum emergatur: differentia adeoque horum triangulorum facienda est aequalis praefato spatiolo $FG \times Aa$. Tum ex momentis horum triangulorum (quorum alterum generatum alterum destructum fuit) supputanda est mutatio loci, quam partis submersae centrum grauitatis homogeneae subiit, posteaque inquirendum, quantam viam idem punctum B horizontaliter describat, dum planum circa centrum grauitatis A vel a rotatur: Ex hisce et ex dato minimo angulo inclinationis plani poterunt definiri lineolae A a, B c atque b c, quae omnes pro rei diuersitate modo affirmatiuae modo negatiuae esse possunt.

Idem aliter et quidem breuius hunc in modum erui potest. Quoniam pars plani aequalis extra aquam eminere debet in omni plani situ, bisecabimus lineam F G in puncto H, circa quod rotationem minimam fieri intelligemus: hoc equidem modo obtinetur, vt ante et post rotationem aequale spatium extra aquam emineat, sed centrum grauitatis A sic lineam verticalem AB relinquit: igitur

igitur post rotationem totum planum censendum est moveri motu parallelo horizontali donec punctum A redierit in lineam verticalem AB; tumque rursus inquirendum, quamnam mutationem ex motu vtroque punctum B subeat immediate et quamnam simul patiatur a momento vtriusque trianguli.

Vtroque modo calculum feci, nec diuersi prodierunt valores; inueni nempe posito sinu toto $= 1$, atque sinu anguli minimi inclinationis $= \alpha$, fore

$$A a = HN \times \alpha$$
$$B c = HN \times \alpha$$
$$b c = \left(AB + \frac{FG^3}{12M}\right) \alpha.$$

§. 10. Ex formulis praecedentis paragraphi sequentia corollaria deduxisse e re nostra erit.

Primo. Quia $Aa = Bc$, erit $AB = ac$, siue differentiale altitudinis $AB = 0$; ergo in situ aequilibrii comparato cum situ alio plani quocunque, est distantia inter ambo grauitatis centra semper maxima vel minima, et quidem maxima in situ aequilibrii firmi, minima in situ aequalibrii labilis, vti mox demonstrabo.

Secundo. Si planum ex situ violento efg sibi relictum in situm naturalem iterum peruenit, vis viua generata fuit, quae est $= M \times aA - M \times cB$ (namque centrum grauitatis plani, cuius massa $= M$, descendit per altitudinem aA simulque considerandum est partes fluidi homogenei, cuius massa rursus $= M$, ita locum mutasse vt centrum grauitatis earum ascenderit per altitudinem Bc) Posset igitur ex eo, quod $M \times aA - M \times cB = 0$, colligi vim viuam post libere recuperatum situm plani nullam fuisse ortam, quod si foret, tempus restitutionis infinitum requireretur. Verum hic probe notandum est, in disqui-

 sitione

sitione ascensuum verticalium Aa et Bc, neglectas fuisse quantitates prae aliis infinite paruas, quod tunc fieri poterat; quando vero agitur de differentia horum minimorum ascensuum, illae quantitates amplius negligi non debent; et tunc inuenitur, si recte omnia perficiantur,

$$Aa = HN \times \alpha + (AN + \tfrac{FG^3}{12M})\tfrac{1}{2}\alpha\alpha,$$
$$Bc = HN \times \alpha + BN \times \tfrac{1}{2}\alpha\alpha.$$

Ergo iam vis viva plani a restitutione sua in situm naturalem EFG acquisita fit $= (\frac{FG^3}{12} + AB \times M)\frac{1}{2}\alpha\alpha$: atque hunc eundem vis viuae valorem alio modo longe, imo plane, diuerso obtinui, ita vt haec omnia rectissime sibi respondeant: Demonstrationem ampliorem huius rei non addo, nimis fere a lineolarum exiguitate perplexam et intelligentibus attentisque facile ex praemissis deducendam; ipsam tamen propositionem apponere volui, quia motum oscillatorium, de quo proxima vice agere constitui, illustrat. Caeterum quia sic oritur $Aa - Bc = (AN - BN + \frac{FG^3}{12M})\frac{1}{2}\alpha\alpha = (AB + \frac{FG^3}{12M})\frac{1}{2}\alpha\alpha =$ (per §. 9.) $bc \times \frac{1}{2}\alpha$, erit $Aa - Bc$ affirmatiua, si fuerit bc affirmatiua ratione ipsius α quod fit in aequilibrio firmo, sed si fuerit bc negatiua ratione ipsius α, quod fit in aequilibrio labili, erit $Aa - Bc$ negatiua. Id indicat, decrescere altitudinem AB (quamuis quantitate infinite parua secundi ordinis) si ex situ aequilibrii firmi paululum deturbetur, atque crescere si planum fuerit in situ aequilibrii labilis positum: ergo altitudo AB in priori casu maxima est, minima in altero, cuius rei demonstrationem supra promiseram.

§. 11. Redeamus nunc vnde digressi sumus. Vidimus §. 6. potentiam alterutram planum in situ violento detinentem esse $= \frac{bc}{AR} \times M$: sit nunc arbitraria $AR =$ sinui toti

toti ± 1, erit substituto pro bc valore §. 9. inuento, quaevis potentia planum horizontaliter trahens =

$$(AB \times M + \tfrac{1}{12} FG^3)\alpha.$$

§. 12. Igitur quamdiu AB est affirmatiua, quum nempe plani centrum grauitatis humilius positum est, quam partis submersae centrum grauitatis homogeneae, aequilibrium semper est firmum; sed sequitur porro, posse aequilibrium firmum esse, etiamsi AB sit; negatiua, quando nempe quantitas $AB \times M$ minor est quam $\tfrac{1}{12}$ FG^3.

§. 13. Apparet etiam tria esse, quae conferant ad situm aequilibrii firmiorem reddendum: 1°. altitudo partis submersae centri grauitatis homogeneae supra centrum grauitatis plani; 2do pondus totius plani siue magnitudo partis submersae 3°. potissimum plani latitudo, quae a superficie aquae terminatur: Singula tria in triremibus praesertim, quarum subuersio lateralis magis quam praegrauium nauium bellicarum timenda erat, egregie obseruantur, imprimis ratione requisiti tertii, cum latera triremis insigniter protuberare et foras exsurgere incipiunt, vbi superficiei maris proxima sunt. Quod vero hactenus experientia circiter praestantissimum indicauit, id nunc vera inuenta theoria etiamnum magis perfici posse, non dubito, quamuis simul perspiciam, praecepta accuratissima pro architectura nautica siue nauium constructione dari non posse, quia nimia nimisque diuersa sunt requisita.

§. 14. Descendamus nunc ad exempla particulariora. Sit primo bacillus rectus, cuius crassities ratione longitudinis pro nullis haberi possint, quae autem inter se comparatae sint vna cum densitatibus materiae vtcunque inaequales.

In hoc exemplo eſt FG$=0$ (niſi bacillus ſit praeciſe horizontaliter poſitus) ſitque potentia baculum inclinans (§. 11.) $=AB\times M\times\alpha$. Duos tantum bacillus habet ſitus naturales ſiue aequilibrii firmi, verticalem ſi ſit punctum A infra B et horizontalem ſi ſecus fuerit.

§. 15. Habeatur planum quadratum aequaliter craſſum et vbique homogeneum idque in ſitu verticali poſitum, quod fieri intelligi poteſt mediantibus duobus parietibus verticalibus, parallelis et valde propinquis intra quos planum contineatur. Sint grauitates aquae et plani ſpecificae vt m ad n et ponatur quadratum ita aquae immerſum vt habeat duo latera verticalia totidemque horizontalia: quaeriter firmitas iſtius ſitus.

Sit latus quadrati $=2a$; erit FG$=2a$; AB$=\frac{ma}{n}-a$, M$=\frac{4naa}{m}$; habeturque adeo firmitas iſtius ſitus $=(\frac{4mm}{nn}-\frac{4m}{n}+\frac{2}{3})a^3\alpha$; quae quantitas vel affirmatiua erit vel negatiua, adeoque aequilibrium vel firmum vel non tale pro ratione grauitatum ſpecificarum: atque ſi praefata quantitas ponatur$=0$, quaeraturque valor n, habebuntur limites pro aequilibrio firmo. Sit igitur $\frac{4mm}{nn}-\frac{4m}{n}+\frac{2}{3}=0$, ſiue $n=\frac{m}{3\pm\sqrt{3}}$; hoc indicat aequilibrium quadrati ſubmerſi firmum fore, quamdiu grauitas ſpecifica plani eſt extra terminos $\frac{m}{3+\sqrt{3}}$ et $\frac{m}{3-\sqrt{3}}$, at vero ſi ſit maior quam $\frac{m}{3+\sqrt{3}}$ et ſimul minor quam $\frac{m}{3-\sqrt{3}}$, aequilibrium non erit firmum.

Exemplum hoc afferre volui, quia id allegauit Cl. problematis Auctor in epiſtola ad patrem meum data. Equidem celebris iſte Geometra non tam de quadrato graui quam de cubo loquitur: verum in hoc caſu res eodem recidit, vt infra, cum de corporibus ſermo erit, oſtendam.

Si

Si pro dato fluido datoque quadrati latere fumatur eius grauitas fpecifica dimidia alterius, erit firmitas inter omnes angatiuas maxima, id eft, tunc planum paululum inclinatum maximam vim requirit, vt ab vlteriori fubuerfione coerceatur, quod idem dicendum, fi pro inuariato plano fumatur grauitas fpecifica fluidi tripla alterius.

§. 16. Iam vt etiam paucis attingam cafum alterum, quo angulum inclinationis a fitu naturali cuiuscunque magnitudinis finitae effe ponimus, eidem exemplo quadrati homogenei et aequaliter craffi infiftam fimulque breuitatis caufa (nam calculi alias funt oppido prolixi) grauitates fpecificas fluidi et folidi ponam vt 2 ad 1. fic inito calculo reperietur potentia P, quadratum ad angulum inclinans, cuius finus $= \alpha$, $= \frac{2\alpha\alpha - 1}{3\alpha\alpha + 3} \times a^3 \alpha$: haec autem potentia femper eft negatiua, quia non poteft fumi α maior quam $\sqrt{\frac{1}{2}}$, quin alterutrum latus fubito totum emergat ficque lex continuitatis fubuertatur. Sed haec allata potentia quae negatiua eft ratione vnius fitus aequilibrii fit affirmatiua refpectu alterius fitus, qui eft pro aequilibrio firmo, quo nempe diagonalis quadrati eft verticaliter pofita: fi pofitio quadrati ad hunc alterum fitum referatur, tunc per α intelligendus eft finus complementi anguli inclinationis ad femirectum fiue finus exceffus anguli femirecti fuper angulum inclinationis. Hoc autem fenfu diagonalis ita inclinari poteft, vt ad hanc inclinationem maxima vis requiratur: nempe cum fit $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{57} - 7)}$ id eft cum diagonalis verfus horizontem inclinatur ad angulum 23°, 17′, eftque tunc potentia quadratum in ifto fitu detinens cirrciter quadragefimam octauam partem ponderis totius quadrati, fi nempe applicata fit potentia ad distantiam verticalem a centro grauitatis aequalem semilateri quadrati.

§. 17. Haec de planis. Superest vt agamus de corporibus humido insidentibus. Patet autem, si pro tali corpore sumatur prisma rectum super basi EFG constitutum atque ex stratis similibus compositum, fore tunc, vt omnia de corporibus valeant, quae hactenus de planis commentati sumus. Quid autem erit de corporibus admodum irregularibus? status aequilibrii rursus erit, cum corporis centrum grauitatis et partis submersae centrum grauitatis homogeneae sunt in vna eademque linea verticali constituta; aequalibrium istud firmum esse potest ratione vnius plagae, minus firmum ratione alius plagae imo et labile: Igitur potentiae corpus declinantes in situm alium definiri non possunt, nisi situs iste alius sit ex omni parte datus atque definitus.

§. 18. Tum vero inseruiet ad propositum tale lemma: „Si habeatur superficies quaecunque plana ducaturque „linea quaecunque per superficiei centrum grauitatis homo„geneae, erunt solida quae ab ambabus superficiei partibus „circa lineam istam simul rotatis generantur inter se aequa„lia atque adeo etiam aequales inter se erunt cunei solidi „sub angulis vtrinque aequalibus.

§. 19. Sit nunc corpus quodcunque, cuius pars fluido immersa putetur FEGH (fig. 3.) sitque in situ aequilibrii positum. Sit porro FbGb sectio corporis in plano superficiei aquae: huius sectionis centrum grauitatis homogeneae sit in O; ducaturque per O recta bb talis, vt in situ proximo corporis haec linea bb situm habeat parallelum: datur itaque positio lineae bb, quia datur corporis

situs

situs proximus, a quo definitur planum mutationis quod nempe ad lineam *bb* erit perpendiculare, ita vt sectiones singulae corporis ad lineam *bb* perpendiculares (cuiusmodi est sectio FEGLF, quam per corporis centrum grauitatis transire pono) maneant in eodem plano, post mutatum corporis situm.

His praenotatis apparet calculum nunc fere ponendum esse, vt in §. 9. et quidem parte posteriori, vbi breuior fit, fecimus: Considerabimus nimirum corpus rotari ad angulum infinite paruum super axe *bb* (hoc enim modo vi lemmatis §. 19. satisfit hypothesi, quod pars solidi submersa in vtroque situ sit eiusdem magnitudinis, quia cuneus post rotationem minimam emersus aequalis est cuneo submerso. Deinde alteri hypothesi (corporis scilicet centrum grauitatis durante situs mutatione in eadem manere linea verticali) satisfaciemus, si putemus corpus post minimam rotationem promoueri motu horizontali parallelo et ad axem *bb* perpendiculari, donec corporis centrum grauitatis in lineam verticalem AB, quam a rotatione paululum deseruit, redierit. Tum si ponamus in situ aequilibrii centra grauitatis saepe nominata in A et B, indaganda erunt loca, in quae haec centra post vtrumque motum, rotatorium et parallellum, incidant. Tandemque etiam inquirendum est, quomodo mutetur locus centri grauitatis homogeneae in parte submersa a momentis cunei vtriusque immersi et emersi. Ex his omnibus reperietur punctum *b*, vbi partis submersae centrum grauitatis homogeneae post mutatum corporis situm ponimus. Ex puncto *b* ductam intelligemus rectam *bc* ad productam AB perpendicularem. Sit nunc sinus totus rursus $= 1$, sinus anguli inclinationis corporis (qui est ipse angulus minimus rotationis quam fieri intelleximus super axe *bb*)

$= a$:

$=\alpha$: ponamus etiam in hac rotatione partes a latere FbbF immergi et in latere oppoſito GbbG emergi: Sit HN in ſectione plani verticalis FEGL per centrum grauitatis A tranſeuntis et plani horizontalis FbGb, producaturque verticalis AB vsque in N. ſic inuenietur (vt in fine §. 9.) Aa=HN$\times\alpha$, ſimulque Bc=HN$\times\alpha$: Verum lineola bc ſic determinabitur. Ponamus centrum grauitatis homogeneae cunei FbbF in π cuneique oppoſiti in γ, deinde ducamus $\pi\Phi$ parallelam lineae bb et $\gamma\Phi$ perpendicularem ad $\pi\Phi$: tumque vocemus maſſam corporis totius ſiue magnitudinem partis ſubmerſae M; magnitudinem alterutrius cunei μ; dico fore $bc=\mathrm{AN}\times\alpha-\mathrm{BN}\times\alpha+\frac{\mu}{\mathrm{M}}\times\Phi\gamma$ $=\mathrm{AB}\times\alpha+\frac{\mu}{\mathrm{M}}\times\Phi\gamma$. Vt vero valor iſte aliter exprimatur, ſumatur in axe bb punctum quoduis r, per quod deinde ducatur pq perpendicularis ad bb: ponatur $br=x$; $rp=y$; $rq=z$: ſic facto calculo inuenietur $\mu=\frac{1}{2}\alpha\int yydx$, ſiue etiam, quia bb tranſire ponitur per ſuperficiei FbGb centrum grauitatis homogeneae, erit $\mu=\frac{1}{2}\alpha\int zzdx$: Ita quoque reperietur $\Phi\gamma=\Phi\lambda+\lambda\gamma=\frac{2\int y^3dx+2\int z^3dx}{3\int yydx}$: eſt igitur $\mu\times\Phi\gamma$ $=\frac{1}{3}\alpha\int y^3dx+\frac{1}{3}\alpha\int z^3dx$. Iſtoque valore ſubſtituto, inuenietur

$$bc=\left(\mathrm{AB}+\frac{\int y^3dx+\int z^3dx}{3\mathrm{M}}\right)\times\alpha.$$

§. 19. Atque ſic demum cognoſcitur ſitus puncti b in plano FEGL verticali et per centrum grauitatis A tranſeunte. Si nunc concipiamus duas potentias in directione plani FEGL horizontales, aequales et contrarias, alteram applicatam vt antea §. 11. in centro grauitatis, alteram in diſtantia verticali, quae ſit $=1$, et ſi quaeramus quantae iſtae potentiae eſſe debeant, vt impediant corpus, ne in plano FEGL ſitum mutet priſtinumque ſitum aſſumat, erit vi §. §. 6. et 10. vnaquaeuis harum potentiarum $=(\mathrm{AB}\times\mathrm{M}+\frac{1}{3}\int y^3dx+\frac{1}{3}\int z^3dx)\alpha$.

Cae-

Caeterum haec omnia supponunt, superficiem aquae corpus ita secare, vt a minima situs mutatione, nullae oriantur in sectione $FbGb$ mutationes subitaneae atque finitae magnitudinis.

§. 20. Verum notetur nunc porro, post corporis situs mutationem in solo plano FEGL, partis submersae centrum grauitatis homogeneae in eodem hoc plano sic quidem rectissime fuisse determinatum: fieri autem vt praefatum centrum simul planum FEGL deserat perpendiculariter perueniatque ex puncto b in punctum $\mathfrak{b}$, ita vt sit $b\mathfrak{b}$ parallela lineae bb aut $\pi\Phi$: eritque $b\mathfrak{b} = \frac{n}{M} \times \pi\Phi$. Propter hanc recessionem $b\mathfrak{b}$, fit vt aliis duabus potentiis horizontalibus itidem aequalibus et contrariis opus sit ad corpus in situ hoc violento dato detinendum: atque hae potentiae positae esse debent in plano verticali ad planum FEGL perpendiculari, sique distantia verticalis harum potentiarum rursus fuerit aequalis sinui toti 1, erit quaeuis potentia $= \mu \times \pi\Phi$.

§. 21. Cum animus sit in sequentibus motus oscillatorios corporum humido insidentium explicare atque definire, conueniet hic in antecessum monuisse, quod si omnes quatuor praefatae potentiae corpus in situ violento detinentes simul euanescant, duplices inde oscillationes orituræ sint, alterae in plano FEGL, alterae in plano perpendiculari, haeque oscillationes in diuersis planis minime futurae sint tautochronae, ita vt motus inde compositus appariturus sit admodum perturbatus nullique legi constanti subiectus; imo nec vnius eiusdemque classis oscillationes inter se semper erunt isochronae. Ista omnia suo loco accurate tradémus: nunc vero ea, quae de firmitate aequilibrii pro corporibus qualibuscunque commentati ſumus, duobus il-luſtrabimus exemplis.

§. 22. Habeatur cylindrus rectus homogeneus, cuius grauitas ſpecifica ſit ad grauitatem ſpecificam fluidi, vt n ad m: ſit altitudo cylindri $=a$; radius baſeos $=b$, ſitque axis cylindri fluido immerſi verticalis: quaeritur firmitas aequilibrii ſeu potius potentia corpus ad angulum minimum declinans. Ponatur ratio inter circumferentiam circuli et radium, vt c ad 1: erit hic ſectio $FbGb$ circulus, transibitque linea bb per centrum huius circuli, eritque adeo $\int y^3 dx = \int z^3 dx$; vnde potentia quaeſita (per §. 19.) eſt $= (AB \times M + \frac{2}{3}\int y^3 dx)\alpha$. Eſt autem porro nunc $AB = -\frac{1}{2}a + \frac{n}{2m}a$; $M = \frac{nc}{2m}abb$, ſitque $\int y^3 dx = \int (2bxdx - xxdx)\sqrt{(2bx - xx)} = \frac{3b^4c}{16}$, ſi poſt integrationem ponatur $x = 2b$: ſubſtitutis his valoribus fit potentia quaeſita $= (\frac{nnc}{4mm}aabb - \frac{nc}{4m} + \frac{b^4c}{8})\,\alpha$.

Ex hac formula inter plurima alia corollaria deduci hoc meretur, quod ſi altitudo cylindri maior ſit quam $\frac{mb}{\sqrt{(2mn - 2nn)}}$, tunc cylindrus ſemper ſit ſitum verticalem relicturus, ſi minor, eundem ſitum ſit ſeruaturus, huius corollarii veritatem ob rei facilitatem experimento confirmaui.

§. 23. Proponatur nunc conus rectus homogeneus, cuius altitudo $=a$, radius baſeos $=b$, manentibus poſitionibus caeteris ſuperioris paragraphi: ſitque conus aquis ita immerſus vt baſis extra aquam emineat ſitque axis coni verticalis; quaeritur rurſus huius aequilibrii firmitas.

Hic eſt $AB = -\frac{3}{4}a + \frac{3}{4}a\sqrt[3]{\frac{n}{m}}$; $M = \frac{nc}{6m} \times abb$; $\int y^3 dx$ ſiue $\int z^3 dx = \frac{3nb^4c\sqrt[3]{n}}{16m\sqrt[3]{m}}$, hisque valoribus ſubſtitutis fit firmitas ſitus $= (\frac{nc}{8m}aabb\sqrt[3]{\frac{n}{m}} - \frac{nc}{8m}aabb + \frac{nb^4c}{8m}\sqrt[3]{\frac{n}{m}})\alpha$.

Ex-

Exinde ſequitur rurſus fore aequilibrium iſtud firmum, ſi fiierit altitudo coni minor, quam $\pm b V \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n}}$; ſecus aequilibrium non ſubſtiturum: atque hunc etiam firmi aequilibrii terminum experimento confirmaui.

§. 24. Haec ſunt praecipua, quae de aequilibrii firmitate corporum humido inſidentium dicenda habui. Mentem quidem plurima alia ſubierunt; eſt enim argumentum, ſi quod aliud, fertiliſſimum geometrarumque attentione, ſi recte iudico, digniſſimum: Nunc vero plura addere non vacat: plura fortaſſe dabo, cum plus temporis a negotiis aliis vacabit: interim non vereor affirmare, methodum noſtram hisce paginis expoſitam recte perpenſam, paucis mutatis, nullibi eſſe defecturam noua de iſto argumento meditantem.

SOLVTIO PROBLEMATIS
CVIVSDAM
A CELEB. DAN. BERNOVLLIO
PROPOSITI
A. L. Euler.

§. 1.

In poſtremis litteris, quas Cel. Daniel Bernoulli ad me dedit Baſilea d. 24 Maii huius anni, mentionem fecit alicuius problematis, in quod occaſione alicuius Problematis mechanici incidiſſet. Quaerebat autem inter omnes curuas iſoperimetricas iisdem terminis contentas eam in qua $\int r^m ds$ haberet maximum minimumue valorem; denotantibus s arcum curuae, r vero eius radium osculi. Nunciat vero Vir Celeb. ſimul, ſe duplicem ſolutionem eſſe nactum, ad quarum alteram ponendo elementum arcus ds, ad alteram autem ponendo elementum abſciſſae dx conſtans perueniſſet: at ambas haſce ſolutiones ita eſſe comparatas, vt inter ſe non conſpirare videantur. Caſu quidem quo $m = 1$ hanc mihi perſcripſit aequationem a ſe inuentam, $ds = \frac{2r\,dr}{\sqrt{(gg+4nr-4rr)}}$ qua curuae natura exprimatur. Sin autem inter omnes omnino curuas quaereretur ea, in qua eſſet $\int r ds$ minimum, ſe inueniſſe ſcribit, fore $r = 0$, cum tamen ego iam ante Ipſi ſcripſiſſem cycloidem huic quaeſtioni ſatisfacere eamque ſolam. Hanc ob rem me rogauit, vt problema hoc pariter aggrederer, ſolutionemque quam fuero conſecutus, ſecum communicarem.

§. 2. Ac primo quidem intuitu iſtud problema in ampliſſimo problemate iſoperimetrico, cuius plures ſolutiones

tiones a Viris acutissimis Bernoulliis, Hermanno ac Tayloro sunt traditae, contineri videtur: Sed qui ipsam huius problematis solutionem aggredietur, ex methodis istis, quas nominati Viri reliquerunt, vix quicquam vtilitatis assequetur; cuius rei ratio est, quod in formula $\int r^m ds$, quae minima esse debet, differentialia secundi gradus insint, ob radium osculi r; memoratae vero methodi ad alias formulas non sint accommodatae, nisi quae ex differentialibus primi gradus respectu coordinatarum orthogonalium consistant; omnem enim formulam, quae maxima minimaue esse debet, ante ad huiusmodi coordinatas orthogonales reduci oportet, quam resolutio suscipiatur. Mihi vero solutio huius problematis statim non difficilis est visa, cum ante biennium circiter nouam atque peculiarem methodum essem adeptus, omnia huius generis problemata resoluendi, quae ad differentialia primi generis non erat adstricta, sed ad cuiuscunque gradus differentialia patebat. Quam methodum meam etiamsi iam protulerim, tamen non incongruum visum est, eam ad problema hoc a Celeb. Bernoullio propositum accommodare, eiusque beneficio solutionem desideratam eruere, cum vt Viri Clarissimi desiderato satisfacerem, tum etiam, vt methodi meae vis et praestantia euidentius perspiciatur.

§. 3. Problema autem propositum in duas partes distribui conueniet, in quarum priore inter omnes omnino curuas iisdem terminis contentas eam inuestigabo, in qua $\int r^m ds$ minimum omnium obtineat valorem: quae quaestio, etiamsi a Celeb. Bernoullio non videatur esse proposita, tamen praecipue hic tractari meretur. Nam quae curua *inter* omnes prorsus curuas iisdem terminis contentas desiderata maximi minimiue proprietate gaudet, eadem etiam hac praedita erit proprietate inter omnes curuas aequelongas. In altera autem problematis parte infinitas curuas intra eosdem terminos sitas contemplabor, quae omnes inter se longitudine sint aequales, atque exhis solum curuis eam determinabo, in qua $\int r^m ds$ minimum valorem sit habiturum, quae quidem quaestio cum proposita penitus congruit. In priore igitur problemate inter datos terminos absolute ea curua inuestigatur, in qua sit $\int r^m ds$ minmum, in posteriore vero inter eosdem terminos curua datae longitudinis desideratur, quae inter omnes alias eiusdem longitudinis et iisdem terminis contentas hac gaudeat praerogatiua, vt $\int r^m ds$ minimam obtineat quantitatem. Ex quo perspicuum est priori quaestioni vnicam satisfacere posse curuam, posteriori vero innumerabiles, pro infinita longitudinis varietatae, quae curuae quaesitae praescribi potest.

§. 4. Fundamentum, quo vtriusque problematis solutio nititur, ex methodo mea iam exposita huc redit: Si positis abscissa $=x$; applicata $=y$, inter omnes curuas iisdem terminis comprehensas ea requiratur, in qua formula quaecunque integralis maximum minimumue induere debeat valorem; tum, cuiuscunqne gradus differentialia in ea formula integrali insint, dummodo integralia non implicantur, ponatur $dy=pdx$; $dp=qdx$; $dq=rdx$; $dr=sdx$; etc. Quo facto formula illa integralis ad eiusmodi formam reducetur $\int Zdx$, in qua Z erit functio quantitatum x; y; p; q; r; s etc. Deinde quantitas Z differentietur; sitque $dZ=Mdx+Ndy+Pdp+Qdq+Rdr+Sds+$ etc. Hinc formetur valor quidam V sumendo $V=N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\frac{d^4S}{dx^4}-$etc. posito dx constante. Hoc denique pacto pro formula

formula integrali propoſita inuento eiusmodi valore V ponatur V=o haecque aequatio praebebit naturam curuae quaeſitae. At ſi non inter omnes omnino curuas, ſed inter eas tantum, in quibus vna pluresue formulae integrales aequalem obtinent valorem ea deſideretur; in qua alia quaepiam formula integralis maximum minimumue habitura ſit valorem, tum ſingulae formulae integrales praeſcripto modo tractentur, atque vniuscuiusque valor respondens V eruatur, hocque facto ſinguli iſti valores V per quantitates conſtantes quascunque multiplicati coniungantur, nihiloque aequales ponantur: ex qua aequatione natura curuae quaeſitae elicietur.

§. 5. His praemiſſis quaeſtionem priorem, quam ex problemate propoſito formaui aggredior, atque inter omnes curuas iisdem terminis contentas eam definiam, in qua ſit $\int r^m ds$ minimum. In hanc finem ſumta recta quacunque pro axe, ſit abſciſſa $=x$, et applicata $=y$; erit $ds=V(dx^2+dy^2)$, atque poſito dx conſtante habebitur $r=\frac{ds^3}{dxddy}$. Cum autem fieri debeat $dy=pdx$; et $dp=qdx$; erit $ds=dxV(1+pp)$ et $ddy=qdx^2$, vnde prodit $r=\frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{q}$, ac formula integralis, quae minima eſſe debet, fiet $=\int\frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}dx}{q^m}$. Habebitur ergo $Z=\frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$ hincque porro $dZ=\frac{(3m+1)(1+pp)^{\frac{3m-1}{2}}pdp}{q^m}-\frac{m(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}dq}{q^{m+1}}$, quae expreſſio cum ſuperiore vniuerſali com-

parata

parata dat $M=o$; $N=o$; $P=\frac{(3m+1)(1+pp)^{\frac{3m-1}{2}}p}{q^m}$; $Q=\frac{-m(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^{m+1}}$; $R=o$; $S=o$; etc. Quocirca habebitur $V=\frac{-dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}$; atque pro curua quaesita prodibit ista aequatio: $o=\frac{-dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}$; quae integrata dat $Adx=-Pdx+dQ$.

§. 6. Antequam autem loco P et Q debitos valores substituam, secundam integrationem perficere tentabo, in subsidium vocando aequationes $dp=qdx$ et $dZ=Pdp+Qdq$. Substituto vero $\frac{dp}{q}$ loco dx, aequatio inuenta transit in hanc. $Adp=-Pdp+qdQ$, haecque denuo ob $Pdp=dZ-Qdq$ in istam: $Adp=-dZ+Qdq+qdQ$ cuius integralis est $Ap+B=-Z+Qq$. Nunc tandem substitutionibus vtar, obtineboque propter $Z=\frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$ et $Qq=\frac{-m(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$ mutatis signis constantium A et B hanc aequationem $Ap+B=\frac{(m+1)(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$ quae ducta in dx ob $y=\int pdx$ et integrata suppeditabit istam aequationem $Ay+Bx=(m+1)\int\frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}dx}{q^m}=(m+1)\int r^m ds$, ex qua perspicitur eam curuam esse habituram $\int r^m ds$ minimum, in qua sit $\int r^m ds=Ay+Bx$. Quoniam autem axe vtcunque mutato r et s non mutantur, ita axis accipiatur vt $Ay+Bx$ abeat vel in solam abscissam vel solam applicatam: quod cum fieri liceat sine vlla restrictione vel A vel B poni

poni poterit $=0$. Quamobrem pro curua quaesita habebitur vel ista aequatio $Ax=(m+1)\int r^m ds$ vel $Ay=(m+1)\int r^m ds$.

§. 7. Quo homogeneitas quantitatum obseruetur ponam $A=a^m$, atque ista vtar aequatione $a^m x=(m+1)\int r^m ds$, ex qua penitius in curuae naturam inquiram. Optime autem curuae satisfacientis indoles cognoscetur ex aequatione inter duas variabiles tantum, cuiusmodi aequationem duplici modo exhiberi licet, altero inter variabiles r et s, per quam aequationem natura ipsius curuae sine vllo ad quempiam axem respectu habito designatur; altero modo autem inter variabiles x et y aequatio indicabitur quae tum ad curuae constructionem tum ad cognitionem qualis sit, est maxime accommodata. Priore modo aequatio inter r et s reperietur, dum x ex aequatione $a^m x=(m+1)\int r^m ds$ vel ex eius differentiali $a^m dx=(m+1)r^m ds$ eliminabitur; id quod hoc modo praestabitur: cum $\frac{dx}{ds}$ posito sinu toto $=1$ sit sinus arcus, cuius differentiale est $\frac{ds}{r}$, erit $\frac{dx}{ds}=$ sin. arcus $\int\frac{ds}{r}$, quo valore substituto ista habebitur aequatio a^m sin. arcus $\int\frac{ds}{r}=(m+1)r^m$ ac loco $\frac{a^m}{m+1}$ scripto c^m, erit $\int\frac{ds}{r}=$ arcui cuius sinus est $\frac{r^m}{c^m}=\int\frac{mr^{m-1}dr}{\sqrt{(c^{2m}-r^{2m})}}$. Sumtis ergo differentialibus erit $ds=\frac{mr^m dr}{\sqrt{(c^{2m}-r^{2m})}}$ atque capiendo integralia habebitur pro curua quaesita ista aequatio $s=m\int\frac{r^m dr}{\sqrt{(c^{2m}-r^{2m})}}$ qua arcus ex dato radio osculi determinatur.

§. 8. Ad aequationem autem inter coordinatas orthogonales x et y eliciendam adhibeo aequationem supra inuentam, in qua etiamnum p et q continentur, quae huc redit $A^m q^m = (1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}$. Haec autem porro reducitur ad hanc $Aq = (1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}$, quarum quidem vtraque ad curuam construendam sufficere posset, cum duae tantum insint variabiles p et q. Quia autem est $qdx = dp$, habebitur $Adp = (1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}} dx$ seu $dx = \frac{adp}{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}$. Deinde ob $dy = pdx$, erit $dy = \frac{apdp}{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}$ vnde integrando obtinetur $y = \frac{-ma}{(m+1)(1+pp)^{\frac{m+1}{2m}}} + b$; hincque $\frac{ma}{(m+1)(b-y)} = (1+pp)^{\frac{m+1}{2m}}$. Fiat $\frac{ma}{m+1} = -c$, et ponatur $b=0$, quia hoc pacto amplitudo aequationis nihil restringitur, habebiturque $\frac{c}{y} = (1+pp)^{\frac{m+1}{2m}}$, atque $1+pp = \frac{c^{\frac{2m}{m+1}}}{y^{\frac{2m}{m+1}}}$; ex quo fit $p = \frac{\sqrt{(c^{\frac{2m}{m+1}} - y^{\frac{2m}{m+1}})}}{y^{\frac{m}{m+1}}}$. Cum nunc sit $dx = \frac{dy}{p}$ orietur aequatio pro curua quaesita inter coordinatas x et y ista $x = \int \frac{y^{\frac{m}{m+1}} dy}{\sqrt{(c^{\frac{2m}{m+1}} - y^{\frac{2m}{m+1}})}}$ atque in ea erit $\int r^m ds = \frac{(m+1)^m}{m^m} c^m x$.

Cur-

Curua igitur quaesita erit algebraica, quoties fuerit vel $m = \frac{1}{2i}$ vel $m = \frac{-1}{2i+1}$, denotante i numerum integrum affirmatiuum quemcunque.

§. 9. Casus hic nonnulli particulares seorsim considerari merentur, quorum primus esto si $m = -1$, seu quo curua desideratur, in qua $\int \frac{ds}{r}$ sit maximum minimumue. Hoc autem casu ob $m+1=0$ in omnibus aequationibus inuentis accidit incommodum, vt iudicium difficile videatur. At attentius rem consideranti patebit, hunc casum ne quidem ad quaestionem de maximis et minimis pertinere, cum $\frac{ds}{r}$ integrationem admittat, existente $\int \frac{ds}{r}$ arcu circuli cuius sinus est $\frac{dx}{ds}$; adeo vt $\int \frac{ds}{r}$ non ad totam curuam pertineat, sed ex positione extremi curuae elementi respectu axis assumti pendeat. Alter casus est quo $m=0$, seu quo curua quaesita minima esse debet inter suos terminos. Hic facillime cognoscetur ex aequatione $A^m q^m = (1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}$ quae posito $m=0$ praebet $p=$ const. vnde intelligitur huic casui lineam rectam satisfacere. Denique attendamus ad casum $m=1$, quo curua quaeritur, quae inter omnes alias habeat $\int r\,ds$ minimum. Pro hac autem curua reperitur ista aequatio $x = \int \frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(c-y)}} = \int \frac{y\,dy}{\sqrt{(cy-yy)}}$, ex qua manifestum est curuam satisfacientem esse cycloidem, cuius cuspis in altero termino dato collocatur; et basis in ipsum axem incidit. Fiet autem $\int r\,ds = 2cx$; vnde intelligitur quaestioni maxime satisfieri, si eiusmodi cyclois eligatur, cuius binae cuspides in ambos terminos praescriptos incidant.

§. 10. Atque hactenus quidem minimi valoris tantum mentio est facta, qui expressioni $\int r^m ds$ sit conciliandus, cum tamen methodus adhibita etiam maximum, si quod habetur, indicet. Si enim m, vti feci, tanquam numerus affirmatiuus consideretur, $\int r^m ds$ maximum habebit valorem, si sit $r=\infty$, lineaque quaesita recta, qui casus maximi cum sponte innotescat illo inueniendo supersedendum censui, etiamsi is quoque ex aequatione inuenta

$$Ap+B=\frac{(m+1)(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$$

fluat, faciendo A et B infinite magna, quo casu fit $p=$ constanti. Contra vero accidit, si m fuerit numerus nihilo minor, huicque quaestioni recta semper ita satisfacit, vt sit $\int r^m ds$ minimum, quippe $=0$; curuae igitur, quas pro his casibus aequationes inuentae suppeditant ita sunt comparatae, ut in iis sit $\int r^m ds$ maximum. Ita si ponatur $m=-2$ curua reperietur quae inter omnes iisdem terminis contentas sit habitura $\int\frac{ds}{r^2}$ maximum non minimum. Curua autem ista hac continebitur aequatione $x=\int\frac{y^2dy}{\sqrt{(c^4-y^4)}}$, ex qua intelligitur curuam satisfacientem esse elasticam ad axem orthogonalem, seu cuius tangentes in punctis flexus contrarii sint inter se parallelae, atque normales ad axem, in quo abscissae x capiuntur. Erit autem $\int\frac{ds}{r^2}=\frac{4x}{c^2}$.

§. 11. In his autem lineis curuis, quae problemati satisfacere sunt inuentae, parodoxon euenit, quod in aliis huius generis problematis vsu venire non solet. Cum enim axis, in quo abscissae capiuntur, respectu duorum praescriptorum terminorum, per quos curua transire debet, positione aliter non determinetur, nisi quod per alterum terminum transire debeat; infinitis modis parameter curuae c accipi poterit, ita vt curua per alterum terminum transeat,

eat, id quod fiet axi debitam positionem tribuendo. Quamobrem solutio inuenta innumerabiles continet curuas problemati satisfacientes, cum tamen vnica satisfacere videatur; namque vel in his omnibus curuis $\int r^m ds$ eundem valorem obtinet, quod tamen non accidit, vel secus, quo casu ea, in qua $\int r^m ds$ erit vel maximum vel minimum problemati sola satisfacere censenda est. Ita casu $m=1$, pro quo cyclois est inuenta, cuius cuspis in altero termino sit positus, parameter cycloidis seu magnitudo circuli generatoris non definitur, quaecunque enim cyclois assumatur, ea ita poterit constitui, vt quoque per alterum terminum transeat. At facile colligire licet, ex quo minore circulo cyclois generetur, eo minorem quoque fore $\int r ds$; ita vt huic quaestioni stricte acceptae ea cyclois maxime satisfaciat, quae a circulo minimo seu infinite paruo sit nata; cuiusmodi curua, etsi a recta differre non videatur tamen maxime discrepat; eo quod longitudine est diuersa, atque vbique radium osculi habet infinite paruum.

§. 12. Cum igitur solutio huius problematis, prout id quidem est propositum, innumeras praebeat curuas, concludendum est, ipsum problema non satis esse determinatum, eique insuper vnam conditionem adiungi posse, qua etiam quantitas parametri seu quantitatis constantis c, quae in aequatione pro curua inuenta $x=\int\frac{y^{\frac{m}{m+1}}dy}{\sqrt{(c^{\frac{2m}{m+1}}-y^{\frac{2m}{m+1}})}}$ inest, determinetur. Eiusmodi autem conditio duplex adiungi poterit, quarum altera ex amplitudine curvae non incongrue desumetur; aestimatur autem amplitudo curuae ex angulo, quem tangentes curuae in terminis praescriptis, per quos curua transire debet, inuicem constituunt. Ex quo solutio inuenta huic problemati satisfaciet, quo inter omnes curuas eiusdem amplitudinis per data duo puncta transeuntes, ea requiritur, quae habeat $\int r^m ds$ maximum minimumue. Vel loco amplitudinis curuae in problemate proposito tertium quodpiam punctum praescribi potest, per quod curua quaesita simul transeat; hac enim conditione adiecta pariter quantitas indefinita c determinabitur. Problema igitur ita proponatur, vt inter omnes curuas per tria data puncta transeuntes ea definiatur, in qua esset $\int r^m ds$ maximum vel minimum. Vtrouis autem modo problema proponatur, ex solutione vnica curua reperietur quae omnium maxime setisfaciet. Quemadmodum igitur, si in formula integrali, quae maxima minimaue esse debet, differentialia primi tantum gradus insunt, duo tantum puncta praescribere licet, per quae curua quaesita transeat, ita si formula illa integralis differentialia secundi gradus contineat, tria puncta, per quae curua quaesita ducatur, dari oportet. Ex quo colligitur si differentialia tertii ordinis in illam formulam ingrediantur, tum problema non fore determinatum, nisi quatuor puncta sint praescripta, per quae curua quaesita transeat, et ita porro. Quo altiora enim differentialia in aequationem quampiam ingrediuntur, eo latius ea patet, pluresque restrictiones admittit, propter plures integrationes, quarum singulae nouam constantem indefinitam inducunt. Atque ex his natura huiusmodi problematum quibus curuae maxima minimaue quadam proprietate gaudentes requiruntur, clarius perspicitur, quam ante solutionem actu transactam fieri potuisset.

§. 13.

§. 13. Haec autem attentius considerantibus planum fiet, numerum punctorum, quae ad curuam aequatione contentam determinandam requiruntur, pendere a gradu differentialium, quibus aequatio primitiua $0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} +$ etc. erit affecta, eliminatis quantitatibus in subsidium vocatis, p, q, r, etc. vt tantum x et y cum suis differentialibus insint. Ita si haec aequatio statim fuerit algebraica, tvm dato axe initioque abscissarum, ne vnicum quidem punctum praescribi potest, per qnod curua quaesita transeat, sed curua inuenta inter omnes omnino curuas ad eundem axem relatas nulla insuper conditione adiuncta, praescriptam proprietatem maximi minimiue habebit. Sic si $\int (ay - xx)y\,dx$ maximum mimimumue esse debeat, reperietur curua hac aequatione expressa $2ay = xx$, quae quaesito inter omnes omnino curuas ad eundem axem relatas maxime satisfacit. Aequatio autem generalis $0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} -$ etc. neque differentialis primi gradus vnquam fieri potest; neque tertii gradus differentialis, neque quinti, neque vllius gradus imparis. Quoties autem prodit aequatio differentialis secundi gradus, quod in omnibus fere problematis adhuc tractatis vsu venit, tum duo puncta pro lubitu assignari possunt, per quae curua quaesita transeat. His igitur casibus curua inuenitur, quae inter omnes alias per eadem duo puncta ductas praescripta maximi minimiue proprietate est praedita. Cum autem ad aequationem differentialem quarti ordinis peruenitur, tum curua inuenta quaeque habebit formulam $\int Z\,dx$ maximam minimamue non inter omnes omnino curuas, sed inter omnes tantum, quae cum inuenta quatuor puncta habent communia. Simili modo aequatio differentialis sexti gradus

dus fex puncta data ad curuam determinandam requiret, et ita porro. Quod autem in noſtro caſu curuam tribus tantum punctis determinari dixi, cum tamen ea ex aequatione differentiali quarti gradus ſit orta, inde venit, quod datum curuae pnnctum in vno datorum punctorum collocauerim: quae conditio non neceſſaria ſi omittatur, tum aequatio inuenta ad definitam curuam reſtringetur, ſi quatuor puncta, per quae tranſeat, praeſcribantur. Ita cyclois per quatuor data puncta deſcripta prae omnibus aliis curuis per eadem puncta tranſeuntibus hanc habebit praerogatiuam, vt in ea $\int r\,ds$ minimum obtineat valorem.

§. 14. Miſſis autem his, quae ad generalem problematis Iſoperimetrici indolem potius, quam ad meum inſtitutum pertinet, ad alteram quaeſtionem ſoluendam progrediar, quae eſt ipſa a Cel. Bernoullio propoſita. Quaeritur autem in ea curua, quae inter omnes alias eiusdem longitudinis habeat $\int r^m ds$ maximum minimumue. Hic igitur habentur duae formulae integrales $\int ds$ et $\int r^m ds$, quarum vtrique valor ipſius V reſpondens eſt inueſtigandus; quippe quo facto duo iſti valores vel eorum multipli quique inuicem additi et $=0$ poſiti naturam curuae quaeſitae exhibebunt. Adhibitis autem ſubſtitutionibus $dy=pdx$; $dp=qdx$, formulae illae abibunt in has $\int dx \surd(1+pp)$ et $\int \frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}} dx}{q^m}$; quarum illi reſpondet iſte valor ipſius V; $\frac{-dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}} dx}$ pro altera autem erit vt ante V $=$

$\frac{-dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}$, existente $P = \frac{(3m+1)(1+pp)^{\frac{3m-1}{2}}}{q^m} p$ et $Q = \frac{-m(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^{m+1}}$. Quamobrem pro curua quaesita orietur ista aequatio $\frac{A\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = dP - \frac{ddQ}{dx}$; quae integrata dat $\frac{Ap}{\sqrt{(1+pp)}} + B = P - \frac{dQ}{dx}$. Multiplicetur vtrinque per dp seu $q\,dx$, et prodibit $\frac{Ap\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} + B\,dp = P\,dp - q\,dQ = P\,dp + Q\,dq - Q\,dq - q\,dQ$; quae denuo integrata dat $A\sqrt{(1+pp)} + Bp + C = Z - Qq$; existente $Z = \frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$. Restitutis igitur loco Z et Q suis valoribus, orietur haec aequatio $A\sqrt{(1+pp)} + Bp + C = \frac{(m+1)(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$, quae per dx multiplicata, eliminatis p et q abit in hanc $A\,ds + B\,dy + C\,dx = (m+1)r^m\,ds$; in qua vt supra notaui, sine vlla restrictione vel B vel C nihilo aequale poni potest.

§. 15. Ponam igitur $B = 0$, at primo quaeram aequationem inter r et s, ex hac aequatione $A\,ds + C\,dx = (m+1)r^m\,ds$. Ex superioribus autem patet esse $\frac{dx}{ds} =$ sinui arcus $\int\frac{ds}{r}$, vnde loco dx suo substituto valore orietur $A + C.$ sin. Arcus $\int\frac{ds}{r} = (m+1)r^m$, vnde erit $\int\frac{ds}{r} =$ Arcui, cuius sinus est $\frac{(m+1)r^m - A}{C}$ seu cuius sinus est $\frac{r^m \pm a^m}{c^m}$. Hinc ergo sumtis differentialibus emerget haec aequatio $\frac{ds}{r} = \frac{mr^{m-1}dr}{V(c^{2m}-(r^m \pm a^m)^2)}$, ex hac que porro ista $s = m\int\frac{r^m dr}{V(c^{2m}-(r^m \pm a^m)^2)}$. Casu igitur quo inter omnes curuas eiusdem longitudinis per quatuor data puncta transeuntes quaeritur ea, in qua sit $\int r\,ds$ minimum maximumue, habebitur pro curua quaesita ista aequatio $s = \int\frac{r\,dr}{V(c^2-r^2 \pm 2ar-aa)}$, quae apprime conuenit cum Bernoulliana mecum communicata ista $ds = \frac{2r\,dr}{V(g+4ar-4rr)}$, est namque $\frac{g}{4} = c^2 - a^2$ et $n = \pm 2a$.

§. 16. Constructio autem curuae quaesitae commodissime ex aequatione $AV(1+pp)+Bp+C = \frac{(m+1)(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$ deducetur, quae posito $B=0$, mutatisque constantibus abit in hanc: $q = \frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}{\sqrt[m]{(AV(1+pp)+C)}}$.

Multiplicetur per dx, et ob $q\,dx = dp$ habebitur $dx = \frac{dp\sqrt[m]{(AV(1+pp)+C)}}{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}$ atque $dy = \frac{p\,dp\sqrt[m]{(AV(1+pp)+C)}}{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}$; quae posterior aequatio

facto

facto $\sqrt{(1+pp)} = u$ transmutatur in istam $dy = \frac{du\sqrt[m]{(Au+C)}}{u^{\frac{2m+1}{m}}}$ tractatu faciliorem. Ex his autem aequationibus curua per quadraturas facile construitur. Aequatio vero differentialis primi gradus inter x et y ex istis aequationibus generalibus ob m numerum indefinitum formari nequit, at aequatio differentialis secundi gradus ob $dp = \frac{ddy}{dx}$; et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{ds}{dx}$ obtinebitur ista $ds^{\frac{3m+1}{m}} = dx\,ddy\sqrt[m]{(Ads+Cdx)}$ ad curuam cognoscendam parum idonea. Interim tamen casus est notandus, quo etiam fit $C = 0$; tum enim aequatio $Ads = (m+1)r^m ds$ praebet $r =$ const., quae est proprietas circuli. Circulus igitur inter omnes alias curuas eiusdem longitudinis, et per eadem quatuor puncta ductas habebit $\int r^m ds$ maximum minimumue.

§. 17. Considerabo autem praecipue casum quo $m = 1$, in quo inter omnes curuas eiusdem longitudinis per quatuor data puncta transeuntes ea quaeritur, in qua fit $\int r\,ds$ maximum minimumue. Isto autem casu aequatio superior $dy = \frac{du\sqrt[m]{(Au+C)}}{u^{\frac{2m+1}{m}}}$ abit in hanc $dy = \frac{Adu}{u^2} + \frac{Cdu}{u^3}$ cuius integralis est $y = a + \frac{2b}{u} + \frac{c}{uu}$ constantibus mutatis; vnde fit $u^2 = \frac{2bu+c}{y-a}$ atque $u = \sqrt{(1+pp)} = \frac{b \pm \sqrt{(bb-ac+cy)}}{y-a}$, ex qua elicitur

$p = \frac{\sqrt{(2bb - ac - aa + 2ay + cy - yy \pm 2b\sqrt{(bb - ac + cy)})}}{y - a} = \frac{dy}{dx}$. Fiat $a = 0$; quia applicatam y augere licet quacunque constante, sine vlla restrictione, et habebitur $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(2bb + cy - yy \pm 2b\sqrt{(bb + cy)})}}$) pro aequatione qua curuae natura exprimitur. Signorum autem ambiguorum $\pm$ alterum dabit eam curuam, in qua $\int r\,ds$ est maximum, alterum in qua minimum. Perspicuum autem est, si fiat $b = 0$, tum aequationem exhibituram esse cycloidem, quae iam ante est inuenta, et satisfacit sola, quando conditio aequalitatis curuarum omittitur.

CLAS-

CLASSIS SECVNDA.

CONTINENS

PHYSICA.

DE
REFLEXIONE LVCIS,
IN TRANSITV PER MEDIVM DIAPHANVM ORIVNDA, EXPERIMENTA ET EXPLICATIONES.

AVTORE
Georgio Wolffg. Krafft.

Obſeruatum iam diu fuit a praeſtantiſſimis Phyſicis, quorum loca hic allegare ſuperfluum eſt, *fieri in acceſſu lucis ad corpus aliquod diaphanum non modo tranſitum lucis per hoc corpus, ſed repercuſſionem eius etiam aliquam, valde ſenſibilem, vti ex ſubſequentibus Experimentis conſtabit, et intenſitati lucis tranſeuntis noxiam*; quae praecipua cauſa eſt eius phaenomeni, quo Tubi Optici pluribus lentibus inſtructi obſcuritatem obiectis inducunt, dum nempe non omnes radios, qui ad lentes affluunt, transmittere poſſunt, ſed partem eorum non contemnendam retroagunt, atque reflectunt, non obſtante vitri maxima pelluciditate. Hanc reflexionem lucis in tranſitu per medium diaphanum oriundam, a quacunque demum cauſa ea exiſtat, an a retroactione particularum ſolidarum; an a vi repellente corpora ambiente, an vero ab vtraque ſimul, praeſenti ſcripto paulo accuratius, quamuis generaliter tantum, examinabo, cum praeter ſolam generaliſſimi phaenomeni enarrationem *nihil* adhuc in hac quaeſtione hucusque fuerit pertractatum. Poſtquam primo ad hoc argumentum acceſſi, ſtatim Tab. XIV. et XV.

tim deprehendi, in illo, si Geometrice absolui debeat, perueniri ad calculos maxime prolixos et intricatos; quare casus simplicissimos tantum, et praecipue eos, qui Experimentis institutis confirmari possunt, ad examen reuocabo, difficiliora forsan explicaturus alio tempore.

Problema I.

Tab. I. Fig. 1. Sit planum horizontale, cuius sectio repraesentetur recta LD, huic incumbat corpus diaphanum, cuius sectio verticalis sit Trapezium LKBD, rectis KL, BD, parallelis, et ad planum LD perpendicularibus, terminatum; atque ex puncto radiante A, in recta DB prolongata, vbicunque assumto, exeat radius quilibet AE, qui partim ex E reflectatur in Q, partim vero refringatur in F, atque ibi denuo reflectatur in G, et tandem noua refractione perueniat in H: quaeritur, quisnam futurus sit sinus anguli HGP, ductis nempe PGO, et MEN perpendicularibus ad KB.

Solutio.

Posito sinu toto $=1$, statuantur anguli constantis KBI sinus $=p$, cosinus $=q$; anguli Inclinationis AEM variabilis sinus $=x$, cosinus $=y$; sitque sinus anguli Inclinationis AEM ad sinum anguli refracti FEN, radii AE ex medio API in diaphanum KBD transeuntis, in ratione constanti $m:n$, ex regulis Dioptricis; quibus positis, erit sin. AEM (x) : sin. FEN$=m:n$, hoc est, sin. FEN$=\frac{nx}{m}$, eiusque cosinus $=\frac{\sqrt{(m^2-n^2x^2)}}{m}$. Cum vero sit ang. EFN$=END-$FEN, et productis rectis LD, KB, donec sibi occurrant in C, triangula duo rectangula CEN et et CDB ſint ſimilia, erit ang. END $=$ ang. ABE, cuius ſinus et coſinus ſunt dati; per regulas itaque Trigonometricas habebitur ſinus EFN $= \frac{p\sqrt{(m^2-n^2x^2)}-qnx}{m}$, qui ob naturam Reflexionis aequalis erit ſinui LFG, atque eiusdem huius anguli EFN coſinus inuenietur $= \frac{q\sqrt{(m^2-n^2x^2)}+pnx}{m}$. Cum itaque in hoc ſitu quem Figura repraeſentat, ſit angulus OGF $=$ LOG $-$ LFG, atque, ob MN, PO, parallelas, ſit LOG $=$ LNE $=$ ABC, cuius vltimi anguli ſinus p, coſinus $-q$, reperietur anguli OGF ſinus $\frac{pq\sqrt{(m^2-n^2x^2)}+p^2nx}{m} + \frac{pq\sqrt{(m^2-n^2x^2)}-q^2nx}{m} = \frac{2pq\sqrt{(m^2-n^2x^2)}+(pp-qq).nx}{m}$; cum autem denique ſit ſinus OGF : ſin. HGP $= n:m$; erit tandem ſin. HGP $= \frac{2pq\sqrt{(m^2-n^2x^2)}+(pp-qq)nx}{n}$.

Corollarium 1.

Cum difficulter inſtitui poſſint Experimenta, in quibus punctum A radians totam ſuperficiem KB illuſtret, quia ob languorem talis lucis vix diſtingui poterunt veſtigia radiorum FGH ab inferiore ſuperficie LD reflexorum: accommodabo ſolutionem Problematis ad eum ſolum caſum, quo radii omnes AE paralleli in ſuperficiem KB incidunt; vtpote quod ſuperficie KB a libero Sole illuminata effici poteſt. Sin igitur radii omnes paralleli incidant, erit angulus AEM conſtans, quare eius ſinus x pro conſtanti debet haberi; quo ſuppoſito euidens eſt, fore vt etiam angulus HGP, vel eius complementum KGH perpetuo ſit idem. In Sole itaque libero radii omnes GH, ab inferiore ſuperficie LD reflexi, inter ſe paralleli exibunt.

Corollarium 2.

Quoniam, positis radiis incidentibus parallelis sinus anguli HGP est adhuc $\frac{2pq\sqrt{(m^2-n^2x^2)}+(pp-qq)nx}{n}$, sed habita x pro constante; et, ducto ipsius E radio reflexo EQ, anguli MEQ, vtpote aequalis ipsi AEM per naturam Reflexionis, sinus est x: euidens est, varios dari posse casus, in quibus H modo est anterius, modo posterius in respectu ad punctum Q habito, prout nempe angulus Incidentiae AEB, et angulus Trapezii diaphani ABE inter se sunt diuersi; vt sinus HGP fiat negatiuus, quos casus omnes cum non nisi prolixe admodum distinguere liceat: contentus ero solis formulis generalibus modo inuentis. Deprehendi autem conformia haec omnino esse Ex-

Experim. I. perientiae. *Nam cum accepissem vitrum politum, plana*

Fig. II. *superficie vtrinque terminatum, crassitiei apud E = 25 partibus millesimis pedis Londinensis, apud F vero 24 part. illudque imposuissem tabulae horizontali CG, quae fenestrae apertae ABCD admota erat, per quam in perfecta serenitate Sol liber admissus vitrum illuminabat; vidi, 1) in lacunari conclauis MN duas distinctas formari imagines lucidas vitri, HI nempe et KL; 2) hanc esse debiliorem, illam vero fortiorem; 3) in distantia aliqua HL inter se remotas. 4) euanescere imaginem debiliorem KL, si vitri pars EOP, cuius latitudo esset circiter $\frac{3}{8}$ EQ, panno nigro obtegatur. 5) inuariatas manere imagines, etiamsi vitro pannus niger supponatur, aut illud, manibus in äerem eleuatum, horizontaliter teneatur. 6) inuerso autem vitro, ita vt crassitie maiori sua fenestram respiceret, inuerti etiam imagines KL et HI.* Vnde manifestum

festum est, imaginem fortiorem HI ortam fuisse a reflexione radiorum solarium in superiori superficie facta; debiliorem vero a reflexione in inferiore superficie facta; et lucem etiam viuidissimam, qualis est solaris, transitu per vitrum non adeo crassum, tamen sensibiliter debilitari.

Corollarium 3.

Si quaeratur qualis debeat esse angulus Inclinationis constans MEA, vt radii primo reflexus EQ, et secundo reflexus GH, sint inter se paralleli: necesse tantum est, vt ponatur sinus anguli MEQ $x =$ sinui anguli HGP, qui est $\frac{2pq\sqrt{(n^2-n^2x^2)}+(pp-qq)nx}{n}$; ex qua aequatione, substituto $\sqrt{(1-pp)}$ pro q, vt tota aequatio constet ex incognitis p et x, deducitur $x=\frac{pm}{n}$; et $p=1$. vt itaque radii primo et secundo reflexi inter se paralleli exeant, requiritur, vt angulus MEA talis sit, qui habeat sinum $\frac{pm}{n}$, aut vero, vt angulus KBI sit rectus, qui casus postea examinabitur. Sed ducta ER horizontali, aut cum LDC parallela, erit angulus AER altitudo Solis supra horizontem. Cum vero sit AER=AEB−REB, atque illius sint sinus et cosinus y et x, huius vero q et p, erit sinus anguli AER $=py-qx=$ sinui altitudinis Solis supra horizontem. Pro parallelismo autem radiorum reflexorum requiritur vt sit $x=\frac{pm}{n}$, consequenter, $y=\frac{\sqrt{(n^2-p^2m^2)}}{n}$, aut si statuatur $m:n=3:2$, quod fit in transitu lucis ex äere in vitrum, debebit esse $x=\frac{3p}{2}$, et $y=\frac{\sqrt{(4-9p^2)}}{2}$, quibus substitutis, et posito $\sqrt{(1-p^2)}$ pro q, habebitur, pro indicato parallelismo radiorum reflexorum, altitudinis Solis sinus $=\frac{p\sqrt{(4-9p^2)}}{2}-\frac{3p\sqrt{(1-p^2)}}{2}=\frac{\sqrt{(4-9pp)}-\sqrt{(9-9pp)}}{2}p$; sed per

Fig. 1.

se patet, quod sit $\sqrt{(4-9pp)} < (\sqrt{9-9pp})$; quare pro memorato parallelismo radiorum reflexorum semper requiritur, si transitus fiat ex äere in vitrum, aut si sit $m > n$, altitudo Solis talis, cuius sinus est negatiuus; quare casus hic non poterit dari, cum in eo Sol superficiem vitri KB illuminare non possit.

Scholion.

Supposui in hoc Problemate superficies vitri politas esse inter se in dato angulo inclinatas; quamuis igitur nouis inductis determinationibus ex allegatis iam iam deduci possent omnes casus illorum diaphanorum, in quibus dictae superficies sunt inter se parallelae: consultius tamen iudico fore, si hos peculiariter considerem.

Problema II.

Tab. II. Fig. 1. Incumbat plano horizontali corpus diaphanum, cuius sectio verticalis sit rectangulum BDKL; atque ex puncto radiante A, in recta DB prolongata vbicunque assumto, exeat radius quilibet AE, qui partim ex E reflectatur in Q, Reflexione prima, partim vero refringatur in F, atque ibi denuo reflectatur in G, Reflexione secunda; et tandem noua Refractione perueniat in H: quaeruntur proprietates huius secundae Reflexionis.

Solutio.

Statuantur $BA = a$, $BD = c$, $BK = e$, $BE = x$, sinus anguli Inclinationis ad sinum anguli refracti vti $m : n$; atque erit sinus $MEA = \frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$, deinde erit sin. MEA $\left(\frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}}\right)$: sin. $FEN = m : n$, quare ipsius FEN sinus $=$

m

$\frac{nx}{m\sqrt{(a^2+x^2)}}$, et cosinus $=\frac{\sqrt{(m^2a^2+(mm-nn)x^2)}}{m\sqrt{(a^2+x^2)}}$; vnde in Triangulo FEN fit analogia, sin EFN $\left(\frac{\sqrt{(m^2a^2+(mm-nn)x^2)}}{m\sqrt{(a^2+x^2)}}\right)$ EN (c) = sin. FEN $\left(\frac{nx}{m\sqrt{(a^2+x^2)}}\right)$: FN; atque oritur FN$=\frac{ncx}{\sqrt{(m^2a^2+(mm-nn)x^2)}}$; cum autem ob aequales angulos EFN et GFO, ex natura Reflexionis, Triangula GOF et ENF sint aequalia et similia, habetur GE$=2$FN$=\frac{2ncx}{\sqrt{(m^2a^2+(mm-nn)x^2)}}$, ex quibus circumstantiis reliquae omnes, quae huc pertinent, deduci possint.

Corollarium 1.

Cum sit sin. MEA : sin. FEN$=m:n$; nec non, sin. PGH : sin. FGO$=m:n$; erit sin. MEA : sin. FEN=sin. PGH : sin. FGO; sed FEN et FGO anguli sunt aequales, quare etiam MEA et PGH sunt anguli aequales; aut, quod eodem recidit, radius primo reflexus EQ, et secundo reflexus GH, inter se sunt paralleli; sed distant inter se quantitate GE$=\frac{2cnx}{\sqrt{(m^2a^2+(mm-nn)x^2)}}$; atque hic parallelismus radiorum reflexorum obtinet, etiamsi ex puncto radiante A exeant radii AE. Euidens autem porro est, radium primo reflexum EQ semper esse anteriorem radio secundo reflexo GH, secus atque fieri vidimus in casu praecedentis Problematis, vbi sectio KBDL est Trapezium; vnde simul etiam deducere licet examen exactissimum vitri politi plano-plani, an nempe vna superficies ad alteram perfecte sit parallela; quale examen, huic fere simile, iam dedit *De la Hire*, in *Commentariis Acad. Scient. Parisinae* 1699, pag. 89 Edit. Paris. exponatur enim tale vitrum Soli libero, et attendatur, an imagines a radiis reflexis vtriusque generis formatae eundem semper in-

inter se seruent situm et distantiam, quomodocunque vitrum conuertatur; quod si ita fuerit, iudicandum erit, vitri superficies inter se esse parallelas; sin autem mutato vitri situ mutetur etiam situs imaginum formatarum, statuendum erit, vitri superficies non esse inter se parallelas. In Experimento certe praecedenti I. in quo vitri latitudo maior minorem non nisi parte $\frac{1}{1000}$ pedis Londinensis excedebat, differentia nihilominus imaginum formatarum valde magna, et admodum sensibilis dabatur.

Corollarium 2.

Euidens porro est, dari radium aliquem secundo reflexum, qui transeat per ipsum punctum K, atque vltimus sit eorum qui in superficie KB dari possunt; cuius radii vltimi vt situs cognoscatur, poni debet tantum GK $= 0$, hoc est, $KB - GE - EB = 0$, aut vero $e - x - \frac{2nex}{\sqrt{(m^2a^2 + (mm - nn)x^2)}} = 0$, vnde deducitur aequatio sequens:

$$(mm - nn).x^4 - (mm - nn).2ex^3 + \left.\begin{matrix} m^2a^2 \\ + (mm - nn).e^2 \\ - 4n^2e^2 \end{matrix}\right\} x^2 - 2m^2a^2ex + m^2a^2e^2 = 0$$

ex qua si deducantur valores ipsius x, denotabitur illis distantia BE talis, vt radius in terminum eius incidens, et secundo reflexus, per punctum K transeat. Dabitur vero hic terminus in loco aliquo inter B et K interiecto, exempli gratia in R; quare poterit spatium reliquum RK omne obtegi panno nigro, manente imagine a radiis secundo reflexis orta inuariata; vel, quod eodem recidit, si spatium BR totum obtegatur, manente spatio RK aperto, extinguetur, tota imago a radiis secundo reflexis orta; prout idem hoc Experientia confirmat, in Experimenti I. numero 4. etiamsi hic casus, quo superficies

ficies vitri exacte parallelae supponuntur, proprie ad illud Experimentum non referatur.

Corollarium 3.

Si radii incidentes omnes inter se fuerint paralleli, tunc angulus Incidentiae AEB erit constans, consequenter radii primo et secundo reflexi omnes inter se erunt paralleli. Si vero iidem radii e puncto fixo A exeuntes incidant diuergentes, patet angulum AEB semper fieri minorem, quo maior accipiatur ipsa BE.

Corollarium 4.

Haec reflexio itaque, superficiebus diaphanis debita, ratiocinio Geometrico et Experimentis adstruitur; ex eadem hac causa accidit etiam, *vt in vitro plano, Soli libere exposito, aspicere liceat duas Solis imagines; qui aspectus, vt oculis parcatur, trans vitrum planum, fumo leuiter obductum, fieri debet*; vna scilicet Solis imago reflexioni debetur superioris superficiei, altera inferioris. Exinde porro fluit etiam ratio sequentis Experimenti: *Imponatur prisma vitreum plano horizontali sic, vt acierum aliqua incumbat plano huic, hedra vero opposita prismatis sursum spectet; quo facto vnica tantum conspicietur Solis imago*; quia nempe superficies inferior reflectens, superiori parallela, hic deest.

Experim. II.

Experim. III.

Problema III.

Sit planum horizontale, cuius sectio repraesentetur recta CGH, huic insistat dimidia Lens plano-conuexa sphaerica; cuius sectio verticalis sit AMHG, et in cuius pla-

planitiem incidant perpendiculariter radii paralleli, quorum vnus ſit BP, qui, cum in M peruenerit, reflectatur in D, atque hic exeat in F, quaeritur longitudo rectae GF.

Solutio.

Ponamus radium conuexitatis $CM = r$, ſinum totum $= 1$, $GP = y$, $CG = a$, ſitque ex äere in vitrum ſinus anguli Inclinationis ad ſinum anguli refracti $= m:n$; atque erit ducta CI ad CG perpendiculari, ſinus $IMC = \frac{y}{r}$, coſinus $= \frac{\sqrt{(r^2 - y^2)}}{r}$; erit ergo ipſius PMD, qui prioris duplus eſt, ſinus $= \frac{2y\sqrt{(rr - yy)}}{rr}$, coſinus $= \frac{r^2 - 2y^2}{r^2}$, $IM = \sqrt{(r^2 - y^2)}$, $PM = \sqrt{(r^2 - y^2)} - a$, dabiturque analogia ſequens, ſin. PDM$\left(\frac{r^2 - 2y^2}{r^2}\right)$: ſin. tot. $(1) = $ PM$(\sqrt{(rr - yy)} - a)$: MD $\left(\frac{rr\sqrt{(rr - yy)} - arr}{rr - 2yy}\right)$; nec non altera, ſin. tot. (1) : ſin. PMD $\left(\frac{2y\sqrt{(rr - yy)}}{r^2}\right) = $ MD$\left(\frac{r^2\sqrt{(rr - yy)} - ar^2}{r^2 - 2y^2}\right)$: PD$\left(\frac{2y.(rr - yy) - 2ay\sqrt{(rr - yy)}}{r^2 - 2y^2}\right)$ hinc oritur $DG = y - PD = \frac{2ay\sqrt{(rr - yy)} - r^2 y}{r^2 - 2y^2}$. Sit denique NDO perpendicularis ad AG, atque habebitur ſin. MDN $=$ ſin. PMD$= \frac{2y\sqrt{(rr - yy)}}{r^2}$) : ſin. ODF$= n:m$, quoniam refractio fit ex vitro in äerem; ex quo producitur ſin. ODF$=$ ſin. DFG, $= \frac{2my\sqrt{(rr - yy)}}{nr^2}$, et coſinus DFG $= \frac{\sqrt{(n^2 r^4 + 4m^2 y^4 - 4m^2 r^2 y^2)}}{nr^2}$; tandem in Triangulo DFG, ob analogiam ſequentem, ſin. DFG : Coſ. DFG $=$ DG : FG, reperitur $FG = \frac{(2a\sqrt{(rr - yy)} - rr)\sqrt{(n^2 r^4 - 4m^2 y^2.(rr - yy))}}{2m.(rr - 2yy).\sqrt{(rr - yy)}}$.

Corollarium 1.

Concurret itaque radius reflexo-refractus DF cum axe in puncto F, allegatae diſtantiae, extra ſupreficiem planam AG. Dantur vero infinite multi radii, qui intra ſuperficiem planam AG, in puncto aliquo rectae GH, axem

axem ſecant, et proinde ad conſtituendum focum extra vitrum inutiles ſunt. Hinc vt determinetur in recta AG locus, extra quem nulli radii amplius ad focum extra vitrum conſtituendum concurrunt, fiat FG$=0$, vnde elicitur $y=\frac{r\sqrt{(4aa-rr)}}{2a}$; ex qua formula facilis conſtructio ipſius y deducitur, ſub quo FG euaneſcit; nam centro C, radio CG, deſcribatur ſemicirculus TXG, in hunc ex puncto G applicetur recta GX$=$ radio conuexitatis vitri CM, eritque ducta per punctum X recta XZ parallela axi TH, is ipſe radius, qui in punctum G reflectetur.

Corollarium 2.

Quoniam ſinus PDM generaliter eſt $\frac{r^2-2y^2}{r^2}$, inuenietur ſinus YGZ ſubſtituendo pro y valorem modo inuentum ipſius GY, qui ſinus adeoque erit $=\frac{r^2-2a^2}{2a^2}$. Vt vero radii reflexo-refracti cadant extra ſuperficiem planam, angulus PDM maior eſſe debet angulo YGZ, quare $\frac{r^2-2y^2}{r^2} > \frac{r^2-2a^2}{2a^2}$, aut $2a^2r^2-4a^2y^2>r^4-2a^2r^2$, aut denique $\frac{r\sqrt{(4aa-rr)}}{2a}>y$, hoc eſt GY$>y$; vnde patet, omnes radios in ſuperficiem AY circumcirca incidentes non concurrere ad focum extra punctum G conſtituendum; conſequenter ſpatium latitudinis AY annulare in plana ſuperficie vitri obtegi poſſe plano radiis imperuio, manente nihilo minus foco in F inuariato.

Corollarium 3.

Ducto radio CA, erit AG$=\sqrt{(rr-aa)}$, quare AY$=\sqrt{(r^2-a^2)}-$GY; itaque vt ſpatium hoc AY, ad focum producendum inutile, euaneſcat, debet eſſe $\sqrt{(rr-aa)}=$

GY, hoc eſt, ſubducto calculo reliquo, $a = \frac{r}{\sqrt{2}}$; aut vero, poſita latitudine vitri GH $= b$, vt ſit $a = r - b$, neceſſe eſt vt fiat $b = \frac{r(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} = \frac{207}{707} r$, quo caſu omnes radii in ſuperficiem planam incidentes ad focum conſtituendum extra vitrum concurrent, nec vlla pars vitri inutilis manebit. Quoniam vero ſinus anguli ſemirecti eſt $= \frac{1}{\sqrt{2}}$, erit $\sqrt{2} = \frac{1}{\text{ſin. } 45^{\circ}}$; quo valore ſubſtituto, emergit pro hoc caſu, $b = 1 - \text{ſin. } 45^{\circ}$, hoc eſt, latitudo vitri GH debet eſſe ſinus verſus anguli 45°; quare arcus vitri integri, $= 2$AMH, debet continere Quadrantem Circuli.

Corollarium 4.

Si ponatur $a = 0$, hoc eſt, ſi vitrum integrum conſtet ex dimidia ſphaera, erit per Solutionem Problematis huius PD $= \frac{2y.(rr-yy)}{r^2-2y^2}$; quae recta PD, ſi cum ipſa PG, aut y comparetur: inuenietur hoc caſu eſſe maior quam y; eſt enim PD : PG $= \frac{2y.(rr-yy)}{r^2-2y^2} : y = 2r^2 - 2y^2 : r^2 - 2y^2$; cum vero ſit $2r^2 > r^2$, erit etiam $2r^2 - 2y^2 > r^2 - 2y^2$, hoc eſt, PD $>$ PG. Vt vero radii reflexi extra ſuperficiem planam cadant, requiritur vt ſit PD $<$ PG, cuius cum hic contrarium obtineat, ſequitur in vitro plano-conuexo hemiſphaerico nullum radiorum in poſteriori ſuperficie reflexorum extra ſuperficiem planam egredi, ſed omnes intra vitrum abſcondi, quare in tali vitro hemiſphaerico nullus generabitur focus e reflexione ſecunda ortus.

Co-

Corollarium 5.

Quoniam denique ſinus anguli FDG generaliter eſt $\frac{\sqrt{(n^2r^4 + 4m^2y^2.(yy-rr)}}{nr^2}$, euidens eſt, decreſcente y, decreſcere etiam ſinum anguli FDG; cum itaque angulus FDG decreſcat quo propius punctum D ad G accedit: patet duos radios reflexo-refractos DF, infinite propinquos, extra vitrum diuergere inter ſe, et conſequenter productos in directum ſeſe intra vitrum decuſſare.

Corollarium 6.

Ex valore generali ipſius FG eluceſcit, illum fieri $= \frac{(2a-r.)n}{2m}$, ſi ponatur $y=0$; quare in hac diſtantia a puncto G incipiet focus radiorum reflexo-refractorum formari. Inſtitui Experimentum huius rei, et *capta Lente plano-conuexa, quae focum ordinarium ſuum habebat in diſtantia* 1750 *part. chordam conuexitatis ſuae* 220, *et craſſitiem* 13. *part. expoſui planam eius ſuperficiem Soli directe ita, vt radii perpendiculariter ſuperficiei planae inciderint; quo facto obtinui focum huius Lentis, Soli et vitro interpoſitum, in diſtantia* 273 *part a ſuperficie plana, acutum quidem, et diametri non magnae, ſed adeo debilem, vt ne fomitem quidem accenderet.* Eſt autem in applicatione huius Experimenti ad Theoriam, quoniam Lentes plano-conuexae focum ordinarium habent in diſtantia ſuae diametri, radius conuexitatis CA$=875=r$, GH $=13$, et conſequenter CG$=a=862$, quare inuenietur, poſita ratione $m:n=3:2$, FG$=\frac{(1724-875)2}{6}=\frac{849}{3}=283$, Experim. IV.

 qui

qui numerus ab inuento 273 non nisi $\frac{10}{100}$ pedis Londinensis differt.

Scholion I.

Si radii supponuntur incidere paralleli cum axe Lentis in superficiem conuexam, pro inuenienda distantia foci reflexo-refracti calculus oritur ita prolixus, vt absolui fere nequeat; quare sufficiet indicasse, *me deprehendisse distantiam foci modo dicti a superficie conuexa in Lente praecedentis Corollarii VI. 1650 part. neque ullius sensibilis caloris*; quare concludi potest, in vna eademque Lente conuexo-plana esse distantias horum focorum inter se vti circiter 612 ad 1650, vel 102 ad 275.

Experim. V.

Scholion II.

Ex facto Schematismo Lentis plano-concauae leui attentione perspicitur, radiis incidentibus cum axe parallelis nullum generari posse focum, a parte posteriori oriundum, siue plana siue concaua superficies Soli obuertatur. *Sed* experientia deprehendi tamen, dari focum anteriorem in tali Lente. *Nam cum Lentis plano-concauae ADBFE, in qua esset chorda AB=71, CD=5, et AE $7\frac{1}{2}$ part: concauitatem Soli directe obuerterem, inueni focum sensibilem anterius positum, et a puncto D 72 partibus remotum*; qui focus cum a reflexione partis posticae oriri nequiuerit, ortus sine dubio est a reflexione partis concauae facta, quod etiam ex ipso Experimento fit manifestum. Nam ex datis chorda AB, et sagitta CD, eruitur radius concauitatis $=128\frac{21}{40}$; cum vero speculum concauum fo-

Experim. VI. Fig. III.

cum

eum sinum habeat in distantia dimidii radii concauitatis: debebit focus hic distare a puncto D $64\frac{21}{110}$ part. qui numerus cum inuento per Experimentum, 72, satis bene congruit. *Obuersa autem Soli parte plana dictae Lentis,* Exper. VII. *nullus generabatur focus, sed debilis splendor latus, de* quo iterum manifestum est, eum generatum esse a reflexione in planitie Lentis orta.

Problema IV.

Pertranseat corpus A medium AEP aequabiliter celeritate m, medium EFG vero celeritate n; quaeritur quam viam hoc corpus A sequi debeat, vt ex A in H, rectam LC attingendo, perueniat tempore breuissimo. Fig. 1.

Solutio.

Sit hoc via quaesita AE, EF, FG, GH, et demissis ex A, H, et F perpendiculis in TKC rectam, quae sint AS, HT, et FV, ponantur $TS=a$, $AS=b$, $HT=c$, $CS=e$, $CD:DB=1:p$ $ES=t$, $EV=u$, $VG=x$, eritque $GT=a-t-u-x$, $CV=e+t+u$, et $VF=pe+pt+pu$, ob Similia Triangula CDB et CVF; ex his eruitur:

$AE=\sqrt{(b^2+t^2)}$

$EF=\sqrt{(p^2e^2+2p^2et+p^2t^2+2p^2eu+2p^2tu+p^2u^2+u^2)}$

$FG=\sqrt{(p^2e^2+2p^2et+p^2t^2+2p^2eu+2p^2tu+p^2u^2+x^2)}$

$GH=\sqrt{(a^2-2at+t^2-2au-2ax+2tu+2tx+u^2+2ux+x^2+c^2)}$

consequenter erit tempus per $AE=\frac{AE}{m}$; tempus per $EF=\frac{EF}{n}$; tempus per $FG=\frac{FG}{n}$, et tempus per $GH=\frac{GH}{m}$; adeoque

eoque tempus totum erit $=\frac{AE}{m}+\frac{EF}{n}+\frac{FG}{n}+\frac{GH}{m}$. Facta igitur differentiatione huius expressionis sic, vt primo ponatur t sola variabilis, reliquae constantes; deinde u sola variabilis, reliquae constantes; et denique x sola variabilis, et reliquae constantes; obtinebuntur, substitutis respectiuis lineis loco literarum assumtarum, sequentes aequationes:

t variabilis.) $\frac{ES}{m.AE}+\frac{p.VF}{n.EF}+\frac{p.VF}{n.FG}=\frac{GT}{m.GH}$.

u variabilis.) $\frac{p.VF+EV}{n\,EF}+\frac{p.VF}{n.FG}=\frac{GT}{m.GH}$.

x variabilis.) $\frac{VG}{n.FG}=\frac{GT}{m.GH}$.

Ex combinatione igitur harum aequationum primae et secundae, oritur $\frac{ES}{m.AE}+\frac{p.VF}{n.EF}=\frac{p.VF}{n.EF}+\frac{EV}{m.EF}$, vel $\frac{ES}{AE}:\frac{EV}{EF}=m:n$; est autem $\frac{ES}{AE}=$ sin. MEA, et $\frac{EV}{EF}=$ sin. FEN, quare debebit esse sin. MEA : sin FEN $=m:n$. Ex aequatione tertia oritur. $\frac{VG}{FG}:\frac{GT}{GH}=n:m$; hoc est, sin. OGF : sin. HGP $=n:m$. Ex aequatione autem secunda et tertia oritur $\frac{p.VF+EV}{EF}+\frac{p.VF}{FG}=\frac{VG}{FG}$, aut vero $\frac{p.VF+EV}{EF}=\frac{VG-p\,VF}{FG}$; sed quia $p=\frac{BD}{CD}$, prodit aequatio sequens, facta hac substitutione, et vtroque membro diuiso per BC; $\frac{BD.VF+EV\,DC}{EF.BC}=\frac{VG\,CD-BD.VF}{FG.BC}$, quae aequiualet huic sequenti $\frac{BD}{BC}\times\frac{VF}{EF}+\frac{DC}{BC}\times\frac{EV}{EF}=\frac{CD}{BC}\times\frac{VG}{FG}-\frac{BD}{BC}\times\frac{VF}{FG}$; quae eadem est cum hac, sin. XEG × sin. FEV + cos. XEG × cos. FEV = cos. XEG × cos. VGF − sin. XEG × sin. VGF, hoc est, cos. (FEV−XEG) = cos. (XEG+VGF), vel cos. EFN = cos. XYG = cos. OFG; erit ergo EFN=OFG. Itaque vt radius ex A per F transiens in H perueniat tempore breuissimo, requiritur primo, vt sit sin. MEA : sin. FEN $=m:n$, secundo, vt sit sin. OGF : sin. HGP

=n

$= n : m$; et tertio, vt fit $EFN = OFG$; quae conditiones cum in Refractione vtraque et Reflexione, radii AE contineantur: fequitur, etiam in his radiis refracto-reflexis lucem abfoluere viam defcribendam tempore breuiffimo.

Corollarium.

Si vitri fectio fit rectangulum, tunc CD euadit infinite magna; quare hoc cafu $p = \frac{BD}{\infty} = 0$. Vnde ex aequationum praecedentium fecunda et tertia prodit $\frac{EV}{EF} = \frac{VG}{FG}$, hoc eft, fin. $VFE =$ fin. GFV, aut vero $VFE = GFV$.

DE

DE NOVO OSCILLATIONVM GENERE;

AVTORE
Georgio Wolffg. Krafft.

§. 1.

Quamquam plures hucusque modi sint in diem prolati, quibus motus oscillatorius produci potest in corporibus, quales sunt: corporis e filo suspensi; corporis ex ipso sui aliquo puncto pendentis; aquae in tubo communicante reciproco motu agitatae; nerui, aut chordae fortiter extensae et stylo vellicatae; et qui sunt alii: adiici tamen meretur his aliud adhuc oscillationum genus, internae corporis structurae debitum, a nemine adhuc examinatum; quod et elegantia sua non minus, quam diuturna motus huius perseueratione, se commendat.

§. 2. Ductus sui in disquisitionem huius noui motus oscillatorii casu fortuito, quo factum est, vt horologium portatile, ex vnco libere suspensum, ita vt a tergo suo parietem non attingeret, intuerer, atque in eo oscillationes deprehenderem, quae et motus constantia, et arcus, qui describebatur, magnitudine admodum sensibili, in aliquam me primum admirationem rapiebant, postea autem ad sequentes meditationes ansam mihi praebebant, quibus et facile in caussam phaenomeni adductus fui, et simul specialem hanc oscillationum genesin paulo latius extendi.

§. 3. Cum ob ponderis cuiuscunque verticaliter deorsum nitentis actionem id in quiete persistere nequeat, nisi vis, illud retroagens, et lapsui imminenti directe opposi-

ta,

ta, ipſi fuerit applicata: euidens eſt, neceſſe eſſe vt corporis ſuſpenſi centrum grauitatis, et punctum illud, e quo ſuſpenſum eſt corpus, et quod tanquam obſtaculum inuincibile conſideratur, ſint in vna eademque linea recta verticali, ſi corpus in quiete perſiſtens, et ab oſcillationibus liberum eſſe debeat; ex quo fit, vt pendula ſimplicia omnia hunc ſitum continuo appetant quaſi, atque quamprimum attigerint illum, oſcillari deſiſtant, et ad quietem reducantur.

§. 4. Vt itaque ad explicationem phaenomeni accedam, ſit ABKL ſectio horologii, quam imaginabor eſſe circularem, et habere centrum ſuae grauitatis in C centro circuli; huic applicatum ſit a latere libramentum GBF, quod ordinarie ita fabricari ſolet, vt conſtet annulo firmo, e cuius centro M tres radii MF, MG, MB, prodeunt, qui peripheriam annuli in tres arcus aequales diuidunt. Extremitatibus horum radiorum F, G, et B afferruminare conſueuerunt artifices aliquid plumbi, vt eo melius vibretur libramentum. Sin igitur ita conſtructum ſit illud, vt annulus vbique eiusdem ſit craſſitiei et latitudinis, et praeterea ponduſcula afferruminata idem praeciſe teneant pondus: tum centrum grauitatis huius libramenti erit in centro circuli M, manebitque proinde in eodem loco fixo M, ſiue libramentum vibretur, ſiue non. Sed ſi, quod plerumque fieri debet, accidat, vt aut annulus inaequabilis ſit magnitudinis, aut ponduſcula afferruminata ſint inaequalia, aut vtrumque ſimul: centrum grauitatis libramenti erit in loco extra centrum poſito; quem ſtatuam eſſe I. Iunctis igitur centris grauitatum horologii absque libramento C, et libramenti M, per rectam CI, erit

erit centrum grauitatis commune in loco aliquo intermedio E; quod, si cum puncto suspensionis D sit in eadem verticali DE: totum systema quiescet, quamdiu libramentum in hoc situ persistat. Incipiat nunc libramentum moueri, et prima vibratione perueniant radii in situm fM, gM, hM, hac mutatione situs centrum grauitatis I ascendet per arculum Ii, centro M, et radio MI descriptum; quare etiam centrum grauitatis commune E perueniet in alium locum e, qui, cum extra verticalem lineam ED sit: horologium in hoc situ quiescere amplius non poterit, sed oscillationem peraget, eo vsque duraturam, donec e punctum in verticalem DE perueniat. Patet itaque, motum oscillatorium in tali horologio oriundum, deberi vnice aut inaequabili crassitiei librament, aut inaequalitati ponduscolorum in F, G, et H, afferruminatorum.

§. 5. Ex similitudine igitur talis horologii concipiamus nouam machinulam, quae constet ex lamina circulari RLMN, circa cuius centrum C vibret vectis grauitatis expers inaequalium brachiorum AB, et vtrinque inaequalibus ponduscolis oneratus A et B; vibrationes autem eius producantur ab elatere et rotulis variis quomodocunque dispositis, ita tamen, vt laminae vna cum rotulis et elatere consideratae centrum grauitatis sit in ipso centro C, quod quamuis et aliter se habere posset, facilitatis gratia tantum ita assumo. Positis nunc $AC=a$, $CB=b$, pondere laminae et rotularum $=C$, ponderibusque vecti affixis vtrinque $=A$ et $=B$; si quaeratur centrum grauitatis commune inter C et A, inuenietur illud per analogiam $A+C:A=a:EC$, vnde $EC=\frac{Aa}{A+C}$, simili analogia eruetur

quo-

quoque centrum grauitatis commune inter E et B, ponendo $A+B+C:B=EB:ED$, vnde est $ED=\frac{B.EB}{A+B+C}$, vel, ob $EB=AB-AE=a+b-\frac{Ca}{A+C}=\frac{Aa+Ab+Cb}{A+C}$, erit $ED=\frac{ABa+ABb+BCb}{(A+C)(A+B+C)}$, consequenter etiam $CD=ED-EC=\frac{(A+C)(Bb-Aa)}{(A+C)(A+B+C)}=\frac{Bb-Aa}{A+B+C}$; quae CD dabit punctum D, in quo haeret centrum grauitatis totius machinulae compositae.

§. 6. Suspensa iam sit machinula ex hoc puncto D e puncto suspensionis I: manebit ea in aequilibrio, neque oscillationes peraget. Sed si postea motus vibratorius vectis AB incipiat, ab elatere et rotulis adiunctis producendus, veniet post peractam primam vibrationem vectis in situm GF, in quo situ centrum grauitatis commune D ascendit in locum H, post absolutum arcum circularem DH centro C descriptum; qui locus H cum sit extra verticalem DI: motus oscillatorius consequetur versus M, donec post aliquot peractas oscillationes punctum H persistat in verticali dicta, atque sic machina denuo quiescat, nisi vibrationes vectis perdurent.

§. 7. Pro definiendo nunc autem angulo HID, ducatur chorda HD, et recta HK, quae sit ad AB parallela; eruntque anguli H et D aequales; quare vocatis FCB sinu m, cosinu n, ID e, erit CDH, $=$CHD, sinus $\frac{\sqrt{(1+n)}}{\sqrt{2}}$, cosinus $=\frac{\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{2}}$; ex analogia itaque, sin. CHD $\left(\frac{\sqrt{(1+n)}}{\sqrt{2}}\right)$: CD $\left(\frac{Bb-Aa}{A+B+C}\right)=$ sin. HCD (m): DH, elicitur chorda $DH=\frac{(Bb-Aa)m\sqrt{2}}{(A+B+C)\sqrt{(1+n)}}$; cum deinde angulus HDI sit anguli CDH complementum ad rectum: erit huius anguli HDI sinus $=\frac{\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{2}}$, quare in triangulo HKD erit sinus totus (1): $DH=$ sin. HDI : $HK=\frac{DH.\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{2}}$; nec non

 sinus

finus totus (1) : DH $=$ fin. DHK $\left(\frac{\surd(1+n)}{\surd 2}\right)$: DK $=\frac{DH.\surd(1+n)}{\surd 2}$; vnde porro fit IK $=$ ID $-$ DK $=e-\frac{DH.\surd(1+n)}{\surd 2}$, et confequenter tangens anguli HID $=\frac{HK}{IK}=\frac{DH.\surd(1-n)}{e\surd 2-DH.\surd(1+n)}$, vel fubftituto valore ipfius DH fupra inuento, oritur tangens HID $=$ $\frac{(Bb-Aa)m}{et(A+B+C)-mt(Bb-Aa)}$, pofita $\frac{\surd(1+n)}{\surd(1-n)}=t$, quae eft tangens anguli CDH.

§. 8. Inuenta haec tangens fit nulla, et confequenter machinula motum ofcillatorium perdit, fi fuerit $Bb=Aa$, aut vero $A:B=b:a$, hoc eft, fi pondera vecti annexa A et B fint in reciproca ratione diftantiarum ab hypomochlio C. Nam in hoc cafu centrum grauitatis commune cadit in C, in locum fixum, qui vibrationibus vectis non mutatur.

§. 9. Si quaeratur valor ipfius m talis, vt angulus HID, in quem ofcillationes excurrunt, fiat maximus, eruetur, pofitis $Bb-Aa=\alpha$, $A+B+C=\beta$, aequatio (A), $\beta etdm-\beta emdt+\alpha m^2dt=0$; quoniam vero eft $t=\frac{\surd(1+n)}{\surd(1-n)}$, eruitur $dt=\frac{-mdm}{mn.(1-n)}$, quo valore fubftituto in aequatione (A), emergit, facta diuifione per dm, $\beta.et+\frac{\beta.em}{n.(1-n)}-\frac{\alpha m^2}{n.(1-n)}=0$, et fubftituto in hac vltima aequatione valore ipfius t, factaque multiplicatione per $V(1-n)$, et diuifione per m, oritur $\beta en+\beta e-\alpha m=0$, aut vero $\beta eV(1-mm)+\beta e-\alpha m=0$, vnde tandem deducitur $m=\frac{2\alpha\beta e}{\alpha^2+\beta^2e^2}=\frac{2e.(Bb-Aa)(A+B+C)}{(Bb-Aa)^2+e^2(A+B+C)^2}$. Vt itaque angulus, in quem ofcillationes excurrunt, fiat maximus, et fumme confpicuus, debet vectis AB vibrando abfoluere, angulum, cuius finus m allegatum teneat valorem.

