



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

L Soc 3983.5

L Soc 3983.5

9468

7



COMMENTARII
ACADEMIAE
SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE

TOMVS I.
AD ANNVM cl3 l3cc xxvi.



3. PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE
cl3 l3cc xxviii.

LSoc3983.5

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY

LSoc
3983.5
7-12

P E T R O I I

R V S S O R V M I M P E R A T O R I

A V G V S T O

C E T E R A C E T E R A C E T E R A

I M P E R I V M P A C I F I C V M

D I V T V R N V M F E L I X

P R E C A T V R

A C A D E M I A P E T R O P O L I T A N A .



Vanquam dictu difficile est, utrum belli an pacis artibus maiorem gloriam consecutus sit PETRVS MAGNVS Imperator, Avus Tuus, tamen hoc utique certum est, eum in utroque genere excellentem non modo praeclara multa et paene incredibilia praestitisse, verum etiam plura voluisse animo, et futuro tempore exequenda destinasse, nisi inopinata morte oppressus fuisset. Quae cum orbi terrarum nota sunt, supervacaneum foret, hic repetere, si ullo pacto temperare nobis possemus a tantarum virtutum commemoratione, quas in Te iam renascen-

scentes, imo, ut rectius loquar, in iuventute Tua maturas cernimus aptasque ad perficienda omnia, quae Petro in caelum recepto Divina Providentia Tibi reservavit.

Inter ultimas Magni illius Imperatoris curas non minimam fuisse constat, quam de Academia Petropolitana susceperat; neque arbitror, ullum huic Academiae honorificentius, aut de eiusdem utilitate certius testimonium produci posse, quam quod divi Petri auctoritate partim in Germania, partim in Gallia Italiaque tam solícite, tam constanter, tantisque praemiis propositis, viri, qui huic negotio pares credebantur, conquistati sunt, quorum studia labores ac vigiliae, cum ad cives Tuos, AVGVSTE, in primis pertineant, eo minus hoc primum suorum Commentariorum volumen Tibi Patri Patriae offerre dubitant Academi- ci, quod Avi Tui auspiciis iam pridem inchoatum, Tuo nunc demum iussu ac munificentia in publicam lucem prodit.

His suis speciminibus non infeliciter se imitatos putant Societatis Parisinae aliarumque industriam, quarum iudicio et exemplo se tuentur adversus illorum reprehensionem, qui acutissima in Physica et Mathesi problemata

*contemunt, nisi illico usus eorum aliquis in
Mechanica similive arte ostendatur: tanquam
si cognitio veritatis, quae ipsa per se in omni
doctrina sapientem delectat, solius lucri, quod
inde quaeri potest, magnitudine metienda sit,
cum tamen utilitas Geometriae difficilioris il-
lius atque intimae, etiam in quotidianis re-
bus ingens deprehendatur, uti ex iis, quae de
arte navigandi, de temporis in aequales arti-
culos divisione, de iactu telorum, propaga-
tione soni atque luminis aliisque quam pluri-
mis problematis demonstrata fuerunt, constat.
Praeterea siderum scientiam Astronomi tum
Petropoli colunt, tum ad extimas, quae im-
perio Tuo parent, septentrionis oras transtu-
lerunt, ut iuncta in tam diversis locis opera
observationes suas ad incrementum Astrono-
miae atque Geographiae conferrent. Erunt
denique in iis, quae ad Anatomem et Huma-
nitatis studia pertinent, nova non pauca, nec
aequis iudicibus spernenda.*

*Academici vero existimarunt, se non me-
lius de civibus Tuis, quibus erudiendis praefe-
cti sunt, mereri posse, quam si amorem earum
artium, quarum scientiam ipsi profitentur, Ti-
bi a teneris commendarent, quando ad Impe-
ratoris*

ratoris exemplum reliqua hominum turba componi solet: idcirco Mathematicum et Historiarum epitomas quasdam aetati atque indoli Tuae aptas partim ediderunt, partim adhuc parant, quibus utriusque scientiae initia traduntur, facilia illa quidem, sed ita necessaria, ut sine iisdem ad veram eruditionem nemo perveniat. Praeterea usum machinarum in attenuando comprimendoque aere, in allevandis parva vi maximis oneribus, in excitando per radios solis igne, aliaque et utilia et visu iucunda Tibi semel atque iterum demonstrarunt, quum, mirantibus iis, qui adstabant, contemplari omnia accurate, antliam denique ipse manu versare atque aerem extrahere gauderes. Haec illi, ut potuere, in hunc diem tentarunt, plura olim, atque maiora in Tuum Tuaeque gentis usum praestituri. Sicut non illico poma profert arbor peregre transplantata, sed tempore opus habet et cultura soli, ut radices agat atque in terram insinuet, antequam efflorescat et fructus ipsa suos carpentibus commendare possit: ita mirum non est, uno alterove anno non omnia commoda ex Societate nostra in Russiam emanasse, quae procedente tempore certo sequentur, postquam leges Academicis datas et redditus a Petro Magno

gno iisdem constitutos Tua singularis benevolentia in sempiternum tempus confirmavit.

Tibi vero DEVS hunc erga bonas artes animum servet, avertatque a Te, quaecunque indoli Tuae divinae repugnant. Servet Tibi hanc clementiam atque mansuetudinem, qua paucis post adeptum imperium diebus edicebas, “ praecipuam
“ Tibi curam fore, ut populum Tuum pietate
“ et iustitia regas, ut afflictis succurras, ut pauperes et iniuste oppressos ad Te confugientes
“ non repellas, sed vultu sereno querimonias
“ eorum exaudias et laudatissimo Titi Vespasiani exemplo neminem unquam a Te tristiores
“ dimittas.

Quid non boni expectemus ab Imperatore, qui haec pollicetur? Quae profecto tanta sunt, ut nec Russia Dominum optare possit, cui pareat libentius, neque alium eligere potuisse videatur Divina Providentia, cui potius, quam Tibi generique Tuo imperium sine fine concederet.

Moscauae
Calend. Novembr.
clb lccc xxviii.

Academicorum nomine
scripsit

Christianus Goldbach.



PRAEFATIO.

Non dubito, quin Societatis nostrae Commentarii, cum ad exteras nationes pervenerint, desiderium in illis excitaturi sint, penitus cognoscendae huius ipsius Congregationis, et sane interest eruditorum, praesertim qui communia nobiscum studia colunt, ut non solum sciant, quid apud alias gentes novi inventum sit, et quae incrementa ipsae artes ceperint, sed etiam intelligant, quo numero et loco sint illi, qui has artes profitentur atque exercent, nobis vero favorem ac beneficia Augustorum, quibus convocati, et in hunc diem excepti nutritique sumus, silere, nisi ingratis, non licet.

)(

PE-

PETRUS I. Rufforum Imperator cum per varias Europae regiones iret, in quibusdam vero etiam subsisteret diutius, ita ubique versatus est, ut quidquid usquam optimum esset, id animo comprehenderet atque in civium suorum usum conservaret, consilio laudabili, successu admirando. In Britannia et Belgio, non modo quae ad instruendam classem, bellumque navale administrandum pertinerent, solícite perspexit ac tenuit, sed prima rei nauticae rudimenta artemque naves et gubernandi et extruendi didicit, sed didicit ea solertia eaque laboris patientia, quae fidem apud posteros superabit. In Germania haud dubie complura ad usum belli et emendationem disciplinae militaris utilia observavit, quae in Rusiam transferret. In Gallia copia rerum et ingenio atque humanitate incolarum mirum in modum delectatus est, occurrentibus veluti eruditis atque invicem certantibus, ut bonarum artium studia Hospiti commendarent: Academiam vero Parisinam, perspecta eiusdem utilitate meritisque

tisque Acadëmicorum, ita dilexit, ut insolito quidem sed memorabili exemplo isti Societati nomen daret. Non enim a Maiestate sua alienum putavit, in eorum collegium adoptari, quorum opera atque vigiliis, pacis bellicae artes ab ignorantia pristinorum saeculorum vindicantur, et naturae scientia, qua nihil pulchrius, nihil excellentius humanum ingenium novit, his nostris temporibus incredibiliter aucta atque perfecta est.

Cum ad suos rediisset Petrus M. epistola ad Academicos Parisinos data (quae publice extat) se etiam ad diligentis Academici laudem contendere affirmabat, et praeter descriptionem Caspii maris plura communicaturum non indigna iudicio et industria Academicorum pollicebatur. Postea vero quam bellum difficile et pertinax memorabili ac gloriosa pace composuerat, ad nutriendas excolendasque in regnis suis artes praecipue curam intendit, et consilium condendae Petropoli Academiae, quod iamdiu

)() (2

presse-

presserat, exequendum duxit. Fuit ille quidem ita de salute ac fama gentis suae sollicitus, ut nihil domi omitteret, quod, sive ad extruendam urbem suo nomine dignam, sive ad classem navium amplissimam et cum instructissimis quibusque comparandam requiretur, sed multo magis armis requiescentibus imitandam putavit illustrem Gallorum, quam paullo ante diximus, Academiam, et cum minime ignoraret, quantis difficultatibus obnoxium esset negotium, tantum abest, ut a proposito desisteret, ut potius, quae erant obstacula mirabili benignitate expugnaret. Iam litterae ad externos cum mandato Imperatoris mittebantur, iam responsa adventabant, cum inopinata morte Petrus terris eripitur. Huius fati nuncio quamvis valde perturbarentur, qui se itineri paraverant, **CATHARINAE AVGVSTAE** auctoritate mox confirmati sunt, acceptisque amplissimis privilegiis Petropolin concesserunt plerique eorum, quorum nomina in titulis speciminum exstant, praeter

Ioan-

*Ioannem Simonem Beckensteinium,
Ioannem Georgium Leutmannum et
Michaelem Burgerum,*

qui postremi advenerunt. *Nicolaus Bernoullius*
et *Michael Burgerus*, vertente adhuc anno,
diem suum obierunt, de quorum vitis et
meritis alias dicemus.

Praeter hos viri quidam celeberrimi in
exteris terris degentes ad Societatem no-
stram accesserunt, quos honoris causa nomi-
namus, eo ordine, quo in Academiam co-
optati sunt,

*Christianus Wolfius, Marpurgi,
Ioannes Bernoullius, Basileae,
Marchio Ioannes Polenius, Patavii et
Petrus Antonius Michelottus, Venetiis.*

Industria eorum, qui in hanc Societa-
tem convenerunt, tripartita est, aliis Ma-
thesin, aliis Physicam, aliis denique Hu-
manitatis studia colentibus, eo ordine atque

)() (3

lege

lege, ut quilibet in se receperit, non solum quotidie una hora eam artem, quam callet, publice docere atque in eadem duos iuvenes sibi commissos instituere privatim, verum etiam eiusdem artis suae epitomen, quae discipulorum studiis inserviat, aut aliquod insignis opusculum conscribere, suoque ingenio et solertia scientiae fines promovere. Idcirco pauci Academicorum, qui iam sub aetatem anni MDCCXXV accesserunt, privatos conventus inchoarunt, in quibus, quae domi quisque elaboraverat, praelegit, ut collegarum sententias exploraret, quae consultationes aucto deinde Academicorum numero bis in hebdomade continuatae, in hoc, quod nunc publicamus, et alterum, cuius impressio maturabitur, volumen succreverunt.

Cum vero haec Societas ab aliis, quae in Europa florent, eo differat; quod in istis indigenae plerique, in hac nostra exteri
fere

fere omnes reperiantur ; illos saepe privata industria in Societatem coeuntes Regis auctoritas confirmarit, has sola Imperatoris Maiestas sustineat, aequum erat providere, ne quid iis, ad commoditatem vitae deesset. Igitur et stipendia et subsidia studiorum, de quibus pacti erant Academici, liberaliter exhibita fuerunt. Accessit PETRI II. edictum, quo Academiae reditus perpetuo confirmantur.

Qua de causa speramus fore, ut Academici, processu temporis et maiora et utiliora Russicae genti producant, si Imperator, qua coepit clementia, bonas artes tueatur, Avique destinata perficiat. Verum quando ipse maioribus curis distinetur, dum tanti imperii gubernacula capeffit, ut tam diversas et per maximam partem Europae Asiaeque diffusas nationes sive in officio contineat, sive a vicinorum iniuriis defendat, rogamus atque obtestamur, virum

rum immortalibus in Rusſiam meritis illuſtrem, Imperii Ruſſici Procancellarium Baronem HENRICUM de OSTERMANN, ut ad tam multa, quibus Academicos ſibi obligavit, beneficia hoc maximum addat, et quemadmodum AVGVSTO praecipue affectum atque amorem erga eruditos viros excitavit, eundem pro ſua ſumma prudentia et gratia apud Imperatorem conſervare atque augere velit.

Christianus Goldbach.

INDEX

INDEX COMMENTARIORUM

IN CLASSE MATHEMATICA.

- Iacobi Hermanni*, De Mensura virium Corporum. p. 1.
Georgii Bernbarði Bülfingeri, De Viribus corpori moto insitis,
et illarum Mensura. p. 43.
Nicolai Bernoullii, De Motu corporum ex percussione. p. 121.
Danielis Bernoullii, Examen Principiorum Mechanicæ p. 126.
Iacobi Hermanni, De Problemate Kepleriano. p. 142.
Eiusdem, De Calculo integrali. p. 149.
Ioannis Bernoullii, De Integrationibus Aequationum differen-
tialium. p. 167.
Christiani Goldbachii, De Casibus quibusdam integrabilibus. p. 185
Nicolai Bernoullii, Analysis Aequationum quarundam differen-
tialium. p. 198.
Christiani Goldbachii, Methodus integrandi Aequationem diffe-
rentialem. p. 207.
Iacobi Hermanni, De Epicycloidibus Sphaericis. p. 210.
Christiani Wolffii, Principia Dynamica. p. 217.

IN CLASSE PHYSICA.

- Iohannis Christiani Buxbaum*, Noua Plantarum genera. p. 241.
Georgii Bernbarði Bülfingeri, De directione Corporum gravium
in vortice Sphaerico. p. 245.

XXX

Ioannis

Ioannis Georgii Du Vernoi, Descriptio Vasorum Chyliferorum. p. 262.

Danielis Bernoullii, Tentamen nouae de motu Musculorum Theoriae. p. 297.

Eiusdem, Experimentum circa neruum opticum. p. 314.

Georgii Bernhardi Bülfingeri, De variis Barometris sensibilibus et eorum noua specie ac usibus. p. 317.

Ioannis Georgii Du Vernoi, De Cisterna et ductu Thoracico Catopardi, Phocae et Elephanti. p. 342.

Friderici Christophori Meyeri, De Luce Boreali. p. 351.

Petri Antonii Michelotti, Rari ac prope inauditi ex utero morbi historia. p. 368.

Observationes Anatomicae. p. 379-

IN CLASSE HISTORICA.

Theophili Sigefridi Bayeri, De origine et prisca sedibus Scytharum. p. 387.

Eiusdem, de situ Scythiae sub aetatem Herodoti. p. 400.

Eiusdem, De Muro Caucaseo. p. 425.

* * *

Iosephi Nicolai De l'Isle et Ludouici De l'Isle de la Croyere
Observationes Astronomicae. p. 465.

CLAS-

CLASSIS
P R I M A
continens
MATHEMATICA



DE
MENSURA VIRIUM
CORPORUM

Autore I. Hermanno.

1.



Is corporis cujusque, consentientibus *M. Sept.*
Mechanices scriptoribus omnibus, de- *1725.*
notat *potentiam motum efficiendi*, vel in
hoc ipso corpore cui hæc potentia in-
esse intelligitur, vel in aliis corpori-

bus ab ipso diversis. Nullum enim corpus vere qui-
escens talem potentiam motricem habere potest, sed *vi*
tantum inertix præditum est, qua, *vi* in ipsum agenti,
resistit.

2. Sermo autem hic est de corpore *vere* quiescen-
te, & hoc nomine intelligimus non simpliciter illud
quod apparenter tantum quiescit, sed illud potius quod

A

omni

omni conatu ad motum destitutum est. Dantur enim corpora quæ, etiam si actu ipso non moveantur, conatum tamen habent ad motum, qui verò conatus propter interposita impedimenta inefficax est. Sic corpus grave plano cuidam horizontali incumbens apparenter quidem quiescit, quia planum in quo est descensum ejus impedit, sed non ideo tamen vere quiescit, quandoquidem conatum descendendi habet, qui in descensum actualem erumpet, simulatque planum corporis descensum impediens ablatum fuerit.

3. Ingens ergo discrimen est inter potentiam quæ motum actualem producit, & potentiam quæ tantum in simplicem conatum definit. Hæc enim est tantum *Vis mortua*, illa vero vis viva vocatur. Itaque corpus filo appensum, vel plano cuicumque insistens vim mortuam tantum habet. Sed si actu ipso movetur, tunc vim vivam habere, dicetur.

Omnis autem scientia Mechanica versatur in eo, ut mensuras idoneas inveniamus juxta quas tum vires mortuas corporum, tum vires vivas rectè æstimare liceat. Ex quo apparet veram doctrinam virium nonnullius momenti esse, adeoque dignam quæ diligenter & caute excolatur. Etiam si verò circa vires mortuas nullæ sint controversiæ, ut sunt circa vires vivas, ab iis tamen initium faciam.

4. Quantum ergo ad vires mortuas attinet earumque mensuram: Hæc mensura inventu difficilis non est. Modica enim attentio adhibita manifestabit unicuique, quod pondus cujusque corporis mensura sit ejus vis mortuæ, in quantum hæc vis manat ex principio gravitatis. Hanc restrictionem addidi, quia alia datur species vis mortuæ in corporibus, quæ non fluit ex principio gravitatis,

vitatis, & hujus speciei vis mortuæ sunt *vires centrifugæ* corporum in gyrum actorum. Quotiescunque enim corpus aliquod uniformi, aut etiam quocunque variato motu peripheriam circuli aliusve curvæ describit, singulis motus hujus momentis conabitur motum suum prosequi in directione tangentis circuli vel curvæ in eo puncto in quo est: Singulis ergo momentis mobile conatur à peripheria circuli, vel à curva recedere in directione perpendicularis ad tangentem per centrum gravitatis corporis transeuntis, sed quoties mobile reapse non potest recedere à peripheria circuli vel curva & tantum conatum habet recedendi, hic conatus est *vis mortua*. Conatus enim centrifugi cum gravitate comparari possunt, suntque adeo vires centrifugæ & gravitas quantitates homogeneæ. Jam *vires mortuæ* cujuscunque sint speciei sunt massis corporum proportionales, si cætera sint paria: hoc est, si gravitas in utroque mobili sit eadem; aut si ambo mobilia incedant æquali celeritate in circulis æqualibus. Hoc probatu facillimum: incumbant plano cuidam horizontali & immobili corpora duo inæqualia, minus A & majus B, utrumque tantam vim in planum exferet, quantum est ejus pondus, quia hoc planum descensui amborum corporum directe oppositum & immobile est; est vero pondus majoris B ad pondus minoris A, ut massa ipsius B ad massam ipsius A, hoc enim passim receptum est, ergo vis mortua corporis A est ad vim mortuam alterius B, ut massa A ad massam B. Res ergo ita se habet cum viribus mortuis à gravitate pendentibus, idemque de iis quæ à viribus centrifugis fluunt, facile ostendi potest; nam quia (*hyp.*) ambo corpora A & B æquali celeritate in

A 2

ctr.

circulis æqualibus in gyrum aguntur , si B majorem habet virtutem centrifugam quam corpus A , id venit à massa , propterea toties vis centrifuga corporis B major est vi centrifuga corporis A , quoties massa illius B major est massa hujus A. Est ergo , ut vis mortua B proveniens ab ejus vi centrifuga , ad vim corporis A , ita massa B ad massam A.

Pari ratione ostendi potest , quod , si intensitas gravitatis in diversis corporibus , aut intensitas vis centrifugæ corporum in diversis circulis gyrantium , diversa sit , vires mortuæ futuræ sint in ratione composita ex massis corporum & intensitatibus gravitatis , aut viribus centrifugis corporum circulariter motorum. Per intensitatem verò gravitatis aut vis centrifugæ intelligo , gravitatem seu pondus , quod corpus cujus massa est ut 1. habet in diversis distantiiis à centro gravium , vel vim centrifugam quam idem corpus in diverso statu motus circularis habet. Tantum de viribus mortuis.

5. Quam verò rationem habet *vis mortua* ad *vim vivam* ? ad hanc quæstionem probatissimi quique Autores respondent , quod vis viva *infinita* sit præ vi mortua , & legi merentur ea , quæ hac de re habent *Galileus* , *Torricellius* , *Joh. Alb. Borellius* & alii , qui omnes dedita opera probare conati sunt tum experimentis , tum etiam rationibus , *vim percussiois* infinitam esse , si cum *simplice pondere vel gravitate corporum* eam comparare velimus. Superfluum duco eximiorū virorum argumenta huc transcribere , quippe quæ in ipsorum operibus editis legi & ponderari possunt , & super hac re nulla controversia est inter Peritos. Id unicum ergo hoc loco monebo , præclarissimos illos Philosophos

phos accuratius locuturos fuisse, si vim percussionis, & gravitationem corporum quantitates heterogeneas, adeoque comparationis incapaces dixissent; quemadmodum *Cartesius* de hisce virium speciebus locutus est, qui (Epist. 74. Part. 1.) ad *P. Mersennum* expresse scribit, quod vis ea quæ ponderi ad aliquam altitudinem attollendo sufficit *duas semper dimensiones habeat*, illa verò quæ sustinendo ponderi in quolibet hujus altitudinis puncto sufficit, *nunquam plures dimensiones habeat, quam unam*, ita ut hæ vires perinde inter se differant ac superficies à linea, ac propterea rationis incapaces sint. Hoc idem de vi percussionis & de gravitatione corporum est dicendum, illa enim est vis viva hæc verò vis mortua. Quæ in hoc paragrapho strictim tantum diximus in sequentibus clarius probabuntur, posteaquam de mensura virium vivarum loquuti fuerimus.

6. Non una omnium est sententia circa rationem quam *vires vivæ* inter se servant. Plerique enim autumant has vires sequi rationem impetuum corporum, seu quantitatum motus, hoc est, quod vires vivæ duorum corporum sint in composita ratione massarum & celeritatum. Ita sane universa pene *Mechanicorum* cohors sentire videtur. Qui vero cum *Illustri Leibnitio* sentiunt, paulo aliter statuunt, vires illas vivas in composita esse ratione massarum & duplicata velocitatum corporum. Hanc thesin *Leibnitius* primum inseruit *Actis Erudit.* 1686. pag. 161. eamque ex gemino principio deduxit 1. *quod unumquodque corpus grave, abstrahendo ab omnibus motus impedimentis externis, verticaliter cadendo vim acquirat ascendendi ad ipsam altitudinem, ex qua cecidit.* 2. *Quod vis qua opus est ad*

elevandum grave A unius libræ ad altitudinem quatuor ulnarum, præcise æqualis sit vi qua aliud corpus grave B, quatuor librarum attolli possit ad altitudinem unius ulnæ. Ex quibus ipsi facile fuit concludere, quod vires corporum sint ut facta ex massis in quadrata celeritatum. Certitudo autem hujus conclusionis pendet à certitudine principiorum, quorum primum nemini negatur, & alterum quoque cum hac restrictione *si tempora ascensuum æqualia fuerint*, ab omnibus admittitur. Hoc sensu saltem *D. Abbas Catelanus* qui in *Novellis Reip. litterariæ 1686. pag. 577.* Cartesianorum partes adversus Leibnitium in se suscepit, secundum Leibnitii principium admisit, prætendens tamen eo turpiter abusum esse Leibnitium, quod illud corporibus quæ inæqualibus temporibus altitudines suas absolvant, applicuerit, cum tamen motibus tantum isochronis, quoties quinque machinis vulgaribus applicatur, quadrare possit. Nempe *Catelanus* & alii Cartesianum principium de quo nunc agitur, ideo tantum de motibus *isochronis* intellectum voluerunt, ut spatia mobilibus describenda possent in celeritates convertere, & vires corporum, quantitibus motus eorundem proportionales facere, nam in motibus uniformibus & isochronis celeritates sunt ut spatia. *Leibnitius* verò clare ostendit in iisdem *Novellis 1687 pag. 131.* nulla opus esse consideratione temporis in æstimatione virium corporum, & *Cartesius* ipse, qui (*Epist. 73. Part. 1.*) hoc principio utitur, *quod neque major, neque minor vis requiritur ad aliquod corpus grave certam ad altitudinem elevandum, quam ad elevandum alterum minus grave ad altitudinem tanto majorem, quanto ipsum minus grave est; vel ad elevandum aliud gravius ad altitudinem tanto minorem, nullam temporis*

temporis mentionem injicit, etiamsi illud potentiis mechanicis, in quibus motus isochroni obtinent, applicuerit. Imo verò in Epistola sequenti expresse hæc monet: *Primum illud quo possit quis in hoc præoccupari, est, quod plurimi solent spatii considerationem cum temporis aut celeritatis consideratione confundere; ubi statim subdit hæc: ita in vecte vel in bilance supposito quod unus radius alterius sit duplex et pondus breviori radio alligatum itidem duplum illius quod longiori radio sit annexum, ita ut sint in æquilibrio: ubi dicendum esset æquilibrii hujus causam esse, quod si pondus majus attolleret minus, aut ab eo attolleretur, tum majus illud pondus non pertransiret, nisi subduplum spatium ejus quod minus pertransit: illi dicunt, quod duplo tardius moveretur; qui quidem error eo deterior est, quanto agnitu difficilior.* Sepositam ergo vult Philosophus considerationem temporis aut celeritatis, à consideratione spatii, in æstimatione virium vivarum, & in hoc ipso plus artis se ostendisse contendit, quam in ulla alia ejusdem scripti statici parte. Ipsemet ergo *Cartesius* cum *Leibnitio* sentire quadantenus videtur.