§. 10.

§. 10. Vt oſcillationes excurrant in angulum rectum, requiritur tangens HID infinite magna, ſiue $et(A+B+C)-mt(Bb-Aa)=0$, vnde deducitur $e=\frac{m(Bb-Aa)}{A+B+C}$.

§. 11. In horologiis portatilibus antiquis, qualia ante inuenta Hugeniana fabrefieri ſolebant, quorum libramentum vecte ponduſculis vtrinque onerato, et aequalium brachiorum, conſtabat, ponendum eſt, pro angulo HID inueniendo, $a=b$, vnde fit tangens anguli $HID=\frac{(B-A)am}{et(A+B+C)-amt(B-A)}$. Cum vero $A+B$ reſpectu ipſius C fere nihilum ſit, et reſpectu eiusdem C etiam ſit $B-A$ contemnibilis quantitatis: habebitur tangens dicti anguli $HID=\frac{(B-A)am}{Cet}$, cum itaque in dato aliquo horologio tali quantitates B, A, C, a, m, t, omnes ſint conſtantes, atque ſola altitudo ſuſpenſionis e variari poſſit: patet tangentem anguli in quem excurrunt oſcillationes talis horologii eſſe in ratione reciproca altitudinum ſuſpenſionis; ſiue eo magis ſenſibiles reddi oſcillationes, quo breuior eſt altitudo ſuſpenſionis.

§. 12. Quoniam pondus C pro lubitu augeri et minui poteſt, appenſo ſcilicet nouo pondere ex puncto C, vel exſciſſis quibusdam partibus ſimiliter poſitis ex lamina circulari, vt centrum grauitatis ſemper adhuc ſit in C, ponamus $C=B(b-1)-A(a+1)$; quo ſubſtituto in valore tangentis HID ſupra inuento, euadet haec tangens $=\frac{m}{(e-m).t}$; quo caſu excurſio in angulum DIH a ponduſculis A, B, C, non dependet amplius; ſed nec machinula oſcillationibus priuari poteſt, niſi fiat $m=0$, hoc eſt, niſi libramentum quieſcat. In eodem hoc caſu, vt angulus

HID fiat maximus, requiritur $m = \frac{2e}{ee+1}$; atque vt idem hic angulus fiat rectus; necesse est, vt sit $e = m$.

§. 13. Si loco vectis heterodromi AB adhibeatur homodromus CB, fiet $A = 0$, et $a = 0$, vnde tangens anguli HID $= \frac{Bbm}{et(B+C) - mtBb}$, vnde patet, neque in hoc casu machinulam ab oscillationibus liberari posse, nisi iterum fiat $m = 0$, hoc est, libramentum quiescat.

DIS-

DISSERTATIONIS HYDRAVLICAE
PARS SECVNDA
CONTINENS
METHODVM DIRECTAM ET VNIVERSALEM SOLVENDI OMNIA PROBLEMATA HYDRAVLICA, QVAECVNQVE DE AQVIS PER CANALES CVIVSCVNQVE FIGVRAE FLVENTIBVS FORMARI AC PROPONI POSSVNT.

§. 1.

Canalis esto qualiscunque siue sit rectus siue curuus, siue sit continuus siue compositus ex pluribus tubis cylindricis, siue denique sit verticalis, siue pro parte horizontalis, siue in partibus suis diuersis diuersimode inclinatus. Plenus sit hic canalis aqua alioue liquore graui homogeneo et fluidissimo; Incipiat autem pergatque accelerando (quantum et quousque potest) fluere et ita quidem vt canalis constanter plenus maneat, succedente scilicet aliunde aqua noua, quae elabentem ex vno orificio singulis momentis resarciat influendo per summum orificium ea cum velocitate, qua suprema superficies subsideret, si influxus subito cessaret. Haec conditio additur facilioris calculi gratia, valet enim methodus, si nihil noui liquoris aquei subintraret ad omnimodam vsque vasis canalis depletionem. Quaeritur primo velocitas liquoris effluentis pro data qualibet quantitate liquoris iam egressi; Quaeritur deinde quantum latera canalis in singulis locis a transfluente liquore premantur, vel quod eodem recidit, ad quantam altitudinem

nem verticalem liquor eiusdem generis cum transfluente ſuspenſus haerere debeat in fiſtula in aliquo loco inſerta et verticaliter erecta.

§. 2. Detur itaque canalis (Fig. I.) qualiscunque ECce; Recta verticalis RB tamquam abſciſſarum axis conſiderata, ad quam ordinatim applicatae REe, PFf, FNn, BCc, quarum partes Ee, Ff, Nn, Cc, deſignent amplitudines ſeu ſectiones horizontales canalis; Concipiatur liquor in eo contentus, diuiſus in ſtrata horizontalia infinite paruae craſſitudinis FMmf, NLln, &c. quorum puncta intermedia ſeu centra grauitatis G, H, V, I &c. faciant lineam ſiue rectam ſiue curuam GHVI, quam vocabo *lineam centricam* ſeu ſimpliciter *centricam*, quae vtique data erit ob datas curuas EFC, *efc*, quae ex figura data canalis determinantur.

Sit amplitudo prima $Ee = h$, amplitudo vltima $Cc = \omega$; amplitudo aliqua intermedia $Ff = y$, alia intermedia $Nn = r$. Craſſities ſingulorum ſtratorum PR vel $TS = dt$: Erunt ſtrata ipſa $Fm = ydt$, $Nl = rdt$. Sit porro aliqua recta indeterminata ID tangens centricam in I quae dicatur $x =$ longitudini cylindri obliqui liquoris effluentis in directione ipſius ID, cuius cylindri eſt baſis Cc, et qui contineat quantitatem liquoris iam egreſſi; velocitas liquoris eo ipſo momento elabentis $= v$. Sit grauitas qua corpora naturaliter animantur $= g$. Nominando iam elementa lineae centricae Hh, Vv &c. $= ds$, erunt grauitates, quibus animantur ſtrata in directionibus Hh, Vv, &c. $= \frac{gdt}{ds}$; Adeoque pondera vel vires motrices ipſorum ſtratorum in iſtis directionibus $= \frac{gydt^2}{ds}$, $\frac{grdt^2}{ds}$, &c. ipſae vero vires motrices abſolutae ſecundum directionem verticalem $= gydt$, $grdt$, et ita porro.

§. 3.

§. 3. Transferendo has vires absolutas (per princip. hydrostat. vt in parte prima ostensum est) ad amplitudinem primam b, erunt illa pro singulis $ghdt$; erit ergo integrando per omnes dt, hoc est, per totam altitudinem AB (quae dicatur $=a$) $gba=$ pressioni totali ad Ee verticaliter applicandae et aequipollenti summae virium motricium absolutarum in stratis omnibus; Et haec pressio totalis gba ad amplitudinem primam applicanda est ea quae mihi vocari solet P.

Sit iam tangens in I lineae centricae GHI ad suam subtangentem verticalem vt α ad 1, et tangens in G ad suam subtangentem vt β ad 1. Tangens autem in quolibet puncto intermedio H ad suam subtangentem vt ds ad dt. Erit vtique per decompositionem motus, v seu velocitas actualis in I liquoris effluentis ad suam subuelocitatem verticalem etiam vt α ad 1, adeoque subuelocitas illa $=\frac{v}{\alpha}$. Pariter nominando u, velocitatem actualem in H secundum Hb, erit eius subuelocitas $=\frac{udt}{ds}$. Verum vt inueniatur velocitas actualis u, notandum est stratorum subuelocitates esse in ratione reciproca suarum amplitudinum ad id vt transmittant eodem tempusculo elementari quantitates aequales liquoris; faciendo itaque $y \,.\, \omega :: \frac{v}{\alpha} - \frac{v\omega}{\alpha y}$, erit $\frac{v\omega}{\alpha y}$ $=$ subuelocitati strati Fm; faciendo nunc porro $dt \,.\, ds ::$ $\frac{v\omega}{\alpha y} \,.\, \frac{v\omega ds}{\alpha xdt}$, erit $\frac{v\omega ds}{\alpha ydt}=u$ seu velocitati actuali strati Fm in directione Hb. Hinc velocitas actualis strati primi amplitudini Ee contigui (vbi y ponitur b, et $ds:dt :: \beta \,.\, 1$) erit $=\frac{\beta\omega v}{\alpha b}$.

Haud aliter ratiocinandum pro inueniendo progressu actuali strati Fm in directione Hb; nam nominando dx progressum momentaneum strati vltimi Cc in directione

ID, erit eius fubprogreffus in directione verticali $= \frac{dx}{\alpha}$, funt autem hic etiam fubprogreffus ftratorum in reciproca ratione amplitudinum, faciendo itaque $y \,.\, \omega :: \frac{dx}{\alpha} \,.\, \frac{\omega dx}{\alpha y}$ erit $\frac{\omega dx}{\alpha y} =$ fubprogreffui ftrati F*m*; Proinde etiam faciendo $dt \,.\, ds :: \frac{\omega dx}{\alpha y} \,.\, \frac{\omega dx ds}{\alpha y dt}$, erit $\frac{\omega dx ds}{\alpha y dt} =$ progreffui actuali ftrati F*m* in directione fui motus H*b*.

§. 4. Exiftente iam aqua in motu, ftrata eius diuerfimode in fe mutuo agunt vrgendo et refiftendo, ac viribus quidem diuerfis pro diuerfitate circumftantiarum tam loci quam celeritatis: Vocetur itaque tantisper γ vis acceleratrix indeterminata quae ex actione mutua oritur, et u velocitas acquifita, quam aliquod ftratum F*m* habet in directione H*b*; adeoque $\gamma ds = udu$, vnde $\gamma = \frac{udu}{ds}$ ducatur hoc in maffam ftrati ydt, et prodibit eius vis motrix $\gamma y dt = \frac{yudu dt}{ds}$ in directione H*b*; vt autem ea habeatur in directione verticali a qua haec produci queat, faciendum eft $dt \,.\, ds :: \frac{yudu dt}{ds} \,.\, yudu$, quae erit vis motrix requifita in directione verticali, quae ergo translata ad amplitudinem primam b dat aequipollentem $budu$; Integretur haec vt habeatur $\frac{1}{2}\, buu$, quod per debitam correctionem accommodandum eft ad omnia ftrata in toto canali EC*ce* contenta atque fimul fumta: Proinde (ob velocitatem ftrati vltimi $= v$, et primi $= \frac{b\omega v}{\alpha b}$) correctum integrale $= \frac{b}{2}$ $(vv - \frac{bb\omega\omega}{\alpha\alpha bb} vv)$ feu $\frac{vv(\alpha\alpha bb - bb\omega\omega)}{2\alpha\alpha b} =$ vi verticali ad E*e* applicandae aequipollenti, a qua fcilicet fingula ftrata vim fuam particularem fe mutuo vrgendi obtinent ad id tantum vt nifum fuum conferuent eo momento quo aqua effluit velocitate v, quod cum fiat non fucceffiue fed in inftanti indiuifibili et a fola figura canalis pendeat, poterit

haec

haec vis ex translatione orta vocari *vis* vel *potentia ſtatica*, aut ſi magis arrideat, *potentia hydroſtatica*, vtpote quae in ſolo niſu conſiſtit transeundi ab vno ſtrato in locum proxime inferioris, nulla facta attentione ad vim acceleratricem actualem. Haec autem *potentia hydroſtatica* eſt ea ipſa, ſed generaliſſime ſumta, quae inuenta eſt in parte prima ad formandos gurgites pro canali compoſito ex pluribus tubis cylindricis, imo ex infinitis multitudine, qui repraeſentare poſſint vaſa vel canales cuiuscunque figurae irregularis vel curuilineae. Quam enim inuenimus vim motricem (§. XX.) $\frac{bb-\omega\omega}{2b}vv$ pro gurgitibus vniuerſis in canali infinitorum cylindrorum, vbi influxum et effluxum aquae perpendiculariter ad ſtrata extrema fieri poſuimus, eandem nunc vim ſub nomine *potentiae hydroſtaticae* exhibemus per formulam praeſentem $\frac{vv(\alpha\alpha bb-\beta\beta\omega\omega)}{2\alpha\alpha b}$ pro influxu et effluxu quolibet obliquo; vbi ſi applicare eam lubeat ad perpendicularem, ponenda tantum eſt vnitas pro α et β, et habebitur heic $\frac{vv(bb-\omega\omega)}{2b}$, idem prorſus quod ibi. Atque ita per compendium indagauimus et longe quidem generalius, quod in prima parte operoſe ſatis per ambagas inueſtigatum dedimus.

§. 5. Quaerenda porro eſt vis altera, quae naſcitur ex acceleratione actuali liquoris transfluentis: Hunc in finem pono cuiuslibet ſtrati F*m* progredientis vim acceleratricem actualem $= \acute{\gamma}$, erit (ob progreſſum actualem vltimi ſtrati *Cc* per ſpatiolum *dx*) progreſſus ſtrati $Fm = \frac{\omega dxds}{\alpha ydt}$, adeoque $\frac{\acute{\gamma}\omega dxds}{\alpha ydt} = \acute{u}d\acute{u} =$ (art. 3.) $\frac{\omega\omega vdvds^2}{\alpha\alpha yydt^2}$, vnde $\acute{\gamma} = \frac{\omega vdvds}{\alpha ydxdt}$, et vis motrix actualis in directione H*b* ſtrati, ſeu $\acute{\gamma}ydt = \frac{\omega vdvds}{\alpha dx}$, adeoque vis motrix verticalis ex qua illa

 pro-

produci poteſt $= \frac{\omega v dv ds^2}{adxdt}$, quae translata ad primam amplitudinem b dat aequipollentem $= \frac{b\omega v dv ds^2}{aydxdt}$, quod vt integretur per totam longitudinem axis AB reſpondentem toti canali, pro quolibet ſtrato et pro qualibet acquiſita velocitate v, debent hic non tantum b et ω ſed etiam $\frac{vdv}{adx}$ conſiderari tanquam conſtantes, et ita integrando habebimus $\frac{b\omega vdv}{adx}\int\frac{ds^2}{ydt} =$ vi alteri ex actuali acceleratione liquoris effluentis oriunda, quam vocare liceat *vim hydraulicam*, ad diſtinctionem vis *hydroſtaticae* quae in ſolo niſu vel preſſione in inſtanti exercita conſiſtit ſingulis momentis quomodocunque liquor moueatur.

§. 6. Hae duae vires, *hydroſtatica* et *hydraulica*, componunt vim totalem, quae nimirum generatur ab actione vis primitiuae p, quae inuenta eſt (art. 3.) $= gba$; Aequando itaque hanc cum aggregato illarum duarum (art. 4. et 5.) inuentarum, obtinebimus aequationem generaliſſimam pro determinatione velocitatis quacum liquor quouis momento effluit, quae aequatio haec eſt $\frac{vv(aabb-\mathfrak{G}\mathfrak{G}\omega\omega)}{2aab}$ $+ \frac{b\omega dv}{adx}\int\frac{ds^2}{ydt} = gba$; vbi notandum per $\int\frac{ds^2}{ydt}$ intelligi ſummam omnium $\frac{ds^2}{ydt}$, quae continentur non tantum inter Cc et Ff, ſed omnino extremas ab vna ad alteram omnes comprehendendo.

§. 7. Quod ſi lubeat exprimere aequationem per z ſeu altitudinem, vnde corpus naturali grauitate g praeditum delabendo acquirat velocitatem quaeſitam v, ſcribendum tantum eſt per principia dynamica $2gz$ pro vv, et gdz pro vdv; id quod dabit hanc aequationem $\frac{gz(aabb-\mathfrak{G}\mathfrak{G}\omega\omega)}{aab} + \frac{gb\omega dz}{adx}\int\frac{ds^2}{ydt} = gba$, vel reductione peracta; hanc $(aabb-\mathfrak{G}\mathfrak{G}\omega\omega)zdx + abb\omega dz\int\frac{ds^2}{ydt}$

$= aa$

$= \alpha abbadx$, vel; quia $\int \frac{ds^2}{ydt}$ ſumendum per totam axis longitudinem eſt conſtans adeoque vt datum ſupponi poteſt ſaltem per quadraturas, nominetur illud M; eritque aequatio ad hanc formam reducta $(\alpha abb - \beta\beta\omega\omega)\, zdx + \alpha Mbb\omega dz = \alpha abbadx$: Ex reſolutione huius aequationis invenietur z in quantitatibus datis per x conſtantes, M, α, b, ω, a, β.

Corollarium 1.

Exiſtente effluxus velocitate vniformi, ad quam ſenſibiliter peruenitur citiſſime et quaſi vno ictu oculi, vt in ſuo loco huius ſcripti demonſtrabitur, euaneſcit dz, quo igitur neglecto prodit aequatio algebraica haec $(\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega)z = \alpha abba$, vnde quaeſita $z = \frac{\alpha abba}{\alpha abb - \beta\beta\omega\omega}$.

Corollarium 2.

Hinc duo vaſa vel duo canales, qualescunque habeant figuras licet a ſe inuicem diuerſiſſimas, modo eandem habeant altitudinem verticalem a, vt et amplitudines ſupremam et infimam ſeu primam et vltimam b et ω in eadem ratione, ac praeterea α et β vtrobique ſibi proportionales. Effluet aqua ex vtroque canali ſeu vaſe aequali velocitate, poſtquam vtrobique venerit ad vniformitatem.

Corollarium 3.

Si linea centrica GHI eſt linea recta ſiue ſit verticalis ſiue obliqua, erit $\beta = \alpha$ et $ds \,.\, dt :: \alpha \,.\, 1$, proinde $ds = \alpha dt$, et $\int \frac{ds^2}{ydt}$ ſeu $M = \alpha\alpha \int \frac{dt}{y}$; id quod aequationem generalem $(\alpha abb - \beta\beta\omega\omega)\, zdx + \alpha Mbb\omega dz = \alpha abbadx$ mutat in hanc $(bb - \omega\omega)\, zdx + \alpha bb\omega dz \int \frac{dt}{y} = bbadx$. Qualiscunque au-

autem sit situs centricae rectilineae, siue verticalis siue obliquus, erit in casu effluxus vniformis semper $z = \frac{hba}{hb - \omega\omega}$.

Corollarium 4.

Quod si manente figura canalis vel vasis vt et vtraque eius amplitudine summa et ima Ee, Cc fiat tantilla mutatio in directione liquoris influentis et effluentis, potest illa mutatio etsi fere sit insensibilis producere mutationem insignem in velocitate vt ex. gr. si in figura II. vasi vel canali $ECce$ adaptentur margines vel labra $Emne$ et $Cpqc$ tantillae altitudinis verticalis Em, Cp, ita vt amplitudines mn, pq maneant eaedem cum prioribus Ee, Cc, ipsaque tota canalis altitudo sensibiliter non augeatur; nemo facile crediderit, quanta hinc in effectu futura sit velocitatis mutatio: Quoniam enim nunc aqua influit et effluit non amplius oblique sed verticaliter ob directionem labrorum verticalem, quae ideo etiam dat situm verticalem tangentibus extremis lineae centricae, facitque $\alpha = \beta = 1$; manifestum est aequationem generalem $(\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega) zdx + \alpha M bb\omega dz = \alpha\alpha bbadx$, nunc subito assumere hanc faciem $(bb - \omega\omega) zdx + M bb\omega dz = bbadx$, atque pro velocitate vniformi fore $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$; Quod monere operae pretium duxi, ne alioquin, si in experimentis capiendis ad minimas circumstantias, quae nullius momenti esse videntur, non satis accurate attenditur et inde quod prouenit cum nostris minus recte quadrare falso apparet, ne inquam theoria nostra statim erroris suspecta habeatur: Sicuti accidit aliquando Cl. Poleno Viro alias in experimentalibus industrio et circumspecto, qui visurus quas diuersas quantitates aquae dato tempore emitterent diuersae amplitudinis lumina, eidem

vasi

vasi aqua pleno admota, sumserat ad hoc negotium varias laminas non admodum spissas, vnamquamque peculiaris amplitudinis foramine pertusam, vt nunc hac nunc illa obtegeret aperturam in fundo vasis factam; contigit autem, ni fallor, forte fortuna, vt cum aliqua ex illis laminis experimentum bis repetierit et postea pluries de industria, vbi semper attonitus obseruauit, vnam eandemque illam laminam per suum idem foramen modo maiorem modo minorem aquae copiam eodem tempore emisisse, prout vna vel altera eius laminae facies extrorsum spectaret; tandem foraminis forma curatius examinata fuit, atque tum obseruatum, figuram foraminis, licet in tenui lamina insculpti, non fuisse exacte cylindricam sed instar conuli truncati basin vnam fuisse tantillum ampliorem quam alteram; quod iam sufficiebat ad detegendam rationem, cur extrorsum hiante basi ampliore foraminis, aqua largius effluxerit quam in sensu contrario, idque duplicem ob caussam, nam et crassior fuit vena aquea exiliens et maior eius velocitas, ceu patet ex formula nostra $z = \frac{bba}{bb-\omega\omega}$, vbi palam est valorem huius fractionis esse maiorem si maior fuerit w, reliquis b et a manentibus, et contra fore minorem si ω minor fuerit.

Corollarium 5.

In casu quo $ab = \beta\omega$, seu vbi $\alpha . \beta :: \omega . b$, habebitur $M\omega dz = aadx$, proinde $z = \frac{aax}{M\omega}$, vnde liquet crescente effluxu x in infinitum, etiam z in infinitum crescere, adeoque velocitatem nunquam ad vniformitatem conuergere: Quod sane apparet quoque ex ipsa formula (*coroll.* 1.), est enim $z = \frac{\alpha abba}{\alpha abb - \beta\beta\omega\omega} =$ (in hoc casu) $\frac{\alpha abba}{\alpha abb - \alpha abb} = \frac{a}{0} = \infty$.

Scho-

Scholium 1.

§. 8. Notandum in canalibus et tubis non admodum amplis et ſufficienter longis hoc communiter obſeruari, ſicuti iam innui in praefatione, quod ſtrata F*m* (Fig. 1.) in fluxu conſtituta ex ſitu horizontali ſe facile componunt ad ſitum perpendicularem lateribus ſeu potius lineae centricae GHI, quod vtique ex motu ſupremae ſuperficiei E*e* (ſi nullus alius liquor ſuccedit) vt ex. gr. in tubis barometricis et aliis eiusmodi ſiphonibus non vltra vnam duas ve lineas in diametro habentibus, luculenter patet, ſiue hoc fiat ob adhaeſionem fluidi ad latera, quae circum circa in ambitu ſtratorum aequabilis eſſe debet vt quam commodiſſime fluidum moueatur et ſine notabili frictione, ſiue id contingat aliam ob cauſam phyſicam huius loci non eſt inquirere: ſufficit hoc loco inſinuare, hanc circumſtantiam nihil officere noſtrae theoriae; Nam, quia per legem generalem centrum grauitatis corporum quacunque de cauſa in motum concitatorum eodem modo eademque velocitate in ſua directione inchoata mouetur, ac ſi vniuerſa eorum materia in ipſo centro grauitatis eſſet concentrata, poterit vtique materia cuiuslibet ſtrati F*m* conſiderari tanquam congeſta in centro grauitatis H vel *h*. Cum igitur in canalibus oblongis ac non admodum amplis, quaelibet eorum modica portio ſumi poſſit pro quaſi cylindrica vel priſmatica, euidens eſt vnumquodque ſtratum F*m*, leuiſſimam ob cauſam ſitum ſuum horizontalem F*f* mutare poſſe in *rs* perpendicularem ad H*h*, manente interim H*h* eiusdem longitudinis, et quantitate ſtrati noui *rtos* aequali ſtrato FM*mf*. Concipimus itaque quo pacto ſingula reliquorum N*l* (ſine vlla alia mutatione ſiue in velocitate

ſiue

siue in directione secundum Vu) se componere possint in situm perpendicularem ad latera canalis seu potius ad lineam centricam.

Quod si iam porro attendimus quid fieret, si obturaretur exitus Cc, eiusque loco aperiretur in latere canalis foramen cd eiusdem amplitudinis cum Cc; Haud difficulter intelligimus, aquam per aperturam cd sub eadem obliquitate ad cd erumpere debere, sub qua erumpebat per Cc, eiusque adeo directionem bg fore horizontalem. Cum praeterea apertura cd ponatur aequalis amplitudini Cc, et conatus erumpendi per Cc iam detorqueatur versus dc (per vulgarem legem hydrostaticam) oportet sane velocitatem aquae per cd effluentis eandem fore quam determinauimus pro Cc.

Vnde et hoc colligitur, si ad foramen cd adaptaretur nouus canalis horizontalis; in quo nempe linea centrica horizontalis sit, fore vt motus et velocitas aquae per eum fluentis et effluentis eodem modo se habeat, ac se haberet, si idem ille nouus canalis (clauso cd) ad Cc adaptaretur secundum directionem ID, sed in quo aqua fluens destituta supponi deberet propria sua grauitate. Adeo vt stratorum pondera ad amplitudinem Ee translata hic etiam faciant eandem summam gha aeque ac si abesset nouus canalis, ac proin in generali aequatione expressa (art. 7.), $(\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega)zdx + \alpha Mbb\omega dz = \alpha\alpha bbadx$, nihil aliud mutandum sit quam vt M seu $\int\frac{ds^2}{ydt}$ nunc exprimat summam omnium $\frac{ds^2}{ydt}$ quae in ambobus continentur canalibus. Velocitas vero vniformis vtrobique tam in simplici quam in combinato canali erit eadem, quia terminus in quo reperitur M, in casu vniformitatis euanescit; vtpote semper ea quae habetur per $z = \frac{\alpha\alpha bb\alpha}{\alpha\alpha bb - \varepsilon\varepsilon\omega\omega}$.

De pressionibus quas sustinent latera canalis a liquore transfluente.

§. 9. Vt recte clareque percipiamus, in quo consistat vis illa, quae exeritur in latera canalis, dum in illo fluit liquor, sciendum est illam vim nihil aliud esse quam quae originem habet a vi compressionis, qua nimirum partes fluidi sibi inuicem contiguae, ex. gr. EF*fe* et CF*fc*, vna ad alteram adigitur, vnde in ipso contactu F*f* per actionem et reactionem gignitur vis intermedia, quam vocare soleo *immaterialem*, quia quasi extra partes se inuicem prementes, inter vtramque tamen intermedia, residet, atque ad vnam non magis pertinet quam ad alteram; Huius vis proprium est vrgere partem liquoris praecedentem *antrorsum* seu ea versus qua tendit, sequentem vero *retrorsum* seu ea versus vnde venit, facereque vt pars liquoris sequens, quae a viribus translatis propellitur, atque pars liquoris praecedens cui aliquid accelerationis imprimere debet, acquirant in ipso contactu aequalitatem virium acceleratricium, quemadmodum idem contingere dudum monuimus in corporibus solidis, quae diuersis viribus acceleratricibus seorsim animata, quando in se mutuo agere incipiunt, oriri in eorum contactu vim intermediam *immaterialem* ad vtrumque corpus communi iure spectantem, quae ita temperet vtriusque vim acceleratricem particularem, vnam diminuendo, alteram augendo, vt inde in tota massa combinata ex duobus istis corporibus, resultet vna communis vis acceleratrix.

§. 10.

§. 10. Id vero diſcriminis eſt in agendi modo, quod in corporibus ſolidis directe in ſe inuicem agentibus, vis illa immaterialis agat prorſum et retrorſum inſtar elaſtri alicuius rectilinei, quod inter vtrumque corpus poſitum ſeſe expandere conatur; ſed in partibus fluidi in ſe mutuo agentibus, vis immaterialis intercedens conſiderari debeat tanquam aura elaſtica, quae non tantum in partes oppoſitas ſed in omnes plagas circumfuſas ſeſe exerit, ex quo nunc facile intelligitur, ab hac ipſa vi immateriali prouenire preſſionem, de qua hic eſt quaeſtio, quae nempe exercetur in latera canalis, et quae viciſſim ab hiſce coërceri debet, dum agit libere antrorſum et retrorſum in partes liquoris quibus interiacet.

§. 11. Reſtat igitur, vt ſecundum datam hanc ideam de vi immateriali, eius quantitatem vel menſuram determinemus: Sit illa vbilibet in Ff quaerenda, quam dicamus $=\pi$. Nunc ita procedo: Finge tantiſper partem canalis $EFfe$ (durante fluxu) ſubito auferri, manente reliqua $CFfc$ in ſtatu ſuo cum omnibus ſuis circumſtantiis, atque eodem momento ad amplitudinem Ff apponi novam vim motricem ipſi π aequalem; concipis vtique, hoc modo effluxum liquoris ex truncato canali egredientis acceleratum iri (ſaltem in primo temporis momento) perinde ac ſi integer manſiſſet canalis; Quare iam conſiderabo canalem reſiduum $CFfc$ tanquam canalem integrum, cuius ſuprema ſeu prima amplitudo eſt y ſeu Ff, amplitudo alia intermedia Nn variabilis $=r$, ſtratumque adiacens $Nl=rdt$. Hinc ſi (art. 4.) pro b ſubſtituo y, habebo $\frac{vv(aayr - \frac{ds^2}{dt^2}\omega\omega)}{2aay}$ = vi hydroſtaticae, quod enim in primo puncto G dicebatur ε, id in puncto H eſt $\frac{ds}{dt}$, ratio ſcilicet tangentis ad ſubtangentem; et (art. 5.) $\frac{y\omega v dv}{adx} \int \frac{ds^2}{rdt} =$ vi hydraulicae, vbi in integratione ſupponitur r continuari ab ω vsque ad y.

§. 12. Aggregatum harum duarum virium, hydroſtaticae et hydraulicae, aequari deberet vi primitiuae P, quae hic eſſet (art. 3. et 6.) gyt, nominando BP$=t$ ſi nimirum haec ſola ageret in liquorem in canali truncato contentum, ſed quia π coniunctim agit cum gyt, oportet ſane hanc inſtituere aequationem $\frac{vv(aayy - \frac{ds^2}{dt^2}\omega\omega)}{2aay} + \frac{y\omega v dv}{adx}\int\frac{ds^2}{rdt} = gyt + \pi$; Ex qua ſtatim emergit valor quaeſitus ipſius π: Transpoſito enim gyt, prodit $\frac{vv(aayy - \frac{ds^2}{dt^2}\omega\omega)}{2aay} + \frac{y\omega v dv}{adx}\int\frac{ds^2}{rdt} - gyt = \pi$; vbi quoque monendum in integratione $\int\frac{ds^2}{rdt}$ variabilem r ſumi debere a B vsque ad P; vnde pro qualibet aſſumta y dabitur $\int\frac{ds^2}{rdt}$, dicatur ergo hoc $=$N, eritque $\frac{vv(aayy - \frac{ds^2}{dt^2}\omega\omega)}{2aay} + \frac{Ny\omega v dv}{adx} - gyt = \pi$. Quoniam igitur ex reſolutione aequationis generalis (art. 7.) habetur valor ipſius vv ſeu $2gz$, is in hac ſubſtitutus dabit valorem ipſius π in g et quantitatibus mere linearibus.

§. 13. Quod ſi nunc porro ſcire lubeat, ſi fiſtula aliqua vtrimque aperta in loco quolibet f canali inſeratur erigaturque ad ſitum verticalem, quousque in illa liquor aſcendere debeat, ob hanc preſſionem π quae facit vt aſcendat: attendere conuenit, quod π aequiualet ponderi

ali-

alicuius cylindri ex liquore grauitate naturali g animato confecti, qui pro basi habet amplitudinem Ff seu y, et pro altitudine illam ipsam liquoris in fistula haerentis; vnde haec altitudo erit $= \frac{\pi}{gy}$, ad quam suspensus haerebit liquor in fistula, inuariabiliter quidem postquam velocitas liquoris effluentis ad sensibilem vniformitatem peruenerit, sed antequam hoc fiat (fit autem in momento quasi) ascendere perget liquor in fistula, donec acquisiuerit locum suum stabilem, quando nempe liquor effluens non amplius sensibiliter acceleratur.

§. 14. Accidit in quibusdam casibus, vt valor ipsius π euadat negatiuus, quando scilicet in illo quantitates negatiuae $\frac{-vv\omega\omega ds^2}{2\alpha\alpha y dt^2} - gyt$ praeualent affirmatiuis $\frac{vv}{2y} + \frac{y\omega\omega dv}{\alpha dx} \int \frac{dt^2}{rdt}$; Aut iam existente velocitate in sua vniformitate, ita vt $dv = 0$, quando $\frac{vv\omega\omega ds^2}{2\alpha\alpha y dt^2} + gyt$ maius est quam $\frac{vvy}{2}$: id quod contingere potest, non tantum in illis casibus, vbi αy minus est quam $\frac{\omega ds}{dt}$, sed etiam in illis, vbi αy maius quam $\frac{\omega ds}{dt}$, modo interim gyt sat magnum sit vt eius excessus supra $\frac{y\omega v dv}{\alpha dy} \int \frac{ds^2}{rdt}$ superet prioris defectum. Quocunque autem modo id fiat, palam est in eiusmodi casibus compressionem conuerti in relaxationem, qua fit, vt latera canalis circa Ff, non tantum plane non extrorsum premantur, sed omnino introrsum (si laterum rigiditas id non impediat) contrahantur: Vnde sequitur, fistulam canali implantatam sed ex alto ad imum demissam verticaliter, vbi hiet in vasculum liquore plenum, posse liquorem quasi per suctionem sursum attolli ad altitudinem $= \frac{\pi}{gy}$.

Scholium 2.

§. 15. Hactenus non attendimus ad cauſas quasdam particulares et acceſſorias (non ſemper locum habentes) quae alterare poſſunt, ſeu preſſiones ſeu ſuctiones π, noſtra methodo determinatas. Inter tales cauſas haec praecipue occurrit, quae facit vt aqua in motu conſtituta, offendens in via ſuperficiem immobilem, ei per allapſum imprimat vim, quae vocatur *vis reſiſtentiae fluidorum*, proportionalis vtique partim quadrato velocitatis partim quadrato ſinus obliquitatis incidentiae, vt notum eſt. Eo ipſo itaque haec vis fit inſenſibilis in canalibus anguſtioribus oblongis; In iis enim ob FM, fere parallelam ipſi Hb quae eſt directio motus fluidi cum venit ad Ff, ſicuti in quolibet alio loco Nn, directio Vu fere parallela eſt ipſis NL, nl; ſinus incidentiae pro nullo reputari poteſt. In canali ex tubis cylindricis conflato, ſinus ille prorſus nihil eſt, quia directio fluidi omnino eſt parallela lateribus cylindrorum per totam canalis longitudinem. Alia inſuper cauſa acceſſoria, quae turbare poſſet effectum a preſſione π oriundum, reperitur in canali valde incuruato, in quo quippe liquor celeriter fluens acquirit vim centrifugam (de qua alibi egimus), haec vis centrifuga maiorem redderet preſſionem π, quam reuera eſt in parte conuexa canalis, ſed minorem in parte concaua eiusdem. Quocirca ſi cui volupe eſſet experimentum inſtituere ope fiſtulae canali implantandae, inſertio facienda eſſet neque in conuexitate neque in concauitate curuedinis, ſed a latere, ita vt fiſtula exeat ex canali perpendiculariter ad planum conuexitatis et concauitatis, et deinde, ſi planum illud non ſit horizontale, vt fiſtula quantum opus inflectatur donec ſitum verticalem obtineat.

Co-

Corollaria generalia circa velocitates et presſiones.

§. 16. In effluxu liquoris vniformi et aequabili, aequatio generalis (art. 6.) mutatur ob $dv = 0$, in hanc $\frac{vv(\alpha abb - \beta\beta\omega\omega)}{2aab} = gba$, ſeu $vv = \frac{2aagbba}{\alpha abb - \beta\beta\omega\omega}$; Vnde hoc elegans theorema deducitur: Si duo ſint vaſa vel canales habentes aequales altitudines verticales, aequalesque amplitudines tam ſupremas quam infimas, qualescunque de caetero habeant canales figuras et quantumuis diſſimiles inter ſe, dummodo earum centricae ita ſint comparatae, vt ratio inter α et β in vno ſit eadem quae eſt inter α et β in altero vaſe vel canali: Dico ex vtroque (ſub intellige iugiter pleno exiſtente) liquorem, poſtquam ad aequabilem effluxum peruenerit, effluxurum vtrobique eadem velocitate. Quod ſane patet ex ipſo valore ipſius vv qui eſt $\frac{2aagbba}{\alpha abb - \beta\beta\omega\omega}$, vtpote in quo amplitudines intermedia y haud reperiuntur: Sint ex. gr. duo vaſa cuiuscunque figura ABCD, EFGH (Fig. III.), quorum lineae centricae ſint rectae, et quidem nil refert, an ſint verticales an obliquae, aut vna magis minusue oblique quam altera, in omnibus enim his caſibus erit vtrobique ſemper $\alpha = \beta$, dummodo habeant illa duo vaſa aequales altitudines verticales a, item aequales amplitudines extremat $AD = EH = b$, et $BC = FG = \omega$, aut, quod ſufficit, modo ſit $AD . EH :: BC . FG$, ſintque illa vaſa conſtanter plena aqua alioue liquore homogeneo, in quibus nempe vtrobique eſt eadem grauitas g naturalis animans ſtrata, erit velocitas maxima et vniformis aquae per BC effluentis, aequalis velocitati maximae et vniformi aquae effluentis per FG

FG; In tali enim casu habetur vtrobique (art. 7.) ob $dz = 0$ et $\alpha = \mathfrak{E}$ habetur inquam $(bb-\omega\omega)z = bba$, adeoque $z = \frac{bba}{bb-\omega\omega}$ conformiter corollario 2. art. 7, et vt alias in prima parte pro vase cylindrico tantum inuenimus; manifestum interim est valorem $\frac{bba}{bb-\omega\omega}$ pro data altitudine a vtriusque vasis esse eundem si ratio inter b et w vtrobique sit eadem, hoc est, si AD.EH::BC.FG: Notandum autem nos hic abstrahere a contractione venae aqueae, quae aliquousque vltra orificium obseruari solet, in illis praecipue vasis, quae subito in foramen desinunt in fundo latiori apertum, secus ac fit in illis figuram ABCD habentibus et quasi in tubum cylindricum conuergentibus, in quibus nulla conspicitur sensibilis venae contractio; Interim si eius quoque habenda esset ratio, considerari deberet vas tanquam continuatum ad maximam venae contractionem, vbi contrahi cessat, atque tunc amplitudo venae contractae esset sumenda pro ipso foramine inferiori ω, huiusque distantia ab amplitudine summa pro vera altitudine verticali.

§. 17. Si iam stantibus iisdem conditionibus, vt in praeced. duorum vasorum aequealtorum ABCD, EFGH (Fig. III) et in extremitatibus aeque amplorum atque centricas rectas habentium, habeant praeterea adhuc tertiam amplitudinem alicubi LM, NO sibi mutuo aequalem et ab orificiis BC, FG aequaliter distantem. Erit non tantum velocitas maxima (per praeced.) vtrobique aequalis, sed etiam pressiones in LM et in NO aequales erunt. adeoque in fistulis iis in locis insertis atque in situm verticalem inflexis, aqua vtrobique ad altitudinem eandem suspensa haerebit: Patet veritas huius ex aequatione

tione (art. 12.) quae ob $\alpha = \beta = \frac{ds}{dt}$ in casu velocitatis vniformis abit in hanc simpliciorem $\frac{vv(yy-\omega\omega)}{2y} - gyt = \pi$, vel (scribendo $2gz$ pro vv) in hanc $\frac{gz(yy-\omega\omega)}{y} - gyt = \pi$, in qua quia pro vtroque vase sunt eadem z, y, ω, g, t, debet vtique resultare idem valor ipsius π, proindeque etiam ipsius $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(yy-\omega\omega)}{yy} - t = \frac{hha(yy-\omega\omega)}{yy(bb-\omega\omega)} - t$.

§. 18. Hinc si omnes LM, NO in aequalibus distantiis verticalibus a BC, FG, essent aequales, id quod fieret, si vasa illa duo ABCD, EFGH essent ex. gr. conoidica truncata eiusdem generis, vnum rectum, alterum scalenum, in hoc casu non solum velocitates vniformes quibus aqua ex vtroque vase efflueret forent aequales, sed etiam pressiones in singulis altitudinibus aequalibus forent aequales, adeoque etiam suspensiones aquae in fistulis haerentis haberent in vtroque vase eandem altitudinem.

§. 19. Quoniam aequatio (art. 7.) inuenta pro velocitate generaliter determinanda, siue iam sit aequabilis siue nondum aequabilis, dat $dx = \frac{\alpha Mbb\omega dz}{\alpha abba - \alpha abbz + \beta\beta\omega\omega z}$; substituatur hic valor in aequatione pro pressionibus π (art. 12.) et $2gz$ pro vv, habebimus $\frac{gz(aayy - \frac{ds^2}{dt^2}\omega\omega)}{aay} + \frac{gNy(aabba - aabbz + \beta\beta\omega\omega z)}{aaMbb} - gyt = \pi$, hinc altitudo liquoris in fistula seu $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(aayy - \frac{ds^2}{dt^2}\omega\omega)}{aayy} + \frac{N(aabba - aabbz + \beta\beta\omega\omega z)}{aaMbb} - t$; Quae adeo pro quacunque determinata z, exprimit generaliter altitudinem liquoris in fistula. Hinc, quod curiosum est, inuenitur statim altitudo illa initialis, hoc est, ea quae obseruaretur in fistula primo momento quo orificium inferius aperiretur et liquor in procinctu esset exeundi; cum enim primo temporis momento sit adhuc $z=0$, erit certe (deletis z) $\frac{\pi}{\varepsilon y} = \frac{Na}{M} - t$.

§. 20. Ante hanc demonstrationem, potuisset aliquis dubius haerere, annon forte in momento quo orificium BC aperitur et antequam liquor in actualem motum erumpat, annon, inquam, pressiones in quolibet loco LM adhuc eaedem sint, saltem per momentum temporis, quae modo ante fuerant, cum orificium BC esset adhuc clausum vel obturatum: Verum trita et vulgaris lex hydrostatica, vbique recepta, docet, pro casu vasis obturati in BC, liquorem in fistula alicubi in circumferentia strati alicuius LM inserta et verticaliter erecta haerere suspensum in altitudine $=a-t$, hoc est, in eodem horizonte cum superficie suprema AD liquoris in vase contenti. Nunc autem videmus rem aliter se habere in casu orificii clausi BC, et aliter in casu aperti eiusdem, etiamsi liquor nondum actualiter effluat. Quia enim N, tanquam pars, minor est quam tota M, erit $\frac{Na}{M}$ minor quam a, adeoque etiam $\frac{Na}{M} - t$ minor quam $a - t$. Vnde patet, in primo instanti, quo operitur orificium BC, liquorem iam aliquid quasi amittere vel potius remittere de sua grauitate, quod impendit non ad premendum latera sed ad propellendum liquorem, adeo vt latera vasis non amplius tam grauiter premat, quam fecerat ante aperturam factam. Interim etiam hic monendum, me abstrahere a causis accessoriis, quae inuentam altitudinem in fistula $\frac{Na}{M} - t$ possent alterare: Ex. gr. figurae vasis aliquid dandum est, si enim esset

val-

valde amplum et ſubito conuergeret in anguſtum foramen, tunc ſine dubio noſtra theoria poſſet abludere ab eo quod experientia monſtraret; ratio eſt, quia theoria ſupponit, ſtrata FM, NL (Fig. 1.) eam diſpoſitionem ad motum affectare (etiamſi nondum actu moueantur) vt per totum decurſum amplitudines Ff, Nn, &c. conſeruent ſitum horizontalem vndique ad latera vsque extenſum atque inſuper linea centrica GHI transeat vbique per puncta media G, H, V, I, quod quidem iis in vaſis et canalibus, quorum latera paulatim, neque ſubito, ad orificium inferius conuergunt vel diuergunt, accurate ſatis ita obtinere debet vt theoria ſupponit, ſed in aliis valde amplis et deſinentibus in fundum amplum quod pro exitu habet foramen anguſtum, in hisce, vt probabile eſt, ſtrata ſe non extendunt per totas vaſis amplitudines, ſed aliquousque tantum, prout id requirit qualitas liquoris, non perfecte fluidi ſed magis minusue tenacis, vt a frictione minimam, quae ſit poſſibilis, patiatur reſiſtentiam, relicta nimirum parte liquoris prope latera vaſis in quiete vel ſine ſufficiente diſpoſitione ad motum; vnde fieri poteſt, vt in tali vaſe gurges continuus ſeu aliqua quaſi catarrhacta qualem fere Newtonus concepit, formetur, quamuis non ea neceſſaria lege quam indicauit. Intelligitur ex dictis, in huismodi vaſis non eſſe conſiderandam eorum figuram externam et artificialem, ſed illam internam gurgitis continui a natura formati, non qualem concepit Newtonus, ſed quae optime conuenit qualitati vel conſtitutioni liquoris. In huius ergo gurgitis ſuperficie ambiente, ſi poſſet implantari fiſtula; obſeruaretur liquoris in illa ſuſpenſi altitudo omnino ſemper vt regula noſtra poſtulat, ſiue iam ſit in motu, ſiue moueri incipiat liquor in vaſe.

§. 21.

§. 21. Cum vero non poſſit facile ſenſibus obſeruari, quousque in vaſe peramplo gurges vel catarrhacta terminetur, ſeu vbinam eius ſuperficies ambiens exiſtat, ſecurius erit ſi fiſtula intra vas vsque ad meditullium, hoc eſt, vsque ad lineam centricam perpendiculariter penetret, ac dein pars altera fiſtulae extra vas ſurſum inflexa ſit verticalis. Hoc enim modo altitudo liquoris in fiſtula hoc vnicum monſtrat, quanta ſit liquoris compreſſio in loco lineae centricae quem orificium fiſtulae attingit, et vbi cauſae illae acceſſoriae effectum compreſſionis alterantes, de quibus ſupra (art. 15.) egimus, iam nihil officiunt. Id tamen curandum, vt ſaltem portio fiſtulae intra liquorem vaſis intrudenda ſit ſatis gracilis, ne alioquin nimia eius craſſities libero motui liquoris aliquid impedimenti obiiciat. His probe obſeruatis, non dubito accuratiſſime obſeruatum iri ſequentia, 1°. generalem altitudinem liquoris in fiſtula fore (art. 12 et 13.) $\frac{\pi}{gy} = \frac{z\left(\alpha\alpha yy - \frac{ds^2}{dt^2}\omega\omega\right)}{\alpha\alpha yy} + \frac{N\omega dx}{\alpha dx} - t$, durante adhuc effluxus acceleratione; 2°. Sed ceſſante ſenſibili acceleratione, vbi nempe velocitas peruenerit ad ſenſibilem vniformitatem, fore $\frac{\pi}{gy} = \frac{z\left(\alpha\alpha yy - \frac{ds^2}{dt^2}\omega\omega\right)}{\alpha\alpha yy} - t$; 3°. Altitudinem initialem fore (art. 19.) $\frac{\pi}{gy} = \frac{N\alpha}{M} - t$.

Applicatio theoriae noſtrae ad exempla vaſorum et canalium ſemper plenorum.

§. 22. Sit vaſis alicuius linea centrica in ſitu verticali, pro hoc caſu faciliori vbi $\alpha = 6 = 1$, habetur (art. 7.) $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega} \times \left(1 - 1 : f^{\frac{(bb - \omega\omega)x}{Mbb\omega}}\right)$ id quod inuenitur ex reductione

ductione aequationis ibi traditae et huic casui applicatae $(bb-\omega\omega)\,zdx+Mbb\omega dz=bbadx$, posito scilicet $lf=1$. Adeoque existente $x=\infty$, hoc est, in casu aequabilis effluxus seu velocitatis vniformis, erit $z=\frac{bba}{bb-\omega\omega}$, vnde fluit theorema (art. 16.) iam demonstratum. Sit igitur vas ABCD (fig. IV.) cuiuscunque figurae cuius centrica vel altitudo verticalis $=a$, habeatque sibi adaptatum canalem CK conflatum ex pluribus tubis, ex. gr. tribus cylindricis CG, FI, HK in situ horizontali positis; Sit amplitudo suprema AD (ad quam vas cum tubis iugiter plenum supponitur) $=b$, amplitudines $CE=m$, $FG=n$, $HI=g$, et foramen vltimi tubi $=\omega$. Dico fore semper $z=\frac{bba}{bb-\omega\omega}$, adeo vt nec figura vasis, nec multitudo tuborum, nec eorum amplitudines in considerationem veniant, modo prima b et vltima ω sint data. Neque etiam scire attinet, vtrum gurges vel catarrhacta sese extendat per totam vasis capacitatem, an tantum partem aliquam eius circa lineam centricam occupet. Res est clara per art. 15. quia canalis CK supponitur horizontalis, ideoque eadem semper est velocitas vniformis quae esset si foramen ω immediate ad CE esset adaptatum ope laminae alicuius perforatae ad aperturam CE applicandae.

Corollarium

Si ω sit valde paruum respectu b, erit $z=a$, ac proinde velocitas aquae vniformiter effluentis, quae maxima est quam acquirere potest, erit aequalis ei, quam acquirit corpus graue cadendo ex altitudine $=a$.

§. 23. Pro inuenienda altitudine liquoris in fistula implantanda alicubi in canali horizontali CK, notetur in

 hoc

hoc caſu eſſe $t = o$, quia t ſignificat exceſſum altitudinis verticalis loci vbi fiſtula inſeritur ſupra altitudinem foraminis, per quod liquor egreditur, ſeu, quod idem eſt, t ſignificat altitudinem loci inſertionis fiſtulae ſupra locum effluxus: Hic autem ob poſitionem canalis horizontalem, ipſa quoque centrica quaſi horizontalis cenſetur, praeſertim ſi eius tubi, ex quibus canalis componitur, non admodum ſunt ampli, ita vt (art. 22) ſtrata liquoris per illos fluentis fiant verticalia. Erit igitur altitudo liquoris in fiſtula (art. 19.), ob $\alpha = \beta = \frac{ds}{ut}$, ſeu $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(yy - \omega\omega)}{yy} + \frac{N(hbz - bbz + \omega\omega z)}{Mbb}$; verum, ob $t = o$, erit quoque (art. 12.) $N = o$: Proinde $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(yy - \omega\omega)}{yy}$. In caſu velocitatis aequabilis, vbi (art. praeced.) habetur $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$, quo valore ſubſtituto, prodibit altitudo in fiſtula, $\frac{\pi}{gy} = \frac{bba(yy - \omega\omega)}{yy(bb - \omega\omega)}$. Adeoque pro tubo primo CG, vbi y eſt m, erit illa altitudo $= \frac{bba(mm - \omega\omega)}{mm(bb - \omega\omega)}$, pro ſecundo tubo FI, vbi y eſt n, erit illa $= \frac{bba(nn - \omega\omega)}{nn(bb - \omega\omega)}$, pro tertio tubo HK, vbi y eſt q, erit altitudo in fiſtula $= \frac{bba(qq - \omega\omega)}{qq(bb - \omega\omega)}$, et ſic porro quotquot eſſent tubi canalem componentes. Quae omnia accuratiſſime reſpondent experimentis de hac re ſumtis.

Coroll. Altitudo initialis in fiſtula eſt $= o$; in hoc enim caſu tam z quam $N = o$:

§. 24. Quod attinet ad altitudinem liquoris in fiſtula inſerenda aliquo in loco ipſius vaſis (et ſi opus producenda vsque ad lineam centricam, quam inpoſterum ſemper rectilineam verticalem, alteram vero canali ad vas adaptato vt horizontalem ſupponimus). Sit locus inſertionis in aliquo puncto ſtrati indeterminati LM, cuius diſtantia ab horizonte infimo $= t$, amplitudo gurgitis (ſi non ſit ipſa

ipſa LM) quaecunque illa ſit per experientiam capienda $= r$; habebitur altitudo liquoris in fiſtula (per art. 11. huc applicatum) $= \frac{z(rr-\omega\omega)}{rr} + \frac{N(bba-bbz+\omega\omega)}{Mbb} - t$, vbi $N = \int\frac{dt}{r}$ contentum inter BE et LM, et $M = \int\frac{dt}{r}$, ſed contentum inter BE et AD (art. 7.). Pro velocitate liquoris vniformiter effluentis, vbi $z = \frac{bba}{bb-\omega\omega}$, ſubſtituatur hic valor pro z, et prodibit altitudo in fiſtula $= \frac{bba(rr-\omega\omega)}{rr(bb-\omega\omega)} - t$, (euaneſcit enim terminus in quo N et M habentur); addita itaque altitudine t ſeu loci inſertionis, habebitur totalis altitudo ſummitatis liquoris haerentis in fiſtula ſupra horizontem infimum BE $= \frac{bba(rr-\omega\omega)}{rr(bb-\omega\omega)}$. Quod ſi ω infinite paruum reſpectu b et r, erit illa totalis altitudo $= a$, hoc eſt, ſummitas liquoris in fiſtula eſt in eodem horizonte cum ſuprema amplitudine AD, hoc ita euenire debere, vel hinc quoque colligere poſſemus, quia liquor in vaſe quaſi quieſcit. Caeterum initialis altitudo totalis in fiſtula, exiſtente nimirum $z = 0$, hic etiam $= \frac{Na}{M}$.

§. 25. Ponamus nunc canalem horizontalem CK convergere in conum truncatum ſeu qualemcunque conoidicum, habereque maiorem baſin vaſi obuerſam; erit pro velocitate vniformi aquae effluentis altitudo in fiſtula, quouis in loco F implantata, (nominando amplitudinem $FG = y$) erit inquam altitudo illa (vt art. 23. expreſſa) $= \frac{bba(yy-\omega\omega)}{yy(bb-\omega\omega)}$. Hinc ſi minor baſis ſit vaſi applicata, et canalis oblongus non nimis ſubito diuergat ne aqua in illo diffluat ſed ſtrata ordine inſequentia ſuccedant praecedentibus ſicuti theoria ſtabilita ſupponit, erit, ob y minus quam ω, preſſio in latera negatiua, ac proin mutatur in ſuctionem, qua fit, vt aqua in fiſtula verticaliter deſcendente

et

et hiante in aquam vaſculo inferiori contentam attollatur per ſuctionem ad altitudinem $= \frac{bba(\omega\omega - yy)}{yy(bb - \omega\omega)}$. Quod ſi quoque ω maius ſit quam b, fit numerator et denominator fractionis negatiuus, ideoque valor eius rurſus affirmatiuus, id quod indicat adeſſe preſſionem. Quare exiſtente vaſe ABED ſemper pleno, quod haberet amplitudinem ſupremam AD minorem orificio canalis conoidici diuergentis per cuius maiorem baſin aqua erumpit, obſeruaretur iterum aquam in fiſtula ſurſum erecta continuo et ſine fine aſcenſuram eſſe; in tali enim caſu acceleratio aquae effluentis nunquam ceſſat, nunquam proin peruenitur ad aequabilitatem velocitatis, quod patet ex generali aequatione (ex art. 7. huc applicata), $(bb - \omega\omega)zdx + Mbb\omega dz = bbadx$; vel clarius ex aequatione (art. 22.) expoſita in terminis finitis $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega} \times (1 - 1 : f^{\frac{(bb - \omega\omega)x}{Mbb\omega}})$, quae aequiualet huic $z = \frac{bba}{\omega\omega - bb} \times (f^{\frac{(\omega\omega - bb)x}{Mbb\omega}} - 1)$; ex qua ſtatim liquet, in caſu quo ω maius quam b, euadere z, adeoque velocitatem, infinitam, quando x eſt infinitum, ſecus ac fit ſi b maius eſt quam ω. Haec ad amuſſim conſpirant cum iis quae dedi in fine partis primae per methodum diuerſiſſimam inuenta.

De breuitate temporis ab initio effluxus vsque ad velocitatem ſenſibiliter aequabilem ſeu vniformem.

§. 26. Etiamſi, accurate loquendo, requiratur tempus infinitum, antequam fluxus aquae ex vaſis per foramen proſilientis perueniat gradatim ad vniformitatem perfectam ſectam et geometricam: experientia tamen quotidie monſtrat, aquam ex vaſis praeſertim amplioribus quamuis altitudinis vix trium quatuorue pedum, a primo fluxus momento tanta rapiditate ad maximam ſuam et aequabilem fluxus velocitatem conuergere dum effluit per foramen mediocriter licet anguſtum, vt ſenſibus percipi non poſſint incrementa gradualia velocitatis per quae tranſit a quiete ad vniformem et maximam poſſibilem velocitatem quam ſenſibiliter acquirere poteſt. Vt huius phaenomeni rationem reddamus ex noſtra theoria, conſideremus vas cylindricum vel priſmaticum, ſat magnae amplitudinis b et iuſtae altitudinis a; ex quo prorumpat aqua per foramen anguſtum ω in directione horizontali, ſiue id fiat immediate ex ipſo vaſe ſiue mediante canali in extremitate orificium ω habente.

§. 27. Aequatio generalis (art. 6.) pro determinatione velocitatis adhuc creſcentis haec fuit $\frac{vv(bb-\omega\omega)}{2b} + \frac{b\omega v dv}{dx} \int \frac{dt}{y} = gba$, quae in noſtro caſu vbi $\int \frac{dt}{y} = \frac{a}{b}$, et $\omega\omega$ iuxta bb negligi poteſt, in hanc mutatur $2a\omega v dv = 2gbadx - bvvdx$, ſeu $dx = \frac{2a\omega v dv}{2gba - bvv}$; adeoque elementum temporis $d\theta$ ſeu $\frac{dx}{v}$ erit $= \frac{2a\omega dv}{2gba - bvv} = \frac{\frac{2a}{b}\omega dv}{2ga - vv} = \frac{a\omega}{b\sqrt{2ga}} \left(\frac{dv}{v + \sqrt{2ga}} + \frac{dv}{-v + \sqrt{2ga}} \right)$; integrando habetur $\theta = \frac{a\omega}{b\sqrt{2ga}} \times l \left(\frac{v + \sqrt{2ga}}{-v + \sqrt{2ga}} \right) =$ (ob $v = \sqrt{2gz}$) $\frac{a\omega}{b\sqrt{2ga}} l \left(\frac{\sqrt{z} + \sqrt{a}}{-\sqrt{z} + \sqrt{a}} \right) =$ (art. 22.) $\frac{a\omega}{b\sqrt{2ga}} l \left(1 + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{f^{\frac{bx}{a\omega}}}\right)} \right) : \left(1 - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{f^{\frac{bx}{a\omega}}}\right)} \right)$; Eſt enim in hoc caſu $z = a\left(1 - \frac{1}{f^{\frac{bx}{a\omega}}}\right)$. Hinc $\frac{b\sqrt{2ga}}{a\omega}\,\theta =$

Log. $\left[1 + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{f^{\frac{bx}{a\omega}}}\right)} : 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{f^{\frac{bx}{a\omega}}}\right)}\right]$; Transeundo a logarith. ad numeros et rite procedendo inuenietur $f^{\frac{bx}{2a\omega}} =$ huic fractioni $\left(f^{\frac{b\sqrt{2ga}}{a\omega}\theta} + 1\right) : \left(2f^{\frac{b\sqrt{2ga}}{2a\omega}\theta}\right)$.

§. 28. Verum ex principio dynamico pro lapsu libero grauium, ponendo $C =$ altitudini quam graue libere cadens percurrit tempore dato θ, inuenietur $\theta = \frac{\sqrt{2C}}{\sqrt{g}}$ substituatur hic valor in fractione modo inuenta, et habebitur $f^{\frac{bx}{2a\omega}} =$ huic alteri fractioni $\left(f^{\frac{2b\sqrt{aC}}{a\omega}} + 1\right) : 2f^{\frac{b\sqrt{aC}}{a\omega}}$. Nunc quia amplitudo vasi b valde maior supponitur quam amplitudo foraminis ω, et altitudo lapsus liberi C vno secundo horario percurrenda $= 15$. pedibus, ac praeterea ex natura curuae logarithmicae f maior quam binarius, manifestum est pro qualibet mediocri altitudine vasis a, hunc numerum $f^{\frac{2b\sqrt{C}}{a\omega}}$ in immensum superare vnitatem, ita vt haec contemni possit in numeratore fractionis nostrae, erit igitur sensibiliter $f^{\frac{bx}{2a\omega}} = f^{\frac{2b\sqrt{aC}}{a\omega}} : 2f^{\frac{b\sqrt{aC}}{a\omega}} = \frac{1}{2} f^{\frac{b\sqrt{aC}}{a\omega}}$, seu $2 f^{\frac{bx}{2a\omega}} = f^{\frac{b\sqrt{aC}}{a\omega}}$, vel sumendo logarithmos $\frac{bx}{2a\omega} + l2 = \frac{b\sqrt{aC}}{a\omega}$, vnde $x = 2\sqrt{aC} - \frac{2a\omega l2}{b} =$ (ob ω incomparabiliter minus quam b) $2\sqrt{aC} =$ (ponendo $a = 4$ ped. et $C = 15$ ped.) $2\sqrt{60}$ ped. $=$ (circiter) 16 pedibus. Quod si igitur in aequatione $z = a\left(1 - \frac{a}{f^{\frac{bx}{a\omega}}}\right)$, quae pro quolibet aquae effluxu longitudinis x determinat velocitatem, substituamus 4 pro a, 16 pro x, 2 pro f (quamuis, quod rem fortius probaret, f maius sit quam 2) et ponamus amplitudinem vasis b esse ad amplitudinem fo-

foraminis ω tantum vt 100 ad 1, habebimus $z = 4$ $(1 - 1 : 2^{400})$, quod ob ſtupendam paruitatem fractionis $1 : 2^{400}$, non differre cenſetur a 4 pedibus, quae deſignat altitudinem vaſis, et ſimul illam a qua graue delapſum acquirit velocitatem aequalem ei quam habet effluxus cum peruenerit ad vniformitatem, vnde patet vno ſecundo temporis elapſo, aquam effluentem iam habere ſenſibiliter illam velocitatem vniformem. Sed vt melius appareat, quanta promtitudine conuergat velocitas effluxus ad vniformitatem, videamus quam parum debeat abludere velocitas aquae effluentis acquiſita, poſt elapſam decimam partem vnius ſecundi, a maxima velocitate quam acquirere poſſet ſi effluxus duraret per infinitum temporis ſpatium: Reducamus pedes ad pollices, et habebimns $a = 48$ poll. atque reperietur C circiter $= 2$ poll. vnde x ſeu $2\sqrt{a}C$ circiter $= 20$ poll. et $f^{\frac{bx}{a\omega}} = f^{\frac{2000}{48}}$, pro quo ſcribo tantum 2^{40}. Erit itaque $z = a\,(1 - 1 : 2^{40})$, quod etiamnum, ob imperceptibilem paruitatem fractionis $1 : 2^{40}$, ab ipſo a denotante velocitatem vniformem neutiquam differre cenſendum eſt.

Corollarium.

Effluxus aquae ex vaſis amplioribus per anguſta foramina poteſt tuto conſiderari tanquam aequabilis in momento poſt motus initium.

Theorema hydraulicum generale directe deductum ex principiis hydrodynamicis, demonstratum per methodum indirectam virium viuarum.

§. 29. Ad vberiorem confirmationem bonitatis methodi nostrae directae et vniuersalis, lubet nunc tradere solutionem indirectam, ex theoria conseruationis virium viuarum eruendam, propositionis principalis de velocitate aquae erumpentis ex vase et canali semper pleno, prout illam stabiliuimus per aequat. art. 7. traditam. Concipiamus aquam per Cc (Fig. I.) egredientem dirigi statim ad situm horizontalem vt considerari possit sine ascensu et sine descensu in suo progressu: Sit vero x longitudo cylindri aquei secundum directionem obliquam ID habentis pro basi Cc; qui cylindrus contineat tantam quantitatem aquae quanta iam egressa est, erit illa quantitas $= \frac{\omega x}{\alpha}$ cuius differentiale $\frac{\omega dx}{\alpha}$ designat particulam aquae elementarem porro iamiam egressuram ex Cc postquam egressa est quantitas $\frac{\omega x}{\alpha}$. Sit z altitudo verticalis, ex qua graue aliquod libere delapsum acquirat velocitatem quaesitam, quam nempe debet habere particula illa elementaris aquae $\frac{\omega dx}{\alpha}$. Erit per principium virium viuarum eius velocitas $= \sqrt{z}$, et subuelocitas $= \frac{\sqrt{z}}{\alpha}$, vnde subuelocitas in G $= \frac{\omega \sqrt{z}}{ab}$, ipsa vero velocitas actualis in G in directione tangentis $= \frac{\varepsilon \omega \sqrt{z}}{\gamma ab}$. Similiter subuelocitas in quolibet puncto H $= \frac{\omega \sqrt{z}}{\alpha y}$, adeoque ipsa actualis velocitas in H $= \frac{\omega ds \sqrt{z}}{\alpha y dt}$.

§. 30. Quoniam autem per singulas amplitudines in toto canali eodem tempusculo eadem quantitas aquae $\frac{\omega dx}{\alpha}$ per-

perfluere debet, concipienda eſt talis quantitas elementaris $\frac{\omega dx}{\alpha}$ tanquam collocata ſupra ſupremam E*e* in altitudine verticali $= \frac{\epsilon\epsilon\omega\omega z}{\alpha\alpha bb}$, vt conuenienti tempore cadere incipiens ſua grauitate perueniat ad amplitudinem E*e* ibique reſarciat eodem momento et eadem velocitate $\frac{\epsilon\omega\sqrt{z}}{\alpha b}$ particulam ſupremam $\frac{\omega dx}{\alpha}$ deſcendentem in canali. Atque hoc modo canalis iugiter plenus conſeruabitur, prout conditio problematis id requirit.

§. 31. Quod ſi igitur ſingulae $\frac{\omega dx}{\alpha}$ ſua quaeque altitudine $\frac{\epsilon\epsilon\omega\omega z}{\alpha\alpha bb}$ collocata ſupra E*e* fuerint, et iam omnes ſucceſſiue delapſae ſint per E*e*, ingreſſurae canalem ſemper plenum conſeruantes, patet aequalem quantitatem aquae $\int \frac{\omega dx}{\alpha}$ ſeu $\frac{\omega x}{\alpha}$ per orificium C*c* eſſe egreſſam, quam in plano horizontali C*c* prolongato moueri concipimus, et ita quidem vt ſingulae eius particulae $\frac{\omega dx}{\alpha}$ habeant ſuam acquiſitam velocitatem $\sqrt{z}$. Quare vnaquaeque ex particulis $\frac{\omega dx}{\alpha}$ cenſenda eſt deſcendiſſe ex loco primitiuo quietis vsque ad infimum horizontem BC*c* prolongatum, hoc eſt, ex altitudine $= \frac{\epsilon\epsilon\omega\omega z}{\alpha\alpha bb} + AB = \frac{\epsilon\epsilon\omega\omega z}{\alpha\alpha bb} + a$; oportet itaque multiplicare deſcenſus per particulas deſcendentes vt habeatur $\frac{\epsilon\epsilon\omega^3 zdx}{\alpha^3 bb} + \frac{a\omega dx}{\alpha}$, quod integratum dat $\frac{\epsilon\epsilon\omega^3}{\alpha^3 bb}$ $\int zdx + \frac{a\omega x}{\alpha} =$ vi viuae ex deſcenſu vniuerſo particularum grauium collectae: Haec autem aequalis eſſe debet effectui ſuo, qui conſiſtit in aggregato productorum quae fiunt ducendo ſingulas particulas in quadrata ſuarum reſpectiue velocitatum.

§. 32. Quocirca particulam $\frac{\omega dx}{\alpha}$ iam egreſſam ex canali multiplico per quadratum velocitatis ſuae quod eſt z, et et habebo $\frac{\omega z dx}{\alpha}$, cuius integrale $\frac{\omega}{\alpha}\int z dx$ exprimit vim viuam ex velocitatibus oriundam totius materiae aqueae ex canali egressae, cui addenda adhuc est ea quam habet omnis materia intra canalem fluens et quae reperitur multiplicando singula strata $y dt$ per quadratum suarum respectiue vltimarum velocitatum $\frac{\omega\omega z ds^2}{\alpha\alpha yy dt^2}$; adeo vt cuiuslibet strati $y dt$ prodeat vis viua ex motu suo oriunda $= \frac{\omega\omega z ds^2}{\alpha\alpha yy dt^2} \times y dt = \frac{\omega\omega z ds^2}{\alpha\alpha y dt}$: Proinde vis viua omnium stratorum $= \frac{\omega\omega z}{\alpha\alpha}\int \frac{ds^2}{y dt}$ per totum canalem sumendorum $=$ (ob datum, per magnitudinem datam totius canalis, $\int \frac{ds^2}{y dt}$, quod dicatur M) $\frac{M\omega\omega z}{\alpha\alpha}$. Sumendo itaque aggregatum ambarum harum virium viuarum ex motu oriundarum, habebimus vim viuam vniuersi systematis aquei $= \frac{\omega}{\alpha}\int z dx + \frac{M\omega\omega z}{\alpha\alpha}$.

§. 33. Hinc aequando hanc ex motu collectam cum illa quam modo ante ex descensu particularum collegimus, suppeditabitur nobis haec aequatio $\frac{\beta\beta\omega^3}{\alpha^3 bb}\int z dx + \frac{a\omega x}{\alpha} = \frac{\omega}{\alpha}\int z dx + \frac{M\omega\omega z}{\alpha\alpha}$, quae differentiata et a fractionibus liberata, hanc praebet $\beta\beta\omega\omega z dx - \alpha\alpha bb z dx = M\alpha bb\omega dz - \alpha\alpha bb a dx$, vel denique (reductione peracta) hanc $(\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega) z dx + \alpha M bb\omega dz = \alpha\alpha bb a dx$: omnino vt inuenimus per methodum directam (art. 7.).

Corollarium.

Si b vel Ee sit amplitudinis permagnae respectu ω vel Cc, aequatio inuenta abit in hanc $\alpha z dx + M\omega dz = \alpha a dx$, et pro effluxu vniformi in hanc $z = a$. Sin vero Ee non quidem sit valde magnae amplitudinis respectu Cc, velimus tamen vt aqua noua succedat continuo descendenti intra canalem non cum velocitate acquisita aliqua, sed ex

qui-

quiete incipiat ſuccedere ita vt etiam hoc modo canalis ſemper plenus conſeruetur; poterit hoc effectui dari, ſi ad E*e* (Fig. V.) adaptatur vas ampliſſimum ſed valde paruae altitudinis, quod ſit aqua plenum: Effluet vtique ex illo aqua ſumens motum ex quiete, et tamen influens in canalem cum debita velocitate conſeruabit iugiter eius plenitudinem. Res ipſa patet ex figura: vbi canalis EC*ce* adaptatum habet vas cylindricum ampliſſimum AQVK, cuius altitudo AK vel QV valde parua ſupponitur ita vt altitudinem verticalem AB canalis E*c* ſenſibiliter non augeat, id eſt, vt KB ſumi poſſit pro AB, et tamen capacitas AV huius vaſis cylindrici permagnam aquae copiam contineat. Quare vt iam velocitas aquae effluentis per C*c* determinetur, non amplius E*e* ſed KV ſumenda eſt pro prima amplitudine b manente interim altitudine verticali a canalis, quia per hypotheſin ſenſibiliter non differt AB a KB. Hoc pacto habebimus ſemper pro velocitate vniformi $z = a$, hoc eſt, eam velocitatem quam graue acquireret cadendo libere ex altitudine $= a =$ AB ſeu KB.

Exemplum ſingulare determinandi motus aquae in canali conoidico verticaliter deſcendentis, vbi nihil effluit nullaque noua aqua deſcendenti ſuccedit.

§. 34. Eſto hyperbola BEG (Fig. VI.) inter aſymtotos orthogonales, vnam verticalem AM, alteram horizontalem AH; cuius applicatae DI, EK, FL, GM, &c. deſignent amplitudines ipſas canalis conoidici, in infinitum continuati, qui generari intelligitur, ſi alia hyperbola inter

ter easdem aſymtotos (cuius applicatae ſint vt radices hyperbolae ordinariae prioris) deſcripta circa aſymtoton verticalem tanquam circa axem reuoluitur. Concipiatur in loco quocunque canalis dari portionem aquae deſignatam per aream hyperbolicam DK, a quiete deſcendere incipientem, deſcendendo perueniſſe in locum quemlibet alium FM, ita, vt per conſequens FM ſit $=$DK. Quaeruntur velocitates in GM, in FL, et velocitas cuiuscunque ſtrati intermedii POop.

§. 35. Sit vnumquodque rectangulum coordinatarum, hoc eſt, productum amplitudinis cuiusque PO per altitudinem conoidis AO, $= aa$; item abſciſſae datae AI$=b$, AK$=c$; deſcenſus quilibet aſſumtus AL amplitudinis ſuperioris $=x$. Erunt ex natura hyperbolae amplitudo DI$= \frac{aa}{b}$, EK $= \frac{aa}{c}$, FL $= \frac{aa}{x}$, et praeterea (ob DK$=$FM)AM $= \frac{cx}{b}$, proinde GM $= \frac{aab}{cx}$; ipſaque area vel potius ſolidum DK vel FM $= aa(lc-lb)$. Erit porro (calculo docente) centri grauitatis areae DK diſtantia ab horizonte AH $= \frac{c-b}{lc-lb}$, et diſtantia centri grauitatis areae FM (nota, per aream ſemper ſolidum me intelligere) ab eadem AH$= \frac{x(c-b)}{b(lc-lb)}$. Hinc deſcenſus centri grauitatis ex ſitu DK in ſitum FM $= \frac{(x-b)\times(c-b)}{b(lc-lb)}$, multiplicetur per quantitatem aquae deſcendentis deſignatam per $aa(lc-lb)$, erit productum $\frac{aa(x-b)\times(c-b)}{b} =$ vi viuae ex deſcenſu productae.

§. 36. Dicatur iam velocitas in GM$=\sqrt{z}$, erit velocitas in FL $= \frac{b}{c}\sqrt{z}$; dicatur etiam quaelibet AO$=y$, erit PO $= \frac{aa}{y}$, ſtratum Po $= \frac{aady}{y}$, ipſaque eius velocitas$= \frac{by}{cx}\sqrt{z}$; Huius ergo quadratum ductum in ſtratum Po dat $\frac{aabbz}{ccxx}ydy =$ vi viuae ſtrati Po, cuius integrale debite correctum

rectum (sumendo a, b, c, z et x pro constantibus) $= \frac{aabbz}{2ccxx}yy - \frac{aabbz}{2cc} =$ (in casu y seu AO $= \frac{cx}{b}$ seu AM) $\frac{aaz}{2} - \frac{aabbz}{2cc} = (cc-bb)\frac{aaz}{2cc} =$ vi viuae totius massae aqueae ex motu oriundae. Comparando hanc cum praecedente habebimus $\frac{aa(x-b)\times(c-b)}{b} = (cc-bb)\frac{aaz}{2cc}$, vnde per reductionem inuenietur $z = \frac{(x-b)2cc}{(c+b)b} =$ quadrato velocitatis in GM, adeoque quadratum velocitatis in FL $= \frac{(x-b)2b}{c+b}$; et quadratum velocitatis cuiusqunque strati intermedii Po (pro abscissa AO seu y) $= \frac{(x-b)2byy}{(c+b)xx}$.

Corollarium 1.

Stratum infimum EK descendens ex quiete in situm GM, acquirit maiorem velocitatem quam corpus graue libere cadens ex altitudine KM, est enim $\frac{(x-b)cc}{(c+b)b}$ maius quam KM vel quam $\frac{cx}{b} - c$.

Corollarium 2.

Sed stratum supremum DI descendens in locum FL, acquirit minorem velocitatem quam graue cadens libere ex altitudine IL, nam $\frac{(x-b).b}{c+b}$ minus est quam IL seu quam $x-b$.

Corollarium 3.

Partes ergo inferiores massae aqueae fortius, et superiores segnius accelerantur quam si libere descenderent a sola naturali grauitate animatae: Quod vel hinc quoque citra calculum praeuideri poterat, quia partes aquae in locis angustioribus premuntur ab incumbentibus, atque sic ad maiorem accelerationem incitantur, contra vero renituntur partibus iis quae occupant loca ampliora, atque ita ſuperiores in acceleratione ſua naturali retardantur.

Corollarium 4.

Datur itaque alicubi ſtratum Po intermedium, quod nec incitatur nec retardatur, ſed eodem ritu acceleratur, ac ſi libere deſcenderet; Hoc autem vt determinetur, facio vt AL ad AO ſeu vt x ad y, ita AI ſeu b ad Aω, quae erit $\frac{by}{x}$, eritque ω ſitus primitiuus ſtrati PO. Proinde ωo ſeu $y - \frac{by}{x}$ eſt altitudo, per quam deſcendit ſtratum Po, vt igitur acceleratio huius ſtrati ſit $=$ naturali, oportet tantum facere $y - \frac{by}{x} = \frac{(x-b) \cdot byy}{(c+b)xx}$; vnde prodibit $y = \frac{(c+b)x}{2b}$, id quod oſtendit diſtantiam AO eſſe mediam arithmeticam inter AL et AM, ſicuti Aω eſt media arithmetica inter AI et AK; adeoque LO$=$OM et I$\omega$$=$$\omega$K: His itaque in locis ſtratum intermedium Po tantumdem premitur deorſum verſus ab incumbente aqua FO, quantum ſurſum verſus reprimitur ab aqua ſubiecta PM, ita vt haud aliter deſcendat quam ſi libere deſcenderet a ſola grauitate naturali animatum. Caeterum et hoc quoque obſeruandum, in iisdem his locis fieri maximam aquae compreſſionem, vnde concludimus, ſi in loco ſtrati Po inſeretur fiſtula verticaliter, fore vt aqua in illa ad maiorem altitudinem a loco inſertionis aſcenderet, quam ſi inſcreretur in cuiuslibet alius loci ſtrato inter FL et GM; etenim altitudo in fiſtula dependet a ſola aquae compreſſione, vt ex ſupra explicatis patet.

Col-

Collatio huius ſolutionis per vires viuas cum ea quae elicitur per methodum noſtram directam ex principiis mere dynamicis petitam.

§. 37. In ſcripti huius hydraulici Parte Secunda art. 7. dedimus per principia dynamica aequationem generaliſſimam pro determinatione velocitatis, nempe hanc $(\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega)zdx + \alpha\sqrt{}bb\omega dz = \alpha\alpha bbadx$. Sed ibi ſupponitur, vas vel canalis ſemper plenus, ſuccedente nimirum continuo liquore nouo eadem velocitate ſeſe adiungente illi qui in ſuprema amplitudine iamiam deſcendit, ipſeque canalis exiſtit datae et determinatae altitudinis verticalis: Cum vero in praeſenti exemplo canalis ſit indefinitae altitudinis, in quo quippe pars tantum liquore plena FM locum ſuum ſemper mutat, habetque proin altitudinem ſuam LM ſingulis momentis variabilem, adeo vt non ſtatim videatur huius exempli caſum contineri ſub formula illa inuenta art. 7. cum praeſertim nullus nouus liquor heic ſuccedat deſcendenti, ſed vna eademque ſemper eius quantitas DK vel FM in canali conſeruetur, modo hunc modo alium locum occupans.

§. 38. Interim monſtrabimus, quo pacto per aliquam mentis fictionem praeſens caſus reduci poſſit ad leges hypotheſeos art. 7. ſtabilitae. Conſiderandum nempe ſpatium primitiuum DEKI ſub ſpecie canalis datae altitudinis IK, cuius amplitudo ſuperior eſt DI, inferior EK, vtraque data et determinata: Iam ex EK dum liquor effluit, occupaturus loca inferiora canalis prolongati,

 ſinfingo per ſupremam amplitudinem DI ſubingredi fluidum aliquod tam grauitatis quam omnis inertiae vel reſiſtentiae expers, quod quamuis tale in rerum natura non detur, tamen ita fingi poteſt vt nihil aliud agat quam ſupplere ſpatium quod a liquore deſcendente vacuum relinqueretur. Hoc ita praeſuppoſito, deſcenderit iam liquor realis ex DK in locum FM; Huius ſingulorum ſtratorum Po vires tum hydroſtaticas tum hydraulicas transfero ad ſupremam amplitudinem DI vbi premat fluidum fictum quod nunc occupat ſpatium DFLI, eundemque effectum praeſtare debet, quam praeſtat vis in grauitate oriunda liquor realis FM pariter translata ad amplitudinem ſupremam DI, et haec eſt illa vis quam vocavi P ſeu gba; omnia applicando ad mentem theoriae noſtrae in ſcripto hoc hydraulico expoſitae: Atque ſic nullae aliae vires in computum venient, quam quae reſultant a grauitate et motu liquoris realis, fluido ficto nihil omnino contribuente et nullum alium in finem inſeruiente, quam vt transmittat vires translatas ad depellendum liquorem realem FM.

§. 39. Nihil igitur aliud reſtat, quam vt debita fiat applicatio methodi expoſitae in artic. 4 et 5, eum in finem vt accommodetur ad exemplum propoſitum, vbi ſtatim patet, eſſe $\alpha = \beta = 1$, reliquae vero litterae deſignant hic ea quae ſequuntur, ſcilicet $b =$ DI, $\omega =$ EK, a ſeu altitudo liquoris realis $=$ LM, $M =$ ſummae omnium $\frac{Oo}{PO}$ in altitudine LM contentorum; item $z =$ altitudini ex qua graue libere delapſum acquirit velocitatem v, qua cum liquor realis ſub initium deſcenſus vel poſtea fluidum fictum effluit per EK, ac denique $dq =$ progreſſui momentaneo ex amplitudine EK.

§. 40.

§. 40. His probe obseruatis nunc ita procedo: Posita velocitate per $EK = v$, erit velocitas per $FL = \frac{xv}{c}$, velocitas per $GM = \frac{xv}{b}$, velocitas per $PO = \frac{yv}{c}$. Porro progressus per $FL = d(AL) = dx$, progressus per $GM = d(AM) = \frac{cdx}{b}$, progressus per $PO = d(AO) = \frac{ydx}{x}$, progressus per EK seu $dq = \frac{cdx}{x}$; qui progressus omnes, cum debeant esse simultanei, sunt vtique in ratione reciproca amplitudinum, sicuti et ipsae velocitates, adeoque in ratione directa distantiarum ab horizontali AH.

Quaerenda iam est ad imitationem art. 4. (existente hic $\alpha = \beta = 1$) vis hydrostatica, quae exprimitur per semissem amplitudinis supremae DI multiplicatum per differentiam quadratorum velocitatum, maximae per GM et minimae per FL; est autem $DI = \frac{aa}{b}$, velocitas per $GM = \frac{xv}{b}$ et velocitas per $FL = \frac{xv}{c}$, vnde tota vis hydrostatica $= \frac{aa}{2b}\left(\frac{xxvv}{bb} - \frac{xxvv}{cc}\right) = \frac{aaxxvv}{2b^3cc}(cc-bb)$.

§. 41. Ad initationem art. 5. vim hydraulicam ita determino: Vim acceleratricem strati indefiniti Po, quam voco γ', multiplico per eius progressum $\frac{ydx}{x}$, et habebo per principium dynamicum $\frac{\gamma' ydx}{x} = u'du' = \frac{yyvdv}{cc}$, vnde vis acceleratrix progressiua $\gamma' = \frac{xyvdv}{ccdx}$, et ipsa vis motrix strati Po, hoc est, $\gamma' Po = \frac{aaxvdvdy}{ccdx}$; Quae translata amplitudinem DI seu ad $\frac{aa}{b}$ facit $\frac{aaxvdvydy}{bccdx}$, quod integratum dat $\frac{aaxvdvyy}{2bccdx} =$ (corrigendo vel sumendo per omnes yy quae sunt contentae in interuallo LM) $\frac{aax^3vdv}{2b^3ccdx}(cc-bb) =$ vi hy-

hydraulicae. Aggregatum virium hydroſtaticae et hydraulicae erit $\frac{aaxxvv}{2b^3cc}(cc-bb)+\frac{aax^3vdv}{2b^3ccdx}(cc-bb)$ ſeu $\left[\frac{aaxx}{2b^3cc}\left(vv+\frac{xvdv}{dx}\right)\right]\times(cc-bb)$, quod virium aggregatum debet eſſe aequale vi primitiuae translatae ex grauitate ſtratorum oriundae: Habetur autem vis primitiua translata cuiuslibet ſtrati Po, faciendo vt PO ad DI ſeu vt AI ad AO, hoc eſt, vt b ad y ita $g\times$Po ſeu $\frac{gaady}{y}$ ad $\frac{gaady}{b}$, quod debite integratum per interuallum LM dat $\frac{gaax(c-b)}{bb}$ pro tota vi primitiua translata.

§. 42. Lucramur ergo aequationem inter aggregatum virium hydroſtaticae et hydraulicae atque inter vim primitiuam translatam, quae aequatio ita ſe habet $\left[\frac{aaxx}{2b^3cc}\left(vv+\frac{xvdv}{dx}\right)\right]\times(cc-bb)=\frac{gaax(c-b)}{bb}$, vnde diuidendo per $\frac{aax}{bb}(cc-bb)$ prodit haec altera $\frac{x}{2bcc}\left(vv+\frac{xvdv}{dx}\right)=\frac{g}{c+b}$, vel reducendo, haec $xvvdx+xxvdv=\frac{2gbccdx}{c+b}$; atque integrando et corrigendo debito modo (vt AL vel x exiſtente $=$ AI vel $=b$, ipſum v ſit $=0$) habebitur $\frac{1}{2}xxvv=\frac{2gbccx-2gbbcc}{c+b}$, aut ſcribendo ſecundum legem dynamicam $2gz$ pro vv et diuidendo per g, erit $xxz=\frac{2bccx-2bbcc}{c+b}$, adeoque $z=\frac{(x-b)2bcc}{(c+b)xx}$, quod determinat velocitatem per EK, ex qua nunc determinatur velocitas per quamlibet aliam amplitudinem, faciendo namque vt GM^2 ad EK^2 ſeu vt AK^2 ad AM^2, hoc eſt, vt cc ad $\frac{ccxx}{bb}$, ſiue vt bb ad xx ita $\frac{(x-b)2bcc}{(c+b)xx}$ ad $\frac{(x-b)2cc}{(c+b)b}$, erit hoc $=$ altitudini ex qua graue libere cadendo acquirit velocitatem quam habet liquor in puncto infimo M; faciendo porro vt cc ad xx ita $\frac{(x-b)2bcc}{(c+b)xx}$ ad $\frac{(x-b)2b}{c+b}=$ altitudini vnde graue libere delapſum habebit velocitatem eam quae conuenit

nit liquori in supremo puncto L: ac denique faciendo vt cc ad yy ita $\frac{(x-b).bcc}{(c+b)xx}$ ad $\frac{(x-b)2byy}{(c+b)xx}$, indicabit hoc altitudinem ex qua graue libere cadere debet vt acquirat debitam velocitatem, quam liquor habebit in puncto quolibet dato intermedio O. Quae omniae mirifice conspirant cum iis quae inuenimus per theoriam virium viuarum.

§. 43. Sed et hoc iam praestare possumus, quod non aeque facile praestari potest per vires viuas, scilicet inuenire quantum liquor inter descendendum in quauis sui parte comprimatur; Vidimus quidem supra in Coroll. 4. liquorem postquam ex situ initiali seu primitiuo DK descendit in situm FM, in singulis suis partibus PO diversas pati compressiones, atque eorum maximam esse, vbi PO bifariam secat LM, verum eius quantitatem determinare et cum pondere aliquo dato comparare, nedum in aliis locis, cum scilicet PO diuidit LM in alia quacunque ratione, res esset altioris indaginis, si quis id ex natura virium viuarum eruere vellet; Per methodum nostram directam, in capite de pressionibus expositam, haud arduum est quaesitum obtinere, etiam pro hoc peculiari exemplo.

§. 44. Sit itaque indagandum, quanta vi massa liquoris FM comprimatur in quolibet loco PO, quam vim quaerendam hic etiam vocabo π; Ostendi art. 11 et 12, si portio tantum PM, remoto residuo FO, descendere pergeret sed ita vt non solum a propria grauitate sed insuper etiam a π vrgeretur, fore vt (saltem primo momento) eodem modo acceleraretur, quo accelerari debet tota massa FM a sola sua grauitate. Secetur IK in ω in simili ratione vt secta est LM in O, ita vt AI . Aω :: AL . AO, erit $\pi\omega$ situs initialis ipsius PO; et πK = PM. Sit AL ad ad AO, vel AI ad Aω vt 1 ad n, proinde AO $= nx$ et A$\omega = nb$. Fingamusque liquorem in πK contentum descendere vi suae grauitatis, ac praeterea vi π, quae in quolibet loco descensus ipsi conuenit, vt acceleratio fiat perinde ac si tota massa DK vi sola suae grauitatis descenderet; Quare quod erat AL vel x, id nunc est AO vel nx; Et quod erat AI vel b, id nunc est nb. Ideoque vires hydrostatica et hydraulica inuenientur si nx pro x et ndx pro dx, item nb pro b scribatur, atque sic habebitur $\frac{aannxxvv}{2n^3b^3cc}(cc-nnbb)$ vel $\frac{aaxxvv}{2nb^3cc}(cc-nnbb) =$ vi hydrostaticae, nec non $\frac{aan^3x^3vdv}{2n^3b^3ccndx}(cc-nnbb)$ vel $\frac{aax^3vdv}{2nb^3ccdx}(cc-nnbb) =$ vi hydraulicae: Vis autem P per translationem a grauitate oriunda, quae erat $\frac{gaax(c-b)}{bb}$ nunc est vtique $\frac{gaanx(c-nb)}{nnbb}$ vel $\frac{gaax(c-nb)}{nbb}$.

§. 45. Sumendo iam aggregatum virium hydrostaticae et hydraulicae, illudque aequando cum vi primitiua translata ex grauitate oriunda $\frac{gaax(c-nb)}{nbb}$, cui addi debet vis compressionis translata ex PO in ω, quae habetur si facimus vt PO ad ω, seu vt AI ad AL, hoc est, vt b ad x ita π ad $\frac{x\pi}{b}$, lucramur hanc aequationem $\left(\frac{aaxxvv}{2nb^3cc} + \frac{aax^3vdv}{2nb^3ccdx}\right) \times (cc-nnbb) = \frac{gaax(c-nb)}{nbb} + \frac{x\pi}{b}$, quae ordinata hanc induit formam $\frac{aa}{2nbbcc}\ (d[\frac{1}{2}xxvv] \times (cc-nnbb)) = \frac{gaadx(c-nb)}{nb} + \pi dx$; Quoniam autem velocitas massae diminutae PM sed pressae a vi π eadem esse debet quae est velocitas massae integrae FM, pro qua velocitate modo supra inuenimus $\frac{1}{2}xxvv = \frac{2gbccx-2gbbcc}{c+b}$, scribamus huius differentiale quod est $\frac{2gbccdx}{c+b}$ pro $d[\frac{1}{2}xxvv]$, et prodibit $\frac{gaadx}{nb(c+b)} \times (cc-nnbb) = \frac{gaadx(c-nb)}{nb} + \pi dx$;

Di-

Diuidendo per dx et transponendo, obtinebimus $\pi = \frac{gaa[(cc-nnbb)-((c-nb)(c+b))]}{nb(c+b)} = \frac{gaa(cn-c-nnb+nb)}{n(c+b)}$. Quo circa si ad PO inseratur fistula verticaliter erigenda, vt cognoscatur ad quam altitudinem liquor in illa (saltem per tempus breuiusculum) suspensus haerere posset, diuidendum est π per g. PO, hoc est, per $\frac{gaa}{nx}$, vt habeatur $\frac{\pi nx}{gaa} = \frac{x(cn-c-nnb+nb)}{c+b} =$ altitudini liquoris in fistula, ex qua altitudine aestimanda est compressio absoluta liquoris in PO. Q. E. I.

§. 46. Quod si porro determinare oporteat punctum O in data qualibet LM, vbi intensitas compressionis sit maxima, id est, vbi liquor in fistula maximam obtinebit altitudinem: Differentianda est quantitas inuenta $\frac{x(cn-c-nnb+nb)}{c+b}$, sumto n pro variabili et reliquis pro constantibus, quo facto prodibit $c+b-2bn=0$, vnde resultat $n=\frac{c+b}{2b}$, adeoque nx seu AO $= \frac{(c+b)x}{2b} = \frac{c+b}{2b}$ AL $= \frac{c.\text{AL}}{2b} + \frac{1}{2}$AL $= \frac{1}{2}$AM $+ \frac{1}{2}$AL; vnde patet punctum O maximae compressionis esse in medio inter M et L, plane vt supra in Coroll. 4. coniectando praeuidimus.

§. 47. Praeterea si in expressione $\frac{x(cn-c-nnb+nb)}{c+b}$ substituatur valor inuentus ipsius n, qui est $\frac{c+b}{2b}$, habebitur ipsa liquoris maxima altitudo in fistula $= \frac{x(c-b)^2}{4b(c+b)}$; Hinc quia $\frac{1}{2}$ LM seu LO $= \frac{x(c-b)}{2b}$, erit LO seu altitudo liquoris in canali supra punctum O vbi fistula inseritur ad altitudinem liquoris in fistula $:: \frac{x(c-b)}{2b} . \frac{x(c-b)^2}{4b(c+b)} :: 2(c+b) . c-b$, seu vt duplum summae distantiarum primitiuarum AK + AI ad eandem simplam differentiam, hoc est, vt 4 Aω ad IK.

§. 48. Caeterum vel ſola ratio ſana dictat, maſſam liquoris deſcendentis FM in extremitatibus FL et GM nullam pati compreſſionem, adeoque altitudinem in fiſtula tam in L quam in M inſerta debere eſſe nullam: Et hoc ipſum quidem per formulam confirmatur; nam in priori caſu vbi $n = 1$, mutatur formula $\frac{x(cn - c - nnb + nb)}{c + b}$ in hanc $\frac{x(c - c - b + b)}{c + b}$, $= 0$, in poſteriori vero, vbi $n = \frac{c}{b}$, eadem mutatur in hanc $\frac{x(cc - cb - cc + cb)}{b(c + b)}$ etiam $= 0$.

Scholium 3.

§. 49. Hoc exemplum liquoris ſua grauitate deſcendentis in tuba hyperbolica ad indefinitum continuata, quod ſpeciminis loco fuſius pertractaui, monſtrat quomodo ſit procedendum in aliis eiusmodi caſibus, vbi liquor intra canalem ſufficienter longum eadem ſemper quantitate delabitur, ita nempe vt nihil inde effluat, nihilque pariter noui liquoris ſubingrediatur. Aperit inſuper aditum ad ſolutionem problematum de motu oſcillatorio determinando fluidorum in tubis recuruis vel reflexis, cuiuscunque ſint figurae, atque amplitudinis vtcunque variantis: In talibus namque tubis ſeu ſiphonibus dum pars quaedam fluidi per vnum crus deſcendit, per alterum crus licet multum diſſimile pars alia fluidi priori aequalis aſcendit, hoc eſt, negatiue deſcendit, ita vt perinde ac in tubis continuo deorſum vergentibus eadem ſemper fluidi maſſa conſeruetur; Vnde ſi mutatis mutandis quantum ad ſigna in calculo per eandem methodum, quam adhibuimus in allato exemplo, procedatur, haud arduum erit peruenire ad ſupputationem velocitatis fluidi transfluentis in ſingulis locis pro quolibet eius deſcenſu vel aſcenſu, vnde omnia reliqua dependent.

De

De vasis, quae interea dum emittunt liquorem per aperturam in fundo vel prope fundum factam, nihil noui liquoris desuper influentis accipiunt.

§. 50. Pro istis casibus vasorum, quae emittendo liquorem sed nullum alium accipiendo tandem deplentur atque euacuantur, posset adhiberi methodus illa quam explicui §. 44. et seq. vbi agebatur de determinatione motus datae massae aqueae intra canalem hyperbolico - conoidicum continuo delabentis, scilicet ope fluidi fictitii, quod nihil aliud agat quam supplere spatium ab aqua descendente vacuum relictum. Ista vero mentis fictione insuper habita atque neglecta sufficiet in rem praesentem aequatio nostra in §. 7. data $(aabb - \beta\beta\omega\omega)\ zdx + aMbb\omega dz = aabbadx$, quam pro vasis semper plenis existentibus valere vidimus. Illa quippe aequatio nullo negotio accommodabitur ad ea quoque vasa, quae ob nullum nouum liquorem influentem paulatim deplentur atque adeo suprema liquoris superficies Ea (Fig. I.) continuo descendit.

§. 51. Ad imitationem eius quod pro casu vasis cylindrici iam solutum extat in parte prima art. XII. consideremus hic vas cuiuscunque figurae, in quo superne nullus ingrediatur nouus liquor, dum ille qui iam inest per orificium infimum continuo ductu elabitur; Ponamus itaque supremam superficiem descendendo ex situ Ee peruenisse in situm Ff, ad quod momentum determinanda sit liquoris effluentis velocitas; quem in finem ipsa amplitudo Ff seu y licet variabilis sumenda est pro suprema amplitudine, cui respondet altitudo BP seu t quae et ipsa variabilis eſt (hoc certe permittit natura translationis virium motricium in fluidis, vt cuilibet attendenti patebit) ipſum vero M ſeu $\int \frac{ds^2}{ydt}$ quod in vaſis conſtanter plenis conſtans erat, nunc eſt variabile, capiendum nempe per altitudinem variabilem BP; Scribatur ergo in aequatione noſtra yy pro bb, t pro a, et $\frac{ds}{dt}$ pro $\mathfrak{C}$, atque prodibit haec aequatio quae deſideratur $(aayy - \frac{\omega\omega ds^2}{dt^2})\, zdx + ayy\omega dz \int \frac{ds^2}{ydt} = ayytdx$: Ex eo vero quod elementum aquae elabentis $\frac{\omega dx}{a} =$ ſtrato deſcendenti $-ydt$ (pono $-ydt$ quia creſcente x decreſcit t) erit $dx = \frac{-aydt}{\omega}$, ſubſtituendo igitur hunc valorem pro dx, habebit aequatio hanc faciem $(aayy - \frac{\omega\omega ds^2}{dt^2})\, zdt - \omega\omega ydz \int \frac{ds^2}{ydt} = aayytdt$; Quae pro vaſis habentibus centricam verticalem, vbi $a = 1$ et $ds = dt$, in hanc abit aequationem ſimpliciorem $(yy - \omega\omega)\, zdt - \omega\omega ydz \int \frac{dt}{y} = yytdt$.

§. 52. Ex hac aequatione exemplum ex prima parte allegatum (art. XII.) vbi vas ſupponebatur cylindricum nunc porro ad finem proſequemur ac quaedam notatu digna adiiciemus: Hic igitur viciſſim eſt b pro conſtante y, atque $\int \frac{dt}{y}$ erit $\int \frac{dt}{b}$ ſiue $\frac{t}{b}$, totusque terminus $\omega\omega ydz \int \frac{dt}{y}$ erit $\omega\omega tdz$, vnde aequatio pro caſu cylindri recti hanc formam habebit $(bb - \omega\omega)zdt - \omega\omega tdz = bbtdt$, Quae per modum integrandi dudum mihi vſitatum dat in terminis finitis valorem quaeſitum ipſius $z = \frac{bbt}{bb - \omega\omega}\left(1 - \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{bb - 1\omega\omega}{\omega\omega}}\right)$. Hinc ſtatim liquet velocitatem tam initialem quam finalem eſſe nullam, hoc eſt in caſu quo $t = 0$ vel quo $t = a$; vnde colligere eſt, alicubi fore velocitatem maximam aquae tum effluentis ex vaſa tum in ipſo vaſe deſcendentis, ea vt determinetur quaerendum eſt maximum

mum z quod fiet quando ſuperficies aquae in cylindro deſcendit ad eam a baſe diſtantiam t quae ſit $= a \left(\frac{\omega\omega}{bb-\omega\omega}\right)^{\frac{\omega\omega}{bb-2\omega\omega}}$; id quod duabus viis inuenitur, nempe vel differentiando valorem inuentum ipſius z more ſolito, vel quod commodius eſt, ponendo in praecedente aequatione differentiali $(bb-\omega\omega)\, z\,dt - \omega\omega t\,dz = bbt\,dt$, terminum ſecundum $\omega\omega t\,dz$ aequalem nihilo, vnde prodit $z = \frac{bbt}{bb-\omega\omega}$ qui comparatus cum inuento valore generali $\frac{bbt}{bb-2\omega\omega}\left(1-\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{bb-2\omega\omega}{\omega\omega}}\right)$ dabit vt dixi $t = a \left(\frac{\omega\omega}{bb-\omega\omega}\right)^{\frac{\omega\omega}{bb-2\omega\omega}}$.

§. 53. Interim in caſu particulariſſimo, vbi $bb = 2\,\omega\omega$, id eſt, vbi amplitudo vaſis cylindrici ſe habet ad amplitudinem foraminis vt $\sqrt{2}$ ad 1, hoc incommodi accidit vt $\frac{bbt}{bb-\omega\omega}\left(1-\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{bb-\omega\omega}{\omega\omega}}\right)$ euadat $= \frac{bbt}{0}(1-1)$, nec non vt alterum $a\left(\frac{\omega\omega}{bb-\omega\omega}\right)^{\frac{\omega\omega}{bb-2\omega\omega}}$ fiat $= \left(\frac{\omega\omega}{\omega\omega}\right)^{\frac{\omega\omega}{0}}$, ſeu $= (1)^{\infty}$, ex quo vtroque nihil concludi poteſt. Hoc autem incommodum tollitur per regulam cum aliqua dexteritate adhibitam, quam olim communicaui cum illuſtri Hoſpitalio, vt videre eſt in Analyſi infinite paruorum (art 136.). Prius enim modo allatum $\frac{bbt}{bb-\omega\omega}\left(1-\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{bb-\omega\omega}{\omega\omega}}\right)$ inuenitur pro praeſenti caſu $= -2(a-t)\,l\,(a-t)$, alterum vero $a\left(\frac{\omega\omega}{bb-\omega\omega}\right)^{\frac{\omega\omega}{bb-2\omega\omega}} = \frac{1}{c}$, aſſumendo ſcilicet a pro vnitate, et $lc = 1$; atque hinc vtrumque per logarithmicam vulgarem cuius ſubtangens $= a = 1$, facillime conſtruitur.

De Clepsydris conficiendis.

§. 54. Figuras vasorum aquas per foramen inferius emittentium huc vsque haud aliter tractauimus quam tanquam datas, vt nimirum erueremus leges secundum quas motus aquarum effluentium procederet: Nunc vero lubet inquirere ordine inuerso in figuram vasis ad id requisitam, vt aquae suprema superficies subsidat secundum propositam aliquam legem, ex gr. vt vniformi celeritate deorsum feratur, vnde ex quantitate descensuum duratio fluxus immediate innotescat, qui vsus olim fuit apud veteres frequentissimus clepsydrarum ad horas dimetiendas institutus. Id autem duobus praecipue modis obtineri potest, vnus scilicet est quo ex quantitate elapsae aquae, alter quo ex quantitate aquae in vase adhuc remanente de temporis spatio iudicari potest. De vtroque seorsim agemus.

§. 55. Consideremus vasa simpliciora quae nimirum habent centricas suas verticales, quarumque aequatio (§. 51.) haec erat $(yy-\omega\omega)\,zdt-\omega\omega ydz\int\frac{dt}{y}=yytdt$, vbi inde indeterminatae t et y originem ducunt a loco infimo seu a foramine ω; Quod si iam velimus facere vt aqua erumpat velocitate vniformi ponendum est $z=$ constanti c, quo posito erit $dz=0$ et ita euanescet secundus terminus $\omega\omega ydz\int\frac{dt}{y}$, reliquique diuisi per dt dabunt hanc aequationem algebraicam $(yy-\omega\omega)\,c=yyt$, vnde elicitur $yy=\frac{\omega\omega c}{c-t}$ et $y=V\left(\frac{\omega\omega c}{c-t}\right)$, seu $Vy=VV(\omega\omega c:c-t)$.

Corollarium 1.

Ea igitur est vasis natura et figura vt generari possit ex circumuolutione hyperbolae planae biquadraticae descriptae inter duas asymtotos, quarum vna verticalis altera horizontalis distans ab orificio ω altitudine $=c$. Co

Corollarium 2.

Altitudo prima seu t initialis $=c$, ipsaque amplitudo initialis y est infinita, est enim tunc $y=\sqrt{}(\omega\omega c: c-t)=\sqrt{}(\omega\omega c:c-c)=\omega$.

Corollarium 3.

Quantitas aquae remanentis in vase pro quauis altitudine t, seu $\int y\,dt$ inuenietur integrando riteque corrigendo $\int\sqrt{}(\omega\omega c:c-t)\,dt=2\omega c-2\omega\sqrt{}(cc-ct)$. Hinc quantitas totalis aquae ab initio fluxus $=2\omega c$, hoc est, $=$ cylindro aqueo cuius basis est ω et altitudo $2c$.

Corollarium 4.

Quod si igitur aquae effluxurae ex orificio ω substernatur receptaculum cylindricum capacitatis non minoris quam $2\omega c$, aqua effluens in eo receptaculo collecta aequalibus temporibus aequaliter ascendet. Atque ita altitudine receptaculi in gradus aequales diuisa, habebitur clepsydra.

Scholium 4.

§. 56. Dissimulandum non est, hoc genus clepsydrarum in praxi vix vllum habere posse vsum ob immanem altitudinem quae danda esset vasi hyperbolico vt effluxus durare posset per temporis spatium etiamsi valde mediocre; quod ex eo satis colligi potest, quia si vas altum esset 15 pedes, id est, si $c=15$ ped. contineret aquam $2\omega c=30\omega$, hoc est, columnam aqueam cuius altitudo 30 ped. super basi ω, cum autem ex orificio ω aqua egrediatur vniformi velocitate debita altitudini. 15 pedum, sitque tempus casus per hanc altitudinem non nisi vnius

vnius tantum minuti secundi horarii, manifestum vtique est intra vnum minutum secundum elabi ex vase cylindrum aqueum amplitudinis ω et longitudinis bis quindecim seu triginta pedum, adeoque tantillo tempore totum vas exhaustum iri. Vt nihil iam dicam de impossibilitate structurae vasis quod supponit supremam suam amplitudinem infinitam; cui inconuenienti quidem liceret mederi, prolongando vas satis prope ad asymtoton superiorem horizontalem vt acquirat amplitudinem multo maiorem quam est ea foraminis ω; quae dein amplitudo circumdari posset margine vsque ad asymtoton assurgente.

§. 57. Commodiori modo parari potest clepsydra, per aequabilem descensum aquei strati supremi in ipso vase, cuius adeo inuestiganda est figura ad id apta; vt elabente aqua per orificium ω, superficies aquae residuae in vase aequalibus temporibus aequaliter descendat, adeo vt diuiso axe vasis verticali in partes aequales, superficies dato temporis interuallo percurrat datum numerum partium in scala illa sumtarum. Duo autem sunt casus, quibus intentum obtineri potest, aut enim amplitudo luminis ω tam parua est, vt nullam habeat rationem sensibilem ad amplitudines in vase y, aut amplitudo illa ω sat magna est vt sit comparabilis cum qualibet y. Priorem casum vtpote faciliorem atque in praxi vtiliorem nunc tractabimus, de altero postea acturi.

§. 58. Patet vtique aequationem nostram $(yy-\omega\omega)zdt-\omega\omega ydz\int\frac{dt}{y}=yytdt$ reduci, in casu quo ω valde paruum est respectu y, ad hos duos terminos duntaxat $yyzdt=yytdt$, vnde $z=t$, hoc est, in quolibet vase habente foramen ω minimum, aquam ex illo emanare ea ve-

velocitate quae acquiritur a corpore graui cadente ex altitudine t quam aqua reſidua in vaſe habet; Cuius rei veritatem (a nobis ſcientifice inuentam) ſcriptores hydraulici ſuperiorum annorum non niſi per experimenta cognitam habebant: Ea vero ſemel ſuppoſita facile tunc fuit inuenire naturam vaſis conoidici, foramine ω tanquam eius vertice deorſum ſpectante, quod hunc praeſtet effectum, vt quouis momento ſumma ſuperficies y aquae reſiduae deſcendat vniformi vel aequabili celeritate. Cum enim velocitates fluidi in eadem quantitate eodemque tempore per duas diuerſas amplitudines transfluentis ſint in reciproca ratione amplitudinum, faciendum eſt $y . \omega :: \sqrt{z} . \frac{\omega}{y} \sqrt{z}$, eritque tunc $\frac{\omega}{y} \sqrt{z}$ deſignans celeritatem ſuperficiei y deſcendentis, quae celeritas cum debeat eſſe conſtans, ponatur $\frac{\omega}{y} \sqrt{z} = \sqrt{c}$, vnde erit $\frac{cyy}{\omega\omega} = z = t$. Sunt autem in conoidibus rectis amplitudines nihil aliud quam circuli quorum areae y ſunt vt quadrata radiorum ſeu applicatarum curuae genetricis, quae ſui reuolutione circa axem deſcribit conoides quaeſitum; Nominando igitur applicatam in curua genitrice $= s$, et radium orificii ω circularis $= b$, itemque aream circuli ad quadratum radii vt n ad 1, erit ſane $y = nss$, $yy = nns^4$, $\omega = nbb$, et $\omega\omega = nnb^4$; atque adeo pro aequatione $t = \frac{cyy}{\omega\omega}$, habebitur $t = \frac{cs^4}{b^4}$, ſeu $\frac{b^4 t}{c} = s^4$, quae oſtendit curuam genitricem conoidis quaeſiti eſſe parabolam biquadraticam, in cuius puncto infimo ſeu vertice deorſum ſpectante orificium ω venam aqueam emittens, inſculptum eſſe debet.

Corollarium.

Parameter parabolae inuentae est $b\sqrt[3]{\frac{b}{c}}$, vbi c est arbitraria, adeoque tam parua assumi potest vt $b\sqrt[3]{\frac{b}{c}}$ fieri possit quantumuis magna, eum in finem vt amplitudines conoidis fiant incomparabiliter maiores quam amplitudo foraminis ω. Sic ergo pro lubitu tanta capacitas conciliari potest vasi, foramenque ω tam paruae amplitudinis fieri, vt effluxus aquae sat longo tempore durare queat, antequam vas penitus exhauriatur, ad quod inprimis attenditur in clepsydrarum structura.

§. 59. Quod nunc spectat ad alterum casum, vbi foramen ω non insensibilis adeo amplitudinis supponitur, vt termini in aequatione vniuersali $(yy-\omega\omega)zdt-\omega\omega ydz\int\frac{dt}{y}=yytdt$, in quibus ω reperitur, euanescant, oportet sane vt maneant omnes termini, atque tunc ponatur $\frac{cyy}{\omega\omega}$ pro z et $\frac{2cydy}{\omega\omega}$ pro dz, in eum scilicet finem, vt superficies suprema aquae in vase descendat celeritate vniformi, quae celeritas debeatur altitudini arbitrariae c, quo facto resultabit aequatio resoluenda quae haec est, nempe $(yy-\omega\omega)cdt-2c\omega\omega dy\int\frac{dt}{y}=\omega\omega tdt$. Sunt quaedam indicia ex quibus statim suspicabar, dari quandum curuam algebraicam quae huic aequationi in abstracto sumtae respondeat; imo post breuem indagationem ista protinus se mihi obtulit $yy=\frac{\omega\omega(t+3c)}{c}$, et pro curua genitrice haec $s^4=\frac{b^4(t+3c)}{c}$, quae rursus est parabola biquadratica, sed cuius abscissae t initium sumunt non ab ipso eius vertice verum intra eundem in axe in distantia $=3c$. Interim inventa aequatio $yy=\frac{\omega\omega(t+3c)}{c}$, quae quidem in abstracto

sa-

satisfacit, ideo satisfacere non potest in hac materia, quia tacitam conditionem non adimplet, quae conditio in hoc consistit, vt existente $t=0$ tota aequatio in nihilum abeat ac proinde etiam $\int\frac{dt}{y}$ debeat euanescere, id quod non fit per aequationem $yy=\frac{\omega\omega(t+c)}{c}$; Nil quippe noui est, vt quaedam propositio quae in thesi est vera non semper quadret in hypothesi, cum nempe aliquid adimplendum accedit, ad quod, rem sumendo in genere, attendi necessario non requiritur. Vera autem curua genitrix pro quaesita figura vasis conoidici reperietur, si qua arte vniuersaliter resolui potest aequatio $(yy-\omega\omega)\,cdt-2c\omega\omega dy\int\frac{dt}{y}=\omega\omega tdt$, ita vt y per t vel vice versa t per y determinetur, siue id fiat in terminis finitis algebraicis vel exponentialibus, siue demum per quadraturas; hoc autem negotium, cum huius loci non sit, aliis quibus vacat perficiendum relinquo.

Scholium 5.

§. 60. Opportuna iam datur occasio examinandi catarrhactam Newtonianam, quam describit Auctor in Editione secunda Princip. Math. Phil. Nat. Prop. 36. Lib. II. pag. 303. et seqq. Vbi statim animaduertendum, formam quam Newtonus tribuit suae catarrhactae ABNFEM (vid. Fig. Newt. in loco allegato) prorsus eandem esse quam supra inueni (§. 55.) pro figura clepsydrae, quae aquam per orificium ω emittit celeritate vniformi. Notemus iam, quod ipse Newtonus agnoscit, in tali catarrhacta quodlibet stratum MN, ea cum velocitate descendere, quam acquireret si libere caderet a puncto dato I per altitudinem IO nulla alia vi quam sua naturali grauitate animatum, vnde sequitur strata quidem inter se contigua manere descendendo sed ita tamen vt in se mutuo nullam vim exerceant nec premendo nec resistendo aeque ac si singula pondere suo solitarie descenderent. Compressio itaque illa de qua supra egi in suo peculari capite nulla erit per totam catarrhactam Newtonianam, neque proin de vi pressionis, quam vocari π, vel minimum exercebitur in latera AME, BNF, id quod etiam patebit ex ipsa mea formula quam pro π dedi in §. 12. Si enim illa ad casum praesentem applicetur, comperietur vt dixi valorem ipsius π esse nullum per totam catarrhactae altitudinem; Qui dergo hinc concludi debet? Haud dubie hoc, quod si latera catarrhactae AME, BNF essent rigida instar infundibuli, cum quo Newtonus comparat illa, atque si quocunque in loco facto foramine inseratur fistula ad situm verticalem erecta, aqua nulla ex transfluente catarrhacta in fistulam sit ingressura et ascensura sicuti fieret si premerentur latera ab aqua transfluente. Interim premuntur latera AME, BNF introrsum versus axem HG a pondere aquarum stagnantium in AMEC, BNFD per ordinariam legem hydrostaticam, quae docet pressiones in singulis locis M, N exercitas esse proportionales altitudinibus HO: Cum autem latera catarrhactae non sint rigida, et pressiones istae aquarum stagnantium nullas habeant pressiones sibi oppositas ab aquis transfluentibus, oportet sane vt aquae quae stagnare ponuntur et continuo premunt sortiantur suum effectum, hoc est; vt se ingerant in catarrhactam commisceantque sese cum ipsis aquis fluentibus; Ergo figura catarrhactae destruetur, turbabitur, aliterque vt nos explicauimus aquae descendunt; Ergo explicatio Newtoniana, vtpote legibus hydrostaticis adversa, subsistere non potest.

SO-

SOLVTIO PROBLEMATIS PHYSIOLOGICI

AVT.

Iosia Weitbrecht.

Problema Physiologicum.

Dato numero musculorum, qui membrum quodpiam mouent, inuenire numerum motuum, qui a musculis illis varie inter se combinatis produci possunt.

Antequam ad solutionem huius problematis accedam, non incongruum fore duxi, si aliqua praemonerem, quae ad explicandam rationem methodi, qua ad illam peruenitur, facere possent.

I. Per motum alicuius membri intelligo translationem eius ex vno situ in alium, quatenus illa ab actione musculorum dependet, qui ad membrum illud affixi sunt. In propatulo est autem, non modo quemuis musculum seorsum agentem singularem motum ac situm in membro producere, qui ab aliis motibus ratione directionis vel celeritatis discrepat, sed alios subinde motus oriri, si duo, tres, quatuor, pluresue musculi simul actionem suam, reliquis quiescentibus, exerceant. Multiplex igitur hic motus a multiplici musculorum actione determinatur, quae actiones ex varia potentiarum agentium combinatione resultant. Vt igitur problemati satisfiat, scire oportet, quo-

 tuplici

tuplici modo certus numerus musculorum inter se combinari possit; id quod consequenter a legibus artis combinatoriae, adiunctis quibusdam conditionibus ex natura actionis musculorum desumtis, dependet. His probe consideratis, patet: 1. vnamquam combinationem designare et producere motum singularem et sibi proprium, neque quicquam interesse, siue musculi agentes antagonistae sint siue conspirantes. Quamuis enim antagonistae, si aequali virtute agant, quietem membri potius, quam motum efficiant, qui status a physiologis motus tonicus appellari solet: nihilominus tamen per talem repugnantiam membrum in determinato aliquo situ conseruatur, in quem non sine motu peruenit, et qui mox mutatur, vbi primum alterutrius antagonistae virtus aut remittit, aut plane cessat. 2. Possunt etiam inter se combinari duo musculi socii, non solum in genere in eandem actionem, sed et praecise in eandem directionem conspirantes; inde enim vis vnita fortior oritur, quae motum, quidem eundem, sed celeriorem, membri producere potest. 3. Haec nostra combinatio ab aliis speciebus in eo differt, quod compositio e. gr. trium musculorum vnicum tantummodo effectum edat, quamuis ratione situs multoties inter se mutari possint. E. gr. sint tres musculi, *a*, *b*, et *c*, quamuis, si omnes simul agant, combinatio characterum *abc*, ratione situs, sexies inmutari queat, vt: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*: non tamen propterea sex motus numerare licet; sed vnicus tantum motus resultat; quia in quocunque horum characterum situ, semper tamen iidem soli musculi *abc* considerantur et combinantur.

II.

II. Musculus non eodem semper virtutis gradu agit, sed nunc magis nunc minus contrahitur, vnde necessario diuersus subinde membri situs oritur; e. gr. flexores digitorum vel ita agunt, vt digiti ad metacarpum inclinentur ad angulum obtusum, vel ad angulum rectum, vel, vt penitus circumflectantur, et palmam claudant. Talem certum virtutis gradum vocabo intensitatem musculi; quae, quemadmodum ipsa infinities variari potest: ita etiam longe aliae conbinationes, et motiones oriri debent, si musculi intensitate simplici, aliae, si duplici, aliae denique, si triplici, pluribusue, agere supponatur; vnde diffusissima tam problematis quam solutionis extensio apparet.

III. Ne igitur nimium obruamur: aliquos casus speciales distinctius euoluemus; et primo quidem supponemus, quemuis musculum agere intensitate vnica eaque constante; vnde problema facillimum euadet. Ne etiam terminorum valores confundamus: intelligemus per *numerum musculorum* omnem illam congeriem musculorum, qui membro alicui mouendo destinati sunt, siue illi agant, siue quiescant. Musculos illos, quos simul agere supponimus reliquis quiescentibus et qui in combinationem ingrediuntur, *potentias* vocabo. *Numerus combinationum* denique indicabit, quoties istae potentiae inter se combinentur, et quot motus possibiles inde resultent. Ex gr. si ad membrum aliquod quinque musculi pertineant, atque ex his terni combinentur: erunt inde combinationes seu motus decem. In hoc casu numerus quinarius est numerus musculorum; ternarius, numerus potentiarum; et denarius, numerus combinationum seu motuum. Generaneraliter autem ponemus numerum musculorum $= n$; potentiarum $= p$. ex quorum compositione numerus combinationum emerget.

CASVS I.

Quando musculi agunt intensitate vnica.

I. Sit $p=1$. Sit 1. musculus vnicus, erit quoque motus vnicus ab illo producendus. 2. Sint musculi duo, a, b: Hi musculi singuli seorsim agentes suum motum producunt: erunt ergo motus duo. 3. Sint musculi tres, a, b, c: erunt motus tres. Et in genere, quotquot musculi membro alicui destinati sunt, singuli, absque vlla combinatione, motum suum specialem efficient, et semper erunt numeri motum aequales numero musculorum $= n$.

II. Sit $p=2$. Sint 1. musculi duo: patet, non solum vnumquemque musculum seorsim, sed et ambos iunctim agere posse. Dantur igitur combinationes duae, ab, et ba. Quia vero situs nihil infert, et eadem combinatio bis ponitur: ergo facta diuisione per binarium numerus combinationum et motuum erit $= 1$.

2. sint musculi tres a, b, c: quiuis musculus cum duobus reliquis combinatur, vt: ab, ac, ba, bc, ca, cb. Ergo numerus musculorum ductus in numerum eundem vnitate minorem, dabit numerum combinationum possibilium. Quia vero combinatio quaeuis bis occurrit; valebit tantum pars dimidia; et verus numerus motuum erit $= \frac{3 \cdot 2}{2}$.

3. Sint musculi quatuor a, b, c, d: quiuis musculus combinari poterit cum tribus reliquis, vt ab, ac, ad,

ba,

ba, *bc*, *bd*, *ca*, *cb*, *cd*, *da*, *db*, *dc*; et numerus musculorum ductus in numerum eundem vnitate minorem dabit numerum combinationum possibilium. Quia vero quaeuis combinatio bis occurrit, facta diuisione per binarium, erit verus numerus motuum $= \frac{4 \cdot 3}{2}$.

4. Idem ratiocinium valet, si musculi sint quinque aut sex, vnde erunt numeri motuum $= \frac{5 \cdot 4}{2}$, et $\frac{6 \cdot 5}{2}$. Et in genere quotcunque sint musculi, si $p = 2$, erit numerus combinationum et motuum $= \frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

III. Sit $p = 3$. Sint 1. musculi tres, erit motus vnicus, quia tot sunt potentiae, quot musculi.

2. Sint musculi quatuor *a*, *b*, *c*, *d*. Patet 1) cuiuis combinationi ex potentiis duabus ortae, addi posse potentiam tertiam. 2) si iungantur musculi duo, *ab*, vel *cd*, vel *bc*; semper restare duos, vel *c*, *d*, vel *a*, *b*, vel *a*, *d*. Ergo numerus combinationum antecedens (II. 3) ductus in numerum musculorum, binario minorem dabit numerum combinationum possibilium: *abc*, *abd*, *acb*, *acd*, *adb*, *abc*, *bca*, *bcd*, *bda*, *bdc*, *cda*, *cdb*. Quia autem quaeuis combinatio ter occurrit, ergo facta diuisione per ternarium erit verus numerus motuum $= (\frac{4 \cdot 3}{2})(\frac{4-2}{3})$.

3. Sint musculi quinque *a*, *b*, *c*, *d*, *e*: simili modo 1) cuiuis combinationi ex potentiis duabus ortae addi potest potentia tertia. 2) tales musculi addendi supersunt tres. Ergo numerus combinationum antecedens (II. 4) ductus in numerum musculorum binario minorem, dabit numerum combinationum possibilium. Quia autem denuo quaeuis combinatio ter occurrit; ergo facta diuisione simili erit verus numerus motuum $= (\frac{5 \cdot 4}{2})(\frac{5-2}{3})$.

4. Idem valet ratiocinium, si sint musculi sex aut septem. Et in genere, quotquot sint musculi, si $p = 3$, erit numerus combinationum et motuum $= (\frac{n.(n-1)}{2})(\frac{n-2}{3})$.

IV. Sit $p=4$. Sint 1. musculi quatuor, erit motus vnicus, quia tot sunt potentiae, quot sunt musculi.
Sint 2. musculi quinque: similiter patet, 1) cuiuis combinationi ex tribus potentiis ortae addi posse musculos binos, qui ex quinque residui sunt, et 2) singulas combinationes quater occurrere. Ergo numerus combinationum antecedens, ductus in numerum ternario minorem, dabit, facta diuisione per quaternarium, verum numerum motuum $= (\frac{5.4}{2})(\frac{5-2}{3})(\frac{5-3}{4})$.
3. Ex eodem ratiocinio, si sint musculi sex aut septem, erit numerus combinationum $= (\frac{6.5}{2})(\frac{6-2}{3})(\frac{6-3}{4})$, et $(\frac{7.6}{2})(\frac{7-2}{3})(\frac{7-3}{4})$. Et in genere, quotquot sint musculi, si $p=4$, erit numerus combinationum et motuum $= n(\frac{n-1}{2})(\frac{n-2}{3})(\frac{n-3}{4})$.

V. Qui calculus si vlterius euoluetur, inuenietur denique pro omnibus combinationibus, positis quibusuis potentiarum numeris, sequens generalis regula:

Numeri potentiarum: I. II. III.
Numeri combinationum: n, $n(\frac{n-1}{2})$, $n(\frac{n-1}{2})(\frac{n-2}{3})$,

IV. V.

$n(\frac{n-1}{2})(\frac{n-2}{3})(\frac{n-3}{4})$, $n(\frac{n-1}{2})(\frac{n-2}{3})(\frac{n-3}{4})(\frac{n-4}{5})$. . . .

Vltim. p.

. . . . $n(\frac{n-1}{2})(\frac{n-2}{3})(\frac{n-3}{4})(\frac{n-4}{5})(\frac{n-5}{6})$ . . $(\frac{n-(p-1)}{p})$.

Sub-

Subiungamus aliquot combinationum ſpecimina:

I. Sit muſculus vnus $= a$, erit quoque motus. Vnicus $= a$.

II. Sint muſculi duo $= a; b$. erunt motus tres $a, b = 2$, et $ab = 1$, ſumma $= 3$.

III. Sint muſcnli tres, a, b, c; erunt motus ſeptem, vt:

a	ab	abc	
b	ac	1	
c	bc		
3	3		ſumma = 7.

IV. Sint muſculi quatuor a, b, c, d: erunt motus quindecim, vt:

a	ab	bd	abc	abcd	
b	ac	cd	abd	1	
c	ad		acd		
d	bc		bcd		
4	6		4		ſumma = 15.

V. Sint muſculi quinque a, b, c, d, e: erit ſumma motuum $= 31$. vt:

a	ab	bd	abc	ade	abcd	abcde	
b	ac	be	abd	bcd	abce	1	
c	ad	cd	abe	bce	abde		
d	ae	ce	acd	bde	acde		
e	bc	de	ace	cde	bcde		
5	10		10		5.		ſumma = 31.

VI. Sint muſculi ſex, a, b, c, d, e, f: erit ſumma combinationum et motuum $= 63$, vt:

a	ab	bf	abc	ade	bdf	abcd	acef	abcde	abcdef	
b	ac	cd	abd	adf	bef	abce	adef	abcdf	1	
c	ad	ce	abe	aef	cde	abcf	bcde	abcef		
d	ae	cf	abf	bcd	cdf	abde	bcdf	abdef		
e	af	de	acd	bce	cef	abdf	bcef	acdef		
f	bc	df	ace	bcf	def	abef	bdef	bcdef		
6	bd	ef	acf	bde		acde	cdef	6		
	be			20		acdf				
	15					15				ſumma = 63

VII. Sint musculi septem, *a, b, c, d, e, f, g*: erit summa motuum = 127, vt:

a	*ab ce*	*abc aef bfg*	*abcd acdg bceg*	*abcde acdfg*	*abcdef*
b	*ac cf*	*abd aeg cde*	*abce acef bcfg*	*abcdf acefg*	*abcdeg*
c	*ad cg*	*abe afg cdf*	*abcf aceg bdef*	*abcdg adefg*	*abcdfg*
d	*ae de*	*abf bcd cdg*	*abcg acfg bdeg*	*abcef bcdef*	*abcefg*
e	*af df*	*abg bce cef*	*abde adef bdfg*	*abceg bcdeg*	*abdefg*
f	*ag dg*	*acd bcf ceg*	*abdf adeg befg*	*abcfg bcdfg*	*acdefg*
g	*bc ef*	*ace bcg cfg*	*abdg adfg cdef*	*abdef bcefg*	*bcdefg*
7	*bd eg*	*acf bde def*	*abef aefg cdeg*	*abdeg bdefg*	7
	be fg	*acg bdf deg*	*abeg bcde cdfg*	*abdfg cdefg*	
	bf	*ade bdg dfg*	*abfg bcdf cefg*	*abefg*	*abcdefg*
	bg	*adf bef efg*	*acde bcdg defg*	*acdef*	1
	cd	*adg beg*	*acdf bcef*	*acdeg*	
	21	35	35	21	summa = 127

Ex his Exemplis sequens tabula construi potest, pro inveniendis omnibus motibus.

Series numerorum, qui indicant omnes combinationes & motus possibiles, dato numero musculorum & potentiarum.

Sit Numerus musculorum.

1	1																			
2	2	1																		
3	3	3	1																	
4	4	6	4	1																
5	5	10	10	5	1															
6	6	15	20	15	6	1														
7	7	21	35	35	21	7	1													
8	8	28	56	70	56	28	8	1												
9	9	36	84	126	126	84	36	9	1											
10	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1										
11	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1									
12	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1								
13	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1							
14	14	01	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1						
15	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1					
16	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1				
17	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188	2380	680	136	17	1			
18	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564	8568	3060	816	153	18	1		
10	10	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876	960	171	10	1	
20	20	190	1130	4845	15504	38760	77520	120970	167960	184756	167960	120970	77520	38760	15504	4845	1130	100	20	1
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.

Nr. potentiarum

Quae

Quae in hanc formam mutata dat Summam omnium motuum

Numerus Musculorum.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Nr. pot.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	1
	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	139	153	171	190	2
		1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680	816	969	1130	3
			1	5	15	35	70	120	210	330	495	715	1001	1365	1820	2380	3060	3876	4845	4
				1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188	8568	11628	15504	5
					1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	27132	38760	6
						1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388	77520	7
							1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	120970	8
								1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960	9
									1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756	10
										1	12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960	11
											1	13	91	455	1820	6188	18564	50388	120970	12
												1	14	105	560	2380	8568	27132	77520	13
													1	15	120	680	3060	11628	38760	14
														1	16	136	816	3876	15504	15
															1	17	153	969	4845	16
																1	18	171	1130	17
																	1	19	190	18
																		1	20	19
																			1	20
1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	3191	16383	32767	65535	131071	262143	524287	1048575	

Summa Motuum omnium.

Ex hisce tabulis sequens emergit series, quae summam omnium motuum, dato numero musculorum ab 1 ad 20. continet, et quae simul solutionem problematis casus 1mi suppeditat:

Sit numerus musculorum :	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Erit numerus motuum =	1.	3.	7.	15.	31.	63.
Est autem binarius, eleuatus ad potestatem, cuius exponens est $n =$ . . .	2.	4.	8.	16.	32.	64.

7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
127.	255.	511.	1023.	2407.	4095.	8191.	16383.
128.	256.	512.	1024.	2048.	4096.	8192.	16384.

15.	16.	17.	18.	19.	20.
32767.	65535.	131071.	262143.	524287.	1048575.
32768.	65536.	131072.	262144.	524288.	1048576.

So-

Solutio casus primi.

Summa motuum omnium possibilium cuiusuis membri, ad quod musculi quotcunque pertinent, si singuli musculi agunt intensitate vnica, erit aequalis numero binario eleuato ad potestatem, cuius exponens est numerus musculorum; demta vnitate $= 2^n - 1$. quae summa $2^n - 1$ aequalis est summae seriei supra inuentae pro singulis numeris combinationum $= n + n . (\frac{n-1}{2}) +$ &c.

CASVS II.

Quando musculi agunt intensitatibus duabus.

Hic nouis limitationibus opus est. Indicabimus diuersitatem intensitatum per literas, a, b, c, &c. et α, β, γ. Patet 1. posita eadem combinationis methodo, tot motus oriri, si e. gr. tres musculi combinantur, quot supra inuenimus, dum musculos sex, sed intensitate vnica agentes composuimus, sed 2. exterminari debere omnes illas combinationes, in quas eiusdem musculi intensitas vtraque ingreditur, vt: $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $a\alpha b$, $b\beta\gamma$ &c. quia idem musculus eodem tempore non nisi intensitate vnica agere potest.

Sit ergo numerus potentiarum $= 1$. Sit musculus vnicus: ille bis agere potest, vnde emergunt motus, a, α. Sint musculi duo habebimus motus quatuor, a, α, b, β. Addatur musculus tertius, erunt motus sex, a, α, b, β, c, γ. Quotquot igitur sint musculi, si $p = 1$, erunt quoque tot motus bis positi. Summa ergo motuum erit $= 2n$.

Sit $p = 2$. Sint musculi duo: quaeuis intensitas cum reliquis bis componi potest, vt *ab*, *αb*, *ba*, *bα*, *&c.* Ergo nu-

numerus motuum antecedens ductus in duplum numerum musculorum vnitate minutum dabit numerum combinationum. Quia vero non solum quaeuis combinatio bis occurrit, sed et illae, in quibus $a\alpha$, $b\beta$, occurrit, reiici debent, erit verus numerus motuum $= \frac{4.3}{2} - 2$. Sint musculi tres: erit numerus motuum $= \frac{6.5}{2} - 3$ sint musculi quatuor: erit numerus motuum $= \frac{8.7}{2} - 4$. Et in genere; sint musculi quotcunque: duplus numerus musculorum ductus in eundem numerum duplum vnitate minutum & per binarium diuisus, demto numero musculorum, dabit verum numerum motuum $= 2n\left(\frac{2n-1}{2}\right) - n = 4n\left(\frac{n-1}{2}\right)$.

Sit $p = 3$. similiter, singulae intensitates binae multiplicari debent cum reliquis, et combinationes, in quas $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, ingreditur, reiici. Ergo, quotquot sint musculi; summa motuum erit $= 2n\left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-2}{3}\right) - n(2n-2)$.

Vnde haec emergit series, quae motuum summam continet.

Si $p = 1$ sunt motus $= \frac{2n}{1}$

Si $p = 2$ — — $= 4n\left(\frac{n-1}{2}\right)$

$p = 3$ — — $= 8n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)$

$p = 4$ — — $= 16n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)$

$p = 5$ — — $= 32n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{5}\right)$

$p = 6$ — — $= 64n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{5}\right)\left(\frac{n-5}{6}\right)$

&c. &c.

Quae series ad determinatum numerum musculorum adplicita dat sequentes summas motuum.

I.

I. $\dfrac{aa}{1+1=2}$ II. $\dfrac{aab\beta}{4+4=8}$ III. $\dfrac{aab\beta c\gamma}{6+12+8=26}$

IV. $\dfrac{aab\beta c\gamma d\delta}{8+24+32+16=80}$ V. $\dfrac{aab\beta c\gamma d\delta e\varepsilon}{10+40+80+80+32=242.}$

Numerus musculorum.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
Numerus motuum =	2.	8.	26.	80.	242.	728	2186.

VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.
6560.	19682.	59048.	177146.	531440.	1594322.

XIV.	XV.	XVI.	XVII.
4782968.	14348906.	43046720.	129140162.

XVIII.	XIX.	XX.
387420488.	1162261466.	3486784400.

Solutio casus secundi.

Si singuli musculi agunt intensitatibus duabus: Summa motuum omnium possibilium, quos membrum, ad quod illi musculi pertinent, exercere potest, est aequalis numero ternario eleuato ad potestatem, cuius exponens est numerus musculorum, demta vnitate $= 3^n - 1$. Quae summa aequalis est summae seriei supra positae $= 2n$, $4n\left(\frac{n-1}{2}\right)$, $8n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)$, $16n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)$ &c.

CA-

CASVS III.

Quando musculi agunt intensitatibus tribus.

Erit, datis musculis, pro potentiis simul agentibus haec series:

I. $\dfrac{a\alpha a}{1+1+1=3}$ II. $\dfrac{a\alpha a b \beta \text{б}}{6+9=15}$ III. $\dfrac{a\alpha a b \beta \text{б} c \gamma r}{9+27+27=63}$

IV. $\dfrac{a\alpha a b \beta \text{б} c \gamma r d \delta \lambda}{12+54+108+81=255.}$ Vnde [illegible] [illegible] motuum emergit.

Numerus musculorum	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Numerus motuum =	3.	15.	63.	255.	1023.	4095.

VII.	VIII.	IX.	X.	XI.
16383.	65535.	262143.	1048575.	4194303.

XII.	XIII.	XIV.	XV.
16777215.	67108863.	268435455.	1073741823.

XVI.	XVII.	XVIII.
4294967295.	17179869183.	68719476735.

XIX.	XX.
274877906943.	1099511627775.

Solutio.

Si musculi agunt intensitatibus tribus: Summa motuum omnium possibilium, quos exercere membrum potest, aequalis est numero quaternario eleuato ad potestatem cuius exponens est numerus musculorum, demta vnitate $= 4^n - 1$.

Ex consideratione horum trium casuum eruitur

Solutio generalis.

Summa motuum omnium, quos exercere valet membrum, ope musculorum quotcunque ad illud pertinentium, et agentium intensitatibus quotcunque (si numerus intensitatum est $= m$), aequalis est $(m + 1)^n - 1$.

Corollarium 1.

Si membrum trahatur a musculis pluribus, et vnus illorum vel plures (non tamen omnes) agant intensitatibus duabus, reliqui vnica: tunc nouae quaedam determinationes emergunt. Sint enim musculi e. gr. quatuor, a, b, c, d; et vnus illorum agat intensitate duplici, erunt potentiae a, α, b, c, d, quinque. Agat primo vnus ille musculus, erunt motus duo a, α; accedat potentia secunda b: in propatulo est, hos binos motus combinari posse singulos cum potentia b; vnde oriuntur motus ab, αb; quibus superadditur motus solitarius b. Accedat potentia tertia c; denuo omnes motus priores repetuntur multiplicando per c; vnde erunt motus ac, αc, abc, αbc, et denuo nouus motus c. Similiter omnes antecedanei motus repetuntur multiplicando per d, et augentur motu nouo d. Eadem ratione agant musculi duo intensitate duplici, erunt potentiae a, α, b, β, c, d. Agant primo bini illi musculi soli et iunctim, erunt motus octo a, α; b, β, ab, $a\beta$, αb, $\alpha\beta$. Accedat potentia c, haec combinata cum istis efficit nouos motus octo ac, αc, bc, βc. &c. et motum solitarium um *c*. Accedat potentia quarta *d*; denuo per nouam combinationem omnes motus antecedanei duplicantur, et motu nouo *d* augentur. Inde nascitur haec regula: Dato numero musculorum, summa motuum aequalis erit summae duplae motuum, quae competit numero illi dato musculorum vnitate minuto, vnitate auctae. Ex. gr. si competant membro alicui musculi quatuor, numerus motuum ex illorum combinatione resultans, aequalis erit summae duplae motuum a tribus musculis productorum, vnitate auctae. Vbi intelligendum est, terminum primum, qui duplicari debet, esse illum, in quo soli motus musculorum intensitate duplici agentium occurrunt; et determinari per regulam solutionis generalis. Sit igitur terminus primus $((m+1)^n-1)=(3^n-1)=N$. emergit haec series: N, $2N+1$, $(4N+2)+1$, $(8N+4+2)+1$, $(16N+4+4+2)+1$ &c. Ex. gr. Si vnus musculus agat duabus intensitatibus, reliqui simplici, emergent dato numero musculorum motus sequentes.

I. $\dfrac{aa}{1+1=2.}$ II. $\dfrac{aab}{3+2=5.}$ III. $\dfrac{aabc}{4+5+2=11.}$

IV. $\dfrac{aabcd}{5+9+7+2=23.}$ V. $\dfrac{aabcde}{6+14+16+9+2=47.}$

VI. $\dfrac{aabcdef}{7+20+30+25+11+2=95.}$

Numerus musculorum	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
Numerus motuum =	2.	5.	11.	23.	47.	95.	191.

VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.
383.	767.	1535.	3071.	7134.	14287.	28575.

XV.	XVI.	XVII.	XVIII.	XIX.	XX.
57151.	114303.	228607.	457215.	914431.	1828863.

Si musculi duo: erit I. $\dfrac{aa}{1+1=2.}$ II. $\dfrac{aab\beta}{4+4=8.}$ III. $\dfrac{aab\beta c}{5+8+4=17.}$

IV. $\dfrac{aab\beta cd}{6+13+12+4=35.}$ V. $\dfrac{aab\beta cde}{7+19+25+16+4=71.}$

VI. $\dfrac{aab\beta cdef}{8+26+44+41+20+4=143.}$

Numerus musculorum	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
Numerus motuum =	2.	8.	17.	35.	71.	143.	287.

VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.
575.	1151.	2303.	4607.	9215.	18431.	36863.

XV.	XVI.	XVII.	XVIII.	XIX.	XX.
73727.	147455.	294911.	589823.	1179647.	2359295.

Si musculi tres: erit I. $\dfrac{aa}{1+1=2.}$ II. $\dfrac{aab\beta}{4+4=8.}$ III. $\dfrac{aab\beta c\gamma}{6+12+8=26.}$

IV. $\dfrac{aab\beta c\gamma d}{7+18+20+8=53.}$ V. $\dfrac{aab\beta c\gamma de}{8+25+38+28+8=107.}$

VI. $\dfrac{aab\beta c\gamma def}{9+33+63+66+36+8=215.}$

Vnde summae pro reliquis numeris musculorum facili opera erui possunt.

Corol-

Corollarium 2.

Obstupescis, Lector, ad tam ingentes numeros. Neque forte sine ratione. Sed duae imprimis cautelae exinde redundant. 1. Desines in posterum mirari, vnde eueniat, vt e. gr. lingua, caput, femur, et alia membra, ad quae musculi non pauci pertinent, tot mille motus exercere possint, vnde tam diuersae loquelae, voces, modulationes, incessus, saltationes, conuulsiones, (vt Chorea S. V.) emergant. Si enim memineris, ad solam vocem et loquelam non modo musculos linguae, sed et labiorum, ossis hyoidis, vuulae, laryngis, pharingis, concurrere: possibilitatem multorum millionum motuum exinde clare perspicies; si modo omnes vnica intensitate agere supponas. Quis autem cuiuis musculo intensitates plures non concedat? 2. Discis, quantum oneris sibi imponeret, qui adgrederetur, *distincte explicare omnes motus possibiles in corpore humano.* Hoc enim ab intellectu humano finito numquam exspectabis. Quam inique igitur agunt, qui talia a physiologo postulant. Decem musculi duabus intensitatibus agentes 1048575 motus producunt: quis autem vel mille, ne dicam milliones sibi distincte animo repraesentet? Et isti tamen motus omnes possibiles sunt. Aetatem suam viginti homines consumerent, qui adgrederetur, singulos motus possibiles, a viginti musculis, duabus intensitatibus agentibus producibiles = 3486784400, in chartam consignare. Ad scribendos autem motus 1099511627775. quos totidem musculi intensitatibus tribus animati producunt, multa millia seculorum non sufficerent.

DE FILICASTRO,
NOVO PLANTARVM GENERE, ALIISQVE MINVS NOTIS RARIORIBVS FILICVM SPECIEBVS.

A. I. Amman.

Tab. XVIII. XIX XX. XXI. XXII. et XXIII.

PLurimae dantur late sic dictarum Filicum species, quae semina gerunt vel in foliis, vel in costis siue pediculis peculiaribus, a reliquis sterilibus eiusdem plantae vt plurimum omnino diuersis. Has omnes fere rei herbariae Scriptores methodici aut ad Osmundae siue Lunariae genus retulerunt, aut ad ea Filicum genera, cum quibus foliorum sterilium praesertim structura maxime conueniunt, nulla habita ratione, num costae vel pediculi seminiferi ex ipsa radice proueniant, nec ne? Quare clarioris distinctionis gratia hasce tam numerosas, tamque diuersas inter se Species a reliquis separare, et peculiare exinde genus constituere nec superuacaneum forte, nec inutile erit in dignoscendis, sic dictis plantis Capillaribus.

Plantae igitur Capillares in genere diuiduntur in eas, quarum folia omnia aequalia et fructifera sunt, et illas, quae folia obtinent duplicis generis et diuersae structurae, alia nempe sterilia, alia fructifera. Quae duplicis generis foliis praeditae sunt, vel semina habent in pediculis foliosis ex sterilium foliorum costis ortum ducentibus; vel in foliis siue costis peculiaribus ex ipsa radice egredientibus, a sterilibus diuersis. Priores omnes ad Osmundam referri possunt:

possunt. Ex posterioribus vero diuersum, et ab Osmunda distinctum genus ob modo allatas rationes constituam, sub nomine FILICASTRI.

FILICASTRI igitur character esto: habere semina in costis peculiaribus, ex ipsa radice surgentibus, disposita; OSMVNDAE vero, Semina gerere in pediculis aut surculis peculiaribus ex sterilium foliorum costis egredientibus. Quibus notis hoc ab illo, ambo autem a reliquis omnibus plantarum Capillarium generibus facillime distinguuntur.

FILICASTRI nomen ex Gesneri tractatu de Lunariis sumptum est, qui olim Osmundae vulgari illud imposuit, quod vero nunc huic generi proprium facimus.

Species omnes huius Filicum generis, de quibus aliquid certi affirmare audeo, recensere, rariorum et nouarum descriptiones iconesque exhibere animus est; eas autem quum foliorum praesertim sterilium structura admodum varient, diuidimus in FILICASTRA, quae praedita sunt:

1. Foliis simplicibus minime laciniatis.
2. Foliis, in lacinias tantum ad mediam vsque costam non pertingentes, diuisis.
3. Foliis in varias lacinias diuisis.
4. Foliis in pinnas tantum diuisis.
   Integras, vel
   Laciniatas.
5. Foliis ramosis in plures pinnas simplices diuisis.
6. Foliis ramosis in pinnulas subdiuisis.

Sectionis primae, eorum scilicet quae folia obtinent minime laciniata simplicia, sequentia mihi nota sunt.

1. FILICASTRVM Americanum, folio ſimplici villoſo rufeſcenti, maius. Lingua ceruina villoſa maior et rufeſcens Plumierii in Tractatu de Filicibus Americanis pag. 110. Tab. 126.

2. FILICATSTRVM Americanum, folio ſimplici, villoſo, minus. Lingua Cervina villoſa, minor Plum. de Filic. Amer. pag. 110. Tab. 127.

3. FILICASTRVM Americanum, folio ſimplici, longiori et anguſtiori, coſtis villoſis. Lingua Cervina anguſtifolia, coſtis et pediculis villoſis Plum. de Filic. Amer. pag. 113. Tab. 129.

4. FILICASTRVM Americanum folio ſimplici, anguſtiori, villoſo et muſcoſo. Lingua Ceruina villis et ſquamulis aureis muſcoſa Plum. de Filic. Amer. pag. 120. Tab. 139.

5. FILICASTRVM Americanum, folio ſimplici, rigido et glabro. Lingua Cervina rigida et glabra Plum. de Filic. Amer. pag. 118. Tab. 135.

6. FILICASTRVM Indiae Orientalis, Ari folio. Aſplenium Luzon. Ari folio Peciuer. Gaz. Nat. et Art. Tab. 50. F. 12. Phyllitis Anglicana Luzonis. Ray Syllab. Stirp. Inſulae Luzon. pag. 2. n°. 18.

FILICASTRI Secundae Sectionis, foliis nempe in lacinias tantum ad mediam vsque coſtam non pertingentes diviſis, ſequentes ſunt Species:

7. FILICASTRVM Polypodii folio breuiore et anguſtiore. Polypodium anguſtifolium folio vario Inſt. r. h. pag.

pag. 540. Spicant Tragi et Germanorum Flor. Ienens. pag. 279. Lonchitis altera folio Polypodii I. B. 3. 744. Haec planta quamuis a celeberrimo Tournefortio propter foliorum similitudinem ad Polypodium relata sit, rectius tamen ad hoc FILICASTRI genus pertinet, quoniam duplicis generis foliis, aliis sterilibus, fructiferis aliis, ex ipsa radice egredientibus, a sterilibus diuersis, praedita est. Male quoque eandem hancce plantulam pro Struthiopteride Cordi et Thalii a Ioanne Bauhino, Raio aliisque habitam fuisse, infra demonstrabo. Subinde in hac specie laciniae ad costam vsque mediam dissectae sunt, vt plurimum tamen Polypodii in modum prope eam coniunctae.

8. FILICASTRVM Virginianum Polypodii folio latiore et longiore, tenuissime serrato.

Hoc Bobartus in Historiae Oxoniensis Tom. III. pag. 569. Sect. 14. n°. 24. sub nomine Lonchitidis maioris, Virginianae, folio vario, alis Polypodii in modum coniunctis, breuiter sic describit: planta haec hactenus incognita, e Virginia recepta, pedalis est altitudinis. Folia promit ampla, lobata, alis integris biuncialibus, planis et mucronatis, vnaque extremum claudente, e foliacea membrana secundum costam mediam, Polypodii ritu, alternatim egredientibus, praedita. Praeter haec alia oriuntur folia ex alis angustioribus, rarius dissitis, puluerulentis, Lonchitidis alterae, foliis Polypodii in modum composita. Huic descriptioni addendum, quod laciniae aut alae, vt ipsi audiunt, foliorum sterilium quam tenuissime serratae sint; quod inferiores earundem vtrinque sint angustatae, secus ac in mediis et superioribus, quae lata basi praeditae sint; quod duae infimae ope breuium pediculorum costae mediae annexae sint, suprema vero quodammodo vndulata sit. Quae quidem omnia satis bene in figura, quam Sect. 14. Tab. 2ª. inter alias Capillares dedit, expressa sunt, quanquam in descriptione ne mentio quidem eorum facta sit. Porro notandum, lacinias sterilium foliorum, quo propiores summitati, eo minus profunde sectas esse; costas seminiferas teretes esse, rigidas, glabras, splendentes, ex badio colore nigricantes; costas autem mere foliosas seminiferis multo teneriores esse, pallidas, in dorso conuexas, in facie canaliculatas; capsulas seminales in pinnis aut alis fructiferis, in lineolas *oblongas* vtrinque versus margines earum dispositas esse. Plukenetio eadem haec planta audit: *Filix Osmundae* facie, Mariana, segmentis minutim denticulatis, pediculo atronitente Mant. pag. 80. Tab. 400. Fig. 2. Verum folia fertilia, quae ad sinistrum latus sterilium appicta sunt, minime ad hanc plantam pertinent, sed potius ea, quae Tab. praecedenti 399°. idem Auctor exhibet, sub titulo nouo Filicis Floridanae, praelongis et angustis pinnulis, ad oras seminibus fimbriatis, pediculo splendente, nigro.

9. FILICASTRVM Virginianum, sensibile, laciniis profunde dentatis. Polypodium sensibile Munting. Phyt. curios. pag. 289, et 290. Filix Indica Osmundae facie Bodaei a Stapel in Theophr. pag. 320. Filix Indica, vel herba viua foliis Polypodii Sim. Paulli Quadrip. Bot. pag. 302. Filix, seu Polypodium Indianum foliis profunde sinuosis, Marrubii aquatici aemulis Pluk Alm. Phyt. Tab. 30. Fig. 1. Filix Mariana, Osmundae facie, racemi-

cernifera. Eiusdem Mant. pag. 80. Tab. 104. Filix Indica, Polypodii facie Mentz. Pug. Polypodium Virginianum, Osmundae facie tenerius Bobart. Hist. Oxon. Tom. 3. pag. 563. Sect. 14. Tab. 2.

Muntingii descriptio Belgica loco supra citato de foliis sterilibus satis accurata est; de costis autem fructiferis plane nihil dicit, licet in eleganti eius icone vna earum, sed nondum perfectam magnitudinem et maturitatem adepta, ad sinistrum latus ex ipsa radice egrediens adposita sit. Hunc defectum supplet Plukenetiana figura Tabulae 104. Sunt autem hae costae pedales aut sesquipedales, in plurimas pinnas diuisae, in quarum ambitu, vascula seminalia maiora, sphaerica, duriora, nigricantia, per totam earum longitudinem vtrinque disposita conspiciuntur.

Huic speciei peculiare est, quod marcescant folia sterilia eo loco, vbi digitis vel parum comprimuntur. Si vero folia eadem integra manibus contrectantur, et leuiter tantum premuntur, breui post omnino pereunt. Vnde etiam sensibilis dicta est. In Carolina, Virginia, Marilandia, Pensylvania, aliisque Septentrionalis Americae regionibus copiose prouenit.

10. FILICASTRVM Americanum amplissimo Polypodii folio, rigido, et acuminato. Polypodium rigidis et acuminatis pinnulis Plum. de Filic Amer. pag. 69. Tab. 90.

FILICASTRI foliis in varias lacinias dissectis vnicam speciem noui.

11. FILICASTRVM Americanum minimum repens. Lichen digitatus Geranii facie Plum. de Filic. Amer. pag. 141. Tab. 50.

FILICASTRI foliis in pinnas tantum integras diuisis hae mihi notae sunt species:

12. FILICASTRVM maius, Virginianum, pinnis longioribus et acutioribus. Cum hac specie eadem est: Lonchitis Virginiana, folio vario, alis longioribus, acutis Bobart. Hist Oxon. Tom. III. pag. 569. Sect. 14. Tab. 2. qui et eandem sic describit: haec terrae Virginiensis incola, elatior apparet planta, cuius folia alas inferiores proferunt triuncialis longitudinis, aliasque assurgentes breuiores, vt pyramidalem figuram constituant ad basin subrotundas, semunciam latas, in mucronem acutum se angustantes, ex vtroque latere virides, per costam mediam alternatim dispositas. Inter haec alia assurgunt folia, quorum alae angustiores, acutiores, et rarius dispositae sunt, superne virides, a neruo medio oblique sed eleganter venosa, inferne vero fusca, puluerulenta materia omnino obtecta.

13. FILICASTRVM Africanum minus, pinnis breuioribus et angustioribus. Filix Africana, minor, Lonchitidis facie Par. Bat. Prodr. Filix minor, Africana, Lonchitidis folio, pinnulis auriculatis, planis Pluk. Alm. Bot. pag. 152. Tab. 89. Lonchitis minor, Africana, alis crebrius dispositis, sessilibus, et ad basin rotundis, planis ac variis Bobart. Hist. Oxon. Tom. III. pag. 569. Sect. 14. Cuius iterum descriptio sic se habet: e densissimo cespite oriuntur folia plurima, recta, dodrantalia, statim a radice alis oppositis ornata; hae autem inferiores breues sunt, deinde medium circiter in vncialem longitudinem exporriguntur, et postea gradatim in acutum mucro-

cro-

cronem contrahuntur, creberrime dispositae, vt sibi inuicem contiguae incumbant, immo 30 vel 40 alarum coniugationes costae frequenter adhaereant, planae, ad basin latiusculae, subrotundae, sessiles, et in mucronem acutum sensim terminatae, spissiori virore, perpetua fronde lucentes. Praeter haec alia oriuntur folia ex angustioribus alis constructa, in quibus pulueris seminiferi species conspicitur, quemadmodum et in aliis huius distributionis plantis. Huc vsque Bobartus. Sed notandum adhuc est, pinnas sterilium foliorum subinde, quanquam leuiter admodum dentatas esse; capsulas autem seminales in fructiferis iuxta neruum medium vna continua serie dispositas esse.

14. FILICASTRVM Americanum maximum, pinnis Linguam Ceruinam referentibus. Osmunda Linguae Ceruinae foliis Plum. de Filic. Amer. pag. 132. desc. Tab. 154. Ic.

15. FILICASTRVM Americanum nodosum, maius. Lingua Ceruina nodosa, maior Plum. de Filic. Amer. pag. 90. Tab. 108.

16. FILICASTRVM Americanum nodosum minus. Lingua Ceruina nodosa minor Plum. de Filic. Amer. pag. 91. Tab. 109.

FILICASTRI in pinnas tantum diuisi laciniatas hae sunt species.

17. FILICASTRVM Americanum, pinnarum laciniis acutis, non dentatis. Osmunda latis crenis incisa Plum. de Filic. Amer. pag. 133. desc. Tab. 155. Ic.

18. FILICASTRVM Virginianum racemoſum. Osmunda Mariana Dryopteridis folio Mus. Pet. n°. 442. Filix botrytis Virginiana maior, per totam caulis longitudinem florescens Bobart. Hiſt. Oxon. Tom. III. pag. 593. Sect. 14. Tab. 4. Filix non ramoſa latius dentata, Mariana, florescens, thyrſo florum ruffa lanugine tecto Pluk. Mant. pag. 78. Tab. 400. F. 1. Osmunda non ramoſa caule florifero, a folioſis ſeiuncto, plurimis ſeminum racemis craſſis rubentibus, lanuginoſis, coniugatim exeuntibus onuſto Ray. Hiſt. App. pag. 87.

Bobarti deſcriptio haec eſt: folia fortaſſe diſtinctis pediculis, vti fit in quibusdam aliis huius ſectionis, geſtat; ſcapus enim noſtri exemplaris ſesquipedalis, lanugine pulla veſtitus, antica parte ſulcatus, recte aſſurgere videtur. Huic ad vncialem intercapedinem ab imo pene ad ſummum vsque ac fortuito poſitu adnaſcuntur, alarum vice racemuli vnciales et ſescunciales, puluere ferrugineo ſeminifero omnino obſiti, in quibus nulla materia folioſa obſeruatur.

Folia ſterilia reliqua, quae Bobartus non vidit, in Iconiſmo Plukenetiano repraeſentantur, a Raio vero ita deſcribuntur: pediculi ſeu ſcapi folioſi in plantis, ſaltem quas nobis videre contigit, dotrantales erant, tenues, plurimos ramulos, binos ex aduerſo per interualla ſitos, emittentes, luteo-virides, duas tresue vncias longos, profunde velut in pinnas diuiſos, inciſuris tamen ad mediam ſurculi coſtam non pertingentibus. Erant autem ſegmenta illa pinnularum aemula, obtuſa, per margines aequalia.

Haec ſpecies propter capſulas ſeminales in quamplurimos racemos denſos et villoſos diſpoſitas, ab omnibus reli-

reliquis huius generis maxumopere differt, atque adeo facillime dignoscitur. Illae autem capsulae sphaericae sunt figurae et anulo elastico, vt congeneres, praeditae, quo disrupto capsulae dehiscunt, et progressu temporis in duas valuas haemisphaericas delabuntur, semina fundentes quam plurima minutissima. Sponte in Carolina, Virginia et Marilandia Americae Septentrionalis Prouinciis prouenit.

19. FILICASTRVM Septentrionale et palustre, pinnarum laciniis oblongis tenuissime dentatis.

Rara haec est admodum planta, paucis Botanicis bene nota, a nemine accurate satis descripta. Eius ergo descriptionem accuratiorem icone illustratam exhibemus. Tab. XVIII.

Radix ei est crassissima, pugni magnitudine, squamis nigris, crassis, veterum scilicet foliorum relictis vestigiis, arcte sibi inuicem superincumbentibus, obtecta, innumeras fere fibras, nigras itidem, validas, teretes filorum ferreorum ad instar emittens. Crassities autem huius radicis maximam partem a modo dictis veterum foliorum costarumque fructiferarum emarcidarum relictis vestigiis pendet, corpus ipsum non adeo magnum nec crassum est. Porro ex eadem singulis annis noui stolones ex lateribus pullulant, marcescentibus veteribus.

Primo statim vere ex hac radice surgunt asparagi, primo inflexi et conuoluti, filuaque tenui et muscosa materia obducti, qui progressu temporis explicantur in folia cubitalia aut sesquicubitalia, quoad magnitudinem ratione soli admodum variantia; quo enim hoc humidius, eo laetius et maius incrementum integra planta capit. In hortos transplantata, et in locum arenosum siccumue, ventis

et

et radiis solaribus nimis expositum collocata, tenera admodum promit folia, parua et ita fragilia, vt flante mediocri vento in frusta fere dilabantur, costarum autem fructiferarum ne rudimenta quidem appareant. Contrarium euenit, si in locum humidum et vmbrosum ponitur. Sunt autem haec folia vtrinque angustata, in medio latissima, in pinnas tantum diuisa sessiles, id est, nullis pediculis rachi aut costae mediae affixas, numero triginta quatuor, quinque, sex, ad quadraginta vsque et plures in vnoquoque latere. Rachis aut costa media, respectu magnitudinis totius folii et costarum fructiferarum, tenuis admodum est et fragilis, pallida, extus valde gibba, intus concaua seu canaliculata, radici lata basi adnascens. Sex aut septem pinnarum infimarum, proxime radicem spectantium, structura plane diuersa est a mediis et supremis: prima enim omnium breuissima, interdum vix vnciae trientem longa, in tres tantum lacinias dissecta est, vnam scilicet mediam longiorem, et laterales duas breuiores dentatas et arcuatas. Sequentes ad octauam, subinde ad nonam aut decimam vsque, paulatim longiores factae, similibus ad basin laciniis arcuatis et auriculatis, profundius sectis praeditae sunt, ita tamen, vt in singulis earum superior inferiori longior sit. Reliquarum omnium pinnarum segmenta aequalia sunt. In medio omnium longissimae, quatuor vel quinque pollices longae, octo circiter lineas latae, basi lata costae mediae sine pediculis adnatae, modo coniugatae, modo alternae, ad incerta interualla dispositae sunt, nam aut inferiori superior superincumbit, aut eam tantummodo tangit, vel satis a se inuicem remotae sunt. Praeter infimas et supremas omnes hae pinnae in

la-

lacinias latas, oblongas, obtuſas, verſus extremitatem tantum tenuiſſime, aut plane non dentatas, profunde quidem, ſed non ad medium neruum vsque diſſecantur. Folii autem extremum non in pinnas, ſed in lacinias tantum, Polypodii in modum ad coſtam mediam fere pertingentes, per margines vtplurimum aequales, diuiſum eſt. Notandum praeterea folia haecce non ex medio radicis, ſed ex eiusdem limbo excreſcere, et in orbem, nidum auis exprimeotem, diſponi.

Praeter haec, quae ſeminibus prorſus deſtituta ſunt, verſus Autumnum ex ipſo radicis medituIlio aliae enaſcuntur coſtae, quatuor, quinque aut ſex et plures pedales, vel ſesquipedales, validae, prope radicem trientem vnciae ad minus latae, ex flauo ſubfuſcae, in dorſo valde gibbae vel conuexae, in facie canaliculatae, intus ſpongioſae, lata itidem baſi radici innaſcentes; quarum aliae ima parte pinnis folioſis ſterilibus, ſed breuiſſimis, vncialibus vel ſeſcuncialibus, praecedentibus caeterum ſimilibus praeditae ſunt, aliae nequaquam. Ad quinque aut ſex pollicum a radice diſtantiam, ſupra modo dictas pinnas folioſas, ſi adſint, e lateribus harum coſtarum, egrediuntur pinnae fructiferae a tringinta ad quadraginta vsque in vnoquoque latere, quarum primae et extremae, reliquis in medio poſitis, multo ſunt breuiores, ſterilium ad inſtar modo coniugatae, modo alternae, modo magis, modo minus a ſe inuicem remotae. Hae autem ſeſcuncialem, aliquando et biuncialem longitudinem adipiſcuntur, latitudinem vnius aut alterius lineae. Initio ſordide virescentis ſunt coloris; maturescentibus autem ſeminibus nigro fuſci. Haec ante maturitatem conſpici non poſſunt; pinnarum enim laciniae

membranaceae et valde tenues tunc temporis reflexae ſunt verſus neruum medium earundem, ſeminaque penitus obtegunt, ita vt aequalia tunc, vel minime diuiſa aut laciniata corpuscula longa, teretia, vel paululum compreſſa aut nodoſa referant. Creſcentibus autem indies vasculis ſeminalibus, laciniae earum tandem diducuntur et aperiuntur: quo facto capſulae apparent ſphaericae, vna continua ſerie ad neruum pinnarum medium vtrinque poſitae, ſquamulis fuscis obuolutae, et zona ſeu annulo Succini inſtar ſplendente, fere pellucido, et geniculato, elaſtica vi donato, cinctae, quo fracto aut in longum extenſo, ſemina ex vnaquaque capſula funduntur quamplurima, minutiſſima, flaua, non niſi armatis oculis conſpicienda. Non raro etiam pinnarum aliquot folioſarum infra fructiferas in eadem coſta poſitarum, vt ſupra diximus, ſeminibus donantur, mar-
Tab. XVIII. ginesque laciniarum conuolutos habent. Vide Tab. XVIII.

Sponte haec planta et copioſe quidem prouenit in variis Ingriae locis paluſtribus et vliginoſis, praeſertim circa *Catharinen Hoff*, Aeſtiuam Imperialem non longe ab vrbe ſitam; nec non in humidis Alnetis Betuletiſque Careliae Wiburgum verſus. Ex Sibiria quoque Clariſſimus Gmelinus miſit.

Inter rei herbariae Scriptores primus eſt Cordus, qui de hac planta mentionem fecit in ſua Stirpium Hiſtoria, quamque *Struthiopteridem* appellat, Filicis inſignem ſpeciem in Hercynia Sylua prope Goslariam inuentam figura admodum ſpectabilem, addita deſcriptione, ſed minus perfecta, quia, vt ipſe fatetur, integram plantam nondum viderat. Editores Cordi Hiſtoriae, neſcientes quamnam plantam Auctor deſcripſerit, putarunt hanc Cordi Struthioptepteridem eandem eſſe plantam cum *Lonchitide altera folio Polypodii I. B.* quapropter etiam huius figuram ex Trago ſumptam Auctoris deſcriptioni addiderunt. Eundem errorem poſtea ſequuti ſunt Ioannes Bauhinus, Raius et alii. Caſparus Bauhinus eandem quidem exiſtimauit quoad iconem, quoad deſcriptionem autem diuerſam eſſe ſtatuit in Pinace pag. 358, diuerſoque nomine inſigniuit, *Filicis nempe paluſtris alterae, ſubfuſco puluere hirſutae*, ignarus, ipſum iam in Prodromo Theatri Botanici eandem deſcripſiſſe, vt infra dicemus.

Poſt Cordum Thalius Struthiopteridem aggreſſus eſt deſcribere in Sylua Harcynia pag. 119, et 120. Cuius deſcriptionem verbotenus hic repetimus, vt eo melius pateat, plantam, quam adumbrat, cum noſtra vnam eſſe eandemque. Illa autem ſic ſe habet: radice conſtat craſſiſſima, tuberoſaque, nonnihil fibrata, nigricante, cui circum circa adnaſcuntur pediculi longi, cubitales, proceri oresque, ipſi radicis corpori ſquamatim quaſi inhaerentes vngue latiori, nigricante, longo vncias duas, ſemunciam lato, canaliculato parum, inferius tamen anguſtiori et adunco, qui eleganter exprimit figuram inferioris partis inſtrumenti iſtius ferrei pharmacopaeorum, ſpatulae nomine ipſis appellati, quo nimirum materiae ab ipſis, dum medicamenta componuntur miſcenturque, agitari counirique ſolent. Reliqua deinde pars, quae vnguem mox ſubſequitur, canaliculata imbricatur cauitate profundius. Pediculi exteriores frequentibus coſtis folioſis exornantur, quarum ſemper bina ad vtrumque latus aequaliter ſibi contraponuntur; ſuntque foliola in hiſce coſtis ſimilia prorſus foliolis Filicis foeminae ſupra indicatae. Ac iſtis exterioribus pe-

pediculis color est in flauo ruffescens, ipsique aliquantulum molliori materia constant. Interiores vero ex spadiceo subnigricant, et crassiores sunt, multoque ex solidiori materia compositi. Horum ii qui caeteris sunt proceriores, inferiori loco absque costarum adminiculo, foliolis istiusmodi ad latera obuestiuntur, qualia esse folia exteriorum pediculorum costis iam dixi: deinde vero post medium pediculi vsque in summum eius cacumen vtrinque costae foliosae frequentes sursum porrectae in ipsis disponuntur breuiores, neruo per medium dorsi ipsarum extrinsecus protuberante, coloris spadicei, costis singulis interiori parte imbricatis: foliosa vero pars ad latera ipsarum continua serie vtrinque crenantur, quemadmodum folia Scolopendrii veri: illaeque crenis angustioribus ita incisae particulae eleganti (vt sic dicam) crispatura versus interiora recuruantur aut retorquentur, puluisculum istiusmodi etiam, qualis eidem est stirpi, dense ac arcte ipsis adhaerentem, interius sibi includentes comprehendentesque: vnde figuram aliquam ista crispatura conuoluta haec folia quasi pennarum Struthio-Camelorum cum plumata ipsarum incuruatione effigiare videntur.

Dixi supra, etiam Casparum Bauhinum hancce plantam descripsisse in Prodromo Theatri Botanici, videamus nunc an cum nostra conueniat nec ne? Nomen quod huic speciei attribuit est: Filix palustris maxima. Descriptio autem, quae habetur pag. 150 et 151, haec est: radice est omnium Filium crassissima, duos pugnos superante, nigra, velut ex crassissimis squamis compacta, et multis fibris nigris capillata, vnde exsurgunt folia plura, atrouirentia, tres cubitos superantia, in latus amplissime ex-

expanſa; quorum pediculus ruffescens, anguloſus, cauus, inſtar oblongi auriſcalpii ex radice prodit, qui vbi pedalem altitudinem adeptus eſt, folioſus redditur ad modum Filicis maris vulgaris, nam veluti ex plurimis pinnis, ſecundum margines crenatis ad vnum pediculum cohaerentibus componuntur. Verum ad radicem inter media folia, plura foliorum rudimenta cubitalia, veluti futurorum principia conſpiciuntur, eo modo, quo in Filice florida ſiue Osmunda dicta, circa ſummos ramulos apparent; a qua tamen differt, quod Osmunda caules edat, et caulium ſummis veluti flores ſiue ſeminum rudimenta adhaereant, et folia habeat latiora et haudquaquam per margines ſerrata. Haec Bauhinus: Quae ſi cum ſupra dictis comparentur, vnicuique, exiſtimo, clare patebit, Bauhinianae plantae radicem, folia, coſtas fructiferas, quas ille futurorum foliorum principia perperam vocat, cum dictis partibus, ſi magnitudinem excipias ratione ſoli admodum variantem, omnino conuenire, adeoque Bauhinianam et noſtram vnam eandemque eſſe plantam: folia enim Filicis maris dictae ſimilia, ſterilia, plura alia foliorum rudimenta ex ipſa radice egredientia et fructifera eo modo, quo in Filice florida ſiue Osmunda dicta, in nulla alia hactenus cognita Filicum Europaearum ſpecie deprehenduntur.

Quae in Raii et Moriſoni Hiſtoria plantarum alibique proſtant deſcriptiones huius Bauhinianae plantae, omnes cum nomine ex eius Prodromo petitae ſunt, praeter eam, quam Muntingius dedit in Phytographia curioſa Lugduni Batarorum Belgice edita in folio, pag. 292, ſub titulo Struthioferae; et breuiſſimam illam, quam exhibet Raius in Hiſtoriae Appendice Vol. 3. pag. 68.

ſub nomine Lonchitidis Norwegicae maioris Petiuer. Verum in hisce deſcriptionibus coſtarum fructiferarum tantum mentio fit; icon quoque Muntingii pinnas fructiferas iuſto craſſiores et breuiores exhibet. Fallitur itidem Auctor dum ſcribit, coſtas haſce verno tempore ex radice progerminare, cum e contrario verſus Autumnum demum poſt folia ſterilia creſcant. Taceo ea, quae idem affirmat, hancce plantam ſeminibus deſtitutam eſſe. Nec mirandum illum cum Kiggelaerio in editione eiusdem operis absque deſcriptionibus Amſtelaedami in fol. edita 1711, Bauhini et Thalii mentionem nullam feciſſe, quoniam vtrisque ignotum fuit, plantam, de qua agitur, duplicibus, *iisque* vel ſterilibus vel fructiferis foliis, inter ſe diuerſis, praeditam eſſe. Immo a nonnullis Muntingii iconismus pro ficto habitus fuit, ſicuti et plures alii eodem opere contenti, verbi gratia *Maceris arboris antiquorum*, *Lunariae Chymiſtarum*, *Serpentariae mirabilis montanae* &c. In fingendis enim plantarum iconibus veterum herbariorum deſcriptionibus accommodatis, Muntingius Mathiolo vix cedere creditur. Iniuſte tamen hic criminis incuſatur. Praeterea adhuc male Raius in Hiſtoriae Plantarum App. ſeu Tom. III. pag. 70. Struthiopteridem Muntingii, quam Struthioferam ſcribere debuiſſet, pro Lonchitidis aſperae vulgaris ſpecie habet. Peius fecit Florae Ienenſis auctor pag. 277. dum Filicem paluſtrem maximam C. B. et Filicem tenuiſſime dentatam, Rhaeticam I. B. 3. pag. 740. pro vna eademque planta exhibet, quamquam toto caelo inter ſe diſtinctae ſint.

Tab. XVIII. FILICASTRI foliis ramoſis in plures pinnas ſimplices diuiſis vnicam noui ſpeciem, nimirum.

20.

20. FILICASTRVM Americanum foliis ternis, angustis et serratis. Phyllitis ramosa trifida Sloane Cat. plant. Insul. Iamaicae pag. 19. Eiusd. Hist. Nat. Iamaic. Tom. 1. pag. 88. Tab. 45. Lingua Ceruina triphylla angusta et leuiter serrata Plum. de Filic. Amer. pag. 123. Tab. 144.

Huic peculiare est, quod folia sterilia in tres semper pinnas serratas diuisa sint, fructifera vero tantum in duas angustiores et minime serratas. Ill. Sloanii figura sterilia tantum repraesentat.

FILICASTRI tandem foliis ramosis in pinnulas diuisis sequentes sunt species.

21. FILICASTRVM Americanum minus, foliis ramosis, hirsutis.

Haec prorsus noua est species, circa Veram Crucem in Noua Hispania a Gul. Houstono M. D. lecta et mecum communicata. Integra planta vix quinque aut sex vnciarum altitudinem superat. Radix parua, multis fibris nigris capillata, ex qua folia enascuntur plura, ramosa, hirsuta, ex costa pallide flauescente, in dorso gibba, in facie canaliculata, valde tenui, et quinque aut sex alarum coniugationibus constantia. Hae ex costae modo dictae lateribus ad sesquipollicarem praeter propter a radice distantiam enascuntur, modo coniugatae, modo alternae, in varias minores diuisae, quae mox in pinnulas ab angusta basi paulatim latiores redditas, extremo plerumque trifidas, dentatas, ad oras, et in superficie vtraque, sparsa albicante lanugine obsitas, dissecantur.

Ex ipsa radice in medio foliorum sterilium alia surgit costa, vtplurimum singularis, tenuis admodum, ex vi-

viridi flauescens, canaliculata, longe supra reliqua folia protensa, quatuor, quinque aut sex vncias alta, versus extremitatem leuiter lanuginosa, et in plures ramulos foliosos diuaricata, quibus adnascuntur capsulae seminales non admodum frequentes, sphaericae, ex squamosis membranulis compositae, et annulo elastico geniculato cinctae, vt Tab. XIX. in congeneribus. Vide Tab. XIX. Fig. 1. plantam humiliorem integram demonstrat. Fig. 2. folium sterile maioris et elatioris plantae repraesentat. Fig. 3. costam seminiferam eiusdem.

22. FILICASTRVM Americanum verticillatum. Osmunda verticillata Plum. de Filic. Amer. pag. 137. desc. Tab. 160. Fig.

23. FILICASTRVM Americanum Filiculae folio. Osmunda Filiculae folio altera Plum. de Filic. Amer. pag. 138. Tab. 161.

24. FILICASTRVM Anglicum, Adianthi folio et facie. Adianthum album floridum, seu Filicula petraea crispa Ray Hist. Plant. pag. 153. Filix botrytis minima, siue Filicula petraea florida, Anglica, foliis plurifariam diuisis Bobart. Hist. Ox. Tom. III. pag. 593. Sect. 14. Tab. 4. Osmunda Westmorlandica, foliis tenuissime dissectis Mus. Pet. n°. 792. Huius descriptio vid. apud Raium et Bobartum.

25. FILICASTRVM saxatile cornicnlatum minimum. Filicula saxatilis corniculata Inst. r. h. pag. 542. Filix saxatilis corniculata C. B. P. pag. 358. Filix saxatilis Tragi I. B. 3. pag. 755.

Haec

Haec et praecedens planta ad hocce genus pertinent, quoniam ambae coſtulas habent, alias ſteriles et mere foliosas, alias fructiferas a mere foliosis plane diuerſas.

Hae ſunt plantae, de quibus certus affirmare poſſum, huc referri debere. Nullus autem dubito, quin aliae adhuc dentur, ad idem genus pertinentes; verum cum earum ſtructura nondum mihi ſatis cognita ſit, malui eas, tanquam dubias praeterire.

Quoniam hucusque de Filicibus actum eſt, non alienum erit aliarum aliquot minus, aut plane non cognitarum ſpecierum icones et deſcriptiones ſimul exhibere. Prima ſit

PHYLLITIS iuxta neruum fructifera, pinnis breuioribus et latioribus, Americana.

PHYLLITIDEM appello Filicum genus, cuius folia in pinnas tantum oblongas, non auriculatas, integras vel laciniatas, ope pediculi coſtae mediae adnexas, aut ſeſſiles diuiſa ſunt. Species autem ſubdiuiduntur in tales, quae ſemina, vel in globoſos vel oblongos aceruulos, aut iuxta neruum medium, aut ad oras pinnarum, certo aut nullo ordine, vna continua ſerie vel interrupta, diſpoſita habent; et eas, quarum auerſa pinnarum ſuperficies in totum capſulis ſeminalibus obtecta eſt. Differt ergo hocce genus ab Hemionitide, Lingua Ceruina, Polypodio et Asplenio, foliis in pinnas diuiſis; a Trichomane pinnis oblongis; a Lonchitide pinnis non auriculatis; a Filice ſtricte ſic dicta foliis tantum pinnatis, non alatis, ſiue pinnis non in diſtinctas pinnulas, ſed ſubinde in lacinias tantum ad neruum medium non pertingentes diuiſis.

 Haec

Haec autem ſpecies vix dimidii pedis altitudinem obtinet. Coſtae glabrae ſunt, extus conuexae, intus canaliculatae, quibus ad trium circiter vnciarum a radice diſtantiam adnaſcuntur pinnae oblongae, glabrae, neruoſae, rigidae, craſſiuſculae, in ambitu aſperae, ſi digiti deorſum ducantur, ſeſquipollicem longae, dimidiam vnicam latae, ſeſſiles, vndecim aut duodecim in vnoquoque latere. Priores harum pinnarum vtplurimum coniugatae, latiori et rotundiori baſi reliquis praeditae, ope nerui medii tantum pediculi vicem gerentis rachi vel coſtae mediae adhaerent; e contra ſuperiores integra baſi eidem adnaſcuntur. Facies omnium in medio ſulcata eſt. In dorſo autem iuxta neruum medium admodum extantem, vna continua ſerie a baſi fere ad apicem vsque vascula ſeminalia gerunt valde numeroſa, denſe congeſta, ruffa, congeneribus ſimilia.
Tab. XX. vid. Tab. XX.

Sponte circa Veram Crucem in Noua Hiſpania prouenit.

Differt a Lonchitide iuxta neruum puluerulenta Plum. de Filic. Amer. pag. 48. Tab. 62. lit. B. pinnis craſſioribus, breuioribus et rigidioribus, et omnibus partibus minoribus. De Plumeriana planta dubitat Petiuerius, num Filix Malaccenſis, pinnis longiſſimis, neruo medio puluerulento Mus. Petiu. n°. 543. eadem ſit planta, nec ne? eſt autem omnino diuerſa, elatior, pinnis longioribus, anguſtioribus, craſſioribus, nitidioribus, ſubtus aureis ſplendentibus, quarum venae ex neruo medio verſus oras egredientes minime ramoſae ſunt, ſed rectae et fere parallelae.

Tab. XXI. 2da. eſt PHYLLITIS minor, hirſuta, pinnis variis. Filix minor Brittannica, pediculo pallidiori; alis inferioribus deorſum ſpectantibus Bobart. Hiſt. Ox. Tom. III. pag.

pag. 575. qui eam sic describit: pediculos e radice emittit pedales vtplurimum, nunc breuiores, nunc longiores, graciles, pallidos, lanugine fusca sparsim aspersos. His in superiori parte adnascuntur alae, modo non e regione positae, laciniis profundis ad neruum vsque propemodum divisae, in vetustioribus modice, sed tenerioribus nequaquam serratis. Quaelibet denticulatio, pinnulaue binis punctorum puluerulentorum aureorum ordinibus in dorso notatur. Breui, tribus notis potissimum compertam hanc habeas speciem: 1°. alae primae inferius nascentes, deorsum spectant: 2°. coniugationes secundae longiores basin pyramidalem suppeditant. 3°. alae omnes praeter infimas lata basi sessiles, sibi inuicem contiguae, Polypodii fere in modum costam mediam conuestiunt. Haec Bobartus. Verum, quantum hactenus obseruare potui, pinnarum prima coniugatio non semper deorsum spectat, in iunioribus praesertim foliis; nec secundae coniugationis pinnae infimis semper longiores sunt, saepissime aequalem fere obtinent longitudinem. Praeterea integra foliorum facies pilis tenerrimis et subtilissimis, in ambitu imprimis obsita est. Capsulae seminales admodum paruae sunt, sphaericae, instar margaritarum in initio splendentes, annulo semipellucido et quasi geniculato praeditae. De reliquis synonymis mihi valde dubiis, videatur Bobartus loco supra citato. Vid. Tab. XXI. Tab. XXI.

Non solum pulchra haec planta in Angliae septentrionalibus prouinciis crescit, sed copiose quoque prouenit in Alnetis Betuletisue Insulae S. Basilii, vulgo Basili Ostrow, ad arborum radices.

3am. voco FILICEM pumilam Americanam, incanam et lanuginosam. Tab. XXII. Fig. 1.

Tab. XXII. Fig. 1.

Ad hanc quam proxime accedere videtur: Filix crispa lanugine hepatici coloris vestita, ex Insulis Fortunatis Pluk. Alm. 150. Tab. 281. F. 4. Verum cum figura loci citati valde imperfecta et manca sit, et quod lanugu, qua folia vestita sunt, hepatici coloris esse dicatur, secus ac in nostra, quae potius incana est, non audeo asserere, num eadem, aut diuersa sit species.

Ex radice crassiuscula, repente, squamulis surfuraceis, fuscis, penitus obtecta, et multas fibras longas, nigras, tenaces emittente, surgunt plurimi pediculi, teretes, nigrofusci, splendentes, tres aut quatuor circiter vncias longi, quibus ad pollicarem aut sesquipollicarem a radice distantiam adnascuntur alae paruae, vix dimidiam vnciam longae, in basi vbi latissimae, duas tresue lineas latae, exinde paulatim angustiores factae, in apicem obtusum desinentes, in pinnulas oblongas, minime dentatas, obtusas, diuisae, numero decem vel vndecim in vnoquoque latere. Pinnularum par primum, quod basin alae constituit, non raro quoque secundum, ad medium vsque neruum dissectum est. Reliqua alae pars ad instar Polypodii in lacinias tantum ad neruum medium non pertingentes diuiditur. Sunt autem hae alae modo alternae, modo coniugatae. Inferiores ad duarum aut trium linearum interualla dispositae sunt, superioribus minus a se inuicem remotis. Omnium vero tam exterior, quam interior, nec non et ipsius pediculi versus extremitatem superficies grisea et subinde ad ruffum paululum vergente lanugine obducta est, interior tamen seu facies minus quam exterior seu dorsum. Sponte cres-

crescit circa Buenos Ayres in America. Vid. Tab. XXII. Fig. 1. Tab. XXII. Fig. 1.

Ad Filicis stricte sic dictae genus refero omnes plantas capillares, quae folia obtinent non ramosa, sed in alas tantum diuisa, ad neruum medium vsque in pinnulas dissectas.

4ta. mihi audit: THELYPTERIS minor, pinnulis dentatis. Filix ramosa minor pinnulis dentatis C. B. P. 358. Filix minor ramosa I. B. 3. pag. 741. Filix minor palustris Ray. Hist. Pl. pag. 146.

Cum elegantis huius speciei nondum laudabilis icon in Botanicorum operibus prostet, accuratiorem exhibemus, eum in finem, vt Botanophili melius iudicare possint, quid sentiendum sit de aliis Filicibus, diuersis quidem nominibus praeditis, tamen tanquam synonymis ad eandem hancce speciem a pluribus rei herbariae Scriptoribus et Vaillantio inprimis, relatis; ex huius enim Auctoris sententia in Botan. Paris. pag. 53. haec et Filix querna C. B. P. 358. Filix saxatilis ramosa, nigris maculis punctata Ei. ibid. et Filix ramosa minor, Polypodii facie Pyrenaica Inst. r. h. 536. vna eademque sunt planta. Vid. Tab. XXII. F. 2. Tab. XXII. Fig. 2.

Thelypterides autem voco omnes Filices sic dictas ramosas.

In insula St Basilii et passim circa Petropolim cum sequente copiose prouenit ad arborum radices.

5ta. est THELYPTERIS minor pinnulis argute denticulatis et molliter spinosis. Filix Alpina, Myrrhidis facie, Cambro-Brittannica Pluk. Alm. Phyt. Tab. 89. Fig. 4. et Bobart. Hist. Oxon. Tom. III. pag. 584.

 Fi-

Filix montana ramosa minor, argute denticulata Ray Syn. 49. Filix saxatilis omnium minima elegantissima H. R. P. Pluk. Alm. Phyt. Tab. 89. F. 3. ex sententia Vaill. Et huius quoque figuram Pluckenetianis multo perfectio-
Tab. XXIII. rem damus. Vid. Tab XXIII.