7. Vulgaris opinio, quod vires vivæ sint ut impetus seu quantitates motus corporum, fundari videtur in principio nemini quidem negando, sed male adhibito, nempe in hoc axiome, quod *effectus proportionales sint causis suis adæquatis*. Plerique saltem communem virium æstimationem ex hoc axiome deducunt: Nam si vis alicujus corporis est potentia ejus motum efficiendi, hæc potentia consideranda veniet instar causæ, & motus productus instar effectus; quare potentia dupla, tripla vel ad libitum multiplex, producet motum duplum, triplum &c. vel æque multipulum; hoc ergo pacto vires vivæ corporum

porum forent ut quantitates motus seu impetus, non ergo liquet cur hæ ipsæ vires debeant esse ut facta ex massis corporum in quadrata celeritatum, ut Leibnitiu docuit.

8. Non negamus speciosum esse hoc argumentum, sed nihilo tamen verius illud arbitramur. Non inficiamur, quod *causæ sint effectis suis proportionales*, id enim recte intellectum & legitime applicatum non modo negari non potest, sed ipse etiam Leibnitiu admittit aliis verbis, cum statuit *inviolabilem esse æqualitatem inter causam plenam & effectum integrum*: reapse enim causa eatenus causa est, quatenus effectum suum edit, adeo ut hic effectus & causa quæ ipsum edidit æquipolleant, quod si est: qua ratione causa agens augetur vel minuitur, in eadem ratione augebitur quoque vel minuetur effectus. Sed negamus quod motus corporis seu impetus quatenus hic exponitur per facta ex massa in celeritatem corporum, integer & adæquatus sit effectus potentia agentis, sed potius altitudines seu spatia per quæ corpora ascendere possunt, assumenda essent pro mensura effectuum quos potentia in hæ corpora agentes edere possunt, nec enim, vel ipso *Cartesio* iudice, hæ spatia cum celeritatibus aut temporibus sunt confundenda. Celeritates enim sunt tantum entia *modalia & incompleta*, secus ac spatia quæ corpora ascendendo conficiunt. Ad hoc præterea accedit, quod effectus per quantitates motus expositi, non sint capaces mensuræ accuratæ. Genuina enim mensurandi lex poscit, ut id præcise, quod pro mensura assumimus, semel vel pluries contineatur vel replicetur in rebus mensurandis, id autem in corporibus diversis celeritatibus latis evidenter non obtinet, etsi enim (ut exemplo Leibnitiano utar) tria corpora æqualia & æqui-

velocia

velocia præcise triplo plus habere potentiae agnoscam, quam eorum unum, quia una eademque mensura etiam hic ter repetitur, ter enim repetitur corpus certae quantitatis qualis fuit singulorum, non tamen ideo statim concedi potest, corpus tres celeritatis gradus habens, ter continere corpus ipsi æquale unum habens velocitatis gradum, quia in hoc posteriori exemplo communis mensura non eodem modo replicatur in majori quantitate, quo replicabatur in primo exemplo; in hoc enim ens *substantiale*, hoc est, corpus gradum unum celeritatis habens replicatur ter, in altero verò exemplo *celeritas* quæ est ens *modale & incompletum* unius ejusdemque rei *substantialis* seu corporis nostri, replicatur ter, quare non uno eodemque modo minus continetur in majori in duobus hisce exemplis.

9. *Leibnitius* præterea in pluribus locis, nempe in *Actis Erudit*, 1690. pag. 235. f. 1691. pag. 439. & 1695. pag. 156. & alibi contradictionem apertam seu absurdum nasci ostendit ex eo, si vires vivæ æstimentur per quantitates motus corporum. Supposuit enim globum aliquem A, cecidisse verticaliter ex altitudine unius pedis, & cum velocitate in fine hujus altitudinis acquisita motum æquabilem in plano horizontali continuantem, impegisse in globum subquadruplum & quiescentem B, & in hunc quicquid motus & virium habebat transtulisse, adeo ut globus B, hoc impactu quatuor celeritatis gradus acquisiverit, & juxta systema ordinarium vim æqualem illi quam globus A, casu ex altitudine unius pedis obtinuerit; ostendit deinceps *Leibnitius*, quod, cum globus B, motum suum à globo A acquisitum verticaliter in altum convertens, assurgere possit

B

ad

ad altitudinem 16 pedum, ope vectis cujusdam attollere possit globum A ad altitudinem plusquam triplo majorem ea, ad quam idem globus A assurgere poterat cum vi quam casu ex altitudine unius pedis acquisiverat. Jam contradictio & absurdum in eo situm est.

Habemus duo corpora quorum A habet massam ut 4, celeritatem ut 1; alterum B massam ut 1 sed celeritatem ut 4, quæ viribus æqualia statuuntur, cum tamen globus B, cum vi sua corpus aliquod, alteri A æquale, attollere possit ad altitudinem majorem tribus pedibus, corpus verò A, tantum vim habeat se se attollendi ad altitudinem simplicam unius pedis. Quare corpus B simul & eodem tempore vim *majorem* & vim *æqualem* habet vi corporis A.

Papinus contra quem *Leibnitius* hoc argumentum urserat in *Act. Erud.* locis cit. aliud replicandum non invenit, quam hoc, per vires naturæ impossibile esse, ut motus globi A transferatur in alterum quiescentem B, sed cum postea *Leibnitius* ostendisset, quomodo hoc fieri possit, atque vectis consideratione ad id usus esset, excepit, *nullos dari vectes perfecte rigidos et inflexiles*. Sed tam levi opera vis argumenti non eluditur. Largiamur quod motus alicujus corporis in aliud inæquale corpus transferri non possit, largiamur itidem nullum in rerum natura dari vectem rigidum & inflexilem, nihil profecto decedet vi argumenti; nam fieri potest, ut globi A & B, qui ratione massæ sunt in ratione quadrupla, æquales habeant motus quantitates, idque sine suppositione quod motus unius transeat in alterum, aut quod dentur vectes rigidi & inflexiles; itaque fieri potest ut minor B, motum suum in altum convertens assurgat ad altitudinem
16 pedum

16 pedum, & si hoc est, agnoscendum erit, quod globus B attollere possit globum A ad altitudinem plusquam 3 pedum, sive detur vectis perfecte rigidus & inflexilis, sive minus: salvum ergo manet Leibnitii argumentum non obstantibus *Papini* exceptionibus.

Ex dictis ergo quadantenus liquere autumo, quam lubricum & inconstans sit negotium vires corporum per quantitates motus æstimandi, idque tanto magis, quod celeritatis considerationem in hoc subjecto *Cartesius* ipse exclusit loco supra jam citato, nempe in Epistola 74. Part. 1. ubi inter alia hæc habet: *nihil de celeritate bene et solide dici potest, nisi prius recte explicata gravitate totoque simul mundi systemate*, etsi vero circa hanc propositionem paulo aliter jam sentiunt Recentiores, ex ea tamen patet, quod ad æstimandas vires non necessum putarit *Philosophus* ad celeritates attendere, sed potius ad resistentias quas corpora vincendas habeant, ut in eadem epistola expresse patet.

10. Quoniam ergo quantitates motus corporum non sunt effectus integri & pleni potentiarum in corpora agentium, nondum inferre licet ex eo, quod causæ effectis suis adæquatis proportionales sunt, vires vivas corporum proportionales esse quantitibus motus eorundem, ut passim supponi solet: & hanc ob causam indagandum restat, quinam ergo sint effectus illi adæquati & reales virium vivarum? *Cartesius* ipse jam pridem ejusmodi effectus reales in laudata epistola indigitavit, quando ad resistentias viribus ascensionalibus superandas attendere, obiter saltem, præcepit. Hoc modo enim habemus effectus mensurandis viribus idoneos: nam propositio hæc, *Quod omnia impedimenta motus quæ*

vim aliquam extinguunt simul sumta, huic vi æqualia sint, æque clara & certa esse videtur, ac ullum aliud Geometriæ axioma, & eodem redit ac si diceretur, omnes partes alicujus totius et hoc totum ipsum, æqualia esse: nam singula impedimenta totidem partes de vi corporum tollunt, & universa totam vim. Dispiciendum ergo restat, quænam sint impedimenta illa quæ vires corporum exhauriunt? ipsa gravitas jam tale est, nemo enim ignorat, quod corpus aliquod data cum celeritate verticaliter in altum projectum motum suum non continuet in infinitum, sed ad certam tantum altitudinem pertingat; ascendere autem deberet in infinitum, si nullam resistantiam nullumque motus impedimentum subiret; adeoque ex eo, quod limitatam tantum altitudinem conficiat quam transilire non possit, necessario concludendum, id venire à resistantiis, quas superare debeat dum ascendit; hæc verò resistantiæ non proveniunt solum ab aere corpus ascendens ambiente, sed potissimum à gravitate. Nam si à solo Aere venirent, Corpus illud in Aere rarissimo ad quam liberet altitudinem asurgere deberet, quod cum non fiat, concludendum est, dictam altitudinem gravitatis corpori resistantis indubitatum indicium esse: gravitas enim est vis illa qua corpora jugiter versus tellurem pelluntur, propterea hæc vis, quippe contraria vi ascensionali, instar resistantiæ jam spectanda venit. Hoc, nihil fallor, adeo clarum est, ut fusiore probatione non videatur opus: Sed non æque evidens forte videbitur, quomodo hæc resistantia à gravitate proveniens mensurari debeat? Veruntamen unusquisque qui attenderit, quod corpus ascendens in singulis altitudinis suæ describendæ punctis æqualiter in terram gravitet, non potest non videre,

edere, summam resistantiarum corpori ascendenti superandam optime exponi per factum ex altitudine ascensus in pondus corporis; & cum hæc resistantiarum summa (per superius dictà) vi corporis initio ascensus æqualis sit, liquet, hanc ipsam vim vivam mensurandam esse per hoc factum ex altitudine ad quam corpus ascendit, in pondus ejusdem corporis. Quod si verò præter opinionem id nondum satis evidens atque probatum videbitur iis qui pro adversa parte stant, demonstrationem hujus rei plenioram dabo in sequentibus. Nunc verò ad alia pergo.

Inter innumera alia motus impedimenta & illud quoque ad mensuram virium aptum est, quod ab *elastris* æqualibus, & ad æqualem tensionis gradum perducendis petitur. Jam pridem Celeberr. *Job. Bernoulli* ostendit, quod corpus aliquod A *duos* habens celeritatis gradus *quatuor elastris* similibus & æqualibus ad eundem tensionis gradum adductis vim suam exhauriat, dum idem corpus A *unicum* habens celeritatis gradum *unico tantum elastro* ad parem tensionis gradum adducto vim suam exhaurit; talia verò elastra æqualia & æqualiter tensa sunt effectus adæquati accuratæ mensuræ capaces, quos vires illæ corporis A, modo 2 modo 1 celeritatis gradus habentis edere possunt; quoniam vero effectus corporis celerioris ad effectum tardioris est, ut 4 ad 1, manifestum est utique, quod hi effectus sint in duplicata ratione celeritatum. Argumentum verò ipsum Celeberr. *Viri*, brevitatis causa hic non adducò, quod illud diuicide expositum legi possit in *Cel. Wolfii* Elementis Mechanicæ pag. 594. Paragr. 275.

Hoc idem alia adhuc ratione eleganter ex elastrorum theoriâ deduxit Celeb. *s'Gravesandus* in Elementis Physices pag. 112. Tom. I. B 3 11. Eadem

11. Eadem virium mensura haberi potest ex regulis motus quæ obtinent in collisione corporum, quemadmodum ante complures annos jam ostendi. Sit globus A , 2 velocitatis gradibus præditus, qui in plano horizontali incedens, incurrat in alium globum, sed quiescentem $B=3A$; huic ergo dabit celeritatem ut 1, & retrocedet A cum celeritate 1. Impingat deinceps hic globus A cum sua celeritate 1, in alium globum quiescentem $C=A$, ipsique etiam dabit celeritatem 1, & motus ejus hoc secundo impulsu sistetur. Hæc verò omnia ex notissimis regulis motus corporum elasticorum levisima opera eliciuntur. Habemus ergo hic globum A , qui duobus impulsibus in singulos globos quiescentes $B=3A$, & $C=A$, celeritatem eandem transfundens, ut ita loquar, ad quietem redigitur, vimque suam amittit; eundem ergo effectum præstitit, ac si globo $D=4A=A+3A$ celeritatem 1 impressisset, & globus idem A cum celeritate 1, alii sibi æquali uno impulsu itidem velocitatem 1 imprimeret, & ad quietem redigeretur, est ergo effectus globi celerioris ad effectum tardioris, ut $4A$ ad A , hoc est, ut 4 ad 1. Hanc ob causam est vis celerioris ad vim tardioris, ut quadratum celeritatis majoris ad quadratum celeritatis minoris.

Nec aliter se res habet cum eodem globo A , cum habet 3 gradus celeritatis: impingat enim primo in globum quiescentem $B=5A$, & post hunc impulsu retrocedet cum celeritate ut 2, in patientem vero B transferet celeritatem 1. Impingat secundo globus A cum residua velocitate 2, in globum quiescentem $C=3A$, iterumque hoc secundo impulsu unius gradus velocitatis
jactu-

ja&ccuram faciet, & patiens globus C celeritatis gradum 1 acquiret. Restabit hoc modo globo agenti A celeritas 1 post secundum congressum. Quod si denique cum hac celeritate in globum æqualem sed quiescentem D ircurrat, quiescet post hunc tertium impulsu, & patiens globus D eam celeritatem 1 quam agens A habebat, obtinebit. Quare globus A cum velocitatem 3 habet, motum suum vel potius vim suam omnem transferre potest in globos $B=5A$, $C=3A$, & $D=A$, ita ut singulis det eandem celeritatem 1. Sed idem globus A celeritate 1 præditus, vim suam in unicum tantum globum ipsi æqualem ita transferre potest, ut patienti globo eam impertiatur quam ipse agens ante conflictum habebat. Quare vis globi A habentis celeritatem 3 est ad vim ejusdem cum celeritate 1, ut $5A + 3A + A = 9A$ ad A , hoc est, ut 9 ad 1, id est, in duplicata ratione celeritatum.

Hoc idem semper eveniet, quæcunque sit ratio celeritatum, & sane curiosus hac in re sese prodit symbolismus inter corpora quæ datis velocitatibus verticaliter in altum projiciuntur, & corpora quæ iisdem velocitatibus alia corpora quiescentia impellunt. Altitudines enim in quarum summitatibus singulis corporis ascendentis celeritas initialis uno gradu decrescit, in eadem prorsus sunt ratione numerorum imparium, in qua sunt massæ corporum quibus quiescentibus successivis ictibus una celeritatis gradus imprimitur à corpore totidem celeritatis gradus initio habente, quot corpus ascendens habebat à principio ascensus, quæ celeritas integra corporis percutientis, singulis ictibus uno itidem gradu minuitur. Verbi gratia, corpus A quod cum celeritate

te

te initiali 2 ascendit, in summitate altitudinis 3 pedum jacturam faciet unius gradus celeritatis, & in summitate altitudinis sequentis supra modo dictam altitudinem, alterum gradum similiter amittet: novimus enim quod corpus cum sua celeritate 2 ad altitudinem 4 pedum assurgere possit, abstrahendo nunc à resistantia aeris aliisque motus impedimentis. Similiter corpus A cum celeritate 2, impingens in globum quiescentem $B=3A$, hoc primo ictu unum celeritatis gradum amittet, & si cum residua sua celeritate 1, porro incidat in globum quiescentem $C=A$, & hæc ipsi secundo hoc impulsu velocitas adimetur. Quod si idem corpus A ascendat celeritate initiali 3, ut ad altitudinem 9 pedum pervenire possit, in summitate primæ altitudinis 5 pedum, perdet velocitatis gradum 1, in summitate altitudinis secundæ 3 pedum sequentis post primam, perdet adhuc gradum unum, at denique in summitate altitudinis tertiæ unius pedis sequentis post secundam, amittet tertium suum celerit. gradum. Quid fiet jam eidem corpori A si tribus vicibus successive impingat in globos quiescentes $5A$, $3A$, & A , in primum celeritate 3? eveniet nempe ut primo ictu amittat gradum 1, & si cum residua celeritate 2, impingat in globum $3A$, perdet alterum gradum velocitatis, & cum eo qui remanet in corpus tertium A impingens multabitur tertio & ultimo celeritatis gradu. Hæc omnia ex doctrina motus gravium, & regulis communicationis motus ultrò fluunt.

12. Imò hæc regulæ communicationis motus non ineleganter deducuntur ex mensura virium vivarum corporum, quam hic probandam suscepimus, modò hoc unicum principium admittatur: *quod eadem virium quantitas*

itas in percussione corporum conservetur, quæ erat ante conflictum. Sint enim globi quorum massæ A & B, velocitates eorum ante conflictum a, & b, & post conflictum x, & y. Principium ergo istud præbet æquationem $Aaa + Bbb = Axx + Byy$, quam *fundamentalem* appellare liceat; nam secundum nostram virium æstimationem vires globorum A & B, ante concursum sunt ut Aaa , Bbb , & vires eorum post collisionem Axx , Byy ; inveniendæ ergo restant ex æquatione fundamentali æstimationes litterarum x & y. Hoc autem præstitum est facillimum; intelligantur enim motus globorum A & B eorumque conflictus peragi in spatio mobili, velut in navi, quod spatium celeritate indefinite parva dv feratur, in eadem, si velis, partes in quas globus A tendit, hoc modo videbuntur ex loco immoto velut ex ripa fluvii in quo navis, vel spatium mobile vehitur, globi A & B moveri, antequam congregiantur, velocitatibus $a + dv$, & $b + dv$, & post congressum, velocitatibus $x + dv$, & $y + dv$, quare si in locum celeritatum a, b, x & y æquationis fundamentalis, sufficiantur eædem celeritates velocitate adventitia spatii deferentis auctæ, etiamnum manebit æqualitas, nempe $Aaa + 2Aadv + Adv^2 + Bbb + 2Bbdv + Bdv^2 = Axx + 2Axdv + Adv^2 + Byy + 2Bydv + Bdv^2$, vel deletis iis quæ se mutuo destruant, $Aaa + Bbb + 2Aadv + 2Bbdv = Axx + Byy + 2Axdv + 2Bydv$, quod si vero ab ista auferatur æquatio fundamentalis $Aaa + Bbb = Axx + Byy$, restabit æquatio $2Aadv + 2Bbdv = 2Axdv + 2Bydv$, quæ per $2dv$ divisa, præbet $Aa + Bb = Ax + By$. Vel transponendo $Aa - Ax = By - Bb$; æquatio vero fundamentalis supeditat hanc, $Aaa - Axx = Byy - Bbb$, quæ ulterius ad præcedentem applicata, dat pro æquatione resultante

C

a+

$a+x=y+b$. Elicuimus igitur ex æquatione fundamentali $Aaa + Bbb = Axx + Byy$, has duas $Aa + Bb = Ax + By$, & $a+x=y+b$; quarum prior manifestat, quod commune centrum gravitatis binorum globorum A & B æquali celeritate ante & post conflictum moveatur. Nam $\frac{Aa+Bb}{A+B}$ est celeritas huius centri gravitatis ante concursum, & $\frac{Ax+By}{A+B}$, est celeritas eius post collisionem. Altera vero æquatio resultans indicat, eandem esse accedentibus globis ante impulsam velocitatem respectivam, quæ corporibus recedentibus post impulsam.

Iam ex inventa æquatione $a+x=y+b$, elicitur $y=a-b+x$, quæ æstimatio in $Aa+Bb=Ax+By$ sufficit, præbet $Aa+Bb=Ba-Bb+Bx+Ax$, ex qua elicitur $x=(Aa-Ba+2Bb):A+B$. Quare $y=(a-b+x)=(2Aa-Ab+Bb):A+B$. Quæ celeritates ex unico illo assumpto principio, & mensura virium Leibnitiana erant eruendæ.

13. *Æquationes modo inventæ æstimations litterarum x & y , definentes, præbent eas ipsas regulas motus ex percussione, quas Wrennus, Wallisus, Hugenius, Mariottus, & alii pro corporibus elasticis jam pridem derunt, & aliis fundamentis superstruxerunt. Quæ ergo in præcedenti §. invenimus probandæ thesi nostræ, quod vires vivæ corporum sint ut facta ex massis in quadrata celeritatum, optime inservire possunt, adhibendo conclusionem instar præmissæ, & ex hac deinceps eliciendo, quod fit $Aaa + Bbb = Axx + Byy$. Nam si m significet altitudinem verticalem per quam descendens grave A motu naturaliter accelerato, in termino ejus inferiore velocitatem a acquirit, n vero altitudinem in cuius imo B suam celeritatem b motu pariter accelerato acqui-*

æquirit, item p & q sint altitudines quas globi iidem A & B cum suis celeritatibus initialibus x & y motu naturaliter retardato conficere possunt; eruntque $m, n, p,$ & q proportionales quadratis celeritatum $aa, bb, xx,$ & $yy,$ eodem ordine sumtis; surrogatis ergo in præcedenti æquatione pro $aa, bb, xx,$ & yy altitudinibus illis proportionalibus, resurabit æquatio $Am + Bn = Ap + Bq,$ vel etiam hæc $\frac{Am + Bn}{A + B} = \frac{Ap + Bq}{A + B}.$ Iam vero fractio ad sinistram denotat quantitatem descensus communis centri gravitatis globorum A & B dum altitudines m & n perlabuntur, & fractio quæ est ad dextram designat quantitatem ascensus eiusdem centri gravitatis communis globorum A & B dum ipsi per altitudines p & q assurgunt. Quare concludendum, eandem esse quantitatem descensus communis centri gravitatis globorum A & B ante conflictum, cum quantitate ascensus eiusdem post conflictum, supponendo quod globi A & B motus in conflictu acquisitos verticaliter in altum convertant, perinde ac supposuimus velocitates eorundem quas ante congressum habebant, acquisitas fuisse descensu accelerato per eas altitudines quas paulo ante indicavimus: quantitates autem descensus & ascensus communis centri gravitatis globorum A & $B,$ in corporum summam $A + B$ ductæ, sunt mensuræ virium ante & post eorum concursum. Hoc saltem modo Ill. *Hugenius* plurimum corporum simul motorum vel in se mutuo agentium vires semper æstimasse visus est, ut ex pluribus locis demonstrationum eius quas circa regulas motus ex percussione in opusculis posthumis dedit, constat, & liquidius adhuc ex theoria ipsius centri oscillationis, quam in *Ho-*

C 2

rolo.

rologio Oscillatorio exhibuit. Quod si vero summa virium globorum A & B exponi debet per factum ex descensu centri gravitatis eorum in summam ponderum, & summa virium earundem per factum ex ascensu eiusdem centri gravitatis globorum A & B, in summam ponderum eorum, quidni vires eorundem solitariae per *Am* & per *Bn* ante ipsorum congressum, & post congressum per *Ap* & *Bq* exponere liceret immo deberem? Sed non opus est ut huic argumento diutius insistamus, quando alia praestantiora in potestate sunt; inter haec vero nullum mihi evidentius videtur eo, quod nascitur ex consideratione modi, quo *vis aliqua viva* nasci possit ex *vi mortua*.

Fig. 1.

14. Ad obtinendam mensuram *vis viva* corporis cuiuscunque ex *vi* eius *mortua*, ita processu: ob oculos mihi posui corpus grave C cadens motu naturaliter accelerato in linea verticali AH, ita ut motum a quiete incipiat in A. Initio ergo motus vidi corpus C omni vi viva destitutum in A, quia nullum ibi motum habet, & vis viva solis corporibus actu motis tribuitur. Vi tamen mortua ibidem praeditum esse debet quia corpus grave est & determinatum suum pondus habet, hanc vim mortuam exposui per lineam rectam *Aa*, alteri AH perpendiculariter insistentem, sed posteaquam delatum est in E, ibi vim aliquam vivam iam acquisivit, quia determinatum aliquem celeritatis gradum ibi nactum est, sed seposita tantisper celeritatis consideratione, indagandum a quo, quomodo, & quantam vim vivam lucratum est in E post descensum per spatium AE. Haec autem vis viva non aliunde corpori C accessisse potest quam a *vi* eius *mortua*, nam alia hic non habemus consideranda, quam corpus C, eius gravitatem, & spatium per quod cecidit AE, hoc spa-

spatium vero se habet mere passive, nihilque de suo ad motum confert; neque corpus C quatenus ut extensum spectatur & determinata sua massa præditum est, motum illum producere potest; itaque quicquid motus & virium habet corpus C delatum in E, id a vi mortua indefinenter agente in corpus, dum per spatium AE labitur, provenire potest: Sed quomodo? velut corpus C cum est in A, urgetur vi *mortua*, *Aa*, in B vi *Bb* qualis *Aa*, in C vi *Cc*, in D vi *Dd*, in E vi *mortua* *Ee*, ita idem corpus C urgetur in singulis spatii confecti punctis vi aliqua mortua æquali ipsi *Aa*, si gravitas corporum uniformis est, ita ut *locus omnium virium mortuarum* corpus C in spatio AE urgentium sit *parallelogr. rectangulum AaeE*; hanc ob causam vis viva in E acquisita non potest esse major neque minor summa omnium virium mortuarum quæ in rectangulo *Ae* contineri possunt, quæ summa per hoc rectangulum ipsum exponitur. Quare vis viva in E acquisita descensu ex AE, ad vim vivam in H acquisitam descensu ex AH est, ut rectangulum *Ae* ad rectangulum *Ab*, (vel quia hæc rectangula communem altitudinem *Aa* habent) ut spatium AE ad spatium AH. Hæc ita se habent cum gravitas in omni a tellure distantia eadem est.

Sed quid eveniet si, ut Recentioribus placet, gravitas in diversis a tellure distantis etiam diversa sit? Ponamus ergo mobile C (*fig. 2.*) urgeri in spatii AH *Fig. 2.* punctis A, B, D viribus mortuis quas applicatæ *Aa, Bb, Dd* curvæ cuiuscunque *adb* representant, per puncta illa transeuntes. Iam si descensus iterum a quiete incipit in A, vis viva, quam descendens grave per spatium AE acquisivit in E, aliud non est quam aggregatum omnium *Aa, Bb, Dd, Ee* quæ in area *AaeE* continentur, nam ab

C 3

his-

hisce omnibus sibi invicem succedentibus unice nascitur, propterea dicta area $AaeE$ vim corporis vivam in E acquisitam descensu ex AE, & area $AabH$ vim vivam eiusdem corporis in H denotat. Quare vis viva in E est ad vim vivam in H acquisitam, ut area $AaeE$ ad aream $AabH$, uti applicatae harum arearum pondera corporis C in diversis a terra distantis exponunt.

Fig. 3.

Quod si mobile C in curva quacunque AEH (fig 3.) descendat, & pondera eius in diversis a terra distantis exponantur applicatis ap , bq , dr , &c. curvæ pvt , erit etiamnum vis mobilis in E acquisita descensu eius in arcu AE, ad vim in H acquisitam descensu in arcu AH, ut area $apse$, ad aream $aptH$. Pervenerit mobile ex A in D, & dispiciamus quanta vi mortua ibi urgeatur secundum tangentem DG curvæ in D, quando gravitas ejus seu pondus in D exponitur ordinata dr , Ad id ponamus arcum $AD = s$, abscissam $ad = x$, ordinatam $dr = g$, elementum arcus, seu $Dm = ds$, elementum abscissæ, id est $nm = dx$; exponat DF parallela Ha gravitatem corporis C in D existentis, demissaque ex F perpendiculari FG in tangentem curvæ DG, & resolvetur vis mortua DF in laterales DG & GF, quarum hæc retunditur a curva super qua mobile incedit, adeoque hoc loco non attendi meretur, illa vero nempe DG est vis mortua tangentialis quæ effectum suum ubique habet, quippe cui nihil aliud resistit quam aer & scabrities curvæ, sed seponimus iam hæc motus impedimenta externa, quasi non essent. His omnibus jam positis, triangula similia DFG & Dmn, præbent $DG = \frac{gdx}{ds}$, ducamus hanc in elementum curvæ $Dm = ds$, & factum gdx denotabit incrementum vis
vive

vivæ, quod mobili accessit dum transiit a termino D elementi Dm , ad eius terminum alterum m , & summam vis viva in D vel $m =$ summæ omnium gdx quæ in area $aprd$ continentur. Quare vis viva in D = areæ huic $aprd$, & vis viva in H = areæ $aptH$, Quod ostendendum erat

In præcedenti articulo supposuimus, directiones DF gravium parallelas esse, facilitatis causa; nam perinde valet argumentum si directiones illæ convergentes sint in aliquod centrum; eo enim casu, rectæ $Aa, Bb, Dd, &c.$ quæ horizonti parallelæ sunt, abibunt iam in arcus circulares concentricos quorum commune centrum est punctum illud, in quod directiones gravium convergunt.

15 Quantumvis evidens sit præcedens argumentum, aut mihi saltem videatur: amolienda tamen est objectio quæ aliquibus negotium facessere potest. Objectum enim mihi est, cum primum in Conventu Academix argumentum istud proposuisssem; simili modo argumentum probare vim vivam cuiusque corporis exponendam esse per factum ex tempore descensus in vim mortuam gravitatis, si gravitas uniformis, hoc est, ubique eadem sit, & hoc casu vires vivas corporum proportionales fieri temporibus quibus eas vires acquirunt, si corpora quoad massam æqualia sint; sed si inæquales massas habeant, tunc vires vivas fore in composita ratione temporum & massarum. Sint (fig. 4.) $LM, LN, LO, LP, & LQ$ Fig. 4. tempora quibus spatia $AB, AC, AD, AE, & AH$ (fig. 1.) percuruntur; iam cum singulis temporis momenti individuis L, M, N, O &c. gravitas uniformis est, ut adeo per rectas æquales $Ll, Mm, Nn, Oo, &c.$ eam exponere liceat; quidni æquo iure summa omnium applicatarum $Ll, Mm, &c.$ quæ in rectangulo $LlmM$ con-

continentur, hoc est rectangulum hoc ipsum, *vim vivam* corpori in fine temporis LP acquisitam exponere licet, quo ante (fig. 1) exponebatur rectangulo AE ea, ideo quod hoc rectangulum locus fit & summa omnium Aa, Bb, Cc, &c. quæ in eo continentur, cum tamen LP (fig. 4.) duratio sit actionis gravitatis, quemadmodum (fig. 1) AE est spatium descensus hoc eodem tempore?

Respondebam tunc; hanc posteriorem arguendi rationem præ priore locum habere non posse ideo, quod *tempus* perinde ac *celeritas* sit tantum ens *modale* & *incompletum*, *spatium* vero descensu confectum sit *ens reale* indicans multitudinem virium mortuarum in unam veluti summam, quæ est *vis viva*, agglomeratarum. Addidi præterea, in diverso statu corpus descendens esse in diversis temporis articulis, & non modo massam corporis C, sed etiam statum eius, seu motum in considerationem simul cum gravitate agente & tempusculo actionis trahendum esse, idque hoc modo ostendi. Sit $LO \rightarrow$, tempus quo vis viva V acquiritur, $OP = dt$ elementum huius temporis, quemadmodum dV elementum vis acquisitæ vel incrementum eius durante tempusculo dt . Cum incrementum istud vis vivæ dV , nascatur a gravitate g in corpus C agente, quod corpus jam habeat celeritatem u , & massam M, atque adeo motus quantitatem Mu , quantitatis huius motus necessario ratio habenda est, nam in hoc statu in quo est mobile, celeritas ab ipso inseparabilis est; componetur igitur incrementum vis vivæ, ex hisce tribus, nempe ex g , Mu & dt , eritque adeo necessario $dV = gMu dt$, non vero ut vulgo supponitur, $dV = gM dt$. Jam vero est $u dt = ds$, si hoc ds elementum spatii designet, & gM , significabit pondus cor-

corporis C , adeoque si formulam $dV = gMudt$, ad figuram I aptare velimus, in qua pono $AD = s$, $DE = ds$, & quamlibet applicatam Aa , Bb , &c. $= gM$, fiet $dV = DdeE$, & summando $V = \text{rectangulo } AaeE$, ut §. 14 invenimus. Ex qto apparet, quod etiam temporis & celeritatis consideratio ad eandem virium vivarum mensuram conducatur, quam ante invenimus, modò recte in-
eatur.

16. Quod si verò vis corporis C (*fig. 4.*) tempore LP acquisita exponenda esset per rectangulum $LPpl$, in quo Ll vel Mm &c. simplicem gravitationem seu vim mortuam corporis C repræsenteret, & rectangulum $PQqp$ vim tempore PQ acquisitam, hæc eadem rectangula Lp , & Pq , referrent quoque resistentias quas corpus C ascendendo superandas haberet temporibus PL & QP , quandoquidem gravitatis actioni continuæ ascensus corporis contrarius est, & sensim sensimque extinguere debet. Quare si tempora LP & PQ æqualia fuerint, etiam rectangula $LPpl$, & $PQqp$ æqualia existent, atque adeo resistentiæ hisce temporibus superandæ. Videamus jam an & quantum hæc cum regulis motus corporum a gravitate cadentium concordent? Cadat mobile C accelerato motu à quiete in A inchoato per spatium AE (*fig. 1*) tempore LP (*fig. 4*), & per spatium AH tempore LQ . Quare si delatum in E motum illic acquisitum verticaliter in altum convertat, perveniet ascensu suo usque ad A , non altius, propter resistentiam gravitatis, itaque cum hæc resistentia (*hyp.*) exponatur rectangulo $LPpl$ (*fig. 4.*) & resistentia ejusdem corporis ascendentis ex H in A , rectangulo $QLlq$, ponendo LP & PQ æquales, oportet etiam, ut resistentiæ, quas mobi-

D

le

le ascendens ex H in E, & deinceps ex E in A subit, æquales sint. Verum si tempus ascensus per HA duplum sit temporis ascensus per EA, fiet HA quadrupla ipsius EA, adeoque HE tripla ejusdem EA, quare tempora ascensus atque adeo resistentiæ in altitudine HE ut 3, & in altitudine EA ut 1, essent æqualia; hoc autem evenire non potest, quin gravitas non *uniformiter* in universa utriusque spatii longitudine agat, sed *subsultim & difformiter*, quod oppido absurdum est, & contrarium receptæ doctrinæ de motu gravium. Hæc doctrina enim supponit, quod corpus in omni puncto spatii quod perlabitur aut in quo ascendit, grave sit; grave esse autem significat, ibi vi aliqua urgeri, ubi grave est; adeoque in communi gravitatis systemate in omni puncto spatii in quo mobile reperitur à gravitate urgetur, idque non modo in communi gravi uniformis systemate, sed etiam in omni alio quod quis excogitare posset. Nam universalis doctrina virium centralium continuam in omnibus spatii punctis actionem involvit sine qua hæc doctrina omnibus jam probata consistere nequit.

17. Evictum ergo est, quod vis viva mobili acquisita in E (*figuris 1 & 2*) descensu accelerato ex A in E, est ad vim vivam ejusdem acquisitam in H descensu ex A in H, ut area AEEa ad aream AHha, non vero (*fig. 4*) ut area LPpl ad aream LQql, posito quod LP & LQ referant tempora descensus in spatiis AE & AH, ordinatæque Ll, Mm, &c. gravitatem corporum. Ex quo ultrò fluit, quod vires vivæ corporum necessario sint ut facta ex massis corporum in quadrata celeritatum mobilium. Quod præcipue ex theoria motus gravium deduce-

ducere suscepimus, etiamsi argumentum à collisione corporum supra (§. 12. 13.) petum etiam validissimum, omnique exceptione majus, nobis videtur.

Possset eadem thesis aliis adhuc argumentis æque stringentibus probari, quia verò id à diversis Societatis hujus Imperialis Membris dilucide est præstitum, eorumque in hanc rem cogitata in Actis Academiæ simul prodeunt, ab iis nunc abstinebo, transiens jam ad partem elencticam Quæstionis de mensura virium. Nam communis sententia Leibnitizæ opposita, quasi jure quodam præscriptionis usa multos Præclaros Hyperaspistes est nata quorum argumenta omnino digna sunt quæ excutiantur.

Primum quidem mota est pluries hæc instantia: Quod idea vis vivæ corporum non involvat ideam gravitatis, quandoquidem unumquodque corpus determinata aliqua celeritate præditum suam determinatam vim vivam habeat, sive corpus illud grave sit, sive omni gravitate destitutum intelligatur; quodque hanc ob causam frustra recurratur ad theoriam motus gravium pro mensura virium acquirenda. Concedamus quidem antecedens, nihilo tamen firmior erit consequentia: esto quod corpora esse possint corpora, tametsi non sint gravia, & quod hæc corpora non gravia tamen suos quodque gradus virium vivarum habeant; quid inde concludetur? Sane aliud nihil nisi hoc, vires illas vivas non esse gravitatem corporum, neque fluere necessario ex gravitate, quod nusquam diximus neque statuimus unquam; quod autem ex descensu gravium nulla ideo peti possit mensura virium vivarum, id nullo modo sequitur ex propositione antecedenti. Esto enim corpus non grave **A** habens celeritatem

D a

tatem

tatem quam nominabo u , & hoc corpus habebit ideo aliquam vim vivam, quam à gravitate omninò independentem statuam. Sit aliud corpus B alteri quoad massam æquale sed gravitate pressum, quod cadens ex altitudine a acquirit accelerato motu celeritatem æqualem celeritati u corporis primi gravitate carentis A. Quæro jam an hæc corpora æqualia & æquivelocia A & B vires vivas æquales habeant, an verò secus? non puto quenquam fore, qui vires hæc inæquales dicat; etiamsi enim prius corpus A gravitate (*hyp.*) non urgetur, alterum verò B urgetur, atque adeo hæc circumstantiarum diversitas aliquam virium inæqualitatem in utrumque inducere primo intuitu videtur, reapse tamen nullam inducit, nam simulatque corpus B in infimo termino altitudinis a reperitur, ibique celeritatem u acquisivit, pone gravitatis actionem cessare, corpus istud B illic etiam gravitate destitutum erit, atque celeritate acquisita u motum suum, perinde ac corpus A, æquabiliter continuabit, adeo ut jam habeamus corpora æqualia & æquivelocia A & B non gravia; unde necesse est, ut vires ipsorum æquales sint. Concedo verò quod corporis non gravis A vis viva non pendeat à gravitate, an tamen ideo alterius corporis B vis viva à gravitate non fluit? imo verò maxime fluit, cum initio descensus *vim nullam* habuerit, eamque quam demum nactum est in fine spatii a acquisiverit continuata gravitatis actione. Cum autem vires corporum A & B æquales ostensæ sint, nonne altera alterius mensura esse potest, & debet, tametsi vis corporis B à gravitate fluens prorsus independens est à vi corporis A quæ gravitati ortum suum non debet? ex quibus omnibus

bus

bus liquet, quod supra allata instantia nostræ virium vi-
varum mensuræ nihil prorsus derogare possit.

I. Sed plures aliæ objectiones olim prodierunt à doctiss. viris nempe à Dn. Abbate *Catelano*, à *Dionisio Papino* & aliis, & hæ objectiones omnes in substantia recurrent in iis quæ non multis abhinc annis V. Cl. *Samuel Clarke* Theologus & Philosophus Anglus contra Ill. *Leibnitium* paulum post hujus obitum disputavit, in opere quod Anglico & Gallico idiomate edidit Londini sub titulo, *A Collection of Papers which passed between the late Learned Mr. Leibnitz and Dr. Clarke in the years 1715 and 1716. London 1712 in 8.* Quodque Dn. *Desmaizeaux* ampla præfatione & aliis scriptis auctum denuo edidit Gallice, cum titulo *Recueil de diverses Pieces sur la Philosophie, la Religion naturelle, l'Histoire, les Mathematiques, par Mrs. Leibnitz, Clarke, Newton & autres Auteurs célèbres. A Amsterdam in 12. 1720.* Jam in nota ad §. 93,-95. quintæ Responsionis ad Leibnitium Dn. Clarke non modo Leibnitii argumenta pro nostra virium mensura confutare satagit, sed etiam locum aliquem Phoronomiæ de hac eadem re fugillavit. Etsi vero alio loco præcipua ejus argumenta ad examen revocavi, quia tamen id brevissime tactum est in scripto quod in paucorum manus venit, ideo præcipuas Clarkii objectiones huc adducere & refellere libet, idque tanto libentius quanto oportuniorem nobis occasionem subministrant de viribus vivis theoriam magis illustrandi. Primo loco Vir Cl. *Leibnitium* de confusione & contradictionibus in hoc de viribus argumento admissis graviter accusat, quod sentiat *eandem virium quantitatem in natura conservari*, & tamen agnoscat *non eandem motus quan-*

titatem manere, ubi per vocabulum *vis*, aut *vis activa* in præfenti quæfione neceffariò intelligere debuerit *Impetum* aut *vim impulſivam et relativam corporum motorum*. Sed fi quicquam aliud hæc Cl. Opponentis accuſatio lepida mihi videtur; affumit enim quod Leibnitius ſecum ſentiat, quando ſupponit quod Leibnitius de viribus locutus in iis locis quæ citavit, per hoc vocabulum intelligat impetum ſeu quantitatem motus, ut deinceps quæri poſſet de contradicitione & confuſione, cum ab ipſo diſſentit. Sed nullum Vir Doct. memorabit locum in quo Leibnitius per vim activam quam in univerſo conſervari ſtatuit, quantitatem motus ſeu impetum intellexerit; imò contrarium ex illo ipſo elucet, quod quantitatem motus mutabilem, quantitatem vero virium eandem ſemper manere; probare conatus eſt. Hac ergo in re ſibi ipſi Leibnitius non contradixit ſed Cl. Antagoniſta præjudicata opinione abreptus *principium petiit*. Pergit deinceps A dicendo, *id quod Dn. Leibnitio occaſionem dedit ſibi contradicendi eſt, quod per errorem Philoſopho prorsus indignum, vim impulſivam*, ut Clarkius loquitur, *æſtimarit per quantitatem materiæ et ſpatii quod mobile aſcendendo conficit, ſepoſita conſideratione temporis quo aſcenſus fit*. Sed ſi vera ſunt, quæ in §§. 15, 16, 17. apodictice demonſtravi, quod menſuræ virium ſint altitudines ad quas corpora pervenire poſſunt ductæ in vim gravitatis, nullum errorem, nedum talem qui omni Philoſopho indignus ſit, *Leibnitius* admifit.

19. Quantum ad illud attinet, quod Doct. Antagoniſta habet, *non parum errare Leibnitium in eo, quod putet à Cartefianis ac reliquis Philoſophis ac Mathematicis concedi hanc propoſitionem*: Tanta vi opus eſſe ad elevandum corpus A unius libræ ad altitudinem quatuor ulna-

rum

rum, quanta opus sit ad elevandum corpus B quatuor librarum ad altitudinem unius ulnæ, cum tempora horum ascensuum non sunt æqualia, esset tantum error facti, si error est, qui summæ rei nihil derogare potest; præterquam quod supra pag. 7. jam ex *Cartesio* ipso locum allegavi ex quo apparet *Illustrem Philosophum* controversam hanc propositionem sine ulla limitatione æqualitatis temporis admisisse. Imo id erroneum judicat, cum spatii consideratio confunditur in negotio virium mensurandarum, cum *temporis* aut *celeritatis* consideratione, & sententiæ hujus solidam demonstrationem supra §§. 15. 16. dedimus. Stante vero demonstratione in loco citato, concidunt omnia quæ *Cl. noster Adversarius* pro se porro adducit, quippe quæ in solis assertionibus sine omni probatione prolatis, consistunt. Præterdit namque, quod, si *Pendulum quoddam Cycloidem describat*, arcus *Cycloidis ascensu descriptus*, proportionalis sit futurus vi ascensionali in infimo puncto *Cycloidis*: hujusque propositionis non aliam affert rationem, quam hoc, quod tempora ad ascensum requisita sint æqualia. Sed quam longe *Vir Doctiss.* absit à vero, patebit postquam descensum ac ascensum corporis in Cycloide paulo curatius contemplati fuerimus.

Sit ergo curva *ADH* (*fig. 3*) Semicyclois verticem in *H* & axem *aH* habens, cujus proinde semibasis erit *Aa*. Esto corpus *C* quod descensum incipiat in puncto *A*, atque accelerato motu cavam cycloidis partem percurrat in suppositione, quod gravitas ubique uniformis & uniusmodi sit: itaque initio descensus urgebitur mobile secundum directionem tangentis cycloidis in puncto *A*, vi quam exponit arcus *AH*, id *Newtonus* primum & postea

postea alii autores plures demonstrarunt, sed, quod probe notandum, hæc vis tangentialis non est vis viva sed tantum mortua, est enim derivata ex vi gravitatis, quæ tantum vis mortua est. Delatum postea mobile ex A in B urgebitur in hoc puncto etiam in directione tangentis vi mortua quam exponit arcus cycloidis BH, & ita in omni alio puncto cycloidis vi quadam mortua quam exponit arcus cycloidis inter hoc punctum & verticem H; erectæ porro intelligantur in punctis A, B, D, &c. & omnibus intermediis, ad planum cycloidis perpendiculares atque æquales respectivis arcibus AH, BH, DH &c. oriatur inde superficies cylindrica cujus basis est cyclois ADH, & contendo hanc superficiem totam ejusque partes, mensuras esse virium corporis descensu per AH vel partes hujus arcus acquistarum. Nam vis acquisita in infimo puncto cycloidis H, est complexus omnium virium mortuarum quibus mobile in punctis A, B, D, H, & omnibus intermediis urgetur, nam quicquid virium habet in H id cunctis hisce viribus mortuis continue in mobile agentibus acceptum est ferendum, adeoque vis in H acquisita, non major neque minor esse potest complexu illo virium mortuarum ex quibus resultavit, & area illa cylindrica complectitur omnes lineas omnium virium mortuarum repræsentatrices. Exempli causa si in *fig. 5* $AL=AH$, $BM=BH$, $DN=DH$ & ita porro respectu omnium reliquorum cycloidis arcuum, atque hæc AL, BM, DN plano cycloidis AaH normales sint; superficies cylindrica ALMH complectitur omnes AL, BM, DN &c. quæ vires mortuas quibus descendens mobile in A, B, D, &c. urgetur, exponunt; adeoq; dicta superficies cylindrica HAL exponit vim in H acquisitam descensu
per

per arcum AH, propter similem rationem superficies LABM, LADN exponent vires acquifitas mobili in B & D, initio descensus a quiete existente in A.

Examinandum restat quantæ sint superficies ALH, eiusque partes; fit arcus $DH=DN=s$, ejusque elementum $=ds$, quare elementum superficiei HDN, quod oritur ductu ordinatæ $DN=s$, in elementum arcus HD, fit $=sds$, quare integrando, fit area ipsa $HDN=\frac{1}{2}ss=\frac{1}{2}$ semissi quadrati arcus DH, adeoque area tota HAL = dimidio quadrati ex AH; aræque ABML, ADNL æquantur $\frac{1}{2}AH^2 - \frac{1}{2}BH^2$, & $\frac{1}{2}AH^2 - \frac{1}{2}DH^2$. Pofitis iam hisce, sequitur, quod vis acquifita in H descensus per arcum AH, quæ repræsentatur per aream HAL, proportionalis fit, non arcui ipsi AH, ut putat *Dn. Clarke*, sed dimidio quadrato arcus eiusdem AH, & tanta quoque est initio vis mobilis ascendens in cycloide ex H in A. Quod si vero descensus incipiat à quiete in puncto D, vis in infimo puncto H acquifita proportionalis erit, non arcui DH sed dimidio eius quadrati, & huic æqualis est vis corporis in arcu HD ascendens.

Quando V. Cl. porro dicit, *quod si duo corpora æqualia in diverfis distantis ab axe alicuius libræ in ejus brachia gravitent, vires eorum corporum futuræ sint, ut arcus quos describunt, quod eos æqualibus temporibus conficiant*, veram rationem, cur dictæ illæ vires sint ut arcus descripti, non attingit. Nam hæ vires sunt ut arcus, non ideo, quia arcus æquali tempore describuntur, sed quia gravitatis actio continua est, & in omnibus arcuum punctis hæ corpora vi quadam mortua æquali urgentur.

Sed pergit noster dicendo, *Si globi duo æquales in plano horizontali viribus inæqualibus impellantur, temporibus*

E

bus

bus æqualibus, spatia describent viribus impellentibus proportionalia. Aut si globi inæquales viribus æqualibus impellantur, describent temporibus æqualibus spatia massis suis reciproce proportionalia. Utraque hæc propositio est falsa. Sint enim primum globi æquales A, A & quiescentes, quorum prior impellatur globo B cum celeritate b , alter vero globo C cum celeritate c ; per regulas communicationis motus, acquirat prior globus celeritatem $\frac{2Bb}{A+b}$, & alter globus A a globo impellente C accipiet celeritatem $\frac{2Cc}{A+c}$, est ergo spatium primo globo A describendum ad spatium ab altero æquali tempore peragrandum, ut prior fractio $\frac{2Bb}{A+b}$, ad alteram $\frac{2Cc}{A+c}$, sed hæc fractiones non sunt ut vires impellentes, quæ secundum hypotheses *Autoris* sunt ut Bb & Cc , quare prior ejus propositio est falsa.