6ta. vocatur FILICVLA Americana villosa, tenuissime diuisa, pinnulis subrotundis.

Elegans haec et rarissima species pediculos habet teretes, pedales, ima parte glabros, splendentes, coloris badii, a medio vero ad extremitatem vsque squamulis russescentibus obtectos. Ad quatuor aut quinque vnciarum a radice distantiam alae ex hisce pediculis oriuntur sescunciales, aut biunciales, in plurimas alias minores diuisae, quae mox trifariam vtplurimum in pinnulas subrotundas minutissimas dissecantur. In iunioribus foliis integra superficies auersa omnium pinnularum tenui, fulua, muscosaque lanugine obducta est. In adultioribus autem haec lanugo paulatim euanescit. Sponte prouenit circa Buenos Ayres siue Fanum Sanctae Trinitatis, vrbem Hispanicae ditionis in America meridionali ad ripam vasti istius flumi-
Tab. XXII. Fig. 3. nis Rio de la Plata dicti sitam. Vid. Tab. XXII. F. 3.

DE

DE

FRIGORE ET CALORE GLACIEI, NIVIS ET AQUAE

AVCTORE

J. G. Gmelin.

CL. Weitbrechtus, vt cognoſceret, quantum experimenta thermometrica, a ſe hic Petropoli capta, concordent cum iisdem, alibi terrarum inſtitutis, litteras ad me dedit, in quibus petiit, vt ad ſequentes quaeſtiones ſoluendas obſeruationes in Sibiria inſtituerem. 1°. Qualis terminus ſit mercurii rigida hieme in aqua? An ſit idem, quem ipſe deprehendit, gradus 152. (*) 2°. an ſit conſtans, quamdiu ſuperficies aquae glaciata eſt. 3°. an ſit idem et conſtans, ſi relicto in aqua inſtrumento, illa tota in glaciem vertitur. 4°. an ſit idem in niue, et 5°. quousque calor aquae augeatur in fluminibus et riuis, quos tranſiturus ſim.

Non

(*) Omnia illa thermometra, quae obſeruationibus in Sibiria inſtituendis, ab Academia conceſſa mihi ſunt, mercurium continebant, et ad normam Reaumurianorum, in Comment. Acad. Paris. 1730. p. 452. deſcriptorum, dirigente Cl. de L'Islio confecta fuerunt. Igitur ipſis conveniebat cum illis, quae Cl. Weitbrechtus adhibuit.

Non licuit hisce animum intendere, antequam in Kirengense munimentum, ad Lenam situm, appellerem. Ibidem tota fere hieme, dictum annum et sequentem intercedente, moratus obseruationibus peragendis opportunum tempus nactus sum. Antequam initium earum faciebam, singula thermometra, quae mecum habui, literis *a*. *b*. et *c*. notata die 3. Nouembris 1737. aquae super igne ebullienti immissa et per quadrantem horae ibi relicta sunt, quo factum est, vt mercurius in thermometris *a*. et *b*. vno et in thermometro *c*. duobus fere gradibus supra *o*. eleuatus fuerit.

Eodem die hora 10. *a*. *m*. in vase e cortice betulae consuto et aqua fluuiali repleto thermometrum *a*. hac ratione suspensum fuit, vt totus eius amplior cylindrus vna cum sesquipollice tubuli in aqua immergeretur, ibidemque relictum est, donec aquae superficies rigeret, quo facto mercurius paullo infra 150. substitit. Crusta glaciali ad 3^{am} vsque horam *p*. *m*. notabiliter aucta mercurius immobilis stetit. Tum exemptum fuit thermometrum, et interpreti nostro, Eliae Iachontowio, concessum, vt Ircutiae cum eo experimenta caperet.

Die 14. Nouembr. thermometrum *b*. in vase e cortice betulae consuto, cuius diameter erat $6\frac{1}{2}$. poll. altitudo 9. poll. suspensum fuit. Aqua vasi infusa altitudine occupabat $8\frac{7}{10}$. poll. Vix crusta glaciali aquae superficiei inducta mercurius substitit ad gradum 151. et perstitit in eodem gradu in noctem vsque sequentis diei. Sed die 16. hora 6. *a*. *m*. mercurius ad 166. gradum depressus fuit. Quoniam haec depressio coniecturis Cl. Weitbrechti minime fauebat, coepi dubitare, an non thermometrum

metrum

metrum, quod glacie totum incruſtatum erat, ruptum eſſet. Suspendi igitur illud vna cum vaſe, in quo glacie incruſtatum haerebat, in conclauis quodam loco, in quo aliud thermometrum, glacie liberum, gradus 122. monſtrabat. Breui factum eſt, vt mercurius ad 151. gradum eleuaretur; isque gradus conſtanter locum ſeruabat, quousque inferior thermometri amplior cylindrus glacie tectus manebat. Prout vero glacie denudari coepit, eadem fere ratione mercurius ascendit, donec cum altero thermometro, libere ibidem ſuspenſo, gradu congrueret, ex quo haud difficulter coniiciebam, thermometrum labe omnino carere, nec a frigoris vi ruptum fuiſſe.

Die igitur 17. Nouembr. obſeruationes denuo capturus, idem vas aqua repleui, idemque ei thermometrum immiſi ad talem profunditatem, quae cum gradu thermometri 271. congruebat, adeoque duos circiter pollices ſupra ampliorem eius thermometri cylindrum. Vix riguit aquae ſuperficies, et mercurius ad 151. gradum ſubſtitit, quem ſeruauit ad mediam vsque noctem. Die ſequenti monticulus glaciei, a frequenti pertuſione glaciei circa thermometrum facta generatus, ad eum ſcalae gradum eleuatus erat, qui 240. reſpondet. Quas vero mercurius in thermometro incluſus durante hac in glacie immerſione mutationes ſubierit, e ſequenti conſignatione patebit, cui ad melius de re iſta iudicium ferendum addidi, quid in aëre libero paſſus ſit.

1737.

Mensis et dies	Tempus obseru.	In aëre	in glacie
Nouembr.			
18	6. a. m.	185	155
	2. p. m.	175	157
	12. noct.	173	161
19	6. a. m.	175	165
	10. a. m.	183	174
	3. p. m.	181	176
	Glacies in vase magnam rimam egit, et thermometrum paullo oblique pressit.		
	12. noct.	188	180
20	6. a. m.	195	185
	2. p. m.	183	184
	12. noct.	188	182
21	6. a. m.	200	197
	9. a. m.	190	183
	2. p. m.	186	184
	12. noct.	185	183
22	6. a. m.	183	182
	1. p. m.	177	178
	12. noct.	172½	174
23	6. a. m.	170	172
	2. p. m.	168	168
	12. noct.	167½	167
24	6. a. m.	167	168
	2. p. m.	167	168
	12. noct.	185	173
25	6. a. m.	197	183
	3. p. m.	200½	195
	11. p. m.	218	200
26	5. a. m.	218	205½
	10. a. m.	218	209
	3. p. m.	218	207
	11. p. m.	218	205

1737.

Mensis et dies	Tempus obseru.	In aëre	in glacie
Nouembr.			
27	6. a. m.	218	204
	12. m.	270	202
	2. p. m.	195	200
	11. p. m.	176	188
28	6. a. m.	170	179
	3. p. m.	167	172
29	1. a. m.	165	167½
	8. a. m.	168	168
	2. p. m.	163	186
	11. p. m.	166	186
30	6. a. m.	168½	188
	2. p. m.	166	188
	12. noct.	172	188
Decembr.			
1	6. a. m.	175	195
	2. p. m.	178	198
	12. noct.	192	205
2	6. a. m.	183	205
	3. p. m.	177	201
	12. noct.	175	198
3	6. a. m.	171	195
	2. p. m.	168	192
	11. p. m.	169	189
4	7. a. m.	169	191
	2. p. m.	167	190
	12. noct.	168	190
5	12. m.	169	190
	11. p. m.	178	196
6	6. a. m.	182	200
	2. p. m.	181	200
	11. p. m.	190	205
7	8. a. m.	182	204
	2. p. m.	179	202
	12. noct.	185	203

1737

1737

Mensis et dies	Hora	In aëre	In glacie
Decembr.			
8	8. a. m.	181	202
	2. p. m.	180	201
	11.p.m.	181	200½
9	6. a. m.	185	203
	2. p. m.	184	203
	12.noct.	196½	210
10	8. a. m.	203	216
	2. p. m.	199	218
	11.p.m.	203	219
11	8. a. m.	210	223
	3. p. m.	252	221
	12.noct.	197	214
12	7. a. m.	189	205
	3. p. m.	179	205
	12.noct.	178½	193
13	7. a. m.	169	192
	2. p. m.	168	191
	12. noct.	175	194
14	7. a. m.	177	196
	3. p m.	176	197
	12. noct.	175	197
15	8. a. m.	172	195
	3. p. m.	168	193
	12. noct.	166	190
16	8. a. m.	163	188
	3. p. m.	161	185
	11.p.m.	165	184
17	8. a. m.	164½	186
	2. p. m.	161	185
	12.noct.	163	184
18	8. a. m.	161	183
	2. p. m.	159	183
	12.noct.	163	182½
19	7. a. m.	155	182

1737

Mensis et dies	Hora	In aëre	In glacie
Decembr.			
19	4. p. m.	155	181
	12.noct.	162	185
20	8. a. m.	167	187
	4. p. m.	169	192
21	4. a. m.	174	195½
	12. m.	177	199
	11.p.m.	186½	201
22	8. a. m.	176	202½
	4. p. m.	172½	199
	12.noct.	172	198
23	8. a. m.	170	196
	4. p. m.	164	194½
24	3. a. m.	167	193
	12. m.	169	193
	11.p.m.	163	193
25	8. a. m.	167	193
	4. p. m.	165	192
	12.noct.	163	189
26	6. a. m.	165	190
	4. p. m.	189	208
	12.noct.	192	209
27	8. a. m.	196	214
	4. p. m.	196	215
	12.noct.	206	227
28	8. a. m.	206	230
	4. p. m.	200	226
	12.noct.	202	226
29	8. a. m.	213	227
	4. p. m.	263	226
	6. p. m.	217	226
	12.noct.	201	226
30	6. a. m.	206	228
	5. p. m.	206	228
	12.noct.	206	233

1737.

Mensis et dies	Tempus obseru.	In aëre	in glacie
Nouembr.			
18	6. a. m.	185	155
	2. p. m.	175	157
	12. noct.	173	161
19	6. a. m.	175	165
	10. a. m.	183	174
	3. p. m.	181	176
	Glacies in vase magnam rimam egit, et thermometrum paullo oblique pressit.		
	12. noct.	188	180
20	6. a. m.	195	185
	2. p. m.	183	184
	12. noct.	188	182
21	6. a. m.	200	197
	9. a. m.	190	183
	2. p. m.	186	184
	12. noct.	185	183
22	6. a. m.	183	182
	1. p. m.	177	178
	12. noct.	172½	174
23	6. a. m.	170	172
	2. p. m.	168	168
	12. noct.	167½	167
24	6. a. m.	167	168
	2. p. m.	167	168
	12. noct.	185	173
25	6. a. m.	197	183
	3. p. m.	200½	195
	11. p. m.	218	200
26	5. a. m.	218	205½
	10. a. m.	218	209
	3. p. m.	218	207
	11. p. m.	218	205

1737.

Mensis et dies	Tempus obseru.	In aëre	in glacie
Nouembr.			
27	6. a. m.	218	204
	12. m.	270	202
	2. p. m.	195	200
	11. p. m.	176	188
28	6. a. m.	170	179
	3. p. m.	167	172
29	1. a. m.	165	167½
	8. a. m.	168	168
	2. p. m.	163	186
	11. p. m.	166	186
30	6. a. m.	168½	188
	2. p. m.	166	188
	12. noct.	172	188
Decembr.			
1	6. a. m.	175	195
	2. p. m.	178	198
	12. noct.	192	205
2	6. a. m.	183	205
	3. p. m.	177	201
	12. noct.	175	198
3	6. a. m.	171	195
	2. p. m.	168	192
	11. p. m.	169	189
4	7. a. m.	169	191
	2. p. m.	167	190
	12. noct.	168	190
5	12. m.	169	190
	11. p. m.	178	196
6	6. a. m.	182	200
	2. p. m.	181	200
	11. p. m.	190	205
7	8. a. m.	182	204
	2. p. m.	179	202
	12. noct.	185	203

1737

1737

Mensis et dies	Hora	In aëre	In glacie
Decembr.			
8	8. a. m.	181	202
	2. p. m.	180	201
	11.p.m.	181	200½
9	6. a. m.	185	203
	2. p. m.	184	203
	12.noct.	196½	210
10	8. a. m.	203	216
	2. p. m.	199	218
	11.p.m.	203	219
11	8. a. m.	210	223
	3. p. m.	252	221
	12.noct.	197	214
12	7. a. m.	189	205
	3. p. m.	179	205
	12.noct.	178½	193
13	7. a. m.	169	192
	2. p. m.	168	191
	12. noct.	175	194
14	7. a. m.	177	196
	3. p m.	176	197
	12. noct.	175	197
15	8. a. m.	172	195
	3. p. m.	168	193
	12. noct.	166	190
16	8. a. m.	163	188
	3. p. m.	161	185
	11.p.m.	165	184
17	8. a. m.	164½	186
	2. p. m.	161	185
	12.noct.	163	184
18	8. a. m.	161	183
	2. p. m.	159	183
	12.noct.	163	182½
19	7. a. m.	155	182

1737

Mensis et dies	Hora	In aëre	In glacie
Decembr.			
19	4. p. m.	155	181
	12.noct.	162	185
20	8. a. m.	167	187
	4. p. m.	169	192
21	4. a. m.	174	195½
	12. m.	177	199
	11.p.m.	186½	201
22	8. a. m.	176	202½
	4. p. m.	172½	199
	12.noct.	172	198
23	8. a. m.	170	196
	4. p. m.	164	194½
24	3. a. m.	167	193
	12. m.	169	193
	11.p.m.	163	193
25	8. a. m.	167	193
	4. p. m.	165	192
	12.noct.	163	189
26	6. a. m.	165	190
	4. p. m.	189	208
	12.noct.	192	209
27	8. a. m.	196	214
	4. p. m.	196	215
	12.noct.	206	227
28	8. a. m.	206	230
	4. p. m.	200	226
	12.noct.	202	226
29	8. a. m.	213	227
	4. p. m.	263	226
	6. p. m.	217	226
	12.noct.	201	226
30	6. a. m.	206	228
	5. p. m.	206	228
	12.noct.	206	233

1737

Mensis et dies	Hora	In aëre	In glacie
Decembr.			Qu ia ☿ infra monticulum glacialem substitit, obseruari non potuit.
31	8. a. m	206	
	6. p. m.	198	
	12. noct.	196	
1738 Ianuar.			
1	8. a. m.	197	
	5. p. m.	196	
	11. p. m.	196	
2	7. a. m.	197	
	4. p. m.	195$\frac{1}{2}$	226
	12. noct.	191	221
3	8. a. m.	187	216
	4. p. m.	184	212
	12. noct.	184	210
4	7. a. m.	182	109
	4. p. m.	180	207
	12. noct.	196	215
5	7. a. m.	216	223
	5. p. m.	212	223
	12. noct.	212	227
6	7. a. m.	212	227
	4. p. m.	195$\frac{1}{2}$	223
	12. noct.	201	223
7	7. a. m.	201	226
	4. p. m.	198	226
	12. noct.	217	229
8	8. a. m.	217	234
	5. p. m.	216	230
	12. noct.	217	232
9	7. a. m.	217	235
	4. p. m.	217	231
	12. noct.	275	229
10	7. a. m.	196	225

1738.

Mensis et dies	Hora	In aëre	In glacie
Ianuar.			
10	4. p. m.	187	218
	12. noct.	195	218
11	8. a. m.	220	226
	4. p. m.	197	223
	12. noct.	226	226
12	7. a. m.	226	230
	4. p. m.	187$\frac{1}{2}$	222
	12. noct.	181	213
13	8. a. m.	185$\frac{1}{2}$	213$\frac{1}{2}$
	4. p. m.	172$\frac{1}{2}$	202
	11. p. m.	171	202
14	7. a. m.	170	199
	11. p. m.	176	200
15	7. a. m.	169	200
	3. p. m.	163	195
	12. noct.	164	193
16	7. a. m.	161$\frac{1}{2}$	192
	3. p. m.	158$\frac{1}{2}$	190
	12. noct.	162	190
17	7. a. m.	163	190
	4. p. m.	163	189
	12. noct.	166	193
18	8. a. m.	164	192
	6. p. m.	165	192
	12. noct.	165$\frac{1}{2}$	193
19	7. a. m.	170	196
	4. p. m.	170	196
	12. noct.	168	196
20	7. a. m.	166	195
	12. noct.	186	204
21	7. a. m.	198$\frac{1}{2}$	216
	5. p. m.	188	216
	12. noct.	188	214
22	7. a. m.	199	222

1738

Mensis et dies	Hora	In aëre	In glacie
Ianuar.			
22	6. p. m.	186	214
	12 noct.	192	216
23	8. a. m.	191	217
	5. p. m.	178	210
	11. p. m.	172	206
24	7. a. m.	174	203
	5. p. m.	162	196
	12. noct.	161	193
25	7. a. m.	158½	189½
	12. noct.	154	183
26	7. a. m.	159	185
	4. p. m.	157	184
	12. noct.	162	188½
27	7. a. m.	164	192
	11. p. m.	186	204
28	8. a. m.	190	213
	12. noct.	175	197
29	7. a. m.	179	205
	5. p. m.	164	196½
	12. noct.	184½	204
30	7. a. m.	186½	211
	5. p. m.	164	196½
	11. p. m.	163	194
31	7. a. m.	160	191
	4. p. m.	153	186
	12. noct.	154	183
Februar.			
1	7. a. m.	155	183½
	5. p. m.	149	191
	11. p. m.	149	205
2	7. a. m.	149	205
	5. p. m.	147	204
	12. noct.	150½	205
3	7. a. m.	156	205

1738

Mensis et dies	Hora	In aëre	In glacie
Februar.			
3	12. noct.	164	212
4	8. a. m.	170	218
	5. p. m.	153	210
	12. noct.	168	214
5	7. a. m.	179	223
	4. p. m.	161	217
	12. noct.	178	223
6	7. a. m.	187	232
	6. p. m.	166	222
	12. noct.	178	225½
7	7. a. m.	168	225
	5. p. m.	161	218
	11. p. m.	165½	219
8	7. a. m.	172	223
	5. p. m.	177	227
	12. noct.	195	235
9	7. a. m.	212	Infra glaci-
	monticu	lum	
	alem.		
	5. p. m.	188	240
			Infra
	11. p. m.	201	mont-
			culum
10	8. a. m.	240	glacia-
			lem.
	5. p. m.	188	239
	12. noct.	188	239
11	7. a. m.	186	237
	5. p. m.	167	223
	11. p. m.	170	221
12	7. a. m.	182	227
	5. p. m.	167	220
13	7. a. m.	170	221
	4. p. m.	163	218

1738

Mensis et dies	Hora	In aëre	In glacie
Februar.			
13	12.noct.	167	218
14	7. a. m.	164	218
	6. p. m.	162	214
	12.noct.	165	215½
15	7. a. m.	169½	220
	6. p. m.	167	217
	11.p.m.	173	221
16	7. a. m.	175	223
	5. p. m.	164½	218
17	7. a. m.	168	222
	5. p. m.	167	218
	12.noct.	186	228
18	7. a. m.	199	240
	5. p. m.	177	231
	12.noct.	191	236
19	7. a. m.	194	239
	5. p. m.	176	229
	12.noct.	191	235
20	7. a. m.	189½	239

1738

Mensis et dies	Hora	In aëre	In glacie.
Februar.			
20	6. p. m.	172	227
	12.noct.	187	232
21	7. a. m.	198	239
	5. p. m.	176	230
	12.noct.	203	infra
22	7. a. m.	220	monti
	11.p.m.	203	culum
23	7. a. m.	241	gla-
	5. p. m.	177	cia-
	12.noct.	179	lem.
24	7. a. m.	179	230
	12.noct.	188	232
25	7. a. m.	195	239
	5. p. m.	171	226
	12.noct.	186	230
26	7. a. m.	194	239
	6. p. m.	169	224
27	7. a. m.	191	336

Quoniam instans iter suadebat, vt thermometrum glacie eximerem, hinc illud vna cum vase, quo continebatur, in conclaue translatum fuit, vt glacies, qua incrustabatur, in aquam resolueretur. Qua translatione facta mercurius paullatim ascendit, glacie eadem ratione circa tubulum euanescente. Postquam vero omnis, quae tubulum circumdederat, glacies disparuisset, vidi tubulum a globo abruptum fuisse, quod sine dubio exinde factum est, quia tubulus a glacie liber, calore conclauis incaluit, sed eodem tempore globus thermometri glacie frigidissima occupatus permansit. Contigit enim hic idem, quod in vase alio vitreo calefacto, cui summe frigidi quid admouetur.

Vt

Vt concluſiones, quae ex hisce obſeruationibus erui poſſunt, meliori cum fiducia eliciantur, addam obſeruationes Ircutiae ab interprete Elia Iachontow factas, circa quas notandum, gradum frigoris aërei indicatum eſſe a thermometro, quod meteorologico Ircutiae obſeruatori relictum fuit, quodque aquae bullienti immiſſum mercurium exacte ad 0 ſuſpendit, alterum vero thermometrum, quod me Iachontowio conceſſiſſe ſupra innui, ad illud Ircutenſe demptione mercurii exactum fuiſſe. Vas thermometrum fouens, e betulae cortice confectum, altum erat dimidiam vlnam, eiusque diameter quadrantem vlnae aequabat. Aqua Angarae fluuii ad obſeruationes adhibita.

1737

Menſis et dies	Tempus obſeru.	In aëre	In glacie
Decembr.			
17	1. p. m.	163	150
	veſpera	162½	150
18	mane	160	150
	1. p. m.	164	150
	veſpera	166	150
19	mane	159	150
	1. p. m.	156	150½
	veſpera	155	151
20	mane	161	151
	1. p. m.	165	151½

1737

Menſis et dies	Tempus obſeru.	In aëre	In glacie
Decembr.			
20	veſpera	166	152
21	mane	174	157½
	1. p. m.	175	159
	veſpera	174	163
22	mane	181	175
	1. p. m.	181	175
	veſpera	178	176
23	mane	181	177
	1. p. m.	181	178
	veſpera	181	178

Thermometrum glacie incruſtatum in conclaue transportatum eſt, et ibidem relictum fuit, donec omnis glacies in aquam reſolueretur, captaque poſtea alia experimenta, de quibus infra dicendi locus erit. D. 28. idem thermometrum priori vaſi, Angarenſi aqua repleto, immiſſum, ſequentes mutationes paſſum eſt.

1737

Menſis et dies	Tempus obſeru.	In aë-re	In gla-cie
Decembr.			
28	1. p. m.	183	150
	veſpera	171	150
29	mane	176	150
	1. p. m.	173	151
	veſpera	172	155
30	mane	178	161
	1. p. m.	177	170
	veſpera	174	172
31	mane	175	174
	1. p. m.	174	174
	veſpera	173	173

1738

Menſis et dies	Tempus obſeru.	In aë-re	In gla-cie
Ianuar.			
1	mane	176	174
	1. p. m.	176	175
	veſpera	176	175
2	mane	196	188
	1. p. m.	191	191
	veſpera	191	190
3	mane	203	197
	1. p. m.	196	198
	veſpera	195	195

Poſt hanc obſeruationem thermometrum in conclaue rurſus transportatum fuit, vt glacie reſoluta illud libere eximi poſſet, ſed contigit illi, quod meo, vt calore conclauis tubulus thermometricus a globo abrumperetur.

Obſeruationes igitur habentur, quae indicant, frigus glaciei plurimam partem intenſum aut imminutum fuiſſe eodem tempore, quo frigus aëris, aut in eodem gradu manſiſſe, in quo äer conſtitutus erat. Patet porro, glaciale frigus interdum augmenta cepiſſe, dum aëreum mitius euaſit, interdum vero decreuiſſe, dum aëreum intenſum fuit, quin et nonnunquam in eodem ſtatu permanſiſſe, dum aëreum intendebatur, aut mitius reddebatur, denique auctum et imminutum fuiſſe, aëreo interim eodem permanente; Quae conditiones, vti plures poſſibiles non dantur, ita maxime videntur eſſe anomalae, et naturam frigoris maioribus difficultatibus inuoluunt, quam adhuc creditum fuit, tantum abeſt, vt in maiori luce ponant.

Ad maiorem vero euidentiam eorum, quae aſſerui, lubet ſingulas mutationes, quae ſub eodem genere comprehendi poſſunt, in ſingulas tabulas referre. Mu-

Mutationes Kirengae factae.

I.

Exempla aucti frigoris glacialis cum aucto simul frigore aëreo.					
Mensis et dies.	Hora	Mensis et dies	Hora	Mensis et dies.	Hora
Nouemb.		Ianuar.		Februar.	
19	tota die	4	12. noct.	5	7. a. m.
20	6. a. m.	5	7. a. m.		12. noct.
21	6. a. m.	7	12. noct.	6	7. a. m.
24	12. noct.	8	12. noct.		12. noct.
25	tota die	11	8. a. m.	7	11. p. m.
29	8. a. m.		12. noct.	8	tota die
30	6. a. m.	13	8. a. m.	9	7. a. m.
Decembr.		14	11. p. m.		11. p. m.
1	tota die	17	12. noct.	12	7. a. m.
5	11. p. m.	18	12. noct.	13	7. a. m.
6	6. a. m.	19	7. a. m.	14	12. noct.
	11. p. m.	20	12. noct.	15	7. a. m.
7	12. noct.	21	7. a. m.		11. p. m.
9	6. a. m.	22	7. a. m.	16	7. a. m.
	12. noct.		12. noct.	17	7. a. m.
10	8. a. m.	26	7. a. m.		12. noct.
	11. p. m.		12. noct.	18	7. a. m.
11	8. a. m.	27	tota die		12. noct.
13	12. noct.	28	8. a. m.	19	7. a. m.
14	7. a. m.	29	7. a. m.		12. noct.
19	12. noct.		12. noct.	20	12. noct.
20	tota die.	30	7. a. m.	21	7. a. m.
21	tota die.	Februar.			12. noct.
26	tota die.	1	7. a. m.	24	12. noct.
27	8. a. m.	2	12. noct.	25	7. a. m.
	12. noct.	3	12. noct.		12. noct.
29	8. a. m.	4	8. a. m.	26	7. a. m.
30	6. a. m.		12. noct.	27	7. a. m.

Mutationes Kirengae factae.

II.

Exempla imminuti frigoris glacialis cum imminuto simul aëreo.					
Mensis et dies.	Hora	Mensis et dies.	Hora	Mensis et dies.	Hora
Nouembr.		Decembr.		Ianuar.	
20	2. p. m.	22	tota die	26	4. p. m.
21	9. a. m.	23	tota die	28	12. noct.
	12. noct.	25	4. p. m.	29	5. p. m.
22	tota die		12. noct.	30	5. p. m.
23	tota die	28	4. p. m.		11. p. m.
27	2. p. m.	Ianuar.		31	7. a. m.
	11. p. m.	2	tota die		4. p. m.
28	tota die	3	8. a. m.	Februar.	
29	1. a. m.		4. p. m.	2	5. p. m.
Decembr.		4	7. a. m.	4	5. p. m.
2	3. p. m.		4. p. m.	5	4. p. m.
	12. noct.	6	4. p. m.	6	6. p. m.
3	6. a. m.	8	5. p. m.	7	7. a. m.
	2. p. m.	10	7. a. m.		5. p. m.
4	2. p. m.		4. p. m.	9	5. p. m.
7	8. a. m.	11	4. p. m.	10	5. p. m.
	2. p. m.	12	4. p. m.	11	7. a. m.
8	8. a. m.		12. noct.		5. p. m.
	2. p. m.	13	4. p. m.	12	5. p. m.
11	12. noct.	14	7. a. m.	13	4. p. m.
12	7. a. m.	15	3. p. m.	14	6. p. m.
	12. noct.	16	7. a. m.	15	6. p. m.
13	7. a. m.		3. p. m.	16	5. p. m.
	2. p. m.	18	8. a. m.	17	5. p. m.
15	tota die	20	7. a. m.	18	5. p. m.
16	8. a. m.	23	5. p. m.	19	5. p. m.
	3. p. m.		11. p. m.	20	6. p. m.
17	2. p. m.	24	5. p. m.	21	5. p. m.
18	8. a. m.		12. noct.	25	5. p. m.
19	7. a. m.	25	tota die	26	6. p. m.

Muta-

Mutationes Kirengae factae.

III. Exempla aucti frigoris glacialis aëreo imminuto.		IV. Exempla imminuti frigoris glacialis, aucto ſimul aëreo.		V. Exempla permanentis frigoris glacialis, aucto aëreo.	
Menſis et dies.	Hora	Menſis et dies.	Hora	Menſis et dies.	Hora
Nouembr.		Nouembr.		Nouembr.	
18	2. p. m.	26	12. noct.	29	11. p. m.
	12. noct.	27	12. m.	30	12. noct.
19	3. p. m.	Decembr.			
21	2. p. m.	3	11. p. m.	Decembr.	
24	6. a. m.	8	11. p. m.		
	2. p. m.	11	3. p. m.	4	12. noct.
29	2. p. m.	16	11. p. m.	5	12. m.
		17	12. noct.	24	12. m.
Decembr.		18	12. noct.	25	8. a. m.
		24	3. a. m.	28	12. noct.
10	2. p. m.	29	4. p. m.		
14	3. p. m.			Ianuar.	
17	8. p. m.	Ianuar.			
				6	12. noct.
Ianuar.		9	12. noct.	10	12. noct.
		15	12. noct.	16	12. noct.
23	8. a. m.	24	7. a. m.	17	7. a. m.
		31	12. noct.	18	6. p. m.
Februar.					
		Februar.		Februar.	
1	5. p. m.			3	7. a. m.
20	7. a. m.	11	11. p. m.	13	12. noct.

Mutationes Kirengae factae.

VI.		VII.		VIII.		IX.		
Exempla permanentis frigoris glacialis, imminuto aëreo.		Exempla aucti frigoris glacialis, permanente aëreo.		Exempla imminuti frigoris glacialis, permanente aëreo.		Exempla permanentis frigoris glacialis, aëreo etiam permanente, licet gradu diuersum fuerit.		
Mensis et dies.	Hora	Mensis et dies	Hora	Mensis et dies.	Hora	Mensis et dies.	Hora	
Nouembr.		Nouembr.		Nouembr		Nouembr.		
30	2. p. m.							
Decembr.		26	5. a. m.	26	3. p. m.	24		
2	6. a. m.		10. a. m.		11. p. m.			
6	2. p. m.			27	6. a. m.	Decembr.		
9	2. p. m.	Decembr.						
12	3. p. m.			Decembr.		30		
14	12. noct.	4	7. a. m.					
18	2. p. m.	27	4. p. m.	19	4. p. m.	Ianuar.		
24	11. p. m.	28	8. a. m.			5		Ki-
29	6. p. m.	30	12. noct.	Ianuar.		6		ren-
	12. noct.					19		gae.
Ianuar.		Ianuar.		3	12. noct.	Februar.		
5	5. p. m.							
7	4. p. m.	5	12. noct.	9	4. p. m.	1		
13	11. p. m.	7	7. a. m.			2		
15	7. a. m.	8	8. a. m.	17	4. p. m.	10		
19	12. noct.	9	7. a. m.					
21	5. p. m.	12	7. a. m.	21	12. noct.	Decembr.		Ir-
22	6. p. m.							cu-
Februar.		Februar.				22		tiae.
14	7. a. m.	1	11. p. m.			23		

Inter

Inter Irkutenses obseruationes, quae Dec. d. 20. 1. p. m. et vespera 21. tota die 22. porro 23. 30. et 31. vt et Ianuar. 1. 2. et 3. quouis mane factae sunt, de frigore glaciali cum aëreo eodem tempore aucto testantur, Dec. vero 31. vespera et Ian. 3. vespera frigus glaciale vna cum aëreo imminutum est. Frigus glaciale auctum fuit, aëreo eodem tempore imminuto, Dec. 19. 22 et 29. d. vespera, 30. 1. p. m. et vespera 31. p. m. Ian. 2. et 3. hora 1. p. m. Frigus glaciale in eodem statu permansit, dum aëreum intendebatur d. 20. Dec. auctum vero fuit, dum aëreum idem permansit Dec. 23. 1. p. m. et Ian. 1. 1. p. m. imminutum etiam, aëreo eodem modo disposito Ian. 2. vespera.

Inter Kirengenses obseruationes, quae exempla imminuti frigoris glacialis, aucto simul aëreo, exhibent, eae, quae 27. Nou. 11. et 29. Dec. vt et 9. Ian. factae sunt, omnino e censu bonarum obseruationum eliminandae sunt, tam repentina enim immutatio frigoris aërei prae glaciali, nullis adparentibus caussis, conceptu perdifficilis est, et cum die 9. Ian. testantibus meteorologicis obseruationibus vel sensibus diiudicari potuerit, frigus eo tempore augmenta non cepisse, dum mercurius in thermometro libere suspenso tantopere depressus fuit, maxime probabile est, frigus aëreum, vti glaciale, tunc temporis imminutum potius fuisse, id quod et collatione sequentium obseruationum thermometricarum, quae in aëre factae sunt, vlterius confirmatur. Idem fere iudicium ferendum est de exemplis imminuti frigoris glacialis, aëreo in eodem statu permanente, quae habentur inter obseruationes 26. et 27. Nou. factas, vt et de exemplis frigoris glacialis permanentis, imminuto aëreo, ex obseruationibus 29. Dec. elicitis.

Ex

Ex obferuationibus igitur, quae reftant, haec corollaria fluunt.

1. Quando aëris frigus augetur, plerumque etiam glaciei frigus augmenta capit. Hoc vero augmentum illi aëreo raro aequale eft, rariffime maius, plerumque vero notabiliter minus.

2. Quando aëris frigus minuitur, glaciei frigus plerumque fimul minuitur. Raro vero decrescunt in eadem ratione, fed plerumque aëreum multo plus decrefcit ac glaciale. Certe mercurius ex eo tempore, quo vltra 240. gradum in glacie depreffus fuit, ab 31. nimirum Decembr. ad 27. vsque Februar. nonnifi femel talem altitudinem attigit, quae aëris temperaturae refpondebat, reliquum temporis perpetuo depreffior ftetit. Ex quo elicitur

3. Glaciale frigus, refpectu aërei intenfum, plerumque tamen magis intendi, quando aëreum acrius fit, licet cum intenfione hac aëreum nondum ad eum gradum accedat, quo gaudebat ante hanc mutationem glacies. Hoc admodum conforme eft experimentis Fahrenheitianis, quae cum fpiritu nitri concentratiffimo inftituta funt; Termini igitur frigoris in glacie nondum cogniti habentur. An non etiam exinde fequitur, quod exiftat materia, modo magis, modo minus abundans, quae, dum corporibus fe infinuat, frigus producit?

4. Viciffitudines et mutationes caloris et frigoris perpetuae funt, tam in aëre, quam in glacie. In tanto enim obferuationum Kirengenfium numero tantum contigit 30. Nou. ab hora 6. a. m. ad 5. p. m. inter 5. et 6. Ian. nocte, die 19. Ian. a 7. a. m. ad 4. p. m. inter 1. et 2. Febr. nocte et 10. Febr. ab h. 5. p. m. ad

me-

mediam noctem, vt frigoris gradus tam in aëre, quam glacie non mutati deprehensi fuerint. Ircutiae, vti ex supra recensitis obseruationibus patet, idem factum est d. 22. et 23. Dec. vt et 1. Ian. Sed aër citioribus subiectus est mutationibus ac glacies. Multo enim plura exempla habentur permanentis frigoris glacialis, tempore, quo aëreum vel imminutum vel auctum fuit, quam aërei frigoris permanentis, dum glaciale mutatum fuit.

5. Datur talis tam aëris quam glaciei status, qui a caussa, quae frigus producit, affici nequit, aliusque, qui nec a caussa frigoris efficiente, nec a caussa contraria affici valet. Vid. Tab. III. – VIII.

Et haec quidem sufficere videntur ad 3.^{am} quaestionem Cl. Weitbrechti soluendam. De niue ob maximam, qua laboraui, thermometrorum penuriam paucae apud me sunt obseruationes. D. 23. Nou. anni superioris, hora 2. p. m. thermometrum, libero aëri expositum, niue obrui ad gradum vsque 275. Frigus aëris tunc temporis mercurium ad 168. gradum, niuis vero ad 164. gradum depressum tenebat, qui gradus per duas horas continuas nihil omnino mutatus fuit. Ircutiae d. 27. Decembr. matutinis horis, cum frigus aëris mercurium ad 182. gradum deprimeret, nix illum ad 174. tantum gradum depressit. D. 13. porro Ian. mercurius in aëre ad 179. gradum suspensus fuit, in niue vero ad 182, et sequenti die in aëre ad 178, in niue ad 180. E quibus hoc saltem elicitur, quod niuale frigus admodum variet, et infra gradum 152. descendat.

In aqua, cuius superficies glacie tecta est, fluat illa, *an quieta* sit, gradum caloris constantissimum obseruaui, qui

qui nec vnquam mutatur, quamdiu aqua fluxum seruat, licet frigus aëris et glaciei summe intendatur. Kirengae d. 3. Nou. ab hora 3. p. m. ad 4. p. m. eiusdem mensis 12. ab 11. a. m. ad. 1. p. m. Dec. 6. a 9. a. m. ad 11. a. m. et 28. a meridie ad 3. p. m. Ian. 5. a meridie ad 4. vsque horam p. m. 27. a 10. hora a. m. ad 2. p. m. Febr. 9. a meridie ad 3. vsque p. m. thermometrum b in Lena fluuio suspensum fuit, in quo mercurius constanter ad 151. gradum adeoque secundum correctionem, qua opus esse immersiones in feruidam factae testantur, 152. stetit. Lena fluuius eo in loco, vbi obseruationes factae sunt, omni hoc tempore glacie riguit et sesquiulnam profundus fuit. Cursus aquarum ibidem lentus. Fundus et ripae fluuii arenosae, silicibus immixtis. Locus porro talis selectus erat, vbi glacies ad superficiem vsque aquae fluentis exscissa erat, vt illi thermometrum commode immergi posset. Ad faciliorem huius rei effectum bacillus ad oras hiatus glacialis implantatus fuit, qui ope claui ferrei thermometrum in aqua fluuii supra globulum sesquipollicem adhuc immersum tenuit. Institui etiam eadem experimenta diuersis temporibus in aquis Kirengae fluuii, non procul ab ostio, paullo supra monasterium, vbi maxima aquarum rapiditas est, in loco fluuii, quatuor vlnas profundo, et fundo ripisque lapidosis gaudente, verum eodem omnino euentu. Nec crustam glacialem, aquae superinductam, crassa illa sit, an tenuis, momentum adferre cognoui. Vidi enim eadem phaenomena, cum crusta esset duorum pedum, ac eo tempore, cum dimidium pedem tantum aequaret. Hisceque omnibus satis conuenit cum experimentis, a laudato

Lachon-

Iachontowio factis; quorum vi tam aqua ſtagnans, cuius ſuperficies glacialis erat, quam aquae fluentes mercurium ad 150. gradum perpetuo ſuſpenderunt. Et quod animaduerſione dignum eſt, aquae Angarae id praeſtiterunt tam eo tempore, quo cruſta glacialis iis nondum inducta erat, nimirum d. 27. Dec. et 5. Ian. quam poſtea, cum tota ſuperficies glacie rigeret, ſcilicet 11. Ian. Hae obſeruationes in loco fluuii factae ſunt, vnam vlnam profundo, et a ripa duas vlnas diſtante. Fundus erat lapidoſus. Quod mercurius perpetuo ad 150. gradum ſtetiſſe dicitur, pro nulla differentia habendum eſſe exiſtimo, quia obſeruationes factae ſunt cum thermometro, Ircutiae obſeruationum meteorologicarum cauſſa relicto, quod in ſcala non quosuis, ſed ſingulos quinque tantum gradus expreſſos ſignat, vt adeo vnus duoue gradus diſtincte diſcerni non poſſint. Forte etiam paullo plus mercurii continebat, forte et incommodus ſitus, quo obſeruator, pronus ſuper glacie procumbens, ſe inflectere cogitur, in culpa eſt.

Quousque calor aquae aeſtate in fluminibus et riuis augeatur, exiſtimo plurium annorum et integrarum aeſtatum obſeruationibus opus eſſe, ſi quid explorati dicendum ſit, cui opportunitati vitae meae ratio haud fauet. Dignas inprimis indagatione cenſerem Angarae fluuii aquas, quae, ſi fides adhibenda eſt incolis, vel feruidiſſima aeſtate hominem eas ſubeuntem frigore concutere valent. Sed propter varia impedimenta praeter ſequentes nullas cum iis hanc in rem obſeruationes inſtitui. Thermometrum in ipſo fluuio ſuſpenſum fuit,

1738.

Mensis et dies.	Hora	In aëre.	In aquis Angarae fl.
Iulius.			
25	12. m.	130	138
26	11. a. m.	130	140
27	7. a. m.	134	139
28	7. a. m.	134	139
	4. p. m.	121	135
29	8. a. m.	132	136
	4. q. m.	116	134
30	7. a. m.	127	136
	3. p. m.	120	135
31	8. a. m.	130	137

Hic finis est dissertationis, cIↃIↃCCXXXVIII. ad Academiam transmissae. Cum vero Cl. Müllerus, fidissimus itineris et laborum Sibiricorum socius cIↃIↃCCXLII. Werchoturiae in Tura fluuio, cuius aquae crusta glaciali non coopertae erant, me rogante, obseruationes thermometricas caperet, e re visum est, eius obseruationes, tempore quidem posteriores, propter materiae similitudinem huiusque tractationis vsum addere.

Mensis et dies.	Hora	In aëre	In Tura fl.
Septembr.			
1	3. p. m.	120	131
16	6. a. m.	144	141
	3. p. m.	122	131
17	6. a. m.	135	137
	3. p. m.	122	131
18	6. a. m.	136	135½
	3. p. m.	134	135½
19	6. a. m.	144	140
	3. p. m.	139	136

Mensis et dies.	Hora	In aëre	In Tura fl.
Sept.			
20	6. a. m.	147	139
	3. p. m.	136	135
21	6. a. m.	144	141
	3. p. m.	131	137
22	6. a. m.	140	139
	3. p. m.	137	137
23	6. a. m.	150	145
	3. p. m.	141	139
24	6. a. m.	155	145

Mensis

Mensis et Dies.	Hora	In aëre	In Tura fl.
Septembr.			
24	3. p. m.	$145\frac{1}{2}$	142
25	6. a. m.	$140\frac{1}{2}$	142
	3. p. m.	133	139
26	6. a. m.	$144\frac{1}{2}$	143
	3. p. m.	130	139
27	6. a. m.	149	144
	3. p. m.	$134\frac{1}{2}$	140
28	6. a. m.	147	144
	3. p. m.	$137\frac{1}{2}$	141
29	6. a. m.	136	$141\frac{1}{2}$
	3. p. m.	138	$140\frac{1}{2}$
30	6. a. m.	143	144
	3. p. m.	$137\frac{1}{2}$	140
Octobr.			
1	7. a. m.	$149\frac{1}{2}$	145
	3. p. m	144	$141\frac{1}{2}$
2	7. a. m.	153	149
	3. p. m	145	144
3	7. a. m.	143	146
	3. p. m.	135	142
4	7. a. m.	147	146
	3. p. m.	138	144
5	7. a. m.	149	$146\frac{1}{2}$

Mensis et dies	Hora	In aëre	In Tura fl.
Octobr.			
5	3. p. m.	134	$142\frac{1}{2}$
6	7. a. m.	139	145
	3. p. m.	134	$142\frac{1}{2}$
7	7. a. m.	137	144
	3. p. m.	135	$142\frac{1}{2}$
8	7. a. m.	139	144
	3. p. m.	$128\frac{1}{2}$	141
9	7. p. m.	$141\frac{1}{2}$	$145\frac{1}{2}$
	3. p. m.	132	$141\frac{1}{2}$
10	7. a. m.	138	$142\frac{1}{2}$
	3. p. m	133	$140\frac{1}{2}$
11	7. a. m.	$140\frac{1}{2}$	144
	3. p. m.	135	141
12	7. a. m.	140	143
	3. p. m.	136	142
13	7. a. m.	136	$141\frac{1}{2}$
	3. p. m.	134	139
14	7. a. m.	$139\frac{1}{2}$	$142\frac{1}{2}$
	3. p. m.	$139\frac{1}{2}$	141
15	7. a. m.	146	144
	3. p. m.	$133\frac{1}{2}$	$142\frac{1}{2}$
16	7. a. m.	148	145
	3. p. m.	$146\frac{1}{2}$	144
17	7. a. m.	155	149
	3. p. m.	150	146
18	7. a. m.	152	148
	3. p. m.	148	148

Fluuii superficies inter vltimo recensitam et penultimam obseruationem glacie riguit, et licet eaedem obseruationes in tertium vsque Nouembris fluuio rigente sedulo continuatae fuerint, eas tamen hic silentio premere consultius visum est, cum ex iis nihil aliud concludi possit, quam quod superius stabiliuimus, calorem aquarum superficie rigente constanter eundem esse. Nullus enim alius gradus obseruatus est, quam 148. 149. 150. quae diuersitas, vti iam monuimus, magis aut minus profundae thermometri in aquam immersioni aut situi obseruatoris diuerso adscribenda est.

Tam secundum Ircutenses quam Werchoturenses obseruationes calor aquarum fluentium plerumque intenditur aut remittit, quando calor aëris easdem vicissitudines patitur, augmentum vero illud et decrementum in aëre notabiliter maius est, quam in aquis; Nimirum dimidia fere parte graduum minus in aquis, quam in aëre. Saltem inter Werchoturenses obseruationes vix quarta pars maiorem aut minorem differentiam dedit, nec nisi bis, scilicet d. 13. Octobris ab hora 7. a. m. ad 3. p. m. vt et ab hora 3. p. m. diei 17. Octob. ad 7. a. m. d. 18. accidit, vt calor aquarum totidem circiter gradibus increverit, quam aëris. Adeoque aquae fluentes, quod ad gradum caloris attinet, nec tam insignibus nec tam subitaneis mutationibus obnoxiae sunt.

Angarenses aquae diebus Iulii, in quibus obseruationes captae sunt, aëre erant frigidiores. Verum Werchoturenses mensibus Septembris et Octobris saepe aëre calidiores fuerunt. Id plerumque accidit, quando mercurius thermometri in aëre infra 135 gradum depressus fuit. Veri-

Verisimile itaque est, si frigus aëris non maius est 135. gradibus, aut si minus est, aquas fluentes plerumque frigidiores esse, calidiores autem, si aëreum frigus huncce gradum superat. Cui quidem sententiae vulgi etiam experientia consentit, contactum ab aquis fluuiorum aestatis tempore frigidiusculum, hieme et autumno respectu aërei frigoris tepidiusculum sentientis.

Equidem inter Werchoturenses obseruationes tales etiam habentur, quae demonstrant, gradum caloris aquarum autumnalibus et hibernis diebus, subinde etiam minorem esse quam in aëre, ipsos hos gradus saepe etiam congruere, in vtrisque porro obseruationibus exempla habentur caloris aërei interdum in eodem gradu persistentis, dum aquarum calor decrescebat, permanentis etiam aquarum caloris, dum aëris calor intendebatur, et remittentis caloris aërei, aquarum simul remittente, quin et videmus, vti supra iam de glaciei et aëris calore animaduersum est, calorem aëris et aquarum, diuersis licet gradibus constituti fuerint, per satis longum temporis spatium permansisse eundem. Saltem hinc patet, non adeo facile calorem aëris cum calore aquarum communicari. Quod autem reliquas attinet anomalias, situs fluuiorum in locis patentibus aut intra montes siue siluas, varius incidens ventus, solis varia actio et permultae aliae minoris momenti circumstantiae eiusmodi phaenomenis, naturae non respondentibus, occasionem praebere possunt, in quae omnia iam inquirere temerarium foret, cum constantes naturae effectus nondum cognitos habeamus.

DESCRIPTIO CAMELI BACTRIANI

BINIS IN DORSO TVBERIBVS,

E SCRIPTIS

D. G. MESSERSCHMIDII

COLLECTA

A

I. Ammanno.

Cum iussu *PETRI MAGNI* ante viginti circiter annos Daniel Gottlieb Messerschmidt, Gedanensis Medicus, in Sibiriam rerum naturalium inuestigandarum causa iter faceret, praeter plantarum rariorum plurimas etiam animalium quadrupedum et auium descriptiones exarauit, quarum paucae in eius scriptis Academiae traditis post reditum, extabant, plurimae vero desiderabantur. Post mortem Viri Clarissimi Academia scripta etiam reliqua, nempe Diarium eius partim Germanico, partim Latino idiomate conscriptum, et volumina plura auium descriptiones continentia sibi comparauit. Haec Illustri Praesidi nostro, vt attente examinarentur, digna visa sunt. Iubente eodem illa perlegi, et quae mihi notatu digna videbantur, excerpsi, dispersasque non raro pluribus voluminibus obseruationes collegi et in ordinem adduxi. Harum eas, quae ad rem herbariam spectant, Tractatui de stirpibus huius Imperii rarioribus inserui, quae ad animalium historiam illustrandam et augendam idoneae

mihi

mihi visae sunt, Academiae Commentariis paulatim inserendas, in conuentibus nostris, si ita placet, praelegam. (*) Descriptiones omnes non aeque perfectae erunt. Sunt, quae prolixa dictione et minutissimarum quoque partium dimensione nauseam fortasse nonnullis mouebunt. Satius autem est, vt opinor, in rerum naturalium historia nimia accuratione, quam nimis obscura breuitate errare. Praestat etiam descriptiones minus perfectas exhibere quam nullas. Incipiam a descriptione Cameli Bactriani binis in dorso tuberibus, cuius Plinius iam mentionem fecit Historiae suae naturalis Libro 8. Cap. 18.

Camelo per Asiam et Africam non datur notius et ad onera ferenda aptius et vtilius animal. Duae eius sunt species, altera, quae vnico in dorso tubere seu gibbo, altera, quae duobus praedita est. Prior in Africa et Asiae prouinciis occidentalibus praesertim reperitur; posterior per vniuersam Tatariam, apud Persas, Bactrianos, et Mogulos frequens est. Cameli vnico in dorso tubere praediti descriptionem satis accuratam dederunt Academici Parisienses: Cameli vero Bactriani duobus in dorso tuberibus accurata nondum extat. Quare eo gratiorem hancce sequentem Messerschmidii descriptionem iis fore speramus, quos animalium historia iuuat.

Camelus Bactrianus masculus, annosus, cuius descriptio hic exhibetur, A. 1724. in Dauria pro Mercatoribus Ruthenis Pekinum, Sinarum Imperii caput, petituris, a Mo-

(*) B. Ammannus in Camelo Bactriano substitit, impeditus aliis negotiis et morte praematura. Curabit autem Academia, vt vtilissimum hoc desideratissimi Collegae institutum continuetur, ne fructibus locupletissimis tanti itineris, quale b. Messerschmidius suscepit, publicum fraudetur.

Mogulis emtus, mortuus libras Ruthenicas 1350, seu minas medicinales 1156, ℥x, cum ʒß pondere aequabat.

Nomen. A Ruthenis vocatur Велблудъ Bhelblud, a Tataris Tobolskoensibus Thauwáh; ab Arabibus Ibil; a Persis Schetur; a Mogulis Taemaegaeh goerogaessu; a Burathis Taemae görossu; a Taniutis et Indis extra Gangem ང་ཀོད Ngagodt; ab Indis intra Gangem vulgo उरिउट Uriuth.

Caput. Caput huius Cameli in multis ad equinum accedit,

Labia. in multis ab eodem diuersissimum est. Labia ampla sunt, crassa, mollia, foris vndique pilis breuibus e ruso incanis dense obsita; labium superius in medio ad dimidium fere sui latitudinem fissum, inde vero vsque ad nasi columnam integrum, sulcoque superficiali vel fossula cutacea, nuda, nigricante, insignitum est; inferius omnino integrum in medio adductum vel tantillum assurgens, quantum occludendae superioris labii crenae, quam idcirco subintrat, sufficere potest. Labium superius latum est ab imo margine ad fissurae finem 1°. pollic. 2′. lin. 5″. Scalae Rhinlandicae, idem ab imo margine ad columnam nasi 2°. 9′. Sulcus labii depilis longus 1°, 6′, 5″, ab imis labiis ad oris fraenum 6°; oris latitudo per fraenum seu angulos vtrinque maxima est 5°, 5′, Rictus oris inter gingiuae superioris edentulae et dentium incisorum inferioris

Bucca. maxillae aciem 6°. Bucca circa molares praecipue villosissima est, papillis, fere pollicem transuersum longis et dense congestis praedita, saliuam inter mandendum vberrimam eructantibus.

Ma-

Maxilla superior dentibus incisoriis caret, anterius edentula est et caninis ab vtroque latere ternis et quinque molaribus instructa. Maxilla sup.

Palatum tunica liuente, crassa, admodum laxa, turgidissima, rugis inter caninos vbi angustissimum est, transversalibus amplis inaequali, inter molares vbi latissimum et in fornicem excauatum, sensim magis stricta, laeui, subalbente vestitum est, longum a gingiua anteriore ad rimam 14°, 5′, latum inter caninos dentes 1°, 5′, inter molares primos 2°, inter molares vltimos 3°, 8′, 5″. Palatum.

Lingua carnosa, pallens est, prope radicem turgida et crassa, papillis maioribus inaequalis, versus medium gracillima, papillisque minoribus asperis dense consita, inde a ranula vel fraeno sublinguali in apicem ellipticum desinendo depressior, plana, tantisper latior laeuiorque, longa ab apice ad radicem in ossiculo hyoidaeo terminatam 18°, ab apice ad ranulam seu fraenum 4°, 5′. eadem lata ante ranulam pariterque circa radicem 2°, 6′, 5″, in medio autem 1°, 6′, 5″; eadem alta anterius circa fraenulum 9′, 5″, circa radicem vero 2°, 1′. Lingua.

Maxilla inferior dentibus incisoriis anterius senis, caninis a singulo latere tantummodo binis, molaribus denique quinis vtrinque instructa est. Maxilla inf.

Nasus neutiquam gibbosus est, vt perperam in omnibus fere huius animalis iconismis repraesentatur, sed dorso penitus recto, angustiore paululum, in apicem deinde triangularem aequilaterum decliuis, orbiculi apice in columnam denique nasi breuissimam vix notabilem subsidente, totus vndique pilis breuibus sed densis fuscescentibus vestitus: nares in columna omnium maxime conuergentes, Nasus.

 retro

retro circa sui sinum posticum summe diuergentes, amplae sunt, parum patulae, alis scilicet tantisper subsidentibus, longae a columna narium ad earundem sinum postremum 2°, 7′, 5″; eaedem latae seu patulae 9′, 5″; earundem conuergentium intercapedo ad columnam minima 4′, diuergentium per sinus postremos maxima 3°; Nasi longitudo a columna et orbiculi apice ad septi cartilaginei verticem inter nares 2°. eadem ad ossium nasalium et frontis commissuram ante oculos 10°. 5′; latitudo qualis in Equo est.

Oculus. Oculus in orbita sua paululum extantiore, mediocriter protuberans et quaquauersum mobilis est; palpebris vtrisque mobilibus, inferiore tamen minus, intus albis, foris vndique pilis fuscis vestitis, solo tarso parum emarginato, tenui, pilis nudo, nigricante, ciliaribus tamen pilis longiusculis, rigidis, rufis cincto; latus in diametro ad canthos sumpta 1°, 5′, 5″. Lacuna lachrymalis nulla est, desunt et supercilia. Distantia ab imis labiis ad oculi canthum internum seu maiorem est 12°; ab iisdem ad externum seu minorem 13°. 5′. Oculorum intercapedo ad canthos internos est 8°. 6′. Eadem ad oculi axem oblique antrorsum vergentem 11°. eadem ad canthos externos 10°. 7′.

Auris. Auris externa in pinnam retrorsum exporrecta est capiti appressam, parum mobilem, cartilagineam, valde patulam et admodum latam, apice minus acuto praeditam crassam, duram, foris et intus pilosissimam; concha amplior paulo ad meatum ducit in infimo eius recessu angustum, tubulosum, oblique antrorsum vergentem: distantia ab imis labiis ad aurium radicem est 18°. 6′. ab

iisdem

iisdem ad auriculae sinum 20°. 2′. ab iisdem ad pinnae apicem 23°. 7′. Auris externa a radice ad apicem longa est 5°. 1′. ab auriculae sinu ad apicem 3°. 6′. eadem citra tensionem lata 3°. tensa vero 3°. 3′. Aurium intercapedo per sinum meatui obuersum est 10°. 3′. eadem per libere arrectarum apicem 13°. 5′.

Frons non admodum prolixa est, inter oculos tantisper concaua et latissima; vertex propemodum rectilineus, vix ac ne vix conuexus est, lanugine densa et longissima, sursum rigente, fusca in ima radice tenuissima, molli, versus apicem in pilos fere decuplo crassiores setarum rigidiuscularum similes degenerante vestitus. Frons.

Capitis altitudo a vertice pone suturam coronalem ad maxillae inferioris dorsum est 12°. 1′. 5″ eadem per oculum ad maxillae dorsum 10°, 5′. 5″. per medium nasi dorsum 8°. 8′. per oris fraenum et angulum menti 8°. 2′. per narium columnam et dentes incisores 4°. 5′; longitudo ab imis labiis ad suturam lambdoideam occipitis 22°. 5′. ad processum occipitis globosum seu Nucham 20°. 5′. Capitis dimensiones.

Collum gracile est, longum, serpentina sinuositate inflexum, rigidae ceruicis, iuba per decursum ceruicis lanuginosa, densa, non tamen pensili, aliaque simili per anterius collum procurrente praeditum, longum 36°. latum in diametro minima 7°. in maxima 7°. 3′. idem in perpendiculo minimo neglecta iubarum lanugine altum est 10°. in maximo autem versus axillas 15°. Collum.

Axillae angustae sunt et clauiculis carent; earum intercapedo ad scapularum et humeri capita est 14°. ab imis labiis ad axillas seu scapularum et humeri capita 56°. Axillae.

Pedes antici. Pedes antici ab axillis pendentes, ex humero musculis toroso et lana vberiore prolixaque deformiter vestito, cubito cum radio, carpo, metacarpo digitisque triphalangiis geminis, vnguiculatis, substantia adiposo-tendinosa, tertium fere pollicem transuersum crassa, turgida singulari seorsim, suffultis, soleaque vltra secundae phalangis medium vsque, vtrisque communi, inde vero ad tertiae phalangis apicem vsque fissa, callosa, digitum transuersum crassa, molli, flexili, subalbida munitis, compositi sunt; longi ab humeri capite ad vnguis apicem 54°, ab imis labiis ad pedum anteriorum sub expansione directa oris apicem non contingentium extimos vngues 17°; humerus enim directe antrorsum extendi nequit, vnde ingens illud interuallum resultat, quod addita humeri longitudine 13°. 5′. residua, extendi nescia, saltem 4°. foret: iidem pedes retrorsum horizontaliter iuxta corporis longitudinem extendi nullo modo possunt, quamuis in fissi pedibus digitatis pentadactylis aliisque, quibus claviculae conceduntur, illud secus obseruetur. Pedum anticorum solea propemodum orbicularis est, crassa 4°. 7′. longa lataque in diametro 7°. eius fissura inter digitorum apices longa est 2°. 5′. 5″.

Pedum anticor. dimensiones.

Solea.

Thorax. Thorax e spina dorsali gibbosa, costis et sterno pariter gibboso compositus vastae molis est. Gibber interscapulare tota sua substantia sebaceo-tendinosum, molle, flexile, inter corporis motum quaquauersum a latere nutans, sub specie monticuli in conum fastigiati conspicuum sextae potissimum dorsi vertebrae, tum etiam proximarum vtrinque adiacentium processum posteriorem spinam vulgo nuncupatum, obsidet, cuius lateribus ossium deinde scapula-

Gibber interscap.

pularium testudo postrema eiusdemque cartilago vtrinque pressius accumbit.

Gibber pectorale, eiusdem substantiae sebaceo-teudinosae saltem densioris compactiorisque, gibberi interscapulari fere perpendiculariter oppositum, superque sterni ossiculo potissimum sexto et proxime vtrisque adiacentibus, idcirco insigniter dilatatis, instar culcitrae triangularis complanatae subnatum, trianguli sui apicem quarto sterni internodio obuertit, basi interea cartilaginem xiphoidem proxime stringente. Distantia ab imis labiis ad sextam thoracis vertebram et gibber interscapulare est 77°. 5′; Gibberis interscapularis altitudo in perpendiculo ab eius vertice ad dorsi spinam reliquam 7°. 9′. ab imis labiis ad sterni caput 59°. ab iisdem ad gibberis pectoralis medium 74°. 5′. Gibber pectorale in perpendiculo ab apice trianguli ad basin 7°. 5′. eiusdem altitudo a planitie, inter procumbendum detrita, depili, callosa, ad ossium sterni superficiem 2°. 7′, ab imis labiis ad xiphoidis et sterni finem 81°. Thoracis altitudo a spina subsidentiore ad sternum 3°. 5′. eadem a gibberis interscapularis vertice ad gibberis superficiem 40°. Animalis perpendiculum a spina thoracis ad vngues 69°; idem a gibberis interscapularis vertice ad vngues 76°. 9′. Thoracis diameter seu latitudo per costas maxima est 24°. Gibber pectoral.

Abdomen sub lumbis et coxis, inter diaphragma thoracis et anum, paululum thorace magis distentum est, gibbereque lumbari, quartae potissimum lumborum vertebrae et proximarum deinde vtrinque adiacentium spinam obsidente, interscapulari per omnia simili, onustum. Vmbilicus in abdominis medio situs est, folliculo vmbilicali, Abdomen. Vmbilicus.

 qua-

qualis in Moſchifera et Seren vel Ohn Mogulico deſtitutus. Lumbi latiſſimi ſunt, Coxae in Ilii ſpina tamen latiores.

Lumbi.

Penis.

Penis ingens, validus et robuſtus eſt. Scrotum nullum. Teſticuli inter muſculos peni vtrinque accumbendo abſconditi ſunt.

Teſticuli.

Mammae.

Mammariae papulae binae tantum ſunt. Diſtantia ab imis labiis ad lumborum et dorſi confinia eſt 90°, 5′, ab iisdem ad gibbereis lumbaris perpendiculum per medios lumbos 100°, 5′, ab iisdem ad vmbilicum 91°, ab iisdem ad penis apicem 105°. Gibberis ſcapularis et lumbaris intercapedo per ſingulorum vertices eſt 24°, ab imis labiis ad lumborum et Oſſis ſacri confinia 110°, 5′, ab iisdem ad mammas 111°. Abdominis altitudo in perpendiculo a ſpina dorſi inter gibbera ad vmbilicum demiſſo eſt 29°, eadem a gibberis lumbaris vertice ante penis apicem demiſſo perpendiculo 36°. Animalis altitudo in perpendiculo a gibberis ſcapularis vertice ad vngues poſticos eſt 79°, 5′. Abdominis latitudo maxima eſt 24°. Mammariarum papularum intercapedo 4°, 6′. Lumborum latitudo maxima 15°. Diſtantia ab imis labiis ad coxarum initium ſeu oſſis Ilii ſpinam 107°, 5′, ab iisdem coxarum acetabulum Iſchii 116°. Coxarum latitudo inter Ilii ſpinam vtrinque 18°, eadem inter Iſchii acetabulum vtrinque 9°, 7′.

Pedes poſtici.

Pedes poſtici ab Iſchii coxarum acetabulo pendentes, e femore muſculoſo lanaque extrinſecus prolixa denſe veſtito, patella deinde ante genu, tibia, fibulam non reperi, tarſo heptoſtiode, metatarſo ſimplici, digitisque triphalangiis, vnguiculatis, culcitra ſebaceo-tendinoſa, admodum ſpiſſa

spissa suffultis geminis, solea callosa, digitum manus transversum crassa, molli tamen et flexili subalbida, vtrisque communi, orbiculari, vltra secundae phalangis medium vsque ligatis, inde vero ad extremos vngues vsque fissis, compositi sunt; longi a femoris capite ad vngues 58°, eorundem solea orbicularis, anterius fissa, crassa est 4′, 5″, longa lataque in diametro 6°, soleae fissura inter digitorum apices longa est 1°, 8′, 5″. Ab imis labiis ad pedum posticorum retro extensorum extremos vngues 170°. Intercapedo inter pedum anticorum antrorsum, posticorum retrorsum extensorum extremos vngues in animali nondum dissecto est 153°, eadem in dissecti sceleto 171°. Genuum posticorum diuaricatio maxima est, citra sectionem, 50°, eadem inter genuum patellas in sceleto 52°, 2′.

Clunes pro vastissima corporis mole angustae valde sunt; cauda Asininae similis est. Distantia ab imis labiis ad anum est 123°, ab iisdem ad ossis sacri et coccygis in caudam abeuntis confinia 119°, ab iisdem ad extremam caudae vertebram 138°, 5′, ab iisdem ad pilorum in extima cauda finem 145°. Clunes. Cauda.

Pellis densa et crassa est, potissimum circa genua, in quae procumbere sueuit animal, inque summo dorso. Pili seu lana potius densa et mediocriter prolixa est, a radice vltra sui mediam longitudinem cinerea, tenera, subtilis, inde in apicem vsque durior paulo e fusco brunnea est, recta non crispata, humano capillo parum dissimili, vsibusque humanis instar ouilis lanae impendi apta; vnde etiam euelli ab Asiaticis solet, tanto magis quod sua sponte statis anni tempestatibus cadere per alopeciam quandam, naturalem minimeque morbosam, in totis gregibus sine discrimine obseruata fuerit. Pellis. Pili.

Domesticum caeteroquin animal est et mansuetum; circa libidinis tamen aestum saepe ferociens; vnde nares retro columnam spiculo vel clauo ligneo transfigi mature iunioribus solent, vt habena vel simplici saltem loro, claui huius cuspidi praeligato, regi facilius queat. Eius lacte vescuntur Moguli, neque a carne abstinent, quoties senio morbisue confecti pereunt; vegetum enim victus causa occidere nefas est.

Consideratis partibus externis, internarum descriptionem aggrediamur. Larynx. Larynx seu tracheae vel asperae arteriae caput, tertia propemodum parte minor est illa Caprae gutturosae hydrophobae Seren Burathis, Ohn Mogulis dictae de qua infra agetur, quamuis differentia molis inter vtriusque ferae cadauer esset, vt 1 ad 16, tantisper ipsa trachaea crassior ampliorque, e quinque cartilaginibus et epiglottide constans, longa ab epiglottidis apice sua mole pendulae ad cricoidis finem 6°, ab epiglottidis apice pendulo ad glottidis apicem 3°, 2′, a fissura seu crena thyroidis vel scutalis ad cricoidis vel annularis finem 3°, 7′, lata vero per epiglottidem 1°, 8′, circa arytaenoides latissima 2°, 5′, 5″, cricoidis fine in diametro 2°, 1′, 5″, eiusdem altitudo maxima in perpendiculo per arytaenoides demisso est 2°, 7′. Structura cartilaginum aliorum brutorum similis est.

Trachaea. Trachaea seu aspera arteria ex annulis cartilagineis, non omnino integris, octuaginta et quod excurrit, a parte postica Oesophago accumbente et inter se mutuo membranarum ope connexis composita, in interna superficie membrana longitudini totius trunci coextensa aequabili, laeuissima vestitur, atque proxime quidem a larynge tantisper

tisper amplior, ſub reliquum ſui progreſſum aequabiliter teres et recta, longa a primo annulo ad vltimum circa diuaricationem ad pulmones 50°, ſcilicet ſub maxima tenſione, lata in diametro circa laryngem maxima 2°, 1', in diametro verſus pulmones minima 1°, 7', 5'', Ante tracheae ingreſſum in thoracem glandula conglobata utrinque vna, circa infimam colli vertebram conſpicitur, ipſis muſculis incumbens, ouo gallinaceo maior, cuius ſimilem in auibus quoque obſeruaui. Tracheae glandulae.

Pulmones maximam thoracis partem occupant, ſuntque bilobi, lobis ſuperne in pinnam praelongam abeuntibus plerumque retroflexam et cordi ſuperiniectam, cum pinnula in dextri lobi margine interno circa tracheae immerſionem, mamuscula, et vtriusque denique lobi margine polyſchido, fiſſuris minus profunde penetrantibus. Eorum lobi interni quamplures, per tracheae ramificationes ſucceſſiue et ſeorſim ſufflati eleganter conſpicui ſunt, ab inuicem diſcernendi faciles, diſſecandi minus. Bronchia, ſeu vltimae ramificationes tracheae, in veſiculas pulmonales denique terminantur, ſanguinis recrementa, verba ſunt Auctoris, ex arteriis, bronchiae ramos ab alterutro latere perpetuo comitantibus accepta, ſub ſpumae lentae, niue candidioris ſpecie, adeo vbertim, etiam poſt mortem animalis, eructabant, vt tota trachaea ad laryngem vsque oppleta ſpumam ori infunderet. Vnde non latebat amplius, qui animalia haec eandem paſtui herbaceo in ore permiſtam ſub indignationis feruore euibrare in obuios ſibi moleſtos, vltra paſſus circiter ſeptem vel octo, obſeruentur: neque in equis non caſtratis generoſioribus, ſub leui curſu vel motione corporis, ore ilico ſpumantibus, di- Pulmones. Bronchia.

uerſam eius ſpumae originem fore, licebat iamiam ſuſpicari. Pulmonum longitudo a tracheae immerſione ad loborum infimum apicem vsque eſt 20°, 5′, ab eadem immerſione ad pinnarum maiorum deſuper exporrectorum extimum apicem 12°, 5. Vtriusque lobi tota longitudo a pinnae maioris apice ſuperno ad lobi ipſius infimum apicem 33°, 5′. Loborum ſingulorum latitudo maxima eſt 12°, 3′.

Cor. Cor ingens eſt, valde acuminatum vel trochiforme, pueri decennis capite maius, biventre, binis inſtructum auriculis, pericardioque obuolutum. Pericardium. Pericardium intus laeue et humore pauciſſimo refertum erat, foris copioſo adipe perfuſum et inaequale; Superius vaſis communibus cordis, inde vero Mediaſtino ſui duplicatura illud forinſecus veſtiente, adnatum eſt, circa conum tamen, vt in omnibus brutis hactenus cognitis, omnino liberum. Dexter cordis ventriculus breuior quidem, ſed multo amplior ſiniſtro, parietem externum habebat altero tanto tenuiorem ſiniſtro, internum vero a ſepto cordis formatum, gibboſum ſeu conuexum, vtrosque tandem circa medium ope trabis carneae inſignioris, cygnei calami craſſitiem ſuperantis, connexos; Valuulae tricusp: Valuulas praeterea ante Cauae orificium tricuspides latiſſimas, ternas, infinitis propemodum lacertulis tendineis, in columnas ventriculi carneas deſinentibus, expanſas. Arteria pulmonalis orificium ab eodem ventriculo procedens, Valuulae ſemilun. rurſus valuulis Semilunaribus ternis ampliſſimis inſtructum, latum eſt in diametro 1°, 2′, vt proinde facile conſtet, quanta ſanguinis moles ab hocce ventriculo ad pulmones deriuetur, indeque ad ſiniſtrum per pulmonalem venam remeet. Siniſter cordis ventriculus

lus dextro longior atque ad infimum vsque cordis conum pertingens, ſed multo anguſtior, parietem externum habebat duplo craſſiorem externo dextri; internum a Septo formatum concauum, nulla inter utrosque mediante trabe carnea conſpicua. Valuulae ante pulmonalis venae orificium mitrales binae minores cum tertia, in homine non occurrente, vt in tauris, cum ſuis lacertulis et columnis, illarum Venae cauae in dextro ventriculo ſimiles. Arteria aorta ſuis pariter ſemilunaribus valuulis ternis inſtructa eſt, in quibus nodulus fibrillaris tendineus, limbi valuulae medium occupans, et ſemen fere Coriandri aequans conſpicuus erat. Sub iisdem valuulis arteriarum coronariarum orificia gemina, cygneo calamo longe patentiora occurrebant, quemadmodum Venae coronariae orificium in Caua apparuerat. Auriculae tandem geminae, ſingulo ventriculo ſingula, a venarum exteriorum latere, Venae ſcilicet cavae iu dextro et Pulmonariae venae in ſiniſtro ventriculo praefectae, amplae ſatis erant, ſiniſtra tamen dextra notabiliter minori. Septum cordis binis fere digitis manus transuerſis craſſius eſt.

Valuulae mitrales.

Aortae valuulae Semilun.

Auriculae Cordis.

Diaphragma a ſterni cartilagine ad lumbares vertebras oblique deſcendendo thoracem a ſubiecto abdomine diſſepiens, muſculoſo tendinoſum eſt, ambitu ellipticum, plano ſuperiore convexum, iuferiore concauum, muſculis inſtructum geminis: anteriori tenui, lato, poſteriore autem craſſo et ob tranſeuntem Oeſophagum perforato; venoſis denique ramis pariter binis, a Cauae inferioris trunco eius partem tendineo neruoſam dextram tranſeunte abſcedentibus, ſuperius pleura, inferius peritonaeo veſtitum. In eius centro ſingulare erat oſſiculum planum irregularium

Diaphragma.

laterum cartilagine vndique tectum, in quod musculorum tendines vel caudae concurrentes inferebantur; Cuius simile aliquod Ao. 1645. in Angli cuiusdem anatome obseruavit Celeb. Bartholinus Cent. 2. Obs. Anat. 85. Ossiculi nostri diameter maxima fere erat 1°, 1′, 5″, minima 7′, crassities 1′, 8″.

Hepar. Inter abdominis tandem viscera primarium Hepar immediate sub diaphragmate hypochondrium dextrum potissimum occupabat, firmiterque ope suspensorii tenuisque membranae propriae a peritonaeo oriundae eiusque substantiam inuestientis, et Venae demum Cauae inferioris, diaphragmati adnatum erat, in gibbosa parte laeue, et omnino monolobum, a sima facie concaua laciniolam vel pinnam potius maiusculam unicam exhibendo, tota reliqua superficie rimis et fissuris vltra pollicem transuersum subinde penetrantibus quamplurimis, si non laciniosum saltem ad modum inaequale. Eius substantia parenchymatica valde spongiosa, porosa, mollis et quasi dissoluta, seu minus vtique quam in sanis vulgo solet, compacta erat, morbosa, cum abscessu purulento, ouum fere gallinaceum aequante, versus cauae immersionem, tum hydatibus quibusdam passim intercurrentibus, morbi forsan et lentae animalis mortis causis. Longitudo eius erat 15°, latitudo

Cystis fellea. 10°, 5, crassities 2°, 4′, 5″. Cystis fellea nulla omnino conspicua fuit.

Pancreas-Lien. Pancreas diffusum amplissimum erat; Lien in sinistro hypochondrio ventriculi prolobo maiori stricte adhaerebat, eratque planus, semilunaris, vel soleae equinae faciem gerens, latus in diametro maxima 12°, 3′, spissus fere 1°, 2′.

Oeso-

Oesophagus a pharynge tantillum ampliore, reliquo sui progressu inter colli thoracisque vertebras et trachaeam medius, fere aequabiliter teres et rectus, membranaceus, diaphragma, per musculi posterioris carnosi medium caput perforando, ad ventriculi prolobum maiorem tendit, longus à pharynge ad prolobum 76°, 5′. Oesophagus.

Ventriculus stupendae molis est, respectu ad hepatis situm, in sinistro hypochondrio locatus, ceteroquin tamen maximam fere abdominis partem sub diaphragmate occupans, conformationis valde peculiaris. Eius prolobus primus maior Κοιλία Aristoteli, tantae vastitudinis erat, vt solus omne animalis abdomen, expulsis visceribus et intestinis reliquis occupare inflatus queat; Figura eius propemodum oualis est, substantia membranacea et tenuis, fasciis idcirco ligamentosis eius superficiem fere decussatim transuersantibus munita et circum antra cellulosa ob emittenda eorundem ligamenta reticularia longitudinalia tendinosa, digito transuerso manus crassior, foris ac intus omnino laeuis penitusque rugis carens. Tunica eiusdem tertia seu intima prorsus laeuis et albissima circa antri cellulosi angulum, ab Oesophago auersum remotissimum, dehiscendo, sui portiunculas geminas omnino deserit, quarum altera sub orbicularis areolae albae figura circiter 1°, 1′, 5″, in diametro, altera vix piso maior, insularum more in tunicae subiacentis mediae, vndique circa easdem per hiatum huncce prospectantis, interiore lamella subrubente, conspicitur. Antrum deinde cellulosum maius seu parallelogrammum, Κεκρυφαλώδης graecis, longum est fere 18°, latum 8°, et super prolobi maioris parietem dextrum forinsecus exturgescendo altum 2°, 5′, totum con-

Ventriculus.

Κοιλία.

Κεκρύφαλος.

ſtans ex concamerationibus maiuſculis, foriníecus Pomi fere Aurantio diametro haemiſphaerice convexis, intus concauis a ligamentorum longitudinalium et ſeptorum transuerſorum decuſſatione efformatis, et in prolobum Κοιλιδην proſpectantibus, rurſusque per lamellas cutaceas, ſingularum parietibus reticulatim appenſas, in plures cellulas minores dispertitis, iterumque diuiſis, intra quos alimenta ingeſta ſub. prono animalis ſitu, ſua mole ex Κοιλιδη illabentia praeparantur vlteriori transfretationi ad prolobum minorem. Antrum celluloſum minus ſeu faſciale, ob faſciae ſimilitudinem, ſola figura et ſitu a maiori diuerſum eſt, longum 20°, 5′, latum 3°, 3′, altum fere 2°, 5′, ceteroquin ſtructura ſimile, ſuisque concamerationibus in eundem prolobum maiorem ſeu Κοιλιδην hians, ac proinde Κεκρυφαλωδης alterius minoris vicem gerens. Por-
Εχίνος. ro prolobus ſecundus minor, Εχίνος graecis dictus, in prolobi maioris dextro latere foriníecus, inter duo antra Κεκρυφαλωδα et Stomachum ηνυστρωδην medius, ellipticae eſt figurae, altero ſui extremo in apiculum breue protuberans, et antro celluloſo maiori accumbens, altero vltra ſtomachum exporrecto, tota ſuperficie externa laeuis et aequabilis, interna in concamerationes celluloſas plurimas, illarum in antris duobus ſimiles, ſed multo minores dispertita, ceteroquin a ſiniſtro ſui latere, qua prolobi maioris dextro adhaeret, circulo ligamentoſo, tendineo, circiter 6°, 5′, in diametro laxe conſtrictus in orificium, ſibi cum Κοιλιδη commune, et breui ab eodem interuallo. aliud praeterea orificium ſimili circulo, ſed vix 1°, 7′, 5″, in diametro, arctius conſtrictum, ſibique cum Stomacho ηνυστρωδη commune aperiens. Eius prolobi longi-

longitudo per axin ellipticum eſt 13°, 5′, latitudo ſeu diameter 6°, 3′, Stomachus tandem ſeu veri nominis Ventriculus Ηνυςρωδης Graecis vocatus mole et figura Elephantino proboſcidi ſimilis, longus erat a collo ſuper prolobum echinoden exſerto, ad pylorum et duodenum 35°, 5′, in diametro minima latus 3°, 6′. Eius collum ſuper prolobo minore exſertum breue et anguſtum, vix ſpatio 6°, 5′, pollicum ab Oeſophago diſtans, in cellulam ſimplicem bullae ſimilem, a latere exturgeſcebat. Ipſe Stomachus mox a collo Inflexus, ampliſſimus, ſub medium ſui progreſſum, deorſum tendendo verſus renes, ſtrictior, iterumque proxime ante pylorum reflectendo ampliatus in vtriculum, tandem in pylorum deſinebat. Eius ſubſtantia membranacea tenuis eſt, foris omnino laevis et aequalis, neutiquam celluloſa, duobus tamen ligamentis longitudinalibus ſuper eius dorſo procurrentibus vix pollicum 2°, interuallo a ſe mutuo remotis, inſigniter roborata, intus rugis transuerſalibus a collo ad vtriculum vsque tenuibus, in ipſo autem vtriculu digito manus craſſioribus, inaequalis. Pylorus ſeu Stomachi orificium ſibi cum duodeno commune, circulo vel ligamento nerueo tendinoſo conſtrictum, latum fuit in diametro 1°, 1′, 5″. Prolobi maioris longitudo maxima erat 30°, latitudo vero 24°, 5′. Ἤνυστρον. Pylorus.

Omentum vaſtum, indeterminatae extenſionis, membranaceum, tenue, adipe in poſteriori pariete craſſa obueſtiente perfuſum eſt, vaſis epiploicis et gaſtro-epiploicis pluribus pertextum. Omentum.

Inteſtina, facta animalis comparatione cum aliis ruminantibus quamuis longe minoribus, non admodum prolixa erant, vbique aequabiliter fere teretia, nullibi celluloſa; Inteſtina.

loſa; tenuia quidem tracheae circiter diametrum aequantia, ligamen o longitudinali craſſiuſculo, ceu axi ſuo ſpiraliter **Duodenum.** circumuoluta, inque his Duodenum mox a pyloro in ampullam quadruplo fere reliquis tenuibus capaciorem ampliatum, nihil praeterea peculiare exhibebant, longaque erant a pyloro ad Ilii in Caeco finem, iuxta axin menſurata, 585°, 5′, iuxta ſpirae ſuae ambitum certe tantun- **Ileon.** dem longiora. Inteſtinum Ileon Caeco lateraliter implantatum, huiusque ſuperficiem internam tantiſper tranſcendendo, ſuarum fibrarum conſtrictione valuulam circularem **Valuula Coli.** conſtitui, Ilii vel Coli valuulam vulgo dictam. Craſſo- **Caecum.** rum princeps Caecum non celluloſum ſed foris et intus laeue, ſimplex, et neglecta ſalcis curuatura, quam ſub violenta flatus tenſione aſſumit, propemodum aequabiliter teres, in obtuſum apicem deſinit; longum vero eſt ab Ilei inſertione ad apicem 22°, 5′, latum in maxima dia- **Colon.** metro 3°, 5′. Colon in prima craſſorum flexura, paucorum digitorum interuallo cis Ilei inſertionem exordiens, Caeco contiguum quidem eſt, ſed notabiliter ſtrictius et propemodum aequabiliter teres, nullibi celluloſum neque ſpiraliter conuolutum, in flexuras potius vltra citraque recurrentes ope meſocoli collectum et colligatum, atque **Rectum.** nulla finium diſterminatione indicata in Rectum transmigrans, Colo ſolum notabiliter amplius; longum autem eſt ab Ilei inſertione ad anum vsque 525°, Craſſa vero collectim a Caeci apice ad anum longa ſunt 547°, 5′, Omnis inteſtinorum Canalis a pyloro ſcilicet ad anum longus 1133°, et tota denique prima chymi via a pharynge ad anum vsque longa eſt 1251°, 5′.

Renes

Renes proxime ſub coſtis ſpuriis et diaphragmate, dexter ſub hepate, ſiniſter ſub liene intra peritonaei duplicaturam, vtrinque lumbaribus vertebris, ille Cauae inferiori, hic aortae deſcendenti, adcumbentes, fabae figura, mole Struthionis oua propemodum aequantes, longi circiter 6°, 5′, lati 3°, 8′, tunica foris adipoſa a peritonaeo oriunda et huic ſubiacente vaginali, vaſorum ſobole, veluti folliculo obducti, rubicundi, glanduloſo-vaſculoſi, vaſculis in carunculas collectis papillares, viginti circiter circum peluis peripheriam diſtributas, vrinam e dictis vaſculis glanduloſae ſubſtantiae excretoriis hauſtam per totidem fiſtulas membranaceas ſeu ſiphunculos vel tubulos vrinarios breues, calamo tamen columbino facile ſuppares, hianti pelui, indeque vreteribus infundentes, iucundo oculis ſpectaculo exhibebant. Vreteres a renibus progreſſi inter peritonaei duplicaturam cum laeui flexuoſitate ad veſicae collum pergendo eidem oblique inſeruntur. Renes. Vreteres.

Veſica vrinaria in pubis pelui intra peritonaei duplicaturam, Recto firmiter, colli ſui ope, inhaerens, fundi autem, mediante Vracho et arteriis vmbilicalibus in ligamenta exſiccatis, ipſi vmbilico, bubulam mole tantiſper ſuperabat. Vrethra ſubſtantiae intus membranaceae, foris ſpongioſae, poroſaeque, a veſicae collo ad penem properando huius corporum nerueo-ſpongioſorum ſepto membranoſo ſeſe ſubiiciens totique penis longitudini coextenſa, ad eius apicem vsque percurrit, inque via ſenſim ſtrictior reddita, tandem in oſſiculum admodum tenue terminatur, communem vrinae et ſemini, illi quidem a veſica, huic a proſtatis et ſeminalibus veſiculis irruenti, tranſitum praebens. Veſica Vrinaria. Vrethra.

Testiculi. In genitalibus ſcrotum omnino nullum apparebat. Teſticuli ſub externa inguinis cute abſconditi erant, gemelli, peni vtrinque adiacentes, vterque ſuis tunicis, extima quidem erythroide, ſeu muſculo potius ſuſpenſorio, Cremaſtere nuncupato, et ab oſſis Ilii ligamento deſcendente, media porro vaginali, burſulae laxioris ſimili, et tertia denique albuginea ipſam teſticuli ſubſtantiam ſtrictiſſime obueſtiente, foris lubrica, muniti, ſinguli ouo gallinaceo ſuppares ſed longiores erant.

Vena Spermatica. Arteria Spermatica. Paraſtatae. Vena ſpermatica ſiniſtra ab eius lateris *emulgente*, dextra a Cauae trunco, arteria vtraque a *trunco* aortae ad teſticulos deferebantur. Paraſtatae ſeu Epididymides, teſticulorum dimidiam fere ſuperiorem circumferentiam occupantes, e pluribus teſtium ſeminalibus vaſculis coalitis in ductum efformatae, ab initio anfractuoſum varicoſumque, tunica tamen propria, albugineae ſobole, coercitum, abſolutis tandem ſuis anfractibus recta ſurſum, durioris inſtar nerui reuertendo, ſub nouo tandem Vaſis deferentis vel eiaculantis nomine, per peritonaei proceſſum verſus vrinariae Veſicae poſteriora, eiusque ceruicem deorſum protendebantur, ibidem poſt breuem, ſatis tamen inſignem dilatationem, rurſus coarctatae, ſemen aduectum in veſicularum ſeminalium ceruicem eructaturae.

Veſiculae ſeminales. Veſiculae ſeminales geminae, pone vrinariam veſicam, tantillum tamen a latere adcumbendo, eiusque collo deinde firmiter adnexae, pollices 3°, 8′, et quod excurrit longae, circiter vero 1°, 5′, latae, tota ſubſtantia membranaceo-celluloſa a leui flatu per ſiphunculum intromiſſo admodum exturgeſcentes, in ductulum tandem a ceruice dimiſſum ipſique vrethrae, haud procul a Veſicae vrinariae

riae collo lateraliter paulo inoſculatum, terminabantur, oſculis ductulorum eiaculantium vtrinque ſua ſeorſim caruncula valuulari intra vrethram munitis; ab inuicem vero ope ſeptuli breuioris, vrethram perpendiculariter bipertientis, capitisque Galli gallinacei nomine inſigniti, diſcretis, inſtructae.

Proſtatae collo vrinariae veſicae ſibique mutuo accumbentes, gemellae, ſingulae ſeorſim oualis figurae, gallinaceique minoris oui molem fere aequantes, ſubſtantiae glanduloſo-ſpongioſae, rubentis, ductulis ſuis excretoriis in vrethram circa veſicularum ſeminalium oſcula ſeu dictos capitis gallinacei ocellos, vtrinque ſeſe exonerando, humorem ſub leui compreſſione fundebant aquoſiorem paululum ſemine, et ſubalbicantem, vrethre lubricationi, ſeminisque proinde vehiculo aptum hactenus addictumque vnice exiſtimatum. Proſtatae.

Penis denique integumentis ſuis communibus cute ſcilicet et panniculo carnoſo denudatus, non quidem teres comparebat, ſed ingentis inſtar ſtili a craſſiſſima baſi, quae 1°, 6′, lata, ſenſim ſenſimque gracilescendo in apicem tandem cygneo calamo anguſtiorem terminabatur. Apicis extremitas dimidium circiter pollicem longa, primum quidem ad angulum rectum inflexa, deinde ſecunda directione falciformi incuruata ſex pollices fere a collo penis, cui praeputium adnectitur, diſtabat. Glans in capite nulla erat. Vrethrae orificium in extremi apicis angulo interno vel ſinu curuaturae falciformis tam ſtrictum, vt vix aciculam admitteret; vnde etiam ipſa vrinae columna inter mingendum parum Coruini calami craſſitiem ſuperante, eius tenuitatem mictu diuturniore compenſare ſolet. Inter pe- Penis.

Os basilare. E communibus Cranii binis primum Os basilare seu sphenoides basi breuiore paululum sed crassa, processibusque quater geminis pterygoide, aliformi, ephippiali anteriore posterioreque, et foraminibus demum vulgo septenis instructum est, longum in basi 2°, 2′, 5″.

Os cribiforme. Alterum e communibus Os cribriforme seu Ethmoides cum processibus suis, crista scilicet septo et spongiosis geminis, (aliisque binis, superciliari singulari, sub quo neruus opticus diuaricat, et vulgo ad os basilare eiusque processum ephippialem anteriorem referri solet, quamuis sit vere ethmoidis) et auriculari gemino, priori a latere vtrinque inter frontis processus innominatos medio, foraminulisque primi paris neruos olfactorios transmittentibus constat.

Maxilla superior. Maxillarum superior immobilis, e quatuor ossibus dizygis et quinto azygo, quibus sextum brutis proprium, geminatum, adiiciendum, cum octenis dentium paribus

Os Malae. composita est. Horum primum Os malae dizygon, arcuatum cum processibus suis ternis, canthino scilicet interno, canthino externo et zygomatico, quos in homine anteriorem, superiorem et posteriorem vocant anatomici, ipsam malam seu genam vix a limine attingebat, longum autem

Os Nasi. erat 5°, 9′, latum 1°, 7′, 5″. Secundum Os Nasi dizygon est, quadrangulum, parallelogrammum, neutiquam gibbosum, vt Ionstono placuit, sed rectum, longum 4°, 6′, latum sub maxima diametro 1°, 6′, sub minima 6′, 5″, Vtriusque vero intercapedo maxima est 3°, 2′, 5″,

Os maxillare. minima 1°, 3′. Tertium Os maxillare vel palati maius dizygon, figurae irregularis, processibus quaternis frontali, odontico vel dentali, palatino seu transuerso et lacrymali, non denominatis in homine, et foraminibus binis, lachrymalis

malis ſcilicet ductus et nerui quinti, inſtructum eſt; hoc ipſo ab aliorum brutorum maxillaribus diſcrepans, quod proceſſus odonticus longe retro oculi orbitam terminetur, cum in aliis in ipſa orbitae cauitate deſinere ſoleat; longum 10°, 9′, latum 4°, 5′. Quartum os palatinum ſeu palati minus, dizygon, tribus proceſſibus ſuis, transuerſo ſcilicet, columnari, et parietali inſtructum, iunctum eſt ope proceſſus transuerſi ſibi mutuo et cum proceſſu transuerſo oſſis palati maioris, ope vero columnaris cum proceſſu oſſis maxillaris odontico, et proceſſu frontis innominato orbitae oculi cauum efformante, quem columnae inſtar ſuffulcire videtur; ope parietalis denique cum eodem oſſis frontis proceſſu innominato, oſſis ethmoidis baſi et oſſis baſilaris tandem proceſſu pterygoideo; foraminibus praeditum binis, altero maiori pro vaſis ſanguiferis, altero minori pro neruo quinto ad palatum ſecedente; longum inter transuerſalis et parietalis extrema 5°, 1′, 5″, latum in maxima intercapedine per proceſſus transuerſales 2°, 9′, in minima per vtrosque parietales 1°, 5′ Quintum Vomer dictum azygon vel ſine pari, planum, non omnino tenue niſi circa aciem, qua proceſſibus palatinis transuerſis inſiſtit, dorſo oſſibus naſi obuerſo, craſſiore, canaliculato, pro ſepto narium ſuffulciendo, anterius cum ſpina oſſis labialis palatina iunctum eſt, poſterius in binos proceſſus myrtiformes deſinendo, eorumque cum corpore ethmoidis et baſi oſſis ſphenoidei commiſſum, longum a proceſſuum myrtiformium cuſpide ad apicem cum ſpina labiali iunctum 11°, 5′, ab eorundem proceſſuum ſinu 10°, 8′, eius vero latitudo maxima eſt 2°, 2′, 5″, craſſities dorſi canaliculati maxima 5′. Sextum Os labiale biiugum vel

Os palati.

Vomer.

Os labiale.

vel dizygon, brutis proprium, paucis quibusdam exceptis, tribus instructum est processibus, anteriore scilicet, posteriore externo et interno, sibi mutuo ope processus anterioris et interni iunctum; ope posterioris vero externi cum ossis maxillaris processu odontico anteriori, et denique ope interni cum Vomeris apice seu mucrone. Foramen in eo notatur vnicum, processum internum ab externo, anterioremque a processu transuerso palati maioris disiungens, satis magnum, longum 6′, latum 2′, 5″, ossis labialis longitudo maxima est 6°, latitudo maxima 1°, 1′, vtriusque intercapedo exterior maxima est 2°, 6′, eadem minima 1°, 6′, ab eiusdem apice processus anterioris ad interni processus mucronem Vomeris mucroni iunctum 3°, 2′.

Os vnguis. Septimum Os vnguis dizygon, figurae triangularis, in ipso oculi cantho interno situm, transitumque praebens ductui lachrymali, quantumuis breuem, superiori latere suo ossi frontis, inferiore ossi malae et maxillari, interno seu apice trianguli potius ossi nasi obuerso, non tamen id contingente; externo in oculi orbitam et canthum internum cedente, neque tenue admodum, neque fragile, sed satis crassum est, longum 1°, 1′, 5″, latum 1°. Octa-

Os planum. uum et vltimum Os planum dizygon, partem orbitae oculi concauam potiorem constituens, irregularium laterum, ossi malae, maxillari, vnguis et ossis ethmoidis processui spongioso in oculi fundo, simulque ibidem processui ossis palati minoris columnari et parietali iunctum est suturis seu coaptationibus non vbique satis manifestis.

Dentes. Inter dentes XVI. superioris maxillae, incisores, primores Plinio dicti prorsus nulli conspiciebantur. Caninorum tria paria, seu tres in singulo latere, spatioso internallo

ba

ab inuicem remoti erant, quorum primus ſeu anterior alueo in oſſis labialis proceſſu anteriore per gomphyſin infixus, omnium minimus longus fuit qua extra alueum prominet 7′, 7″, latus prope alueum 4′, 7″; Secundus ſeu medius oſſis maxillaris proceſſui odontico infixus, omnium maximus, qua extra alueum propendet longus erat 1°, 5′, 5″, latus prope alueum 9′. Tertius poſtremus primo tantillum maior eſt, longus, qua prominet 8′, 7″, latus 5′, 7″. Molarium quinque ſunt paria, ſeu in quouis latere quini; quorum primus ſeu anterior omnium minimus, corona gaudet propemodum ſimplici, vel ſaltem imperfectius ſerrata, longus autem eſt extra alueum 7′, latus 6′, 3″. Secundus praecedenti maior, cum corona manifeſtius ſerrata, longus erat extra alueum 7′, 4″, latus 9′. Tertius inſigniter maior praecedentibus, corona perfecte ſerrata, longus fuit extra alueum 1°, latus 1°, 2′, 5″. Quartus praecedenti ſimilis, tantillum maior erat, longus 1°, 4′, latus 1°, 7′, Quintus ſeu ultimus omnium maximus, ſerratus binis tantum cuſpidibus praeditus erat, longus extra alueum 1°, 7′, latus 1°, 9′, 2″. Omnes praecipue molares, cruſta tartarea nigra obducti fuerunt.

Maxilla inferior, mobilis, ex oſſe conſtat vnico, ſed dizygo, firmiſſime cum ſuo compari coalito, nedum harmoniae liniola ſuperſtite, proceſſibus tribus donato, corona ſcilicet condylode et hypocondylode, denticulo ſerrae ſimili, foramine praeterea gemino interno et externo ſeu nerui quinti paris admiſſorio et emiſſorio; denisque tandem dentium paribus ſeu totidem in ſingulo crure ſingulis. Inter hos primi ſunt inciſores ſeu primores ſeni, in tria paria diſtributi, quorum par medium longum eſt ex-

Maxilla inferior.

Dentes inciſorii.

Canini. tra alueum 1°, 4′, latum 6′, 8″, reliqui parum minores erant. - Caninorum, ſecus ac in ſuperiore maxilla, bina tantum paria erant, ſeu totidem in maxillae ſingulo crure ſinguli, per ſpatioſa interualla locati, ſuperiorumque interſtitia ſubintrantes, quorum prior ſeu anterior maximus, qua extra alueum prominet longus eſt 1°, 5′, latus 8′, 5″. Poſterior, minimus, qua alueum ſupereminet

Molares. longus erat 8′, latus 5′. Molarium quinque ſunt paria ſeu in quouis crure quini, ſuperioribus ſatis ſimiles, ſaltem minus extra alueolos prominentes, quorum vltimus corona ſerrata tricuspide praeditus, omnium latiſſimus eſt extra alueum longus 8′, 3″, latus 2°, 3′, 5″. Tota molarium ſeries, prope alueos primi et vltimi, longa eſt 7°, 1′, ſeries vero ſuperioris maxillae molarium longa 6°, 5′.

Maxillae inferioris dimenſiones. Dentes autem in vniuerſum ſunt XXXVI. Maxilla inferior longa eſt ab apice ſeu acie dentium inciſorum ad angulum menti 5°, 3′, ab eodem ad proceſſum hypocondylodem 17°, 5′, alta in perpendiculo a corona demiſſo 9°, 2′, 5″, a condylode 6°, 8′, 5″, ab hypocondylode 5°, 3′, a molaribus poſtremis 3°, 5′, 5″, a molaribus primis 2°, 3′, a caninis poſterioribus 1°, 8′, a caninis anterioribus 1°, 6′. Eiusdem intercapedo per inciſores extimos 2°, 5′, per caninos priores 2°, 6′, per caninos poſteriores omnium minima 1°, 9′, per molares primos 2°, 3′, per molares vltimos 4°, 8′, per coronae apicem 7°, per condylodes maxima 7°, 6′, 5″.

Os hyoides. Os denique hyoideum ſeu bicorne, oſſium capitis vltimum, e capitulo ſeu baſi, cornubus et cruribus compoſitum, cum ouium hyoide ſatis conuenit, nec niſi internodiorum quorundam coalitione ob ſenium et mole diuerſum

uerſum eſt. Eius capitulum ſeu baſis, fere oſſeum erat, roſtello ſeu tuberculo verticis omnino carens, vertice ſuo anterius linguae corpori, poſtica facie ſinuoſa epiglottidi et laryngis capiti obuerſum, longum in perpendiculo à vertice ad ſinum poſticum demiſſo 8′, latum circa cornuum ſynchondroſin obliteratam 1°, 5″, craſſum 3′, 7″. Eiusdem cornua dizyga humani hyoidis ſatis ſimilia, capitulo ſeu baſi firmiter ſine motu continuo, nullisque internodiis ſiue per naturae leges ſiue per ſenium diſcreta erant, inde a capitulo verſus laryngis latera vbi ſuperioribus thyroidis proceſſibus per ſyneuroſin connectuntur, exporrecta, longa a poſtico capituli ſinu ad apicem 2°, 3′. Eorundem diuaricatio maxima ad apices eſt 2°, 8′. Eius denique crura brutorum generi propria, vel etiam cornua ſuccenturiata dizyga, hyoides cornubus altero tanto, imo duplo maiora, triphalangia, ſeu e tribus internodiis et cum capituli fronte et inter ſe mutuo cartilaginum ope, cum motu leuiori, connexis, conſtant, alteroque extremo verſus os petroſum et occipitium exporrecto, iisdem ligamentorum ope affixa ſunt. Eorum internodium primum oblique antrorſum exporrectum, breuiſſimum eſt, longum circiter pollicem cum dimidio. Secundum retro ſurſum vergens longum eſt 3°, 4′. Tertium omnium maximum, in duos proceſſus ſuperiorem et inferiorem terminatum, longum erat ab altero extremo ad proceſſum ſuperiorem 2°, 7′, ab eodem extremo ad proceſſum inferiorem 4°, 3′, latum vero circa proceſſum ſuperiorem 8′. 5″.

Oſſicula auditus in meatu auditorio interno deliteſcentia, Malleus ſcilicet, Incus, ſtapes et orbiculus cum ſuis ſinubus et proceſſibus, perioſteoque a Ruyſchio primum de- Auris oſſicula.

Numerus ossium capitis. detecto, vt in aliis perexigua erant. Numerus ergo ossium capitis inter se diuersorum est XLII, adiectis vero paribus in vniuersum LXXVIII.

Thorax. Thorax late dictus e collo, thorace stricte sumto et artubus superioribus, pedibus scilicet anterioribus, a thorace pendentibus compositus, ossa sub vulgato vertebrarum, costarum, sterni internodiorum, clauicula porro carentis scapulae, humeri, cubiti radiique, carpi ossiculorum, metacarpi, digiti articulorum seu dactylo-condylorum et scutulorum denique tendinalium vel rotularum nomine et ordine, (dizygon comparibus nouem et triginta sub censum non vocatis) ab inuicem diuersa complectitur *LV*, illis vero ad computum accersitis in vniuersum XCIV.

Collum. Atlas. Collum e vertebris septem constat, quarum prima, Atlas dicta, occipitis processibus globosis ope sinuum sibi insculptorum iuncta, sex processibus, seu tribus dizygis, superiore scilicet, inferiore et transuerso donatur, septimo, seu quarto azygo, posteriore scilicet et speciatim spina dicto carens.

Epistrophius. Secunda seu Epistophius iisdem processibus tribus dizygis et quarto azygo instructa, praeterea quintum azygon sibi peculiarem habet, quem denticulum vel axin vocant, omnium non solum colli, sed totius etiam spinae longissima est. Tertia cum reliquis, quaternis processibus vsitatis superiore, inferiore et transuerso dizygis, et postico azygo praeditae sunt.

Foramina vertebrarum Colli. Foramina omnibus colli vertebris duo communia sunt, alterum scilicet in singularum basi pro medullae spinalis transitu, alterum dizygon per singularum processum transuersum vtrinque pro arteriarum ceruicalium transitu ad Occiput, quod quidem solis colli vertebris proprium est. Singularum dimensiones sequentes fuerunt:

1ª.

Vertebrarum Colli dimensiones.

1ª.	alta	3°, 1′, 5″.	lata	5°, 8′, 5″.	longa	4°. — —
2ª.	—	4, 8, 5.	—	4, 4 —	—	7°, 4′, 5″,
3ª.	—	5, 1, —	—	5, 6, 5.	—	6, 4, —
4ª.	—	5, 5, —	—	5, 3, —	—	6, 3, 5,
5ª.	—	6, 2, —	—	5, 6, —	—	6, 2, —
6ª.	—	7, 2, 5.	—	5, — —	—	5, 6, —
7ª.	—	6, 8, —	—	6, 1, —	—	4, 7, —

Tota vero vertebrarum compages longa eſt 36. 7′, —

Thorax. Thorax ſtricte ſumptus e vertebris dorſi duodecim, totidemque coſtarum paribus, et pectoris ſterno e ſeptem oſſiculis coalito, compoſitus eſt, clauiculis vero ſcapulas cum ſterno connectentibus, in quadrupedum non niſi pauciorum quorundam genere obſeruabilibus, omnino caret; ſcapulis autem geminis poſticae ſuperiorum coſtarum parti, inſtar ſcuti incumbentibus donatur. Vertebrae dorſi duodecim, inferioribus colli longitudine et latitudine multo minores, ob ſpinae vero acutioris longitudinem inſigniter altiores vel eleuatiores ſunt proceſſuum numero et foramine magno in baſi pro medullae tranſitu, ſimiles; earum dimenſiones hae erant:

Vertebrarum Thoracis dimenſiones.

1ª.	alta	9°, 3′, —	lata	5°, 1′, 5″,	longa	3°, 5′, 5″.
2ª.	—	10, 5, —	—	4, 7, —	—	3, 2, —
3ª.	—	11, 1, —	—	4, 5, —	—	3, — 5″.
4ª.	—	11, 3, 5″,	—	4, 4, —	—	3, — —
5ª.	—	11, 5, —	—	4, 4, —	—	2, 9, —
6ª.	—	10, 7, —	—	4, 4, —	—	2, 8, 5.
7ª.	—	10, — —	—	4, 4, —	—	2, 8, —
8ª.	—	9, 3, 5,	—	4, 4, 5,	—	2, 7, 5.
9ª.	—	8, 6, —	—	4, 4, 5,	—	2, 7, —
10ª.	—	6, 7, —	—	4, 3, —	—	2, 6, 5.
11ª.	—	6, 2, —	—	3, 9, —	—	2, 6, 3.
12ª.	—	5, 7, —	—	3, 5, —	—	2, 6, —

Igitur ſpina ſeu vertebrarum dorſi compages erat 34°, 7′. —

Coſtae.

Coſtarum paria duodecim ſeu totidem vtrinque pro vertebrarum numero ſingulares ſunt, quarum ſeptem ſuperiores legitimae ſternum contingebant, quinque inferioribus ſenſim ſenſimque ab eo deficientibus ſpuriis. Prima omnium breuiſſima eſt, longiſſima nona, ambae absque epiphyſibus cartilagineis menſuratae. Contra duodecima omnium anguſtiſſima, latiſſima ſexta erat. Omnes proceſſibus binis, baſilari ſcilicet et transuerſali donatae ſunt, quorum ope ſinui vertebrarum baſilari per ſynchondroſin; earundemque proceſſui transuerſo per ſyneuroſin ſeu ligamenta cum motu inarticulantur, quamuis in vltimis hi proceſſus minus diſtincte conſpiciendi ſint. Omnes praeterea epiphyſibus ſuis cartilagineis, inſtructae ſunt, quarum ope legitimae ſeptem totidem ſterni oſſiculis arctius, quinque ſpuriae autem longo tractu coaleſcendo inter ſe mutuo connectuntur. Sinus marginalis pro vaſorum intercoſtalium tranſitu in ſingulis vnicus erat. Singularum dimenſiones ſequentes ſunt.

Coſtarum dimenſiones.

1ª.	longa	8°, 2′, –	lata	1°, 5′, –	Cartilago longa	– 4′, –
2ª.	—	9, 5, –	—	1, 5, 5″,	— —	1°, – –
3ª.	—	11, 7, –	—	2, – –	— —	1, 6′, –
4ª.	—	15, – –	—	2, 2 5	— —	2, 4, –
5ª.	—	17, 3, –	—	2, 3, –	— —	3, – –
6ª.	—	18, 2, –	—	2, 3, 5,	— —	4, – –
7ª.	—	18, 7, –	—	2, 3, –	— —	7, 8, –
8ª.	—	19, 4, –	—	2, 1, 5,	— —	9, 4, –
9ª.	—	19, 5, –	—	2, – –	— —	9, 3, –
10ª.	—	19, – –	—	1, 9, –	— —	9, 1, –
11ª.	—	18, 5, –	—	1, 7, 5,	— —	8, 8, 5,
12ª.	—	16, 3, –	—	1, 3, –	— —	8, 3, –

Ster-

Sternum in anteriore Thoracis parte pectus consti- Sternum.
tuens, osseum sed fungosum ex officulis septem et cartilagine xiphoide seu mucronata, quatuor superioribus officulis prorsus a latere compressis angustis et propemodum teretibus, tribus inde sequentibus inferioribus depresse planis, tantillum concauis, latissimis, quamuis superioribus breuiora sint, compositum est; singula officula cum vtrinque adiacente proximo per synchondrosin iuncta sunt, iuncturis tamen ob senium animalis fere vbique in osseam substantiam coalitis. Cartilago exigua erat vix 1°. 8′. longa. Sternum integrum a capite supremi officuli ad xiphoidis apicem longum est 22°, latum vero 4°, 5′.

Scapularum par vnum, seu a singulo spinae latere Scapulae.
vnica, figurae triangularis, latiuscula, plana vel parum conuexa, tenuisque, posticae superiorum costarum parti adinstar scuti incumbit; intus caua est, exterius in testudine seu dorso leuiter conuexa, et spinae insigniter eminentis interuentu, in duo testudinis interscapulia, dorsale scilicet et humerale, seu inferius et superius, diuisa in posteriori limbo seu basi, vertebris insigniter obuerso, in epiphysin cartilagineam amplam terminata. Processus ei sunt tres quorum primus spinae testudineae Acromium dictus, breuis, rectus, neutiquam reflexus erat, vt in bidentibus herbiuoris, Marmota, Lepore, Cuniculo. &c. Secundus coracoides seu anchoreus, minor praecedenti fuit; tertius demum Ceruix, sinu superficiali instructus erat cui humeri caput inserebatur. Scapulae autem longitudo a summa ceruice ad baseos epiphysin cartilagineam est 20°, 1′, 5″. Eius autem latitudo minima in ceruice 3°, maxima circa testudinis extremam basin 9°, 7′, alta ve-

vero erat in perpendiculo ab Acromii extremo per ceruicem demisso 4°.

Pedes anteriores. Artus superiores seu pedes, in brutorum genere anteriores dicti, a scapularum sinu ceruicali pendentes, ex humero, cubito seu vlna radioque, et pede extremo, seu carpo heptastiode, metacarpo simplici et digitis triphalangiis binis, constant, longi ab humeri capite ad infimum digitorum apicem 54°.

Os humeri. Humerus μονοςωδης, dizygos, breuis, sed crassissimus est, inaequaliter teres, scaber, intus fistulosus, medulla farctus, superius capite praeditus magno, globoso, fossulis seu sinubus anterius binis profundis, pro tendinoso musculi forsan bicipitis principio traducendo, exculpto; circa scapi medium admodum inaequalis pro recipienda musculi deltoidis cauda, inferius processibus geminis interno maiori et externo, sinubus ternis, semilunari scilicet, externo maiori et interno, instructus, longus 15°. 5′, latus in capite superius 4°. 8′. in scapo tenuiori 2°. 3′, per processus inferiores denique 4°. 4′.

Cubitus. Vlna. Cubitus ex Vlna et Radio sibi mutuo a latere adcumbentibus componitur; Vlna et Radio et Humero longior est, superius capite crasso, binis in capite processibus rostriformibus, externo scilicet seu Olecrano et interno innominato, totidemque sinubus, semicirculari scilicet et laterali pro recipiendo radii capite praedita, in progressu adeo arcte coalescit cum radio, vt nec scapus eius, nec inferior processus stiloides, a quo ligamenta Carpi in aliis procedunt, vllo modo dignosci a Radii scapo queant; longa a capite suo ad Radii cum ea coaliti finem 20°, 7′.

Radius. Radius breuior est vlna, humero autem insigniter longior,

gior, ſuperius capite praeditus rotundiuſculo, lato, ſed a vertice depreſſo exſculptoque in ſinum, cui humeri proceſſus externus inſeritur; Scapi cum vlna coaliti teretis plani, pars ima admodum craſſa erat et lata, in proceſſum exiguum internum lateralem protuberans, ſinubusque ternis, inferius leuioribus, exſculpta; radii longitudo eſt 18°, latitudo in capitulo 3°, 8′, in ſcapo 2°, 3′, in imo denique extremo 3°, 7′.

Pedis extremi carpus heptaſtodes, ex oſſibus anonymis ſeptem, in duplici ſtrato, quaternis nempe in ſuperiore et ternis in inferiore collocatis componitur primo tantillum ab interno latere, cum radii proceſſu laterali interno paruuli ſinus ope iuncto, reliquis ſuperioribus ternis, totidem in radii extremitate ſinubus exceptis; tribus autem inferioris ſtrati ſuperioribus connexis, ſingulis mole et figura ab inuicem diuerſis, inter ſe mutuo tamen vinculis valide conſtrictis, externoque ligamento colligatis. Carpi, longitudo eſt 2°, 5′, 5″, latitudo autem 3°, 2′. Carpus.

Metacarpus, ouillo proxime ſimilis, ex oſſe conſtans vnico ſimplici, capite lato plano, ſinubus tamen leuioribus ternis, totidem carpi oſſa inferioris ſtrati excipientibus exſculpto; ſcapo tereti plano, recto ne hilum arcuato; infimo extremo lato craſſoque, crenae maioris ope in epiphyſes geminas, trochleae cylindricae non canaliculatae vel ſinuatae ſimiles, diuiſo, quibus totidem digiti cum ſcutulis tendinum oſſeis inarticulantur; longus autem erat 12°, 6′, latus in capitulo 3°, 1′, in ſcapo medio 1°, 6′, 5″, in imo per Epiphyſes 4°, 1′. Metacarpus.

Digiti triphalangii bini e tribus articulis, ſcutulo tendinum oſſeo, quod ſeſamoideum in homine vocatur, mu- Digiti.

 nitis

nitis componuntur, suntque inter se aequales, et plantam huic quadrupedum generi propriam absoluunt. Primae phalangis articulus omnium maximus est, capite seu nodo superiore crasso, pro recipienda metatarsi epiphysi, leuiter sinuato; Scapo breui, nodo inferiore minore, vix a metatarsi epiphysi abludente. Scutulum tendinis osseum, ossiculi sesamoidei nomine in homine insignitum, Castaneam mediocrem aequans, articuli capitulo adcumbit, et simul cum eo epiphysi metatarsi inarticulatur. Articulus longus erat 3°, 8′, latus in capitulo 2°, in scapi medio 1°, 1′, in nodo inferiore 1°, 7′. Secundae phalangis articulus, priori similis, sola mole diuersus est, longus 2°, 5′, latus in capite 1°, 4′, in scapo 1°, 1′, 5″, in nodo denique inferiore 1°, 3′, 5″. Tertiae phalangis articulus vltimus, omnium minimus erat, fere pyramidalis, trilaterus, in basi leui sinu exsculptus pro inarticulatione pracedentis, binis in lateribus antrorsum in apicem digiti conuergentibus, vngue corneo munitis, tertio plantae inseruiente praeditus, et scutulo tendinum osseo paruulo instructus, longus 1°, 2′, latus in basi 9′, 5″. Vnguis corneus fuscus parum politus est et scaber, conuexus, fere trigonalis.

Venter infimus seu Abdomen e spina lumbari seu Lumbis, osse sacro et coxis, artubus inferioribus seu pedibus in brutis posterioribus a coxa vtraque pendentibus, et Coccyge tandem seu cauda ossi sacro contigua constans, ossa sub vulgato vertebrarum legitimarum, spuriarumque, ossis inde Ilii, Ischii et Pubis, porro Femoris, Patellae, Tibiae fibula destitutae, ossiculorum Tarsi, Tali, Calcis nempe, Scaphoidis, Cuboidis et innominatorum; Metatarsi digitalium articulorum scutulorumque tendinalium, nomine

et

et ordine, dizygon comparibus duobus et triginta ad censum non vocatis, ab inuicem diuersa quinquaginta, illis vero sub computum cadentibus, in vniuersum duo et octuaginta complectitur. Spina lumbaris e vertebris legitimis vltimis septem constat, omnes totius spinae reliquas minima eorum latitudine superantibus, maxima vero longitudine neque colli vllam neque primas dorsi duas aequantibus, altidudine maxima vix nisi ad tres dorsi infimas comparandis, processuum numero et situ, exceptis figura et mole transuersi processus et spinae, dorsalibus similibus, spina reuersa, qualis in Leporibus obseruatur, destitutis: Harum dimensiones sequentes sunt. Spina lumbaris.

Vertebrarum spinae lumbaris dimensiones.

1ª.	alta	6°,	2′,	5″,	lata 9°,	—	—	longa	3°.	—	—
2ª.	—	6,	4,	—	— 11,	5,	—	—	2,	9′,	7″,
3ª.	—	6,	5,	5,	— 14,	—	—	—	2,	9,	3,
4ª.	—	6,	7,	—	— 15,	—	—	—	2,	8,	5,
5ª.	—	5,	8,	—	— 13,	7,	5,	—	2,	8,	—
6ª.	—	5,	3,	—	— 13,	3,	—	—	2,	6,	5,
7ª.	—	5,	—	—	— 11,	5,	—	—	2,	4,	5,

Ergo spinae lumbaris totius vertebrarum compages est 19, 6, 5.

Os sacrum e vertebris spuriis primis seu superioribus quinque diuersae magnitudinis, tam firmiter sine motu inter se mutuo coalitis, vt vnicum os triangulare fingant, compositum est, superius vltimae vertebrae lumbari, inferius primae Coccygis seu caudae cum motu; vtrinque ossibus Ilii ope processuum transuersalium sine motu connexum, processibus vertebrarum admodum imperfectis, superiore in sola prima, inferiore in vltima manifeste, in mediis obscure comparentibus, transuerso et spina in omnibus, illis Os sacrum.

quidem inter ſe mutuo coalitis, his valde ſubſidentibus, inſtructum; Sinubus praeterea ſuperiore et inferiore, aliisque in ſingulo latere binis poſticis et foramine denique magno pro medullae tranſitu, cum quatuor internis, pro medullae eiusdem propaginibus nerueis, more aliis animalibus vſitato praeditum. Ejus vertebra prima ſeu ſuprema longa eſt 2°, 1′, lata vero 7°, 7′, alta 3°, 6′, mediae notabili proportione minores ſunt. Vltima quinta longa eſt 1°, 4′, lata 2°, 8′, alta 1°, 5′, 5″. Tota oſſis ſacri longitudo denique eſt 8°, 3′, 5″.

Coxae. Coxae, abdominis peluim cum oſſe Sacro conſtituentes, oſſis ſacri lateri vtroque appoſitae, eius proceſſibus transuerſis per ſynchondroſin et ſyneuroſin, ſeu cartilaginem et ligamenta, ope Oſſis Ilii firmiſſime connexae ſunt, quarum ſingulae ex tribus oſſibus Ilii nempe, Iſchii et Pubis ſolide coalitis, conſtant. Os Ilium amplum fere ſemicirculare et ſatis craſſum, dorſo exterius conuexo, interius concauo, ſpina circumſcripto et tribus in externo dorſo lineis asperis, ſuperiore, media et infima pro muſculorum femur extendentium et Glutaeorum inſertione praeditum eſt, latum in diametro maxima 11°, in minima circa Iſchii acetabulum 2°, 6′, longum a ſpinae vertice ad acetabulum Iſchii 7°.

Os Ilium.

Os Iſchium. Os Iſchium anguſtum valde ſed craſſum eſt, praecipue circa acetabulum, medio inter Ilium os et Pubis loco conſtitutum, inde iuxta oſſis pubis longitudinem et foramen maximum deſcendendo in proceſſum externum valde inſignem protenditur, ſimulque circa pubis proceſſum poſteriorem terminatur; latum autem eſt circa acetabulum

3°. 5′.

3°, 5', longum ab acetabuli superiore limbo ad processum pubis posteriorem 8°. Acetabuli diameter est 2°, 4'.

Os pubis ossium Coxae minimum, breue et angustum, inferiore et antica Coxae parte et cum Osse Ischio supra et infra foramen maximum et cum suo compari per synchondrosin firmiter, sine motu coalitum, in limbo inferiore processu postico praeditum est, latum a commissura mutua ad foramen maximum 2°, 8', ab eadem ad processum posticum 4°, longum in commissura mutua 5°, 3', 5''. Foramen maximum longum est 3°. Totius Coxae latitudo maxima superius est 11°, latitudo minor inferius a commissura pubis ad processum Ischii externum 7°, 4'. Latitudo minima circa Ischii acetabulum est 2°, 6', Coxae vero longitudo totalis maxima 15°. Coxae vtriusque in situ, seu peluis abdominis latitudo inter Ilii spinam conuergentium 2°, 5', eadem inter diuergentes maxima 18°, inter acetabulorum Ischii limbos internos 6°, 5', inter externos 9°, 7', processus externos Ischii 12°, inter pubis processus posteriores 6°, 8'. Os pubis.

Artus inferiores seu pedes in brutorum genere posteriores dicti, a Coxae vel Ischii acetabulo pendentes, e Femore cum patella, Tibia et pede extremo, Tarso scilicet heptastode, metatarso monostode et digitis triphalangiis binis, scutulis tendinum ad singulos articulos munitis, compositi, longi sunt a femoris capite ad digitorum apices 58°. Pedes posteriores.

Femur monostodes, post Cubitum ossium in hoc sceleto maximum et crassissimum est, superius magna epiphysi collo nempe cum capite et processibus duobus, trochantere scilicet superiore externo et inferiore interno instructum, scapo crasso, tereti, gibboso, intus fistuloso, Os Femoris.

medulla farcto, in infero autem extremo duobus proceſſibus globoſis, totidemque ſinubus, anteriore ſcilicet patellari et poſteriore vaſculari praeditum; latum ſuperius in capite 5°, 3′, in ſcapi medio 1°, 9′, inferius in extremo 4°, 8′, longum autem 19°, 5′.

Patella. Patella ante genu vmboni ſeu tuberculo ſimilis, fere rhomboidea angulis ſaltem vbique attritis, tota ſolide oſſea, interiore ſuperficie lubrica cartilagine obducta, femorisque ſinui patellari commiſſa et ligamento proprio firmata, longa eſt 3°, 5′, 5″, lata 1°, 8′, et ſpiſſa denique ſeu alta 1°, 8′.

Os Tibiae. Tibia huic ſceleto monoſtodes, mole femori proxime comparanda, capite praedita eſt craſſo et quaternis in capite ſinubus, verticalibus ſcilicet binis maioribus, totidem proceſſus femoris globoſos ſub articulatione recipientibus, et binis deinde minoribus, laterali ſcilicet externo, prorſus ſuperficiali, cum quarto poſtico, vaſculari; quibus tandem tuberculum verticale inter ſinus maiores medium accedit; ſcapo ſuperius craſſo et prismatico, angulo inclinationis laterum ſeu ſpina, anterius, latere vero ſeu plano ſpinae oppoſito, poſterius conſtitutis, inferius graciliore, magisque terete, intus fiſtuloſo, medullaque farcto; in infimo autem extremo tantisper capite anguſtior eſt, malleolo interno ſinuque inſigni, infimo ſcilicet, Talum excipiente inſtructa, lata ſuperius in capite 4°, 7′, 5″, lata in ſcapo 2°, 1′, inferius lata 3°, 6′, longa 16°, 2′, 5″. Fibula quamuis ſedulo requiſita non comparuit.

Tarſus. Pedis extremi denique Tarſus heptaſtodes e Talo, Calce, Scaphoide, Cuboide et tribus innominatis, inter ſe per ſynchondroſin firmiter cum motu connexis et articulatis

latis, vt in aliis brutis quadrupedibus, compositus est, longus a Tali prima facie suprema gibba ad metatarsum 4°, 3′, a Calcis posteriore extremo ad metatarsum 6°, 5′. Metatarsus monostodes, ouillo proxime similis est, capite lato in vertice plano, sinubus tamen leuioribus ternis, totidem ossa tarsi innominata excipientibus exsculpto; Scapo recto neutiquam arcuato, fere tereti, retro tamen pro transmittendis tendinibus profunde canaliculato, intus fistuloso; infimo extremo latiore admodum crasso, in epiphyses geminas terminato, trochleae cylindricae non canaliculatae, nisi retro vnice et leuissime pro recipiendis tendinum scutulis, similes, inter se aequales, ope crenae tamen maioris ab inuicem separatas, quibus totidem digiti in articulantur, longus vero est 13°, 3′, latus superius in capitulo 2°, 6′, in scapi medio 1°, 3′, 5″, inferius per epiphyses 3°, 4′. Digiti triphalangii bini, totidem metatarsi epiphysibus connexi, e tribus articulis, totidemque scutulis tendinum compositi, inter se aequales sunt, digitis anterioribus vero insigniter minores, plantam specialem seu huic quadrupedum generi propriam absoluentes. Primae phalangis articulus supremus omniumque maximus, capite seu nodo superiore praeditus est crasso, vertice pro recipienda metatarsi epiphysi leuiter sinuato, retro scutulo tendinum, Castaneam fere dimidiam minorem aequante, munito; Scapo breui; nodo inferiore parumper minore, trochleae cylindricae non canaliculatae, nisi simplici sinu retro pro scutulo tendinum secundae phalangis recipiendo, simili; longus 3°, 2′, 5″, latus superius in capite 1°, 7′, in scapi medio 1°, 1′, 5″, in nodo inferiore 1°, 3′, 5″. Secundae phalangis articulus similis praecedenti supremo, sola

Metatarsus.

Digiti.

ſola mole deuerſis, longus eſt 2°, 4′, latus ſuperius in capite 1°, 3′, in ſcapi medio 1°, 8″, in nodo inferiore 1°, 2′, 5″. Tertiae phalangis articulus infimus, omnium minimus, fere pyramidalis et trilaterus eſt, in baſi pro inarticulatione praecedentis leuiori ſinu exſculpto, duobus inde lateribus antrorſum in apicem conuergentibus, vngue corneo munitis, tertio in plantam cedente, praeditus, ſcutuloque tendinum tertio inſtructus, longus a baſi in apicem 1°, 1′, latus in baſi 1°. Vnguis corneus fuſcus, parum politus, fere ſcaber, conuexus, ad trianguli figuram accedit.

Coccyx. Coccyx denique ſeu Cauda in quadrupedibus, potius abigendis tabanis muſcis et culicibus, quam praecauendae ani procidentiae brutis non familiari deſtinata, quintae oſſis ſacri vertebrae cum motu manifeſto connexa, e vertebris ſpuriis vltimis ſeu inferioribus 18, ſucceſſiue minoribus, inter ſe mutuo per ſynchondroſin et ſyneuroſin cum motu manifeſto connexis, compoſita eſt. Eius vertebra prima longa eſt 1°, 3′, lata 1°, 8′, alta 1°, 4′. Vertebra eiusdem vltima propemodum teres et exigua vix calamum anſerinum craſſitie ſuperat; longa autem eſt 4′, 5″. Tota denique longitudo Coccygis vel Caudae eſt 20°.

Numerus Oſſium in Cameli Sceleto. Oſſa totius ſceleti diuerſae conformationis ſecluſis vbique comparibus ſunt 147, comparia 117, in vniuerſum vero 264.

CLAS-

CLASSIS TERTIA.

CONTINENS

HISTORICA.

GEOGRAPHIA RVSSIAE VICINARVMQVE REGIONVM CIRCITER A. C. DCCCCXLVIII.

Ex Scriptoribus Septemtrionalibus.

AVCTORE

T. S. B.

Quemadmodum in geographia gentium Russiae vicinarum, vt *Suendoslaui* regis sub auspiciis fuerunt, meridionales prouincias et fines executus sum superiori dissertatione, ita septemtrionalia nunc pertractare instituo. Erit nobis dicendum de Schudis, Esthonibus, Liuonis, Merianis Iarmensibus, Ingris, Carelis, Fennis: et quoniam septemtrionalia monumenta Gardarikiam et Holmgardiam illis temporibus celebrant, earum quoque memoria ad hunc locum pertinere visa est: nam de Varagis peculiari dissertatione dicemus. Auctor Knigae Stepennaiae ad A. M. 6475. A. C. 967. *Eo tempore tributarii fuerunt* чюдь *Gjud vicini Nouogrodiae, Sloueni, vbi nunc est Plescouia et Nouogrodum, Bielozero, Meria, Rostouiensis ager ad lacum Kleszczynum, Murom, Czeremisa, Mordua, Perm, Peczera, Iem, Lithuania, Semigallia, Kors, Neroua, Liubi, Kosari, Bulgari ad Danubium, Vngari Albi, Czechi, Poloni, Luticzi, Masouia, Pomerania, Drewliani, Dregouiczi, Poloczwiani, Sieuera, Kriuiczi, Volhynia, ad Duinam siti et alii plures: hi omnes olim vno nomine Slauoni dicebantur, at a Rurici tempore Russi dici coeperunt.* Multum ille vero se ipse fefellit et alios. Primum eximenda est

Pomerania, quam Slaui quidem tenuere, at Russi nulli. Res innumeris testimoniis demonstrari potest. Et quemadmodum Czech siue Morauia et Bohemia, Polonia et Masouia vmquam Russiae accenseri potuere? Ante Ruricum magna Morauorum regum potentia fuit, et deinceps vsque ad Turcarum irruptionem A. C. 893. Neque post id tempus quidquam negotii Russis fuit cum Morauis, quorum res per Germanicos scriptores non ita sunt obscurae, vt suspicionibus locum concedamus. Poloni autem fere iisdem temporibus, quibus Russi, caput extulere: nam vetusta illa nimis, sunt penitus commentitia et vana. At Mieszko dux, qui aequalis Suendoslauo fuit, tantum abest vt Russis fuerit subiectus, vt potius inter Principes Romani Imperii conferetur. Vngari Albi ne Slauonis quidem cognati, multo potentiores fuere, quam vt Suendoslauo parerent. Bulgari ad Danubium a Suendoslauo victi captique: at breuis illa felicitas maiori clade Russorum et interitu Suendoslaui vindicata est. Cozari autem atque Kors, vrbs illa in Cherrhoneso fuit, adeo non Suendoslaui fuerunt, vt etiam Pazinacitae inter Russiam et Chazariam interiecti, magno terrori essent Russis. Lithuania et Samogithia, quam Semigalliam dicere videtur, serius in potestatem Russorum peruenerunt. Quae cum ita sint, de Czeremisia, Mordua, Permia quantum huic auctori sine metu erroris concedi possit, videlicet cuique apparet.

Schiudos, чюдь, seu *Giudos* seu *Czud* vt Polonico more scribam, consentiunt huic auctori omnes, ad Nouogrodium fuisse vicinos et Plescouiam: nam ad occidentem harum vrbium *Giudos* collocant. Fuere igitur in hac Liuonia et Esthonia. Lacus haud procul a Narua, Peipus in-

incolis dictus, Russis adhuc чюдское озеро *Giudscus lacus*. Etiam Carelia et magna pars Fenniae Russis ad hunc diem Чюхонская земля *Giuchonskaia semla*, incolae Чюхня *Giuchna* dicuntur. Et sunt in Russicis monumentis quaedam res sic tractatae, vt satis appareat, *Giudos* fuisse Fennos. Ipsa in Siberia ad hoc vsque tempus populus Fennica lingua vtens *Giud* vocatur. Quid autem *Cziud* seu *Giud* et *Sziud*, vtcumque scribas, est aliud, quam ipsum Scythicum nomen? Neque hoc a nostris rationibus abhorret. Nam ex Herodoto ostendimus Budinos Neuros et Gelonos ad Pripelium et Borysthenis occidentalem ripam, Scythico corpori accensitos fuisse, quamquam eorum sermo a Scythico discordaret. Tum in conuersionibus rerum Scythicarum sub Mithridaticis temporibus executus sum, quemadmodum Budini Neuri et Geloni nobis videantur ad Balthicum mare in Prussia hac nostra atque Curonia consedisse. Iis autem in locis Aestii fuerunt et in vicina Polonia Fenni, illorum, vt puto nepotes, qui vt postea Duina traiecto haec sua litora occupauerint, infra magis idoneo dicam loco. Iam cum etiam populi in Siberia Fennico sermone vtuntur, et Morduani, qui Constantini Porphyrogennetae aetate iisdem in saltibus coluere, quibus adhuc continentur, Magiari autem, quos nunc Hungaros vocamus, ob vicinitatem credo Morduanorum aut aliorum populorum Fennici corporis aliquid eius linguae suo sermoni admiscuerunt, credo equidem totum hoc corpus Fennicum superioribus temporibus sic coniunctum fuisse, vt inde a Balthico mari fere ad Volgam pertinuerint; forte iisdem permisti alterius quoque corporis populi fuere, quorum omnis memoria quia intercedit, non ad modum nos moueri debet: Sclauos autem, Fennis deuictis, medios, deinde consedisse inter Esthones et Fennos ad Balticum mare et istos Morduanos Sibcriosque, qui fortassis magis ad occidentem egerint, antequam a Slauis sint fugati. Hungaricae linguae Fennica multa admissa esse Olaus Rudbequius Olai F. egregio nos scripto docuit. Nam tametsi Magiarica seu haec Hungarorum lingua toto genio suo et natura a Fennico sermone diuersa est, tamen ob vicinitatem, commercia, necessitudines alias, forte etiam, quod subiecti aliquando Morducanis, aut alteri Fennici corporis populo, fuere Magiari, ea ex lingua innumeras voces recipere potuere in suam. Igitur, vt dixi, primum cunctarum gentium, quae eodem sermone sunt vsae, cognationem video, tum eiusdem corporis populum non nisi vi et bello distractum inter sese existimo: denique ante illud bellum contiguis regionum spatiis degisse concludo. Vt ita sentiam alias quoque rationes habeo, non ita graues ad demonstrandum, tamen, vt hac in caussa, satis accommodatas ad probabilem coniecturam. Forte quidam victi a Slauis iugo colla subiecere, et cum lingua moribusque nomen Slauonicum suscepere, atque deinde Russicum, vt Britanni ab Anglis, a Francis Galli: alii nouas sedes quaesiuere conseruandae caussa libertatis, in quibus Morduani fuerint, atque illi in Siberia. Neque solum Russi *Giudos* hosce commemorant, sed etiam Adamus Bremensis *Scutos* appellat, cuius locum infra producam.

Et deinde frequens mentio Meriae меря *Meria* regio, populus мерянс *Merane*. Et fere illi cum Giudis coniunguntur, vbi memoria incidit. Apparet Adami Bremenmensis *Mirrhas* esse. Historiographus Ruthenus: (1) *Rostow Merianorum metropolis.* Eam ille iam Rurico rege sub Russorum potestate fuisse scribit, et ducem habuisse a rege impositum. Itaque ex vno hoc loco situm regionis tenemus. Iurmensis Geruasius Tilberiensis (2) indicauit: *Sed et inter Poloniam et Liuoniam sunt pagani, qui Iermenses dicuntur: ex hinc versus septemtrionem est Liuonia; quae gens paganorum est probissima.*

At iisdem temporibus, quibus operam damus, scriptores Septemtrionales Esthlandos, ignotum Russis nomen, ponunt, vbi Russi suos *Giudos.* Huius regionis situm vt accuratius definiam, necesse est inde a Curonia exordiri et a Prussia. Prussiae nomen serius cognitum, quam prouinciae littoralis Sembiae, cuius incolas Adamus Bremensis a iustitiae, humanitatis, hospitalitatisque laude praedicat. Et consentit vetus memoria populi Prussici, quam Christianus Episcopus nobis conseruauit, non modo iam tum potentem populum fuisse, sed etiam multo tempore ante Ruricum regem. Non est hic locus de eo argumento dicendi: satis est, si quis ignoret, vt eum admoneam, sermonem Prussorum fuisse Lithuanico Curonico Lettico penitus congruentem, vt istius corporis gentem fuisse, mihi concedat. Diuisus est populus Prussicus in gentes et prouincias vndecim. Fuere enim Sambi, Nadrouitae, Sudouitae, Schalauoni, Natangi, Barti, Galindae, Varmi, Pogesani, Pomesani, Culmi. Has ego prouincias in tabula non posui omnes, partem a spatio exclusas, partem nihil admodum ad nostram curam nunc pertinentes, praesertim cum Caspar Henneberger totius regni veterem faciem

(1) Ad A. C. 862. (2) p. 765. ed. Leib.

ciem ita accurate et eleganter in tabula pinxit, vt haec res vel nostro vel alterius studio non indigeat. In his prouinciis sola Sembia seu *Samland* et *Semlant* quia littoralis est, nota fuit et celebrata. Inde a Prussia Curoni ab Adamo Bremensi ponuntur. Nota Curonia fuisse videtur S. Anschario, vt ex eius vita auctore S. Remberto (3) conclusit Adamus Bremensis. *Gens quaedam*, inquit, *a Sueonibus longe posita, vocata Chori, Sueonum principatui olim subiecta fuerat: sed iam tunc diu erat, quod rebellando eius* (iis) *subiici dedignabantur.* Gualdo Corbeiensis (4) in vita Anscharii.

Quaedam, dicta Chori, Scythici gens incola mundi,
Cum foret imperio Sueonum subdita, rupto
Foedere dissensit, pactumque fidemque reuulsit.

Perperam Adamo Bremensi Chori videntur Curoni. (5) Sunt enim, Karoli, vt indicam postea, iidem vero qui Saxoni Grammatico *Curetes*, vt esset vocabulum e Marone admistum. Olim, vt et Prussicis monumentis constat Curoni item, vt Lithuani, ad rem publicam Prussicam pertinebant; erantque diis et pontifici maximo curae. Eius enim auctoritas late semper patuit religionis caussa. Petrus Teutoburgicus: (6) *Criwe, quem colebant pro Papa; quia sicut dominus Papa regit vniuersalem ecclesiam fidelium; ita ad istius nutum seu mandatum, non solum gentes praedictae* (Prussi) *sed et Lethouini, et aliae nationes, et Liuoniae terrae regebantur: tantae fuit auctoritatis, quod non solum ipse, vel aliquis de sanguine suo, verum et nuncius cum baculo suo, vel alio signo noto, transiens terminos fidelium praedictorum a regibus, et nobilibus, et communi populo, in magna*

(3) p. 70. ed. Fabr. (4) p. 108. (5) de Situ Daniae p. 58. (6.) p. 79.

magna reuerentia haberentur. Deinde Curoni ſui iuris eſſe coeperunt, immo ſua ſibi habere ſacra, ſuos pontifices. De ſitu Curoniae Adamus Bremenſis ſic ſcribit: *Sed et aliae inſulae interius* (interiori in ſinu maris Balthici ad orientem) *ſunt, quae ſubiacent Sueonum imperio, quarum maxima eſt illa, quae Curland dicitur, iter octo dierum habens: gens crudeliſſima propter nimium idololatriae cultum fugitur ab omnibus: aurum ibi plurimum, equi optimi, diuinis, auguribus atque nicromanticis omnes domus ſunt plenae, qui etiam veſtitu monachio induti ſunt: a toto orbe ibi reſponſa petuntur, maxime ab Hiſpanis et Graecis.* Regio, vt vides, amplior fuit, quam nunc eſt. Octo enim dierum iter, quod iam Chriſtophorus Hartcnochius vidit; (7) ſine dubio in littore recenſuit Adamus, cum interiora non eſſent nota, vt adeo Samogithia quoque ad Curoniam relata ſit. Et ne quis adhuc dubitet, habemus auctorem alterum Petrum Teutoburgicum, (8) qui circiter A. C. 1326. ita ſcripſit: *Terra Pruſchiae pro terminis ſuis, intra quos conſtituta eſt, habet Viſelam* (*Viſtulam*) *Mare Salſum* (Balthicum) *Memelam, terram Ruſchiae: Memela eſt fluuius fluens aqua, deſcendens a regno Ruſſiae circa caſtrum et ciuitatem Memelberg* (nunc *Memel*) *intrans mare, ipſam Ruſſiam Lethouiam et Curoniam diuidens etiam a Pruſchia.* Fuit igitur tum quidem Memela, communis trium regionum limes: Curoni ad ſeptemtrionalem ripam coluerunt, vnde vicinus Memelae fluuio lacus adhuc Curonicus: Ruſſi magis reiecti ad orientem, tamen ad illum fluuium: ad auſtrum fontium Memelae Lettaui ſeu Lithuani. Idem ille Petrus ſcri-

(7) de Curorum et Semigallorum Republica p. 939. (8) p. 68.

ſcribit, ante aduentum Teutonici Ordinis in Pruſſiam ſeu ante A. C. 1230. Ruthenos caſtrum Scalouitarum, populi Pruſſici, ad Memelam prope Ragnitam, nouem annos obſediſſe, donec fruſtra ſe eſſe cernentes receſſerunt. Viciniores igitur Ruſſi fuere Pruſſiae, quam nunc ſunt. Eo etiam tum Adalbertus Pragenſis, tum Bruno, cum Ruſſiam potiſſimum peterent religionis cauſſa, quae mea eſt opinio, per Pruſſiam potius quam per Poloniam Lithuaniamque iter ingreſſi ſunt. Scio Pruſſos vtrumque epiſcopum ſibi ſolis vindicare: at me mea delectat opinio. Sane Dithmarus Merſeburgenſis, qui Brunonis neceſſarius fuit ad A. C. 1009. (9) *tunc in confinio praedictae regionis* (Pruſſiae) *et Ruſciae cum praedicaret, primo ab incolis probibetur, et plus euangelizans capitur.* Quare non eſt nihili cum Albertus Koialouitius ſcribit: (10) *Fortunam parentis correxit Vlodimirus, finitimis prouinciis ad imperium Ruſſorum adiectis, inter quas Lituania etiam ab aliquibus numeratur.* Cum autem ante Vladimirum Lithuania vtique ſui iuris fuit, huiusce rei commentatio non ad hanc aetatem pertinet, et alio loco inſeruiet magis. Id enim nunc maxime conſtituendum nobis fuit, illis teſtimoniis Curoniam Samogithiae regionem intra ſuos terminos continuiſſe. Cum Adamus Bremenſis dicit, multos religionis cauſſa *ex Hiſpanis et Graecis* in Curoniam veniſſe, Graeci, quod Hartcnochius iam vidit, et ante eum Henricus Bangertus ad Helmoldum, nulli alii ſunt, quam Ruſſi: at Hiſpanos quos dicat, non video. Vereor, ne cum *Supanos* ſeu regulos Lettoniae audiuit, ex eo inciderit in ridiculum errorem de Hiſpanis. Meo autem iudicio rectiſſime ſenſit Matthaeus Praetorius in Orbe Gothico

(9) p. 398. ed. Leibn. (10) Hiſtoriae Lithuanicae parte priori p. 36.

thico, Curoniam a *Cauras* Prussica voce, hoc est *a planitie* appellatam esse; nec minus, qui Semigalliam a *Sceme* et *galle*, quasi *terrae fines* interpretantur, digni nostro adsensu videntur: fuit enim Semigallia, quae Duna flumine continetur, extrema Curoniae terra.

Succebat, Adamo Bremensi teste, Esthonia, cum nondum notum esset Liuonicum nomen. Snorro Sturlaeus, qui A. C. 1241. caesus est in Noruagia, frequentem memoriam huiusce littoris celebrans, aliter totam regionem haud vllo in loco nuncupauit, quam *Eystland*: eidem Esthlandus est *Eistur*. Sic saepe in Runicis lapidibus. Apud Adamum Bremensem, et Helmoldum, et apud Saxonem Grammaticum, *Estland*. Hi more magis Danico, et vt Anglo Saxones, *East* dicebant *orientem*: illi Noruagico et Islandico *Eist*, vnde *Eistur*, *orientalis*, et *Austur* et *Eistra*, vt *Eistra Sallt* in Jarla saga, hoc *mare orientale*, seu Balticum. Prima Aestiorum memoria apud Cornelium Tacitum: nomen vt puto, non ab ipsa gente, sed a vicinis Germanis. Sic autem ille: (1) *Dextero Sueuici maris littore Aestiorum gentes alluuntur, quibus ritus habitusue Sueuorum, lingua Britanicae propior: matrem deum venerantur: insigne superstitionis, formas aprorum gestant: id pro armis omniumque tuleta, securum deae cultorem etiam inter hostes praestat: rarus ferri, frequens fustium vsus: frumenta ceterosque fructus patientius, quam pro solita Germanorum inertia laborant: sed et mare scrutantur, ac soli omnium succinum, quod ipsi glesum vocant, inter vada atque in ipso littore legunt.* Equidem inuitus finibus meis

 excedo

(1) de moribus Germanorum c. 45.

excedo ad vetuſtiorum memoriam temporum: tamen me neceſſitas cogit ad deuinciendam inter ſe huius populi hiſtoriam, non vt pertractem, ſed vt attingam. Mare Sueuicum Cornelii ſine omni dubio hic Balticus ſinus eſt, neque negari poteſt, apparere ex Tacito, Aeſtios iis in littoribus tunc coluiſſe, vbi ſuccini copia eſt, in Pruſſia, inquam, Samogithia, Curonia: multae enim gentes in populo Aeſtio fuere. At cum Ioannes Henricus Boeclerus (2) Aeſtios Germanicis populis adſcribit, illa quidem vis eſt. Non enim ex ritibus Sueuorum, quos ob vicinitatem et commerica haud difficulter recipi potuiſſe apparet, Aeſtios eum oportuit adiungere Sueuis, ſed ob linguae diuerſitatem ab eorum corpore excludere. Britannicae propiorem Tacitus dixit Aeſtiorum linguam, vt iudicare poterant Romani, neque Britannicae admodum gnari, neque Sueuicae. Itaque fruſtra eſt Cluuerius, cum Aeſtios hoſce ſine aliqua teſtimonii auctoritate ſuo arbitratu e Galliae finibus in coloniam deduxit ad mare Balticum, nempe vt Britannice loquerentur, quando, vt Tacitus in vita Agricolae prodidit, eodem ſermone vſi ſunt Brittanni et Galli. Immo Romani ſermonem audiuerunt in Aeſtiis, quem Sueuicum dicere non poterant, ita ab eo abhorruit: dixere Britannicum, τρὶς ἓξ, ἢ ̓́ρεὶς κύβοι. Ita iam Hermannus Conringius et Samuel Schurzfleiſchius ſenſerunt. Nam cum Boeclerus in voce argutatur, qua Tacitus *propiorem Britannicae* dixit, tanquam ſimul non negaret, aliquid Sueuici continuiſſe, in eo ſummi viri iudicio non accedo: notior mihi in Tacito aliisque illorum temporum dicendi ratio

(2) Diſquiſitio de acquiſito et amiſſo imperii Romani Germanici in Liuoniam iure p. 4. ſeq.

tatio est, quam vt me circumueniat: cum propriorem dicit, puta eum nulla comparatione dixisse congruentem. Sic ille inquam, sic alii, et quidem elegantissime. Denique cum concedit nobis doctissimus vir, Esthones hos nostros esse Taciti Aestios, quid obsecro in lingua Esthonica est, quin nescio cui linguae propior videatur, quam Sueuicae seu Teutonicae? Nempe Fennica tota est. Quis autem nostrum tam argutus est hodie, vt vel tantillum Germanici sermonis omni in lingua Esthonica aut Fennica sentiat? Et Fenni vero Taciti temporibus infra Aestios coluere in Polonia, quod me maxime confirmat, vt Aestios Taciti hos ipsos Esthonos fuisse credam, vno semper cum Fennis corpore. Quoniam autem Fenni nunc altius sub septemtrione reiecti sunt, sequitur, eos ocyus in hanc Lithuaniam atque deinceps superiores in regiones concessisse, donec a Slauis atque ipsis ab Aestiis illum in angulum abstrusi sunt. Sed de hac re alias. Aestii cum Theodorici Gothorum regis temporibus circiter A. C. D X, vt ex Cassiodorio multi demonstrarunt, illis ipsis in regionibus succini feracibus egerunt, et paullo post Prussi ingressi sunt, vt alias dicam, a nullo alio populo eiecti sunt illis finibus, quam a Prussis, nullo alio tempore, quam circiter A. C. D XIV. Post id tempus memoria rerum vel ad suspicandum defecit, donec Eginhardns Abbas Caroli M. temporibus restaurauit. Is enim sic fatus est: (3) *Sinus quidam ab occidentali occano orientem versus porrigitur longitudinis quidem incompertae, latitudinis vero, quae nusquam centum millia passuum excedat, cum in multis locis contractior inueniatur: hunc multae circumsident nationes:*

 Dani

(3) In vita Caroli M. p. 6. ed. Reub.

Dani ſiquidem et Sueones, quos Nordmannos vocamus, et ſeptemtrionale littus et omnes in eo inſulas tenent: at littus auſtrale Slaui, et Aiſti, et aliae diuerſae incolunt nationes, inter quos vel praecipui ſunt Velatabi. Sinum dicit Botnicum. At cetera vt intelligantur, velim pro ſe quisque conſideret, quae tum huius incomperti ad orientem maris forma vulgo Germanis perſuaſa fuerit. Ex Adamo Bremenſi, vel magis ex Snorrone Sturlaeo, ſenſi, crediditſe, Balthicum mare ad orientem deſinere in arctiſſimo angulo, qui hinc littoribus auſtralibus, inde borealibus longo tractu includatur, tamquam extremum arcus Scythici cornu, vt quondam apud Dionyſium Periegeten fuere, qui orbis terrarum duo extrema peracuta ſibi informarunt. Eo non eſt mirandum, Aiſtos ab Eginhardo ad auſtrale littus poni: nam haec ipſa Eſthlandia et Liuonia illis ſcriptoribus in fronte viſa eſt obuerti ſeptemtrioni, ſcamnum obtendi occaſui ſolis. Immo adeo haec littora ignota fuere Germanis, vt vel S. Anſcharius, qui paullo poſt Eginhardum fuit ſub Ludouico Pio Imp. nomen Eſthoniae ignorarit. Apparuit hoc mihi ex priuilegio Hamburgenſis eccleſiae, quod Ludouicus Pius A. C. 834. dedit, in quo dioeceſis Hamburgenſis epiſcopatus deſcribitur, vt eo pertinerent terrae *Danorum*, *Suecorum*, *Norueon*, *Gronlandon*, *Halligalandon*, *Islandon*, *Scrideuindon*, *et omnium ſeptemtrionalium, et orientalium nationum.* Iisdem verbis Gregorius IV. P. R. in bulla vſus eſt, qua archiepiſcopatus huius iura confirmauit. (4) Neque deinde S. Rembertus Anſcharii ſucceſſor cum eius vitam deſcriberet, Aeſtios

(4) Apud Carolum Cointinm Annal. Franc. t. VIII. p. 116. In Lambecii Originibus Hamburgicis p. 36.

Aestios cognouit: nam de Gualdone Corbeiensi, qui Rembertum carmine expressit, nihil dicam. Si tum omnis his tractus paullo fuisset notior, in describenda dioecesi Hamburgensi maiorem accurationem adhibuisset Imperator: nunc modo haec littora *orientem* dixit. Sic credo audiuerat ab Haraldo Daniae rege, qui ad imperatorem venerat supplex, neque enim aliter, quam *Ostrogard* dixisse videtur more Danico.

Tempora succedunt, cum Adamus Bremensis nobis opem ferre potest. Is (5) postquam insulas maris Balthici recensuit, quas cum testimonio auctoris in *Knitlinsagu* (6) conferri velim, Curoniam quoque in numero insularum collocat et Estlandiam. De Estlandia: *Insula grandis Estland dicitur: non minor illa, de qua prius dixi:* (Curonia) *nam et ipsi deum christianorum prorsus ignorant, dracones adorant cum volucribus, quibus etiam viuos libant homines, quos a mercatoribus emunt, diligenter omnino probatos, ne maculam in corpore habeant, pro qua refutari dicuntur a daemonibus: et haec quidem insula terrae foeminarum proxima narratur, cum illa superior non longe sit a Birka Sueonum.* In his tamen extremis mira adhuc est geographiae ignorantia, huic seculo, quo Adamus vixit, apta. Curoniam Bircae propiorem esse, quam Esthoniam, quid Adamo persuaserit, video. Nam Careliam cum Curonia confudit, vt vberius demonstrabo postea. Adamus quoque *Aistos* et *Scutos* coniungit: *Aisti* ex Cassiodorio et Eginhardo Esthones: *Scuti* Russorum *Giudi*, iidem illi Esthones. Inde iam *Foeminarum regio*, Amazonas dicit

(5) Adamus Bremensis p. Eggehardus Vragiensis ex Adamo p. 282. (6) p. 58. (7) ed. Olai Vormii p. 35.

cit ad Caucasum, vt geographiae summam confusionem fuisse inuectam saepe monuimus. Audiuerat Esthones a Russis *Scutos* dici: Scythae olim ad Caucasum, isthic etiam Amazones, reliquum erat, vt Esthones Scutis, seu Scythis, tamquam diuersis, et Amazonibus et Caucaso vicini ponerentur; praesertim cum Caucasi Sueuiae vicini fidem facerent montes Vergaturii, ad quos Biarmia, quo Sueci frequentes commeabant. Sed has regionum perturbationes iam alibi descripsi. At magnitudo Esthoniae, vt ab Adamo est descripta, aequalis Curoniae fuit: octo dierum itinere, intelligas, inde vsque ad Duna fuisse protensam ad hunc vsque Neuam. Nam Ingria tum fuit nulla, quod quidem aliquo testimonio exstet et vel suspicione: tum si historiam rerum hoc in littore a Normannis gestarum videas, tum in Snorrone, tum aliis in sagis, Esthoniam his fere terminis finitam fuisse inuenies; qua nunc Liuonia, Esthonia, et Ingria ad Neuam vsque. Inde iam Fenni vsque fere ad oceanum septemtrionalem. (8) Eiusdem populus corporis cum et lingua ita sit vna, quemadmodum Saxoniae superioris atque inferioris dialecti. Tantummodo obseruatum est, Fennicam linguam multo locupletiorem esse Esthonica et magis cultam, populum ipsum Fennicum liberaliori ingenio. Credo Esthonibus in extrema sub Teutonico Ordine seruitute, quidquid erectae mentis fuit, periisse: Fennorum sors semper mitior fuit. Quare, cum; vt ex sermone iudicaui, Esthonum atque Fennorum vnum corpus fuit, recte prisci Russi omnes populos illo in tractu *Cziudos* seu *Giudos*, Scythas vocarunt. Esthlandis hodie nomen Aestium ignotum est, Fennis

(8) Insulae Adalsyllo et Dago. Ad Russos Snorro p. 318.

nis Fennicum. Esthlandis haud aliter hodie Esthlandia, quam *Meie maa*, *nostra terra* et popularis *temma on meie maald*, *ille*, *qui ex nostra terra*. Ab Fennis dicitur Esthlandia *Pochziesin*. Fennus Fenno *Suomolainen*, et multitudinis numero *Suomolaiset*, Fennica regio *Suomen maa*. Est autem *maa regio* et *suo lacus palus*. Sunt igitur *Suomalaiset*, populi in paludibus et lacubus degentes. Hoc nomine non videntur vsi, priusquam regionem paludibus et lacubus crebris refertam ingressi sunt. Suiones eos a veteri memorea Fennos vocant. In Hialmari regis historia, e Runis Latine conuersa a Peringskioldo, edita ab Hickesco, (9) dicitur *Binland*. Apud Snorronem et multis in sagis, *Finland* et *Vinland*. Euindo Skalda pillero, medio seculo decimo (10) *Finnar*. Tantummodo cauendum in vocabulo est, quod eodem illo prisci *Fioniam* dixerant. Sed de hac re Thormodus Torfaeus in historia Vinlandiae antiquae accuratissime egit. Neque credo ego Suionas in nomine Fennico errasse: nam exstant alii scriptores alterius caeli et conditionis, qui eodem in loco Fennos ponunt. Geographus Rauennas, quem alibi demonstrabo, his fere temporibus, quae illustranda suscepi, commentatum fuisse, ipsum nomen posuit: (1) *iuxta ipsam Scythiam litus oceanum, ponitur patria, quae dicitur Rere frenorum et Sirdifenorum: cuius patriae homines, vt ait Aithanarit Gothorum philosophus, rupes montium habitant et per venationes tam viri, quam mulieres viuere, cibo vel vino ignari existentes in omnibus: quae patria super omnes frigida esse adscribitur.* Scythiam hic, vt saepe

 mo-

(9) In thesauro linguarum septembr. t. II. p. 147. (10) apud snorronem t. I. p. 189. (1) p. 160. ed.

monui, ex praua geographiae cognitione dicit regionem commentitiam, Caucaso promoto ad septemtrionem. Idem ille: (2) *ad partem septemtrionalem habet ipsa Europa finem oceanum, qui tangit Scythiam eremosam, item Amazonas, vbi eas, postquam egressae sunt de montibus Caucasis antiquitus fuisse legimus: postmodum tangit ipse Roxolanos* (sic enim vocat Russos) *nec non Sarmatas iterum Scythiam, postmodum Rerefennos et Serdefennos, verum etiam Danos, nec non et Saxones.* Nihil verius, quam quod Hugo Grotius, qui hoc auctore nondum edito, vsus est, vidit, *Serdefennos*, aut vt in codice Vrbinate est, *Sisdefennos*, esse *Scridfennos*: at *Rerefennos*, et vt in Vrbinate codice est, *Rerefenos* et *Rcreferos*, esse *Redefennos*: illos qui cursu et calopodio, hos qui rhedis seu trahis vtuntur. Cum a Procopio Caesariensi Scritofenni in Thule ponuntur, Thule an Scandinauia sit, Pontanus, Arngrimus Ionas, Thormodus Torfaeus, Olaus Rudbequius, multi alii disputarunt. Negari tamen non potest, Procopii Thulen has sub extremo septemtrione regiones esse, in quibus Fenni censentur. Quare iam Iustiniano Imp. isthic coluere, vt mihi vno quasi verbo liceat superiorum memoriam temporum respicere. Isthic eos agnouit Iornandes, et Paullus Varnefridus, et denique ipse Adamus Bremensis. (3) *Sunt autem Finni vltimi septentrionis populi, vix quidem habitabilem orbis terrarum partem cultura ac mansione complexi: acer iisdem telorum est vsus: non alia gens promptiore iaculandi peritia fruitur: grandibus et latis sagittis dimicant, incantationum studiis incumbunt, venationibus callent: incerta illis habitatio est, vagaque domus*

(2) p. 249. et 293. (3) p. 93.

mus, vbicumque feram occupauerint, locantibus ſedes: pandis trabibus vecti, conferta niuibus iuga percurrunt. De praeſtigiis eorum conſtans fama eſt et vetus, vsque ad Λυκανϑρώπων fabellam; quae res nos vehementer confirmat, veterum Neurorum hanc eſſe ſobolem. Hialmari hiſtoria harum incantationum ſpecimen edidit. (4) De ſagittandi vero peritia, multi alii in ſeptemtrione praedicant. (5) Eſt autem Fennicum nomen quam accuratiſſime a Matthia Belio explicatum ex Hungarico, ſeu Magiarico ſermone, (6) in quo *feny* eſt *ſplendor*, *nitor*, *fulgor*, *iubar*, *fenyes*, *ſplendidus fulgidus*, *fenyeſſeg*, *ſplendor*, *fenyeſſen*, *ſplendide*, apud Molnarum.

Poſtquam demonſtraui, inde vsque a Duna populum fuiſſe Eſthonicum iſtis noſtris temporibus, incertum eſt, fuerintne etiam, qui Liuones dicerentur. Nam poſt A. C. 1158. et Bremenſium Lubecenſiumque mercatorum aduentum nusquam inuenio Liuoniae nomen, poſtea toti huic regioni ceſſit: tandem Curonia quoque et Samogithia ab Ordine Teutonico occupatis, paene obliterato Eſthoniae nomine et memoria, totus ille tractus inde a Memela flumine Liuonia fuit. Quomodo occupata ſit ab Equitibus Marianis, dicam infra. Tum vero Eſthlandi his terminis fere, quibus hodie incluſi erant: cetera obtinebant Littae, populus Lithuanicus, vt nomen ipſum eſt, qui pulſis Eſthonis hic colonias deduxerunt. Sed et Lettae ſerius ingreſſi ſunt, vt nihil ad hanc noſtram geographiam eorum memoria pertineat. De nominis Liuonici origine multum disputari video. Martinus Cromerus, et Matthias Strycouius Oſſoſteuicius, atque Albertus Coialouitius, Libonem quen-

(4) p. 141, 143. (5) V. Snorronem (6) In veteri litteratura Hunno Scythica p. 20.

quendam Romanum bello ciuili cum classe ex Italia aduenisse putant, et ab eo dictam esse Liboniam. Explosa haec de Libone sunt ab Augusto Thuano, tamen perplacuere tum aliis, tum Christiano Kelchio in historia Liuoniae. Tanto est difficilius fabulas e mentibus hominum euellere, quam fingere. Aperiam fontem fabulae. Cromerus legerat apud Florum (7) de bello ciuili inter Pompeium et Caesarem: *quippe cum fauces Adriatici maris iussi occupare, Dolabella et Antonius, ille Illyrico, hic Curetico littore castra posuissent, iam maria late tenente Pompeio, repente legatus eius Octauius Libo ingentibus copiis classicorum circumuenit vtrumque.* Hoc in loco bonus vir duas commoditates sibi visus est reperisse ad coniecturam: *Cureticum* littus, quod putaret esse *Curonum* et *Libonis*: nomen dignum *Liuonia*. Et iam Saxo Grammaticus huic errori praeluserat, cum Karelos diceret *Curetes*, vt etiam hic aliquid ab eruditione admisceret, cuius intemperantissimus fuit: sic enim Aeneas pater dixerat: (8)

Et tandem antiquis Curetum allabimur oris: deinde alii in Saxone traxere nomen ad Curonos. Iam Octauio Liboni aderat classis, teste Floro, qua peteret Liuoniam. Quid quaeris? nempe *sunt Apinae Tricaeque, et si quid vilius istis.* Editiones in hoc *Curetico* vehementer discordant: Salmasius recte emendat *Curictico*, et ostendit littus in faucibus Adriatici maris fuisse, Claudii Ptolemaei Κυρικτα. Bene habet: iterum fabula missa est exulatum. Alii Liuoniam dictam putant a *Liue*, *arena*. Forte igitur ita accederit, vt cum Bremenses audirent *littus* ab incolis, quibuscum sermonem miscere non poterant, *Liue* nuncupari,

(7) l. IV. c. 2. 31. (8) Aeneid. l. III. v. 131.

pari, populum autem eo nomine Albi fluuio vicinum recordarentur, vt hos veluti cognatos illorum etiam dicerent *Liuos*, et *Liuonos*. Non dico fuisse illos ad Albim et hos Lettouos eiusdem stirpis, sed ita videri potuit rudibus nautis et negotiatoribus. Illi haud procul ab Hamburgo. Testem habeo Hermannum Cornerum, qui Danorum cum his *Liuonibus*, aut vt alibi vocat, *Liuis*, iam ad A. C. 810. meminit. (9) Sunt adhuc in littoribus Liuoniae *Liui* vulgo dicti, qui Estonica lingua vtuntur permisti Lettis maiori in Liuonia populo, alterius stirpis. In illis nimirum error mansit, vbi apparuit, Lettos Liuonum nomen non posse sustinere. Et res mira est in vetustis scriptoribus Prussicis ineditis multisque schedis; Liuonia enim haud fere aliter vocatur, quam *Eyffland*, Liuoni, *die Eyffen*. Videtur sane aliquid corruptelae ex *Eystlandiae* et *Eystorum* nominibus ortum et exclusum esse in Prussia scribarum oscitantia. Vnum habeo vetustissimum Oliuerium Scholasticum ante A. C. 1227. quo anno, vt Schatenius in Annalibus Paderbornensibus ostendit, decessit, sic in Historia regum terrae Sanctae fatus est: (10) *nam gens Liuonum, Estonum, Prutonum* (Prussorum) *variis erroribus delusa, ignorans dei filium et incarnati verbi mysterium, numina gentilium colebat, Dryades, Amadriades, Oreades, Napeas, Humides, Satyros, et Faunos: sperabant enim super lucos, quos nulla securis violare praesumsit, vbi fontes, et arbores, montes, et colles,* (Chammen) *rupes, et valles venerabantur: nunc autem sanam doctrinam secuta, ad episcopum et pastorem animarum suarum conuersa Iesum*

 Chri-

(9) p. 439. 440. et ad. A. C. 1110. p. 632. (10) p. 1396. ed. Eccardi.

Christum, pontificibus suis obediens ecclesias aedificat et frequentat, legibus christianis pro magna parte subiecta. V. supra, vbi Adamus Curoniam Bircae propiorem dixit. Estland, Chori. Glossae Keronis *chind*, *chamf*, *chiribh chuning* pro kind, kamf, kirich, kuning. Sic *chur* et *churfurst*, scribimus, pronunciamus kur et kurfurst.

Hoc loco nihil de Ingria, seu Igria, dicemus: est enim recentius his temporibus nomen. At de Carelia necesse est vt dicamus. Ericus Rex in historia Daniae. (1) *Totam Pruciam, Semigalliam, et terram Carelorum, subiugauerunt sibi.* Dubitari potest, scripseritne Carelos Ericus, aut eius monachus, vt sub A. C. 1288. prouincia dicebatur, an vt Lothenecuuo Erici filio rege, tot seculis ante. Sed isthuc verum est potius, quam alterum. A Snorrone vocatur *Iarls riki.* Narrat enim Ingigerdin Olai Regis Suediae filiam, cum desponsa esset Iaroslao Principi, Vladimiri Regis filio, in pactis nuptialibus a sponsi parte confirmatam accepisse. Snorro p. 318. *Aldeiuborg ac Iarls riki dat er dar liggur lit. Aldeiuborg et Iarls regionem, quae ibi sita.* Olaus Rudbequius p. 19. putat Aldeio et Ladeio per metathesin dictum, aliaque exempla adfert similia. Ea in regione collocauit necessarium suum Ragnuald Iarlum. *Ingigerdis regina castellum Aldeigoburgum, simulque annexam prouinciam cum Iarli dignitate, Ragnualdo dedit, qui etiam diutius multa cum dignitate hic vixit: Ragnualdus Iarlus ex coniuge sua Ingeburgi filios susceperat Vlfonem Iarlum et Eilifum Iarlum.* (2) Iam nemo septemtrionalium antiquitatum ita ignarus est, vt nesciat, quae

(1) p. 267. V. Rudbequius p. 338. seq. (2) Snorro p. 517.

quae Iarlorum dignitas in Suecia fuerit. Comitibus sunt qui aequiparent: possis etiam Romani imperii Principibus. Hic Rognualdus fuit Vestrogothiae Iarlus. Snorro: (3) *Ragnualdi pater Vlfo frater erat Sigridis, cognomento Imperiosae*:. *Olauus vero Suioniae rex et Ragnualdus Iarlus filii erant patrueles.* Scilicet vt alias ex Snorrone constat, haec genealogia fuit

Scoglar Tosti priuatus, sed piraticis celeber.

1. Ericus Victoriosus = Sigridis Imperiosa Rex Sueciae. Regina.

2. Vlffo

Olaus Suecus Rex Sueciae.

Ragnuald Iarlus Vestragothiae.

Ingigerdis Iaroslai Regis Russiae coniux.

Habuit in matrimonio Ingeburgin filiam Tryguonis, Olai Regis Noruagiae sororem, vt Snorro nos docit: (4) At animus inclinat in eam opinionem, *Iarls riki* regioni huic antea nomen non fuisse, sed ex eo tempore ortum, cum Ragnualdus Iarlus ab Ingigerdi regendam suscepit A. C. 1019. Inde tamen *Iarelia* et *Carelia* corrupto vocabulo fuit, vt mihi aliquando in mentem venit. Verum et vetus Careliae nomen apud Snorronem Sturlaeum occurrit *Kyrialand.* (5) *Ericus Emundi filius Vpsalensis rex in vigore aetatis constitutus, militaribus expeditionibus vt plurimum intentus fuerat, ac quotannis peregre profectus, Finn-*

(3) t. 1. p. 351. (4) p. 350. (5) t. 1. p. 484. 485.

Finnland Kyrialand, *Eystland*, *Kurland* (*oc vyda um austar laund*) et porro *Orientales regiones sibi subiecit*: *cuius*, *heroicae virtutis praeclara adhuc supersunt monumenta*, *castella regiaeque arces eximii operis*. Ex ipso ordine regionum apparet, *Kyrialand* intra Esthoniam et Finniam fuisse sitam. Veteri lingua *kyr*, *vacca* apud Snorronem. Vereor tamen, ne nomen plane sit e Fennico corruptum: et est adhuc fluuius *Korl*. *Kyriali* a Normannis per apocopen etiam dicebantur *Kyri*, inde *Kuri* quoque vt est in codice Flateyensi et in editore historiae Olai Trigguini parte II. c. 32. p. 140. Torfaeus parte I. p. 160. errorem calami esse credidit. Non est necesse. Hoc est isthuc S. Remberti *Chori* seu *Kori*. Nam Germani iis temporibus *ch* aliter, quam nunc, pronunciabant, sic videlicet vt Itali. Erant autem vt Torfaeus l. c. citato ostendit, Kyriali non modo ad hoc littus Finnicum siti, sed etiam alii eiusdem corporis et nominis ad Mare Album, vbi littus Carlstrand. Hi vicini erant Queniae regioni. Congressus Quenorum cum Kyrialis in vita Heraldi Pulchri comi c. XVII. vna cum itinere Thoralfi describuntur. Annales Islandici ad A. C. 1271. imperante in Noruegia Magno Hcaconis Senioris filio Kyrialos et Quenos in Halogiam infusas crudeliter desaeuiisse. Et iidem Annales ad A. 1301. Karelorum incursum in Noruegiam, contra quos Hacon rex misit Augmundum Iungadans cum magnis copiis. Haec quoque Carelia fuit sub Russis. Historia Regis Haconis meminit Alexandrum regem Holmgardiae legatos misisse de mutuis Finmarchiae ciuium Noruagiae ac subiectorum, et Kyrialorum Russiae creditis. Hoc vt rectius intelligatur, scire nos oportet, qui situs Finmarkiae Noruagicae

fuerit

fuerit et Queniae atque Biarmiae. Iuga montium Kiöl Suionïam et Finniam a Naruagia et ceteris septemtrionalibus disterminarunt. Finmarkia in Noruegiae extremo, vbi nunc quoque exstat. Scio extendere alios fines Noruegiae ad Ganduichum vsque, neque nego, fuisse pro temporum ratione nonnumquam ampliores. Ganduichius sinus non sane est Bothnicus ad Helsingiam, vt Schefferus sibi persuasit de Lapponia c. 11. sed, vt Torfaeus me docuit, et ante eum Verelius, Schefferi opinione, quam alias secutus fuerat, relicta, Ganduicum Album mare esse. Inde et Austroich dicitur iam Torfaeus cum ad Duinam fluuium venit, ad orientem eius constituit Biarmiam p. 163. *Ganduich*, Biarmia vero a Saxone et Io. Magno in vlteriorem et citeriorem diuisa est. Poste 'orem solam recipit Torfaeus, citeriorem explodit. Et amplitudinem regionis, neque Olaus Verelius, neque Torfaeus, ausi sunt definire. Duina tantum S. Vina et Vimr ab antiquis Biarmiae adseritur, et ita adseritur, vt pars Biarmiae etiam ad occidentem fluminis fuisse videatur. Hac in regione fuit *Aldeigoburgum*. Oddoni Monacho *Aldaeigiuborg*. In vita Olai Tryguonidis: *a hinum naesta sumri for han i Garda austr, oc var i Aldaeigiuborg aein vetr. Proxima aestate in Gardam orientalem profectus est et fuit Aldaeigiuburgi vnum annum.* De Magno S. Olai filio Snorro: (6) *Magnus Olai filius post Iolinia sacra in Holmgardiam Aldeigioborgar profectus, naues isthic aedificauit.* Olaus Verelius ad Oddonis Monachi sagam: (7) *Aldejuburg, oppidum Prussiae meridionalis siue Gardarike.* Ad Heruorar saga (8) vbi *Aldeioborg*: *oppidum hoc Gardarike siue Russiae meridianalis.* Mox haeret: *mirum videri possit,*

(6) p. 3. (7) p. 16. (8) p. 72.

possit, *quodnam itineris compendium Andgrimi filiis Bolmum in Smalandia incolentibus et ad condictum cum Hialmaro et Arvar Oddo, in Selandiae insula Samsoe pugnaturis*, *Aldeigioburgum in Russia fuerit*? *parum abest quin credam insulam aliquam inter Sueoniam et Russiam in Baltico mari sitam isto nomine designari*, *praesertim cum mox addat auctor*: *Andgrimi filiis ad Samsoe insulam properantibus iter faciendum erat per Aldeigioburgum*: *nisi forte piratis istis mare semper oberrantibus illud compendiosissimum iter*, *quod praedandi facultatem suppeditabat*. Sed nos Heruorar sagae auctorem nihil moramur, praesertim cum Aldenburgum in Russia situm non scribit et aliae illo nomine vrbes in Balthicis littoribus fuere. Snorro de Erico Iarlo (9) *circa initium veris*, *collectis copiis mare Balthicum ingressus et delatus* i riki Valldimars Kong, *in regnum Valdemari regis*, *late depopulatus est*, *vrbem Aldeiguborgar obsidione cinctam occupauit*: *castellum solo aequauit*, *vrbem exussit*: *deinde in* Gardariki *infesta signa circumtulit*. Idem in Haraldi Hardradii Norregiae regis rebus tradit, vt apud Iaroslaum Russiae regem fuerit, et ducta filia eius Elizabetha, post hyemem abierit ex Holmgardia, et verno tempore *til Aldeigoborgar* profectus inde nauibus circa aestatem soluerit. Hoc iter ex Russia etiam Magno, Olai filio, fuit; eodem teste: (10) *til Aldeigu Borgar* naues sub ver expediri coeptae. Quis mihi nunc negauerit vrbem in Carelia fuisse, haud ita longe a mari. Quare iis adsentior, qui stadiis Ruthenicis ab Petropoli sita rudera vetustae vrbis ad fluuium haec *Aldaioborg* fuisse putant. *Aldaioborg* vi nominis Palaeapolis, sine dubio *Starogrod* Russis: vt nunc

(9) t. I. p. 318. (10) t. II. p. 74. (11) t. II. p. I.

Veterem Ladogam appellant ista rudera. Et Russi quoque tradunt metropoles imperii sui ex ordine fuisse, Veterem Ladogam, Nouogrodium, Kiouiam, Vladimiriam, Moscuam. Et cum inde a Rurico rege, nemo Aldaioburgi sedem habuit, sequitur memoriam de priscis ante Ruricum regibus in huius metropoleos mentione contineri. Et vt illa Vetus vrbs dicta fuit, ita Noua vrbs Nouogrodium, altera regni sedes.

Extant scriptores Dani, Noruagi, Germani, Suiones, qui Russiam ad hoc orientale Baltici maris littus protendunt et *Ostragard* vocant. Incerti auctoris Chronica Sclauica a Lindebrogio edita: (2) *Rutia a Danis Ostragard, id est, in oriente posita, affluens omnibus bonis vocatur: dicitur etiam Chunigard, eo quod sedes Hunnorum primo ibi fuerit: huius metropolis Chue* (Kiouia) *id est a coge, nescitur a quibus doctoribus sit conuersa: Graecorum magis quam Latinorum obseruantiam imitatur: nam Rutzenum mare breue id est, brachium in Graeciam mittit.* Rutzenum mare dicit hoc ipsum Esthonicum, breue eius seu sinum, hunc Finnicum, quem absurda persuasione credidere in Pontum Euxinum effundi. Graeciam vero vocarunt partem illam Russiae, vbi Kiouia. Sic demum intelligetur auctor. Eadem fere Adamus Bremensis (3) et Helmoldus: (4) *Littus australe Slauorum incolunt nationes, quorum ab oriente primi sunt Ruzi, deinde Poloni, habentes a septemtrione Pruzos. Diu est, ex quo Ruzia credidit: Russia autem vocatur a Danis Ostrogard, eo quod in oriente positus omnibus abundet bonis: haec etiam Chunigard dicitur, eo quod ibi sedes Hunorum primo fuerit:*

Ddd 2 *huius*

(2) p. 189. ed. Fabr. (3) in H. E. p. 58. (4) l. 1. c. 1.

huius metropolis ciuitas est Chue. Quibus autem doctoribus ad fidem venerint, minime compertum habeo, nisi quod in omnibus obseruantiis suis Graecos magis, quam Latinos imitari videntur: nam Rucenum mare breui in Graeciam transmittit. Adamus Bremensis: *adfirmant Dani, longitudinem huius ponti saepe a pluribus expertam, secundo flatu per mensem aliquos a Dania peruenisse in Ostrogard Ruzziae.* Quod ex eo repetiit Eggehardus Vragiensis. (5) Sed haec Adamus etiam planius; (6) mare Balthicum in australi littore accoli primum a Danis et populis aliis: *deinde*, inquit, *latissima Polonorum terra diffunditur, cuius terminum dicunt in Ruzia regnum connecti: haec* (Russia) *est vltima et maxima Vinulorum* (hoc est Slauorum) *prouincia, quae et finem illius facit sinus.* Finem sinus dicit ad austrum. Nam, vt diximus antea, Balthicum mare ab Adamo in arctum contrahitur sub oriente, tamquam sola littora septemtrionalia et australia sint. Et meridionalia littora inde a Dania vsque ad sinum Fennicum ponuntur, dum in septemtrionalibus ait, *primos esse Nordmannos*, (Noruagos) *Sconiam deinde, postea longis terrarum spatiis regnare Sueones vsque ad terram foeminarum*: (Amazonum ad Caucasum montem) *supra foeminas*, inquit, *Vilzi, Mirri, Lumi, Scuti et Turcae habitare feruntur, vsque ad Ruzziam, in qua denuo finem habet ille sinus.* Turcas supra Caucasum, seu ad occidentem montis dicit seu Chazaros, seu Turcas quos in Hungaria coluisse acceperat. Scholiasta vetus Adami: (7) *vsque hodie Turci, qui prope Ruzzos sunt, ita viuunt.* De Scutis et Mirris iam supra diximus quod satis

(5) p. 283. (6) p. 58. (7) p. 59.

tis est. *Vilzi* Lithuana lingua, *Lupi*, λυκάνδρωποι Herodoti et *Lami* praestigiatores, fabulae veteres de Neuris, et nouae de Fennis: quamquam non sum ignarus Vilzos nomine ad Oderam egisse: tamen illi non sunt Vilzi, quos hoc loco Adamus Bremensis citat. Itaque cum alibi scribit Adamus, (8) *Olaum, Nordmannorum regem et martyrem, omnibus septemtrionalis oceani* (Baltici) *populis Sueonum, Gothorum, Semborum, Danorum, atque Slauorum aeterno cultu honorari*, vides Slauos dicere non modo in Pomerania et Megalopolitano agro sed in primis Russos ad hoc litus. Incerti auctoris Chronica Slauica: (9) *Sclauia minor a confratribus Boemis et Brutenis* (Prutenis) *diuersis amnibus diuiditur: a Gothis et Danis mari seiungitur: baec gens est robustissima et animosa, licet sit frontosa et thorosa: piscatura et agricultura delectatur estque magis pia Slauis superioribus* (in Pomerania et agro Megalopolitano) *maxime quia cum Germanis consortia et admixtionem habet. Mare Balthicum ad litus australe habet Slauorum nationes: primo ad orientem Ruthos siue Ruthenos de Rutzen, Polonos atque Prutenos, ab austro Bohemos.* Annalista Saxo: (10) *Semland prouincia, quam possident Pruci: iter eiusmodi est: Hammaburch vel ab Albia flumine septimo die peruenias ad Vimnae ciuitatem per terram: nam per mare nauem ingrederis ad Sliasuig vel Aldinburch, vt peruenias Vimnae ciuitatem, ab ipsa vrbe vela tendens, XIII. die adscendens in Ostrogard Ruzziae, cuius metropolis est Chiue aemula sceptri CPlitani, quae est clarissimum decus Graeciae.* Accedit Saxo Grammaticus, qui passim et classes Russicas et bella cum Russis

(8) p. 28. (9) p. 189. (10.) p. 339.

Ruſſis mari geſta refert, non alia cauſſa, quam quod eius aetate Ruſſi littus hoc Balticum tenuerunt. Et tametſi Helmoldus, Eggehardus, Incertus Chronici Slauici auctor Adamo Bremenſi ſunt vſi, tamen etiam ſua quaedam non ſane abſurda admiſcent, ex quibus apparet, haud admodum aliter poſt Adamum fuiſſe, quam fuere ante eum. Eſt autem *Oſtrogardia*, ſi vim vocis explices, *orientale regnum*, ſiue regio, vt *Mykligard*, magnum regnum ſiue CPlitanum imperium, *Chunigard* Hunnorum regnum. Et vetus quidem nomen adeo, vt Mithridati notum fuerit: *Mithridates*, vt ait Plinius, (1) in Germaniae littoribus eſſe inſulam *vocarique eam Oſerictam*, *cedri genere ſyluoſam*: *inde defluere in petras* ſuccinum. *Oſericta* Teutonice *orientale regnum*, vt *Aeſtii* Orientales. *Sic* Snorroni Eſthoni *Eyſtur* et *Auſtur*. Eſt igitur Oſtrogardia praecipue et proprie Eſthonia, quae cum in Ruſſorum poteſtate eſſet, eo et Ruſſia dicta eſt a Danis aliisque, vt Oſtrogardiae nomen omnibus deinceps ad orientem regionibus Ruſſicae ditionis communicatum fuit. Immo latius patuit, vt totius habitabilis ad orientem orbis nomen eſſet, vt cum *Auſtan* dicunt *ab oriente* et *auſtr* in orientem. Inſcriptio rupis Staekenſis: *Iskirun filia Hardir incidi fecit runas ſibi ipſi* (*hun wil auſtr ſara*) *in orientem ipſa proficiſci vult auk vt til Iurſala*, *atque etiam Hieroſolyma*. Neque *Aſgard* aliud mihi videtur, quam *orientale regnum*, ipſique *Aſae*, orientales. Luculentum vero teſtimonium Snorronis (2) extat, Eſthones iam Suendoſtlauo et Valdemaro regibus, tributum pependiſſe, de quo teſtimonio in Varagis dixi copioſius. Carelia item ſub

(1) l. XXXVII. c. 2. (2) t. 1. p. 197.

ſub Valdimaro fuit et Ingigerdi Iaroslai ſponſae data eſt morgengauiae loco. Et de Fennia Ruſſis ſubiecta Heruo- rar ſaga (3) teſtata eſt: ad quem locum Olaus Varelius: *notetur hic Vinlandiam vel Venden ad regem Ruſſiae pertinuiſſe.* Sed omni in ſeptemtrionali hiſtoria nihil eſt frequentius et celebrius, quam *Holmgard* et *Gardarik*. Torf. p. I. p. 165. Metropolis Holmgardus regiae ſedes frequens aduenarum concurſu. Eſt et magna prouincia, forte vt ille ab vrbe Holmgardo. Olaus Verelius: (4) *Garder idem eſt quod burg, caſtellum, vrbs Siſari regis Myklagard, vrbs magna, Byzantium vel Conſtantinopolis.* Gard *Anagard* in codice argenteo, aula regum Marc. 15. 16. In *Myklagardi* nomine Olaus Vormius vehementer aberrauit a vero, cum in Monumentis Danicis explicaret Megalopolitanam regionem Germaniae. Id emendauit deinde et *Gard*, vtique recte: *antiquitus vrbem arcem aut regionem ſignificabat.* Neque enim *Oſtrogard* orientalis vrbs, ſed regio eſt, *Auſturland* vt alias Snorro. Tatiani interpres Francicus *Oſtarlant* Matt. VIII. 5. Otfridus in praef. ad Ludouicum R. *Oſtarriche*, regnum orientale Francorum, Oſericta Sic in codice argenteo (6) *thiudangard regnum*, quaſi *Thiudans* (*regis*) *regio*. Et (7) *midiungard, media regis, ſiue orbis terrarum.* Et Tatianus: (8) *ſunta mittiligartes, peccata mundi.* Propria in voce ſignificatio fuit a finibus, quibus ſpatium, ſeu paruum, ſeu magnum, circumſcriptum fuit. Vnde *gardur* in Runicis Olai Vormii et *agger* et *praedium*. Quare *Gardarikia* eſt tamquam *regionis regnum*. Et ſine adiecto *rik* occurrit: vt

---

(3) c. 13. (4) ad Gothrici et Rolfi ſagam p. 97. (5) in Additamentis ad Monumenta Ruſſia p. 8. (6) Matt. VI. 13. (7) Lucae II. 1. (8) XVI. 1.

vt Oddus monachus in Olai Tryguonidis vita dixit: (9) *En a hinu naesta sumri for han i Garda austr, oc var i Aldaeigiuborg aein vetr. Praxima aestate in Garda orientem* (seu *Russiam ad orientem*) *profectus, Aldaeigiuburgi vnum annum fuit.* Halfradus Vandrada apud Snorronem: (10) *Auzur i Gardom, Oriens et Gardia.* Ex his, et multis aliis, apparet totum regnum Russicum inde a finibus Sueciae vsque ad extremos ad Austrum et Eurum, dictam esse *Gardarikiam.* Et eodem modo multa loca extant, in quibus *Holmgard* iisdem regionum spatiis vocabatur. Nolo loca hic aggerere, cum passim nostris in dissertationibus occurrant. Est autem satis notum, *Holm* insulam dici, et esse *Holmgard, insularum regionem. Holmur* in Runicis Vormii etiam *spatium, in quo pugiles dimicabaut: Holmganga, singulare certamen.* Regio arctis finibus tamquam mari circumscripta, intra quam pugiles se continerent, non minus eleganter *insula* dicta est, quam a Romanis tota area domus. Olaus Verelius (1) *In S. Olafs sogu vocatur metropolis ipsa Holmgard, eique subiecta ditio Gard.* Nisi Verelius aliquam aliam S. Olai sagam in animo habuit, in Snorronis Sturlaei *Olafs Sogu* nihil eiusmodi inuenio. Vis vocis Holmgard effecit, vt ex Suecis nonnulli eam potissimum regionem sic vocatam censerent, quae a Carelia et Finnia Orientali continetur. In qua sententia multum veri continetur, quod omnis ista regio ita lacubus et paludibus est intercepta, vt tota sit insularis. Credo tamen etiam Eysthlandiam censitam fuisse in hac Holmgardia propria, tum quod eam quoque insulam

(9) p. 15. (10) t. 1. p. 218. (1) in notis ad Gothici sagam p. 96. (2) V. Veteris Geographiae tabulam praefixam.

fulam dixere veteres, tum quod idem, qui in Carelia et Finnia, populus eam tenuit. Reliquum quod erat, Gardarikia dicta fuit: at nomina ista plerumque confundi inter se et communicari video.