Videamus an altera locum habeat nec ne? Sint iam globi inæquales A & B quiescentes qui ambo impellantur à globis æqualibus C, C celeritate æquali a ; per easdem regulas communicationis motus, accipiet globus A celeritatem $\frac{2Ca}{A+c}$, & globus B celeritatem $\frac{2Cb}{A+c}$, & hæc celeritates sunt ut spatia quæ ambo globi post impulsus æquali tempore describent. Hæc vero spatia non sunt massis globorum A, & B proportionalia ut Dn. *Opponens* dicit; quare & altera ejus propositio est falsa. Propterea corruunt omnes consequentiæ, quas Vir Cl. adversus *Leibnitium* ex præmissis suis necit, & dicere ausim, in omnibus fere iis quæ sequuntur perpetuam regnare petitionem principii, quia Doct. *Opponens* fere ubique supponit, quod vires corporum sint
ut

ut quantitates motus, quod tamen a *Leibnitio* negatur, atque id est de quo quæritur, debuisset itaque alicubi idoneam suæ thesæ demonstrationem proferre, priusquam *Leibnitio* & aliis, qui hac in re cum ipso sentiunt, nescio quas *contradictiones* aliasque *absurditates* objiceret. Videbitur fortasse dedisse demonstrationem suæ propositionis in sequenti periodo quæ ita habet: „*Galileus* in suppositione gravitatis *uniformis*, demonstravit motum *Projectorum* in mediis non resistentibus, omnesque Mathematici, ne quidem Cl. *Leibnitio* excepto, propositionibus ejus assentiuntur. Jam vero si *tempus*, quo corpus spatium suum perlabitur in partes æquales, divisum intelligatur; quoniam gravitas uniformis est, atque adeo æqualibus temporis partibus æqualiter agit, oportet ut actione sua corpori imprimat impertiaturque *temporibus æqualibus, vires, velocitates, motusque, æquales.* Sed hæc ipsa consequentia, quatenus ad vires spectat, falsa est, ut verum est, temporibus æqualibus, æquales celeritates motusque æquales gravitatis uniformis actione continua generari. Nam ad producenda velocitatis incrementa, gravitas perinde agit in corpora mota ac in quiescentia; adeo ut temporibus æqualibus æqualia velocitatis incrementa mobili adiciantur, sive id in motu sit, sive quiescat. Sed res aliter se habet cum virium incrementis, in hisce enim computandis celeritatis præsentis ratio est habenda, nec dici potest hæc virium incrementa esse simpliciter, ut incrementa temporis, sed potius in composita ratione ex celeritatibus iam acquisitis & temporis incrementis; hoc est ut incrementa spatiorum, si nempe massæ corporum æquales fuerint, quod pluribus iam supra probatum

est. Posteaquam varias alias consequentias ex primaria illa, quam modo confutavi, elicuit Vir Cl. me denique ipsum adoritur, hæc scribens. *Sed Hermannus Leibnizii partes secutus contra eos qui vires corporibus cadentibus acquisite proportionales esse statuunt temporibus quibus descensus illi fiunt, aut velocitatibus acquisitis: Hermannus inquam asserit id falsæ suppositioni, quod scilicet corpora in altum jacta temporibus æqualibus æqualem a gravitate impulsuum numerum accipiant, inimiti. Hoc idem est ac si Hermannus gravitatem non esse uniformem, dixisset idque adeo est Galilei theoriam in quam omnes Geometræ consentiunt, funditus evertere. Existimo Hermannum sibi imaginari, quod quo velocior sit motus ascensionalis, eo plures corpora accipiant impulsus, quia ipsis occurrunt particule (imaginarie) quæ gravitatem producant. Atque ita pondus corporum majus erit cum ascendunt, et minus cum descendunt. Ex hisce cognoscere potest Lector quam sagax sit industria Cl. Antagonistæ in eliciendis consequentiis, & Adversariorum suorum sensu perscrutando: Scripsi utiq; in Phoronomia falsæ hypothesei superstrui sententiam eorum qui vires corporum ascendentium per tempora ascensuum mensurant, quod tacite supponant corpora æqualibus temporibus æqualem impulsuum numerum subire, cumque citato loco præsertim contra Pappinum disputaverim, vocabulo impulsuum usus sum, quod ipse prior id adhibuerit ad designandas resistentias quas ascendens mobile superandas habeat: Exinde protinus concludit Dn. Antagonista, hoc idem esse ac si gravitatem non uniformem esse dixissem, idque adeo esse Galilei theoriam funditus evertere, si autem quæris nexum inter hanc propositionem *gravia verticaliter in altum projecta**

*jecta non temporibus æqualibus, sed ascendentia per altitudines æquales, resistentias à gravitate æquales patiuntur, & hanc, gravitatem non esse uniformem; hunc nexum Vir Eximius nusquam ostendit, aut si unquam ostendere poterit, mihi erit magnus Apollo; interea vero nunc criticum agit & animi mei sensum non expressum verbis, scrutatus est; arbitratur enim mea opinione corpora ascendentia eo plures impulsus à gravitate accipere, quo velocior sit motus ascensionalis, quia ipsis occurrant particulæ quæ gravitatem producant, quas particulas ipse *imaginarias* vocat, haud dubie ideo, quia gravitas ipsi est *qualitas occulta*. Sed sepositis iocis, ut Cl. Viro directe respondeam: in pluribus locis præsentis schediasmatis geometricè probatas vidit has duas propositiones 1. Ex eo, quod gravitas uniformis est, mensuræ virium corporum, sunt in composita ratione ex massis & altitudinibus quas in altum projecta velocitatibus initialibus iis, quas corpora habent, percurrere possunt. 2. Sin vero vires illæ essent in composita ratione massarum & temporum ascensionis, gravitas non uniformiter sed subsultim ageret. Itaque in Cl. *Adversarii* hypothesi gravitas non est uniformis, adeoque Galilei theoria destruitur, quæ in nostro systemate facta tectaque manet.*

Sed examinandum est grave argumentum, quod Vir Cl. adhuc contra nos adducit. *Si vis* (inquit ille) *quam corpus cadendo acquirit est ut spatium descriptum, dividatur tempus in partes æquales, et si prima temporis parte acquirat partem unam virium, duabus primis temporis partibus acquirat quatuor virium partes; tribus primis partibus temporis acquirat novem partes virium, et ita deinceps. Quare secunda temporis parte acquirat*

E 3

tres

tres virium partes; tertia temporis parte acquirat quinque partes virium, et sic porro. Hæc omnia optime se habent, sed elumbes sunt consequentiæ quas inde ducit, si ergo, pergat ille, supponatur actio gravitatis has vires producentis, unius esse gradus in medio primæ partis temporis, in Medio secundæ, tertiæ, quartæ partis temporis, tres, quinque, septem gradus habebit, et sic deinceps. Sed hoc ipsum est falsissimum, actio enim gravitatis in medio cujusque temporis eadem est ut initio & in fine. Quam validum sit Cl. Antagonistæ argumentum istud, vel exinde quoque cognoscetur, quod simili modo probari possit ex eo, quod spatia æqualibus temporibus deinceps descripta, sint ut numeri impares 1, 3, 5, &c. quod gravitas quæ efficit, ut hæc spatia mobili describantur sit ut numeri iidem impares; nam si supponatur quod actio gravitatis quæ efficit ut hæc spatia percurrantur in medio primi temporis esse unius gradus, gravitatis actio in medio secundæ, tertiæ, quartæ partis temporis, tres, quinque, septem gradus habebit, & ita deinceps; quare tali argumento Cl. viri probatum est ex eo, quod gravitas uniformis est, gravitatem non esse uniformem. Videtur autem vir Doctissimus ideo sic argumentatus esse, ut concludere posset his verbis: Hoc est actio gravitatis proportionalis erit tempori et velocitati acquisitæ. Sed nosse vellem in medio cujusnam temporis actio gravitatis proportionalis sit facto ex tempore in celeritatem? quando quidem hoc ex præmissis non cognoscitur, in hisce enim ordinem temporum æqualium recensuit in quorum medio gravitatis actio sequitur progressionem numerorum imparium; sed Oedipo opus est qui inde exculpat actionem gravitatis facto ex tempore in celeritatem proportionari,

ac

ac denique initio temporis, gravitatem esse nullam. Si V. Cl. dixisset initio primi temporis vim vivam mobilis nullam esse, nihil a veritate alienum protulisset, sed quod gravitas ibi nulla esse debeat, nunquam legitimo ratiocinio ex nostro systemate deducetur.

Venio tandem ad *Achillem* Cl. Antagonistæ qui nostram virium æstimationem ipsi penitus evertere videtur, nam disputationem hanc sequentibus verbis finit: Ut præsens controversia demonstrative decidatur, ex duobus radiis seu filis æqualis longitudinis pendeant globi Chalibei ita, ut cum globi suspensi manent & sese tangunt, radii seu fila parallela sint. Alteruter horum globorum idem semper sit & ab altero ad eandem, in omnibus experimentis distantiam abducatur. Alter globus sit arbitrariæ magnitudinis abducaturque in partem oppositam ad distantiam ponderi suo reciproce, proportionalem. Ambos hos Globos eodem temporis momento labi sinas ita, ut in infimo loco descensus in quo suspensi hærebant antequam à se invicem ducti essent, sese attingere possint. Primus Globus eodem semper modo resiliet, hoc est, ad eandem altitudinem. Quare vis alterius eadem semper est, quoties ejus celeritas ponderi suo reciproce proportionalis est. Et per consequens pondere eodem manente, vis eius, velocitati proportionalis erit. Q. E. D.

Ut hujus præsentis demonstrationis vis melius capiatur, placet totum negotium per figuram 6. exponere. Sint fila æqualia DF, EG suspensa in D & E: in imo ipsorum alligati sint globi chalibei, nempe filo DF globus A, & filo EG globus B. Oportet ut distantia punctorum suspensionis DE æquet summam semidiametrorum

trorum globorum A & B, aut si vice globi B alius major vel minor adhibeatur quem dicam C, ut distantia DE æquet summam semidiametrorum hujus globi & globi A, ad id, ut quoties fila DF & EG in situ verticali sunt, globi A & B, aut globi A & C, se se contingant: intelligatur linea horizontalis MN transire per centra globorum & puncta F, G designare hæc centra. Centro D radio DF descriptus sit arcus FO, centroque E radio EG arcus GP. Sit arcus FH ad arcum GI, ut globus B ad globum A, abducaturque globus A ex F in H, & globus B ex G in I, & ambo simul descendere incipiant ex H & I, eodemque tempore pervenient per arcus HF & IG in F & G & illic inter se collidentur, ita ut uterque regrediatur in arcu in quo ceciderat, nempe globus A regreditur post impulsum ex F in H, & globus B ex G in I, seposita consideratione resistentiæ aeris. Post hoc experimentum eximatur globus B ex G, ibique alius globus C ita alligetur, ut distantia DE jam æquet semidiametrorum summam, sitque C ad B ut arcus major GK ad arcum minorem GI. Nunc ponamus globos A & C simul descensum incipere in H & K, & æquali iterum tempore describent accelerato motu arcus HF & KG, atque in F & G sibi invicem cum celeritatibus quas arcus HF & KG exponunt, obviam venient; continget vero iterum post impulsum, ut globus A resiliat ex F in H, & globus C ex G in K. Adeoque globus A in utroque experimento ad eandem altitudinem HL resilit, ex quo Cl. *Antagonista* concludit, quod vis alterius globi B vel C etiam eadem semper sit, quoties celeritas finalis globi B est ad celeritatem finalem globi C, ut hic globus ad illum.

Sed dicam vix aptius medium mihi suppeditari potuisse
ad

ad confutandam Cl. viri mensuram virium, quam hoc ipsum experimentum quod pro se adducit. Primum enim conclusio ejus, quod vires globorum B & C æquales sint aliunde peti non potest, quam ex hac suppositione, quod tam vis globi B quam vis globi C æqualis sit vi globi A eodem semper tenore resilientis. Hæc vero suppositio est *mera petitio principii*, sed ne hoc gratis dixisse videar, probabo secundo, quod, positis iis omnibus quæ in experimento posita sunt, vis globi celerioris C *major* sit vi alterius B. Hoc autem apodictice probatum erit, postquam ostendero quod *commune centrum gravitatis* globorum A & C in arcubus FH & GK ascendenti-um *altius* assurgat, quam *commune centrum gravitatis* globorum A & B in arcubus FH & GI ascendenti-um: nam si hoc est, vires globorum A & C *majus* quid præstant, quam vires globorum A & B, hoc est vis globi A plus vi globi C *major* est vi globi A + vi globi B, adeoque cum (*hyp*) vis globi A utrinque eadem sit, restat vis globi celerioris C *major* vi globi tardioris B. Itaque tantum probandum est, commune centrum gravitatis globorum A & C *altius* ascendere, quam commune gravitatis centrum globorum A & B. In horizontalem NL demittantur ex terminis arcuum H, I, K, perpendiculares HL, IM, & KN, atque dicantur HL = a, IM = b, KN = c; item arcus FH = l, GI = m & GK = n ac denique diameter horum arcuum seu 2DF, vel 2EG = d. His positis est (*hyp*) arcus GK (n) major arcu GI (m) adeoque $ln > lm$, hoc est fractio $(ln + lmn) : (dl + dn) >$ fractione $(lm + lmm) : (dl + dm)$. Cum autem arcus FH, GI, GK, minimi sint, confundentur cum suis chordis, eruntque adeo $ll = ad$, $mm = bd$, et $m = cd$, quibus

F in

in præcedentibus fractionibus surrogatis, fiet $(an+cl) : (l+n)$ major quam $(am+bl) : (l+m)$, vel quod eodem recidit, $(anA+clA) : (lA+nA)$ major quam $(amA+blA) : (lA+mA)$, constructio vero præbet æquationes $lA=mB$, & $lA=nC$, itaque in prima fractione surrogando nC pro lA , & mB pro lA , in secunda, fiet $(Ana+Ccn) : (nA+nC)$ vel $(Aa+Cc) : (A+C)$ maior quam $(Aam+Bbm) : (Am+Bm)$ vel $(Aa+Bb) : (A+B)$. Atqui ex *centrobaricis* constat, quod prior fractio $(Aa+Cc) : (A+C)$ denotet distantiam communis centri gravitatis globorum A & C in A & K existentium, ab horizontali LN, alteraque fractio $(Aa+Bb) : (A+B)$, distantiam communis centri gravitatis globorum A & B existentium in H & I. Quare centrum gravitatis globorum A & C *altius* assurgit quam centrum gravitatis globorum A & B, propterea vis globi C *major* est vi globi B. Quod erat demonstrandum.

Nemini scrupulum moveat, quod in præcedenti demonstratione arcus FH, GI, GK indefinite parvos suppositi, ut cum suis cordis confundi possint; nam demonstratio etiam obtinet cum arcus illi sunt finitæ magnitudinis, tunc vero debent globi A, B, C non arcubus FH, GI, GK reciproce proportionales esse, sed chordis horum arcuum.

De

DE VIRIBUS CORPORUM MOTO
INSITIS

&

Illarum Mensura,

Demonstrationes Mechanicæ,

Auctore

Georgio Bernhardo Bülfingero.



N *primis* Academiæ Scientiarum Con-
ventibus facta est de Mensura Virium
motricium, & natis inde controversiis
mentio. Visum est, non id sine usu
fore, si qui Sociorum suam de isthoc ar-

MM.
Sept. et
Octob.
1725.

gumento sententiam ex instituto dicant : atque inter il-
las placuit & *meam* audiri. Non multa promitto, ne-
que eximia : sed nova tamen aliqua, hoc est, publice,
quod sciam, nondum vulgata.

Nolo vero recensum hic instituere vel virorum vel
scriptorum, quibus agitata est de viribus corporum vi-
vis disceptatio : occurrent aliqua in principio sectionis
secundæ. Lubet suffragari *Leibnitio*, qui vires corpo-
rum insitas *ex facto massæ in quadratum celeritatis æsti-*
mat. Argumenta in hanc rem plura præsto sunt, & di-
versi generis, inventa variis Auctoribus. *Plerique axio-*
matis loco requirunt, ut vires totæ censeantur effectibus
integræ proportionales. Tum vero effectus metiuntur
vel cum *Leibnitio* ex ascensu gravium retardato; vel cum
J. Bernoullio ex elastris, quæ tendi a corpore moto

possunt; vel cum *Hermanno* nostro ex percussionibus successivis ejusdem corporis elastici ad diversa alia; vel cum *Jo. Polenio* (& *s'Gravesandio*) ex foraminibus, quæ corpora gravia lapsu suo imprimunt corporibus mollibus.

Alia ex virium genesi sumuntur: qualia sunt illud *Hermanni* oriundum ex descensu gravium; & nata per replicatas gravitatis sollicitationes vi viva: (atque alterum *s'Gravesandii*, quo numerum elastorum motus acceleratos generantium attendit, & in summam colligit.)

Prior classis pertinet proxime ad vires, quas *infra mixtas* vocabimus. Itaque non indignum publica luce visum est, si de viribus quoque *puris* demonstratio prodiret immediata: maxime cum ea duplici modo instrui possit, quorum altero effectus ad causam refertur; altero autem, sine istius axiomatis interventu, æquatio inter vires unas & alteras instituitur, atque ex ea ipsa derivatur virium mensura.

Talem Sectio *prima* demonstrationem exhibebit, quæ se mihi obtulit, cum metaphysicis distringerer cogitationibus; indicatam breviter in *Dilucidationibus* meis *Philosophicis* de Deo, Anima & Mundo, *Tubingæ* editis, Sect. II. Cap. 3. §. 174. p. 173.

Posterior argumentorum classis ad motus *gravium* acceleratos semper attendit, neglectis motu horizontali, & doctrina de percussione, quam huic negotio minus aptam judicari contigit. Eratque illa, ut verum fatear, non nihil ab hoc negotio remotior: non erat autem aliena. Cum examinarem difficultates, sententiæ Leibnitianæ ex percussionum doctrina objectas, non potui non in novam ejus demonstrationem, etsi aliud agens, incidere. Ipsa virium vivarum in corpore elastico per impulsum facta
gene-

genesis docuit me mensuram, quam in sectione *secunda* prolixiori inter plures alias hujus argumenti dilucidationes exhibebo.

Quoniam fieri non potest, ut *difficultatum* Leibnicio propositarum *solutiones* sine memorabili commentationis hujus defectu plane absint: itaque illas non possum non intertexere dicendis. Sed non ideo me falli nescium, aut egregiis utique viris superiorem puto. Non me illis iudicem obtrudo; sed collocutorem adiungo.

Sectio Prima,

sive,

DE MENSURA VIRIUM
CORPORI MOTO INSITARUM
DEMONSTRATIONES.

Definitiones.

I.

Vis corpori *moto insita* dicitur principium illud, per quod corpus aliquod naturale actu movetur: Cujusmodi est in corpore libere cadente, vel violenter projecto. Vocatur etiam vis *viva*. *Mortua* vero, quæ ad motum producendum tendit quidem, sed propter impedimenta sibi objecta illum nondum producit: qualis est gravitas in corpore suspenso. Vis *insita* sive *viva*, prout in

F 3

motu

motu suo libera persistit, vel impedimentis debilitatur: dicitur vel pura vel mixta. *Mixta*, si producendo effectum suum consumitur, uti est in corpore gravi ascendente; *viva pura*, si in motu perseverat, non per illum consumitur, qualis est corporis in vacuo mbti.

Schol. Appellationem & Definitiones sumsi a Leibnitio in Actis Er. 1695. p. 149. & Christian. Wolfio in El. Mech. §. 9. 10.

II. *Directionem* motus voco viam illam, in qua centrum gravitatis corporis incedit, si motus est actualis, vel incederet, si motus sequeretur: sive viam illam, secundum quam nituntur & impellunt Vires. Si via hæc concipitur ut in linea, voco directionem simplicem, vel *unius dimensionis*: Si in plano posita, & ex directionibus simplicibus composita, voco directionem *duarum dimensionum*: si in solido, orta ex directionibus plurium planorum, voco directionem *trium dimensionum*.

Fig. 1.

III. *Vim* insitam secundam AB, vel secundam AC illam dico, cuius directio & celeritas exponitur per lineam AB, AC.

Fig. 2.

IV. Si corpus A concipiatur simul habere vim secundum AB, & vim secundum AC, sic, ut eodem tempore transferatur & secundum directionem AB celeritate ut AB, & secundum directionem AC celeritate ut AC: tum ego vim illam ex utriusque huius concursu resultantem, dico *resultans* ex prioribus, vel & *vim compositam*; vocabulo circa motus iam recepto.

Coroll: Patet igitur, vim compositam nihil aliud esse, quam vim, quæ sola idem perfecte phænomenon præstaret, quod nunc concipitur a pluribus invicem coniunctis proficisci.

V. Si

V. Si Directiones illæ virium secundum AB & secundum AC sint ad se invicem perpendiculares, tum vires illas voco *indifferentes*, intellige ad se invicem; quia neutrius directio afficit directionem alterius.

VI. Si Directiones illæ comprehendant angulum acutum, vires dico *consentientes*; & si angulus fiat infinite acutus, adeoque directiones tandem coincident, vires appello *coincidentes*.

VII. Si directiones memoratæ faciant angulum obtusum, vires voco *dissentientes*; vel, si angulus fiat infinite obtusus, adeoque directiones tandem sint directe contrariæ, vires nomino *repugnantes*.

Schol. Quando vim ex repugnantibus compositam dico, non id volo, inexistere illas corpori sic, ut id in contrarias simul moveatur plagas: sed intelligo illud, quod superest ex viribus, quæ in plagas contrarias diriguntur, & si divulsæ essent, moverentur.

VIII. Si Directiones virium duarum plane se non interfecent, vires appello *disjunctas* vel *parallelas*. Tales sunt eæ, quæ in diversis ejusdem corporis in directum moti partibus inexistere concipiuntur.

Schol. Observandum est, hunc casum plane non respondere ideæ illi, quæ habetur in motibus compositis; hoc enim casu directiones non exponi possunt per latera alicujus parallelogrammi, quod tamen in ceteris omnibus fit, eo scilicet ordine, qui in rebus naturalibus observatur, ut (Leibnitiano verbo) extrema recidant in idem; angulus e. g. infinite acutus in coincidentiam, infinite obtusus in repugnantiam.

IX. Fun-

IX. *Functionem* alicujus *lineæ* voco quantitatem quamcunque ex linea illa sola vel cum quantitibus aliis constantibus utcunque compositam.

X. *Functiones* duarum linearum *similes* voco quantitates, quæ componuntur ex constantibus utrinque eisdem, & lineis ipsis eodem plane modo adhibitis: vel clarius: si in functione lineæ AB relinquantur constantes & signa omnia, & solum pro linea AB substituatur lineam AC, quantitates illas compositas voco functiones similes.

XI. *Actionem* alicujus vis dico ipsum ejus exercitium, quo sese dato tempore ad motum producendum applicat, una cum modo applicandi: si duæ pluresve vires ad eundem motum producendum concurrunt, actionem ex illis actionibus simplicibus resultantem voco *actionem compositam*.

Coroll. 1. Adeoque in viribus *vivis puris simplicibus* actionem cum Leibnitio metior per factum virium illarum in tempus; Tanto enim maior actio est, quanto longiori tempore durat uniformiter, & tanto maior, quanto vires sunt maiores; Neque in puris simplicibus differt modus applicandi unus ab altero. Igitur in symbolis, exposita actione per A, vi viva pura per V, & tempore per T, est $A=VT$.

2. Consequenter, si duæ vires vivæ puræ sese agendo non afficiant, iuvent vel impediunt, agant autem per tempora æqualia, actiones earum sunt ut ipsæ vires; hæ enim vires spectari possunt, ut simplices.

3. Si autem duæ vires sic applicentur, ut una agat in alteram, tum in æstimatione actionum ex datis viribus, vel virium ex datis actionibus, attendi simul debet, an
mo-

modus applicandi inferat differentiam? qualem? & quantum?

Schol. In viribus *mortuis*, sive pressionibus, actio idem est, quod alias momentum vocatur, adeoque mensuratur ex intensitate potentiae agentis in viam, quam dato tempore percurrit, vel ex magnitudine obstaculi in viam, per quam cedit. Patet enim, hisce positis adesse mensuram eorum omnium, quae in definitione actionis involvuntur; adest nimirum cum vi ipsa modus etiam applicandi. Ceterum, quae de actione virium hic dicuntur, pertinent praecipue ad sectionem *secundam*, ubi plenius intelligentur.

Axiomata.

I. Corpus, quod vi simplici movetur, habet celeritatem & directionem constantem, si abstrahas ab impedimentis externis.

II. Si vis una ceteris omnibus paribus maiorem producit motum absolutum, quam altera, vis prima maior est, quam secunda: si ceteris paribus eundem motum absolutum minori tempore producit, etiam maior est.

III. Si vires corporis A secundum AB aestimantur ex functione quacunque lineae AB, celeritatem & directionem virium exprimentis: etiam vires corporis A eiusdem vel aequalis secundum AC aestimantur, ex functione simili lineae AC, exponentis celeritatem & directionem huius vis secundae. Fig. 1.

Schol. Pendet hoc axioma ex principio metaphysico, quod Leibniti in Novellis Bælianis exposuit: ordinatis scilicet datis ordinata esse quaesita; adeoque datis similibus quaesita esse similia. Et hoc ipsum ex
G
genera.

generaliori altero oritur, quod scil. nulla fit differentia, ubi nulla est ratio differentiae. Potest igitur demonstrari hoc axioma, si quis postulet.

Lemmata.

I. Corpus viribus coniunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describit, quo latera separatis.

Fig. 2.
3. 9.

II. Et hinc patet compositio vis directae secundum AD ex viribus quibusvis obliquis secundum AB & BD; & vicissim resolutio vis cuiusvis directae secundum AD in obliquis quascunque secundum AB & BD.

Schol. Enunciavi hæc verbis *Is. Newtoni Princ. p. 13.* Intellego autem illa secundum definit. tertiam, vi cuius per lineas AB, AC, AD exprimitur motus, qui in dato tempore a vi data uniformiter sequeretur; adeoque & celeritas a viribus secundum AB vel AC agentibus oriunda. Ex motu enim ipso sumitur demonstratio Newtoni & aliorum omnium: Motus autem secundum AB, AC, AD, non est sine vi secundum AB, AC, AD,

III. In motu æquabili spatia eodem tempore percursa sunt ut celeritates. Constat id ex mechanicis.

Fig. 2.

IV. Nullæ dantur functiones similes laterum AC & CD, quæ simul sumtæ, sint in omni Triangulo Rectangulo æquales functioni simili hypotenuse AD, præter quadrata.

Demonstratio.

Vt hoc intelligatur, assumo formulam universalem, functiones alicuius lineæ possibiles omnes complexam: & quid ex supposita possibilitate functionum aliarum similibus sequatur, inquirō. Deprehendo vero, quamprimum a quadratis discessero, emergere talia, quæ ostendant,

non

non dari functiones similes desideratis conditionibus alias. Sit $AC=A, CD=B, AD=\sqrt{A^2+B^2}$. Functiones harum linearum $[A], [B], [\sqrt{A^2+B^2}]$, erunt exprimendo illas universaliter & similiter: Fig. 2.

$$\begin{aligned}
 [A] &= mA^a + nA^b \&c. + (pA^d + qA^e \&c.)^a + (rA^f \\
 &\quad + tA^g \&c.)^y (xA^i + yA^j \&c.)^b \&c. + \\
 [B] &= mB^a + nB^b \&c. + (pB^d + qB^e \&c.)^a \&c. + (rB^f \\
 &\quad + tB^g \&c.)^y (xA^i + yB^j \&c.)^b \&c. + \\
 [\sqrt{A^2+B^2}] &= m\sqrt{A^2+B^2}^a + n\sqrt{A^2+B^2}^b \&c. \\
 &\quad + \&c. + \&c. \text{--- in Infin.}
 \end{aligned}$$

Videtur quidem aspectus formularum primus longam & tædii plenam demonstrationem minari: Sed brevem facient *duo compendia*; quorum *altero* ostendam, functionem compositam nullam convenire instituto nostro; *altero*, inter simplices solam convenire potestatem quadraticam.

Sume ex compositis simplicissimam; habebis

$$mA^a + nA^b + mB^a + nB^b = m\sqrt{A^2+B^2}^a + n\sqrt{A^2+B^2}^b$$

& consequenter

$$m = \frac{n\sqrt{A^2+B^2}^b - n(A^b+B^b)}{(A^a+B^a) - \sqrt{A^2+B^2}^a}$$

Hic vero in valorem coefficientis m ingrediuntur valores crurum A & B : Valores isti in triangulis dissimilibus sunt dissimiles: adeoque valor coefficientis varius: & functiones assumptæ nequaquam similes pro omnibus re-ctangulis. Manetque hoc incommodum, si vel plures duobus simplicibus; vel terminus aliquis complexus ex sequentibus assumantur: illi enim, cum simplicissimi

G 2 sunt,

sunt, faciendo ex. gr. $a=1$, recidunt in casum modo examinatum. Generaliter itaque verum est, functionem compositam negotio nostro nullam congruere.

Sit iam secundo loco functio non composita, sed uno constans termino: erit

$$mA^a + mB^a = m\sqrt{(A^2 + B^2)^a}$$

$$\text{five } A^a + B^a = (A^2 + B^2)^{\frac{a}{2}}$$

unde $(A^a + B^a)^{\frac{1}{a}} = (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}$; ubi oculis patet, quando $a=2$, haberi æqualitatem.