Denique Russiae istis temporibus etiam Graeciae nomen est inditum. Proferam testimonia. Adamus Bremensis: (10) *Ex Sliaswig naues emitti solent in Slauaniam, vel in Suediam vel ad Semland et vsque in Graeciam.* Disertius ille alibi: (1) *nam si per mare ingrederis, ab Sliaswig vel Aldenburg, vt peruenias Iuminem* (Vinnetam seu Iulinum) *ab ipsa vrbe vela tendens XLIII. die ascendes in Ostragard Russiae, cuius metropolis ciuitas est Chiue, aemula sceptri CPplitani, clarissimum decus Graeciae.* Iterum alio loco: (2) *Asserunt etiam periti locorum a Sueonia terrestri via vsque in Graeciam permeasse: sed barbarae gentes, quae in medio sunt, hoc iter impediunt, propterea nauibus tentatur periculum.* Cum insulas recenset, *Holmus celeberrimus Daniae portus et fida statio nauium, quae a barbaris in Graeciam dirigi solent*, hoc est, in Gardarikiam. Helmoldus ipso in principio: *sinus huius maris ab occidentali oceano orientem versus porrigitur, appellatus ideo Balticus, eo, quod in modum Balthei longo tractu per Scythicas regiones tendatur vsque in Graeciam.* Et hoc vero iam ab eo errore, quem saepe castigaui, cum crederent, hunc sinum Finnicum ad Caucasum extendi, inde iam Maeotin misceri et Caspium mare et Pontum, vt in Graeciam vsque nauigari posset. Paullo post Helmoldus *Rucenum mare* (Esthonicum) *breui* (Fennico sinu) *in Grae-*

(10) de situ Daniae p. 36. Chronographus Saxo p. 162. (1) in H. E. p. 19. (2) p. 58.

ciam transmittit. Auctor historiae Sclauonicae: (3) *Rutzenum mare breue, id est brachium in Graeciam mittit.* Ericus rex in historia Daniae, (4) de Frothone: *is subiugauit Sueciam, Britanniam, Hiberniam, Scotiam, Noruegiam, Saxoniam, Vngariam, et omnia orientis vsque ad Graeciam.* Graeciam dicit, quam Saxo Grammaticus eodem in Frothone Russiam. Vidit iam Henricus Bangertus ad Helmoldum (5) rationemque addit, quod Russi non modo Graecis litteris vterentur, sed quod etiam Graecae religioni essent addicti. Verum, quod in re est, Russiae nomen Graeciae inditum fuisse, tenuit, sed ex Helmoldi loco minime commodo: est enim in eo vt dixi supra alius error situs. Quae autem de Taurica cherrhoneso addit Bangertus et de Trapezuntio imperio, ea multis et maximis erroribus contexta, foeda supra modum sunt. De religione item sensisse videtur Helmoldus, cum quem supra posui loco subiungit alterum: *diu est, ex quo Ruzia credidit: huius metropolis ciuitas est Chue* (Kiouia;) *quibus autem doctoribus ad fidem venerint, minime compertum habeo, nisi quod in omnibus obseruantiis suis Graecos magis, quam Latinos imitari videntur.* Attamen vetustior error est, Russiam Graeciae nomine appellantium, quam christiana religio ingressa est. Nam Olaus Tryguonides, cum ex Gardarikia seu Russia rediisset, *Gerscor, Graecum* se esse dixit, teste Snorrone Sturlaeo. (6) Ex quo deinde alii fabulam de Olai CPlitana profectione et Hierosolymitana commenti sunt, quam Snorro ignorauit. Et fuit quidem iam tum, cum in Russia Olaus egit, aliquod christianae religionis studium in aula, attamen tam tenuia fuere illa semina,

(3) p. 189. (4) p. 264. (5) p. 3. (6) t. 1. p. 236.

mina, vt inde Russos dictos fuisse Graecos, verosimile non sit. Graecas autem litteras tum quidem habuere nullas. Quare malim confiteri, me huiusce originem erroris non videre.

Iam etiam atque etiam considerare velim, quando in monumentis Suionicis et Noruagicis itinera Scandianorum in Graeciam celebrata sunt, eademne in multis sit Russia. Sane *Osteruigi* (7) cum de nauigatione loquuntur, nullum aliud iter esse potuit, quam in Russiam littoralem, vt *Vuesteruegin* dixerunt nauigationes ouidentem versus, atque inde in Angliam, Hispaniam, Graeciam. Ioannes Peringskioldus (8) vt ex illis difficultatibus sese expediret ostenderetque suos ciues etiam orientali via nauibus petiisse Graeciam et Hierosolyma, Duina aduerso seu quo alio flumine deducit in Gardarikiam, inde iubet naues subductas humeris portare in Borysthenem. Quind quaeris? nihil deinceps nauigantibus impedimento est. At illa nauium portatio me non delectat. Scio Constantinum Porphyrogennetam tradere, Russos ad cataractas exscensione facta lintres suos portasse: at breuis illa via fuit, contra haec a Duna ad Borysthenem nauigabilem multo longior. Et maiores fuere Septemtrionales naues, quam vt vel portarentur, vel Borysthene fluuio nauigarent. Quare multo expeditior via fuit, cum Russiae portus nauibus peterent, inde pedibus Borysthenem et Smolenscum nautisque, et lintribus Sclauonicis in Pontum veherentur. Non enim nego saepe petiisse CPplin Scandinauos ex eo praesertim tempore, cum stipendia mereri coeperunt: et multos lapi-

(7) Snorro t. I. p. 99. (8) In vita Theodorici regis p. 454.

des teſtimonio eſſe concedo. At lapides etiam Graecum nomen Ruſſiae vindicare videntur.

Inſcriptio apud Peringſkioldum: *Aſur* (auſtr i Gricum *in Oſtrogardia in Graecia educabatur*. Iſthic Graecia eadem, quae *Auſtr*. Alio in lapide: *Asgut Visbir vk Vſtr. Aogutus belli dux in Oſtrogardia* Et: *Thurgillus et Sturbiornus mortui* (i Auſtr riki) *in Oſt·ogardia*. Alius cippus: *Vlaſo abiit* (Auſtarla) *in orientem ſeu Oſtrogardiam et fortiter inuadendo vaſtauit*. Vides ſane Ruſſiam dici. Peringſkioldus itinerum in Graeciam teſtimonio adfert lapidem.

Thiſum merki iru gar iſtir ſuni Iggur
Eon kam theirra at arfi, in their Brytbr
Kamu bana at erfi, Giadar Bridr thir
to i Girikium

Quae quidem ita conuertit Latine: *Haec monumenta poſita ſunt in memoriam filiorum Igguri, quorum haeres factus eſt Ion (rex Graeciae) ſed illorum fratres acceperunt illorum poſſeſſiones in hoc regno relictas*: *Giaderi fratres illi obierunt apud Graecos*. Non video, qui hoc in lapide *Ion* Peringſkioldo *rex Graeciae* ſit viſus. Dudum antea Ioniae nomen in Graecia obliteratum fuit, quando Gothi res egerunt, tametſi concedere velim Peringſkioldo Gothi adeo veteris iſthuc in Suionia monumentum fuiſſe. Immo Ion nomen hominis Scandinaui fuit, frequens adeo apud Snorronem et in Torfaei Orcadibus, vt me ſuppudeat exemplum proferre. Nec minus me alio in lapide Theſſalia offendit, vbi vir nobiliſſimus ſic legit: *Iurunter fadur ſin Tiſalfur* et explicat: *Iurunmunto Theſſaliae luſtratori*. Θετταλικόν τι σόφισμα. Quae malum Theſſalia? nempe etiam

etiam isthuc nomen fere obliteratum erat, cum Gothi res egerunt, quamquam nullum istorum monumentorum ita vetus iudico, licet me vel lapidibus aliquis petat, vt Matthaeo Praetorio, populari meo, minatus est Peringskioldus. Malim ipse lapis esse, quam talia mihi persuaderi. Nihil detrahitur nobilissimae genti: satis verae gloriae habet, nihil opus est emendicatis coloribus. Si quis tamen isthuc *Tisalfur* vrgeat, non *Thessalicum nauitam*, sed quomodocunque et vel *Texelanum* siue Belgicum explicuero.

Sed redeo ad Russos, quos iterum alio loco Graecos dixit Adamus: (9) *In Oddorae ostio, qua Scythicas alluit paludes* (Balthicum mare) *nobilissima ciuitas Iulinum, celeberrimum barbaris et Graecis, qui in circuitu praestant stationem: est sane maxima omnium, quas Europa claudit ciuitatum, quam incolunt Slaui cum aliis gentibus Graecis et barbaris.* Helmodus haec ita dilucidius explicat: (10) *In Odorae ostio, qua Balticum alluit pelagus, quondam fuit nobilissima ciuitas Vinneta, praestans celeberrimam stationem barbaris et Graecis, qui sunt in circuitu: fuit sane maxima omnium, quas Europa claudit ciuitatum, quam incolunt Slaui cum aliis gentibus permixtis Graecis et barbaris.* Eggehardus Vragiensis (1) cum ex Adamo Bremensi sua verba repetit, scribit *Vimne*: et credo ita fuisse Eggehardi et Helmoldi in codicibus vt nunc alibi apud Adamum (2) *Iuminem* et *Iumnem* ex quo factum *Iulinum* puto. Qui hic Graeci in circuitu maris Balthici, si Russi non sint? Nimirum Russi non modo merces suas orientales ad Esthonicos mercatus conuehe-

(9) H. E. p. 19. (10) l. 1. c. 7. (1) p. 339. (2) p. 19.

uehebant, ſed etiam Balthico mari deuecti alios adiere portus. Et cum Eſthlandi quoque piraticam exercuere Snorrone Sturlaeo teſte: (3) Ruſſos, quorum illi portus cum vniuerſa Eſthlandia erant, cur abſtinuiſſe a nauigationibus putabimus, in tanto mercaturae ſtudio? Suedica quoque monumenta teſtantur, Ruſſos late circa Melerum lacum praedas egiſſe et ad *Stockſund* trabibus ferrea catena deuinctis non fuiſſe retardatos, ea cauſſa Birgerum Iarlum regni gubernatorem caſtellum illo in freto communiuiſſe, e quo denique Holmia vrbs ſeſe extulit. (4) In Eſthlandia autem quotannis celebres mercatus inſtituti fuere. Veniebant eo frequentes ex Noruagia aliisque regionibus poſt ver, autumno recedebant mercibus diuenditis et cöemtis. Teſtem habeo Snorronem Sturlaeum. (5) Et vendebantur eodem auctore, tum mancipia, tum *aliae merces*, in quibus praecipue pelles animantium fuiſſe intelligo, quod Snorro Leifurum in Vinlandia ſeu America, quam primi omnium Europaeorum adiere Noruagi, a barbaris cupide collegiſſe ſcribit maximasque ex ea re collegiſſe diuitias. De pellium mercatura Pruſſica earumque in Germania pretio, notus eſt locus Adami Bremenſis. (6) Multi in eo mirantur, quid id ſit, quod tantam auri copiam in Curonia fuiſſe praedicat: (7) neque ergo me planius explicare poſſe confido, niſi e mercaturis Graecis et orientalibus, tum deinde e religione, cuius cauſſa proximis ex prouinciis et regionibus confluxere populi ſuis cum muneribus. Ob mercaturam his in littoribus celebris eſt Biornus, Haraldi Pulchricomi filius, qui, cum Veſtfoldiae

(3) t. I. p. 196. (4) Olaus Verelius in Heruorar ſagu p. 79. (5) t. I. p. 274. (6) De ſitu Daniae p. 59. (7) p. 58.

diae praefectus esset, mercatus adeo fouit Vikiae in portubus, adeo suis nauibus longinquas regiones frequentauit, vt ex eo nomen *Kaupmann* (*Mercator*) gereret. (8) Illis ipsis temporibus, Haukus missus est in Holmgard, quam Thormodus Torfaeus Russiam interpretatur, *vt res quasdam pretiosas et Noruegicis in terris raras coemeret.* (9) Ibi ille in taberna Russica reperit *togam redimitam auro*, quam cum emeret, regis Suediae legatus item ambiret, multa deinceps rixa fuit. Scio codicem Flateyensem e quo Torfaeus haec produxit, sublestae fidei esse: cum rem sic gestam non plane asseuerauerim, quando Tarfaeus ipse dubitat, tamen mercaturae Holmgardiensis veterem memoriam, non sane fictam, commento occasionem praebuisse video.

Atque vt hoc loco de Russicis mercaturis dicam, is qui Ioannis Basilidis Czaris aetate librum graduum (Stepennaiam Knigam) vissu Macarii metropolitae composuit, incredibilia scripsit de Russorum veteri barbarie. Ita plerumque scriptores, cum attingunt res ante rem publicam aliquam constitutam gestas, vt se quasi ob interceptam memoriam vlciscantur, miram foeditatem gentium praedicant, veluti belluarum, non hominum. In quo aequitatis nostrae est, eorum iudicio non moueri. Constantinus Porphyrogenneta (10) suis temporibus neque boues, neque oues, neque asinos in Russia fuisse scribit, quod aeque est incredibile. Cum autem refert, Russos a Pazinacitis has res emisse, atque ex eo vitam egisse commodius, id quidem testimonio est, mercaturas pecuarias esse exercitas,

(8) Snorro p. 115. (9) Thormodus Torfaeus in H. N. parte II. p. 68. (10) de A. I. p. 55. 56.

tas, non tamen inopiam exstitisse, vt Imperator indicauit. Proficiscebantur Russi secundo Danapri, Kiouiaeque conueniebant in μονοξύλοις seu lintribus. Inde ait Constantinus in Chazariam, Bulgariam, et quod maxime mireris, in Syriam vsque nauigabant. (1) In Chazariam iter eorum erat ad traiectum Crarii. Nam ea via Imperator scribit (2) Chersonesitas quoque profectos esse in Russiam mercatus caussa. Quod quidem tanto magis mirum est, quando illis vno ex trunco lintribus sunt vsi. Iucundum autem est, e Constantino Imp. cognoscere, (3) quemadmodum e Pripelio Crivizeni, et Lenzenini, Drewlianique in Danaprin lintres deuexerint Kiouiam et vendiderint, vt vetustos consciderint in remos scalmos reliquaque arma naualia, vt sub Iunium mensem Danapri nauigauerint, et quanta cum molestia superauerint cataractas. Nam ad Vitepskium, tota mercatorum classe collecta, cataractas petebant. Ad primam cataractam faciebant exscensionem mercibus relictis in nauigiis: tum quidam in lintribus proram, alii puppim, alii latera contis regebant, alii fluuium ipsum ad ripam, qua vadum habebat, ingressi; humeris subleuabant lintres. In tertia cataracta, vbi ripa non habebat vadum, non modo ipsi homines egrediebantur, dispositis per ripam excubiis, sed etiam lintres subductos per sex millia passuum portabant: alii ferebant merces, alii ducebant mancipia vinculis constricta, donec se committebant fluuio. In tam paruis lintribus, quas praeter mancipia, merces deuexerint, nisi pretiosas? in primis pelles murium siluestrium et lutrarum, (4) quas, vt Cornelii

(1) ib. p. 113. (2) ib. p. 60. (3) p. 59. (4) Vide quae de his disserit Hieronymus Magius in Miscellaneis III. 7.

lii Taciti verbis vtar, (5) *exterior oceanus atque ignotum mare gignebat*, ſeu ex Scandinauia atque his ſeptemtrionalibus littoribus. Sidonius Apollinaris in panegyrico, quem Iulio Maioriano Caeſari dixit, cum copiam omnem mercaturae Romanae explicat:

Aurum Lydus, Arabs guttam, Panchaia myrrham,
Pontus Caſtorea, blattam Tyrus, aera Corinthus

Quo loco in mentem veniunt, quae de Byzantiis mercaturis Polybius (6) ſcripſit, cum Pontus, ſeu regiones ſupra Pontum multa ferant mortalibus ad vitae commoditatem expetita, omnia illa Byzantios in poteſtate ſua habere, ſeruilium multitudinem corporum, ingentem copiam corii, mel, ceram, ſalſamenta (hoc ipſum noſtrum Ікарь Italis Cauiar) recipere: contra dare oleum, et vini genera omnia: frumentum modo praebere barbaris, modo recipere. Nolo haec mercaturae Ponticae fata perſequi per omne aeuum: tam vetus eſt enim, quam ſunt coloniae Graecae. Inſigne autem eſt Dionis Chryſoſtomi teſtimonium, (7) Getas cum Olbiam cepiſſent et miſerabili adfeciſſent clade, eius deſiderium vrbis deinde impatientius tuliſſe ob mercaturae negatam copiam. Borysthenitae igitur reſtaurarunt vrbem, ἐθελόν των, ἐμὸι δοκῆν, των Σκυθῶν, διὰ τὸ δεῖσθαι τῆς ἐμπορίας, καὶ τοῦ κατάπλου τον Ελλήνων. ἐπαύσαντο γὰρ εἰσπλέοντες ἀναστάτου τῆς πόλεως γενομένης. ἅτε οὐκ ἔχοντες ὁμοφώνους τοὺς ὑποδεχομένους. οὐδὲ αὐτῶν Σκυθῶν ἀξιούντων οὐδὲ ἐπισταμένων ἐμπορεῖν αὐτῶν κατασκευάσασθαι τὸν Ελληνικὸν τρόπον, *volentibus, opinor, Scythis, quod indigerent mercatura et appulſu Grae-*

(5) de moribus Germanorum c. 17. (6) p. 425. (7) in Boryſthenitica p. 438. ed. Morelli.

Graecorum: non enim eam in regionem nauigabant vastata vrbe, cum non haberent, qui se susciperent, sui sermonis homines, Scythae vero neque vellent, neque scirent more Graecorum mercatum exercere. Redeo ad haec tempora, quibus quae praebita sint CPli, quae çara gentibus Septemtrionalibus fuerint, Imperator item declarat (8) Βλάτια, πράνδια, χαρέρια, σήμεντα, πέπερι, δερμάτια ἀληθινὰ, πάρδικα, merces omnes, vt vides, Indicae. Et blatta quidem et oxyblatta, vt tum erat mos Graecis vetera nomina nouis rebus imponere, purpura et vestes sericae rubrae erant, (9) quas CPlitani quondam a Seribus et Ephthalitis accepere, qui vt Indo flumini vicini, ita a Caspio mari haud longe reiecti fuerunt. Res non huius loci est et vel e Procopio Caesariensi et Theophane Byzantio nota. Ennodius Ticinensis panegyrico in Theodoricum regem: (10) *exhibete, Seres, indumenta pretioso murice, quae fucatis et non vno aheno bibentia nobilitatem prorogate.* Πράνδια *brandea* seu *prandea*, vt Anselmus Bandurius iam explicuit, fasciarum, taeniarum, et cingulorum genera: χαρέρια, vt idem ex Zosimo Panopolita, pannus quidam rarior: σήματα *segmenta* monilium seu purpurae genus: πέπερι, *piper*. Δερμάτια ἀληθινὰ πάρδικα, *pelles Parthicae rubrae*: nam et Valesius ad Ammianum Marcellinum recte emendauit παρθικὰ, qui (1) secundum Salmasium (2) de his pellibus prolixe egit. Errat Salmasius, cum omnes illas pelles Parthicas pardorum et tigridum crudas fuisse credidit: immo

(8) p. (9) Vide Petrum Possinum in Glossario ad Annam Comnenam voce Βλάττια. (10) p. ed. Peringsk. (1) Ad Ammianum p. 232. 296. (2) ad Trebellii Pollionis Claudium p. 407. 408. 493

mo pelles fuere animantium sine pilis elaboratae in coria et tinctae, quales nunc vocabulo Turcico nuncupamus سختيان *Safian*. Aurum quoque et argentum aliaque praetiosa Russos pro tributo exegisse, cum Russica monumenta tradunt, tum Constantinus Imperator non dissimulat. Quare, inquit, (3) ἴσθι, ὅτι τοῖς βορείοις ἅπασι γένεσι φύσις ὥσπερ καθέστηκεν, τό ἐν χρήμασι λίχνον καὶ ἄπληστον καὶ μηδέποτε κορεννύμενον, ὅθεν πάντα ἐπιζητεῖ καὶ πάντων ἐφίεται, καὶ οὐκ ἔχει τὰς ἐπιθυμίας ὅρῳ περιγραφομένας, ἀλλ᾽ἀεὶ τοῦ πλείονος ἐπιθυμεῖ καὶ ἀντὶ μικρᾶς ὠφελείας μεγάλα κέρδη προσπορίζεσθαι βούλεται. *Scito, omnibus borealibus populis qualis sit natura: pecuniarum infinita est cupiditas et numquam satiabilis: quare omnia quaerunt, omnia expetunt, neque cupiditates termino aliquo circumscriptas habent, sed plura semper concupiscunt et pro paruo officio magnam mercedem sibi tribui volunt.* Leges CPL de mercat. De Biarmis et auro ibi. Hae mercaturae Russicae cum CPlitanis: alia, a Chazaris, qui in Russiam commeabant, opportunitas; qui cum Turcae essent, commercia sua exercebant cum orientalibus Turcis, tanta in commoditate situs, vt Scythae etiam olim cum plaustris suis in Indiam commearint. (4) Quare non absurde quidam, quos supra produxi testimonio, Russiam omnibus bonis affluentem praedicarunt.

Reliquum est, ut, quod ad Geographiam ante A. C. 948. pertinet, ex Russicis monumentis explicemus. Rostow vrbs a Rurico rege fratri data est regunda A. C. 862. et eodem anno aliis ducibus Bielozero et Poltesk.

(3) p. 63. (4) Herodotus l. IV. c. 28.

Bieloczero vrbs eodem nomine ad lacum *Bielözero* seu *Album Lacum*. Ea in regione populum весь *Ves* collocauit Hiſtoriographus Ruthenus. *Poltesk vrbs*, vt ille ait, *a Krivizis condita*. Peltisca Saxonis Grammatici p. 21. Vbi ſita fuerit, quaeſtio eſt perdifficilis explicatu. Mihi videtur haud longe a Duna flumine abfuiſſe. Nam ad A. C. 980. Hiſtoriographus Ruthenus tradit, Roguolodum Knias ſeu Principem in Полотско *Polotzko* fuiſſe atque tenuiſſe ſub ditione ſua tam ПолетескЪ *Poletesk* quam Муры *Muru* in *Turoua*. Peltesſcia regio auctori vitae Eymundi fratris Hraereci Caeci. Plotzko et Turoua vrbes haud longe inter ſe diſtant ad Dunam. *Erit* igitur hic *Poltesk* ſtatuenda et *Muru*. Neque enim *Muru* videtur eſſe, ſeu *Meria* regio, ſeu *Murom*. Chronographus Ruthenus: *ad Bieloczero ſunt* весь *Ves ad lacum Roſtouienſem et ad* Плещико езеро *Pleſchiko lacum, habitant* Меря *Meria*: *ad Occam, vbi in Volgam exoneratur, habitant Muromi, qui ſingularem linguam habent, vt et* Мещера, Мордва, Черемиса, *Meſchera, Mordua, Gieremiſa ſeu Scheremiſa*. Ex hoc loco tenemus Muromi, Meſcherae, Morduae, Scheremiſiae ſitum. Quem autem lacum Pleſchiko dicat, non video, niſi ſi Pleſcouienſis ſit, ad quem fuerint Meria, alii ab illis qui ad Roſtouiam, eiusdem tamen originis. Iam a Meriae nomine Муєу nimis diſcrepat, Muroma vero longius disſita fuit, quam vt mihi perſuadeam Rognuoldum tam latam regionem tenuiſſe et eo tractu, qui Nouogrodium a Kiouia penitus excluſerit. Poloteſci autem incolae Chronographo, vt mihi videtur, Пологане *Pologiane* vocantur: *populus*, inquit *Pologiani* ad Polotam fluuium, qui in Dui-

nam

rum incidit, consedit. Iidem qui Polonis Polouczii. De his etiam Historiographus Polouczii *patrum suorum sanguinem profundebant, eoque gloriabantur, comedebantque cadauera, aliaque impura.* In parentum decrepitorum caede similis feritas (fortitudinem tamen ipsi censebant) apud Prussos et Lithuanos illis temporibus fuit. Ceterum de Polouciis Coialouitius ex Ossostouicio, qui sua vt ex veteri fama ita ex Russicis monumentis repetiit, tenui eruditione deturpata magis, quam ornata: *Poloucios Hungari ab Hugro fluuio Pannoniam versus tendentes, ad Tanaim fuderunt: erant Polocii gens eiusdem cum Prussis, Lituanis, ac Lotauis originis: argumentum eius rei est, ex reliquiis quas ad Phinoniae fluuium Chorelam* (in Carelia) *residuas intra Moschi imperium, communi cum Lituanis sermone proximo adhuc seculo vsas esse, qui viderant, testantur.* Refert cladem Poluciorum ad A. C. 383. At nulla tanti interualli memoria extare apud eum populum potuit. Quare alterius seculi res fuerit, cum multae impressiones in Pannoniam fuere earum gentium, quas omnes vno nomine maiores nostri vocauere Hungaros. Tum alterum, quod e fama compertum esse potuisse Coialouitio concedo, Polucios a Polota pulsos in Careliam denique se recepisse, cum verum sit, tamen in eo aliquid erroris residet, quod eos Lithuanice locutos tradit. Esthlandici seu Fennici corporis fuisse apparet: cuius populi sermo a Lithuanico multum discrepat, ita vero vt ignarum fallere possit, quo putet nihil inter vtramque linguam interesse. Cum supra ex Chronographo Morduam ad Occam posui, venit in mentem auctorem Stepennaiae Knigae testari, Morduam et Scheremisiam dic-

ſtirps Radimiczi dicti fuerunt. Viaitko autem cum ſuis ad Occam ſedes fixit, vnde Viatizi. *Rsutſcha* fluuius alibi quam in regione *Rzeczyza* non eſt quaerendus, vbi ad vrbem eodem cum regione nomine hodie eſt *Viedrzyck* fluuius. Et poteſt fieri vt latius coluerint vsque ad vrbem *Radomisl*, aut vt eo deinde commigrarint. Hiſtoriographus Ruthenus: *Radimczy Viaticzi et Sieueri in ſyluis habitant, impura multa comedunt, turpia coram parentibus loqui non erubescunt: nuptias nullas habebant, ſed in ludis conueniebant pueri et puellae et quislibet abducebat placentem: vxores duas et tres habere poterant: mortuos comburebant, eorum oſſa in vas paruum colligebant et in columnis in via reponebant: eandem conſuetudinem et Kriviczi et reliqui pagani illis in partibus habebant.* Chronographus in ſynopſi ad A. C. 984. *Vladimirus mouit contra Radimicxi genere Polonos, qui inde in Ruſſiam commigrarunt et in hodiernum vsque diem Ruſſis tributum ſoluunt.* Is eorum in regione Пищака *Piſchaka* fluuium poſuit. Viaticzi a Ruſſis ad Occam ponuntur. Kriuizos ex Conſtantino Porphyrogenneta ad Pripetium ſeu *Pripiecz* fluuium adſcripſi. Sed latius coluere teſte Chronographo: *populi ſunt in fontibus Volgae Borysthenis et Duinae, vbi nunc eſt Smolenſcium, eorum etiam aliqui in Sieueria habitant.* Et cum Lithuani Ruſſiam *Creuen Jemla* ab his Criuiczis, vt puto, appellant, ſequitur veterem hanc memoriam gentis potentiſſimae et vaſtiſſimae fuiſſe. A. 970. in exercitu contra Graecos ducti Кривиги, Гудѣ, Меране, Полаке, Севериане, Древлане, Радимиги, Бапиги, Ховрапи, Дулѣны: Тивиги. *Kriuczi, Giud, Merane, Polake, Seueriane, Drewlane, Kadymiczi, Vatizci,* *ticzi*, *Chourati*, *Duliuii*, *Tiuiczi*. Notos iam antea hic non attingam. *Polake* ſunt *Poloni*. *Chourati* ſunt *Chrouati* ſeu *Chrobati*, quos etiam Graeci non modo Χρωβάτυς dixerunt, verum etiam Χορβάτυς. De *Dulievis* et *Tiuiczis* Hiſtoriographus: *Duliebi habitabant ad Bog fluuium, Luticzi et Tivinczi ad Danubium*. *Tiuinzi* qui *Tiuizi*, forte antea ad Tibiscum fluuium, qui in Danubium exoneratur. Et cum a Pazinacitis pulſi ſunt, videntur iuxta *Dulievos* conſediſſe *Tiuiczi* et *Luticzi*. Quod quia non ſatis conſtat, praetermittenda haec nomina duxi.

In Igoris rebus memoria Pleſcouiae exſtat ad A. C. 903. Hodie Ruſſis *Pskow*, quaſi vrbs a *canibus* ſit dicta. Vetus tamen nomen Slauonicum *Pleskoua*: nam et apud Zonaram in Baſilio Bulgaroctono (6) et apud Cedrenum (7) πλισκοβα vrbs in Bulgaria fuit. Iam ad A. C. 907. occurrunt Czernichouia Conſtantino Imp. quoque commemorata et *Pereslaula* notae vrbes, et *Liubecz*. Eſt vrbs ad Duinae fontes *Lubicz*, deinde ad Boryſthenem ſupra Kiouiam *Lubiecz*. Hanc puto illa in regione eſſe, in qua Vladimiri auus princeps fuit. Vocatur enim *Malko 'Liubeczenſis* Hiſtoriographo Ruthenus et filius quoque eius *Dobryna Malio*. Quod plane eſt ملك *Melec*, *regis* nomen, acceptum a Chazaris, quemadmodum reges ante Ruricum خاقان *Chakani* titulo Chazarico ſunt vſi. Quam ob cauſſam iſtos Liubeczenſes malo prope Chazaros conſtituere, vt commercium aliquod intercedere inter vtrumque populum potuerit, quam longiſſime a Chazaris remouere ad Duinam A. C. 912. Oleg in monte Щоковицо Schoiouizo an *Schokouizo* ſepultus. Eum montem oportet

(6) t. II. p. 224. (7) p. 704.

tet prope Kiouiam esse. Eodem anno Corostenum commemoratur a Chronographo in Synopsi Drewlianorum vrbs, *haud procul a Staraia Rus*. Igitur vrbs videtur esse quae nunc *Horasci* et *Chrest* vocatur, corrupto nomine Coroſteni. Drewliani hi diuersi sunt ab ceteris Drewlianis ad Pripelium. Immo potius se ipsum fefellit: neque alii Drewliani fuere quibuscum Igor res gerens dolo periit, quam isti ad Pripelium, quod ex ipsa rerum consideratione mihi plane apparuit. Quare, cum Corestenum captum est ab Olga, iussi sunt ciues tributum persoluere Kiouiensibus et Vysſegradensibus. Nam, inquit hic ipse Chronographus, *Vyszegrad Olgae vrbs erat*. Fuit igitur vicinior vrbs Kiouiae quam Nouogrodio A. C. 914. *Vgliczii* et eorum vrbs *Peresieczen* memorantur ad Borysthenem, *infra* Kiouiam. Fuit deinde *Vglicz* vrbs in historiis *celebrata*: verum ea ad Volgam in ducatu Rostouiensi fuit, siue Vgliczorum colonia, seu quo alio casu sic dicta. Ad A. C. 965. Historiographus narrat, Olgam Kozaros vicisse eorumque vrbem бѣлювежу *Bieluiuezu expugnasse*. Chronographus: бѣлобургъ *Bieloburg*. Vtrumque significat *Albam Vrbem*, vt ex eo appareat, esse *Sarkel* Chazarorum, de quo oppido multis diximus supra. Addit Historiographus, victos *Iazykos* et *Kasagos*: at Chronographus: Іасы, косаги, свашиги *Iasu*, *Cosagi et Suatigi*. Casacos solos agnosco, quos tum oportet e Caucaso digressos alicubi ad Volgam consedisse. A. C. 969. Chronographus tradit Iaropolcum in *Gorodiew* vrbe caesum a Varagis. Vbi illa vrbs? tum Stepennaia Kniga ad eum annum Pereslauiam memorat, et Olegum principem in Деревѣхъ *Dereuiech* et vrbem eius вругай. Quid *Dereuich*?

Ad

Ad A. C. 971. et 977. pax cum Graecis inita dicitur въ Дерестра *in Dereſtra*. Haec Driſtra eſt in Bulgaria. A. C. 978. et 981. Vladimirus dicitur Polonis extorſiſſe *Peremysl et Czeruen et Camenſes* (Suzdal) ſubegiſſe. Nota hodie in Polonia nomina. A. C. 980. Chronographus: *Blud a Kiovia fugit in vrbem Rodna ad oſtia* Росы *Roſu*, tum memorat *Lybedum* vrbem, vbi nunc eſt, inquit, предисловико et *Bereſtow*, *vbi pagus nunc eiusdem nominis*. Nihil eorum adhuc inueni. Tandem ad A. C. 983. memorantur *Iatwegi* victi a Vladimiro. Coialouitius eos Iatuingos (8) vocat et proxime Lithuanos ponit, in Podlachia: Cromerus (9) in Poleſia et Podlachia. Solomon Neugebauerus in Volynia, vbi Luccorinenſis eſt episcopatus.

(8) p. 5. 35. 120. (9) L. VIII. p. 547.

DE SCRIPTIS TANGVTICIS IN SIBIRIA REPERTIS COMMENTATIO

Gerardi Friderici Mülleri.

Fuerunt quidem inter eruditos variarum gentium, qui rerum orientalium ſtudioſi, literas Tanguticas in Europa memoriae prodiderunt, (1) ſed iſta vere pauca et ſubobſcura viſa, donec noſtra aetate quaedam eo charactere picta folia, ex Sibiria allata, in publicum comparuerint. Vulgus, vt bonarum rerum incurioſus eſſe ſolet, varios de loco, vbi iſta ſcripta inuenta ſint, rumores ſparſerat, ſed, qui rem attingeret, prope nullum. Ipſe Petrus Magnus immortalis gloriae Imperator ex Praefecto Sibiriae, qui ipſi haec folia obtulerat, nihil reſcire potuit luculentius, quam quod in auſtrali Sibiriae regione inter rudera alicuius aedificii reperta ſint. Additum fuit, at falſo, ac ſi locus non longe a mari Caſpio diſtaret, et quae ſunt aliae eiusdem generis nugae, eo tempore in publicum ſparſae. Sed non morabatur iſta ſapientiſſimus Imperator, ratus, locum, quoniam ſui aut confinis eſſet imperii, ſemper explorari poſſe, magis ſollicitus, quid ea ſcripta continerent. Ideo, qua erat in literas et artes cupiditate, nemine Petropoli inuento, qui ea interpretaretur,

(1) *Hydius* in Hiſtor. relig. vet. Perſar. Tab. XVII. pag. 521. ſqq. *Vitſius* Noord en Ooſt Tartary Ed. I. P. II. Tab. ad p. 144. Auctor *Mercurii Gallici* 1718. in deſcript. regni Boutan. p. 73.

retur, amplissimi nostri Schumacheri ministerio vsus, aliquot folia in exteras terras misit, praecipue in Parisiensem bonarum literarum academiam, inuitans eruditos, linguarum orientis gnaros, vt operam interpretandis istis conferrent. Vnius folii exemplum publice extat in actis eruditorum Lipsiensibus, (1) et specimen eius in nouis literariis. (2) Quae cum viderint, qui rei diiudicandae essent pares, mox scripturam Tanguticam esse agnouerunt. Nempe sunt hanc in rem epistolae *Maturini Veissierii La Croze* ad Io. Burcardum Menkenium (3) et *Theophili Sigefridi Bayeri* ad Io. Samuelem Strimesium, (4) quibus vterque elementa linguae Tanguticae adiecit, a Gabriele quodam Mongolensi tumultuarie scripta, a Bayero autem in ordinem redacta, et cum Lacrosio communicata. Deinde plura docuit idem celeberrimus *Bayerus* in epistola ad Io. B. Menkenium, quae supplementis actorum eruditorum (5) inserta legitur.

Non incongruum, nec omnino alienum ab hoc loco videtur, quaedam notare, vbi viri celeberrimi, id quod in tanta rerum ambiguitate vitio illis verti nequaquam potest, de literatura Tangutica differentes, aliquantisper hallucinati sunt. Sic *Lacrosius* Oiguraeas vel Iugurenses litteras cum Tangutanis pro iisdem habuit, quas tamen nimium quantum a se inuicem differre *Guilielmus de Rubruquis* (6) testatur, qui certe non Tangutanas, sed Mongolenses, innuit, dum dicit: *Iugurenses scribere deorsum, et multiplicare lineas a sinistra ad dextram.* Quin et

 Arab-

(1) 1722. M. Iul. pag. 374. (2) 1722. Num. LI. pag. 498. (3) Acta eruditor. Lipsiens. 1722. M. Aug. p. 414. (4) in Ephemeride Germanica: Historia eruditionis nostri temporis. P. V. p. 385. sqq. (5) Tom. IX. p. 20. (6) Itin. C. XXVII. et XXXIX.

Arabsiades a Bayero citatus, disertis verbis ait, *scripturam Oiguraeam Mogolorum nomine celebrem esse.* Fallitur praeterea eruditissimus *Lacrosius*, qui Mongolicas literas ex Tangutanis ortas et leuiter detortas esse opinatus est. Ipse enim intuitus statim id refellit: maiorique veri specie *Bayerus*, collega desideratissimus, literarum Mongolicarum, quae et Manschuricae sunt, originem a Syriacis literis repetiit. (1) *Iuguraeae*, i. e. *peregrinae* Mongolensibus istae literae principio dicebantur. Nam etiam hodienum illi omnes gentes peregrinas, cum quibus in lingua et cultu ipsis non conuenit, *Uigùr* vocant. Ideoque assentior Bayero, et omnino persuasum habeo, Mongolenses hoc genus scripturae accepisse a sacerdotibus Syris, Nestorianae haeresi addictis, qui, euangelii limites promoturi, tempore Tschingis-Chani, vel paullo ante, istas terras intrarunt. Hi, si qui alii, peregrini erant Mongolensibus. Nulla autem, nostra opinione, gens, quae Iugurensium vel Oiguraeorum nomine ipsam se adpellauerit, vnquam extitit. Nam quantumuis scriptores aliquot Uigurensium mentionem fecerint, ipsi tamen nonnulli indicarunt, et de reliquis subodorare facile est, hoc non proprium ipsis nomen fuisse, sed vel propter res gestas, vel ob diuersum vitae genus, cultum et regimen illis inditum. Vnde etiam non iidem Uigurenses in historiis allegantur, vt alio loco demonstrabo luculentius. Taceam quae in eadem epistola a Lacrosio de presbytero Ioanne, illius regionis ante Tschingis-Chanum principe, qui iisdem literis vsus sit, maxime incerta proferuntur. Contra Bayerus

(1) Act. Erud. Lips. A. cIↃIↃccxxxı. M. Iul. p. 309. sqq. et Comment. Acad. Scient. Petrop. Tom. VI. p. 330.

rus in epiſtola priori, vocabulorum conuenientia deceptus, confundit Tangutanos cum populo a Sinis *Tan-yu* dicto. Conſtat enim ex Martinio, Cupleto et aliis, ſub nomine *Tan-yu* Sinas intelligere Tataros, ipſis occidentales dictos, quos nos Mongolenſes vocamus. Imo *Gerbillonus* (1) nomine *Tan-yu*, vel *Tſchen-yu*, vnum enim hoc idemque eſſe pronunciat, non integrum populum, ſed reges Tatarorum occidentalium, adpellatos eſſe contendit. Potius Tangutana ditio a Sinis *Tſan*, vel *Tſan-li* vocatur, vt ex commentariis Regiſi *Haldius* (2) obſeruat. Deinde Tangutum et Tibetum, quae a plerisque ſcriptoribus, ſicque et a Bayero noſtro, ſeparantur, vnum idemque ſunt, cui praeter propriam cognitionem etiam *Haldium* (3) teſtem inuoco. Denique Bayerus dubius eſt, ſcriptura Tangutica a ſiniſtra ad dextram, an vero a dextra ad ſiniſtram, peragatur, memor verborum *Guilielmi de Rubruquis*: (4) *Populus Tebet*, inquientis, *ſcribit vt nos, et habet characteres ſimiles noſtris: Tangutani ſcribunt a dextra verſus ſiniſtram, ſicut Arabes, et multiplicant lineas aſcendendo.* Quae vt vt clare ſcripta, tamen nullam fidem merentur, cum iam ante monuerim, Tangutanos et Tibetenſes eosdem eſſe, et iam nobis ſatis ſit euictum, ſcripturam Tanguticam a ſiniſtra ad dextram procedere. Quis vero vnquam vel fando audiuit, lineas aſcendendo multiplicari? Hoc enim, quam ſcriptionis naturae contrarium ſit, ſapiens quisque capit. Nolo iam de iis agere, quae a Bayero in vtraque epiſtola in exprimendis ductibus et valore literarum Tanguticarum errata ſunt. Haec enim ille plerque

(1) *Haldius* Tom. IV. p. 40. Edit. Batau. in 4to. (2) ibid. p. 572. (3) ibid. (4) Cap. XXXIX.

raque insequentibus annis, hic Petropoli meliora edoctus, ex libro Messerschmidiano ipse emendauit. (1) Nolo etiam notare sphalmata leuiora, dum v. g. vir celeberrimus in altera epistola voces aliquot Mongolicas, ac si Tanguticae essent, Tangutanis literis scripsit. Quisque aliquid humani patitur, et non mirum est, si nobis imponatur in linguis peregrinis, quarum nullam notitiam habemus. Id potius discutiendum esset, quod ad historiam literaturae Tanguticae necessario spectat, nimirum quod doctissimus Bayerus scripturam Tanguticam pro scriptura *Delbergiin* Arabsiadis habuerit, nisi propositi ratio suaderet, vt hoc argumentum alii tempori reseruarem. Dicetis me iam satis procul a meta discessisse. Igitur reuertar, vnde digressus sum.

Inter haec Petropolin afferebantur Parisiis *vnius* folii Tangutici non literarum modo pronunciatio, sed etiam versio literalis et paraphrasis a duobus fratribus *Furmontiis Stephano* et *Michaele* praestitae. Iunctae erant literae ab illustri Abbate *Bignonio* ad Petrum Magnum scriptae, in quibus subsidia enarrata vidimus, quibus Furmontii in concinnanda pronunciatione et versione folii Tangutici vsi sint. (2) Fidem illis adhibuit b. collega *Bayerus*, dum illorum operam ex autographis, apud academiam nostram adseruatis, in praefatione musei Sinici (3) extare voluit. Honos grato animo recolendus; vt non tam inique alteri eorum de studiis Bayerianis et praeclaris ipsius meritis in literaturam sinicam iudicandum fuisset. Epistola Bignonii nondum, quod sciam, publice habetur. Hanc igitur, quae hic

(1) Comment. Acad. Scient. Petrop. Tom. III. p. 389. (2) Histor. Acad. Inscript. et elegantior. literarum Paris. Tom. V. Praef. (3) p. 109. sqq.

hic locum occupet, dignam iudico. (1) Allegat quidem
 Fur-

(1) SIRE,

Je suis penetré de la plus parfaite reconnoissance, de l'extreme honneur, qu'il a plus à Votre Majesté de me faire, en m'envoiant l'année derniere, par le Sr. Schumacher votre Bibliothecaire, une feuille tirée d'un des livres, qui ont été trouvès au pays des Calmuks. Si j'ai differé si long tems à vous en rendre mes tres humbles actions de graces, c'est que j'ai cru, que Votre Majesté seroit bien aise, qu'en la remerciant, je lui rendisse en même temps un compte exact de ce qui regarde ce Manuscript. Il etoit assez difficile, *Sire*, de reconnoitre seulement des caracteres, que nos Sçavans n'avoient point encore vûs jusqu'icy; & sans les differens interpretes en toutes langues, que, sur mes tres humbles prieres le Roi a attachez à sa Bibliotheque, j'avoüe à Votre Majesté, qu'il auroit eté presqu'impossible d'y reüssir. A force de recherches enfin nous avons decouvert un Dictionnaire en langue latine & en langue de Thibet, aiant les memes caracteres que ceux de la feuille, qui m'avoit eté remise par ordre de Votre Majesté. Par ce secours il nous a eté permis de penetrer dans cette espece de Mysteres, ou d'expliquer l'enigme, si j'ose me servir de cette expression. Nous ne nous flattons pas d'avoir tout éclairci. Le Dictionnaire, dont j'ai l'honneur de vous parler, *Sire*, n'aiant été fait que fort à la legere par un voyageur, il y manque un grand nombre de mots et de phrases, sans lesquelles il n'est pas possible de suivre parfaitement un discours étendu. Cependant après bien de reflexions nos interpretes y ont trouvé une espece de Sens, et il n'est pas à douter, qu'ils n'allassent beaucoup plus loin, s'ils avoient un plus grand nombre d'ouvrages. Votre Majesté pourra se convaincre par Elle même de la justesse de leurs observations, par la copie figurée, que je me donne l'honneur de Lui envoyer. Elle y verra les caracteres inconnus auparavant, rendus par des caracteres des langues vulgaires des nos pays, & au dessous l'explication mot à mot de ces memes caracteres en latin. A coté est ce que nous avons apellé le Sens, qui est plutôt une Paraphrase qu'une traduction fidelle. Nous avons crû devoir en agir ainsi, a cause de la grande obscurité du Texte. Si cet echantillon avoit le bonheur de plaire à Votre Majesté, Elle pourra dans la suite nous rendre plus habiles, & par consequent plus en état de faire par nos progrés dans ces connoissances quelque chose de plus digne de lui étre presenté. Le Public, *Sire*, en profitera sous vos augustes auspices, car je m'assure, que dans ce grand nombre des Manuscripts, qui suivant les nouvelles repandues en Europe, ont éte trouvès dans vos Etats d'Asie, il y en aura quelques-uns, qui regarderont l'histoire de ces contrées ignorée jusqu'a present. Si cela etoit, nous

Furmontius ſenior in Catalogo ſcriptorum ſuorum adnotationes hiſtoricas, quas vna cum interpretatione ſua Gallorum Regi et Aurelianenſium Duci et Comiti Clermontio exhibuerit; (1) has autem hic nunquam vidimus.

Ego annis clↄIↄccxxxi et xxxii Petropoli legatorum aliquot Calmuccicae gentis eorumque interpretis ope literis Tanguticis pernoſcendis aliquid otii tribui. Erant enim inter legatos etiam ſacrificuli illius gentis, qui fere omnes Tangutica legere callent. Ab his literarum ſonos viua voce accipiebam, conficiebam ſyllabarum indicem, et formabam mihi regulas, omni lectioni Tanguticae ſufficientes. Ita inſtructus conferebam pronunciationem textus Tangutici a Furmontiis datam, quam quidem in multis voculis ſatis conuenientem, in pluribus autem et fere vbiuis, vbi ex literarum compoſitione lectio difficilior euadit, a vera nimium quantum aberrare deprehendebam. Perſuadebar ex eo, Furmontios ſchemate literarum Tanguticarum admodum manco vſos fuiſſe, et ſyllabarum

avons tout lien de nous flatter, que Votre Majeſté daignera nous en faire part. Elle ſuit trop bien les traces de Ceſar par la rapidité & la multitude des ſes conqueſtes, pour ne pas imiter encore ce premier Empereur des Romains dans ſon amour pour les lettres & pour les ſciences; & la France ſera toujours charmée de vous devoir tout ce qui pourra contribuer à leur luſtre & à leur avancement. En mon particulier rempli de la plus haute admiration, & plein du plus profond reſpect, je vous ſupplie tres humblement de permettre que j'aie l'honneur de me dire

SIRE

de Votre Majeſté

de Paris le premier Fevrier 1723.

Le tres humble & tres obeiſſant ſerviteur

L'Abbé Bignon.

(1) Catalogue des Ouvrages de Mr. Fourmont l'Ainé. Amſterd. 1731. p. 27.

labarum indice penitus caruisse, sine quo tamen lectio Tangutica omnino absolui nequit. Cum autem nihilosecius plenam lectionem textus venditare ausi sint, id iniiciebat mihi scrupulum, vt etiam de auctoritate versionis Furmontianae et paraphraseos insigniter dubitarem. Luxurians ingenium Harduinianum occurrebat, quod ex omnibus omnia fingere solebat, cui etiamsi doctissimos viros aequiparare noluerim, cogitabam autem, qualis esse solet eorum lexicorum conditio, quae ex longinquis regionibus de linguis admodum incognitis afferuntur, ab hominibus earum linguarum ignaris plerumque consarcinata. Quidquod ipsum Bignonium naeuos istius lexici confitentem habebam, vt iure mirarer, qui ex illo solo, nullis aliis adminiculis adiuti, tantam rem perficere potuerint. Studui equidem, vt et de lingua aliquid cognoscerem; sed praeter pauca vocabula a meis magistris, qui ipsi in lingua Tangutica erant hospites, nihil didici. Hinc cum anno clↄlↄccxxxiii. iter literarium Sibiricum ingrederer, apographa folii Tangutici et versionis Furmontianae mecum sumsi, vt si forte in Calmuccorum et Mongolensium confiniis hominem linguae Tanguticae peritum offenderem, ex illo, quid veri subsit, rescirem. Quantum ibi voti mei compos factus sim, deinceps dicam. Dabo prius notitiam non poenitendam locorum, in quibus haec scripta Tangutica, et similia alia antiqua Mongolensia reperta sunt. Nonnulla enim in itinere ipse vidi. De ceteris relationes fide dignas tum scripto tum ore ab aliis obtinui.

Qui inter Calmuccos et Mongolenses degunt Sacrificuli ex Tangutia vel Tibeto oriundi, sunt autem horum

 plu-

plurimi, vitae illarum gentium nomadicae vix assuefieri possunt, quin potius ad suae gentis morem aedes perennes condere satagunt, in quibus habitent, et cultui idolorum vacent. Nec isti hoc moleste ferunt. Nam seliguntur ad has aedes talia loca, circa quae maximam anni partem habitare assolent: Quodsi autem procul distant, tunc abstinentiam a solenni Deorum cultu nihil morantur. Alias aedes ipsi sacrificuli suis sumtibus, vel ex collationibus publicis exstruunt, alias in eorum gratiam condunt Principes. Eo pertinent delubra inter Mongolenses, quorum meminit *Gerbillonus* apud *Haldium*. (1) Tales et Calmucci a longo tempore habuerunt, et adhuc habent. Tales fuerunt et istae aedes, quae scripta Tangutica nobis prodiderunt. Mongolica communi voce, quae et Calmuccorum est, *Kit* vocantur, addito vel praemisso nomine sacrificuli siue Principis, qui illarum auctor est. Ad nostrum morem *monasteria* interpreteris. Nam sacrificuli et eorum discipuli gregatim in illis habitant, qui, cum omnes coelibem vitam ducant, nostris monachis non sunt absimiles. Istae aedes aut conclauia, in quibus cultus idolorum peragitur, referta sunt eorundem idolorum imaginibus tam pictis in charta, in linteis, in asseribus, et ad parietes, quam ex ligno et luto formatis, et ex metallo fusis. In iisdem et sacra scripta adseruantur, multa plerumque farragine, qua sacrificuli isti superbire solent. Asseuerarunt mihi Calmucci, quando Calmuccorum Princeps *Galdan-Zerinus*, qui nunc rerum potitur, castra mutat, vix centum camelos sufficere scriptis sacris portandis. Huius parens *Erdeni-Schuructu-Chontaischa*, a Choschotorum

(1) Tom. IV. p. 46. 118. 124. 518.

rum quodam Principe *Batur-Taischa* dono accepit thesaurum scriptorum Tanguticorum, *Gandzur* dictum, quem quadraginta cameli portarunt. Alia bene multa Chanus aliquis Tanguticus, *Tschingis* nomine, ad Chontaischam misit. Deinde accepit et ipse Galdan Zerinus insignem scriptorum numerum a *Iungtschino*, Sinarum Imperatore, per legatum aliquem ex suis, nomine *Telei*, quibus portandis quadraginta pariter cameli inseruierunt. Haec postrema *Dandszur* vocant: omnia autem Tangutica praedicant, id quod iis mirum neutiquam videbitur, qui norunt, Tanguticam linguam apud Calmuccos et Mongolenses ita, vt apud Pontificios latinam, pro sacra haberi, et in cultu idolorum plus patria valere. Haec dixi, vt magis constet de istis scriptis, quae nostri ex talis generis aedibus aut fanis attulerunt. Est enim omnium par ratio: et dum chartas Tanguticas colore coeruleo vel subnigro tinctas, literisque aureis argenteisque pictas conspicimus, tum nec hoc hodienum inter Calmuccos et Mongolenses inconsuetum est. Vnicum mireris; qui nostris liber aditus ad sacraria ista concessus sit? vel, si deuastata fuerint, cur sacra scripta in illis sine vsu relicta? Scias autem, si quando accidit, quod in istis terris non insolens est, vt regio bello impetatur, tunc plerumque sacrificulos et illorum familiae homines ex primis esse, qui in fugam se recipiunt. Sacrum adparatum secum aufferre tum nequeunt, tum nolunt: nequeunt autem propter communem calamitatem, quae fugam comitari solet: nolunt, ne res sacras in fuga profanare cogantur. Itaque sua fana hominibus vacua, at sacris rebus et scriptis plena, Deorum curae relinquunt, quae semel deuastata in omne

 aeuum

aeuum ita manent: nam neque victor illorum possessionem sibi vindicat, neque primus possessor regionem recuperans sacraria deuastata instaurat, scripta pro deperditis habita vnquam respicit. Hinc factum, quod cum nostri in Sibiria ad Irtin fluuium, cuius superior regio a Calmuccis olim inhabitata fuit, plures tales bello deuastatas aedes offenderent, eas nemine prohibente ingredi, et scriptorum, quantum voluerunt, auferre potuerint.

Omnes mecum consentientes habiturum puto, si huc referam rudera alicuius aedificii, quae in occidentali regione allegati fluuii inter Iamyscheuensem et septem palatiorum arces extant. Rumor et appellatio vulgi *quidem* obstant, dum turrem dicunt, ad excubias cauendis hostium incursionibus agendas exstructam. Sed *quis hic quaeso* turrem agnoscat, eo vsui aptam? Certe fabula est a plebe conficta. Interior enim conditio aperte fanum indicat, cultui sacro destinatum. Russis Калбасунская башня dicitur, quod *turrem Calbassunicam* denotat. Vnde istud nomen ignoro. Farcimina enim Russis калбасы dicta, nihil cum fano commune habent. Nisi dicas, minorem Irtis fluuii alueum, qui haec rudera prope alluit, et Калбасунская заостровка (calbasunskaia saostrowka) vocatur, a farciminibus forte nomen accepisse, et illud ruderibus communicasse. Calmucci a Principe quodam, qui olim hic terrarum vixit, *Dschalm obò*, i. e. *Dschali* Principis *turrem* nuncupant. Hic annis CIƆIƆCLXXX-CIƆIƆCC floruit, minoris quidem conditionis, et Buschtuchtani eiusque successoris *Erdeni-Schuructu Chontaischae* potestati subiectus. Debellatus a Baschkiris anno CIƆIƆCCII trans montes ad Chontaischam secessit.

Cum

Cum ego aestate anni cIↄIↄCCXXXIV per istas regiones iter facerem, in arce Iamyscheuensi multa praeclara de hac ita dicta turre audiebam. Sed itineris ratione volente, vt ex allegato munimento, quo fere naue vectus eram, vlterius, quousque regio Russis patet, terrestri via in orientali parte Irtis fluuii pergerem, ipse quidem haec rudera inuisere haud potui: misi autem pictorem, qui illa depingeret, notatu digna visa adnotaret, mihique tum ore tum scripto de iis referret. Hic inferius ostium Calbassunensis aluei praeteruectus, superius intrauit, et quatuor fere a maiori alueo leucis emensis, relicta naue, ad rudera pedibus perrexit, sesqui leucam a litore dissita. Deprehendit aedificium structurae magis artificiosae, quam in illa regione, et inter gentes adeo incultas credideris. Vnus paries corruit. Ideo praeter figuram externam interiorem quoque conditionem graphice admodum exprimere potuit. Nonnulli ex militibus nostri comitatus, quorum ad euitandos Casaccorum Kirgisensium incursiones, in his regionibus perquam frequentes, integra cohors ex munimento Iamyscheuensi nos sequebatur, quorum etiam numerum non exiguum pictori in praesidium adiunxeram, retulerunt, ante paucos adhuc annos, turrem hanc, quam dicunt, integram se vidisse, quae infra exacte quadrangularis fuerit, parietum omnium amplitudine inter se aequali, fornicem autem superimpositum extus viginti angulis constitisse, quorum pictor duodecim reliquos numerauit. Parietes vsque ad fornicem quatuor circiter orgyias alti, trium pedum crassitiem obtinent. In illarum externa facie trabium lignearum extremitates adparent, quibus interpositis parietum structuram firmiorem reddere Tab. I.

haud

haud dubie voluerunt. Intus ad quodlibet latus tres excauationes sunt, illis similes, quas Galli *niches* vocant. Forsitan idolorum simulacra ibi locauerunt, vt nos statuas solemus. Tectorio, nescio quo, parietes intus dealbatos fuisse, nonnulla vestigia indicant. Supra prope fornicem duae feneſtrae, e regione inuicem oppositae, cernuntur. Alia vna ad dextram prope solum est. Praeterea in summo fastigio apertura conspicitur, quae etiam fenestrae loco inseruiisse videtur. Ianua ex illo latere fuit, quod iam collapsum est. Tota ceterum structura ex latere cocto constat, saturate rubro, cuius specimen pictor attulit, argilla ex qua conflatus est, bolum armenam admodum aemulante, qualem amicissimus collega et itineris comes *Gmelinus* subinde ad ripam fluuii in ea regione obseruauit. Idola et scripta sacra, an vnquam ibi visa sint, non comperi. Forsitan sacrificulis, qui huic fano praefuerunt, tempus suppetiit, omnia in alium locum commode transferendi. Locus a munimento Iamyscheuensi terrestri itinere nonaginta circiter leucas distat. In tabula geographica Vitseniana indicium quidem eius, sed nimis procul ab Irti fluuio, habemus, his verbis: *Kalbassin siue Kabalgakum aedificium est lapideum* (lateritium) *sed collapsum* (1)

Succedunt *septem* ita dicta *Palatia*, quindecim leucis supra arcem, quae inde nomen traxit, in orientali Irtis fluuii litore sita, quae, si famam spectes, antiquae Romae ruderibus aequiparanda putares: Si vero nostro aeuo prope lustres, nihil animaduertes, quod tam speciosum palatiorum nomen mereatur. Ortum autem ducit adpellatio ista ex Russico loquendi modo, quo omnia, tam grandia, quam

(1) Kalbasin ofte Kabalgacum is een steen huys doch vervallen.

quam vilia, dummodo lapidea vel lateritia ſint aedificia, палаты (palatia) vocantur. Calmuccis *Darchan-Zordchin-Kit* audiunt. Dicunt enim, ſacrificulum aliquem *Darchan Zordſchi* has aedes exſtruxiſſe, et in iis commoratum fuiſſe. Quo tempore id factum, ignorant. Ego autem Tumenii, quae antiquiſſima Sibiriae vrbs eſt, in tabulario publico reperi literas Imperatoris Michaelis Theodori fili die 25. Octobris A. M. C. (ſecundum computum Graecorum) 7125. i. e. A. C. 1616. ſcriptas, in quibus harum aedium ſub nomine каменныя мечети, delubra lapidea dicas, mentio iniicitur. Et haec forſitan illarum aetas eſt. Nam antiquiores ex materia, qua conſtant, vix crediderim. Imo vel ea antiquitate non putasſem, niſi allegatae literae id luculenter teſtarentur. Audiamus *Vitſium* (10) de his aedibus ita loquentem: *Non procul*, inquit, *a Lankaraga eſt locus ad occidentalem quendam riuum Irtis fluuii, vbi ſeptem aedificia extant, ſeptem abietum nomine celebrata. Totidem namque arbores ante iſta aedificia plantatae ſunt. Alii autem Lankaraga et hunc locum vnum idemque eſſe reputant.* Cauendum, ne haec verba nos ambiguos reddant. Septem enim palatia, de quibus quaeſtio eſt, non ad occidentalem quendam riuum, ſed in orientali Irtis fluuii ripa ſita eſſe, ſupra dixi: Septem autem abietum memoriam alius

 locus

(10) Noord en Ooſt Tartary Ed. I. P. II. pag. 483. Ed. II. p. 774. By Lankaraga is een plaetſien gelegen an een Weſter tak van den revier Irtis daer zeven huyzen ſtaen: het wert de zeven denneboomen genaemt, na zo veel boomen, als voor gemelte huyzen ſtaen, hoewel ſommige dit plaetſien met Lankaraga voor een en het zelve neemen.

locus seruat, nempe quadraginta circiter leucis infra munimentum septem palatiorum, vbi si narrationem Vitsianam sequi vellemus, aliae septem aedes statuendae essent. Exploratum autem habeo, plures praeter has, quas primo loco dixi, nec ad septem abietes, nec alibi extare. Vnde ergo talis confusio orta? Paucis dicam. Pro *Lankaraga Dolon-Karagai* legendum: quod septem pinus denotat: pinum autem dico arborem, quae Russis cocна audit, quamque Belgae eo nomine, quo nos abietem, vocare solent. Ergo locus Vitsio Lankaraga dictus et septem abietes vnum idemque sunt, qui quidem recte ad occidentalem quendam riuum collocatur. Hic riuus *in tabula* Vitsiana *Ienculia* siue *Felcula*, Sibiriae autem incolis *Dolonka* dicitur. Amnis est ex occidente Irtin ingrediens, ad quem septem pinus olim conspicuae fuerunt. Caesae autem perhibentur, cum copiae Russicae viam in Buchariam minorem tentantes, aliquot leucis supra ostium amnis in orientali Irtis fluuii ripa arcem, Dolonensem dictam, (Долонская крѣпость) exstruerent, quod paulo post, cum ob viciniam cum munimento septem palatiorum nullius vsus iudicatum sit, iterum destructum est. Interea locus etiamnum apud Calmuccos et Tataros in rei memoriam nomen *Dolon-Karagai* retinet, quem itaque cum septem palatiis, propter numerum septenarium vtrinque occurrentem, errore quodam confusum esse, nihil dubites. Deuastatas puto has aedes annis circiter CIƆIƆCLX–LXX, quibus funestum bellum intestinum, diuiso inter multos Calmuccorum imperio multas clades intulisse ex tabulariis Sibiricis mihi compertum est. Ex eo tempore fieri certe saepius potuit, vt Russi deuastata fana intrarent,

scripta

ſcripta et idola, quae magno numero ibi adfuerunt, ſibi vindicarent: ſed forſan; vt in plebe fieri aſſolet, non curarunt res, quae lucrum non afferrent. Nam ante expeditionem Buchholtianam, quae prima fuit ex illis, quibus in Buchariam eundum erat, coepit autem illa anno cIↃIↃCCXIV, nihil de iis fere auditum, nulla de ſcriptis ignoti characteris in Sibiria repertis mentio facta. Illa, quae prima magno Imperatori a Praefecto Sibiriae oblata ſunt, inde deprompta fuiſſe, communis opinio eſt. Dicam, quae obſeruaui, cum, ex arce ſeptem palatiorum ad haec rudera profectus, propriis ea oculis luſtrarem.

Situs eorundem eſt in campo edito, ſua ſe planitie vndequaque efferente, et natura loci arido, quales campos vulgo *Step* vocare conſueuimus, prope ad ripam Irtis fluuii, qui in eo loco ex SOZO verſus NWZW curſum dirigit. Ex nomine intelligitur ſeptem aedes eſſe. Id autem ita capiendum, vt vnius aedificii duo conclauia, pariete diſtincta, eo quod per illas nullae ianuae tranſitum communicant, pro diuerſis aedificiis habeas. Nec moreris, vnum a reliquis dimidiam fere leucam distare. Structura pleroruumque ex latere non cocto eſt, more per omnem Buchariam familiari. Vnicum tantum, quod praecipuum fuiſſe videtur, ad dimidiam altitudinem, quod inferiorem contignationem dicas, ex lapide ſciſſili conſtat, eo ipſo loco, vti videtur, ex terra eruto. Indicia enim eius in ripa hinc inde, vbi confragoſa eſt, clare ſe produnt. Figura omnium quadrata eſt, in nonnullis oblonga. Magnitudo varia, nulla tamen, quae quindecim communes paſſus excedat. Parietes craſſitie raro duos pedes ſuperant. Vnum aedificium in quatuor angulis Tab. II.

ad firmitatem, puto, ſtructurae addendam columnis fultum eſt, ex eodem latere non cocto ſtructis. Vnum pyramidis inſtar decreſcente paullatim ambitu exſurgit. Vnum in tria conclauia diuiſum. Vnum, quod dimidiam leucam diſtare dixi, reliquis minus eſt, magis autem excelſum fuit, vnde turrem dicunt, ad excubias agendas extructam. Iam fere omnia collapſa ſunt, vel proximam ruinam minantur, quod ob materiam, qua conſtant, aliter fieri haud potuit. Quin miror, quod, ita comparata, tam diu et vltra ſeculum durauerint. Tecta, ſi veſtigiis quibusdam fides habenda, ex vimentis arborum conſtitiſſe videntur. Ianuarum oſtia fluuium reſpiciunt, vnico iſto aedificio excepto, quod in duo conclauia diſtinctum eſt. Haec enim conclauia cum fluuium verſus cohaereant, ideo ianua vnius ex aduerſo fuit. Feneſtra in quouis pariete vnica, eaque in medio ſita, plerumque ſatis anguſta. Fornices ſuper ianuas et feneſtras nulli. Superiorem lapidum aut laterum ſtructuram trabes ligneae ſuſtinent, transuerſim poſitae. Intus in vno vel altero ad parietes picturarum reliquiae cernuntur, quae, quantum oculis deprehendere in fugientibus adſpectum figuris licet, homines partim ſedentes, partim ſtantes, nec non animalia, dracones, aues, et maxime flores, caulibus et foliis inter ſe contextos, referunt, nullo artificio, nec lucis aut vmbrae diſcrimine, ſed primariis tantum, quod vocant, coloribus rudi admodum penicillo factae. In tribus aedificiis columnae ligneae, floribus ſubinde pictae, magna copia collapſae iacent; nec non animalium figurae, leones, dracones, ex ligno ſculpti, columnis inſidentes, quibus ſuperiores contignationes, dicam, an lacunaria? fulta fuiſſe

ad-

adparet. Vnam ex iſtis figuris in technophylacium Imperatorium miſi, quam hic delineatam ſiſto. In aedificio ex lapide ſciſſili exſtructo, in angulo quodam, rudera alicuius loci eminentioris extant, duas, et quod excurrit, orgyias ſupra ſolum eleuati, et columnis fulti, ſub quo picturarum reliquiae, vel quod locus in maiore dignatione habitus, vel quod ab aëre aliquantisper tutior fuerit, prae ceteris inſigniores obſeruantur. Ibidem etiam ſcripta recondita fuerunt, ex quibus autem noſtro tempore paucae admodum et minutae tantum ſchedulae ſupererant, perquam corroſae et exeſae, vt ſcripta ſolent, quae per tot annos ſub diu expoſita vermibus et putredini in praedam ceſſerunt. Dubitandum, an eo tempore, quo prima ſcripta ex Sibiria allata ſunt, adhuc fuerint integra. Incolae certe vicini, quod diximus, munimenti iſtud negant, ſuaque memoria nulla integra folia ibi inuenta eſſe adſeuerant, potius omnia ruderibus Ablakitianis, de quibus deinceps agendi locus erit, accepta ferenda praedicant. Quidquid autem huius ſit? id ſane inficias nemo ibit, ſcriptorum, quae olim hic loci reperta ſunt, et Ablakitianorum eandem rationem fuiſſe, et ſi maturius curioſi rerum indagatores acceſſiſſent, illa aeque facile ac haec ab interitu ſeruari potuiſſe. Iacet praeterea pone aedes maiores inſignis magnitudinis ſaxum, oblongum, vt ſaxa ſepulchralia eſſe ſolent, in ſuperiori parte faciem humanam exculptam referens. Id olim erecte ſtetiſſe dicunt. Erat autem, neſcio quo caſu, in duas partes diffractum, quarum quaelibet fere orgyiam longitudine aequabat. Prope cauerna ſepulchralis conſpiciebatur, ex quo paucis ante nos annis aliquot vncias auri erutas eſſe, illi qui nos comitabantur

Tab. II. Fig. 2.

bantur milites, referebant. Quod an indicio sit, sacrificulos Calmuccos hic etiam suos mortuos sepeliisse, an vero hoc sepulchrum ab antiquioribus illarum regionum colonis originem ducat, id quidem non satis liquet. Mallem tamen posteriorem sententiam praeferre, tum quod inter Calmuccos non moris sit, mortuos adeo prope ab habitationibus terrae mandare, tum etiam quod veterum tumulorum sepulchralium vbique istic frequens numerus sit, qui profecto non recentioris sunt aetatis, in eo cum hoc nostro conuenientes, quod auri argentique thesauros fossoribus saepe impertierint, vt alio *loco* a me dicetur prolixius. Ceterum conferas scenographiam, *quam* de ruderibus memoratarum aedium in ipso loco fieri curaui. Conspiciuntur in ea:

a. Irtis fluuius.

b. Ripa eiusdem orientalis cum lapide scissili hinc inde prominente.

c. Aedificium, quod inter cetera praecipuum fuisse videtur, inferiore contignatione ex lapide scissili, superiore ex latere non cocto exstructa, maximam partem collapsum, tecti vestigiis ex virgulto supra adparentibus.

d. Aedificium in quatuor angulis columnis fultum.

e. Aedificium pyramidis instar paullatim exsurgens.

f. Aedificium in tria conclauia diuisum, admodum collapsum.

g. h. } Duo conclauia vno pariete cohaerentia, tota fere collapsa.

i. Ae-

i. Aedificium a reliquis dimidiam fere leucam distans, intus suis ruderibus totum plenum, cum antea turris instar excelsum, vt refertur, fuerit.

l. Saxum sepulchrale, in duas partes diffractum.

m. Sepulchrum apertum, in quo aliquot vnciae auri inuentae sunt.

Alia similium aedificiorum rudera viginti, et quod excurrit, leucas a prioribus, in eadem Irtis fluuii ripa, ab arce septem palatiorum triginta septem leucas, ex sinistra viae regiae, quae ad arcem Ustkamenogorensem ducit, obseruantur. Illa autem, cum iuxta proficiscerer, fere solo aequata erant, et vix distinguebam vnum aedificium in sex conclauia quadrangularia diuisum fuisse. Referebatur, ante viginti annos parietes plus, quam vlnae altitudinem, habuisse, quo etiam tempore agriculturae vestigia in vicinia ruderum conspicua fuerint. Nos autem praeter fossas, aquam in agros deriuandi gratia factas, nihil animaduertimus. Plura Vitsius (1) docet. *Ab his*, inquiens, *aedibus* (nempe a septem palatiis) *Irtin vltra ascendendo sacrificulus aliquis Calmuccicus habitat, qui duo satis magna aedificia lateritia sibi exstruxit, extra calce obducta. Ille Bucharos in seruitio suo alit, qui agrum colunt; ibi triticum, hordeum, pisa et alia frumenta crescunt. Buchari, proprias suas sedes relinquentes, vltro huc secesserunt.*

Vlti-

(1) l. c. meerder opwaerts varende woont een Kalmuksch Laba of Priester, die daer heeft staen twee groote steene gebouwen, van buyten met kalk bestreken, heeft in zyn dienst Bucharen, en leeft van den Lantboew: aldaer wast tarw, gerst, erten, en andere granen. De Bucharen, welke onder zyn gezagh staen, zyn uitwykelingen van hun eigen lant, en hadden zich der dezer plaetse nedergestelt.

Vltima, in ista quidem regione, quoad Sibiriae fines extenduntur, sunt rudera Ablakitiana, de quibus iam supra rumorem nonnullorum memoraui, qui non sine veri specie scripta Tangutica, quotquot ex his terris alio perlata sunt, inde omnia deprompta esse perhibent. Mihi saltem id perplacet. Nam hic fere vnicus locus est, in quo scripta adeo longe ab interitu seruari potuerunt. Fuere quidem ex incolis arcis Ustkamenogorensis, qui rudera anno demum cIↄIↄCCXXI exeunte a militibus ex vltima expeditione in Bucharias tentata, Lichareuiana scilicet, redeuntibus, inter haec, dum arx Ustkamenogorensis exstrueretur, reperta esse mihi asseuerarunt: Sed haec non eo intelligi velim, ac si locus ante plane ignotus fuerit, et a nemine Russorum visitatus. Quin potius, cum iam indicia eius apud *Vitsum* (1) extant, ex multis certe annis cognitus fuisse debet; hoc tantum discrimine, quod primis temporibus notitia inter paucos substitit, quae deinceps, ex quo milites ex vicina arce Ustkamenogorensi eo penetrarunt, omnibus est patefacta. Doleo, quod, cum in memorata arce agerem, nec ipsi mihi rudera spectare, nec aliquem ex nostris, qui ea describeret, depingeretque, mittere licuerit. Pericula autumnali eo tempore a latronibus Cosaccis imminentia, de quibus vndique infausti nuncii accurrebant, id prohibuerunt. Accessit festinatio itineris ante hiemem Kusneziam vsque et Tomium continuandi: Misi autem scribam, quem praefectus arcis suppeditauit, triginta militum praesidio instructum, qui interea, quod ipse ea, quae circa arcem agenda erant, absoluerem, iter conficeret, ruderum descripti-

(1) loco infra citando, et in tabula ipsius Geographica.

ſcriptionem, quantum poſſet, curaret, et ſcripta, quot equi portare valeant, nec non picturarum ſpecimina, et, ſi quae ſint, idola ſecum afferret. In hoc voti compos factus, plus quam ſesquimille ſcriptorum Tanguticorum et Mongolicorum folia, quatuor imagines diuorum in aſſeribus pictas, et ſex tabulas ligneas literis Mongolicis exſculptas, quae libris excudendis olim inſeruierunt, accepi, omnia technophylacio Imperatorio illata. Neque contemnenda, quae a ſcriba de hodierno ruderum ſtatu accepi. Adhibitis enim iis, quae ex ipſo et aliis praeterea requirendo reſciui, deſcriptio ruderum inde orta eſt, ſatis luculenta, vt mihi quidem videtur, quae autem manca erat, quoad picturae deficiebant. Sed et huic defectui medela parata eſt. Aliquot poſt nos annis opportuniore tempore adfuit Geodaetarum aliquis *Baſilius Schiſchkow*, ab Illuſtri *Tatiſchtſcheuio*, rebus tunc metallicis per Sibiriam praefecto, miſſus, qui tam ichnographiam loci generalem, quam ſpecialiorem aedificiorum ſcenographiam, et vnius aedificii interiorem faciem, quod picturas attinet, depinxit. Illa ego noſtra facere conſtitui, vt hi commentarii maiorem inde lucem accipiant.

Ablakitum Sibiriae incolis vrbs vocatur, eo quod moenibus cinctus eſt locus, antiquo more ſcilicet, quo Ruſſi quaslibet, quantumuis paucas, habitationes, dummodo muro munitae, aut caſtello praeditae ſint, vrbes (городы) dicere conſueuerunt. Calmucci *Ablaikit* efferunt, id quod *Ablaii fanum* denotat. Fuit autem *Ablaius* Princeps tribus Calmuccicae, *Choſchot* dictae, qui circa medium ſuperioris ſeculi floruit, at in bello inteſtino Calmuccico, de quo ſupra dixi, anno Chr. CIↃIↃCLXXI. ex Tab. III.

 his

his ſuis ſedibus profugus factus, conuertit ſe in regionem Iaïco et Volgae fluuiis confinem, vbi a Torgoutis, quos vulgo Calmuccos Volgenſes vocamus, cum illos crebris incurſionibus laceſſeret, captus eſt, et Ruſſis traditus, qui Aſtrachanum illum deduxerunt, vbi ſenectute confectus diem obiit. Lubet repetere verba *Vitſii* quae aedificiorum ad Ablaio exſtructorum mentionem faciunt. (1) *Eſt*, inquit, *in ea regione* (ad Irtin fluuium) *Beska amnis, ex rupibus profluens, ad quem Princeps Ablai duo aedificia lapidea exſtrui curauit, eaque moenibus muniuit, locum inter rupes ſeligendo, operariis ex Sinarum imperio ad illum miſſis.* Neſcio cum hic Beskam amnem auctor memorauerit, cur in eius tabula geographica aedificia Ablaiana ad Karbugam quendam poſita ſint. Ad hunc nempe videmus in duobus locis, id quod praeter rem eſt, verba haec: *Ablaiana fortalitia*, Belgica lingua, *Ablaiſche Sterkten*, adſcripta, et ad oſtium eius leguntur verba: *Boerchoe het hof van Prins Ablai*, i. e. *Burchu*, *aula Principis Ablaii*, vbi pro *Burchu* puto *Urgu* legendum, quae vox in lingua Calmuccica caſtra Principis denotat. Beska amnis in eadem tabula ſupra Karbugam Irtin influere conſpicitur: nullis tamen aedificiis aut habitationibus ad illum adnotatis. Ruſſis iſte amnis propter viciniam ruderum Ablakitenſium eodem *Ablakiti* nomine celebris eſt. Octo ille leucis ſupra arcem Uſtkamenogorenſem ex media inter auſtrum et occidentem regione in Irtin exit, et quaſi viam

(1) l. c. Noch vint men in dit gebiet en rivier genaemt Beska, dat mede uyt ſteene geberghte ſtort. Aldaer laet Prins Ablai timmeren twee ſteene gebouwen der wyſe als ſterktens, en dat tuſchen ſteene geberghte in, waer to hem uyt Sina meeſters zyn geſonden.

viam pandit his, qui iter ad rudera facere induxerunt. Irti nempe fluuio e regione arcis fuperato, poft viginti circiter leucas peruenitur ad praedictum amnem, vbi in finiftra, fiue occidentali, eius ripa tumulus olim fepulchralis extitit, qui, paucis ante nos annis effoffus, auri in tenues lamellas ducti, quali apud veteres defunctos principes inuoluere moris fuit, ad librae pondus prodidit. Ex hac ratione ifte locus nomen *Solotucha* traxit. Inde amnis ripam orientalem legendo occurrit alius amnis, *paruuli Ablakiti* nomen ferens, qui ex Euro-Auftro cum priori vndas mifcet, et fex leucis a loco, Solotucha dicto, diftat. Hoc ad oftium eius traiecto iter pone ripam maioris amnis continuatur circiter viginti quatuor leucas, quae vbi facta via eft, amnis fubito curfum mutare, et, cum ante a meridie fere in feptentrionem fluxerit, iam ex oriente in occidentem labi confpicitur. Locus ideo propter brachii incuruati fimilitudinem Ruffice *lokot* i. e. cubitus vocatur. Inde vsque ad rudera Ablakitiana, quae vnius circiter leucae fpatio ab amne verfus meridiem abfunt, triginta praeterea leucae numerantur. Ergo totum iter a munimento Uftkamenogorenfi octoginta circiter leucis conftat. Via montofa quidem, fatis tamen commoda eft: occupat nempe iftam regionem montium feries, quae cum Altaienfi montium tractu, ex oriente Irtis fluuii fito, cohaeret, et Sibiriam a terris ditioni Calmuccicae fubiectis difterminat. Ablakitum amnem ex vtraque ripa betulae, populi atque falices abundanter cingunt. Regio ceterum noftro tempore non nifi a feris incolitur, quos inter cerui, alces, capreoli et rupicaprae eminent.

his suis sedibus profugus factus, cor ... ibus Schischkoui-
laico et Volgae fluuiis confinem ... tantum de iis, quae
vulgo Calmuccos Volgenses v... ... cis, expressa sunt, vel
incursionibus lacesseret, capt... ...
Astrachanum illum ded... ...itie est, quam ad septen-
diem obiit. Lubet ... ... e rupes claudunt: rupes per
rum ad Ablaio ... , quae ipsae in nonnullis locis
Est, inquit, *in* ... ...*ant*, quae lapides ad exstruenda illa
nis, *ex rup*... *quae* lacum includunt, qui aquam inco-
aedificia l... *vnde* ambitus loci pentagonum aemulans or-
locum i... ... *Ipsa* moenia sesqui orgyiam alta, tres autem
ad i... ... vlnam crassa referuntur. Porta, quae a me-
r... ... ... columnis ex latere cocto gaudet, quibus sicut
... orientali portae fornices ex eodem latere impositi
..., iniuria temporis collapsi, ipsis autem moenibus
ex omni parte illaesis. Per portam meridionalem intran-
tibus bina mox aedificia occurrunt, in aggere quodam ex-
structa, qui figura quadrangulari ad sesqui orgyiam a solo
editus, extra latere cocto circumdatus, intra terra reple-
tus, et superne antibus lateritiis ad dimidiam hominis
magnitudinem cinctus est. Scala in aggerem ex meridie
itur, etiam lateritia, qua conscensa, in primum aedifi-
cium venitur, singularis structurae, vt ex schemate adpa-
ret, et quod subsequenti alteri aedificio atrii loco inserui-
isse coniicio. Parietes lateritii, tectorio ex luto albicante
inducti, vnam et dimidiam orgyiam in altum exsurgunt.
Solum latere stratum. Lateres, quod vt semel moneam,
vbique in his ruderibus eiusdem generis sunt, et quamuis
cocti, colorem tamen non rubentem sed cinereum, et in-
tus, si franguntur, nigricantem referunt. In duobus an-
gulis

furni excoctorii reperiuntur, exiguae molis, ro-
et infra in angustos tubos desinentes, cum
i folles olim adplicati fuerunt, et, si supe-
o emittendo destinatos, excipias, ceterum
hemate Schischkouiano non extabant,
cis a nobis additi. Probabile est,
metalla excoxisse, tum medicamenta
enim montium tractus diuitiis subterraneis
. nec est, cur artem chemicam et medicam illi-
familiae hominum in dubium vocemus, cum exempla eius non contemnenda ipsi cognouerimus. Praeterea nihil in isto conclaui siue atrio obseruatur. Nullae fenestrae. Nullum tectum; cuius tamen reliquias quasdam hinc inde adparere, ac si exustum esset, relatum fuit. Quin etiam reliquiae istae non tecti, sed superioris parietis lignei, lateritio superimpositi, propter absentiam fenestrarum putari possunt: aut si adfuit tectum, certe non communis structurae fuit, quoniam luminis radii per illud in conclaue intrare debuerunt. Ceterum et scenographia harum et sequentium aedium Schischkouiana conferenda est. Tab. IV.

Alterae aedes, de quibus dixi, quod eidem cum prioribus aggeri superstructae sint, ex vnico pariter conclaui constant, sed ornatiore et quadrangulari, idolis, picturis et scriptis sacris vndique referto. Hoc ipsum delubrum fuit, in quo sacrificuli sacro cultui vacauerunt. Aditus est e regione priorum aedium, siue atrii, valuis clausis, et ita comparatus, vt his apertis ex atrio in delubrum liber prospectus pateat. Ad valuarum vtrumque latus sex fenestras nostri numerarunt, scenographia Schischouiana decem sistit. Eidem et alibi in fenestrarum nu-

 mero

mero cum noſtris commentariis non conuenit. Talis autem diſcrepantia leuis et nullius momenti eſt. Parietes ad altitudinem quinque vlnarum ex latere cocto conſtant, et ad orgyiae altitudinem ex trabibus ligneis, paullatim in tectum coëuntibus. Acropodium quadrangulare in medio collocatum, altitudine tres vlnas cum dimidia aequans, variis florum ornamentis pictum, cui idolum olim impoſitum fuit, hominem referens, pedibus diuaricatis erecte ſtantem, toga amictum Sinarum more duplici, longiore altera, et altera breuiore, capite et pedibus nudis, qui magnitudine inprimis capitis, quod plus quam giganteae monſtroſitatis fuiſſe dicitur, communem ſtaturam nonnihil excederet. Hoc noſtri in multa fruſta diffractum inuenerunt, cum ante paucos adhuc annos integrum extiterit. Clades ab ignorantia, an iniuſto zelo? militum ex vicino munimento venandi gratia hunc locum ſaepe viſitantium, idolo illata. Ex fragmentis ad me perlatis collegi, idoli ſtructuram interiorem ex vimentis arborum conſtitiſſe, quibus lutum inductum, et ad formam iuſtam compoſitum fuit, puriore quadam terra alba inſuper illita, tripolitanae ſimili, qualis hinc inde ad ripas Irtis fluuii inuenitur, ſine omnibus ceterum picturae aut colorum indiciis. Sedecim alia eiusdem formae et ſtructurae idola minora pone parietes orientalem, ſeptentrionalem et occidentalem conſpicua fuerunt, acropodiis minoribus impoſita, ſed, quod dolendum, eandem cum priori ſortem experta, ſolis acropodiis altitudine duarum vlnarum ſuperſtitibus. Parietes ab infimo ſolo vsque ad tectum variis picturis exornati obſeruantur, inter quas, quae ad parietem orientalem et occidentalem extant, tum magnitudine, tum corporis habitu

bitu insigniores sunt. Illarum ex oriente altera virum, altera foeminam refert. Occidentales ambo formas viriles exprimunt. Omnes pedibus erecte stantes pictae. Virorum formae inprimis multitudine capitum et brachiorum, qui frequentissimus apud varias gentes idololatricas diuinitates pingendi mos est, spectatorum in se oculos conuertunt. Ex occidentalibus alterum quatuor capitibus et viginti quatuor brachiis, alterum capitibus duobus et octo brachiis praeditum est. Prius praeterea pede dextro comae alius prostrati hominis insistit, aliosque duos ad genua sua prouolutos spectat. Tertium virile, e regione pictum, duo pariter capita et quatuor brachia habet, duobus brachiis foeminam, quae ipsi ad latus est, complectens, et vno ore exosculans, pedesque pedibus arcte iungens, dum reliquum caput, reliquaque duo brachia in situ erecto et naturali manent. Paries denique septentrionalis continet seriem imaginum, quibus foeminae, pedibus in gremium intortis, sedentes exprimuntur, mamillis, brachiis et plantis pedum nudis, colore corporis, quem aliae naturalem, aliae purpureum, luteum aliae, aliae subuiridem monstrant, nec non gesticulationibus manuum diuersae, caeterum inuicem perquam similes. Hae, vt et acropodiorum figurae, in singulari tabula Schischkouiana expressae sunt. Praeterea etiam totum lacunar talibus foeminarum imaginibus, in asseribus quadratis vnius vlnae magnitudine pictis, ornatum fuit, quarum etiamsi plurimae iam eo tempore auulsae et ablatae fuerint, aliquot centenas tamen reliquas nostri dixerunt, ex quibus quatuor ad me attulerunt, quarum tres forma diuersas speciminis gratia hic minori forma delineatas sisto. Tabula enim Schischkouiana, quae totum lacu- Tab. V. Tab. VI. fig. 1. 2. 3.

nar

nar exhibet, ſingulas imagines non accurate ſatis proponit, quare illam hic inſerere ſuperuacaneum viſum eſt. Artis modus in omnibus his picturis ſimilis eſt illi, quem inter rudera ſeptem palatiorum obſeruaui. Colores vbiuis aqua diluti, ex quibus non niſi primarii adhibiti ſint, omni fere lucis et vmbrae diſcrimine neglecto. Animadverſione dignum, pleraſque imagines, inprimis circum capita, radiante aliquo lumine, quod vulgo nimbum vocant, fulgere, quali et Romanorum diuinitates quondam cinctas fuiſſe conſtat, et noſtrates ſanctos pingere moris eſt.

In eodem conclaui, ad parietem ſeptentrionalem inſignis magnitudinis ſcrinium extitit, multis loculis exemtilibus refertum, in quibus ſcriptorum Tanguticorum et Mongolicorum ſacra farrago adſeruata fuit. Illud autem, ex quo ab improbis manibus deiectum eſt, haec per totum conclaue diſperſa iacent, quae etiamſi a tot annis quauis occaſione a militibus et venatoribus Ruſſis inſignem diminutionem paſſa ſint, ita vt noſtra aetate in munimentis Irtenſibus mercibus inuoluendis et feneſtris farciendis vulgo inſeruierint, poſtremo quoque noſtri non contemnendam partem eorum abſtulerint, tanta tamen copia ſupereſſe dicuntur, vt vix decem equi iis auehendis ſuffecturi ſint. Tangutana in charta coerulea et ſubnigra literis aureis et argenteis picta, qualia illa fuerunt, quae immortalis gloriae Imperator in exteras terras miſit, iam non adeo frequentia occurrunt. Peregrinum enim chartae et ſcripturae genus plures ſemper amatores ſibi conciliauit: quae autem reliqua manſerant, pleraque noſtri abſtulerunt. Frequentiora ſint in charta vulgari alba, charactere nigro, rarius rubro, aut rubro et nigro promiſcue ſcripta, literis

vnci-

vncialibus ſiue quadratis. Nec deſunt minori charactere tachygraphico, Tangutenſibus *Schar* dicto, exarata folia, illi, quod *Strahlenbergius* (1) edidit, perſimilia. Quin reperiuntur folia Tangutica charactere quadrato in charta tenuiori ex aduerſa facie typis excuſa, a tergo aliis foliis agglutinanda. Mongolica autem impreſſa nulla inuenta ſunt, cum tamen formae impreſſoriae Mongolicae, vt ſupra dixi, adfuerint, quarum etiam *Strahlenbergius* meminit, at ex iisdem falſo concludit, omnia ex talibus fanis allata folia, tam Tangutica, quam Mongolica et Calmuccica, prelo excuſa eſſe. Quae ad me peruenerunt Mongolica et Calmuccica, pleraque in charta vulgari alba charactere nigro ſignata, vel, quod rarius eſt, lineis rubris et nigris variegata, vel tota charactere rubro perſcripta ſunt. Perpauca vidi more Tangutico in charta nigra aureis literis picta. Libri ex betularum cortice compacti, quorum tres, idiomate Calmuccico perſcriptos, inde accepi, etſi non vulgares ſint, tamen nec inter rariora ponendi. Nihil enim, niſi chartae penuriam, illi indicant, quemadmodum et Ruſſos in longinquis Sibiriae locis, cum charta deficeret, betularum cortice ſubinde vſos eſſe nouimus. Rariſſimae ſunt diuorum imagines in charta pictae, quarum quidem nullae a noſtris inuentae ſunt: vnam tamen a milite quodam arcis Uſtkamenogorenſis, qui olim eam ſibi vindicauerat, pretio nactus ſum. Deam illa exprimit in charta nigra, trium pollicum quadratorum magnitudine, auro pictam, quae pedibus in gremium contortis, puluinari inſidet, dextram in genua demittit, ſiniſtra figuram cordis vel aliud quid ei ſimile geſtat. Facies et reliquae corporis partes,

(1) Tab. I. ad pag. 312.

quae nudae spectantur, totae aureae sunt. De nimbis, qui hanc, vt alias imagines, ambiunt, supra dixi. Ad latus quaedam Tangutice scripta extant, cum interpretatione Mongolica, in cuius gratiam, nempe vt vox voci exacte respondeat, Tangutica ista, quae alias transuersim a sinistra ad dextram scribuntur, Mongolico scribendi modo deorsum collocata sunt. Cetera ectypus illustrat.

Tab. VI. Fig. 4. Est praeterea aliud aedificium prope orientalem moenium portam exstructum, quod sacrificulis domicilii instar inseruiisse videtur. Constat enim ex vno conclaui maiori et aliquot ad latera secluforiis, tali vsui inprimis aptis, vt ex duplici schemate, tam ichno-quam scenographico, conspicuum est. Parietes hic, vt in reliquis, lateritii sunt, nullis picturarum ornamentis, tectorio tamen ex lutescenti albido, inducti. Et hi vnice eius supersunt. Nam quae alia olim lignea contignatio lateritiae superstructa fuisse refertur, illa a multis annis collapsa est. Fenestrae nec vitri nec lapidis specularis vestigia seruant, forte quod vel chartaceae vel membranaceae fuerint, more per Bucharias et in Sinis vsitato. Aulaeis autem ex panno serico Sinensi confectis, tam in hoc, quam in praecedenti aedificio, ornatas eas fuisse perhibent, quae a primis inuentoribus, aëris iniuria iam satis superque lacerata, ablata sunt. Ceterum notari meretur, tria haec descripta nobis aedificia tali situ constructa esse, vt ianuae meridiem spectent. Nimirum hunc situm Calmucci et Mongolenses tam in sacris, quam in reliquis quibuscunque, aedificiis exstruendis religiose obseruant, more a maioribus accepto, vt *Guilielmus de Rubruquis* (1) testatur, quem tamen in septem palatiis neglectum esse vidimus. Vlti-

(1) Cap. II.

Vltimo loco minoris alicuius aedificii rudera superſunt, a duobus prioribus ad occidentem poſiti, cuius parietes dimidiam hominis magnitudinem vix aequant, et in medio veſtigia foci monſtrant, ex quo coniicitur, culinam hanc fuiſſe, quae autem cum propior delubro, quam aedibus habitationi inſeruientibus, extructa fuit, alii praeterea vſui inſeruiiſſe videtur; forſitan ad ignem ſuffitus, idolis accendendi gratia, proxime petendum. Cetera intra moenia plana, et omnibus aedificiis vacua ſunt, nec vlla plurium aedificiorum veſtigia, quae olim ibi fuerint, adparent. Dum autem Ablaius Princeps moenia tanto ambitu duxit, id rationis ſubeſſe poteſt, vt ſibimet ipſi locum tutum ab hoſtium repentino incurſu, in quo tentoria ingruente bello figeret, proſpicere voluerit.

Ablaio frater fuit natu maior Utſchurtu Taiſcha dictus, qui primus inter Calmuccos Anno Chr. CIↃIↃCLXXII Chani honores affectauit. Is etiam ſuis ſacrificulis tale fanum extruxerat, quinque dierum itinere ab Ablakito verſus occidentem ſitum, et noſtro adhuc tempore *Utſchurtu-Chan-Kit* nomine notum. Deſtructum autem illud fanum eſt a Galdano Dſongarorum tribus principe, cui Utſchurtu-Chanus filiam ſuam deſponſauerat; a Galdano, inquam, qui deinceps Buſchuchtuchani nomen aſſumſit, poſtquam ſocerum Anno Chr. CIↃIↃCLXXVI regno exuiſſet. Hic, vt iniuriam diis illatam expiaret, vel ſui memoriam poſteris commendaret, aliud fanum, ſex dierum itinere ab Ablakito verſus euroauſtrum, in vicinia lacus Saiſſan condidit, *Buſchuchtuchan-Kit* dictum. Id, cum ille Princeps longo et difficili bello cum Mongolenſibus confligeret, Caſacci in ipſius ditionem magno impetu irruentes, Anno cIↄIↄcLXXXIX profanasse dicuntur. Haec, vt vt Sibiriae vicina loca sint, dubito tamen, an cuipiam eius incolarum visa? ego certe neminem inueni, qui mihi plura de illis dicere potuisset. Quae enim noui, a Calmuccis accepi. Quantumuis autem pauca in medium protuli, non potui tamen prorsus ea tacere, quin loca indicare omnino debui, ne posteris historiarum orientis cupidis inuidere videar thesauros, futuris, quod auguror, temporibus, si quando Sibiriae limites vltra extendentur, aut regio ab inimicorum incursionibus tutior reddetur, inde reportandos.

Sunt praeterea talia sacraria ad Ieniseam *et* ad Tessum fluuios, in proximis a Sibiria Mongolensium terris, specus nempe idololatrica, in rupe excisa, et aedes Ablakitianis similes, quae, cum a Russis Sibiriae *incolis* plus vice simplici visitata, et scripta etiam ex priori loco allata sint, magis innotuerunt. Inprimis mihi Anno cIↄIↄccxxxv Crasnoiarii versanti praeter, quod ipsos homines, qui memorata loca visitauerant, adhuc viuos offenderem, etiam scriptae relationes in tabulario vrbis publico obuenerunt, descriptiones istorum locorum satis amplas continentes, ex quibus, quid profecerim, non superfluum erit indicare; tum vt *Strahlenbergium*, de scriptis Tanguticis ad Ieniseam fluuium repertis differentem, illustrem, tum vt emendem locorum descriptionem *Bayerianam*, quam ex ore cl. *Messerschmidii* se accepisse, beatus collega professus est.

Strahlenbergius folium aliquod Tanguticum tachygraphico charactere exaratum exhibens, illud, et multa similia, ad Ieniseam fluuium, prope fluuiolum Kemtschik, in

Sa-

Sacello quodam (*in einer Capelle*) inuenta esse tradit. (1) Haec qui legit, ambigere poterit de veritate illorum, quae de scriptis, ex septem palatiis et rideribus Ablakitianis allatis, a me dicta sunt. Horum enim nulla ibi facta mentio est, quod vitio vertendum esset auctori, nisi in tabula sua geographica ad Irtin fluuium verba quaedam adscripsisset, ex quibus, illum veram scriptorum originem non ignorasse, palam est. Errat autem, dum sacellum dicit, quasi ex lapide vel ligno constructum, quae potius, vt dixi, specus est, in rupe excauata. Errat etiam, dum Tangutica, Mongolica et Calmuccica omnia, ibi reperta, folia typis impressa esse, adfirmat. Sed non satis ipse sibi constat, dum mox addit, istud, a se exhibitum, folium Tanguticum manu exaratum esse.

B. *Messerschmidius* Anno cIↃIↃccxxvIII ex itinere suo literario per Sibiriam instituto, redux factus, attulit scripta Tangutica et antiqua Mongolica, ex ipsa ista specu desumta. Crasnoiarii illa nactus erat, a ciue quodam eius vrbis, qui ea olim, specum visitans, sibi vindicauerat. Cumque Strahlenbergius Messerschmidium eo tempore in itinere comitatus esset, folia nonnulla ab ipso sibi concessa retulit. Cur autem verum locum, aut conditionem eius, nesciuerit, certe coniectari nequeo. Messerschmidium enim omnia probe cognita habuisse, fidem facit eius diarium, cuius pars quaedam apud Academiam nostram scripto extat, vbi inter alia haec verba leguntur: *Anno* cIↃIↃccxxII *die* xIx *Februarii in vico quodam Medwedewa* (ditionis Crasnoiarensis, ad Ieniseam sito) *retulerunt hospes et alii eius vici incolae: ad Ieniseam fluuium,*

(1) pag. 312. sqq.

um, supra fluuium Kemtschik dimidii diei itinere, ad ostium amnis Dschakul, specum extare, in qua varia curiosa, inprimis idola, tam virili quam foemineo habitu, et multa scripta reperiantur. De eo tempore, quo scripta Messerschmidius Crasnoiarii accepit, diarium silet. Ita autem, vt ego accidisse dixi, idem ille homo, qui Messerschmidio scripta tradidit, mihi retulit. Dicam iam, quae mihi de specu ista Ieniseensi cognita sunt.

Decem circiter leucis supra ostium fluuii Kemtschuk, qui limites inter Imperium Russicum et Mongolico-Sinicum in eo loco constituit, ex occidente Dschakul, siue Tschakul, amnis Ieniseam influit, infra quem duae leucae sunt, et ab occidentali ripa Ieniseae fluuii tres leucae, vbi dicta specus in rupe conspicitur. Celebris montium Saianensium catena hic ex austro in planitiem desinere incipit, multis tumulis sepulchralibus veterum colonorum frequentem, quorum etiam non pauci, lapidum strue cumulati, ante ipsam specum reperiuntur. Ostium specus Ieniseae fluuio obuersum, et adeo angustum est, ac humile, vt hominem non nisi flexo corpore admittat. Etiam internus ambitus non vltra orgyiam cubicam continet, dimidia eius parte infra ostium ita in rupe excauata, vt homo in specu erecte stans, extra intuentibus superiore tantum dimidio corpore conspici possit. Non naturae opus esse, sed industria humana paratum, ex omnibus liquet. Extra ad vtrumque latus ostii hominum simulacra, quae idola praedicantur, ex rupe ita sculpta sunt, vt dorso cum ipsa rupe cohaereant, artificio, quod Gallica voce *bas relief* vocamus. Dimidiam autem hominis magnitudinem illa vix excedunt. Id, quod ad dextram

est,

est, dextram manum pectori admouet, sinistram baculo, an dicam ense? fulcit: id ad sinistram, dextram femori, sinistram pectori iungit. Praeter haec extra supra ostium aliud simulacrum lapideum fuit, in quadam excauatione positum, quod hominem pedibus inflexis sedentem referebat, at anno cIↃIↃCCXXI a vicinis gentibus, nescio in quem finem, ablatum esse constat. In ipsa specu ad parietem ostio oppositum tria porro idola extant, eadem ratione ac duo priora, eadem etiam magnitudine ex rupe sculpta. Horum, quod in medio est, pedibus sub femora inflexis tripodi insidet, toto corpore nudo, manibus in gremium demissis. Illud ad dextram tunica ad genua vsque amictum, sinistram manum pectori admouet, dextram libere remittit. Istud ad sinistram toga indutum, ad pedes propendente, et mitram in capite gestans, sinistram manum remittit, dextram pectori imponit. Crasnoiariensium aliquis huius specus et idolorum ibi extantium iconem delineauit, quam addo. Tab. VII.

Scriptorum folia, quae, vt ex speciminibus, a b. *Messerschmidio* Petropolin allatis, et ex illo *Strahlenbergii* patet, Ablakitianis admodum similia sunt, per totam specum dispersa iacent. Multa etiamnum superesse dicuntur: at pleraque putredine corrupta. Non puto, ad historiam specus pertinere, quod inter scripta etiam arcus et aliquot tela, nec non hordei modica penus inuenta sit: tales enim reliquias maiori iure venatoribus adscribas, qui forte in vicinia obambulantes, a tempestate oppressi, vel ad pernoctandum in specum secesserunt, eandemque his rebus ex incuria auctiorem reddiderunt. De auctore huius monumenti idololatrici nihil habeo, quod dicam. Fama

est,

eſt, vicinas gentes quotannis accedere, et idolis libamina offerre. Nec inſuetum gentibus idololatricis morem eſſe, delubra in rupibus exſcindendi, duobus apud *Haldium* (1) exemplis probatur.

Teſſum fluuium et aedes ad illum extantes Craſnoiarenſes ita deſcribunt. Oritur ille fluuius ex lacu *Sanſchin Dalai*, et occidentem verſus in alium lacum exoneratur, quem Mongolenſes non niſi generica adpellatione *Dalai* vocant, vicini autem Tatari Saianenſes *diuerſicoloris* nomen, ipſorum lingua *Alak-Kul*, illi indunt. In vicinia ex euroauſtro Charatal flunius profluit, qui Selengam ſubit. Ex borapeliote Ieniſeae fontes non procul diſtant. Verſus meridiem autem quatuor vel quinque dierum itinere a Teſſo peruenitur ad fontes ſuperioris Irtis fluuii, qui in lacum Saiſſan duobus alueis exit. Ieniſeam ducem ſequuti ſunt, qui olim iter ad Teſſum fluuium fecerunt, ripam eius orientalem legentes vsque ad confluentes duorum riuorum, *Ulu-kem* et *Bei-kem* dictorum, qui Ieniſeam fluuium conſtituunt. His ad oſtia traiectis, per campos aridos et deſertos, recta via ad Teſſum perrexerunt. Aedes duae ſunt ad dextram fluuii ripam, aequali fere ab vtroque lacu ſpatio, in loco editiore rupeſtri ſitae, ex latere non cocto ſtructae. Vnae duabus contignationibus conſtant, quarum inferiorem tantum noſtri viſitarunt, et aliquibus in locis ad parietes picturas, in aſſeribus pictas, et vernice obductas, obſeruarunt. Ex poſtica parte quaſi atrium eſt, et in illo ſecluſorium, aſſeribus cinctum, in quo ſcripta iacent, ianua cum conclaui contigua aditum in illud praeſtante. Non audiui autem, vnquam ex his ſcriptis quaedam Craſnoia-

(1) Tom. IV. p. 444. et 454.

noiarium perlata esse. Alterae aedes his proximae vnius contignationis sunt, omnibus ornamentis aliisque rebus vacuae. Dicunt inter has aedes et lacum Sanschin eiusdem generis alias aedes in sinistra ripa Tessi fluuii reperiri, quas autem nemini nostratium videre contigit. Ceterum haec illa regio est, quae perpetuis bellis a Calmuccis et Mongolensibus vexata fuit; cumque illa inter vtrumque regnum fere limitanea sit: ideo ex occidente laudati fluuii a Sinensibus Mongolensium patronis perpetuae excubiae aguntur; quin etiam in litore australi lacus Sanschin munimentum Sinenses exstruxerunt, palis circumdatum terrae infixis, quod aliquot millia praesidiariorum custodiunt. Conditor aedium Loosanus Mongolensium Princeps fuisse perhibetur, Altin-Chani filius, qui annis cIↃIↃCLX — cIↃIↃCLXXX floruit, et in ista regione suas sedes habuit: a Buschuchtuchano autem Calmuccorum Principe anno cIↃIↃCXC regno eiectus est. Hinc Mongolica voce *Loosan-kit*, Russice Лозановы палаты, vocantur. Antiquiores certe ex structura nemo facile putabit, nec, qui earum gentium res gestas nouit, recentiores credet. In regione enim perpetuis bellis exposita, quis tales aedes post Loosanum condere cceperit?

His praemissis, *Bayerianam* (1) locorum descriptionem conferamus. Confuso rumore *Bayerus* de septem palatiis audiuerat. Igitur rogauit *Messerschmidium* ex Sibiria tunc redeuntem, eiusdemque generis scripta, qualia priora erant, quae ex septem palatiis desumta praedicabantur, afferentem, vbi iste locus situs sit? Hic ostendisse dicitur: *situm fuisse ad Irtin fluuium, haud longe ab eius fontibus, et ab*

(1) in praef. musei Sinici p. 109.

lacu Sangin Dalai. Heu quanta locorum confusio! quae meo quidem iudicio viro, per nouem annos in Sibiria satis superque versato, tribui neutiquam potest. Irtin quidem fluuium vltra vrbem Taram ille non frequentauit. Rescire autem ab incolis facili negotio potuit, septem palatia non ad fontes eius sita esse. Strahlenbergius, homo in captiuitate detentus, et non tot, quot Messerschmidius, subsidiis instructus, qui etiam septem palatia et Ablakitum ipse non vidit, tamen vera illis loca in sua tabula geographica assignauit. Curque lacum Sangin inmiscuit? qui idem est cum lacu Sanschin, ex quo Tessus oritur. Notitiam certe de terris Mongolensium sitis luculentam sibi comparauit, quam vt verum situm lacus Sanschin et fontium Irtis fluuii et Tessum nesciuisset. Legimus enim in ipsius diario: cIↄIↄccxxII *die* VI. *Martii Crasnoiarii sibi a quodam interprete Calmuccico, ex vicinia lacus Saissan oriundo, et terrarum Mongolensium adprime gnaro, relatum esse, Irtis fluuii fontes quatuor dierum itinere versus austrum a fluuio quodam Ktiesch* (Tessus est) *distare, hunc autem duobus lacubus terminari, quorum alter, versus occidentem situs,* Sangin, *alter versus orientem* Sankin, *vterque cognomento* Dalai, *i. e. mare, nuncupetur.* Addidit interpres Sankin Dalai *significare* mare ventosum: Sangin *autem alterum lacum dici a quodam sacrario, in eius vicinia sito. Sangin* Messerschmidius scripsit pro *Sanschin*, gallicam literarum pronunciationem imitando, vt *sch leue* siue ж Russorum exprimeret. Est autem illud nomen apud Mongolenses et Calmuccos hominibus tribui solitum. Fieri ergo potuit, vt sacrificulus aliquis, *Sanschin* dictus, alteras istas aedes, quas lacui Sanschin propiores diu dixi, ſibi exſtruxerit, *Sanſchin kit* ab ipſo vocatas, vnde et lacui illud nomen inditum. Quod vero eius et fontium Irtenſium mentionem fecerit *Meſſerſchmidius*, cum de ſeptem palatiis quaereret *Bayerus*, id ego ita capio. *Meſſerſchmidius* primo loco ſpecum idololatricam Ieniſeenſem narrauit, ex qua ſcripta ab ipſo allata deſumpta erant. Huius occaſione etiam memorauit aedes ad Teſſum fluuium prope lacum Sanſchin ſitas, ſimilemque ſcriptorum farraginem continentes, et ab illis aliquot dierum itinere Irtin fluuium oriri dixit, ad quem ſeptem palatia extent. *Bayerus* autem, cum Geographiam iſtarum regionum non ſatis perſpectam haberet, alia ex narratis oblitus, alia non recte intellexiſſe videtur, ſicque inueterata perſuaſione deceptus, ac ſi ſeptem palatia vnicus locus eſſent, in quibus ſcripta Tangutica reperta fuerint, omnia quantumuis longe diſſita alia eiusdem farinae loca iis aſſimilauit.

Plura geographiam iſtarum regionum illuſtrantia in medium proferre poſſem: Sed paucis me expediam. Tabula *Strahlenbergiana* Teſſum fluuium, quem Kteſſ, dicit ex lacu Sengin in lacum Sankin verſus Euroauſtrum deriuat, id quod ex narratione, quam Meſſerſchmidio factam ſupra diximus, quamque Strahlenbergius praeſens audiuit, ortum eſt. In eo autem hic ſcriptor ſibi non ſatis conſtat, quod de lacu Sengin dicit, illum mare ventoſum, et Chinchintalai a *M. Paulo Veneto* vocari. Meſſerſchmidius enim, vt ante vidimus, interpretationem maris ventoſi de lacu Sankin, non Sangin, ſibi datum eſſe tradit: et *Veneto* (1) Chinchintalas, non Chinchintalai, nomen regionis eſt, non lacus, quod mihi *Chinchin-talà* legen-

 dum

(1) L. I. C. XLVII.

dum videtur. *Talà* enim, quod Strahlenbergius cum *dá-lai* confudit, et ideo per *talai* expressit, in lingua mongolica campum significat siue planitiem, qualem hic locorum cmeпь dicere solemus. Tabulae *Haldianae* Tessum fluuium ex Borapeliote versus Noto Zephyrum non quidem ex lacu, sed quasi ex scaturigine, in lacum quendam *Upsa* dictum decurrentem sistunt. Alium autem lacum *Sanguin Talguin-nor* ex oriente ponunt, qui ex Tesso nullas aquas accipiat. Et has fere *Hasiana* tabula imitatur, ex Strahlenbergiana tantum *Chinchintalai* nomen assumens, lacui Sankin additum. Haec cum nostris conciliaturus concedo, lacum *Sanschin*, quod Mongolicum illius nomen est, a Saianensibus Tataris prope habitantibus *Upsa* dici. Concedo etiam *Sankin* et *Sanguin* idem lacus nomen esse, qui cum Tesso fluuio nihil commune habeat, sicque Messerschmidio, acsi Tessus ab illo recipiatur, falso relatum esse. Sed volo etiam, vt mihi concedatur, alium lacum esse, cui Tessus ex lacu Sanschin vel Upsa profluens suas vndas inferat. Hoc enim relationes Crasnoiarensium, qui ista loca saepe frequentarunt, omnino postulant.

De aliis aedificiis antiquis in Sibiria extantibus, de quibus incertum est, an eidem vsui inseruierint, hoc loco agere supersederem, nisi affinitas argumenti id exigeret, quod alibi forsitan non e re foret tractare. Sunt nimirum aedificiorum rudera in terris Baschkirorum ad Togusacum et Uuelcam fluuios in Uium, qui Tobolem intrat, fluentes, quae a Russis communiter Чудскїе палатки appellantur, quasi *Tschudorum palatiola* dicas. Tschudi autem Russis omnes veteris aeui cuiusuis regionis coloni dicuntur, euntur, cuius demum illi gentis fuerint. Illorum ea, quae ad Uuelcam sunt, ego ipse vidi. Cum enim Anno cIↄIↄCCXLI Baschkirorum regiones peragrarem, et nomen aedificii audirem tam magnificum, etiamsi locus plus quam nonaginta leucis a via distaret, et a Casaccorum incursionibus non minus periculosus esset, non potui tamen me continere, quin eo proficiscerer. Sumto itaque ex arce Tschilaebiensi sufficienti praesidio per arcem Itkulensem, quae vltima in ea regione Russorum colonia est, ad Uuelcam perueni, et obseruaui rudera ad sinistram fluuii ripam in planitie elatiore sita, quindecim leucis ob ostio eius dissita. Aedificium vnius conclauis fuit, quadrangulare, ex latere cocto structum, parietibus aequali mensura praeditis, qui tres et dimidiam orgyiam longitudine vix excederent, crassitie dimidiam vlnam aequarent, altitudine, quod nulla amplius tecti vestigia supersint, et superne lateres hinc inde multi excidisse videantur, incerta quidem, quae tamen in aliquibus locis adhuc tres orgyias efficit. Anterior facies, austro opposita, ornamentis quibusdam architectonicis gaudet, columnas siue parastatas et proiecturas aut loricas quasi referentibus. Eadem autem media sui parte, vbi ostium fuit, a fastigio corruit, qualis quidem apertura etiam in pariete septentrionali conspicitur, minor autem, quae spectatores inducere posset, vt crederent, aliud ibi ostium e regione prioris fuisse. Sed tum indoles aedificii, quod, si fanum fuit, pluribus ostiis instructum fuisse nequit, tum etiam concameratio quaedam subterranea fornicata, quae extra ad parietem illum extat, et solum in eo loco altius reddit, quam vt ostio conuenire possit, talem coniecturam refutant. Lateres, vt vt cocti, et ſatis rubri, manibus tamen omnes facile franguntur. Plerique formam praeferunt quadratam, nonnulli oblongam, vt noſtri ſolent, noſtris autem tenuiores ſunt, nec inter ſe craſſitie aequales. Sic et lutum, quo cohaerent, non bonae indolis fuiſſe videtur. Calcis autem indicia prorſus nulla. In pariete orientali, vbi lateres aliquot exciderunt, trabs ex pinu conſpicitur, eidem fini interpoſita, quem in Calbaſſunicis et ſeptem palatiorum ruderibus obſeruaui. Tectorium, ſi quod adfuit, temporis iniuria omne periit. Feneſtrae nullae adparent. Forſitan quod ſupra oſtium in pariete auſtrali, tum etiam in pariete ſeptentrionali, vbi apertura eſt, vna aut altera fuerunt, de quibus autem non certo conſtat. Forſitan etiam lumen per apertam ianuam aut per tectum intrauit. Concameratio fornicata, de qua dixi, quod extra ad parietem ſeptentrionalem extet, maximam partem collapſa eſt, et tum ſuis tum aedificii ruderibus plena. Hinc quam profunda fuerit, diiudicare haud potui. Amplitudinem autem diametralem, rotunda enim eſt, duarum orgyiarum animaduerti. Alia ipſi ex oriente ad latus eſt, contigua, oblonga, vlnam longitudine, latitudine autem et altitudine ſemi vlnam aequans. Cui vſui hae concamerationes fuerint, certe diuinare nequeo. Si ſepulchra credes, rem concipies, genio gentis aduerſam. Fanum enim profanatum dicerent, ad quod mortuus tam propinque ſepeliretur. Si caueam ſtatues, cui vſui illa fuit? vt vbi in illam aditus? huius enim veſtigia nulla obſeruaui. Ex maiori concameratione inter laterum ſtruem duae betulae procreſcunt ſatis procerae, et craſſitie brachium robuſti hominis aequantes, quae indicio ſunt, fornicem non hodie aut

nudius

modius tertius corruisse. Baschkiri, vicinarum regionum incolae, quorum plures ego saepius interrogaui, annon ipsis de historia huius aedificii aliquid ex narratione maiorum constet? nihil mihi dicere potuerunt. Sua lingua *Keschenä* vocant, tum haec, tum alia eiusdem generis rudera, quae vox nihil amplius, quam quod Russica палата, inuoluit. Bucharorum enim habitacula, quae partim ex latere, tum cocto, tum incocto, partim autem ex mero luto constructa sunt, eadem adpellatione vocitant. Aedificii ad Tugusacum extantis eadem omnino ratio perhibetur. Talia plura in Casaccorum confiniis sita referuntur, inprimis magnificum vnum, variis coloribus pictum, ad Turuchaium fluuium, prope eius ostium, quo in lacum Aksagal se exonerat. Sed quid plura memoro? Quae adhuc dixi, satis superque sufficiunt, fanorum in quibus Tangutica scripta reperta sunt, rationem commonstrandi. Reliquum est, vt dicam, quid in interpretando folio Tangutico Furmontiano in Sibiria praestiterim.

Cum anno cIↄIↄccxxxv Selengiae versarer, operae pretium mihi visum est, castra *Lobsani*, Principis Mongolici, tribus *Zongol*, visitare, qui tunc quidem octoginta circiter leucas ab vrbe ista ad Tschicoium fluuium sub potestate Russica degebat, tum vt mores gentis obseruarem, tum quoque, quod audiuissem, sacrificulum quendam non infimae conditionis, ex Tangutia oriundum, apud Principem commorari, cuius opera de cultu Tangutico et Mongolico vberiorem mihi notitiam comparare, nec non Tangutici folii fide dignam interpretationem obtinere sperabam. Non infructuosum sane iter fuit. Sacrificulus, cui cum Principe aequalis a suis honor exhibebatur, ex eo ordine erat,

erat, qui Mongolensibus et Calmuccis *Gelun* vocantur. *Zordschi* ipsi nomen erat, homo ad suae gentis morem non indoctus, affabilis, et si quis alius officiosus. Talem deprehendens, studui, vt, quod donis fieri solet, arctiorem cum ipso amicitiam contraherem, quam ille tam in istis castris, quam aliquot diebus post, cum Selengiae me inuiseret, et postea etiam per literas ingenue coluit. Omnino multa ab hoc viro profeci, in iis potissimum, quae de ratione cultus Tangutici scire cupiebam, nec prorsus in cassum mihi spes fuit, quod interpretationem folii Tangutici spectaret. Prima cura fuit, vt versionem Furmontianam amico explicarem, ne, si forte illa satis congrua ipsi visa fuerit, superfluos labores exposcerem. Ille autem maximo stupore meo hanc ne hilum quidem cum Tangutico textu conuenire asseuerauit. Rogaui deinde sacrificulum, vt ipse operam suam interpretationi conferre non grauaretur, quod cum libenter se facturum promisisset, Selengiae in museo meo laborem voluit perficere. Vix autem incepit versionem, cum animaduertit, ad integrum folium absoluendum plus temporis requiri, quam quod humanissimus vir mihi destinasset. Ideo post aliquot lineas substitit, reliqua domi se interpretaturum dicens. Ego autem hoc concedere non potui. Instabat enim tempus, quo iter persequendum erat: nec persuadere volui, vt me praesente pergeret, ne alia perquirendi facultate me fraudarem; quin visum fuit, vel ex tali specimine totam causam satis superque cognitam fore. Rogaui tantum, vt suam quoque textus Tangutici pronunciationem adscriberet, quod fecit. Haec lingua et literis Mongolicis scribebantur. Defuit eo tempore interpres,

qui

qui Mongolica in aliam mihi notam linguam transferret. Nam etiamsi plures essent, qui Mongolicam linguam aeque ac Russicam satis commode loquerentur, et in sermonibus miscendis operam suam non inutiliter praestarent, nemo tamen sublimibus, quod dicebant, locutionibus sacrificuli, quibus in scriptione vsus esset, transferendis, parem se pronunciauit. Post aliquot menses, quibus Nertschiam totamque regionem Argunensem et extremos Sinensium limites visitauimus, cum Vdinii aliquam moram facere cogeremur, impetraui a Praefecto Selengiensi virum ex Russis, qui ipse literas Mongolicas intelligeret, aliumque ex sacrificulorum familia, gente Mongolensem, qui, quae difficiliores essent locutiones, orali circumlocutione clarius explanaret. Sed nec horum opera multum profeci. Obscuritatis versionem Mongolicam arguebant, quae inde orta sit, quod sacrificulus Tangutanus linguam Mongolicam non satis calleret. Id tamen intellexi, initium eius his verbis constare: *Qui intellectu (conscientia, corde,) suo omnia comprehendit (intelligit)* etc. Haec iam nihil certe cum interpretatione Furmontiana commune habent, id quod etiam de subsequentibus, cum versionem Furmontianam illis explicarem, et quaererem, annon aliquod verbum occurrat, quod ei versioni respondeat, interpretes testati sunt. Si forte aliquis, quod tamen non facile futurum spero, de veritate horum dubitauerit, illi scripta testimonia afferre possum, quae fidei faciendae caussa, ne aliquid finxisse videar, ab istis hominibus mihi dari curaui. Praeterea testem inuoco Cl. Gmelinum, qui omnibus meis studiis interfuit. Testimonium etiam praebeat ipsa a sacrificulo data versio Mongolica, quam vna cum

 textu

textu Tangutico, vt aeri incidatur, addo. In iisdem tabulis textus Tangutici pronunciationem adſcripſi, vnam a ſacrificulo Mongolicis literis expreſſam, alteram ſecundum Mongolicas latinis literis redditam, vt Germani eas efferre ſolent. Et hanc vltimam quidem in gratiam illorum, qui literis Tanguticis pernoſcendis operam dare cupiunt, textui Tangutico proxime ſubieci. Gauiſus ſum, eam cum regulis olim a me concinnatis admodum conuenire, quas, ſi operae pretium videbitur, alio loco dabo. Verſionem autem Mongolicam ſtudio ſeruaui, ſpe fretus, fore, vt interpretem aliquando inuenirem, literis Mongolicis ſatis innutritum, qui vel coniectando eius ſenſum aſſequi poſſit. Nec feſellit euentus. Illuſtri Goldbachio hanc gratiam debemus, quod, quo eſt in quaeuis literarum ſtudia incredibili amore et induſtria, etiamſi Muſis ereptus videatur, ad magis ardua negotia admotus, non defuerit meis precibus, quin per interpretes linguarum Mongolicae et Calmuccicae, qui Petropoli in collegio Imperiali res exteras curante aluntur, periculum fieri curauerit, annon verſionis Mongolicae aliquem ſenſum dare poſſint. Ecce hic egregium ſe praeſtitit *Petrus* ille *Smirnouius*, linguae Calmuccicae peritiſſimus interpres, quem iam alias laudaui. (1) Hic adhibito in opem Mongolenſe quodam, homine ab infantia inter ſacrificulos ſuae gentis educato, et omne dictionis genus, quod non niſi in ſacris eorum libris occurrit, egregie callente, concinnauit verſionis Mongolicae verſionem Ruſſicam, quod ad indolem ſacri ſtili, qui

Tab. VIII. et IX.

(1) in collectione notitiarum ad hiſtoriam Ruſſicam ſpectantium, quam olim lingua germ. edidi. P. III, p. 275.

qui multa lectorum diuinationi relinquit, satis luculentam. Eam ego hic sub finem latinam faciam, et addam versionis Mongolicae distinctam pronunciationem, nostris literis expressam, quibus omne negotium expeditum, et liti promouendae obicem positum esse mihi blandior.

TEXTVS MONGOLICI PRONVNTIATIO
CVM INTERPRETATIONE VERBALI.

Tschin sedkilun subsara bjukui bagadchaktschi
Firma conscientia mediante omnia parui pendendo

urida amitan nogud-dur tusa eguiuskekui eze.
in principio viuenti cuicunque auxilium oritur inde;

edeger bjukuni dagudagun, uiledkui eze anu uliu
quibus omnibus consummatis, futurum quid, nemini

medeku bolai. Nom nogud anu nomun tschinar.
notum est. Religio tota namque religionis explicatio.

Tuschimed anu tereber teguni uliu medekui.
Magnates autem intellectu (suo) ea non comprehendunt.

Nom nogud anu chotola nomun tschinar anu.
Religio tota videlicet omnia (continet) religionis explicatione.

Chogosun tschinar ber umeger nomlaksan, nasuda
Incorporeorum explicatio verè praedicata est, semper

tarni sun oron eze tegun dur anu. Aschida bjukui ii
ab occulatione id dependet. Semper omnes id

uiledkui bolai.
inuenire possunt.

TESTIMONIVM INTERPRETIS

Urida Töböd kelenni bitschik ii Mongolun
Ante ex Tibetica lingua scriptum hoc in Mongolicam

keleber ortschigulukſan anu Selengein
linguam vertit (apud) Selengienſem

chariatu taischa Lobſangi Gelun
ſubditum principem Lobſanum (commorans) Gelun

Zordschi Lama ortschigulba.
Zordſchi Lama vertit.

Bitschikſen anu Datschin Bandi bitschidei.
Scripſit Datſchin Bandi ſcripſit.

DE TRANSITV LVNAE
PER HYADES
d. $\frac{22.\ Decembr.}{2.\ Ianuar.}$ an. $173\frac{7}{8}$.
PETROPOLI OBSERVATO
ET METHODO DETERMINANDI LOCVM STELLAE AD LVNAM, QVANDO HAEC ISTAM TRANSIT.

G. Heinsius.

§ 1.

Elegantiam et vsum obſeruationis tranſitus huius lunae per Hyades occultationum frequentia commendat. Quatuor ſcilicet ſtellae interuallo aliquot horarum diſcum lunarem ſubire viſae ſunt. Vt autem obſeruatio magis completa ſit, plura Palilicii ad lunam loca determinaui. Obſeruationes et deductiones ſequenti modo in ordinem redactas praemitto, methodos obſeruandi et quaeſita deducendi poſtea explicaturus.

Ordo obſeruat.	*Tempus horol.*	*Tempus verum à meridie d. 2. Ian. ſt. n. computatum.*	*Obſeruata et deducta.*
	hor. min. ſec.	*hor. min. ſec.*	Finito maxima ex parte crepuſculo veſpertino, luna iam fixam, quae prima Hyadum vocatur, tranſiit. Nec ſtella quam per *d* in fig. 1. deſigno, in conſpectum venit, niſi cum notabili interuallo à

 lim-

limbo lunae lucido iam distaret. Accessit deinceps luna ad stellam a *Bayero* per θ notatam, quae duplex est, Borealior ex his duabus stellis a *Flamstaedio* in Catalogo Brittannico per 1 ad θ, australior per 2 ad θ, notae *Bayeri* conformiter distinguitur, et vtraque 5tae magnitudinis aestimatur.

Phasis lunae erat gibbosa crescens ex nomenclatura *Hevelii*, vnde propter nimium eius lumen longioribus tubis opus erat pro obseruandis harum stellarum a luna occultationibus. Cl. *de l'Isle* tubo Newtoniano, ego tubo 15. ped. vsi sumus. Stellae ad limbum lunae obscurum disparuerunt, ad lucidum emerserunt.

	h. ′ ″	
1.	7. 24. 52	Tegitur stella 1 ad θ. ex obseruatione. Situs huius stellae mox occultandae respectu macularum lunarium ita comparatus erat, vt linea a stella ad centrum Copernici ducta transiret inter Keplerum et Marium

			rium, magis tamen ad Keplerum, quam Marium accederet.
		h. ′ ″	
2		7.28. 8	Occultatur ſtella 2 ad θ. ex obſeruatione.
	h. ′ ″		
3	2.49.11	7.56.48	Ex obſeruatione deprehenſa eſt differentia aſcenſionum rectarum centri lunae et Palilicii 7′ 27″ in tempore primi mobilis; et differentia declinationum eorundem 35′ 50″ circuli maximi.
4		8. 2. 4	Coniunctio viſa ſtellae 2 ad θ cum centro lunae. Diſtantia centrorum minima 6′ 43″ circuli maximi. Stella a centro lunae auſtrum verſus abeſt. Ex calculo
5		8. 2.26	Coniunctio viſa ſtellae 1 ad θ cum centro lunae. Diſtantia centrorum minima = 1′ 6″ circuli maximi. Stella a centro lunae auſtrum verſus diſtat, ex calculo.
6		8.36. 0	Emergit 2 ad θ ex calculo.
7		8.40. 0	Emergit 1 ad θ ex calculo. Emerſiones vtriusque ſtellae ipſas non obſeruauimus, licet obtutu fixo per tubos memoratos ad iſtas attenderemus.

Prop-

Propter lumen enim lunae admodum forte stellae ad limbum lucidum emergentes non nisi interuallo aliquo iam ab isto limbo distantes in conspectum venerunt. Hoc modo quidem stellam 2 ad θ non multum a limbo lunae distantem primo vidimus; sed tempus primae huius apparitionis non notauimus ad Emersionem ipsius 1 ad θ attenti, cuius obseruationem sperabamus certiorem. Spes non successit. Primo quidem apparuit 1 ad θ, $8^h\ 41'\ 15''$ temp. ver. in tubo 15. ped. ast tunc iam diametro Copernici a limbo lunae lucido aberat. Cl. *de l'Isle* eandem quoque stellam non nisi iam aliquo interuallo a limbo lunae lucido distantem per Tubum Newtonianum conspexit, ex quo interuallo aestimauit emersionem eius circiter factam fuisse $8^h\ 40'$. Id quod optime cum calculo conuenit.

8 | $8^h.\ 46'.\ 16''$ | Tegitur stella a luna, quam in

	h. ′ ″	h. ′ ″	
			in fig. 1 *c* voco et ſextae magnitudinis cenſeo. Circa inſtantem occultationem ſtella in linea recta erat cum centro Platonis et macula aliqua anonyma, quae media eſt inter montem Baroniſum et Atlantem minorem iuxta nomenclaturam *Heuelii*. Ex obſeruatione.
9	4.13.15	9.20.23	Circa culminationem lunae ex huius et Palilicii tranſitu per meridianum a Cl. *de l'Isle* obſeruato determinata, eſt differentia Aſcenſionum rectarum centri lunae et Palilicii $5'\ 15\frac{1}{3}''$ in temp. 1mi mobilis; et differentia declinationum eorundem $27'\ 35''$ circuli maximi.
10		9.21.23	Coniunctio viſa centri lunae et ſtellae *c*. Diſtantia centrorum minima $= 6'.\ 2''$ circuli maximi, qua ſtella borealior erat centro lunae. Ex calculo.
11		9.56.30	Emergit ſtella *c*. Ex calculo obſeruationem huius emerſionis de induſtria omiſimus, certi, iſtam propter exiguam

			Differentiam.			
			Ascensionum rectarum in temp. 1mi mobilis		*Declinationum in partibus circuli maximi.*	
	h. ′ ″	h. ′ ″	′	″	′	″
21	8. 4. 34	13. 10. 21	1.	$1\frac{1}{4}$.	11.	11.
22	8. 10. 40	13. 16. 25	1.	$10\frac{1}{4}$.	10.	46.

§. 2. Monenda quaedam sunt de hac recensione. In ista rite distinxi momenta quae immediate ex obseruatione habentur, ab iis, quae ex calculo deducta sunt. Cl. *de Isle* et ego seiuncti phaenomena 1, 2, 8, 18, 20, obseruauimus et tempus iuxta diuersa horologia notauimus. Facta horologiorum comparatio consensum obseruationum 1, 2, 8, 18, intra secundum temporis fere monstrauit. Discrepantia tamen aliqua prodiit in obseruatione 20, vt monui; horologiorum licet mutua relatione non mutata, vt ex comparatione istorum innotuit. Tempus horologiorum ad tempus verum reduxi ope obseruatarum culminationum Palilicii d. 2. et 3. Ianuar. et culminationum Solis d. 3. et 4. Ianuar: Hanc vero reductionem ad quatuor horologia, praecipue in obseru. 1, 2, 8, 18, 20, examinaui et exoptatissimum consensum deprehendi.

§. 3. Ad obseruanda lunae loca ad Palilicium quadrantem portatilem radii 2. ped. adhibui, telescopio instructum, in cuius foco quatuor fila HR, VT, Oo, Qq ad angulos semirectos in centro communi C. adornata sunt. Tubus sic dispositus fuit, vt filum HR proxime situm horizontalem, filum VT verticalem nancisceretur; positio enim exacta horizontalis vel verticalis filorum non requiritur. His praeparatis ad tempus horologii notaui appulsus tum limbi lunae luminosi tum Palilicii ad tria fila,

qua-

quacumque ista fuerint. Obseruationes habitae sunt sequentes, quas iisdem numeris in fronte distinxi, quibus obseruationes respondentium locorum lunae ad Palilicium in recensione §. 1. notantur.

Obseru. 3.

			h.	′	″
A	ad	$\vert$	2.	49.	11.
I	ad	—		53.	31½.
✱	ad	—		55.	32.
✱	ad	\		57.	48.
✱	ad	$\vert$		58.	23.

Obseru. 12.

			h.	′	″
S	ad	—	5.	26.	39.
A	ad	\		27.	49.
A	ad	$\vert$		29.	7½.
✱	ad	\		30.	47½.
✱	ad	$\vert$		33.	10.
✱	ad	/		34.	45.

Obseru. 13.

			h.	′	″
A	ad	/	5.	37.	25.
A	ad	\		37.	47½.
A	ad	$\vert$		38.	1.
✱	ad	\		40.	32½.
✱	ad	$\vert$		41.	48.
✱	ad	/		42.	36.

Obseru. 14.

			h.	′	″
A	ad	\	5.	44.	47.
S	ad	—		45.	15½.
A	ad	$\vert$		46.	28¼.
✱	ad	\		47.	22.
✱	ad	$\vert$		50.	1.
✱	ad	/		51.	37.

Obseru. 15.

			h.	′	″
A	ad	\	6.	2.	24.
S	ad	—		2.	34.
A	ad	$\vert$		4.	3½.
✱	ad	\		4.	38½
✱	ad	$\vert$		7.	7.
✱	ad	/		8.	27½.

Obseru. 16.

			h.	′	″
S	ad	—	6.	20.	32.
A	ad	\		21.	22.
A	ad	$\vert$		22.	41.
✱	ad	\		23.	12.
✱	ad	$\vert$		25.	13.
✱	ad	/		26.	12½.

Obseru. 17.

			h.	′	″
S	ad	—	6.	28.	38.
*	ad	\		29.	35.
A	ad	|		29.	46.
*	ad	|		32.	6.
*	ad	/		33.	14.

Obseru. 21.

			h.	′	″
S	ad	—	8.	4.	34.
*	ad	|		5.	0.
A	ad	|		5.	17.
*	ad	/		5.	44.
*	ad	—		7.	4.

Obseru. 22.

			h.	′	″
S	ad	—	8	10.	40.
*	ad	|		11.	55.
*	ad	/		12.	16.
A	ad	|		12.	23.
*	ad	—		12.	53.

Designat hic *A* limbum lunae praecedentem; I inferiorem; *S* superiorem, iuxta apparentiam scilicet in tubo astronomico; * Palilicium. Lineolae adiectae situ suo distinguunt fila, ad quae appulsus facti sunt. Sic – denotat filum HR, | filum VT, / filum Oo \ filum Qq. In obseruatione 3. luna extitit in orientali coeli quadrante, vnde in tubo apparenter descendebat a dextra ad sinistram. In reliquis obseruationibus luna in quandrante coeli occidentali morabatur et apparenter in tubo ascendebat à dextra ad sinistram.

§. 6. Motum horologii, juxta quod in obseruationibus hisce tempus notaui, ex comparatione cum reliquis horologiis admodum uniformem deprehendi. Ex culminationibus autem Palilicii et Solis deduxi, vnam horam temporis primi mobilis aequalem esse 1^h $0'$ $10''$ horologii;

rologii; horam vero temporis veri aequiualere 1^h $0'$ $21''$ horologii. Ex quibus aequationibus tempus quod vis horologii datum in tempus primi mobilis vel tempus verum et vice versa conuertere licet.

§. 5. Praeter istas horologii conditiones ad sequentem tractationem requiritur, vt cognita sit relatio temporis eiusdem horologii ad motus tum stellae tum lunae, quibus utraque reticulum tubi traiecit; Motus Palilicii idem est cum motu primi mobilis ab oriente in occidentem factus in diurno $15°$ $57'$ ab aequatore distante, cuius proinde diurni 15. gradus absoluit Palilicium in vna hora temporis primi mobilis seu in 1^h $0'$ $10''$ horologii. §. 4. Vnde velocitas stellae in hoc diurno patet.

§. 6. Motus lunae per reticulum compositus est. Luna motu primi mobilis defertur ab oriente versus occidentem. Eadem simul mouetur in orbita sua ab occidente versus orientem et continuo declinationem mutat. Compositus ergo hic lunae motus decomponi debet, vt singuli motus inde resultantes distincte cognosci possint. Abstraham primo a mutatione declinationis lunae et motum solummodo referam ad diurnum aliquem constantem, mutationis istius postea ubi opus est, rationem habiturus. Ponatur diurni huius, quem luna è superficie terra spectata percurrere visa est, distantia ab aequatore $15°$ $40'$ hic enim diurnus medius est inter eos, quos luna apparenter percurrit eo tempore, quo positiones lunae ad Palilicium obseruatae fuerunt. Facta hac abstractione solus lunae motus in hoc diurno considerandus restat. Velocitas, qua luna motum hunc in suo diurno peragit, resultat ex velocitate primi mobilis, qua luna in eodem diurno

diurno ab oriente in occidentem propter reuolutionem terae diurnam mouèri videtur, et ex velocitate, quae ex motu lunae proprio in orbita ab occidente in orientem directo deriuatur, et ad eundem diurnum refertur, ſic vt propter hos motus in plagas contrarias factos, velocitas lunae in ſuo diurno aequalis ſit differentiae utriusque velocitatis iam memoratae. Velocitatem hanc lunae in ſuo diurno ex vtraque iſta reſultantem ſimpliciter *velocitatem lunae* in ſequentibus vocabo.

§. 7. Cum motum lunae conſideremus in eodem diurno §. 6. determinabitur lunae velocitas, ex interuallo temporis, quo luna integrum ſuum diurnum, velocitate iſta abſoluit. Ex culminationibus lunae d. 2. et 3. Ianuar. à Cl. de *l' Isle* obſeruatis interuallum *temporis* quo luna integrum diurnum deſcripſit velocitate ſua, inventum eſt 24^h $55'$ $48''$ horologii. Luna ergo in 1^h $2'$ $19\frac{1}{2}''$ vel rotunde in 1^h $2'$ $20''$ horologii 15. gradus ſui diurni peragràuit et velocitas eius inde patet. Celeritatem autem ſtellae conſtantem eſſe, motumque etiam lunae toto obſeruationis noſtrae tempore uniformem ſupponi poſſe conſtat.

§. 8. Diurnus Palilicii diſtat ab aequatore $15°$ $57'$ §. 5. lunae $15°$ $40'$ §. 6. Hi diurni parum à ſe inuicem diſcrepant, ſic vt 15. gradus diurni Palilicii magnitudine ſua vix ſenſibiliter differant à 15 gradibus diurni lunae; quae differentia eo magis minuitur, quo pauciores gradus vel huius ſubdiuiſiones ſumuntur pro ſpatio à ſtella vel luna in diurno percurſo, vt in hac tractatione fieri ſolet. Idem ratiocinium valet de quouis alio diurno, in quo morata eſt luna durante eius tranſitu per Hyades,

Hyades, ſiquidem declinationis lunae mutatio interea facta admodum exigua eſt. Durante igitur tranſitu lunae per Hyades absque errore ſenſibili motum lunae et Palilicii in diurnis aequalis magnitudinis factum conſiderare licet, hoc eſt, gradus diurni cuiusuis lunae et diurni Palilicii aequales cenſeri poſſint cum gradibus alicuius diurni communis, cuius diſtantiam ab aequatore ob rationes §. 6. allatas $15° 40'$ pono; cuius proinde diurni 15. gradus abſoluuntur à ſtella in $1^h 0' 10''$, à luna in $1^h 2' 20''$ temp. horologii, §. 6. 7. Patet inde ratio velocitatum lunae et ſtellae in iſto diurno, quae propter velocitatem vtramque conſtantem reciproca eſt temporum, quibus idem ſpatium 15. graduum diurni tum à ſtella tum à luna percurritur. Erit ſcilicet velocitas lunae ad velocitatem ſtellae $= 1^h 0' 10'' : 1^h 2' 20'' = 3610'' : 3740'' = 361 : 374$.

§. 9 Manifeſta inde eſt Solutio: Dato tempore, quo ſtella datum ſpatium in ſuo diurno abſoluit velocitate ſua, inuenire tempus, quo ſtella idem ſpatium traiecisſet, ſi velocitate lunae mota fuiſſet. Analogia eſt 361, 374, ita datum tempus ad quaeſitum.

§. 10. Gradibus 15. diurni reſpondent in motu ſtellae $1^h 0' 10''$ in motu lunae $1^h 2' 20''$ temporis horologii; in tempore autem primi mobilis $1^h 0' 0''$, Horum ergo temporum mutua relatio patet et facile tempus horologii in motu tum ſtellae tum lunae reducitur ad tempus aequiualens primi mobilis, verbi cauſa, ſi datum tempus motum lunae reſpiciens conuerti debeat, in tempus primi mobilis, analogia ſit, $1^h 2' 20'' : 1^h 0' 0''$ ita datum tempus ad quaeſitum primi mobilis.

§ 11. Diurnus communis, ad cuius portiones tanquam ſpatia percurſa motum lunae et ſtellae §. 8. retuli, diſtat ab aequatore 15° 40′ Huius ergo diurni 15. gradus aequiualent 14° 26′ 34″ circuli maximi, vi proportionis, qua eſt datus arcus diurni dati ad arcum circuli maximi aequiualentem vt ſinus totus ad coſinum declinationis iſtius diurni. Data ergo motus conditione, datoque tempore, quo ſpatium aliquod deſcriptum eſt, hoc ſpatium in partibus circuli maximi definiri poteſt. Scilicet ſpatium 14° 26′ 34″ circuli maximi abſoluit luna ſua velocitate in 1ʰ 2′ 20″ et Palilicium ſua celeritate in 1ʰ 0′ 10″ horologii. Sic ſi v. c. detur tempus, quo luna ſpatium aliquod percurrit ſeu per quod ſpatium aliquod exprimitur, ex analogia 1ʰ 2′ 20″ : 14° 26′ 34″ ita datum tempus ad quartum, invenitur *ſpatium* iſtud dato tempori reſpondens in partibus circuli maximi. Vice verſa ſi detur ſpatium per partes circuli maximi expreſſum, definiri poteſt tempus horologii, quod ſpatio iſto in motu vel lunae vel ſtellae reſpondet et partibus circuli maximi datis aequiualet.

§. 12. Comparationem temporis horologii cum mutatione declinationis lunae reſpondente hoc modo deduco. Ex altitudinibus lunae meridianis d. 2. et 3. Ianuar. à Cl. *de l'Isle* obſeruatis per ſextantem muralem, prodit differentia declinationum centri lunae, 1° 53′ 48″ adhibitis, quae requirebantur correctionibus ſic tamen vt ad differentiam parallaxeos in vtraque lunae altitudine non reſpexerim, cum de apparenti declinationis mutatione agatur. Quoniam ergo tempus horologii ab vna lunae culminatione vsque ad alterum praeterlapſum, ſit 24ʰ 55′

48″

48.'' §. 7. patet relatio huius temporis ad declinationis mutationem interea factam 1.° 53.' 48.'' Inuenitur inde variatio declinationis vni horae horologii respondens 4.' 34.'' circuli maximi; vt adeo ad datum quoduis tempus horologii declinationis mutatio congrua determinari possit.

§. 13. Quae hactenus praemisi, elementa suppeditant ad determinationem positionis lunae ad Palilicium necessaria. Ipsa iam huius determinationis oeconomia exponi debet. Dantur nempe momenta appulsuum tum limbi lunae tum stellae ad tria fila reticuli, et ex his definiri debent, positio mutua lunae, stellae circulorum coelestium et diameter lunae. Duplici modo haec peragenda suscipio. Dispiciam primo, quaenam ex supposita lunae et stellae distantia, suppositoque motu vtriusque per reticulum, sequantur conditiones appulsuum lunae et stellae ad fila reticuli, vt inde intelligatur, qua ratione ex conditionibus appulsuum per obseruationes datis ad conditiones positionis mutuae lunae, stellae, circulorum coelestium et diametri lunaris concludi possit; quam methodum concludendi analysi priori statim subiungam. Deinde processum determinationis loci lunae ad stellam ex ordine exponam et exemplo obseruationis 12. illustrabo.

§. 14. Ductae sint lineae HR, VT, ad se inuicem normales. Anguli VCR, VCH bisecentur per rectas OC*o*, QC*q*, et systema harum linearum repraesentabit reticulum tubi §. 3. Designet HR filum horizontale, VT verticale; et figura accommodata sit ad apparentiam in tubo astronomico, sic vt reuera infra sit Septentrio, supra meridies, ad dextram oriens; ad sinistram occidens. Iuxta hanc apparentiam appulsus in obseruationibus sunt Fig. 3.

 notati,

notati, nec ulla inde confusio metuenda est, cum invertendo chartam, cui inscripta est figura, statim innotescat situs eius erectus.

§. 15. Vi dictae apparentiae luna et stella per reticulum semper mouentur a dextra ad sinistram, et quidem descendendo, si in orientali; ascendendo, si in occidentali coeli plaga obseruatio peragitur. Eligam casum posteriorem et vt determinate loqui possim, limbum lunae successiue ad fila CR. Cq, CT, stellam vero ad Cq, CT, Co, appulisse supponam. In reliquis casibus habita ratione filorum, ad quae appulsus facti sunt, simili modo proceditur. Tangat iam lunae limbus apparenter superior filum HR in R et centrum lunae sit in L stella autem eodem momento in S, sic vt positio mutua centri lunae, stellae et filorum reticuli eadem ponatur, quae tenera fuit in obseruatione aliqua proposita ad momentum temporis appulsus limbi superioris lunae ad HR. Ponatur porro LM semita, quam centrum lunae trajiciendo reticulum postea descripsit; SAD vero sit diurnus, quem stella peragrauit, dum ad fila Cq, CT, Co, successiue appulit. Detur denique conditio motus tum lunae tum stellae, sic vt spatio cuiuis dato tempus, quo istud vel a stella percurritur, assignari possit.

§. 16. His positis cum stella sit in S, quando limbus lunae superior in R appellit ad HR; in punctis vero A, B, D, quando fila Cq, CT, Co, trajicit; dabuntur spatia SA, AB, Bd, quae stella descripsit interuallis temporum inter appulsus limbi lunaris ad HR et stellae ad fila Cq, CT, Co, quae proinde interualla temporum ipsa ex motus stellae conditione dabuntur,

eaque,

eaque, propter velocitatem ſtellae conſtantem, eandem habebunt rationem cum ſpatiis, quae illis temporibus deſcribuntur; vt adeo temporum interualla inter appulſus limbi lunaris ad HR, et ſtellae ad fila C*q*, CT, C*o*, ſint vt ipſa ſpatia SA, AB, B*d* interea deſcripta.

§. 17. Ab inclinatione diurni ſtellae AD ad fila reticuli C*q*, CT, C*o*, pendet ratio ſpatiorum AB, B*d* a ſtella intra fila C*q*, CT, C*o* deſcriptorum. Certae inclinationi certa ſpatiorum AB, B*d* ratio reſpondet. Cum igitur haec ſpatia ſint vt tempora, quibus ſtella angulos *q*CT, TC*o* traiecit §. 16; manifeſtum eſt ab inclinatione diurni AD ad fila reticuli pendere rationem temporum, quibus anguli reticuli *q*CT, TC*o*, traiiciuntur.

§. 18. Datis loco ſtellae in S, poſitione diurni SAD et conditione motus ſtellae, definita ſunt tempora, quibus ſpatia SA, AB, BD, deſcribuntur §. 16. Inclinatio diurni SAD neceſſario connectitur cum ratione temporum, quibus anguli reticuli *q*CT, TC*o*, traiiciuntur §. 17. Conuertere ergo licebit ratiocinium et concludere, quod, datis temporibus motus ſtellae per angulos *q*CT, TC*o*, et quibus ſpatia SA, AB, B*d* a ſtella percurruntur, definiri poſſit inclinatio diurni ſtellae ad fila reticuli et locus ſtellae in S. Hic eſt ſcopus quem tendo, et propter quem Analyſin precedentem premiſi.

§. 19. Dentur ergo ex obſeruatione interualla temporum inter appulſus limbi lunaris ad HR et ſtellae ad fila C*q*, CT, C*o*; et definiendus ſit locus ſtellae in S. In filo CR, quarto verſus dextram a filo C*o*, ad quod appulſus ſtellae vltimus factus eſt, capiantur ab interſectione filorum communi C rectae CE, EF in ratione Fig. 4.

 tem-

temporum, quibus ſtella angulos TCo, qCT traiecit. Per E et F ducantur recte Eb, Fa, parallelae ad Co, ſecantes fila CT, Cq in b et a. Iungantur b et a recta dba filum Co in d ſecante. Erit argumento prop: 2. VI. Elem. $db : ba = CE : EF$, hoc eſt ratio rectarum db, ba, eadem eſt cum ratione temporum, quibus ſtella angulos TCo, qCT traiecit; adeoque recta da habebit inclinationem diurni § 17. et omnes rectae ad da parallelae diurnum ſtellae repraeſentare poſſunt.

§. 20 Determinata ſic diurni ſtellae inclinatione ad fila reticuli, definiri quoque poterit locus ſtellae in S, ſi modo menſura conſtituta ſit, ad quam ſpatia a ſtella percurſa poſſint referri. Cum ex obſeruatione non niſi tempora dentur, quibus ſtella ſpatia SA, AB, BD deſcri-
Fig. 3. pſit, horum vero ſpatiorum eadem ſit ratio, quae eſt temporum, quibus percurruntur; expedit iſta ſpatia exprimere per tempora, quibus traiiciuntur. Haec menſurae electio nulla difficultate laboraret, ſi modo tempora ex obſeruatione omnia ad eundem motum pertinerent. Aſt cum in praeſenti tractatione motus diuerſi occurrant, lunae ſcilicet et ſtellae, qui tempora tranſitus lunae vel ſtellae per reticulum definiunt, ſingularis iſtorum temporum ad diuerſos motus pertinentinm ratio haberi debet, vt communis ſpatiorum tum a luna tum a ſtella deſcriptorum habeatur menſura. Motus iſti tum ratione celeritatum, tum ratione directionis inter ſe differunt. Motus ſtellae fit in diurno, lunae in ſemita aliqua propter declinationis mutationem a diurno diuerſa. A mutatione declinationis lunae tantiſper abſtrahere, eamque in diurno aliquo a diurno ſtellae parum vel nihil diſrepante §. 8. Quem proinde

diur-

diurnum constantem in posterum appello, considerare licet. Istius scilicet mutationis ratio postea habebitur; diuersitas autem celeritatum lunae et stellae in diurno isto constanti in praesenti negotio expendi debet. Si enim spatia a luna in diurno constanti descripta exprimerentur per tempora, quibus a luna descripta sunt; spatia vero a stella percursa per tempora quibus stella ista traiecit; communis mensura spatiorum adeoque et schematis non daretur, cum spatia a luna descripta, ad spatia quae stella peragrauit, sint in ratione, non simplici temporum, sed composita temporum et velocitatum lunae et stellae. Vt igitur schematis habeatur mensura communis, necesse est, vt vnus motus ad alterum reducatur, hoc est, vt datis temporibus, quibus spatia quaedam in vno motu v. c. stellae, descripta sunt, inueniantur tempora, quibus eadem spatia in altero motu v. c. lunae traiici possint. Hoc pacto motus tum stellae tum lunae eadem celeritate in diurnis cuius gradus sunt iidem §. 8. factus concipitur et spatia percursa tunc existunt in ratione temporum, quibus describuntur, adeoque per haec exprimi possunt. Res adhuc clarior euadit, si consideretur, locum stellae in S. definiendum esse ad momentum appulsus limbi lunae ad HR, et quidem ex conditione motus stellae per spatia SA, AB, BD, quae stella a momento appulsus limbi lunaris ad HR, vsque ad momentum appulsus sui ad filum C*o* peragrauit. Stella continuo positionem respectu lunae mutat interea, dum haec spatia traiicit. Fieri ergo non potest, vt ex hoc motu stellae per dicta spatia acquiratur locus stellae ad momentum appulsus limbi lunaris ad HR, nisi efficiatur, vt stella, dum spatia SA, AB, AB, Bd percurrit, ſitum reſpectu lunae non mutet. Hoc autem obtinetur ſi luna et ſtella in diurnis ſuis eadem velocitate motae concipiantur, ſeu quod idem eſt, ſi vnius motus ad motum alterius reducatur. Perinde iam eſt ſiue motus ſtellae reducatur ad motum lunae, ſiue motus lunae ad motum ſtellae. Eligam caſum priorem et motum ſtellae referam ad motum, quam luna habet relatiue in ſuo diurno conſtanti; quo poſito ſchematis menſura communis conſtituitur in partibus temporis motus lunaris ad diurnum relati.

Fig. 4. §. 21. Vt igitur determinetur locus ſtellae, capiatur ex obſeruatione interuallum temporis inter appulſus ſtellae ad fila Cq, Co. Hoc tempus cum a motu ſtellae in ſuo diurno pendeat reducatur ad motum lunae in eodem diurno ſeu per §. 9. inueniatur tempus, quo ſtella eundem angulum qCo traieciſſet, ſi velocitate lunae mota fuiſſet. In recta da §. 19. deſignata, ope ſcalae alicuius, iuxta quam ſchema conſtruere libet, capiatur dx aequalis tot partibus ſcalae, quod tempus iſtud reductum continet minuta ſecunda. Per α ad Co fiat αA parallela, ſecans filum Cq in A. Per A ducatur DAS indefinita, parallela ad da. Interuallum temporis inter appulſum lunae ad HR et ſtellae ad filum Cq, reducatur ad tempus motus lunaris §. 9. eique ope eiusdem ſcalae aequalis capiatur AS. His factis, cum ſpatia SA, AD ($= d\alpha$) ſint vt temporum interualla inter appulſus limbi lunaris ad HR et ſtellae ad fila Cq, Co, reducta ad motum lunae in diurno (conſtr:); SAD vero habeat inclinationem diurni ſtellae ad fila reticuli §. 19. patet in S eſſe locum ſtellae quaeſitum ad momentum appulſus limbi

limbi lunaris ad HR; et communem schematis mensuram dari per partes temporis motus lunaris ad diurnum relati. §. 20.

§. 22. Dantur ergo ex constructione obseruationis spatia SA, AD etc. Magnitudine, diurnus stellae SD positione, et locus stellae in S ad illud tempus, quo limbus lunae appulit ad HR. §. 21. Restat ergo, vt ad idem tempus locus centri lunae in L definiatur, quo facto locus stellae ad lunam ad datum temporis momentum, appulsus scilicet limbi lunaris ad HR, innotescit qui quaeritur. Quemadmodum autem ad determinationem loci stellae necessaria erat cognitio inclinationis diurni stellae ad fila reticuli; ita quoque pro inueniendo lunae loco inclinatio semitae lunaris ad fila reticuli, seu quod perinde est, ad diurnum stellae iam designatum, cognoscatur necesse est. Semitam enim lunae ad diurnum stellae parallelam non esse inde patet, quod luna continuo declinationem mutet; cuius mutationis ratio nunc haberi debet. Conditiones ergo inclinationis semitae lunaris ad diurnum stellae iterum ex hypothesi §. 15. analytice expendendae sunt, priusquam constructionem loci lunae ex obseruatione suscipiamus.

§. 23. Sint igitur omnia, vt in hyp §. 14. Detur scilicet positio mutua semitae lunaris LM et diurni stellae AD. Per punctum quoduis M semitae lunaris LM ducta sit M*m* parallela ad diurnum stellae AD. Ex alio eius puncto L, quod ab M distet versus dextram, demittatur LM perpendicularis ad M*m*. Et manifestum est, motum lunae per LM, hoc modo decompositum esse in motus laterales L*m* *m*M, quorum hic parallelus, iste perpendiculariter directus est ad diurnum stellae. Motus Fig. 3.

lunae per mM eſt iſte; qui abſtrahendo a declinationis mutatione, tanquam in diurno aliquo conſtanti conſiderari ſolet, vt in §. 6; LM vero eſt mutatio declinationis lunae interea facta: dum luna relatiue portionem diurni conſtantis mM percurrit. Data ergo poſitione mutua ſemitae lunaris LM et diurni ſtellae AD ſeu mM, quae ad AD parallela eſt; dabitur relatio mutua motus lunae in diurno conſtanti, vt mM, et motus eius in declinationem vt Lm, in ea menſura, ad quam ſchema refertur.

§. 24. Quod ad ſitum ſemitae lunaris LM reſpectu lineae mM diurnum ſtellae repraeſentantis, patet, ſemitam LM vel ſupra vel infra lineam mM cadere poſſe. Si LM in ſchemate ſupra mM ponitur, punctum m ab L diſtat verſus ſeptentrionem, adeoque motus in declinationem iuxta Lm dirigitur verſus ſeptentionem, *quod fit*, quando declinatio lunae vel eſt borealis creſcens vel auſtralis decreſcens. Si LM infra Mm cadit, punctum m ab L diſtat verſus Auſtrum, adeoque motus in declinationem directus eſt verſus meridiem, quod contingit, quando lunae declinatio eſt vel borealis decreſcens vel auſtralis creſcens. Prior caſus in figura occurrit, poſterior omiſſus eſt ne ex nimia linearum multitudine ſchema turbetur. Patet ergo ex ſitu ſemitae lunaris LM. reſpectu lineae mM diurnum ſtellae repraeſentantis cognoſci conditionem declinationis lunae, an ſit borealis creſcens vel auſtralis decreſcens, an borealis decreſcens vel auſtralis creſcens.

§. 25. Quemadmodum diurnus ſtellae AD transfertur ad ſemitam lunarem LM ducendo mM ad AD parallelam §. 23. ita vice verſa ſemita lunaris LM ad diurnum ſtellae DA referri poteſt, ſi per punctum aliquod diurni

DA

DA recta aliqua parallela ducatur ad LM. Sit ergo per punctum quoduis in diurno stellae ad sinistram sumtum, vt D, recta $D\lambda$ parallela ad semitam lunarem LM. Ex puncto quouis alio μ in diurno stellae versus dextram ad arbitrium assumto erigatur $\mu\lambda$ perpendicularis ad SD diurnum stellae, secans istam $D\lambda$ in λ; eritque $\Delta\ D\mu\lambda$ omnino simile $\Delta\ LmM$. Eodem igitur modo vt in §. 23. data mutua positione diurni stellae SD et semitae lunaris seu rectae $D\lambda$ ad semitam lunarem parallelae, dabitur relatio mutua motus lunae in diurno constanti vt μD, et motus in declinationem $\mu\lambda$, hac scilicet ratione, vt $\lambda\mu$ exhibeat declinationis mutationem interea factam dum luna relatiue in diurno, vel quod perinde est, stella velocitate lunae mota peragrauit spatium μD. Eodem autem ratiocinio, quo §. 24. vsi sumus, manifestum est, si punctum λ cadat supra DS, declinationem lunae esse vel crescentem borealem vel decrescentem australem; sin vero punctum λ infra DS cadat, declinationem esse vel borealem decrescentem vel australem crescentem.

§. 26. Conuertendo iam ratiocinium patet, data mutua relatione motus lunae in diurno aliquo constanti, et motus in declinationem dataque conditione declinationis lunae; dari positionem semitae lunaris et diurni stellae tum inter se tum respectu plagarum coeli. Detur enim μD spatium dato tempore a stella velocitate lunae mota descriptum. Detur $\mu\lambda$ mutatio declinationis lunae tempori isti respondens in eadem mensura, in qua datur spatium μD; et dabitur $\Delta^{lum}\ D\mu\lambda$ ad μ rectangulum, adeoque $D\lambda$ positione respectu diurni stellae DS. Ex conditione autem declinationis lunae cognoscitur, an punctum λ ſupra, an infra DS cadat. Prior ſcilicet caſus occurret, ſi declinatio lunae ſit borealis creſcens vel auſtralis decreſcens; poſterior, ſi iſta ſit borealis decreſcens vel auſtralis creſcens.

Fig. 4. §. 27. Conſtructio igitur ſchematis §. §. 19. 20. 21. iam incepta, hoc modo continuatur. Ad tempus ex arbitrio electum quaeratur mutatio declinationis lunae reſpondens in partibus circuli maximi §. 12, quae reducantur ad partes temporis in motu lunari aequiualentes §. 11. Ex puncto quouis in diurno ſtellae aſſumto, (quod euidentiae gratia ſit D, in quo diurnus ſtellae ſecat filum vltimum C*o*) capiatur verſus dextram ſpatium Dμ expreſſum per tempus, ad quod declinationis mutatio quaeſita eſt. In μ ad rectam DS perpendicularis conſtituatur μλ aequalis inuentae mutationi declinationis *in partibus* temporis motus lunaris, quae vel ſupra vel infra DS pro declinationis lunae conditione §. 26. poni debet. In noſtro caſu, quo lunae declinatio eſt borealis creſcens, μλ ſupra DS cadit. Iungatur Dλ eaque indefinite producatur, erit Dλ linea, ad quam ſemita lunaris in ſchemate parallela eſt. Spatium μD ſcilicet conſideratur tanquam a luna percurſum, eo tempore, quo exprimitur, et quo luna per λμ declinationem mutauit, vtriuſque autem ſpatii μD et λμ datur menſura communis, in partibus nempe temporis motus lunaris ſeu in partibus ſcalae ad quam ſchema conſtruitur §. 26. et 20.

§. 28. Hoc modo in quouis caſu, ſeruata ſemper eadem ratione ſpatii Dμ ad μλ definitur inclinatio lineae Dλ ad diurnum ſtellae, ad quam parallela eſt ſemitae lunae, vbicunque iſta ſita ſit. Vera enim ſemitae lunaris poſi-

positio respectu reticuli adhuc ignoratur, nec, nisi ad datum aliquod tempus locus centri lunae respectu reticuli cognitus sit, determinari potest. Sed ad scopum praesentem hactenus exposita sufficiunt, qui eo tendit, vt definiatur locus centri lunae v. c. in L, ad illud temporis momentum, ad quod locus stellae in S §. 21. inuentus est, quodque in nostro casu est tempus appulsus limbi lunae ad filum HR. Ex hyp. §. 15. iterum ratiocinium incipiam, vt inde conditiones appulsuum limbi lunaris ad fila reticuli innotescant, iisque perspectis, conclusio fieri possit, pro determinando centri lunae loco.

§. 29. Sit ergo per hyp: § 15. ad momentum appulsus limbi lunae ad HR, locus, centri lunae in L, R*pr* peripheria disci tangens filum HR in R; LR radius eius; LM parallela ad Dλ, sit semita centri. Ad filum C*q* ducta sit parallela GI tangens limbum lunae in *r*; et ad filum CT parallela sit KN, tangens limbum in *p*. Scilicet rectae GI, KN ad C*q*, CT, respectiue parallelae ducuntur, quia limbus lunae ex hyp: §. 15. ad fila C*q*, CT appulit. Si appulsus isti ad alia fila facti fuerint, pari modo ad haec parallelae concipi debent limbum lunae tangentes. Intelligantur jam rectae GI, KN, cum limbo lunae in *r* et *p* cohaerere, et motu sibi semper parallelo transferri, quando centrum lunae per LM mouetur. Quoniam LM parallela est ad Dλ §. 25, translationes linearum GI, KN, per rectam λD eodem modo fiunt ac per LM, dum centrum lunae LM traiicit. Referam ergo dictarum linearum translationes ad rectam λD. His positis, quando centrum lunae est in L, recta GI secat istam Dλ in I. Dum ergo luna motu suo ab L versus M limbo suo *r* appellit Fig. 5.

 ad

ad filum Cq; recta GI motu sibi parallelo transfertur per Iy et ad momentum appulsus limbi r ad Cq coincidit cum Cq. Traiicitur ergo spatium Iy interuallo temporis inter appulsum limbi in R ad HR et limbi r ad Cq. Pari modo, quando centrum lunae est in L, recta KN secat ipsam Dλ in N. Dum vero luna motu per LM limbo suo p appellit ad filum CT; recta KN motu sibi parallelo transfertur per NZ et ad momentum appulsus limbi p ad CT coincidit cum CT; quare spatium NZ absoluitur interuallo temporis inter appulsus limbi lunaris ad HR et ad CT. Hoc ergo modo, si, vi hypotheseos dentur ad momentum appulsus limbi lunae ad HR locus centri in L, radius disci LR, positio semitae centri LM seu ipsi parallelae λD; inueniri possint *spatia* Iy, NZ, et tempora per Iy et per NZ, hoc est, interualla temporum inter appulsus limbi lunaris ad HR et ad Cq, ad HR et ad CT.

§. 30. Conuertendo igitur ratiocinium, si dentur interualla temporum inter appulsus limbi lunaris ad HR et ad Cq, ad HR et ad CT, et positio rectae Dλ, ad quam semita lunae parallela est; nec non conditio motus lunae in sua semita, seu, quod perinde est ad rectam Dλ relati; determinari posse locum centri lunae in L, eiusque semidiametrum, facile perspicitur.

§. 31. Positio istius Dλ respectu diurni stellae DS datur §. 27. Conditio motus lunae in sua semita vel ad rectam Dλ relati habetur ex consideratione trianguli D$\mu\lambda$, vbi λD ad μD exhibet rationem celeritatis lunae in sua semita ad celeritatem eius in diurno. Denique ex observatione dantur appulsus limbi lunaris ad fila HR, Cq,

CT per

CT per hyp: §. 15; adeoque interualla temporum inter appulsus limbi lunaris ad HR et ad Cq, ad HR et ad CT. Quibus datis constructio obseruationis sequenti modo ad finem perducitur.

§. 32. Ex punctis Z, Y, in quibus recta Dλ secat fila CT, Cq ad quae luna appulit (excluso eo filo HR, in quo appulsus lunae definit tempus loci stellae ad lunam quaesiti) demittantur Zf, yG perpendiculares ad diurnum stellae AD. Ope scalae, iuxta quam schema construitur, capiantur fn, gi, respectiue aequales intervallis temporum inter appulsus limbi lunae ad HR et ad CT, ad HR et ad Cq. Per n et i ad gy ducantur parallelae nN, iI secantes Dλ in N et I; erunt ZN, yI spatia, quae in lunae semita Dλ iisdem respectiue temporibus describuntur, quibus a luna percurruntur fn, gi relatiue in diurno; hoc est ZN, yI sunt respectiue spatia a luna relatiue in recta Dλ interuallis temporum inter appulsus limbi lunae ad HR et ad CT, ad HR et ad Cq descripta. Per N ad CT et per I ad Cq ducantur respectiue parallelae KN, GI, sese mutuo intersecantes in X. Cum perinde sit, siue luna relatiue per spatia NZ, Iy datis temporibus accedat ad fila CT, Cq; siue fila haec ad lunam immotam per eadem spatia iisdem temporibus recedant; manifestum est ex analysi §. 29. rectas GI, KN, tangere limbum lunae, quando limbus eius superior appulit in R ad filum HR. Dantur ergo tres rectae HR, KN, GI, seu KR, Kx, xI positione, huius conditionis, vt omnes tangat limbus lunae verb. causs. in R, p, r, respectiue, ad momentum temporis, quo limbus lunae appulit ad HR. Bisecentur Fig. 4.

centur anguli RKx, KxI per rectas KL, xL quae sese interſecent in puncto L. Cum quaeuis recta vt KL vel xL, biſecans angulum RKx vel KxI a duabus tangentibus KR, Kx; vel Kx, xI interceptum, tranſeat per centrum circuli, cuius tangentes iſtae ſunt; patet in L eſſe centrum diſci lunaris, qui rectas KR, Kx, xI tangit in R, p, r. Datur ergo centrum lunae ad momentum appulſus limbi lunaris ad HR; et ſi ex L ad vnam ex iſtis tangentibus v. c. ad KR perpendicularis LR ducatur; dabitur ſemidiameter lunae LR. Menſura huius datur in partibus ſcalae, iuxta quam ſchema constructum eſt, quippe per quas, vi conſtructionis, expreſſae ſunt rectae ZN, yI; a quibus poſitio mutua tangentium KR, Kx, xI pendet, vt adeo ſemidiameter lunae exprimatur per tempus, quo centrum lunae *relatiue in diurno* percurrit ſpatium aequale ſemidiametro lunae.

§. 33. Cum admodum exigua ſit mutatio declinationis lunae $\mu\lambda$ reſpectu ſpatii μD, quod eodem tempore luna relatiue in ſuo diurno deſcribit, quo declinationem per $\mu\lambda$ mutat; propter angulum $\lambda D\mu$ hinc valde paruum, rectae ZN, fn; yI, gi, reſpectiue inſenſibiliter a ſe inuicem different. Igitur absque errore in conſtructione ſchematis rectae ZN, yI, ope ſcalae hactenus adhibitae, aequales fieri poſſunt interuallis temporum inter appulſus limbi lunaris ad HR et ad CT; ad HR et ad Cq; quibus §. 32. rectas fn, gi reſpectiue aequales feci propter diuerſitatem motus lunae in ſua ſemita et in diurno. Hoc modo conſtructio breuior efficitur.

§. 34. Ordinem denique temporis reſpiciendum eſſe, iuxta quem appulſus limbi lunaris ad fila HR, Cq, CT etc: facti

facti sunt, per se patet. Ex hoc enim ordine cognoscitur directio accessus rectarum GI, KN, per spatia γI, ZN ad discum lunae, qui in nostro casu in L in momento appulsus limbi lunaris ad HR immotus perstitisse consideratur, v. c. Si, ceteris paribus, appulsus limbi lunaris serius ad HR contigisset quam ad Cq; tunc rectam GI a Cq non versus dextram (vt in nostro casu), sed versus sinistram distare debere, manifestum est; cum hoc casu limbus lunae r iam vltra Cq progressus est, quando limbus superior appellit ad HR. Eodem modo in reliquis casibus ordo appulsuum considerandus est.

§. 35. Datur ergo per constructionem obseruationis locus stellae in S respectu reticuli §. 21. Ad idem tempus datur quoque locus centri lunae in L respectu eiusdem reticuli vna cum semidiametro eius §. 32. Dabitur ergo mutua positio lunae et stellae, quam quaesiui. Schematis autem communis mensura constituta est per partes temporis horologii, quatenus istud ad motum lunarem in diurno constanti refertur; hoc est, vnaquaeque linea schematis considerari debet instar spatii, eo tempore, per quod exprimitur, percursi a luna in diurno constanti.

§. 36. Si ea, quae §. §. 19. 20. 21. 27. 32. 33. 34. exposita sunt, considerentur, in quolibet casu obseruationum §. 4. enumeratarum, locum lunae ad stellam, ad datum aliquod tempus determinari posse patet. Sed cum ordinem constructionis per analysin subinde interrumpere et plura alia euidentiae causa immiscere debuerim, expedit, generaliter constructionem cuiusque obseruationis propositae ordine exponere, eamque exemplo obseruationis 12. illustrare, in qua casus iste occurrit, quem hactenus consideraui.

§. 37. Ordo constructionis hic est.

Fig. 4. 1) Delineatum sit Systema linearum VT, HR, *Oo*, *Qq*, quod reticulum repraesentat §. 14. ducendo HR, VT ad se inuicem normales et bisecando angulos HCV, VCR per rectas *Qq*, *Oo*.

2) In obseruatione proposita distinguantur fila reticuli, ad quae appulsus stellae facti sunt. Istud filum, quod primo attigit stella, vocetur *primum*; istud, quod deinceps traiecit, *medium*; et quod vltimo transiit stella *vltimum*. In nostra obseruatione 12. appulit stella ad C*q*, CT, C*o*, iuxta ordinem, quo recensentur §. 3.; vt adeo C*q* sit primum, CT medium, C*o* vltimum filum.

3) Cognoscatur quoque coeli plaga, in qua tempore obseruationis stella extitit; inde enim intelligitur, an stella in tubo apparenter ascenderit, an descenderit §. 15. Obseruatio nostra facta est in occidentali coeli plaga §. 3. vnde stella apparenter ascendit a dextra ad sinistram. Figura hoc modo ad apparentiam tubi astronomici componitur §. 14.

4) His cognitis quaerantur interualla temporum, quibus stella traiecit angulos a filis primo et medio, medio et vltimo formatos; inde enim pendet inclinatio diurni stellae ad fila reticuli §. 17. In nostro casu quaeri debent tempora transitus stellae per angulos *q*CT, TC*o*, per §. 3.

Appulsus stellae ad CT—5^h $33'$ $10''$ horologii
— — — — — — ad C*q*—5. 30. $47\frac{1}{2}$.

Mora transitus per *q*CT. 2. $22\frac{1}{2}$. seu $142\frac{1}{2}''$

Appulsus stellae ad C*o*—5^h $34'$ $45''$ horol.
— — — — — — ad CT-5. 33. 10.

Mora transitus per TC*o* 1. 35. seu $95''$.

Hinc transitus per TC*o* ad transitum per *q*CT$=95:142\frac{1}{2}$.

5) In

5) In filo CR, quod quartum est versus dextram a filo vltimo Co, ope scalae a centro reticuli C capiantur versus dextram rectae CE, EF, in ratione temporum transitus stellae per angulos a filis vltimo et medio vt TCo, medio et primo, vt qCT, formatos; in hoc casu vt 95 : 142½. Per puncta sic inuenta E, F ducantur Eb, Fa, parallelae ad filum vltimum Co, secantes fila, medium CT, et primum Cq, in b et a, iungatur ba eaque indefinite producatur, vt secet filum vltimum in d. Diurnus stellae ad rectam dba hoc modo determinatam parallelus erit §. 19.

Potest etiam constructio ordine contrario suscipi.

Sint v. c. fila, primum CT, medium Co, vltimum CH, ad quae stella appulit, vt dentur morae transitus stellae per angulos TCo, HCo. In filo CQ, quod quartum est versus sinistram a primo CT, capiantur a centro reticuli C versus sinistram rectae CE, EF in ratione temporum transitus stellae per angulos TCo, HCo, a filis primo et medio, medio et vltimo formatos. Per E et F ducantur Eb, Fd parallelae ad filum primum CT, secantes fila, medium Co, et vltimum CH, in punctis b, d. Iungantur d, b, recta dba ad quam diurnus stellae parallelus erit. Constructio prior exactior procedet, si mora transitus stellae per angulum a filis primo et medio interceptum maior sit mora transitus per angulum a filis medio et vltimo formatum. Sin vero ista hac minor sit, constructio posterior praestabit. Fig. 5.

6) Definiatur mora transitus stellae per angulum a filis primo et vltimo comprehensum, addendo transitus per

angulos a filis primo et medio, medio et vltimo formatos, qui n. 4. definiti sunt. In nostro casu quaeritur transitus per qCO. Iuxta n. 4. est

Transitus stellae per qCT $= 142\frac{1}{2}$.
— — — — — — — — TCo $= 95$. vnde

Transitus stellae per qCo $= 237\frac{1}{2}$.

7) Tempus huius transitus, cum ad motum stellae pertineat, reducatur ad tempus motus lunaris in diurno §. 20.; et in hoc casu inuenietur ope §. 9. transitus stellae per qCo celeritate lunae motae $= 246''$.

8) Ope scalae alicuius geometricae, iuxta quam schema construere libet in recta da n. 5. definita a d intersectione eius cum filo vltimo capiatur versus dextram $d\alpha$ aequalis tempori n. 7. inuento (in hoc casu $= 246''$). Per α ducatur αA parallela ad filum vltimum Co, secans filum primum Cq in A. Per A fiat DA parallela ad $d\alpha$ eaque indefinite producatur, secans filum vltimum Co in D. Erit AD $(= d\alpha)$ spatium a stella ab appulsu suo ad filum primum vsque ad appulsum ad vltimum filum descriptum et expressum per partes temporis motum lunae in diurno respicientis §. 21.

9) Considerentur iam fila, ad quae limbus lunae appulit, et ex istis appulsibus eligatur aliquis, ad cuius momentum locus stellae ad lunam definiri debet, quod in sequentibus *momentum obseruationis*; filum vero, ad quod limbus lunae momento obseruationis appulit, *primarium filum* vocabo. In nostro exemplo sit HR filum primarium; et momentum appulsus limbi lunaris ad HR, quod §. 3. est $5^{h.}\ 26^{\prime}\ 39^{\prime\prime}$ temp. horologii, erit momentum obseruationis

seruationis, ad quod locus stellae ad lunam ex constructione sequenti emergit.

10) Inueniatur interuallum temporis inter momentum obseruationis et momentum appulsus stellae ad primum filum, eorum, quae, traiecit stella; in hoc casu interuallum inter appulsus lunae ad HR et stellae ad Cq. Per §. 3. Appulsus stellae ad Cq — 5^h $30'$ $47\frac{1}{2}''$ horol.
— — — limb. ☽nae ad HR 5. 26. 39.

Interuallum 4. $8\frac{1}{2}$. seu $248\frac{1}{2}$.

11) Reducatur hoc ad tempus motus lunaris, vi §. 20, et inuenietur istud per §. 9. in nostro exemplo $= 257\frac{1}{3}''$ proxime.

12) A puncto A, in quo stella primum filum transiit, transferatur recta AS aequalis interuallo n. 11. vel versus dextram vel versus sinistram, prout appulsus stellae ad primum filum vel serius vel citius factus est, quam appulsus lunae ad filum primarium; eritque in S locus stellae quaesitus ad momentum obseruationis. In nostro casu, quo stella serius ad Cq appulit, quam limbus lunae ad HR, capiatur AS $= 257\frac{1}{3}$. part. scalae n. 11. versus dextram; vt habeatur locus stellae in S ad momentum horologii 5^h $26'$ $39''$ (n. 9.)

13) Definiri iam debet inclinatio semitae lunaris Dλ ad diurnum stellae DS §. 27. Hunc in finem eligatur tempus aliquod, cui respondens quaeratur declinationis lunae mutatio, quae §. 12. dabitur in partibus circuli maximi. Reducantur hae per §. 11. ad partes temporis in motu lunari aequiualentes, vt habeatur mutatio declinationis in partibus scalae §. 27. Sit tempus ex arbitrio assumtum

10.′ seu 600.″ temp. horologii; erit per §. 12. mutatio declinationis respondens 46.″ part. circuli maximi, quae per §. 11. efficient $3\frac{1}{7}$.″ fere temporis horologii motum lunae in diurno respicientis.

14) Ex puncto in diurno stellae ad arbitrium sumto, quod euidentiae causa sit D, in quo diurnus stellae secat filum vltimum, capiatur versus dextram in diurno stellae spatium Dμ aequale tempori n. 13. electo (in hoc casu = 600.″ temp. horol. seu partium scalae). Ex conditione declinationis lunae cognoscatur, an ista sit borealis crescens vel australis decrescens, an vero borealis decrescens vel australis crescens. Ex puncto iam definito supra DS in priori casu, infra DS in posteriori erigatur perpendicularis $\mu\lambda$ ad DS aequalis inuentae n. 13. declinationis mutationi (= $3\frac{1}{7}$. part. scalae in hoc casu). Per λ et D ducatur indefinita Dλ. Ad hanc semita lunaris parallela erit §. 27. Ratio Dμ : $\mu\lambda$ = 600 : $3\frac{1}{7}$. est constans et in constructione omnium obseruationum §. 8. adhiberi potest, vbi quoque, cum lunae declinatio sit borealis crescens, punctum λ semper supra DS cadit.

15) Pro definiendo iam loco centri lunae ad momentum obseruationis, capiantur interualla temporum inter istud momentum et momenta appulsium limbi lunaris ad reliqua fila, ad quae luna appulit. In nostro casu quaeruntur interualla temporum inter appulsus lunae ad HR et ad Cq, ad HR et ad CT. Per §. 3. est

Appulsus limbi lunaris ad Cq	5^h 27.′ 49.″ horol.
— — — — — — — — ad HR	5. 26. 39.
Interuallum 1.	1. 10. seu 70.″

Ap-

Appulsus limbi lunaris ad CT 5^h $29'$ $7\frac{1}{2}''$
— — — — — — — ad HR 5. 26. 39.

Interuallum 2. 2. $28\frac{1}{2}$ seu $148\frac{1}{2}''$

16) Ab intersectione fili, cui eiusmodi interuallum, excepto filo primario respondet, cum recta Dλ positionem semitae lunaris referente, capiatur in hac Dλ recta aequalis dicto interuallo vel versus dextram vel versus sinistram, prout appulsus lunae ad istud filum vel serius vel citius factus est, quam appulsus lunae ad filum primarium. In nostro casu respondet interuallum primum filo Cq, interuallum secundum filo CT; et appulsus lunae ad vtrumque filum Cq, CT serius facti sunt, quam ad filum primarium HR. Igitur ex y, intersectione fili Cq cum Dλ sumi debet versus dextram yI aequalis interuallo primo, nimirum $= 70''$; et ex Z intersectione fili CT cum Dλ capi debet versus dextram ZN aequalis interuallo secundo $= 148\frac{1}{2}''$

17) Per puncta I et N sic definita ducantur parallelae ad fila respondentia, nimirum in nostro casu GI ad Cq; KN ad CT quae sese mutuo interfecent in x; et habebitur Systema rectarum HR, KN, GI, seu RK, Kx, xI, quas omnes limbus lunae tangit ad momentum obseruationis.

18) Bisecentur anguli RKx, KxI, ab his tangentibus RK, Kx, xI formati, per rectas KL, xL, quae sese interfecent in L, erit in L centrum lunae ad momentum obseruationis.

19) Ex L ad vnum ex istis tangentibus v. c. KR ducatur normalis LR; habebitur semidiameter lunae LR in par-

partibus ſcalae, quae eaedem ſunt cum ſecundis temporis horologii motum lunae in diurno reſpicientis. In noſtro caſu inuenitur ſemidiameter lunae $64\frac{1}{2}$. part. ſcalae ſeu ſecunda temporis motus lunaris, adeoque diameter lunae = 2′ 9″ = morae tranſitus diſci lunaris per meridianum vel alium quemuis horarium.

20) E centro lunae L n. 18. definito demittatur perpendicularis LW differentia declinationum centri lunae et ſtellae; WS vero differentia Aſcenſionum rectarum centri lunae et ſtellae in diurno ad momentum obſeruationis. Vtriusque menſura datur in partibus ſcalae ſeu ſecundis temporis motus lunaris in diurno §. 35. In noſtro exemplo inuenitur LW = $92\frac{1}{2}$″; WS = $209\frac{1}{4}$″

21) In §. 11. datur mutua relatio temporis horologii et motus lunaris in ſpatiis per partes circuli maximi expreſſis. Reducantur ergo per §. 11. diameter lunae (= 2′ 9″) et differentia declinationum centri lunae et ſtellae (= $92\frac{1}{2}$″) ad partes circuli maximi; et inuenietur prior = 29′ 53″ poſterior = 21′ 26″ part. circuli maximi.

22) In §. 10. datur mutua relatio temporis primi mobilis et temporis horologii motui lunae in diurno reſpondentis. Huius ope differentia Aſcenſionum rectarum centri lunae et ſtellae, quae n. 20. in tempore motus lunaris datur, reducitur ad partes temporis primi mobilis aequiualentes. In noſtro caſu inuenitur WS = $201\frac{1}{3}$″ = 3′ $21\frac{1}{3}$″ temp. primi mobilis.

23) Denique momentum obſeruationis iuxta tempus horologii notatum ope §. 4. et culminationum ſolis in tempus verum transmutari ſolet, vt conſtat. In noſtro caſu

mo-

momento obſeruationis 5^h $26'$ $39''$ temp. horologii reſpondent 10^h $33'$ $21''$ temp. veri.

§. 38. Hac methodo ex obſeruationibus 12, 13, 14, 15, 16, in quibus tum Palilicii tum lunae appulſus ad tria fila reticuli dantur, inuentae ſunt differentiae declinationum centri lunae et Palilicii in partibus circuli maximi; et differentiae Aſcenſionum rectarum eorundem in tempore primi mobilis, prout ab initio huius diſſertationis §. 1. ad momentum cuiusque obſeruationis tum iuxta tempus horologii tum iuxta tempus verum notatum ponuntur. Diameter lunae media earum, quae ex iisdem obſeruationibus deductae ſunt, deprehenſa eſt $2'$ $9\frac{1}{2}''$ temporis horologii ad motum lunae relati ſeu $30'$ $0''$ circuli maximi, quae proinde ad altitudinem mediam illarum, quas luna in iſtis obſeruationibus habuit, referri debet. Hac diametro poſtea vſus ſum in determinatione loci Palilicii ad lunam ex reliquis obſeruationibus 3, 17, 21, 22, in quibus tantum appulſus limbi lunae ad duo fila reticuli dantur. Conſtructio in his caſibus eodem modo vt § 37. peracta eſt, niſi, quod loco trium rectarum, quas limbus lunae ad momentum obſeruationis tetigit, n. 15. 16. 17. §. 37. inuentarum; hic duae tantum rectae poſitione eadem methodo determinentur, quas limbus lunae ad momentum obſeruationis tangit. Diameter lunae data vices tertiae tangentis ſuſtinet. Biſecto enim angulo, quem tangentes iſtae duae comprehendunt, habetur recta, in qua alicubi centrum lunae haeret. Igitur ope ſemidiametri lunae datae diſcus lunaris iſtis tangentibus facillime inſcribitur, reliquaque vt ante definiuntur, quorum recenſio fit §. 1.