Ut vero intelligatur, nullam dari potestatem aliam; notandum est, in extractione radicum ex aggregato duorum terminorum, post extractionem ex singulis terminis factam, requiri adhuc subtractionem alicuius quantitatis tertiæ, quæ pro diversitate radicum necessario maior aut minor est, uti id constat ex genesi potestatum.

Potest itaque $(A^a + B^a)^{\frac{1}{a}}$ repræsentari per $A-x+B$.

& $(A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}$ per $A-y+B$. ut nunc habeamus

$$(A^a + B^a)^{\frac{1}{a}} = A-x+B = A-y+B = (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}$$

sed hæc æqualitas non subsistit, nisi $x=y$. Et x non est æquale y , nisi exponentes radicum sint eadem per modo dicta: Igitur ob æqualitatem inventam exponentes debent esse eadem: five a non potest esse nisi 2. Q. E. D.

Hypotheses.

1. Facilitatis gratia supponantur in universa hac sectione massæ mobilium æquales; nisi contrarium expresse dixerō.

2. Supponatur motus æquabilis, donec diserte moneam, me loqui de accelerato aut retardato.

Pro-

Propositiones.

Theorema I.

Vires vivæ puræ, quæ easdem massas movent, possunt mensurari per functionem aliquam celeritatis, quam producant.

Demonstratio.

Quoniam motus a viribus vivis puris procedens perseverat in infinitum, ex Def. I. & Axiom. I. ideo quantitas illarum virium non potest æstimari sive ex spatio, sive ex tempore absolutis. Potest igitur solum ex massis, & ex relatione spatii ad spatium eodem tempore, vel temporis ad tempus pro eodem spatio; aliud enim nihil datur in hoc motu. Quia verò massas supponimus æquales per hyp. 1. Igitur in nostris casibus aut nulla est inæqualitas, & æstimatio virium nulla; aut illa pendet ex relationibus memoratis. Est vero inæqualitas per ax. 2. ergo & æstimatio eius, eademque petenda ex relationibus allegatis. Hæ autem comprehenduntur in idea celeritatis per definitionem celeritatis receptam. Igitur ex celeritate sumi potest mensura: cumque per dicta aliud nihil accedat, sumi potest ex functione aliqua celeritatis, quæ a viribus illis producitur. Q. E. D.

Coroll. 1. Consequenter duæ pluresve vires vivæ puræ, sese invicem non afficientes, vel seorsim consideratæ, æstimari possunt, & per ax. 3. debent, per functiones similes celeritatum, quas producant.

Coroll. 2. Etsi igitur vires puræ non obtineant effectus ita totales, ut iisdem absorbeantur: possunt tamen invicem conferri & mensurari ex effectibus dato tempore productis; effectus enim illi pro diversis celeritatibus sunt diversi.

Schol. Attendendum tamen est, cum dico, vires puras mensurari posse ex effectibus suis, & effectus variare pro celeritatibus variis: me non ideo statim asserere, vires, effectus & celeritates esse proportionales. Multæ adhuc difficultates involvuntur mensuræ effectuum variorum, de quibus hoc loco dicere nihil attinet.

Theorema II.

Si duæ vires vivæ puræ eidem corpori A inexistentes ita agant, & ad producendum aliquem motum absolutum concurrant, ut neutrius motus motum alterius in sua directione & celeritate augeat vel minuat: tum actio composita ex actionibus virium illarum resultans est æqualis aggregato actionum singularum.

Demonstratio.

Actio composita aut æqualis est aggregato singularum, aut maior, aut minor. Non maior: quia neutra alteram auget, dum ita concurrunt, ut neutrius motus per motum alterius in sua directione & celeritate promoveatur. Non minor: quia neutra alteram in concursu suo impedit, aut motum eius imminuit. Igitur est æqualis.

Q. E. D.

Coroll. Quoniam in viribus vivis puris actiones eodem tempore durantes sunt uti vires, per Cor. 2. def. XI. Igitur & vis composita, ex duabus eiusmodi viribus resultans, est æqualis aggregato singularum.

Schol. Duplex huius Theorematis applicatio esse potest, utraque legitima, sed altera tantum in sequentibus attendenda. Si massam corporis A concipias divisam in duas partes, tum habebis duas vires vivas in eodem corpore, sed ex illarum genere, quas def. 8. parallelas vel disiunctas vocavimus; atque eo in casu per præsens theoremata intelligitur, positis diversorum corporum
cele-

celeritatibus iisdem vires esse ut massas. Sin eandem massam corporis A, atque adeo unumquodque eius punctum censeas urgeri duabus viribus, quarum tamen neutra alteram in exercitio suo impediat vel adiuvet, sic, ut corpus non magis aut minus promoveatur in directione singularum, sive illæ simul agant, sive solæ agant: habebimus alterum huius propositionis casum, qui respondet Def. 5. & theoremati seq.

Theorema III.

In omni parallelogrammo rectangulo actio & vis viva pura secundum diagonalem AD est æqualis aggregato actionum & virium vivarum purarum secundum latera AB, AC. Fig. 2.

Demonstratio 1.

Vires secundum latera AB & AC ad communem motum concurrentes sic agunt singulæ, ut neutrius motus motum alterius in sua directione & celeritate augeat vel imminuat: corpus enim A per concursum illarum nec magis nec minus promovetur secundum directionem AB, quam si hæc vis sola ageret; similiterque secundum directionem AC. Earum igitur aggregatum est æquale vi compositæ resultanti ex earum concursu per Cor. Theor. 2. Sed vis hæc composita est vis secundum diagonalem per Coroll. def. 4. & Lemma 1. Ergo in omni parallelogrammo rectangulo vis secundum diagonalem est æqualis aggregato virium secundum latera AB & AC. Idemque valet de actionibus; actiones enim hoc in casu per Cor. 2. Def. XI. sunt ut vires. Q.E.D.

Schol. Observetur, inter motus vere compositos (v. Schol. def. 8.) in solo rectangulo duas vires laterales sic agere, ut neutra vis alterius motum in sua directione

Fig. 3.

ctione augeat vel minuat. Si enim angulus sit acutus, & ad singulas directiones AB vel AC ducatur linea perpendicularis *ab*, *ac*; quo mensurari possit, quantum à vi utraque in singulis directionibus corpus A promoveatur: manifestum erit, illud motu in linea AD facto magis recedere a linea *ab* in directione AB, vel a linea *ac* in directione AC per motum utrumque coniunctum, quam per unum simplicem: Et vice versa, si angulus fuerit obtusus, illud minus promoveri in suis directionibus. Nostri igitur demonstratio ad solum pertinet casum anguli directionum recti: id quod vel ideo statim monendum duxi, ne quis hæc ad omnes motuum compositorum casus ita transferre adgrediatur, ut putet, in parallelogrammis etiam obliquangulis vim secundum AD esse æqualem aggregato virium singularium secundum AB & AC. Recte Newtonus l. c. monuit, per motum secundum AC corpus A non accedere ad lineam BD. Recedit autem a linea *ba*, & accedit ad lineam *Dd*. Itaque augetur motus in directione *ABd*. Excluditurque hic casus a Theor. 2. una cum illis omnibus, ubi directio vis unius potest resolvi induas perpendiculares, quarum altera coincidit vel repugnat directioni vis alterius.

Demonstratio 2.

Fig. 4.

Sit corpus A elasticum quiescens, & in illud incurrat aliud corpus F priori æquale, elasticum, & in directione FA cum celeritate ut FA latum: per receptas percussionum leges, post ictum corpus F quiescet, & corpus A movebitur in directione & cum celeritate $AD = FA$. Vis igitur omnis corporis F transit in corpus A, & vis, quam habet corpus A, est æqualis vi, quam habuit corpus F, sibi æquale. Sint porro duo
cor-

corpora E & G prioribus æqualia ; quiescat denno A, & in idem incurrant eodem momento corpora E & G: Per easdem regulas quiescent post ictum corpora E & G : & corpus A movebitur in directione ac celeritate $AD=FA$. Consequenter utrumque corpus E & G amittet vim suam, quæ transibit utraque in corpus A. Vis autem, quam habebit corpus A, erit eadem, quæ ante fuerat. Cum igitur vis corporis F, & aggregatum virium in corporibus G & E æquantur vi eidem tertiæ, a corpore A acceptæ ; æquantur etiam inter se : Hoc est, in parall. rectangulo vis viva pura corporis F, secundum diagonalem moti, est æqualis aggregato virium, quibus duo corpora æqualia moventur in lateribus FE & FG. Q. E. D.

Schol. 2. Facile patet, hanc secundam demonstrationem non posse transferri ad angulos obliquos; quoniam ibi differunt casus percussionum, qui fiunt vel ab uno corpore, secundum diagonalem moto, vel a duobus, motis secundum latera, quando celeritates ubique lineis prædictis sunt proportionales. Rationem diversitatis horum casuum ex suis fontibus eruemus in sectione secunda; qua simul ostendemus, neque a viribus mortuis, neque ab ipso motu composito desumi instantiam posse adversus nostram hanc inferendi rationem.

Theorema IV.

In motu actuali æquabili vires motrices non sunt ut spatia, quæ eodem tempore describuntur, neque adeo ut celeritates motuum.

Demonstratio.

Vires Motrices in motu æquabili sunt vires vivæ puræ, per Def. 1. Iam in parallelogrammo rectangulo aggregatum virium purarum secundum latera AB & AC est
 H æqua-

Fig. 2.

æquale vi secundum diagonalem AD per Theor. 3. Aggregatum laterum non est æquale diagonali. Ergo vires non sunt ut latera & diagonalis. Spatia eodem tempore percurſa, & celeritates per Lemma 4. sunt ut latera & diagonalis. Igitur vires vivæ non sunt ut spatia eodem tempore percurſa, neque ut celeritates. Q. E. D.

Coroll. Humani igitur aliquid patiuntur, qui generaliter vires omnes motrices, atque adeo etiam vivas puras ex facto massæ in celeritatem æstimant,

Theorema V.

In motu æquabili vires simplices sunt ut quadrata spatiorum eodem tempore percursorum; sive ut quadrata celeritatum, quas producunt.

Demonstr.

In parallelogrammo rectangulo diagonalis repræsentat spatium a vi secundum diagonalem, latera repræsentant spatia a viribus singulis secundum sua latera eodem tempore percurſa, per Lemma 1. & spatia illa repræsentant celeritates per Lemma 4. Vires autem possunt mensurari ex functione celeritatis, per Theor. I. & vires complures ex functionibus similibus, per Coroll. 1. Theor. I. Igitur vires secundum diagonalem, & latera possunt mensurari ex functionibus harum linearum. Debent autem in rectangulo sic mensurari, ut aggregatum singularum lateralium sit æquale tertiæ diagonali per Theor. III. Sed in rectangulo nullæ dantur functiones similes huic conditioni satisfaciens, præter quadrata laterum, per Lemma 5. Igitur vires singulæ æstimandæ sunt per quadrata linearum, spatia & celeritates suas exprimentium: Hoc est, in motu æquabili vires simplices sunt ut quadrata spatiorum &c. Q. E. D.

Coroll.

Coroll. Recte igitur æstimationem antea receptam correxit Leibnitiuſ, ſubſtituendo illi, pro meſura virium vivarum purarum, factum ex maſſa in quadratum celeritatis.

Schol. Velim attendatur, hoc loco penitus ceſſare exceptiones virorum celebrium adverſus argumentum Leibnitiũ allegatas, & a diverſo tempore motuum ſimilitudo: eſt enim ubique idem tempus; eſt etiam celeritas uniformis. Feci igitur, quod non ita pridem Illuſtris ſententiæ Leibnitianæ adverſarius poſtulavit; reduxi quæſtionem ad motus uniformes, hoc eſt, ipſius ſententia, ad debitos argumento huicce terminos, & ad identitatem temporis. Oſtendam vero inferius, quomodo vires in motibus etiam acceleratis æſtimentur ex præſentibus; & quibus caſibus ad temporum diverſitates attendi debeat, vel non debeat, indicabo in ſeſtione ſecunda.

Theorema VI.

In parallelogrammis non reſtangularis vis ſecundum diagonalem non eſt æqualis aggregato virium ſecundum latera ſingularium.

Demonſtr.

Vires vivæ ſimplices meſurantur ex quadratis celeritatum ſuarum, per Theor. V. Celeritates ſunt ut lineæ reſpectivæ in parallelogrammo, ex Def. III. Aggregatum igitur virium ſecundum latera repræſentatur aggregato quadratorum ex lateribus $AB^2 + AC^2$; & vis ſecundum diagonalem repræſentatur quadrato diagonalis AD^2 . Hoc aggregatum non eſt æquale quadrato diagonalis, niſi in reſtangolo, per Elem. Geom. Ergo nec aggregatum virium ſecundum latera eſt æquale vi ſecundum diagonalem in parallelogrammis non reſtangularis.

H 2

Coroll.

Coroll. Ergo neque vis ex duabus lateralibus, eidem corpori A inest, composita, hoc in casu est æqualis earum aggregato. Vis enim composita est vis secundum diagonalem, per Coroll. Def. IV.

Theorema VII.

Fig. 5. Vis composita ex duabus viribus lateralibus, quarum directiones angulum *acutum* faciunt, est æqualis summæ quadratorum spatiorum, quæ seorsim ab illis eodem tempore percurrerentur, una cum duplo facti spatii unius CD in lineam EC, interceptam inter punctum C & perpendicularem AE, ex angulo parallelogrammi acuto demissam.

Demonstratio.

Vis ex lateralibus secundum AB & AC composita est vis secundum diagonalem AD per Coroll. def. IV. Vis secundum diagonalem $AD = AD^2$ per Theor. V, sed ob angulum AED rectum, est $AD^2 = AE^2 + ED^2 = AE^2 + EC^2 + 2EC \times CD + CD^2 =$ (quia $AE^2 + EC^2 = AC^2$) $AC^2 + CD^2 + 2EC \times CD =$ quadrato spatii AC + quadrato spatii CD, una cum duplo facti ex CD in lineam EC. Q. E. D.

Coroll. 1. Patet, hunc casum posse in limine recidere in casum theorematis tertii; si angulus fiat infinite parum acutus, sive rectus; tunc enim EC fit = 0.

Coroll. 2. Patet etiam, si in corpore A supponatur inesse vis inest secundum AB, & simul alia secundum AC, radii quemcumque quadrantis FCG; vim ex utraque compositam semper esse maiorem, quo angulus BAC est magis acutus; Erit enim linea EC semper maior, donec evanescente angulo fiat æqualis radio $AF = AC$.

Coroll.

Coroll. 3. Ex quo etiam hoc sequitur, si corpori A iam in motu secundum AB posito, nondum insita concipiatur vis quoque altera, sed illi demum debeat percussione corporis alterius externa ingenerari vis secundum AC radium quemcumque: quod vis externa percutiens, corpori iam moto directionem & celeritatem AC de novo ingeneratura, debeat esse maior, quando est angulus BAC acutior.

Theorema VIII.

Vis composita ex duabus viribus eidem corpori A Fig. 6. iam in motu insita, & directione sua coincidentibus, est æqualis quadrato summæ spatiorum, quæ a singulis percurrerentur dato tempore, sive quadrato summæ celeritatum, quas singulæ seorsim producerent.

Demonstratio.

Hoc varie demonstrari potest. Maneamus in tramite hactenus calcato. In casu theorematis VII. diagonalis AD, exprimens directionem & celeritatem motus compositi, ob angulum infinite acutum, fit æqualis AB+BD. Ergo & vis composita, hoc est, vis secundum diagonalem, quæ est $=DA^2$, fit $=(AB+BD)^2$.

Similiter, EC fit $=AC$, & AE fit $=0$. Adeoque formula illius Theorematis $AE^2+EC^2+2EC \times CD+CD^2$ transit in hanc $AC^2+2AC \times CD+CD^2$, $=(AC+CD)^2=(AC+AB)^2$. Q. E. D.

Coroll. 1. Idem valet de tribus, pluribusque in uno corpore coincidentibus, estque vis ex pluribus talibus composita æqualis quadrato summæ celeritatum, non summæ quadratorum celeritatum.

Coroll. 2. Adeoque vis composita ex coincidentibus non est aggregatum ex singulis simplicibus tantum:

H 3 sed

sed æquatur aggregato huic una cum productis radicum ex singulis quadratarum in radices reliquarum bis sumtis. Patet hoc ex dignitate secunda multinomialium.

Cor. 3. Ergo summa productorum modo memoratorum facit differentiam inter vim compositam ex duabus eidem corpori insitis, sed directione indifferenti, aut coincidenti agentibus.

Cor. 4. Quodsi igitur vires simplices in eodem corpore coincidentes sint seorsim æquales, vis ex illis composita proportionalis est quadrato numeri componentium. Ita vis A , composita ex tribus a, a, a , quarum celeritates sint $1, 1, 1$, habebit celeritatem, ut 3 , & erit $\equiv 9$

Cor. 5. Patet quoque, si ex hac velocitate composita dematur velocitas ut 1 . vim compositam ex omnibus non solum imminui vi ut 1 , sed simul auferri duplum factum ex hac ablata in omnes simplices adhuc remanentes.

Schol. 1. Non caret hæc propositio *paradoxi* specie. Itaque varia hic notari debent. 1. Non potest illa evitari, nisi vel Leibnitiana virium æstimatione negetur, vel recepta motuum compositio. Si enim ex duobus motibus consentientibus vel coincidentibus fit motus in diagonali, & vis æstimatur per quadratum celeritatis: erit utique vis composita proportionalis quadrato diagonalis. Hoc igitur in illorum gratiam, qui Leibnitio accedunt, dictum esto. 2. Adversariis commendo *verum* propositionis sensum; eo enim neglecto possent ex hoc theoremate absurditatis arguere æstimationem Leibnitii. Loquor de viribus eidem corpori *insitis*; non de *impri-mendis*. Scio, si simul impingant in corpus A duo corpora & a sigillatim illi æqualia, & quorum singula seorsim

orsim ipsi imprimerent celeritatem AB, & AC, non ideo corpori A imprimi celeritatem ut AD, cum angulus BAC obliquus est. Scio, si corpus duplum ($=a+a$) impingat cum celeritate ut AB, in corpus A quiescens, non illi communicatum iri celeritatem $=2AB$; etsi a corpore a solo accepisset celeritatem AB, & a corpore a solo accepisset eandem. Non pertinent ad nostrum institutum hi casus. Dico enim: Si eidem corpori A censeantur iam iam insitæ duæ vires M & N, quarum alteræ corpus A transferrent dato tempore ex A in B, & alteræ ex A in C tempore eodem: Tum vis ex illis composita transferet corpus A tempore eodem ex A in D, & erit proportionalis quadrato lineæ AD. 3. Quæ sit huius differentię causa prolixius dicam sequenti sectione. Hoc loco illud moneo: *vulgares* percussionum leges & considerationes hic non sufficere. Si quæ autem percussio fuerit eiusmodi, ut in corpus motum agat tanquam in quiescens, illius ope tales corpori vires inferi posse. Exempla mox repetam e doctrina gravitatis. Sed sublimius aliud, & nobili controversię implicitum, alteri loco & tempore asservabo. 4. Denique, si minus tolerabile videatur ex duabus viribus coincidentibus exurgere vim maiorem aggregato earundem: explicent mihi contrarię sententię patroni, cur in ipsarum hypothesi per resolutionem oriantur vires parentibus suis maiores. Si enim ex F moveatur corpus directione & celeritate FA, vis motrix erit $=F \times FA$: Sed postquam id in corpus A quiescens & æquale impegit, movebitur A secundum AC cum celeritate AC, & F secundum AB cum celeritate AB: eruntque adeo vires motrices $=F \times AB + A \times AC$. Quale hoc *augmentum* est? & unde ortum?

Fig. 4.

Schol.

Fig. 7.

Schol. 2. Illud fortassis non abs re erit, ut solutionem speciosæ difficultatis hic interferam; quoniam aliquo sensu sumi ex hoc theoremate debet. Est vir genere & scientia illustris, cuius hæc obiectio publice legitur. „ Sit
 „ corpus C sphericum, et gravitatis expers, libere natans in aere. Sint corpora duo A et B priori
 „ æqualia et similia, eademque celeritatibus $AC=BC$, sub
 „ directionibus æqualiter ad horizontem inclinatis irruant
 „ in corpus C. Resolvantur directiones AC et BC in
 „ suas laterales, altera in AD, et DC, altera in BD et
 „ DC. Quoniam directiones horizontales AD et BD per
 „ hypthesin æquales sunt, et contrariæ; illæ mutuo sese
 „ destruunt: Restantque solæ verticales DC et DC, quæ
 „ in corpus C quiescens agant. Urgetur itaque corpus
 „ C verticaliter deorsum, cum summa directionum vel virium verticalium residuarum. Sit angulus $ACB=120$
 „ gradibus, erit $DC=\frac{1}{2}BC$, et corpus C urgetur vi verticali, quæ sit æqualis vi totali et absolutæ, quam ante
 „ ictum habuit corpus A vel B, adeoque dato tempore describet lineam verticalem $EC=AC=BC$: habebitque
 „ celeritatem eandem, qua ferebantur corpora A et B ante percussionem: atque, si in ipso ictus momento, quartum corpus E singulis prioribus æquale verticaliter sursum impingat cum data celeritate EC, certum est, corpus C permansurum in quiete, et futurum inter corpora utrinque agentia æquilibrium. Sed æquilibrium non afforet, si vires æstimandæ essent per quadrata velocitatum: Corpus enim C urgebatur duabus viribus verticalibus, quarum singularum celeritates exprimuntur per $DC=\frac{1}{2}EC$. Adeoque vires per $DC^2=\frac{1}{4}EC^2$; unde earum integra summa tantum est $=\frac{1}{2}EC^2$; cum tamen
 „ quar-

quartum corpus E, impingens in C, et idem reducens ad, æquilibrium, habeat celeritatem ut EC, et consequenter, vires, ex Leibnitii sententia æstimatas, ut EC^2 . Quo- modo hæc consentiunt? Est hic dignus vindice nodus: Dabimus operam, ut solvatur. Potest autem id fieri, si casuum varietates legitime distinxeris. 1. Si omnia tria corpora, A, B, & E simul impingant in corpus medium C: erit æquilibrium, hoc sensu, ut corpus C permaneat in quiete, & nullius corporis motum sequatur; vires autem, quibus illud sursum & deorsum urgetur, non sunt æquales. Siquidem vis sursum agens est $= E \times EC^2$: & vis deorsum agens est $= (A+B) \times DC^2$. Notari autem meretur, ad quietem corporis inter duo impingentia medii nequam requiri virium æqualitatem; sed oportere, ut vires sint *reciproca massarum*. Id in secunda sectione plenius apparebit. 2. Si consideres, quid in experimento aliquo secuturum sit ex impactu duorum tantum corporum A & B in tertium C quiescens, & de elasticis sermonem instituas: equidem directiones horizontales AD & BD ita sibi repugnabunt, ut corpus C de neutra participet; sed directiones verticales DC & DC non ita transibunt in corpus C, ut hoc moveatur cum celeritate CE, etsi illud in eadem hac directione CE feratur post ictum. Neque adeo hoc corpus C, per ictum istum semel in motu positum, ad æquilibrium reducetur per occurrens aliud æquale E, motum in directione, & cum celeritate EC. Constat hoc per ordinarias de corporum percussione regulas: neque pugnat cum sententia priori, si rem sollicitè reputes. 3. Sin denique abstrahas a modo, quo corpori C impressæ sint vires illæ secundum DC & DC, concipiasque, eidem corpori C *insitas esse undecumque vires M & N,*

I
agentes

agentes secundum latera parallelogrammi DC & DC, angulum infinite acutum comprehendentia; erit utique celeritas corporis C exprimenda per diagonalem $= 2DC$; & opponendum huic corpori, pro restituendo æquilibrio, aliud æquale E, cum celeritate & directione EC adveniens. Sed hoc in casu vis corporis C non erit summa singularium $= 2DC^2 = \frac{1}{2}EC^2$; Sed addendum est huic summæ duplum factum ex DC in DC: ut adeo per theorema præsens, vis composita corporis C emergat $= C \times (DC + DC)^2 = E \times EC^2$; uti pro æquilibrio faciendo requiritur per regulam No. 1. huius scholii allegatam. 4. Similes hisce responsiones pertinent ad illos quoque casus, si loco trium eiusmodi corporum, æquales directionibus suis angulos comprehendentium, singas: *quinque*, aut *septem* &c. corpora impingere in aliquod medium C quiescens: illud unum memineris, quod in hisce casibus attendi etiam ad theor. seq. 10. oporteat; est enim $C \times (2DC - 2HC)^2 = E \times EC^2$, pro No. 3. huius scholii: pro No. autem 1. erit, (colligendo A & F in corpus unum, itemque B & G in alterum) $A(DC - HC)^2 + B(DC - HC)^2 : E \times EC^2 = E : A + B$. Est enim $DC - HC = \frac{1}{2}EC$; sive $2DC - 2HC = EC$: & generaliter pro omni figura regulari laterum numero imparium, uti *Goldbachius noster* ex hoc ipso theoremate deduxit, cum id Geometricè non nisi difficiliter demonstrari posset, ducta diametro ad unum radiorum v. gr. EC perpendiculari, differentia omnium distantiarum superiorum Aa + Bb + &c. & omnium inferiorum Ff + Gg + &c. est semper æqualis radio EC; id quod obiter indicatum pro novo exemplo esse potest instituti illius *Varignoniani*, quo usus mechanicæ in geometria ostenditur.

Fig. 8.

Theo.

Theorema IX.

Vis composita resultans ex duabus viribus, quarum directiones angulum obtusum comprehendunt, est æqualis summæ quadratorum spatiorum, quæ seorsim ab illis eodem tempore percurrerentur, demto duplo facto spatii unius CD in lineam CF interceptam a perpendiculari ex angulo obtuso demissa, & puncto C. Fig. 9.

Demonstratio.

Hæc eadem est cum Demonstratione Theorematis VIII. nisi quod ibi prop. 12. Element. II. allegatur, hic autem prop. 13. Est enim $AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2CD \times CF$; Adeoque & vis composita ex duabus &c. Q.E.D.

Coroll. 1. Patet igitur, si directiones angulum obtusum comprehendant, vim compositam esse minorem aggregato singularum seorsim sumtarum.