Fig. 1. §. 39. In fig. 1. loca centri lunae ad Palilicium methodo praecedenti definita, in vnum Syſtema redegi, ſic tamen vt figura repreſentetur in ſitu erecto, cum e contrario ſchemata §. 37. ſitu inuerſo conſtructa ſint. Ducta ſcilicet recta PD diurnum Palilicii referente, et conſtituto in P Palilicio, ex datis per partes ſcalae ſeu communem omnium ſchematum §. 37. conſtructorum menſuram differentiis Aſcenſionum rectarum et declinationum centri lunae et Palilicii, definiui puncta 3, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 21, 22; quae centri lunae ad Palilicium loca in obſeruationibus homologis exponunt. Per puncta ſic inuenta ducta eſt, ſemita centri lunae, quae curuatura ſua ſatis monſtrat, quanta deflexio a ſemita rectilinea per variationem parallaxeos lunae effecta ſit.

§. 40. Vt ſemitae huius poſitio etiam habeatur reſpectu fixarum, quas luna in tranſitu per Hyades praeſenti vel occultauit vel tranſiit, per ſextantem muralem culminationes iſtarum diebus aliquot poſt obſeruaui, et repetitis aliquoties his obſeruationibus deprehendi

Differentiam.

	Aſcenſionum rectarum inter Palilicium et in temp. primi mobilis	Declinationum in part. circ. maxim.
primam Hyadum	16′ 0″	59′ 10″
d.	9. 28.	57. 40.
1 ad θ	7. 16¼.	36. 10.
2 ad θ	7. 10¼.	41. 40.
c.	5. 19.	21. 40.

quae omnes ſtellae quoad declinationis differentiam auſtraliores

liores ſunt Palilicio; quoad Aſcenſionum rectarum differentiam vero Palilicium praecedunt. Ex his ſecundam et quintam litteris *d* et *c* diſtinxi, quippe quarum nullum extat nomen. Stellam *c* in catalogis neque Heuelii neque Flamſteedii inueni; eam tamen ſextae magnitudinis cenſeo. Reliquas ſeptimae magnitudinis ſtellas, quae in figura deſignatae ſunt, ex Catalogo Flamſteedii facta debita reductione deſumſi. Omnium autem ſtellarum differentiae tum aſcenſionum rectarum tum declinationum ad communem ſchematis menſuram (ſeu partes temporis horologii ad motum lunae in diurno relati) reductae et hoc modo figurae inſcriptae ſunt. Ope ſemidiametri lunae in menſura ſchematis datae, ex datis ſtellarum 1 ad θ, 2 ad θ, *c*, locis interſecui ſemitam lunarem reſpectiue in punctis 1, 2, 6, 7, 8, 11, vt habeantur loca centri lunae in Immerſione ſtellae 1 ad θ, Immerſione 2 ad θ, Emerſione 2 ad θ, Emerſione 1 ad θ, Immerſione ſtellae *c*, et Emerſione ipſius *c* reſpectiue; et his numeris obſeruationes vel deductiones reſpondentes in §. 1. indicaui.

§. 41. Datis ex conſtructione figurae 1. interuallis locorum centri lunae in ſemita, datisque ex obſeruatione temporibus, quibus centrum lunae loca iſta tenuit, motus lunae horarius in ſemita facillime definiri potuit. Hoc modo deprehendi lunam circa culminationem ſeu obſervationem 9. §. 1. in vna hora temporis veri percurriſſe in ſemita (fig. 1.) e ſuperficie terrae viſa 23′ 25″; circa obſeruat. 12 vsque ad 17, 24′ 3″ circa coniunctionem viſam cum Palilicio 24′ 35″ partium circuli maximi. En alterum effectum variationis parallaxeos lunae, quem luna

 mu-

mutata sua elongatione a meridiano passa est. Ex parallaxeos enim mutatione, in viciniori lunae ad horizontem situ, variationes horariae Ascensionis rectae lunae crescunt; his autem crescentibus, horarios quoque in semita augeri patet. Horarium primum adhibui ad definiendam durationem occultationis stellae c; secundum ad computandas durationes occultationum stellarum 1 ad θ, 2 ad θ, (circa haec enim tempora luna aequaliter remota fuit a meridiano, ac in obseruationibus 12, 13 etc.); tertio denique horario vsus sum in determinatione distantiae minimae centrorum lunae et Palilicii in coniunctione visa.

§. 42. Et haec sunt, quae de determinatione loci stellae ad lunam, quando haec istam transit, methodo specialiori disserere volui. Methodus ipsa autem ita comparata est, vt paucis mutatis maxime generalis euadat, et ad positiones mutuas stellarum sibi vicinarum definiendas, coniunctiones planetarum inter se et cum fixis obseruandas, maculas solares vel lunares in disco solis vel lunae designandas, phases Eclipsium solis vel lunae mensurandas etc. facillime adhiberi possit. Obseruationes simplici negotio absoluuntur; appulsus enim tantum ad fila reticuli, instrumento immoto, iuxta horologium bonae notae annotari debent. De situ reticuli et instrumenti obseruator solicitus esse non debet, nisi periculum refractionis in vicinia horizontis id suadeat; in reliquis casibus iste quiuis esse et ad obseruationem commode peragendam eligi potest; modo instrumentum durante obseruatione immotum persistat. Systema quoque filorum reticuli aliter adornatum esse potest, ac istud, quod in prae-

senti

ſenti obſeruatione adhibui; modo inclinationes filorum ad ſe inuicem cognitae ſint. Vt adeo methodus haec propter facilitatem obſeruandi methodum iſtam antecellere videatur, qua obſeruationes ſimiles ope tubi reticulo ſuo inſtructi et ſuper machina parallactica repoſiti expediri ſolent. Ex vtraque methodo aeque exacta quaeſiti determinatio habetur, prout ex harmonia exoptatiſſima eorum, quae hac methodo in §. 1. deduxi, cognoui; et licet deductio quaeſiti in hac methodo paululum intricatior videatur ac in reliqua; facta tamen comparatione eorum, quae in vtraque ad determinationem quaeſiti requiruntur, exigua diſcrepantia deprehendetur. Sed hac dē re plura diſſerere limites praeſentis diſſertationis prohibent.

NOTA

Diſſertationes ſequentes

I. Ammani de Camelo Bactriano, ad annum 1739.
Diſſertationis Hydraulicae P. II. — — 1740.
I. G. Gmelini de frigore et calore glaciei, niuis et aquae. — — 1739.
G. F. Mulleri de Scriptis Tanguticis in Sibiria repertis commentatio — — 1744.
I. Weitbrechtii Solutio problematis Phyſiologici — 1739.

pertinentes, ſecundum ſeriem temporis ſerius quidem euulgandae fuiſſent, huic tamen Tom. X. certas ob cauſas inſertae ſunt.

Emen.

Emendanda.

P. 19. l. 3. loco $+\frac{1}{8}$ lege $+\frac{1}{9}$.

— — l. 10. loco $+ 5.7.$ lege $+\frac{1}{5.7.}$

— — loco $+\frac{1}{7}$. lege $+\frac{1}{7.9.}$

p. 21. l. 6. loco $f E x^5$ lege $s f E x^5$

p. 28. in margine loco Fig. I. lege Fig. 2.

p. 32. l. 9. loco $\frac{\int u\,dx}{a+b-x} = X$ lege $\frac{\int u\,dx}{a+b-x} = lX$.

p. 46. §. 10. l. 9. lege potius

$$(a+bx^n)\,Tx^2dy + (a+bx^n)\,yx^2dT - (a+bx^n)\,T^2x^2y^2dx$$
$$+ (g+hx^n)\,dx = o + (c+fx^n)\,Tyxdx.$$

p. 201. §. 4. in margine ſupple Tab. XVI. fig. I. et

p. 202. §. 5. in margine ſupple Tab. XVI. fig. 2.

p. 208. l. 4. in margine ſupple Tab. XVII.

— — l. 5. loco RB lege AB

— — l. 6. loco REe lege AEe.

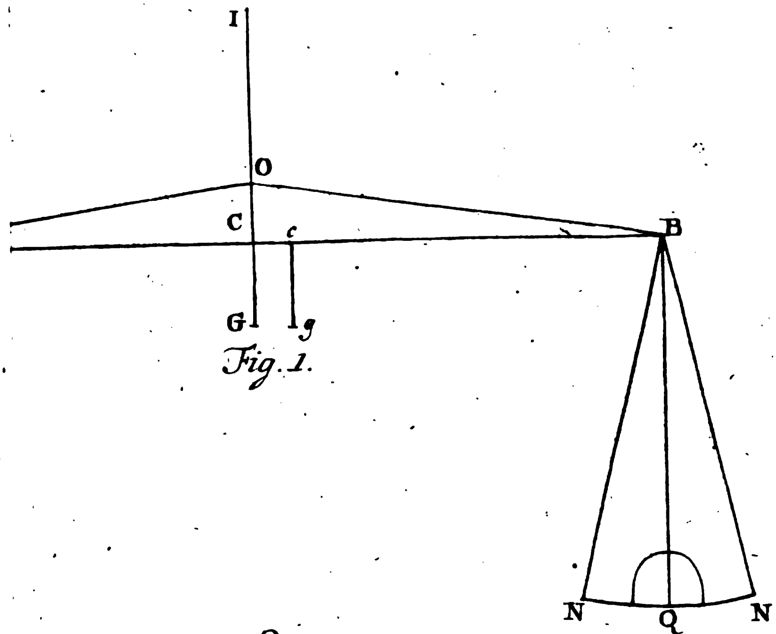


Fig. 1.

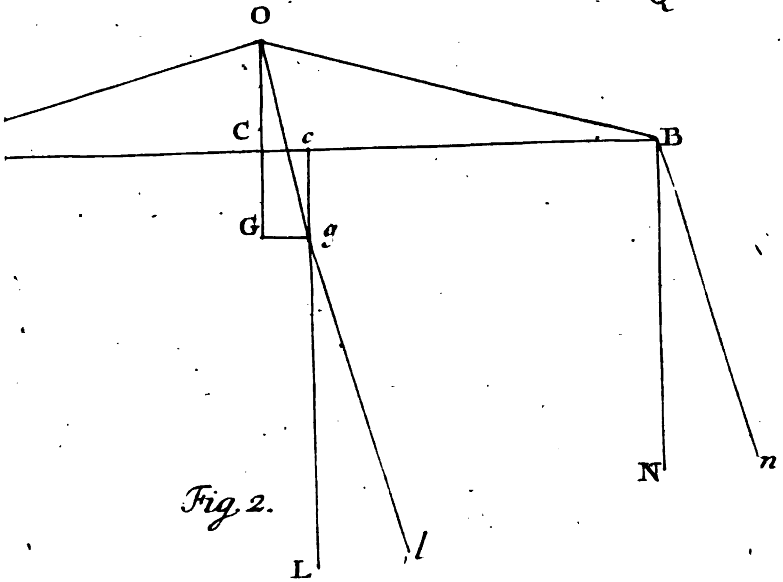
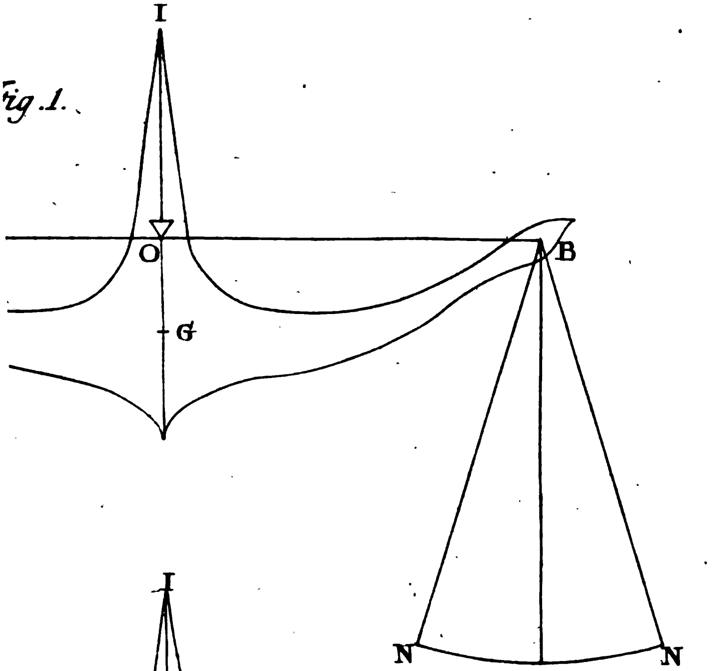


Fig. 2.

Fig. 1.



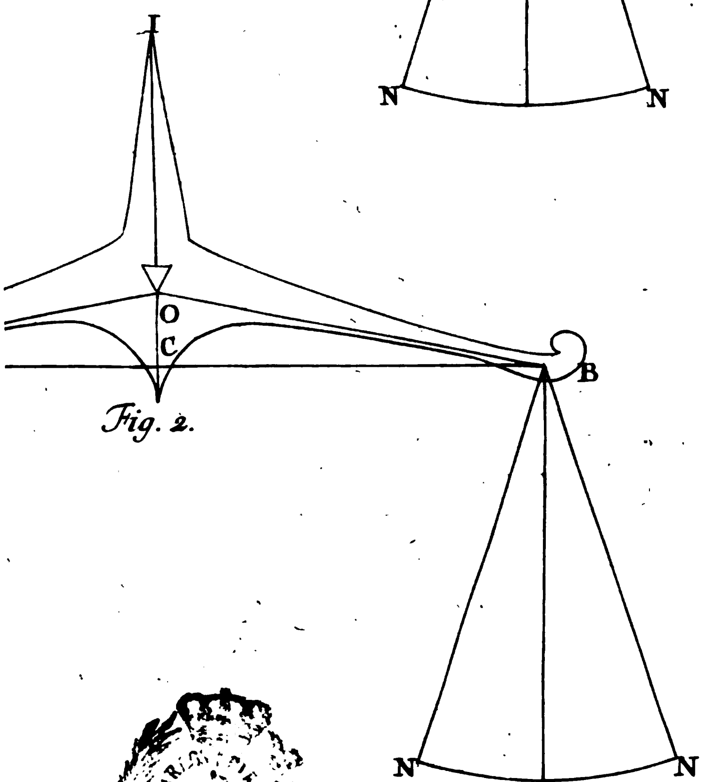
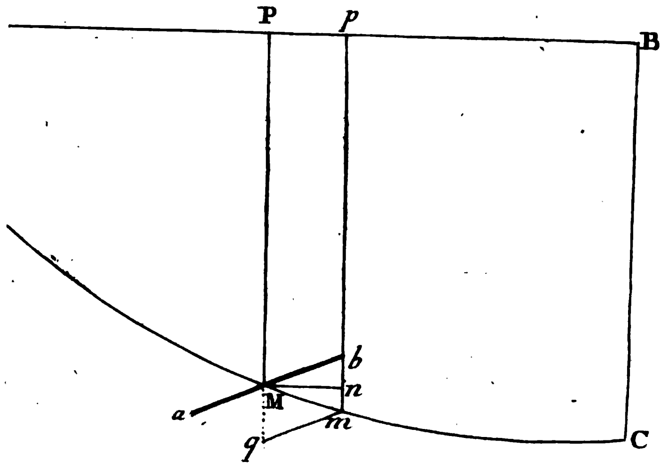
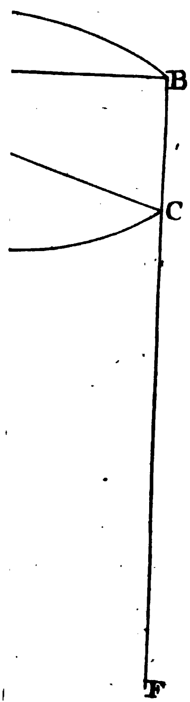


Fig. 2.





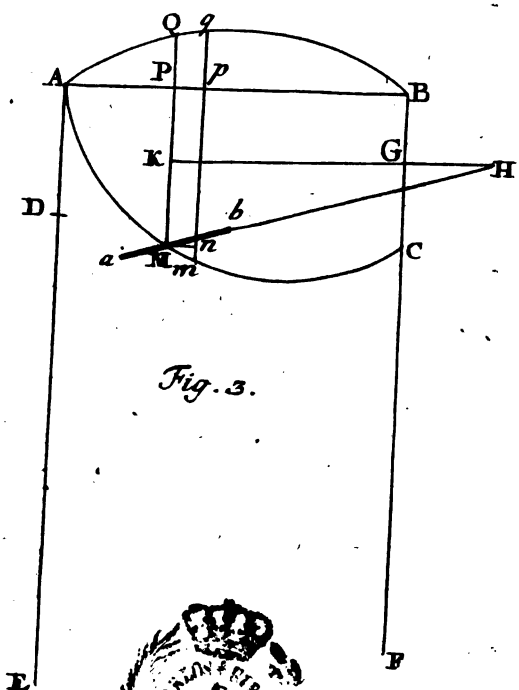


Fig. 3.

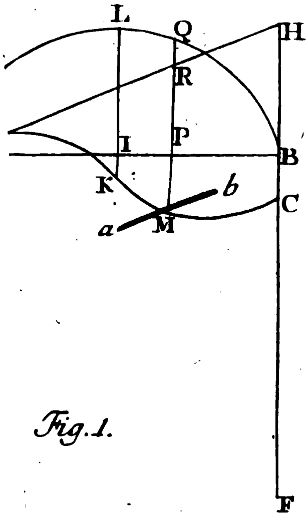


Fig. 1.

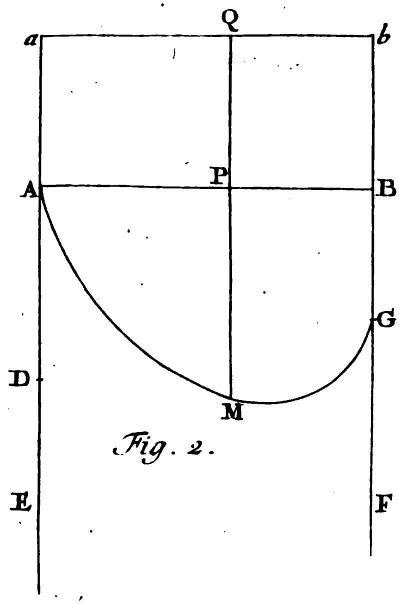
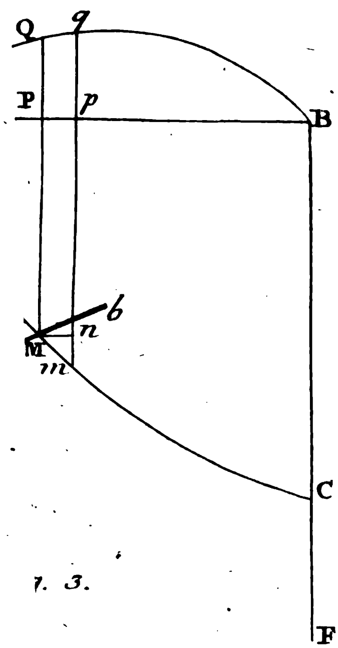


Fig. 2.



7. 3.

g. I.

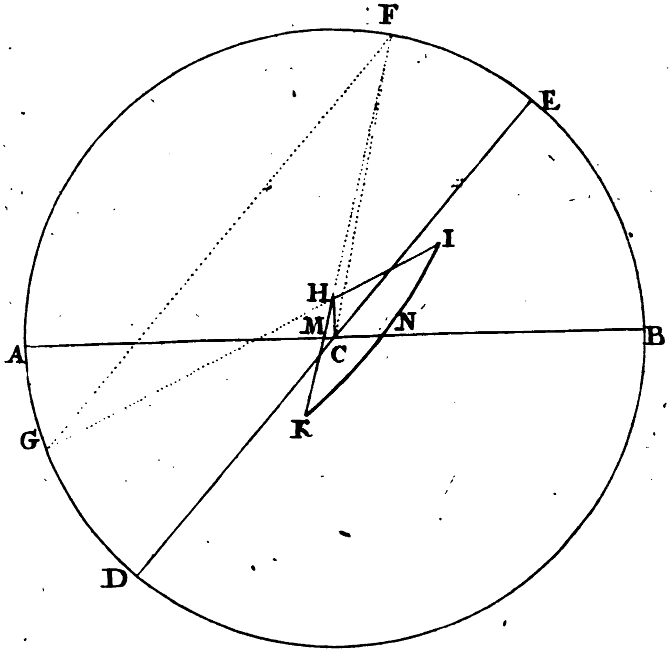


Fig. II.

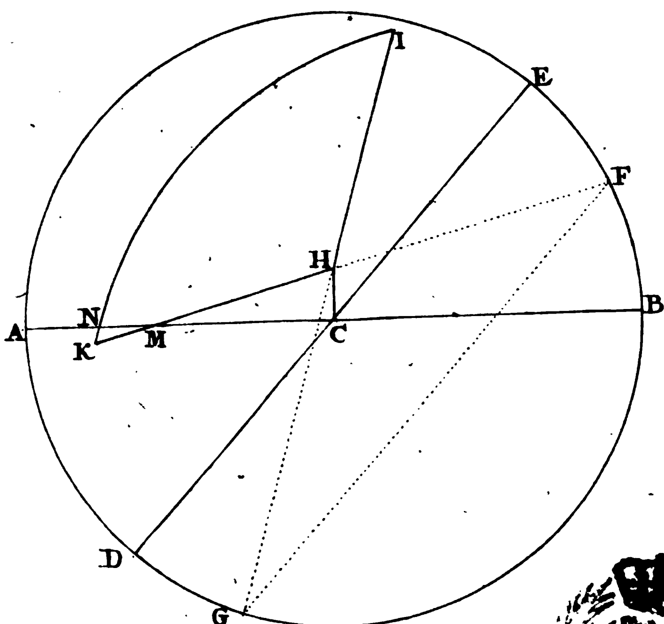


Fig. III.

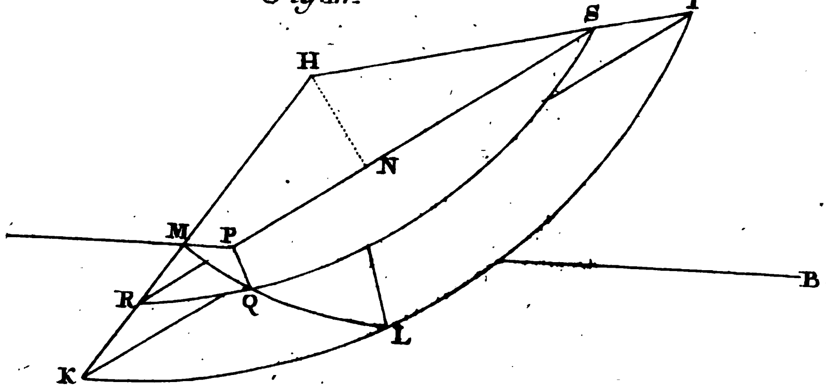


Fig. IV.

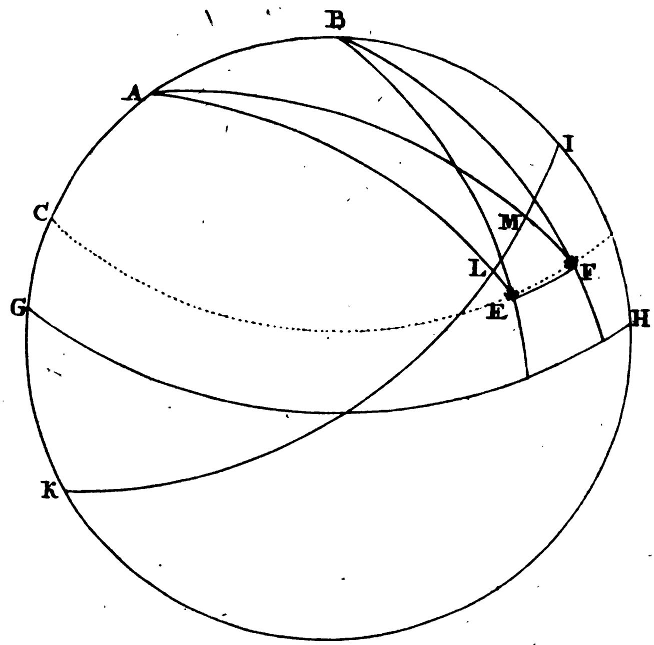


Fig. III.

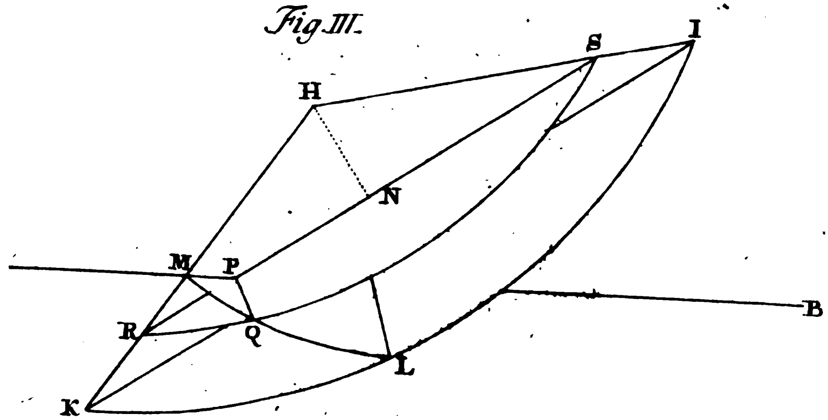


Fig. IV.

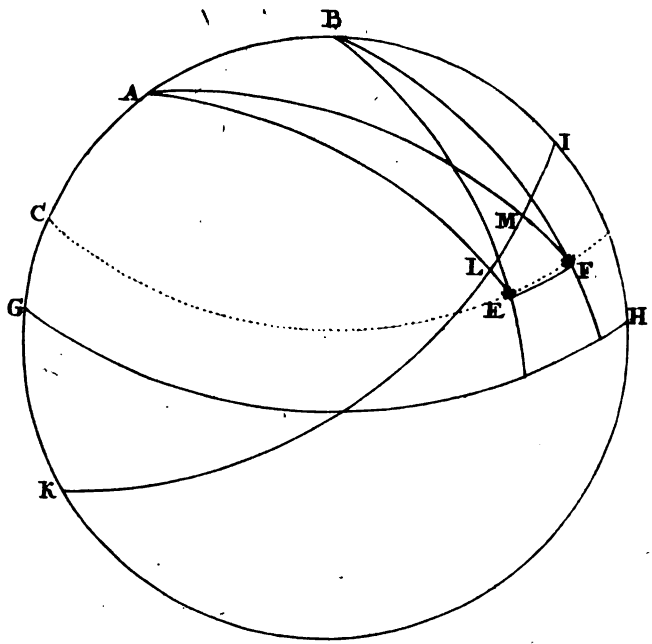


Fig. V.

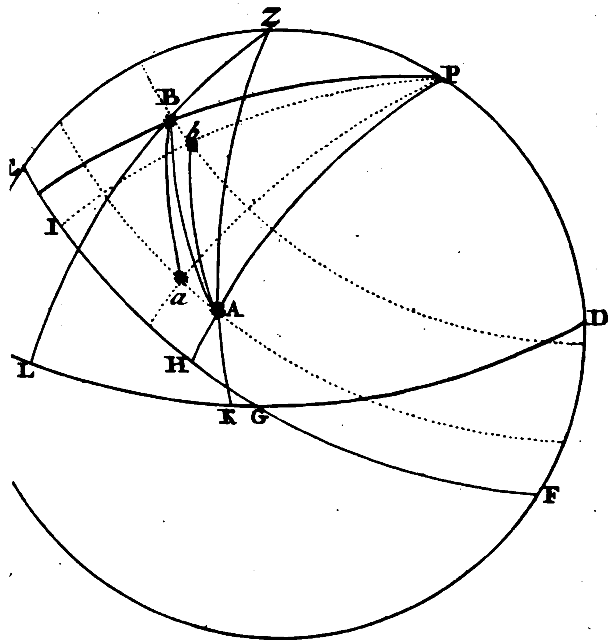
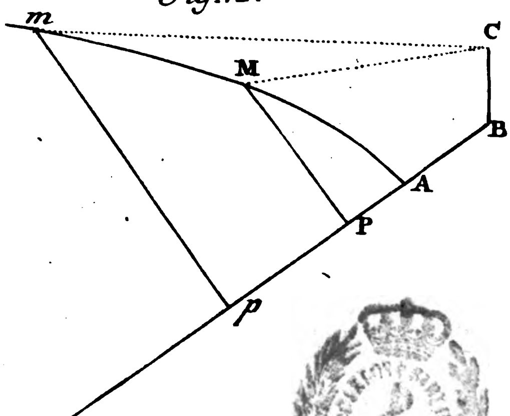


Fig. VI.



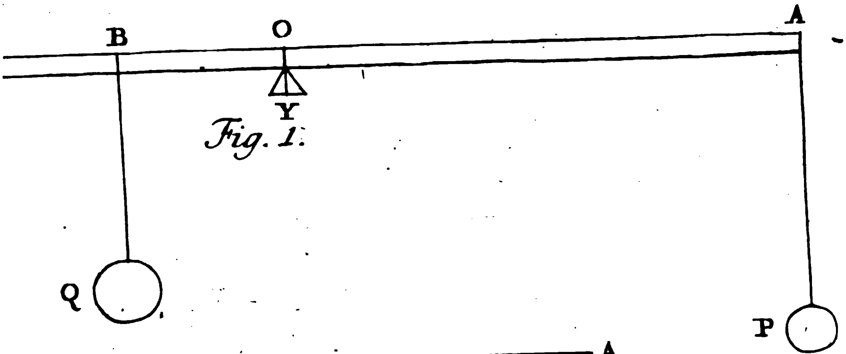


Fig. 1.

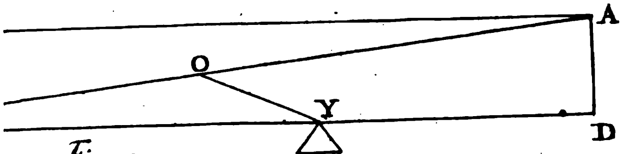
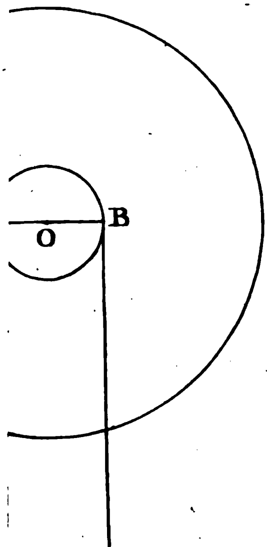


Fig. 2.



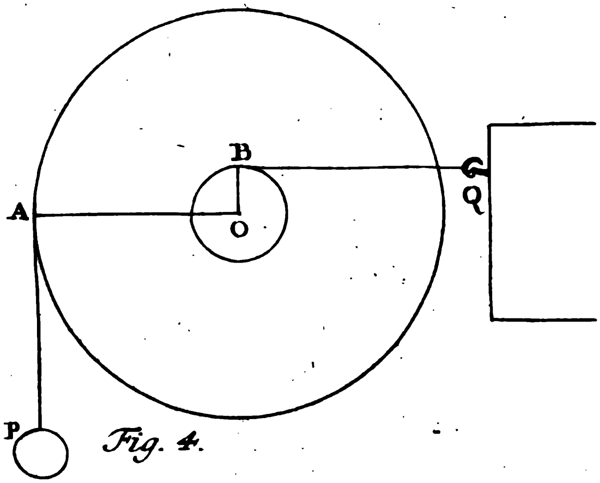


Fig. 4.

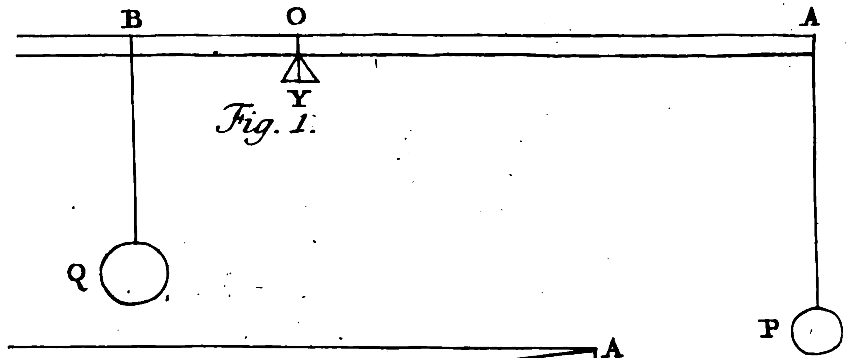


Fig. 1.

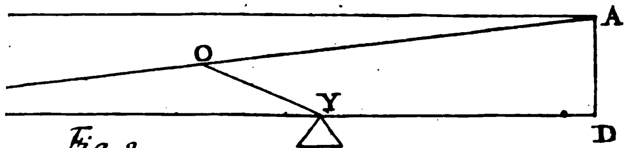
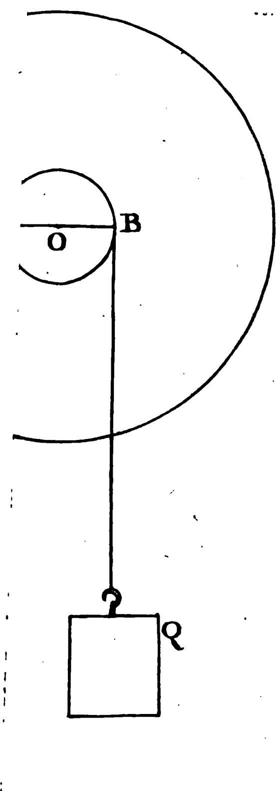


Fig. 2.



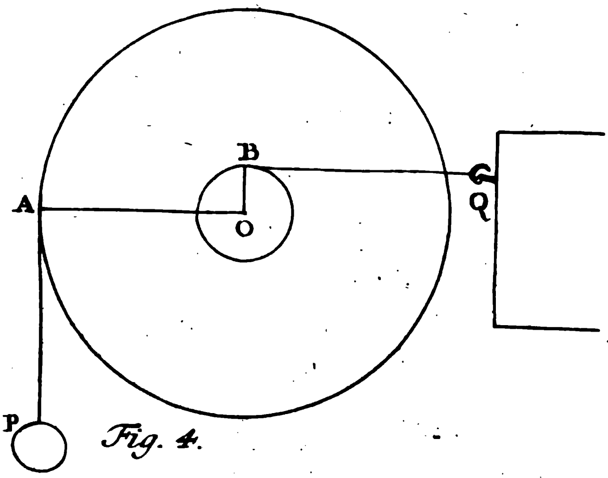
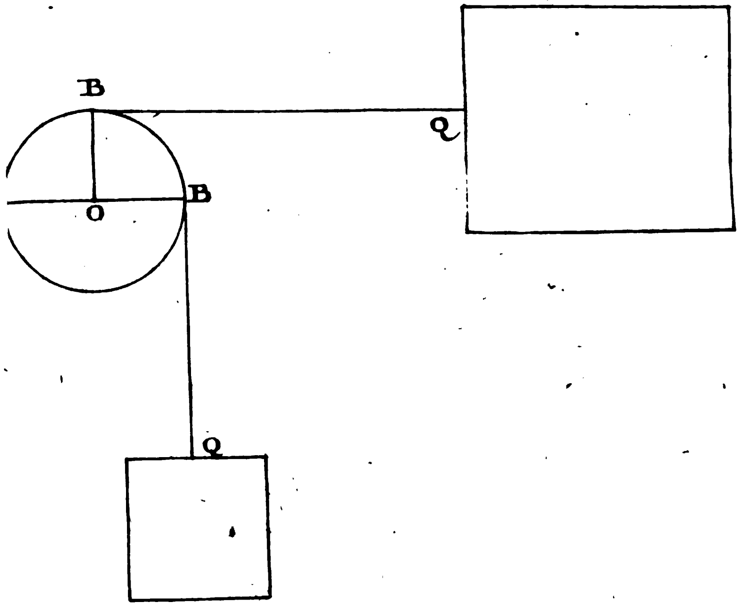


Fig. 4.



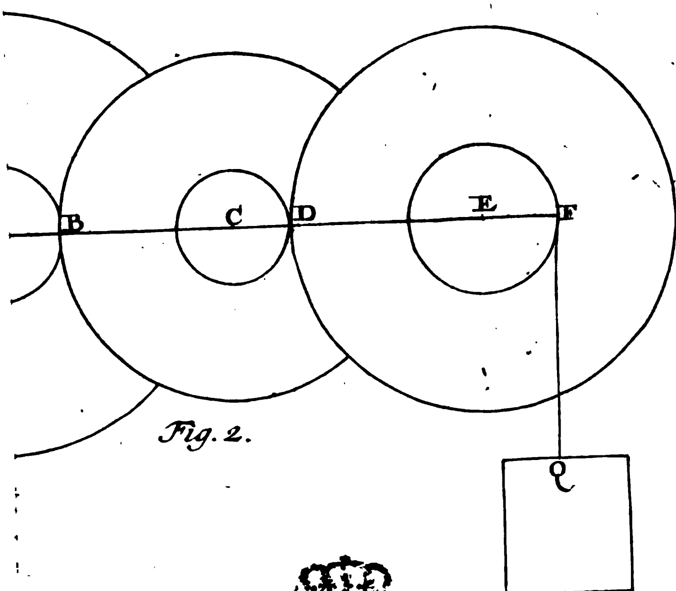
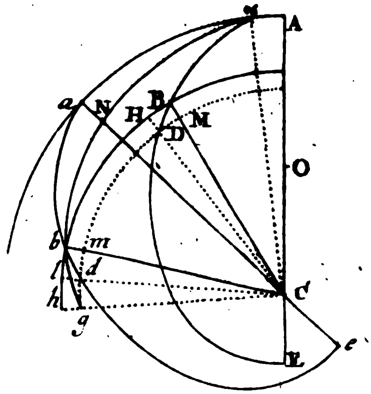
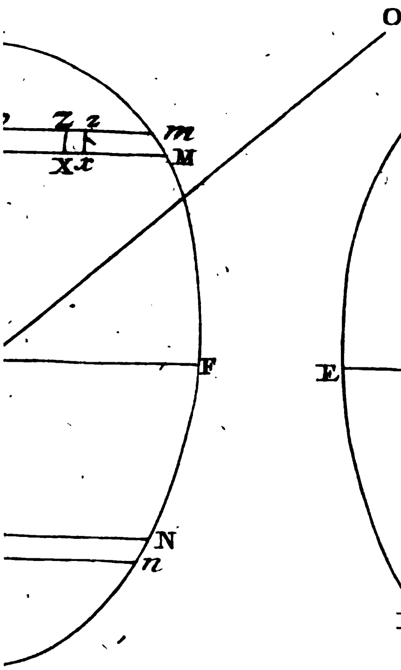


Fig. 2.


A
a
N
H
B
M
D
O
b
m
f
d
C
h
g
E
e



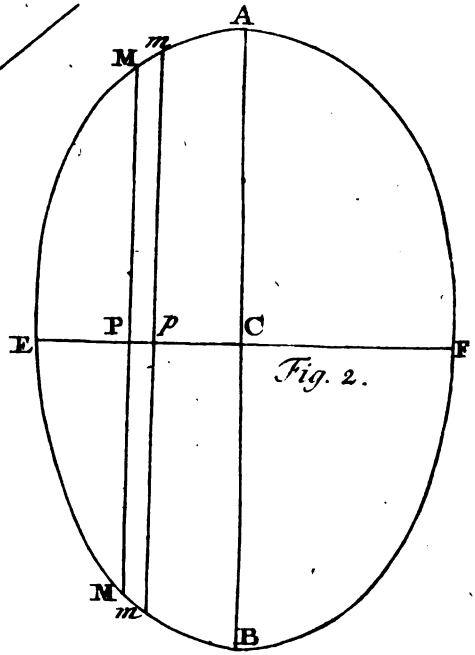
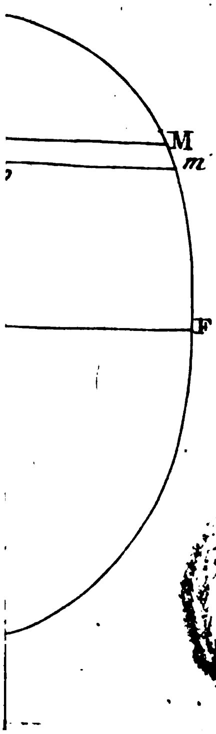


Fig. 2.



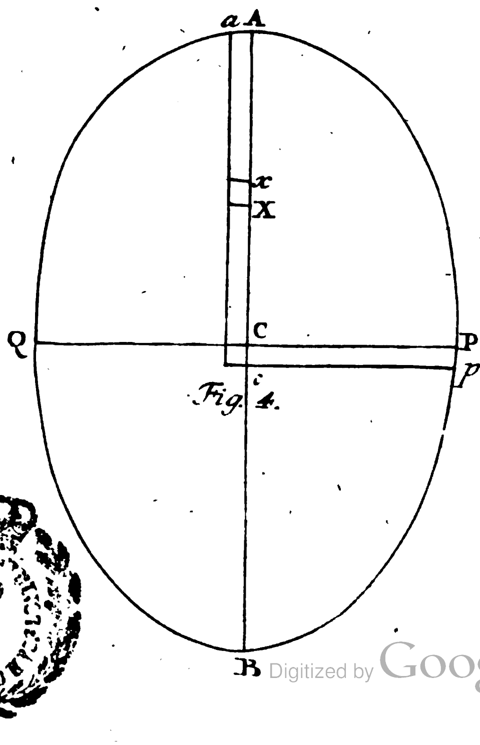


Fig. 4.

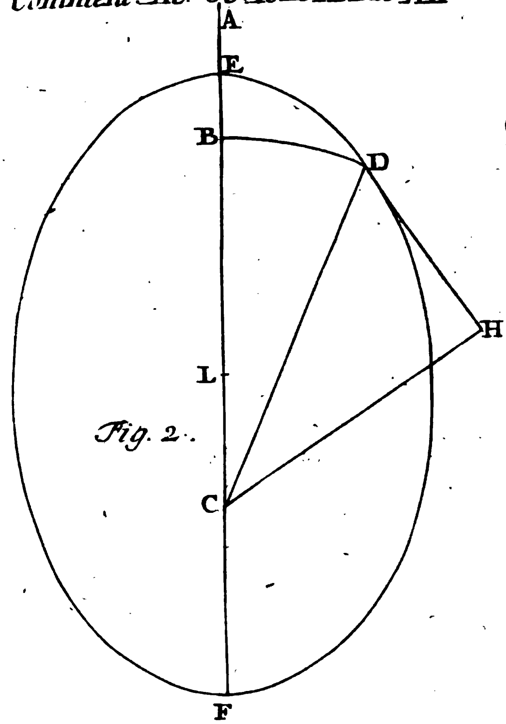
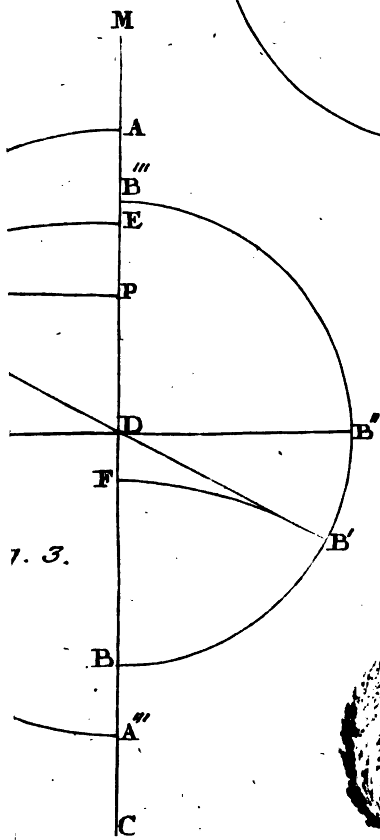


Fig. 2.



g. 3.

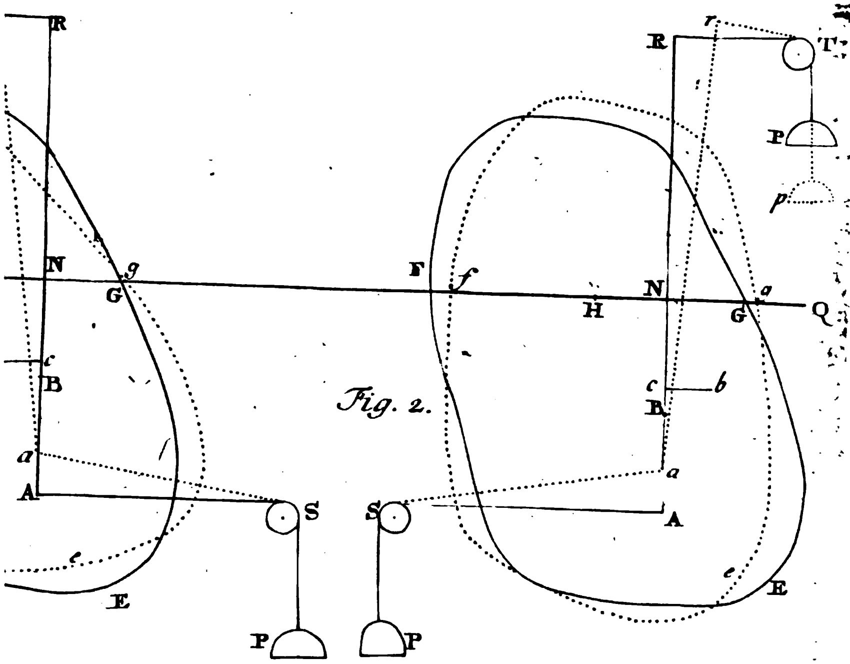


Fig. 2.

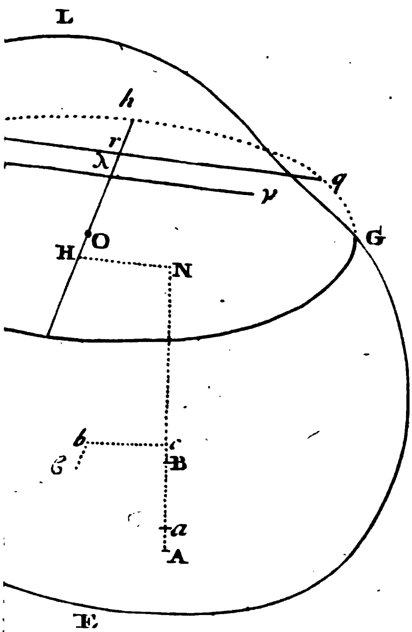


Fig. 3.

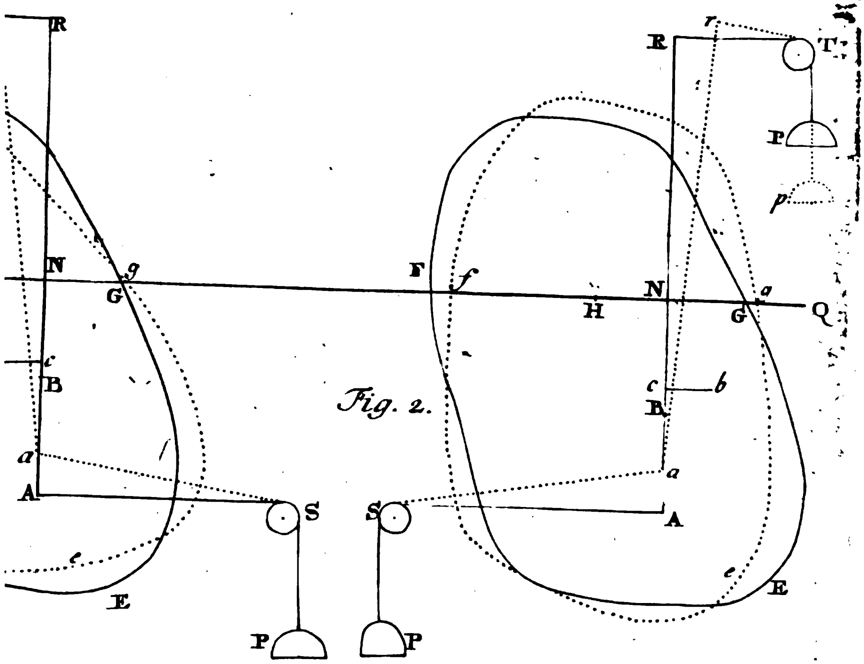


Fig. 2.

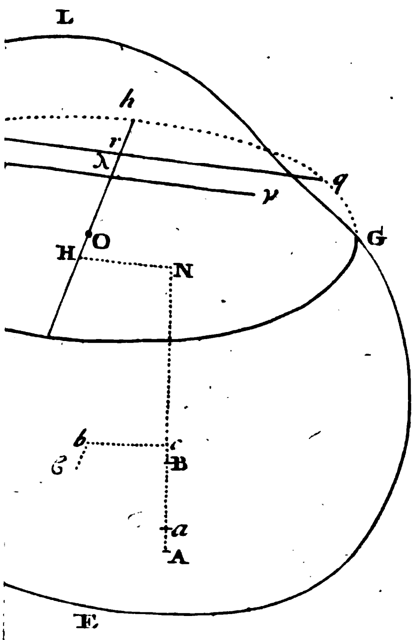
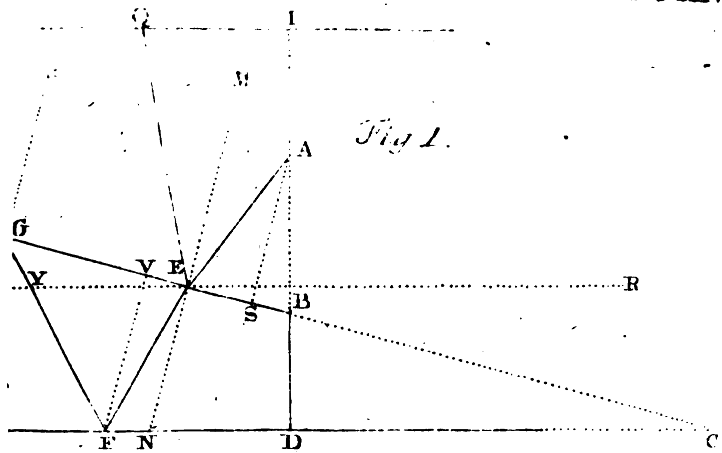


Fig. 3.

Fig 1.



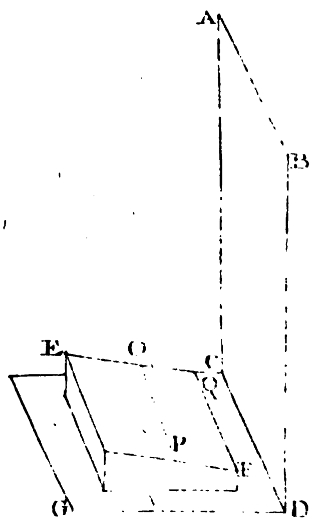


Fig. I.

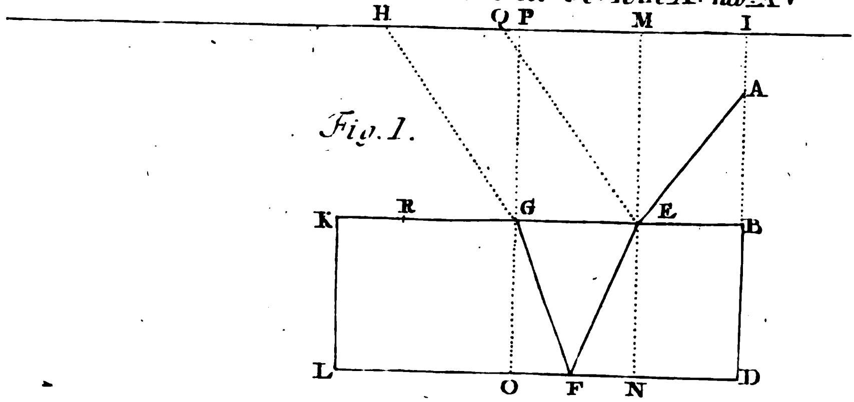


Fig. III.

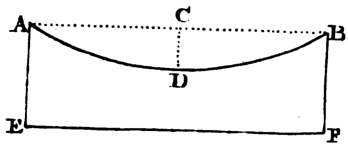
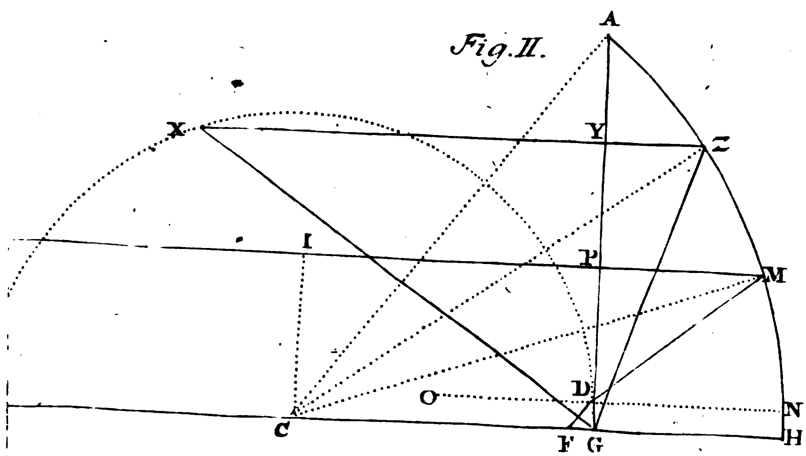


Fig. II.



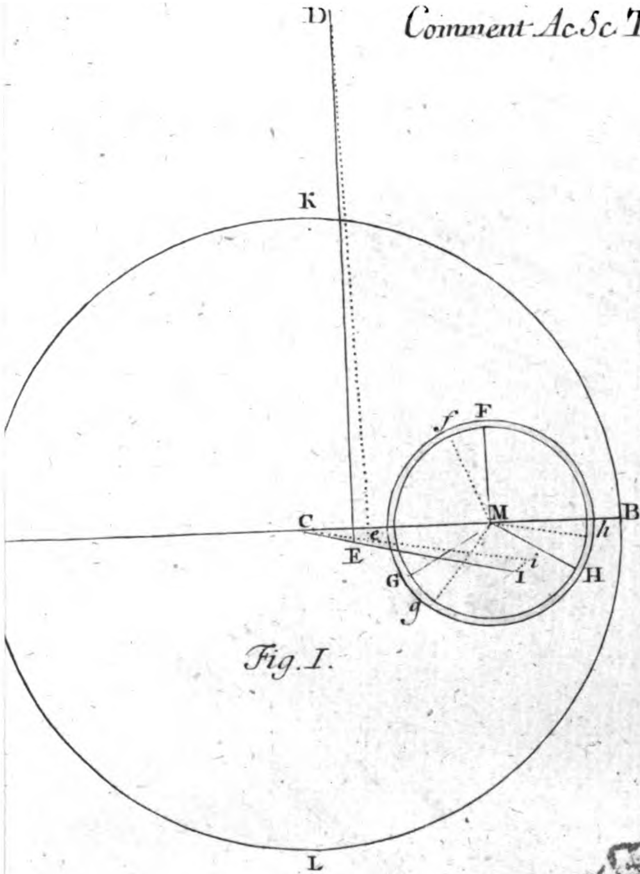


Fig. I.

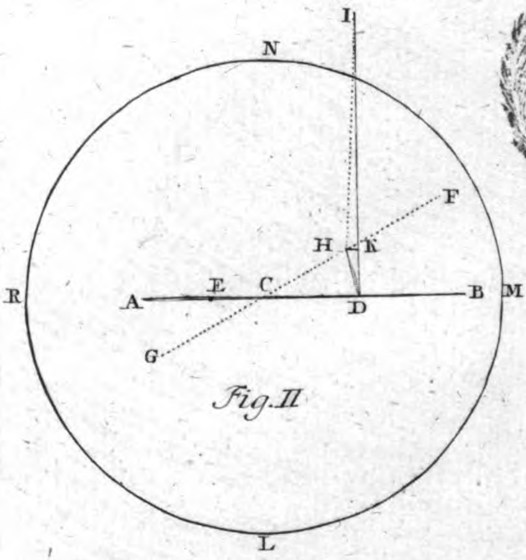
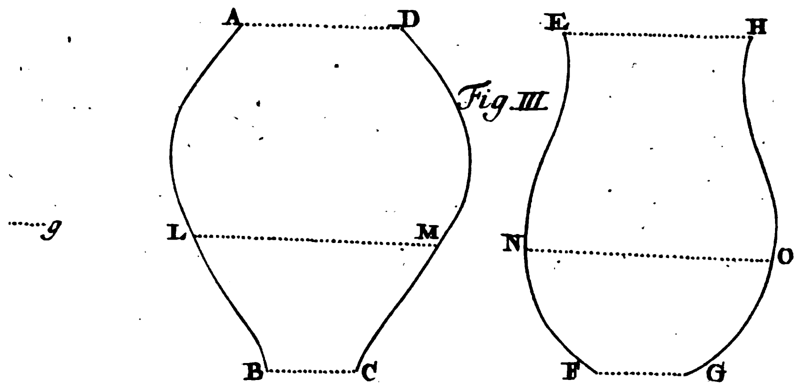
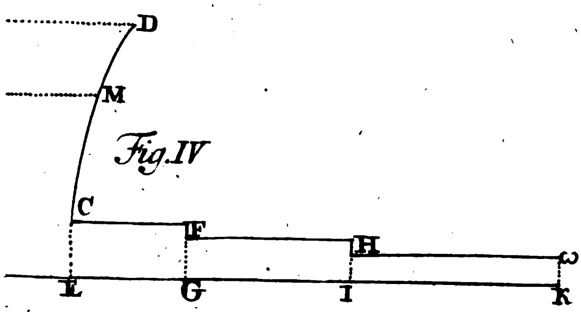
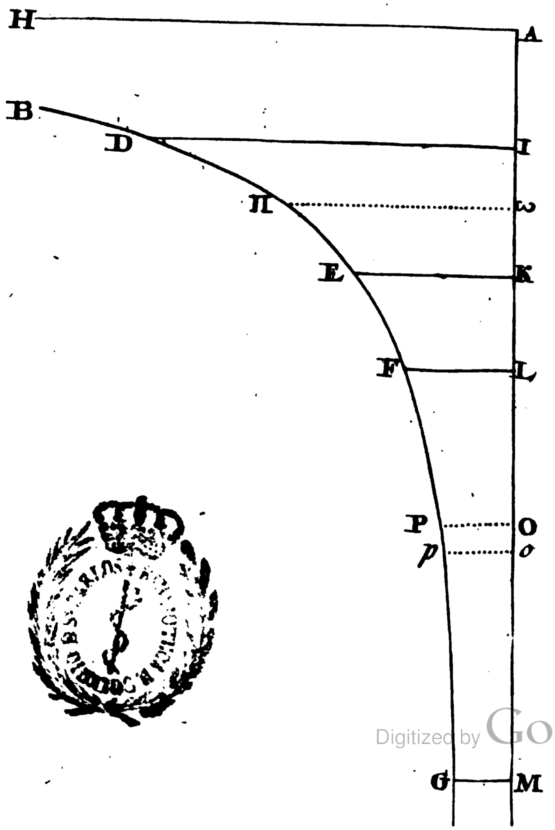


Fig. II


A
D
E
H
Fig III
g
L
M
N
O
B
C
F
G


D
M
Fig IV
C
F
H
ω
E
G
I
K


H
A
B
D
I
Π
ω
E
K
F
L
P
O
p
o
G
M

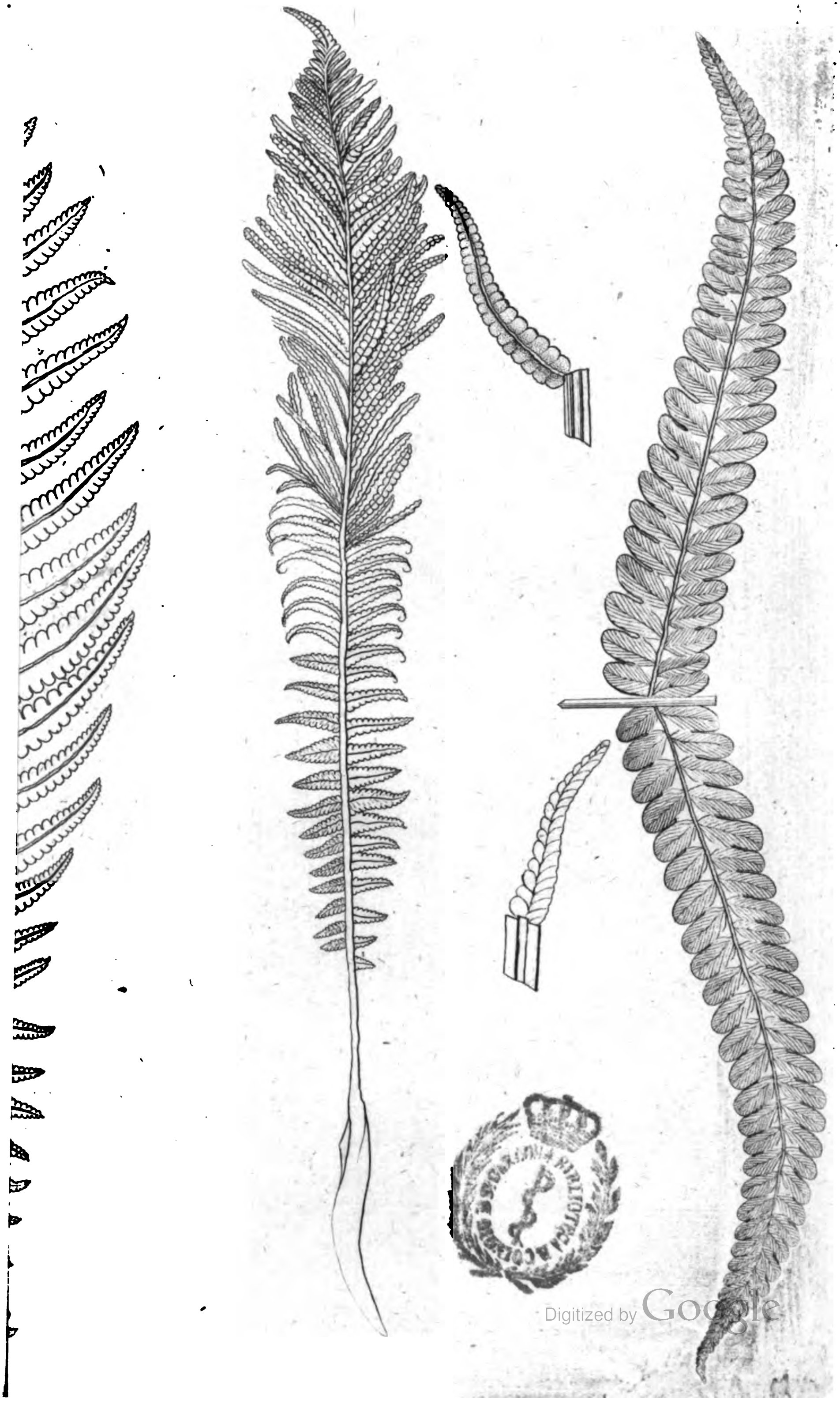
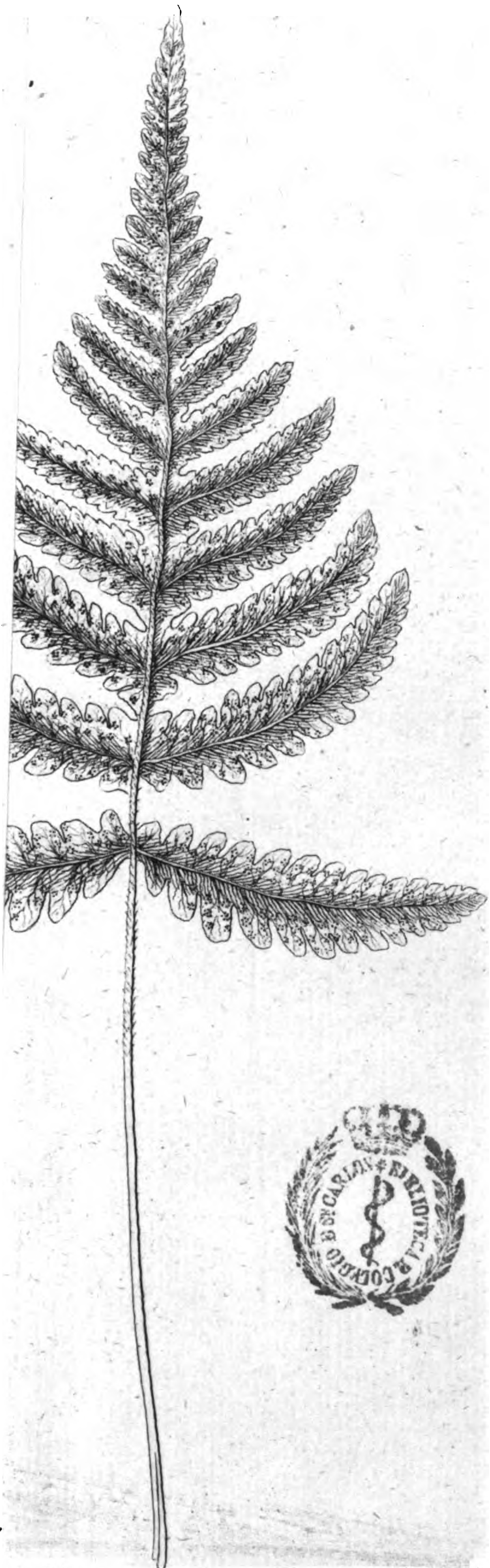


fig. 1.

fig. 2.

Americanum minus hirsutum



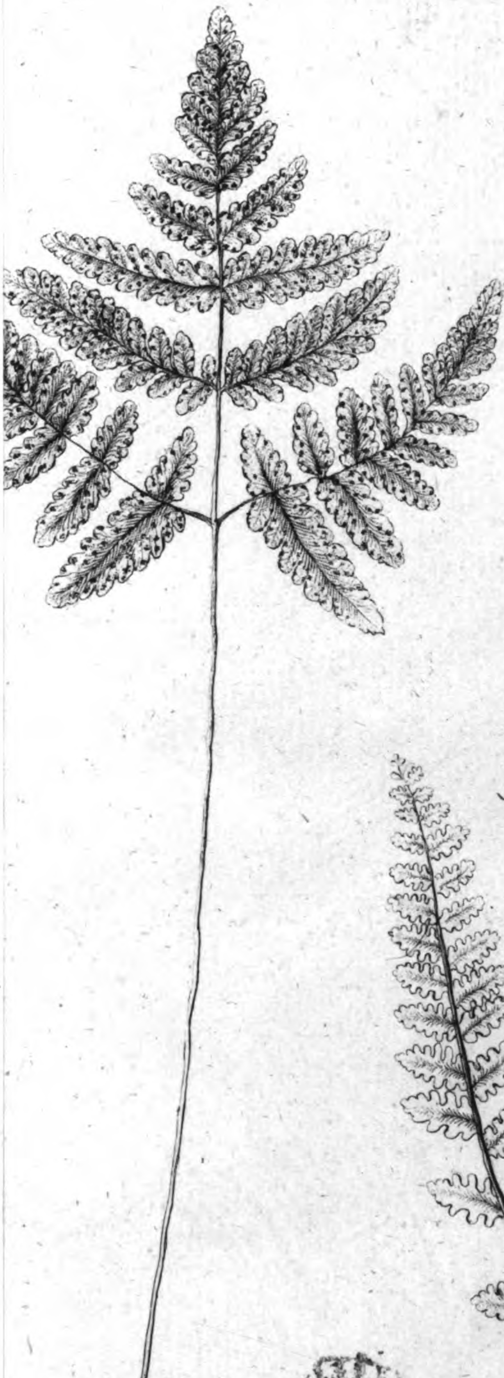


fig. 2.

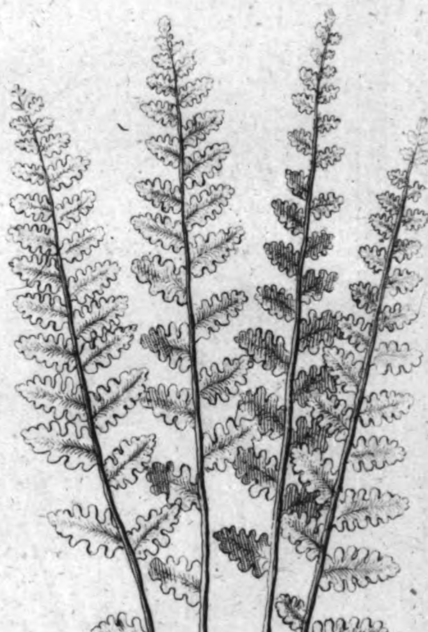
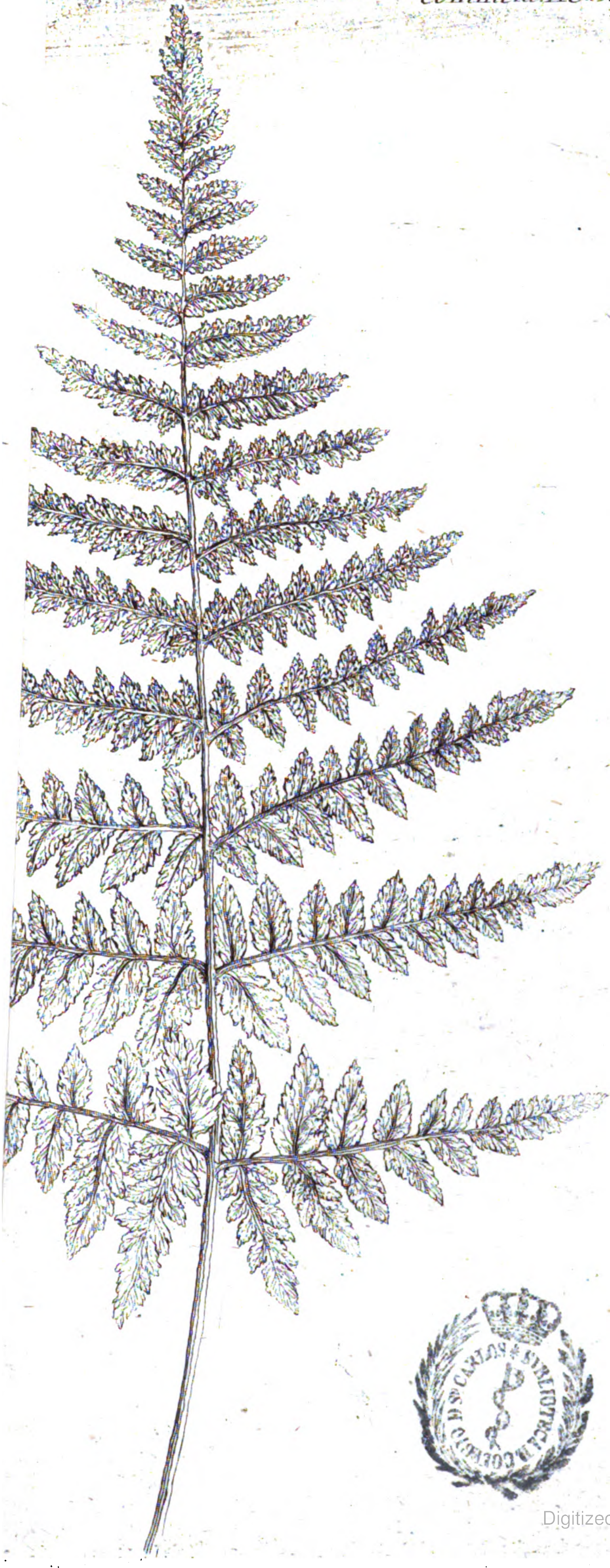
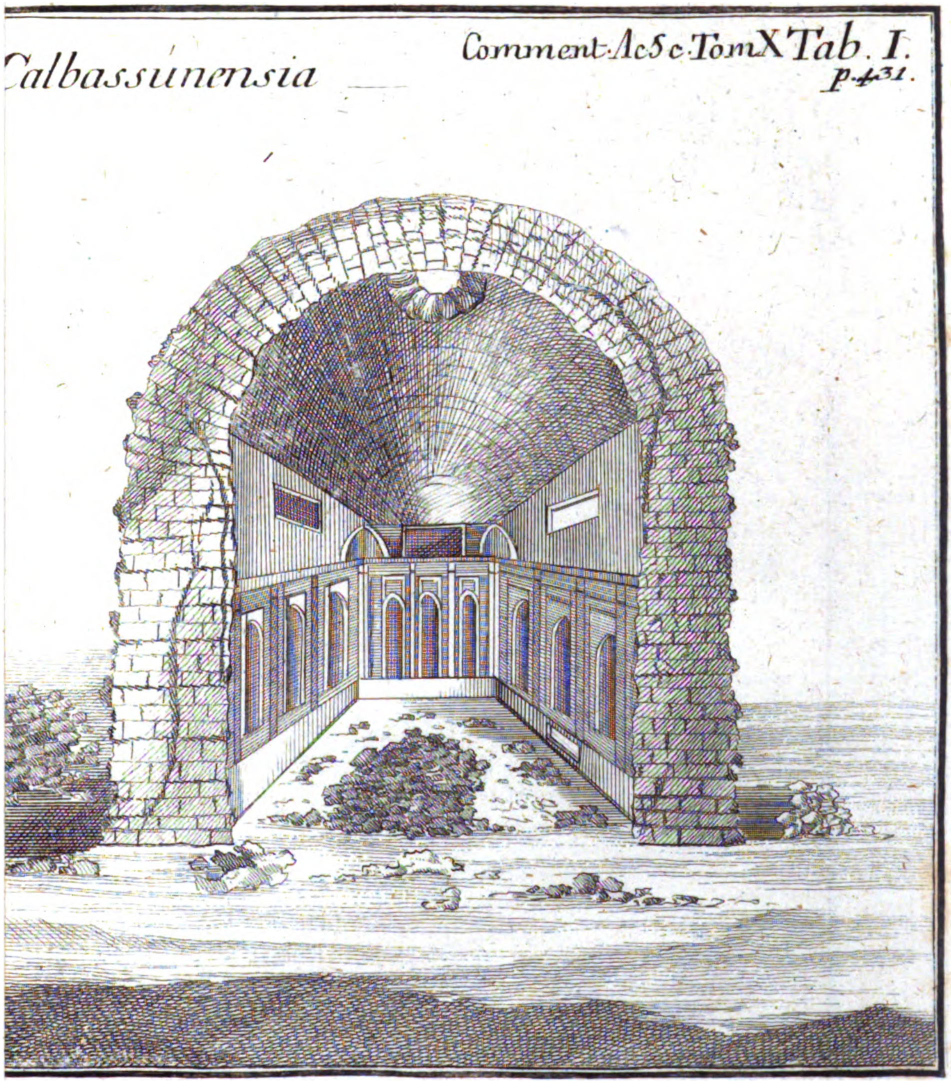
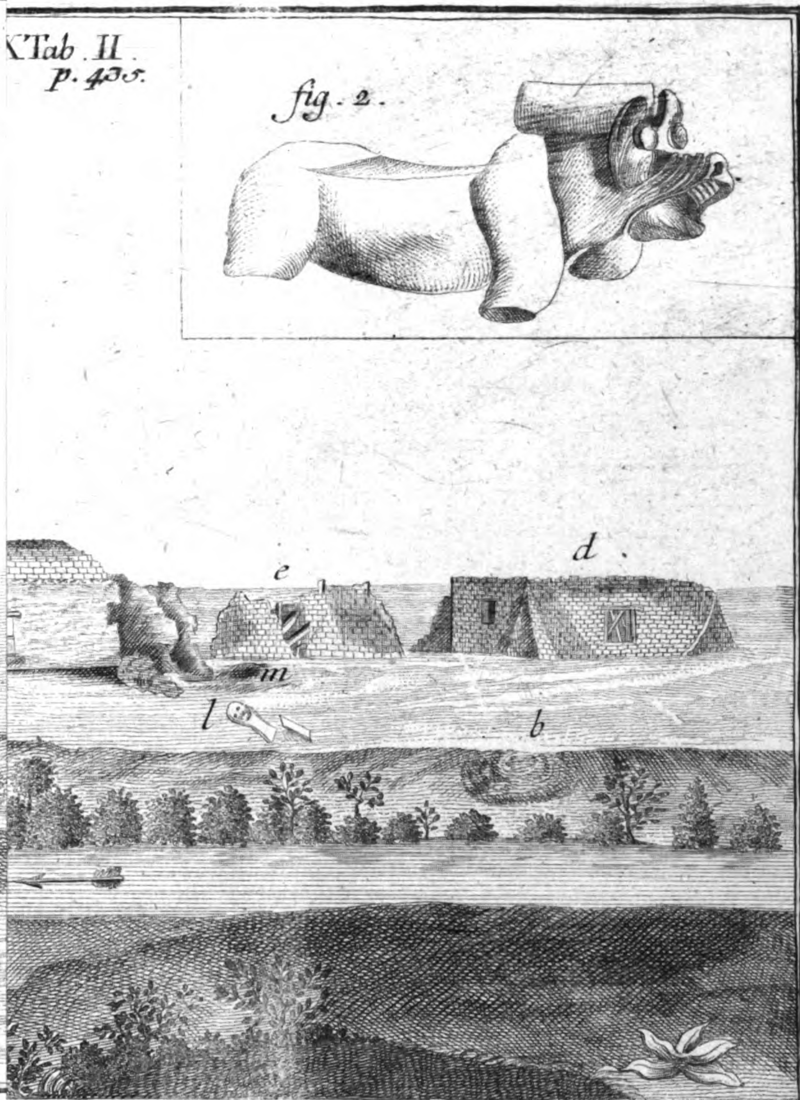


fig. 1.



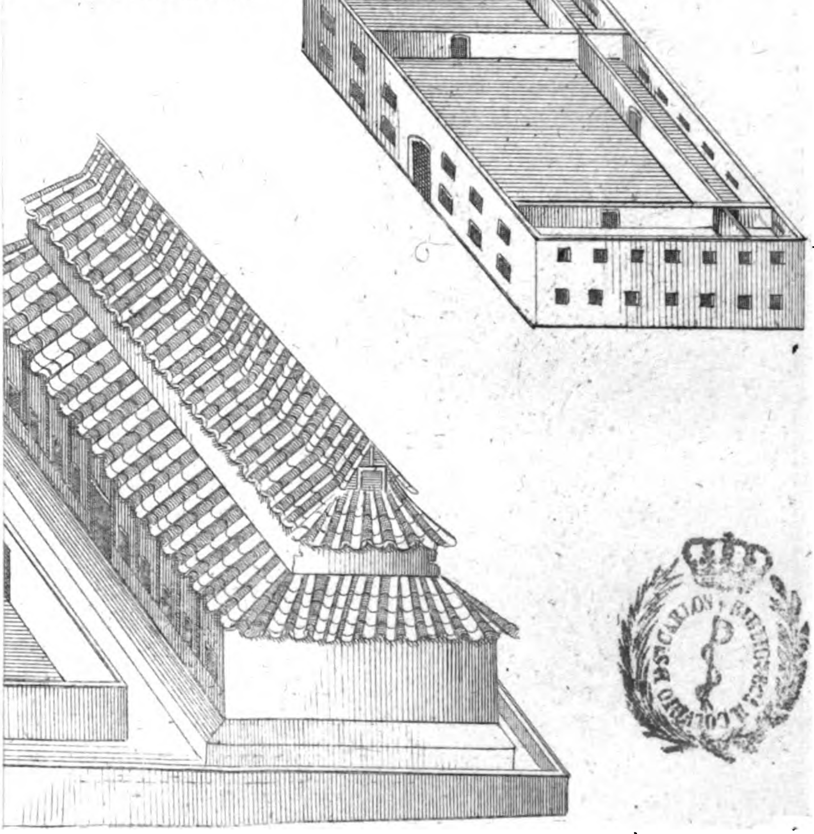

Calbassunensia
Comment. Ac. Sc. Tom X Tab. I.
p. 431.

Tab. II.
p. 435.




Comment. Ac. Sc. Tom. X. Tab. III
p. 441.
Ichnographia
aedium Ablakitensium et totius
moenium ambitus quibus cin-
guntur.

blakitensium



lakitiani
nposita fuerunt.

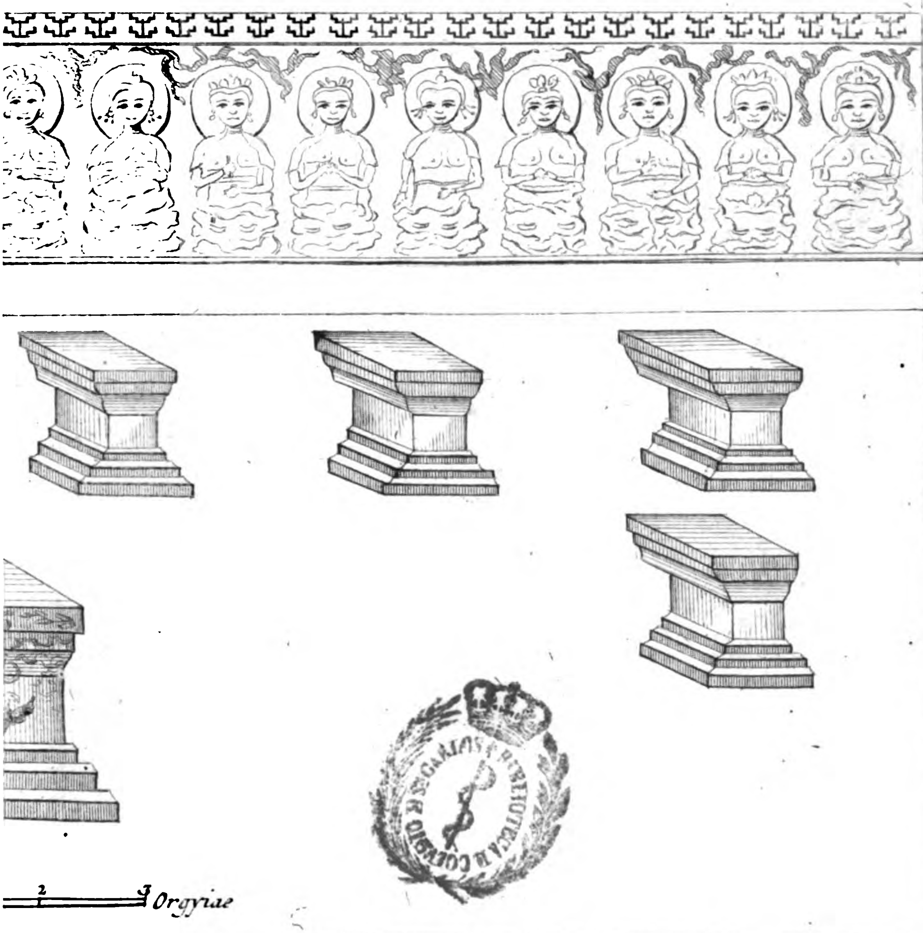


fig. 1.

fig. 3.

dolatrica Comment. Ac. Sc. Tom. X. Tab. VII.
p. 455.

Textus Tanguticus

།བར་ཐུགས་སུ་ཆུད་པ་ཨ

bar tug^k^ su tschud ba a

ཁས། འདི་དག་ཐམས་ཅད་ཟ

kai, di dag^k^ tam dschadsi

ཀྱི་ཉི་ཆོས་ཀྱི་མཚན།། ལྷུན་ར

dschi ni tschoi dschi tsan: lun

ཉིད་ནི་སྟོང་པ་ཉིད་དུ་ཡང་དག

njid ni dong ba njid du jang d

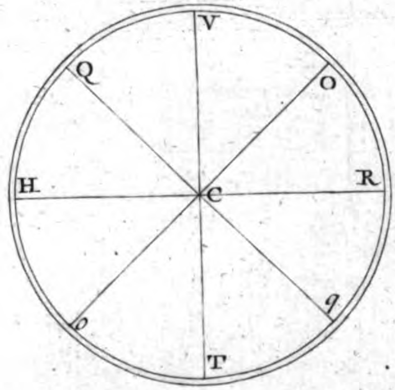
རབ་ཏུ་ཏེས་པར་ལགས་བྱི།། བར

rab du dei bar lai dschag^k^

Textus Tangutici versio Mong

Testimonium interpretis, quod versioni suæ

Fig. 2.



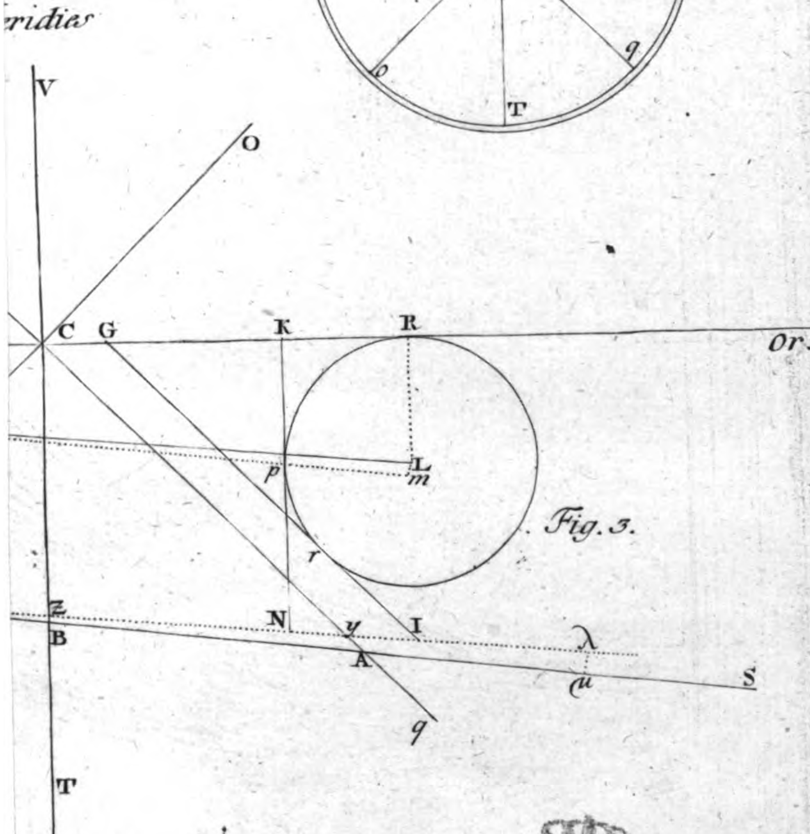


Fig. 3.

Fig. 4.

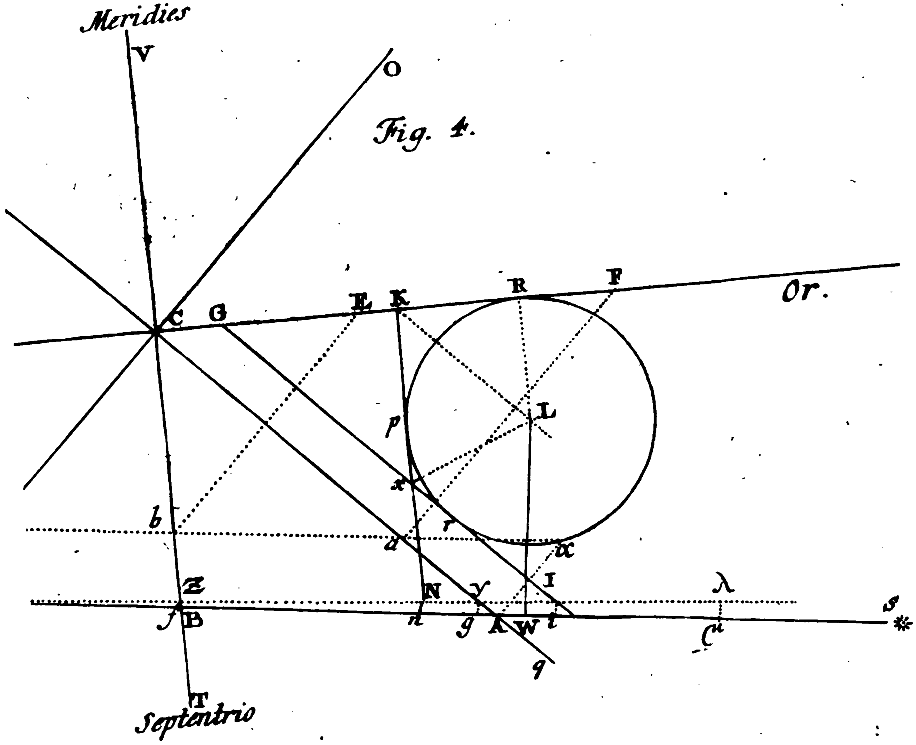
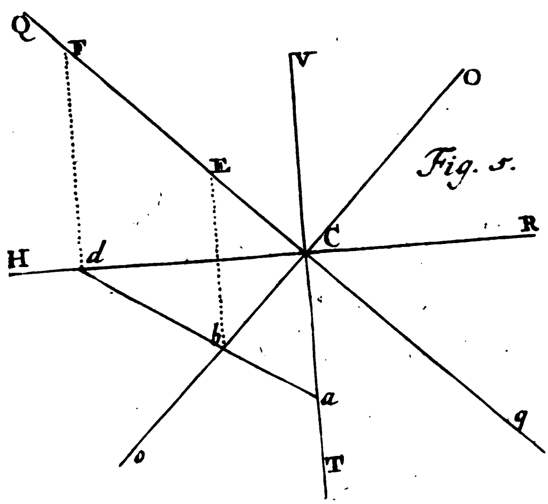
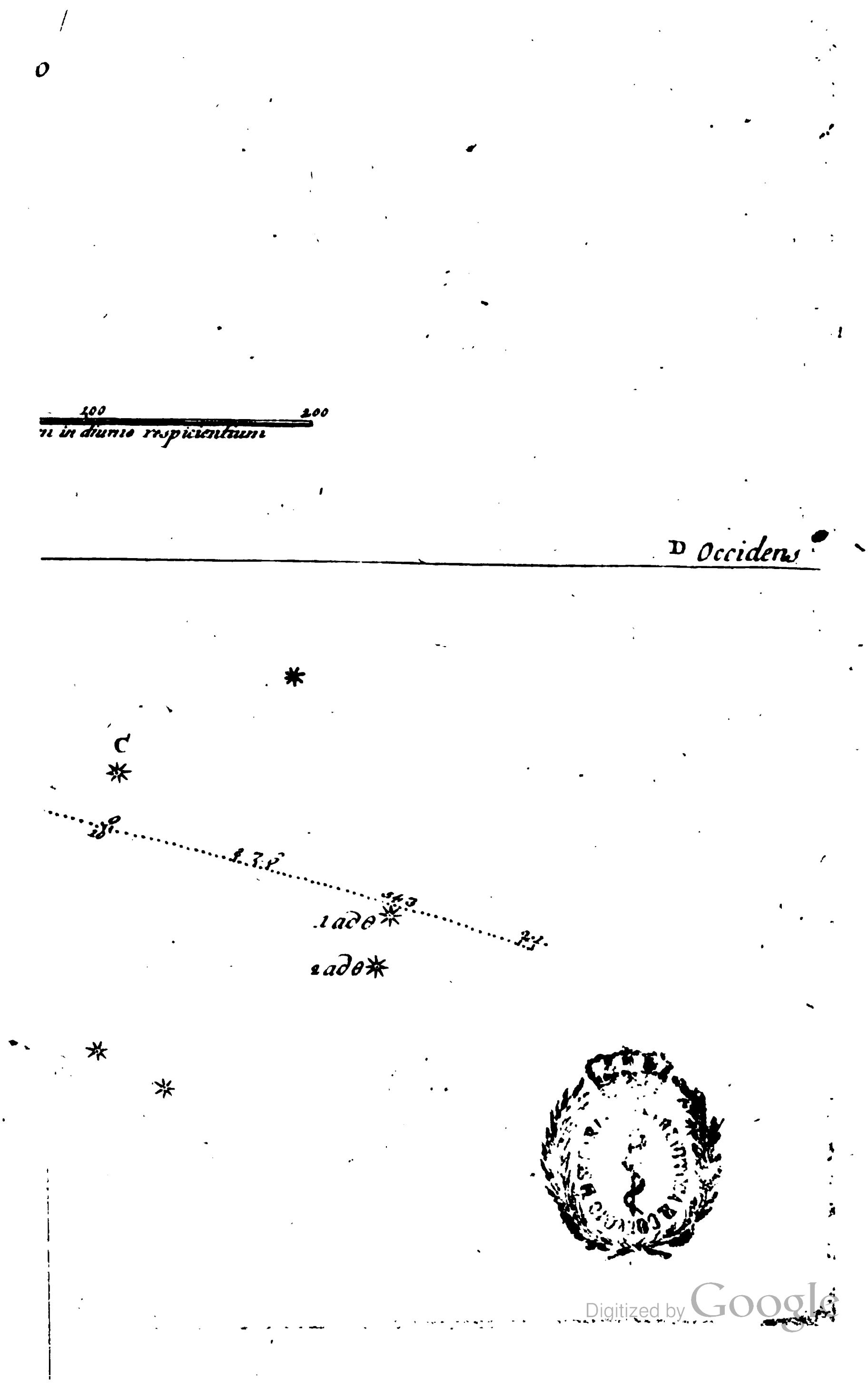

Meridies
V
O
C
G
E
K
R
F
Or.
L
p
x
r
b
d
x
Z
I
N
λ
f
B
n
g
A
W
t
s
q
T
Septentrio

Fig. 5.


Q
F
V
O
E
C
R
H
d
b
a
o
q
T


O
100
200
D Occidens
C
1 ade
2 ade