Coroll. 2. Esse æqualem summæ virium singularium, si CAB fiat infinite parum obtusus, hoc est rectus; adeoque rem denuo recidere in Theor. III.

Coroll. 3. Esse minimam, si angulus fiat infinite obtusus, hoc est, si directiones fiant plane contrariæ; eo enim casu CF fit maximum.

Theorema X.

Vis composita resultans ex duabus, quarum directiones sunt omnino contrariæ, est æqualis quadrato differentię spatiorum, quæ a singulis percurrerentur, sive quadrato differentię celeritatum, quas singulæ producerent.

Demonstratio.

Fiat angulus CAB infinite obtusus, ut habeamus vires directione sibi repugnantes: fiet $CF = CA$ adeoque formula Theor. IX. $CA^2 - 2CD \times CF + DC^2$ erit $= CA^2 - 2CD \times AC + CD^2$. Est vero hæc formula $=$ Fig. 9.

I 2

(CA—

$(CA - CD)^2$, vel $(CD - CA)^2 =$ quadrato differentia-
 tæ laterum, quæ exponunt spatia & celeritates. Ergo
 vis ut AD^2 , composita ex duabus, quarum directiones
 &c. Q. E. D.

Potest idem, uti hactenus, deduci ex vi simplici se-
 cundum Diagonalem. Diagonalis enim hoc in casu est
 differentia laterum. Et vis composita est æqualis vi sim-
 plici secundum Diagonalem ex Def. IV. Ideoque per
 Theorem. V. vis hæc composita est æqualis quadrato
 differentia-æ spatiorum vel celeritatum. Q. E. D.

Theorema XI.

Si vires duæ insitæ, directionibus suis indifferentes,
 ipsæ exponantur per lineas AB & AC, tum directio &
 celeritas vis ex illis compositæ obtinentur, si in parabola
 quacunque semiordinata DO pertinet ad abscissam AD
 (= AB + AC) sumatur pro sinu toto, & semiordinate
 BN, CM, pertinentes ad abscissas AB & AC respective
 pro cosinibus BAD, CAD.

Demonstratio.

Sit AMNO, linea parabolica, parametro $m = 1$
 descripta: Erit $DO = \sqrt{DA}$, & $BN = \sqrt{BA}$, denique
 $CM = \sqrt{CA}$. Fiat iam $Ab = BN$, & $Ac = CM$, &
 $Ad = DO$. Exprimunt Ab, Ac, Ad , celeritates virium
 per AB, AC, & AD expressarum, per Theor. V. erit-
 que adeo $Abdc$ parallelogrammum, in quo latera &
 diagonalis representant directiones & celeritates virium
 indifferentium secundum Ab & Ac , atque vis ex illis
 compositæ secundum Ad . Quodsi igitur actu sumatur
 Ab & Ac , habebitur Ad positione. Si in gradibus qua-
 ratur, manifestum est, sumta Ad pro sinu toto, esse Ac
 sinum rectum, & Ab sinum complementi Anguli BAD,
 &

Fig. 10.
 et 11.

& vice versa, *Ab* rectum, & *Ac* finum complementi anguli *CAD*. Q.E. D.

Coroll. 1. Ex his patet, si latera, sibi invicem perpendiculariter insistentia, exprimant ipsas vires, & compleatur rectangulum *ACEB*, directionem vis compositæ nunquam fore in eius Diagonali, nisi cum rectangulum transit in quadratum.

Coroll. 2. In ceteris casibus lineam *AD*, quæ directionem & quantitatem vis compositæ exponat, cadere versus illud latus, quod minores exponit vires.

Coroll. 3. De aliis directionum componendarum angulis rem similiter posse expediri.

Schol. Brevior constructio fuisset, si ad alterutram lineam, v. g. *AC* pro unitate assumptam, & ad alteram *AB* quæsiuisses mediam proportionalem *AF*, & ex hac *AF*, atque unitate *AC* compleuisses parallelogrammum. Ita enim directiones & celeritates fuissent uti latera *AC*, *AF*, *AG*, quia vero sic pro singulis casibus nova assumeretur unitas; ideoque prætuli constructionem alteram universaliorem. Semel enim descripta omnibus inservit casibus parabola. Utilitatem huius theorematis suo ostendam tempore. Nunc transeo ad motam *acceleratum*.

Theorema XII.

Si quod corpus *A* ex altitudine *AB* ita cadat motu a quiete intoaro in *A*, ut percurrendo spatium *AC* in tempore primo adquirat celeritatem *CF*, & percurrendo spatium *CD* in tempore secundo adquirat novam celeritatem $LG = CF$, habeatque adeo in *D* celeritates secundum eandem directionem duas æquales, scil. $DL (=CF)$ & LG : iterumque percurrendo spatium *DE* præter priores $DL + LG = BM + MN$ ad-

Fig. 12.

quirat novam singulis prioribus æqualem NH, & sic porro: Dico, vim corporis vivam, lapsu adq̄uisitam, esse ut quadratum celeritatis finalis.

Demonstratio.

Supponatur, nova celeritatis incrementa cessare vel in C, vel D, vel E, vel B &c. Certum est, corpus deinceps motum iri æquabiliter descendendo; & vim eius adq̄uisitam fore maiorem in B, quam in E, & sic porro; quoniam major illis casibus est celeritas, & quantitas virium mensurari potest ex functionibus celeritatum similibus per Theor. 1. & Cor. eius 1. Quæritur igitur solum, quanta sit illa vis? Ostendimus Theor. 5. in motu uniformi vim esse ut quadrata celeritatum. Hic motus est uniformis in suppositione cessantium incrementorum, & peragitur a vi per lapsum adq̄uisita. Ergo vis per lapsum adq̄uisita est ut quadratum celeritatis finalis.

Potest hoc, præmissis Theor. 5. omnino sufficere ad monstrandam rei veritatem: ut tamen intelligatur, quomodo hæc etiam cum cæteris cohæreant, placet attendere ad Theorema 8. Vis lapsu a quiete incoato sic adq̄uitur, ut corpori A, cadendo per AC imprimatur vis celeritatis CF in directione verticali; eisdemque cadenti per CD imprimatur vis celeritatis LG, & cadenti per DE vis celeritatis NH in directione prioris. Habemus igitur tres vires infitas coincidentes, quarum singularum celeritates sunt $CF = LG = NH$: adeoque per Theor. 8. vis ex illis tribus composita est æqualis $(CF + LG + NH)^2 = EH^2$, sive uti quadratum celeritatis finalis. Q. E. D.

Coroll. Quoniam in hypothese theorematis præsentis per Galilæanas demonstrationes altitudines lapsus sunt,
ut

ut quadrata celeritatum finalium, per altitudinem illam inde a quiete cadendo adquisitarum: igitur manifestum est, rectissime celeb. viros, Leibnitium, Hermannum & Wolfium, mensuram virium vivarum fecisse altitudinem, per quam grave cadens a quiete in hypothesi gravitatis naturalis Galileana acquireret celeritatem datæ æqualem; itemque, per quam ascendendo consumeret celeritatem initialem datæ æqualem.

Schol. Habemus hoc loco *factum naturæ*, quod casum exhibet Theorematis nostri VIII: Etsi illud fortassis prima fronte satis a consuetudine naturæ alienum videri potuisset. Usus autem illius Theorematis spectari amplius in hoc negotio potest; siquidem facilis hic via aperitur solvendi difficultatem Leibnitio motam. Suspicatur enim Vir Clarissimus, pugnare secum duas Leibnitii sententias, dum altera gravitatem requirat uniformem, altera respuat: æqualibus enim temporibus æquales imprimi celeritates, gravitatem igitur esse uniformem, & agere æqualiter; nec tamen æquales imprimi vires, gravitatem igitur non esse uniformem, nec agere æqualiter. Accipe verba, quæ huc pertinent: „*Supponatur tempus, quod cadendo insumitur, dividi in partes æquales. Quia gravitas uniformis est, et consequenter æqualibus temporis partibus æqualiter agit; necessum est, ut actione sua imprimat, et communicet corpori cadenti vires, celeritates et motus æquales temporibus æqualibus. Adeoque vis impulsiva, celeritas, et motus corporis cadentis augebuntur pro ratione temporis.*—*Gravitas ponderis 4 librarum tantundem agit uno tempore, ac gravitas ponderis 1. libræ quatuor temporibus* — — — Dominus Leibnitius agnoscit,
 „ quod

„ quod gravitas temporibus æqualibus producat celeritates
 „ æquales in corpore descendente, quæque tollat æquales
 „ in ascendente; atque adeo sit uniformis. Agnoscit esse
 „ uniformem, (cum agitur de imprimenda celeritate;
 „ et facit tamen non uniformem) * cum agitur de im-
 „ primenda vi impulsiva. Non igitur secum ipse con-
 „ venit. „ Hactenus vir doctissimus Solutionem dif-
 „ ficultatis peto ex præmissis Theorematis 12 & 8. Sin-
 „ gulis scil. temporibus imprimitur nova celeritas priori
 „ æqualis; idque ob uniformitatem gravitatis, & quoniam
 „ illa in corpus motum agit tanquam in quiescens. Dicam
 „ similiter, singulis temporibus imprimitur nova vis viva,
 „ quæ, si sola esset in hoc corpore sine priori iam inexisten-
 „ te, vel si in alio corpore conciperetur, esset eidem æ-
 „ qualis, ob eandem rationem; etsi enim iam moveatur
 „ corpus, respectu tamen causæ gravificæ potest consi-
 „ derari ut quiescens. Perinde igitur est, respectu no-
 „ varum causæ gravificæ impressionum, an concipias il-
 „ lam secundo momento agere in corpus prius iam aliqua
 „ vi affectum; an supponas, post primum momentum an-
 „ nihilari illud, & substitui in eius locum aliud quiescens
 „ æquale. Utroque enim casu gravitas tantundem agat in
 „ momento secundo. Quoad actionem igitur gravitatis ipsam
 „ nulla hic difformitas fingitur. Differentia omnis est in
 „ effectu composito. Celeritas enim ex duabus singulatim
 „ æqualibus composita facit summam; adeoque respondet
 „ temporum summæ: Sed vis viva, composita ex duabus
 „ in eodem corpore coincidentibus, quarum secunda prio-
 „ ris celeritatem sua celeritate addita duplam facit, vis in-
 „ quam, hæc non facit summam duarum virium singularium
 „ per Theor. 8. adeoque non respondet tempori, sed qua-
 „ dra-

* Hanc pa-
 renthesin e-
 go addidi,
 ut comple-
 atur sensus,
 credo omif-
 sam esse in-
 curia Ty-
 pothetæ,
 ob repeti-
 tionem vo-
 cis unifor-
 mem.

dratis temporum vel celeritatum , sive spatiis descensus per Theor. 12. Nihil hic pugnat. Gravitas est uniformis in producenda celeritate nova, & vi nova: discrimen celeritatis compositæ a vi composita aliunde pendet, quam a diversa æqualibus temporibus gravitatis actione. Ista de motibus acceleratis. Nunc de *retardatis* breviter.

Theorema XIII.

In motibus uniformiter retardatis vis initialis composita ex pluribus simplicibus coincidentibus per actionem gravitatis eodem modo resolvitur, quo composita est in acceleratis.

Demonstr.

Supponatur, corpus celeritate iam acquisita in B *fig.12.* iterum sursum reflecti, & ascendere: supponatur, illud primo tempusculo ascendere per Bb: & supponatur spatium Bb tam parvum, ut motus per illud faciendus possit haberi pro æquabili. Certum est, illud corpus experturum resistentias gravitatis, quales & quantas cadendo ex b in B acciperet impulsus: adeoque id perinde esse, ac si vi, cuius celeritas est BR, directe renitetur vis, cuius celeritas est Rr. Vis igitur viva, quam corpus habet in b est æqualis quadrato differentie celeritatum = bk^2 per Theor. 10. Cumque in motibus uniformiter acceleratis vel retardatis post spatia finita eadem obtineant rationes, quæ in spatiis infinite parvis, vis residua in E similiter æqualis erit vi, quæ emergit ex duabus sibi repugnantibus, quarum altera est vis in B, cuius celeritas est BR, & alterius celeritas est QR. Sed vis ex hisce composita est = $(BR - QR)^2 = BQ^2$. Adeoque vis post primum tempus finitum residua est

K EH².

$EH^2 = BQ^2$. Et sic porro. Igitur in motibus uniformiter retardatis &c. Q. E. D.

Idem breviter ex Cor. 6. Theorem. 8. sequitur: Tollatur enim singulis temporibus vis, cuius celeritas ut 1; vis composita non minuetur tantum vi ut 1, sed simul duplo facto ex vi ablata in vires residuas: Sunt adeo decremента virium vivarum in retardatis, uti incrementa in acceleratis, inverso solum ordine initii, & finis per Theor. 12. Resolvitur adeoque vis composita in retardatis, eodem modo, uti componitur in acceleratis. Q. E. D.

Coroll. Ex hisce consequitur, corpus, vi concepta sursum pergens, ascendere præcise ad altitudinem, ex qua cadendo adquisivisset celeritatem impressam; & tempore eodem, quo illam cadendo accepisset: & in singulis spatii punctis, itemque in singulis temporis momentis, æqualiter ab initio casus, & a fine ascensus distantibus, habere celeritates easdem: & in descriptis temporum momentis versari in iisdem spatii punctis, & habere vires vivas æquales: & in fine ascensus, quemadmodum & in principio descensus, nullam habere vim vivam: hoc est, nostram virium theoriam consentire in omnibus cum recepta gravitatis.

Schol. Velim, attendant lectores mei ad discrimen virium vivarum per actionem gravitatis acceptarum, vel destructarum, & gravitatis ipsius. Neglecto illo Vir insignis ex æstimatione virium Leibnitiana voluit deducere, ab initio temporis nullam esse gravitatem, adeoque corpus plane non descendere; & in fine ascensus similiter nullam esse, adeoque corpus post ascensum non recidere in tellurem; sed manere suspensum. Enimvero recte pro-

probat, quod, si *vis lapsu acquisita* sit ut spatium, il' a ab initio lapsus nulla sit. Sed ad nostram id sententiam non pertinet, quando eam conclusionem *ad gravitatem* transfert in applicatione. Gravitatis enim, vis illa mortua sollicitans, non est ut spatium descensus: Sed vis viva, per actionem gravitatis infinito numero replicatam orta, est ut spatium. Per hanc non incipit descendere corpus: sed pergit tamen, per hanc non minus, quam per novas gravitatis sollicitationes. Similiterque, quamdiu illa durat in ascensu, tam diu corpus ascendit: cum desinit, non ascendit amplius. Hæreret igitur suspensum, si nihil aliud accederet. Sed vis eadem mortua, quæ priorem vim vivam in hoc corpore successive peremit, nunc etiam continuatis impulsibus novam, & priori illi directione sua contrariam successive imprimit. Manent igitur etiam hac in parte sententiæ nostræ in concordia cum Theoria Gravitatis Galileana, si a Cartesio disceseris, universaliter approbata. vid. *Recueil. des diverses Pieces par Mrs. Leibniz, Clarke, Newton.*

T. 1. p. 178.

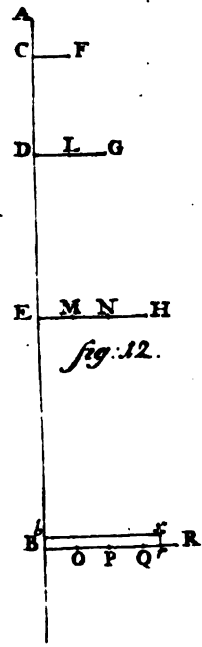
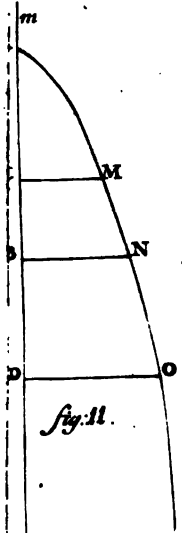
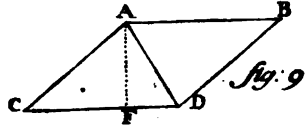
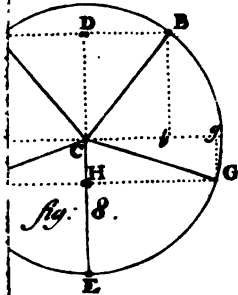
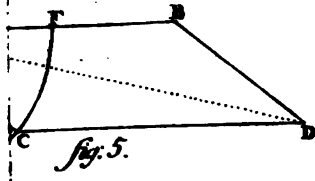
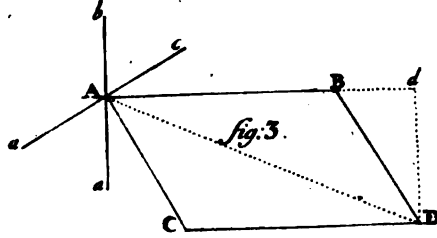
Sectio Secunda,

five,

DE VIRIBUS CORPORUM MOTO
INSITIS*Varie Dilucidationes.*

I.

PRæmissis, quæ dixi, ausim sperare, Lectorum aliquos non procul ab assensu sententiæ nostræ abfore. Si hæreant alii: varias id dubium causas habere potest. Quas divinare licuit, conabor ex eorundem animis revellere. I. Simillima est evidentiæ *species* illa *veri*, qua blanditur æstimatio mechanicorum recepta: Neque potest illi melius detrahi persona, quam si integram idearum huic negotio involutarum texere genealogiam liceat. Incipiam igitur ab hoc instituto. §. 2.—20. II. Qui ratiocinium superiori sectione expositum generatim potius intuentur, quam exacte pensitant, illis facile videri potest, pati hunc inferendi modum *instantias*, a vi mortua vel motu sumtas. Itaque secundo loco singula ratiocinii momenta scrupulosius repetam, & quid nostra ab instantiis memoratis illatio differat, ostendam. §. 21.—34. III. Theorema octavum Leibnitianæ æstimationis consecrarium est primo



mo intuitu *paradoxum*: id igitur alienare animos legentium posset, nisi tertio loco exponeretur, quæ sit illius propositionis cum receptis de percussione sententiis co-hæsiō & consensus §. 35—50 IV. Porro, quo plures sunt ad eandem conclusionem *aditus diversi*, eo gratior ad illam accessus est; igitur quarto novum tentare fontem, & ex ipsa percussionum doctrina mensuram stabilire eandem placebit §. 51—61. Denique *V. difficultatem* ex eodem hoc percussionum argumento deductam necesse erit resolvere. §. 62—67. Prolixior erit omnis hæc disquisitio, ne, *dum brevis esse laboro, obscurus fiam.*

Membrum. I.

II. Vires motrices varie a variis mensurari constat inter eruditos. *Cartesius*, magnus mensurarum artifex, iudicari illas voluit ex massa in spatium elevationis. Testes sunt literæ eius. vid. Tom. I. Epist. 73. Idem contradixit mensuræ virium per massam ductam in celeritatem. v. Tom. I. Epist. 74. p. 255. Edit. Bat. Tom. II. Epist. 92. p. 293. & Epist. 109. p. 369. & passim alibi. *Successores* eius, quoniam ad Staticam attendebant solam, ubi celeritates spatii respondent, utramque æstimationem admiserunt. v. *Nic. Poisson.* in *Mechan.* Cartes. not. 1. p. 23. Equidem proprie loquendo nec in staticis vires sunt proportionales factæ massæ in celeritatem: sed momentum virium. Ita vis corporis gravis est massæ proportionalis: sed momentum eius est proportionale factæ ex massa in celeritatem. Receptum tamen est vulgari usu, ut momentum potentiæ nitentis in-

telligatur, cum vires mortuæ dicuntur esse proportionales factæ massæ in celeritatem. Neque ex hac amphibolia periculum est inter gnaros rerum & ingenuos iudices. Mansit etiam hæc virium æstimatione ad usque *Leibnitium*, qui introducto *virium* novo *discrimine*, de altera illarum specie concessit receptam, de altera novam proposuit mensuram. Fingamus, nos priorum omnium oblitos, de novo inquirere in fontes & argumenta utriusque æstimationis.

III. *Originem* quidem *æstimationis* illius, qua vires exprimuntur *per factum massæ in celeritatem*, quero in hac facili idea. Fac, esse duo corpora A & a , alterum maius, alterum minus, sitque v. g. $A=2a$; fac illa moveri celeritate æquali per tempus & spatium æqualia: Maior vis est, quæ movet corpus A , quam, quæ movet corpus alterum a ; tantoque est maior, quanto est corpus ipsum maius; potest enim corpus A concipi divisum in duo $a+a$, quæ singula arguant vires æquales, æqualia enim in hoc motu sunt omnia. Igitur positis celeritatibus æqualibus, vires motrices sunt ut massæ. *Similiter*, si duo corpora æqualia supponantur moveri uniformiter per tempora æqualia, sic tamen, ut unum A percurrat spatium duplum, vel utcunque multipulum alterius a , habeatque adeo A celeritatem duplam, vel utcunque multiplam alterius a : Maior vis erit in primo quam in secundo. Cumque spatium corporis A possit dividi etiam in duas vel utcunque plures partes, quarum singulæ sint æquales spatio corporis a : Manifestum etiam hoc loco videtur, vim corporis A , esse ad vim corporis a , uti sunt spatia*, sive, quod in motibus æquabilibus (de quibus loquimur) idem est, ut celeritates. Ex

*.vid Cart.
Tom. I.
Ep 73 par.

quod facile: et in primis Ep. 74. paragr. primum illud

eo itaque sequitur, si corpora *A* & *a* habeant massas inæquales, & celeritates quoque inæquales, quod vires in illis motrices sint in ratione composita ex directis massarum & celeritatum.

IV. Equidem hæc adeo evidentia visa sunt multis, ut vel *axiomatis* vel *definitionis* loco hanc propositionem adhibuerint. Allegarem nomina virorum, nisi res nota esset. Puto autem, ipsam hanc evidentiam speciem, conjunctam cum experimentis quibusdam eidem accommodis, in causa fuisse, ut tam sero, & a paucis hucusque agnita sit fallacia huic ratiocinio intertexta. Consuevimus, non insignem axiomatis attentionem adhibere: itaque fieri potest, ut fallamur blandiente veritatis specie; maxime, si opinionem nostram videatur experientia confirmare. Atqui certum est, in vecte & potentiis ad vectem reduci solitis æquilibrium obtineri, quando factum ex pondere vel (posita gravitate naturali) ex massa corporis in spatium vel celeritatem utrinque est æquale. Habemus igitur experientiam propositioni consentientem: habemus in illa fontem quoque illius Cartesiani axiomatis, quo asseruit, eandem requiri vim ad elevandum corpus duplum ad altitudinem simplicem, vel simplicem ad duplam. Equidem hoc in staticis, quando vecte aut similibus utimur machinis, verissimum est.

V. *Duplici* tamen *metodo* inquiri in eius propositionis universalitatem, atque adeo detegi potuisset latens in enunciatione nimium generali vitium; altera a posteriori, a priori altera. Nescio, quam primo locum ingressus sit *Leibnitius*, calcavit utramque; & in publicis quidem scriptis illa a posteriori primum usus est. Ostendit ex hoc principio nimium generaliter adhibito
sequi,

sequi, quæ parum inter se consentiant. Ex dictis *Cartesii* 1) æquales sunt vires, quæ unam libram elevant ad spatium quadruplum, & quæ libras quatuor elevant ad simplum: 2) Suntque etiam vires ex Cartesianorum sententia ut factum ex massa in celeritatem. Iam suppone corpus A ut 1. descendere gravitate naturali, & incipiendo a quiete, ex altitudine 4. ulnarum, & corpus B ut 4. descendere similiter ex altitudine ulnæ unius: Vis in fine descensus utrinque acquisita erit, ibi quidem tanta, ut simplum pondus possit elevare per quadruplum spatium, hic tanta, ut quadruplum pondus per simplum spatium. Ergo per hypothese primam erunt hæ vires æquales. Sed per secundam erunt inæquales; est enim massa corporis $A=1$, & celeritas in fine acquisita per Galilæanas demonstrationes $=2$: adeoque factum ex massa A in suam celeritatem $=2$. Sed massa corporis B est $=4$, & celeritas eius acquisita $=1$: adeoque factum ex massa B in celeritatem suam $=4$. Quod si igitur vires æstimantur ex hypothese secunda, deprehenduntur esse inæquales. Vnde *Repugnantia*?

VI. Facile est intellectu, quod *aut* ex propositione nimium generali hypotheseos primæ enascatur, *aut* ex falsa virium æstimatione in hypothese secunda. In *primo* quæsi verunt responsa sua, qui Cartesium defendere instituerunt, Viri celebres & eruditi; sic tamen, ut in applicationem Leibnitii potius, quam in enunciationem nimis generalem reiiceretur culpa. Voluerunt intelligi Cartesium de illo casu, ubi *tempora* ascensuum sunt *æqualia*; addito, quod in casu per Leibnitium obiecto tempora ascensuum sint inæqualia. Et fatendum est sane, differre casum Leibnitianum ab enunciatione
Car-

Cartesiana, si ad identitatem temporis hæc ipsa restrin-
gatur. Quæri igitur primo loco & *historice* posset, an
ex sententia Cartesii principium illud generale de solis il-
lis valeat casibus, ubi elevationes ad diversas altitudi-
nes sunt isochronæ? Equidem in exemplis a Cartesio
allegatis id ita obtinere certum est; videturque id con-
sequi etiam ex eo, quod in tertia ratione dubitandi idem
Cartesius exposuit. Tom. I. Ep. 74. p. m. 258. Ex
adverso autem non minus certum est, illum temporis,
in utroque casu eiusdem, nec verbo meminisse; quin imo
repugnasse illi comparationi, qua factum ex massa in spa-
tium æquipolleet facto ex massa in celeritatem, id quod
tamen evitari non potest, si identitatem temporis requi-
sivit. conf. Tom. I. epist. 74. p. m. 255. 256. Se-
cundo etiam *philosophice* disquiri potest, an omnino tem-
poris determinatio necessaria sit ad huius quæstionis de-
finitionem? Negat Leibnitius, diversitatem temporis,
quo gravium ascensus §. 5. memoratus durat, in æsti-
matione harum virium attendendam esse: Aiunt alii.
Sed *quo iure*? Dicam id, ubi enunciationem Cartesia-
nam una cum sua limitatione examinabo. Hic *primus*
controverfiæ actus fuit.

VII. Quando semel illi involutus fuit *Leibnitius*,
successive deinceps ea vulgavit, quæ *a priori* perducere
possunt ad agnoscendam explicationis aut demonstratio-
nis §. 3. exhibitæ insufficientiam. Ponamus, esse Phi-
losophum, qui exemplis didicerit, sæpe evidens videri,
quod distinctius examinatum omnino falsum esse depre-
henditur; eundemque adeo demonstrationem optare &
aggredi propositionis antea exhibitæ. Num hæc ratio-
cinationum series esse potest? Quæro mensuram virium

L

motri-

motricium : hoc est, quæro, quam rationem habeant vires in corpore moto A præsentibus, ad vires in corpore moto B præsentibus. Si mensuram quæro, debeo invenire *unitatem*, quæ *replacetur* in uno, & in altero: Replacetur autem ita, ut quicquid in simplo deprehenditur, bis deprehendatur in duplo vid. Act. Ex. 1695. p. 155 Non igitur sufficit pro mensura statim, quicquid crescente mensurando crescit; sed necessum est, ut, si mensurandum debeat crescere ad duplum sui, etiam mensura sic creverit, ut habeatur præcisè duplum eius, quod est in simplo. Hæ igitur *regulæ* esse debent examinis & demonstrationis.

VIII. Applicando illas ad *negotium præsens*, facile videretur, cum massa corporis A dupla est corporis *a*, & velocitas utrobique = 1. quod in corpore A omnia perfecte replicentur, quæ sunt in corpore *a*; habeo enim corpus unum = *a*, cum celeritate ut 1, & corpus alterum = *a*, cum celeritate ut 1; siquidem ex hypothesi $A = 2a$. Habeo bis in corpore A, quicquid habeo in *a*: celeritatem ut 1. habeo bis; massam ut 1. habeo bis. Quoad hanc igitur partem nihil desiderari potest in ratiocinatione §. 3. Iam porro sint duo corpora A & *a*, quorum massæ sint æquales, sed spatia motu æquabili percurfa sint inæqualia, & quidem spatium corporis A duplum alterius, sive $S = 2s$ & $C = 2c$, quæritur, an denuo sint omnia replicata? Celeritas C est dupla alterius *c*. Sed eadem est utrobique massa. Idem corpus cum celeritate dupla latum non replicat exacte id, quod est in eodem corpore cum celeritate simpla lato. Si, missa celeritatis idea, attendas ad spatium, habes hic motum per du-

duplex spatium eodem tempore; ibi motum per simplex; sed motum tamen eiusdem corporis. Igitur non omnia tam liquido & exacte replicantur, ut in priori mensura obtigerat.

IX. *Quid inde* concludi potest? An minores sunt vires, quam hic supposuit vel Cartesius, vel alii? quoniam scilicet non omnia exacte replicantur. An maiores sunt ob diversum agendi modum? Neutrum hactenus consequi video. *Hoc infero*: quoniam nondum video, omnia perfecte replicari; igitur ex hisce comparationibus nondum sufficienter elucet mensuræ virium allegatæ veritas. Inquiri igitur tum in illius veritatem, tum &, si forte falsa sit, in alterius substituendæ quantitatem de novo & solícite debet.

X. Circa veritatem mensuræ propositæ primum hoc occurrit sine dubio, ut examinetur *ad exempla* motuum & virium aliunde nota. Hic verum deprehenditur in potentiis ordinariis, quod factum ex massa vel pondere in celeritatem eius, si quæ oriatur, exprimat quantitatem pressionis, sive ut alii loquuntur, vim & quantitatem motus. Non licet tamen adquiescere huic exemplo. Novimus, aliquando ex accidenti in uno casu fieri, quod in altero secus obtinet. Quid igitur? *vel a priori* examinandum est, an ratio huius mensuræ in hisce casibus obvise ex ipsa motuum natura universaliter scaturiat, *vel a posteriori* perpendenda sunt exempla etiam alia, & talia, quæ ad vectem & similia reduci non possunt; ex illis enim, quæ eodem reduci possunt, non plus concludi potest, quam ex ipso vecte. Facilius hoc esse videtur, si noris, quales sint eiusmodi motus? sunt autem motus ex gravitate, ex elastis, ex percussione orti & similes.

XI. Examinemus motum *ex gravitate* ortum, Quanta est vis descensu gravis cadentis acquisita? an respondet facto ex massa in celeritatem? & ex massa in spatium, quæ salvo Cartesii dissensu hactenus habita sunt pro synonymis? Dissident *hoc in casu* factum ex massa in spatium, & factum ex massa in celeritatem. vid. §. 5. Ergo si hæc facta utraque ad mensuram virium lapsu acquisitarum transferre vellemus, falleremur in alterutro, vel utroque. Quid consilii in re ambigua? quando mensura eadem examini subiecta, mox veritati consentit (§. 10.) mox dissentit §. 5: Inquirendum puto, an *eiusdem generis* sint vires in *utroque casu*? & quæ in illis mensura locum habeat, si sint eiusdem vel diversi generis?

XII. Iam vero facile intelligitur, *in potentiis mechanicis* non tam motum esse, cuius vis ex facto illo mensuratur, quam nisum solum; vires igitur nitentes potius, quam impetu concepto moventes. Sed *in casu gravium cadentium* §. 11. esse vires actualiter & concepto impetu moventes. Ibi illas considerari, ut disiunctas a motu actuali, hic autem ut coniunctas. Opus hic est nomine aliquo. Placuit *Leibnitio* molitores imitari, & priores vocare *mortuas*, posteriores *vivas*. His præmissis seorsim examinavit vires mortuas, & apprehendit illarum impetum seu momentum semper esse ut factum massæ in celeritatem: atque in hac æstimatione consentiunt passim auctores mechanici; ostendemusque §. 60. quæ huius mensuræ connexio sit cum æstimatione virium vivarum veriore. Re enim omni perpensa, apprehendimus, mensura mortuarum posita, sequi nostram vivarum mensuram, & vice versa. Intelligitur itaque, recte auctores calculum posuisse de viribus mortuis. De
vivas

vis quæstio superest, an similiter illæ æstimari debeant? itémque, an *vis* a gravitate genita respondeat spatio vel celeritati? §. 5. & 11.

XIII. Sequor filium imaginationis meæ, & si minus historiam refero, fabulam tamen philosophicam condo non inutilem. Quæritur, an *vis* lapsu acquisita sit ut massa ducta in spatium, quod corpus illius ope potest ascendendo contra nisus gravitationis describere? an solum sit ut massa in celeritatem, quacum incipit ascendere? Comparantur hic duæ vires *secundum effectus suos*; scilicet *vis* corporis A ut 1 ascendentis per spatium ut 4, & *vis* corporis B ut 4 ascendentis per spatium ut 1: similiterque comparantur *vis* corporis A ut 1 ascendentis cum celeritate initiali ut 2, & *vis* corporis B ut 4 ascendentis cum celeritate initiali ut 1. An effectus hic sunt æquales? & si effectus æquales sunt, an ideo vires etiam sunt æquales? Ambigua optio est. Audiamus partem utramque!

XIV. Videntur *effectus esse æquales*. Videturque id Cartesius enunciatione sua generali agnoscere; habemus enim hoc loco corpus quadruplum elevandum ad altitudinem simplicam, & simplicum ad quadruplam. vid. loc. Epist. cit. Videtur idem sequi ex rei natura: corpori enim simplo per quatuor spatia assurgenti, superandæ sunt totidem gravitatis sollicitationes, quot in uno spatio experitur corpus quadruplum; siquidem in omnibus spatii punctis gravitationes experitur massis proportionales. Præterea videntur etiam *vires esse æquales effectibus*, quos producendo consumuntur: si enim vires maiores sunt, quomodo consumuntur producendo illos effectus? si minores sunt, quomodo possunt illos producere?

cere? Erunt igitur vires ut spatia illa in massas ducta. Hæc sententia est *Leibnitii*; &, quoniam spatia, ascendendo percurfa, sunt uti quadrata celeritatum, erunt vires illæ uti massæ ductæ in quadrata celeritatum. Differet igitur æstimatio virium vivarum, & mortuarum ex hisce calculis.

XV. Si *alterius* partis argumenta audias: ita illi rationes subducunt suas. Videntur *effectus non esse æquales*. Corpus enim simplum per quatuor spatia ascendens duplex infumit tempus quoque, & corpus quadruplum ascendendo per spatium simplex impendit tempus tantum simplum. Non igitur utrinque eadem ratio est; neque ex spatio simpliciter sumi mensura virium potest in hoc casu. Valet axioma Cartesii §. IV. allegatum, quando idem ad ascensum tempus infumitur, cumque ascensus est uniformis. Quodsi igitur huc applicari debeat, convenit, ut reducatur casus *retardationis* ad motum *uniformem*. Atque tum videamus, quæ mensura prodeat? Notum est, si corpus retineat in ascensu celeritatem initialem, illud ascensurum per duplex spatium. Ascendet igitur corpus A simplum, celeritate sua dupla, ad spatium $2 \cdot 4 = 8$. Et corpus B quadruplum celeritate sua simpla ad spatium $2 \cdot 1 = 2$. Sed ascendet illud uniformiter per duo temporis minuta, donec spatium sit $= 8$ & hoc per unum solum. Igitur primo temporis minuto illud ascendet per spatium $= 4$. & hoc per spatium $= 2$. Erunt igitur spatia ($= 4:2$) uti celeritates ($= 2:1$). Effectus igitur harum virium vivarum, & consequenter ex Leibnitiano assumto vires, sunt ut factum ex massa in celeritatem. Non igitur differt æstimatio virium vivarum & mortuarum, si recte instituantur calculi. conf. de hac comparatione *Histor. Acad. Scient. Paris.* ad A. 1721.

XVI.

XVI. Sunt hæc profecto plausibilia utrinque: sed an simul vera esse possunt? In talibus casibus soleo opem ex distinctionibus repetere, & unicuique parti aliquid tribuere: neque enim fieri solet, ut tota via aberrent viri solertes, mutuo sibi adversantes. Alteri fere ex una parte, alteri verum assequuntur ex alia. Quid igitur? Annon diversi sunt casus §. 14. & 15? Negat Leibniti- us, habendam esse rationem temporis in hoc argu- mento; Aiunt alii. Latet hic amphiboliæ aliquid, e- volvetur autem, si singulorum dicta pressius examines. Mo- nent, qui Leibnitianas tuentur partes, se de illis loqui vi- ribus, quæ, dum effectus suos producunt, per resistentias sibi oppositas successive consumuntur: has enim vires es- se resistentiis illis proportionales, sive magnum, sive par- vum temporis intervallum sit, quo illum suum effectum præstant. Quod semel consumtum est, proportionale est resistentiis, quæ ad effectum producendum superari debuerunt, sive alterum simul consumatur, sive non consumatur, sive citius consumatur, sive tardius. Recte igitur Leibnitium potuisse negligere respectum temporis ad producendum effectum requisiti, eo in casu, quo vires motum producentes per resistentias contrarias consu- muntur: hoc est in motibus a gravitate retardatis. Quæ hic lectorum sententia est? *Mibi*, verum fatear, etsi ef- fectuum æstimatio suis sæpe difficultatibus non careat, vi- detur tamen, si quis illos dextrè noverit discernere, & pro suis singulos classibus metiri; nihil hic Leibnitium pec- casse.

XVII. Neque tamen hæc sola extricandi sese ex difficultate temporis via est. Primum, quod se mihi obtu- lit, cum exceptiones de diverso tempore expenderem,
hoc

hoc fuit, facile fieri posse, ut descensus & ascensus illorum corporum A & B fiant temporibus iisdem, si supponas motum fieri vel in cycloidibus, vel in chordis saltim arcuum circuli eiusdem, quarum altitudines habeant se ad invicem ut 1: 4. Demonstratum enim est, ascensus & descensus illos esse isochronos. Postea vero intellexi, & Leibnitium similia privatim admonuisse amicos atque adversarios suos; vidique ex intervallo, *Hermannum* nostrum in dissert. Acad. *de legibus naturæ* inscripta etiam ulterius progressum esse, & §. 7. admonuisse, quod facillime curari possit, ut minor altitudo maiori tempore absolvatur, quam maior, atque tempora ascensuum sint in ratione quacunque data inæqualitatis. Unde colligo, vel ex hisce casibus potuisse Viros eruditos intelligere, quod temporis idea in hoc motuum a gravitate naturali retardatorum negotio sit aliena.

XVIII. Sed vero, cum motus retardati convertuntur in æquabiles, res plane aliter se habet. Innitebantur priora huic thesi, quod vires, quæ producendo effectum a resistantiis sibi oppositis consumuntur, sint ut effectus illi totales, sive uti translationes massæ per spatium ascensus eæ, quibus plane impenditur, quicquid in corpore est virium. Si motum substituas uniformem, vires illum producentes non amplius concipi possunt, ut inter productionem effectus sui per resistantias contrarias absorbentur. Adeoque cessat applicatio æstimationis virium ex effectu totali; neque hic indifferens est amplius, an in metiendis ex spatio viribus ratio habeatur temporis, an secus? Maiores sunt vires motum æquabilem producentes, si minori tempore idem spatium absolvunt per axioma 2. Sed vero cum vires concipio uni-

uniformes, motumque adeo æquabilem producentes: eo ipso nullus earum effectus totalis amplius allegari potest; vires enim, quæ tales producant motus, nunquam consumuntur, ex Axiom. 1. quando enim consumi vires effectum producendo debent, necessum est, ut adsint resistentiæ quædam, tanquam ad hoc corpus impediendum applicatæ, atque illarum ut huic corpori oppositarum summa attendatur. Sed in motibus æquabilibus & uniformibus a resistencia omni animum abstrahimus nostrum.

XIX. Quid hinc colligitur? An dantur *duplicis* generis vires vivæ? alteræ, quæ, dum effectum suum producant, a resistantiis illi oppositis consumuntur? alteræ, quæ non consumuntur? Si nomina vultis: primas Leibnitiu*s mixtas* vocavit, secundas vero *puras*. conf. def. 1. Pertinent igitur ad vires mixtas omnes illæ demonstrationes, quæ ex effectibus totalibus, vel resistantiis potius vires consumentibus repetitæ sunt, atque de illis immediate intelligi debent, quæ inde a §. 14. diximus pro Leibnitio: De puris autem hætenus eadem mensura per consequentiam solum asserta est: non enim alia est vis cadendo per altitudinem definitam adquisita, si deinceps eadem consumatur iterum ascendendo, vel, si supponatur perseverare in vacuo, semper uniformis. Puto igitur, legitime viros doctissimos evicisse causam suam, transferendo ad puras, quæ probaverant de mixtis. Si quis tamen hæreat, illi nostræ de viribus puris demonstrationes poterunt inservire.

XX. Audivi, Leibnitium *aliis* etiam a *priori* argumentis instructum fuisse, quibus ex ideis virium & actionis, & effectuum generalibus mensuram obtinuerit eandem. Non est vero præsentis instituti de illis inquirere.

M

Ne

Neque enim historiam scribo univ[er]si de viribus vivis argumenti : Alioquin & reliqua virorum magnorum argumenta , præcipue autem illud eiusdem Leibnitii de consequente ex veteri æstimatione absurdo, *motu scil. perpetuo* pure mechanico , hic evolvenda essent. *Genealogiam* dedi idearum quarundam , quæ mihi visæ sunt nos manu quasi ducere posse *ad distinctiones* in hoc negotio obvias, *et ad rationes mensurarum* Leibnitianarum. Præmissis istis , transeo nunc ad eam partem , quæ propius ad *meam* concludendi rationem , dictorumque dilucidationem accedit.

Membrum II.

XXI. Constat ex §. 18. in motibus uniformibus habendam esse temporis rationem , si ex spatio æstimari vires debeant motrices : Quæritur vero , an ea de causa dici possit, posito tempore eodem , vires esse ut massas in spatia ductas ? Id vero ex hætenus dictis nondum definire licet. Admissimus , vires esse proportionales resistentiis, quibus superandis ipsæ impenduntur atque consumuntur : Sed in motu æquabili abstrahimus a resistentiis , neque vires motum illum producentes consumi iudicamus. Ex immediata igitur ad motus uniformes attentione per superiora nihil *adhuc* inferri potest. Potest autem, si illorum complures casus dextre invicem conferas, eorundemque mutuas relationes animadvertas.

XXII. Accidit mihi, cum ad indagandos metaphysice primos legum nature fontes animum adverte-
rem , eidemque fini aliquos *Theodiceæ Leibnitianæ* paragraphos meditarer , ut sese aliud agenti argu-
men-

mentum offerret pro Leibnitiana virium mensura, desumptum a motibus compositis uniformibus. „*Ex motu,* (inquit Leibnitius l. c. §. 347.) *in duobus lateribus trianguli componitur motus in diagonali: non vero exinde sequitur, globum in hypotenusa motum producere effectum, duorum globorum sibi æqualium, et in lateribus motorum.* „ *Atque id tamen obtinet in rerum natura,* „. Quoniam communiter effectus assumuntur viribus suis proportionales; ideoque facile erat inferre, quod in casu per Leibnitium memorato, ubi effectus diversarum virium sunt æquales, etiam vires debeant esse æquales. Sed vires motum diagonalem præstantes non possunt esse æquales viribus, quæ motus exhibent laterales: nisi singulæ æstimentur per quadrata illarum linearum, quæ motus, spatia, celeritates virium suarum exponant. Obtinemus igitur æstimationem virium vivarum & purarum, de quibus hic agitur, eam, quæ consentiat Leibnitianæ. Sic primo intuitu iudicavi; atque id monui in *notula*, pag. 173. scripti mei superius in *præfatione* allegati.

XXIII. Post maturius examen deprehendo, non fallere hanc conclusionem: Ratiocinium vero, nisi evolveretur, nimium *præceps* ire. 1. Non licet ab omni effectu ad vires transire proportionem simili: æquipollent aliquando vires, quæ non sunt æquales. 2. Aliquando motus laterales componuntur in motum diagonalem, sed effectus unius globi diagonaliter moti non est idem, qui duorum æqualium in lateribus motorum. 3. Nisi a viribus mortuis pendentes non aliter componuntur, quam motus a vivis profecti: neque tamen vires mortuæ & vivæ habent mensuras easdem. 4. In parallelogrammis obliquangulis dubitari potest, an vis composita respondeat

quadrato diagonii , an quadratis laterum simul sumtis?
 §. Quæri etiam legitime potest , quomodo hæc æstimationo consentiat cum Theoria percussionis ordinaria ; & sic porro . Itaque *cautius* hîc agendum erat . Accipe , quid fecerim ?

Fig. I.

XXIV. Primo vim ipsam argumenti , §. 22. obiter enarrati , *plenus* ita proposui animo meo . Sit in globo A vis M, quæ sola illum promoveret ex A in B dato tempore ; sit in eodem illo globo vis N, quæ sola illum deferret ex A in C eodem tempore ; urgeatur globus a vi utraque simul: Promovebitur ille in linea AD ex A in D eodem tempore, per communia . Motus igitur absolutus globi A idem erit , si a duplici vi M & N simul urgeatur , ac si a vi simplici O urgeretur , quæ globum dato tempore deferret ex A in D . *Præterea*, supponatur in D globus D quiescens ; atque in illum directe impingens alius æqualis veniens ex A in D : Movebitur globus D per $D_a = AD$, & A quiescet . Si duos globos æquales B & C supponas simul impingere in D directionibus angulum rectum comprehendentibus , & celeritatibus BD , CD : quiescent etiam hi , & globus D movebitur directione , & celeritate D_a . Effectus igitur percussionis idem est in utroque casu . *Denique* , sit in D globus quiescens , atque in illum oblique impingat globus A directione & celeritate AD veniens , post impactum movebitur D celeritate & directione $D_b = BD$, A vero celeritate & directione $D_c = CD$. vid. *Mariotte Traité de la percuss. P. I. prop. 3. p. m. 213* . Hactenus omnia sunt utrinque eadem , usque adeo , ut unus casus possit experimento ipso transmutari in alterum : *Annon* igitur *æ vires* , utroque casu agentes , sunt inter se

sẽ *æquales* ; duæ scil. laterales M & N vi compositæ diagonali O?

XXV. Fateor, me illico existimasse, si post impulsum obliquum corporis A in corpus D, duo illa corpora moveantur in lateribus Dc & Db: per ictum illum vires neque auctas esse, neque minutas. Tantundem igitur virium fuisse antea in corpore A solo, atque nunc sit in utroque; atque vires ante & post ictum hic esse æquales. Similiterque cum unus globus A celeritate AD latus imprimat corpori D celeritatem eandem Da, quam illi imprimunt duo globi C & B celeritatibus CD, & BD lati; atque hi omnes post ictum reducantur ad quietem: vires globi A esse æquales summæ virium in globis C & B. His autem æquationibus semel positis, obtineri æstimationem quæsitam. Vim enim per AD non esse æqualem viribus per Dc & Db, vel viribus per CD & DB, nisi illa sit $= AD^2$, & hæc $Dc^2 + Db^2 = CD^2 + BD^2$. Ita igitur brevis denuo opera fuit. Nolui vero talibus annotationibus confidere contra adversarium, si quis obtingeret, difficiliorem. Itaque rem ulterius sic evolvi. Habemus in eodem corpore A duas vires M & N, quæ concurrentes idem præstant, quod vis una O: *Equipollent* igitur huic tertiæ; sed an ideo sunt illi quoque æquales? Monent scriptores mechanici, differre hæc duo, & subinde etiam separari. v. *Iac. Hermann* Phoron. §. 36.

XXVI. Hic igitur necessum fuit, inquirene fontem discriminis illius, eundemque ad casum applicare præsentem. *Datur*, inquit, *equipollentia virium, ubi non adest earundem æqualitas*. Patet hoc ex consideratione vectis in diversa distantia diversis sollicitati viribus:

M 3

Pa

Patet ex compositione nisuum, ubi vires mortuæ lateraliter trahentes nunquam sunt æquales tertiæ diagonali, nisi cum duæ laterales coincidunt directionibus suis in unam: Patet machinarum omnium exemplis. Itaque æquilibrium vel æquipollentia non infert æqualitatem virium. Recte ista quidem: sed *adiungo*, æquilibrium vel æquipollentiam inferre æqualitatem quoque, si minus virium, tamen actionum. vid. def. XI. Sect. I. *Non possunt vires æquipollere, nisi actio virium ex una parte æquetur actioni ex altera.* Si minores fuerint vires, possunt applicari favorabilius, ut actio illarum maior emergat: itaque possunt æquipollere, quæ non sunt æquales. Sed, si actio sit ex alterutra parte minor, nihil est, quod defectum supplere, & redigere utrumque latus ad æquipollentiam possit. Quid inde conficitur; Nimirum hoc, si ex æquipollentia §. 25. ostensa colligere æqualitatem instituimus, *ad actiones harum virium proprie attendendum esse.*

XXVII. *Duplex* autem hic *respectus* denuo involvitur: semel inquirendum est, quomodo sese vires puræ singulæ habeant *ad suas actiones*; deinde, quomodo se vires in motu composito *concurrentes* in actione sua habeant *ad se invicem.* Quoniam vires vivæ puræ simplices corpori alicui ita insitæ concipiuntur, ut unaquæque eius particula æque velociter ab illis urgeatur, & promoveatur uniformiter: itaque positis massis æqualibus nulla in applicatione virium harum diversitas esse potest, nisi ad diversitatem temporis attendere velis; iudicari itaque actiones harum virium debent ex intensitate ipsarum, & tempore. vid. Corol. I. def. XI. Ex eo sequitur, si plures inter sese conferantur vires puræ simplices,

plures, per idem temporis intervallum agentes, actiones esse inter sese, ut vires. Adeoque in casu motuum compositorum, quo tempora semper æqualia spectantur, nisi *ex ipsa compositione* aliquid novi discriminis accedat, vires vivas puras sibi invicem *equipollentes esse etiam æquales.*

XXVIII. Potest autem aliqua *discriminis ratio* oriri ex ipsa motuum compositione, *ob virium concursum.* Cum igitur, quæ ex Coroll. I. Def. XI. modo repetimus, pertineant ad vires ut singulas & simplices: quæro, quid obtineat *in compositis*? Si duæ vires M & N sint in eodem corpore, videndum est, quomodo agant illæ? si enim ita agant singulæ in concursu illo, ut neutrius effectus ab actione alterius sive augeatur sive minuat; utque adeo motus a diversis illis viribus pendentes in nulla re vel consentiant sibi vel repugnent: considerari illæ possunt, ut vires simplices, adeoque ex antedictis indicari debent. Sin effectus unius vis M augeatur vel minuat per concursum vis alterius N, attendi etiam illa diversitas debet in iudicanda actione composita.

XXIX. *Applicemus cautelam.* Cum in plano ABC, vis M nititur & impellit corpus A in directione & celeritate AB, vis N directione & celeritate AC, & hæ duæ lineæ AB & AC comprehendunt angulum *rectum*: tum directio & nisus vis unius nulla ratione vel coincidit vel repugnat directioni & nisui vis alterius. *Fig. 1.* Omni igitur respectu perinde est, quoad motum secundum directionem AB, an una cum vi M simul agat vis N, an omnino hæc absit ex corpore A. Possunt igitur utræque hæ vires, etsi simul præsentis, considerari tamen *ut simplices*

ces, neque in vim ex utrisque compositam aliquod five augmentum infertur, five decrementum ex concursu actionis utriusque in corpore eodem. Agunt scilicet in idem corpus duæ vires, sed neutrius actio afficit, auget, vel minuit actionem, & effectum alterius quocumque respectu. Secus obtinet in casibus angulorum recto maiorum vel minorum; de quibus deinceps.

XXX. Ex hisce autem dictis hauriri omnia possunt, quæ ad nervum argumenti §. 24. 25. incoati pertinent. Accipe *seriem illationis*. In negotio motus compositi æquipollent duæ vires laterales vi tertiæ secundum diagonalem; per communia. Sed, ubi est æquipollentia virium, ibi est æqualitas actionum, §. 26. Iam æqualitas actionum in casu anguli BAC recti infert æqualitatem virium; (namque in hoc casu vires laterales agunt uti simplices §. 29. & actiones virium simplicium, posito tempore eodem, sunt uti vires ipsæ per §. 27.) Adest igitur in casu anguli directionum recti cum æquipollentia virium, æqualitas actionum; & cum æqualitate actionum æqualitas virium. Igitur vires laterales simul sumptæ sunt æquales vi secundum diagonalem. Igitur singulæ æstimari debent per quadrata laterum & diagoni, quæ sola faciunt æquationem quæsitam, per Lem. 4. Sect. 1. Igitur hæ vires sunt ut quadrata celeritatum. Q. E. D.

XXXI. Non opus fuisset hac nova illationis, sectione *prima* propositæ, repetitione: nisi ad *refellendas* pertineret *instantias*. Diximus in Schol. 2. Theor. 3. nos hoc loco ostensuros diversitatem argumenti nostri, & instantiæ, quam a viribus mortuis, vel & ipso motu composito obvertere quis posset. Si solum imitari velis §. 22. posses *de vi mortua* sic arguere: Datis tribus poten-

potentiis, sive viribus mortuis, quarum & intensitates & directiones, consequenter & celeritates exponantur per latera & diagonalem parallelogrammi cuiuscunque, vires laterales æquipollent vi secundum diagonalem. Id vulgo constat, & iam a *Stevino* usurpatur pro eximio statibus principio. Sed in casu anguli recti directio potentiae unius non magis impedit directionem potentiae alterius, quam in viribus vivis factum est: Ergo & hic potentia resultans composita debet esse aggregatum potentiarum lateralium. Id vero est contra hypothesin: igitur in argumento vitium est. Argumentum est simile alteri de viribus vivis: igitur & in illo vitium erit. Similiter *de motu* dixeris: Neque enim motus compositus est aggregatum singularium; etsi de illo valeant omnia, quæ de viribus dicta sunt vivis.

XXXII. Detrahimus instantiis hinc *larvam similitudinis*. Si quis imitari ratiocinium gestiat nostrum, imitetur *seriem* §i. 30. *totam* necesse est: alioquin metus erit, ne fallatur in generalibus. Æquipollentia est potentiarum in casu mox memorato §. 31. & æquipollentia infert æqualitatem: Fateor id, sed addo, æqualitatem actionum, per §. 26. Igitur in casu obiectionis datur æqualitas actionum. Concedo: Atque id ita esse, ostendo ex superioribus. Actio vis mortuæ æstimatur ex facto intensitatis in viam: Hoc factum exponitur per quadratum lineæ; siquidem una eademque linea intensitatem exponit potentiae, & viam, sive celeritatem §. 31. Iam in angulo recto, aggregatum quadratorum lateralium est æquale quadrato diagonii. Igitur omnia se bene habent circa *actiones* virium mortuarum; neque peccabit instantia, si hic subsistet.

N

XXXIV.

XXXIII. Sed vitium est *in progressu*. Cum de vivis agitur viribus, pergo ego: In motibus isochronis actiones sunt, uti vires, per §. 27; igitur cum æqualitate actionum adest virium æqualitas. Hoc imitari de vi mortua non licet. Non est in motibus isochronis actio potentiae, uti ipsa potentiae intensitas; sed est uti intensitas ducta in celeritatem. Non igitur de mortuis concludi per similitudinem potest, quod de vivis dictum fuerat. Est igitur *anguli reſtitudo* faciat, ut neutrius potentiae momentum sive actio vel augeatur vel minuatur per actionem alterius: non facit tamen, ut potentiae intensitas sit actioni eius proportionalis. Non itaque *idem* utroque in casu *angulus* est, qui efficit, ut aggregatum virium lateralium sit æquale vi secundum diagonalem. In vivis *rectum* id efficere vidimus: In mortuis requiri *angulum infinite acutum*, patet ex relatione actionis vel momenti potentiae ad ipsius intensitatem.

Fig. 1.

XXXIV. De *motibus ipsis* dici varia possent. Considerantur vero motus corporis secundum AB, & AC faciendi, vel ut in hisce lineis, vel ut in plano. Si consideratur motus secundum AB *ut in linea* AB faciendus: impeditur utique per motum secundum AC, quando *angulus BAC* rectus est. Neque obtineri hoc sensu summa motuum lateralium potest, nisi eo in casu, quo neuter alterum, ut in linea faciendum, impedit: Hoc est, cum *angulus directionum infinite acutus* latera præstat coincidentia. Sin motus secundum AB & AC concipiuntur, *ut in plano* ABDCA: id utique verum est, quod, sumto *angulo BAC* recto, neuter motus alterum in sua directione adiuvet vel impediat: v. Schol. 1. Theor. 3. Sect. I. Igitur etiam in motu composito secundum AD debet

debet adesse aggregatum motus utriusque secundum AB & AC. Sed eo in casu motus secundum AD debet censeri *duarum dimensionum*, non unius. vid. def. 2. Sect. I. Non igitur necesse est, ut linea AD sit æqualis aggregato linearum AB & AC: Sed ut directio composita AD satisfaciat utrique directioni simplici AB & AC: sine alterutrius vel augmento vel detrimento. Verum ista de instantiis!

Membrum III.

XXXV. Tertium huius dissertationis officium est, exponere, quid de casibus *directionum* angulos *non-rectos* comprehendendum existimari oporteat. *Motus* ex duobus lateralibus *componitur* in motum secundum diagonalem, etiamsi angulus sit v. gr. acutus: Queritur, *an vires quoque?* & quo sensu illæ? Si in eodem corpore A simul inexistant vis M secundum AB agens, & seorsim sumpta (per §. 22. seqq.) $=AB^2$, & vis N secundum AC agens, & seorsim sumpta $=AC^2$; queritur: an ex utraque simul sumpta aggregetur vis tertia O, secundum AD agens; & $=AB^2 + AC^2 = AE^2$? an vero ex illarum in uno corpore A concursu emergat vis nova P secundum AD agens, & $=AD^2$?

Fig. 2.

XXXVI. Videtur *primum*, quoniam intelligi non facile potest, unde sit augmentum vis compositæ AD^2 supra aggregatum utriusque vis concurrentis, $AB^2 + AC^2$. Itaque, cum idem corpus A a duplici vi M & N simul urgeatur directionibus AB & AC, directio quidem composita erit in diagonali, sed diagonalis non exponet motum, & celeritatem corporis, neque quadra-

N 2

tum

tum eius vim compositam. Videtur vero & *secundum*: quia enim ex motu per AB & AC componitur motus per AD celeritate AD : itaque etiam ex viribus , quæ motus illos per AB & AC producant , componitur vis secundum $AD=AD^2$. Vires autem , quæ motus illos producant , sunt vires M & N eidem corpori A insitæ. Itaque ex viribus M & N concurrentibus enascitur vis $P=AD^2$. *Vtrum recte?*

Fig. 3.

XXXVII. Quicquid hic difficile est , solvitur ex eo , si discrimen attendas, quod intercedit inter hosce *duos* casus, quando duæ vires sunt *in eodem corpore insitæ*, aut quando demum sunt *imprimendæ ab aliis*. Constat ex receptis percussionum legibus, si, posito angulo BAC acuto, idem corpus A simul percutiatur a duobus corporibus G & H sibi æqualibus , & in directionibus GA, HA, sive AC & AB incurrentibus , quorum illud moveatur vi N, & celeritate ut AC, hoc vi M & celeritate ut AB , corpus A ab illis impulsus pergere quidem in diagonali AD, sed non cum celeritate AD, neque adeo illi impressam esse vim ut AD^2 , sed minorem. Notandum vero etiam est, etsi corpus G, si solum impingat, totum suum motum & vim transferat in corpus A, & corpus H, si solum incurrat, totum suum motum, & vim N imprimat eidem; in concursu tamen illa corpora non imprimere corpori A utramque vim M & N totam; adeoque corpus A non acquirere simul vim M & N; consequenter *hunc casum non esse illum, qui nobis hic consideratur*, & quo supponitur, totam vim M & N inesse corpori eidem A. Quæ igitur ex hoc casu ducuntur argumenta ; nostram hac vice causam non afficiunt. Monui id iam supra Sect. I. Schol. 1. Theor. 8. neque piget tamen, id repetiisse; facilis enim

enim est horum casuum commixtio, nisi constanter caveas.

XXXVIII. Nimirum, quando corpus A a duobus illis corporibus G & H simul impellitur, tum illud per vim & motum ab uno G acceptum, iamiam *fugit* impulsus alterius H, quatenus directio huius cum directione prioris coincidit; adeoque sub angulo hocce acuto BAC non potest tota vis alterius corporis H transfundi in corpus A; & vice versa. Secus est, ubi corpus ab una vi M percussus, per hunc ictum *non fugit* impulsus vis alterius N. Atque ita patet, quare sub directionibus angulum rectum comprehendentibus, tota utriusque corporis vis possit transfundi in tertium A, vel etiam ita res dirigi, ut ante ictum corpus unum moveatur in diagonali celeritate diagonalis, & alterum quiescat, post ictum vero utrumque moveatur in lateribus celeritate laterum §. 24. In percussionibus igitur res habet, uti dictum est.

XXXIX. Ex adverso, quando duæ vires M & N concipiuntur *in esse eidem corpori A*, tum per operationem vis M corpus A non fugit impulsus aut actionem vis alterius N, utpote quæ non insequitur tantum corpus ante se fugiens, sed eidem, etsi translato, inexistit. Respectu enim vis N eidem corpori A iam insitæ, & quoad motum eius particularem in directione AC, perinde est, sive corpus A moveatur etiam in directione AB, sive non moveatur; id quod secus esset, si vis N nondum inexistet corpori, sed eidem aut iam per AB moto, aut adhuc quiescenti esset demum imprimenda. Maior enim vis corporis secundum leges ordinarias percutientis requiritur, si corpori moto eandem celeritatem superaddere debet, quam si illam quiescenti imprimere.

N 3

XL.

Fig. 4.

XL. Vt hæc *ad principia* reducamus *communia*, alteram directionem, v. gr. illam secundum AB consideremus ut simplicem, alteram AC ut compositam ex duabus, angulum rectum comprehendentibus AE & EC. Equipollere & æqualem esse vim secundum AC duarum secundum AE & EC aggregato, patet ex superioribus §. 29. similiterque patet, vim secundum AE non afficere vim secundum AB (§. 28.) Resolvitur igitur dubium in hæc duas vires, alteram M secundum AB, & alteram secundum EC, vel BF, quam Q vocabo. Ostendendum autem est, quomodo ex vi M & Q in eodem corpore concurrentibus oriatur celeritas AF, & consequenter vis totalis composita æqualis simplici cuidam $R = AB^2 + BF^2 + 2 AB \times BF = M + Q + 2 AB \times BF$.

Fig. 5.

XLI. Mensura virium, ope §. 29, pendet ex mensura celeritatis, itaque primo loco videbimus, quænam *celeritas* oriatur ex concursu illarum virium M & Q? Conferatur ergo *casus noster cum alio* vulgari. Sit corpus A, quod moveatur in linea HBF vi M, celeritate AB; insequatur aliud H, vi R, celeritate $HC = AB + BF$: quid hic futurum est? Dicunt regulæ, post aliquod temporis intervallum impingere corpus H in corpus A, & illi communicare gradum celeritatis BF, sic, ut post ictum corpus A moveatur celeritate $AB + BF = HC$, & corpus H celeritate $HC - BF = AB$. Habemus igitur casum, quo corpus A ex percussione alterius H acquirit celeritatem AF. Quid, si ostendero, illum *coincidere* cum nostro, quo supponimus in eodem corpore A inexistere simul vires M & Q tales, ut ope illius solitariae corpus haberet celeritatem AB, & huius solitariae celeritatem $EC = BF$? Num eo facto ostendi, etiam nostro in casu
per

per hancce duarum virium M & Q in eodem corpore combinationem oriri celeritatem ut AF^2 & consequenter vim ut AF^2 ?

XLII. *Coincidit vero uterque casus.* Circa casum percussiois attende, quid *in ictu* fiat ? Corpus H per celeritatem suam $HC - BF = AB$ non impingit in corpus A; Tanta enim celeritate hoc fugit : ergo quicquid per hunc celeritatis gradum fieri potest in corpore insequenti, id omne in hoc absolvitur, ut per illum corpus H insequens maneat fugienti A præsens, sive, ut fugiens A respectu insequentis H fiat quasi quiescens. Impulsus igitur omnis, qui fit a percutiente, talis & tantus est, qualis & quantus a corpore cum celeritate BF lato fieret in aliud quiescens. Atque inde fit, ut corpori A, etsi moto, adhuc illa celeritas BF imprimatur. Videamus, an *eadem* fiant in *nostro* quoque casu ? Puto fieri. Per hoc enim, quod vis Q in ipso corpore A insita concipitur, illa non minus ipsi A præsens est, & in ipsa corporis A, celeritate AB moti, translatione illud impellit, quam si aliud corpus H cum summa celeritatum sequeretur, & consequenter cum excessu unius supra alteram impingeret. Corpus enim A motu suo per AB nequaquam fugit impulsu vis Q, ipsi corpori inexistentis, & cum illo translata. Itaque quoad celeritatem corpori A imprimendam perinde est, sive concipias in illo *simul* inexistere vim M, cuius solitarie agentis celeritas esset AB, & vim Q, cuius solitarie agentis celeritas esset BF; sive dicas, corpori A inesse vim M, qua fugiat cum celeritate AB, & corpus H celeritate $HC (=AB + BF)$ motum, per partem AB, relativam illam fugam in ictu ipso quasi
com-

compensare, & parte altera BF impingere in corpus A tanquam respectu sui non amplius fugiens.

Fig. 5.

XLIII. Patet, nisi fallor, veritas eorum, que §. 37. dixi: *Solutionem nodi universam* consistere in hac idea, quod utraque vis concipiatur in eodem corpore. Id alio adhuc modo ostendam. *Potest* ex corpore A & H *fieri unum* corpus: Facto autem illo vis resultans non amplius est aggregatum virium singularium; sed aliquid longe diversum, & præcise tale, ut mediante aliquo theoremate (in seq. §§. a priori deducendo) recidat in æstimationem secundam §. 36. allegatam. Suppone lineam HF indefinite productam, concipiatur corpus A in puncto quocunque A, & H in H: queratur, bisecando distantiam HA, commune centrum gravitatis duorum horum corporum in R, & supponantur ibi esse corpus $R = H + A = 2A$. Post aliquod tempus concipiatur A translatum uniformiter in B, & H in C, & queratur denuo commune centrum gravitatis, bisecando lineam CB in S; erit RS via centri gravitatis, representans celeritatem corporis dupli $2A$.

XLIV. Iam vero *an eadem* est mensura virium, *sive* illæ in uno corpore inexistere concipiantur, *sive* in duobus? an utroque in casu obtinetur aggregatum virium singularium? §. 36. Equidem, si corpora A & H, ut singula concipias, sine aliqua ad se invicem relatione, certum est, haberi in uno vim $M = A \times AB^2$, in alterutro vim $T = H \times HC^2$. Sin corpora ad se invicem referas, si illa ut systema duorum corporum consideres, si utramque vim ut in uno corpore duplo R concurrentem attendas: exponetur vis composita per factum ex massarum summa in quadratum viæ centri gravitatis $(= A + H$

$+H) \times RS^2$. Est autem per communes regulas $RS = \frac{1}{2}(AB+HC)$ & per hypothesin $A=H$. Itaque vis composita ex utraque singulari, cum eidem, sed duplo, corpori inesse concipitur, non est æqualis aggregato singularum. Substitutis enim æqualibus & assumtis $A=H=1$ erit aggregatum illarum $=AB^2+HC^2$; vis autem composita $=\frac{1}{2}AB^2+AB \times HC+\frac{1}{2}HC^2=\frac{1}{2}(AB+HC)^2$. Non est igitur id aggregatum huic vi æquale; nisi cum $AB=HC$; qui unus tantum est ex casibus infinitis. Videmus igitur sane, *quid intersit*, an duæ vires concipiantur, ut in uno corpore, an ut in diversis? *neque omnem vim compositam statim esse aggregatum virium componentium.*

XLV. Noli autem metuere æstimationi meæ, quoniam §. 41. dixi, quando vis M producens celeritatem AB, & vis Q producens celeritatem BF concurrant in uno corpore, oriri celeritatem $AB+BF$, & consequenter vim $(AB+BF)^2$; cum tamen hoc loco §. 44. non emergat vis $(AB+HC)^2$, sed eius pars tantum dimidia. *Differunt etiam bi casus.* In priori collegimus utramque vim in corpus *simplum* $=A$. v. §. 41. in posteriori vero in corpus *duplum* $=A+H=2A$. v. §. 44. Ostendi autem facile potest, ope motus compositi, quod *vis* ex duabus singularibus composita, si in *corpus duplum collecta* fingatur, sit tantum *subdupla* eius, quæ resultat, si in corpus *simplum* utraque colligatur. Si enim in angulo BAC rectoingas duo corpora A & a moveri secundum AB & AC, viribus M & N; possunt hæ vires dupliciter concipi collectæ in corpus unum: Aut in *simplum* corpus A, & tum eius celeritas est AD, & vis $=A \cdot AD^2$; aut in *duplum* corpus $A+a$,

Fig. 6.

O

mo-

motum in via centri gravitatis duorum; & tum eius celeritas est AE , & vis $= (A+a) AE^2 = \frac{1}{2} A \times AD^2$, patet ut supra contigit.

XLVI. Fortassis videor oblivisci eorum, quæ §. 26. & seqq. dixi, *ex actionibus* virium repetendas esse difficultatum declarationes, utpote de quibus altum nunc est silentium? Atqui vero priora omnia eo pertinent, ut liceat intelligere, quod ex ipsa virium harum actione resultat id, quod intendo. Nimirum in æstimatione eius, quod ex utraque vi M & Q in corpore A resultat, non solum attendendum est, quid utraque, si sola esset, seorsim in hoc corpus ageret, sed etiam, quid illæ, si coniunctim eidem corpori insint, *in se invicem* agant. Accipe, quid fiat? 1. Vis M in singulis tempusculis transfert corpus A per spatium ut AB . 2. eadem vis M una cum corpore etiam transfert vim illi corpori insitam Q : Atque adeo efficit, ut vis Q sit corpori, licet fugienti, cum tota sua celeritate præsens. 3. Vis Q in iisdem tempusculis transfert corpus A , quod respectu sui non potest considerari ut fugiens, per spatium ut $EC = BF$: & 4. eadem vis Q etiam una cum corpore per hoc spatium transfert vim illi insitam M : adeoque fit ut 5. per actionem vis utriusque & corpus & vires illi insite transferantur per aggregatum spatiorum cum celeritate ut $AB + BF$; & consequenter 6. vis simplex idem motus præsitura, hoc est, vis ex utraque illa resultans sive composita (vide def. 4. Sect. 1.) sit æqualis $(AB + BF)^2$. Ita igitur conficitur, a *diversa* virium concurrentium actione pendere *diversam* virium compositarum & motus absoluti quantitatem, non secus atque a *diversa* virium mortuarum applicatione

Fig. 4

tione, & consequenter actione, pendeat diversitas momenti & effectus v. §. 33.

XLVII. Diximus de casu virium coincidentium, quo fit, ut celeritas resultans æquet aggregatum celeritatum singularum. Ex eo pendent omnia, quæ de *directionibus* dici debent *consentientibus*. Ratio enim augmenti, quod in hisce casibus supra aggregatum singularum virium accedit, intelligitur ex resolutione alterius (AC) virium consentientium in duas simpliciores (AE & EC) quarum una est perpendicularis directioni AB, altera coincidens. Duplum scilicet factum, quod per Theor. VII. accedit aggregato virium singularium, ex eo est, quod vis M una cum corpore A transfert vim Q per spatium suæ celeritati AB respondens, & vicissim vis Q una cum corpore A transfert vim M per spatium suæ celeritati EC respondens; hoc est, quod vis utraque in corpore moto insit, atque in illud agat, tanquam respectu sui quiescens. Cum enim ex hoc respectu fiat, ut celeritas composita æquetur aggregato simplicium: Influit ille necessario quoque in æstimationem vis compositæ ex utraque oriundæ, hoc est, vis simplicis, quæ sola idem motus phænomenon produceret.

XLVIII. *Exemplum* eiusmodi virium coincidentium supra iam Sect. I. Theor. 12. produximus gravitatem corporum naturalem. Ibi enim secundo momento accedit ex actione causæ gravificæ nova vis viva Q seorsim æqualis illi M, quæ primo impressa erat: sed coniunctæ faciunt vim T, prioris M quadruplam, non duplam tantum, vid. loc. cit. Eadem vero *gravitas projectioni coniuncta* nunc *exemplum* esse potest motus compositi sub duabus directionibus *consentientibus* quidem, sed

Fig. 7. noz coincidentibus. Sit directio projectionis AB obliqua ad horizontem, & faciat cum directione gravium AC angulum BAC acutum. Sit vis projectionis insita & uniformis; & vis a gravi cadente acquisita in singulis momentulis indefinite parvis habeatur etiam pro uniformi: percurrent corpus *diagonalem* Mm illius parallelogrammuli, cuius latera MR & MN expriment celeritates, sive radices virium in M secundum illas directiones urgentium; scil. MR celeritatem projectionis æquabilem, & MN celeritatem vis per gravitatem impressæ, proportionalem radici lineæ AC, sive MD. Habemus igitur vim ut MR^2 , & vim ut MN^2 : & ex earum concursu oritur vis ut Mm^2 . Plane, uti supra diximus, fieri in motu composito. Conf. Sect. I. Theor. 8. Schol. 1. num. 3.

Fig. 8. XLIX. Illud non opus erit prolixius inculcare: Cum directiones sunt *dissentientes*, angulumque BAC faciunt obtusum; non hoc dici, vim utramque M & N simul inexistere corpori A ut vivam. Cum enim motus secundum directionem FC, & secundum directionem Fd simul realiter fieri in eodem corpore non possit: etiam vires vivæ secundum FC, & secundum Fd non dicuntur simul inexistere revera. v. Def. 1. Sect. I. Verum hic sensus est: Si corpori A insit vis M, qua sola dato tempore ex A perveniret in B, & supponatur eidem nunc accedere vis N, qua sola dato tempore ex A perveniret in C, tunc aliquam virium harum partem in corpore A elidi, & remanere aliquam saltem. Resoluta enim vi $N = AC^2$ in duas $AF^2 + CF^2$ per §. 25. altera quidem pars, secundum AF urgens, integra permanet; sed altera secundum FC agens resistit vi
Mse-

M secundum FDd agenti, & eandem retro fert cum corpore, sive effectum eius tantundem sufflammat. Possent igitur hic similia dici, uti §. 46. diximus; & exempla sumi a gravibus ascendentibus ex Theor. 13. Sect. I. vel etiam ex projectionibus sursum factis, uti §. 48. fecimus circa consentientes.

L. Atque hæc sunt, quæ mea opinione non solum *paradoxi speciem* sententiis detrahunt nostris, easdemque cum receptis in concordiam reducunt theoriis; sed etiam ipsas *virium vivarum origines* aperiunt. Vis finita omnis, cuius celeritas est C , potest concipi tanquam composita ex pluribus coincidentibus, quarum celeritates sunt $\frac{C}{m} + \frac{C}{n} + \frac{C}{p} + \frac{C}{q}$ &c. modo summa harum celeritatum partialium fiat $=C$; eo plane modo, quo diximus de vi a gravitate naturali cadendo acquisita. Igitur æstimatio vis ex hac compositione emergentis sequitur Theorema VIII. Inde *quadratum* celeritatis totalis.

Membrum IV.

LI. Si quis pernosse cupiat ipsam alicuius mensuræ rationem vel originem: debet sine dubio inquirere in *genesin rei mensurandæ*. Id igitur ita imitatus sum. In corpore aliquo A quiescente vires etiam vivæ, & (si rem in vacuo, hoc est materia non resistente concipias) puræ generantur percussione corporis alterius H moti, & in corpus A impingentis. Supponamus aliquem *specialem casum*, & quid in illo accidat, inquiremus. Sint duo corpora spherica & elastica, A & H, inter se æqualia; quiescat A; moveatur H celeritate HC in directione HC; impingat H directo impulsu in A: dicunt regulæ,

Fig. 9.

O 3

post

post ictum corpus A moveri in directione eadem AB, celeritate $AB=HC$, & corpus H quiescere. Ex hoc vero sequitur, *vires vivas*, quæ in corpore H ante ictum fuerant, in eo *extinctas* esse; & in corpore A, in quo nullæ erant, *genitas* esse æquales prioribus: sive, si malis, vim vivam ex corpore H *transfisse* in corpus A. Quæritur, quid eo in casu factum sit, ex quo liceat *mensuram* eruere harum virium?

LII. Hic sciendum est: 1. *Naturam* pro veteri sua consuetudine *nihil agere per saltum*, hoc est, non transire ab extremis ad extrema sine transitu per intermedia omnia. 2. Non igitur corpus naturale in quiete positum acquirere finitum aliquem celeritatis gradum, nisi *per accelerationem*, similem illi, quam experiuntur gravia a quiete lapsum incoantia. 3. Convenire huic idæ naturam corporis *elastici*; dum enim corpus H finito velocitatis gradu HC impingit in corpus A, tendi utriusque corporis elaterem, neque corpus A in primo impulsione instanti loco suo dimoveri cum celeritate HC, sed cum illa huius velocitatis parte, quæ non impendi ut ad tensionem elateris. 4. *Non* itaque una aliqua elementari vel *instantanea* percussione consumi in corpore H impingente, & generari in corpore patiente A vim vivam motricem: Sed 5. requiri *percussiones* elementares *plurimas*, a quibus illa corporis A antea quiescentis successiva acceleratio procedat. 6. Requiritur autem, ut percussio quæcunque fiat *cum gradu* celeritatis *maiori*, quam est ipsa corporis A iam incoata translatio. Neque enim 7. corpori A cum celeritate AS moto posse novam celeritatem SV per corpus H insequens imprimi, nisi hoc corpus H moveatur cum celeritate $AS+SV$. Itaque 8. ut

Fig. 10.

8. ut corpus A in quiete positum ex percussione corporis H recipiat gradum celeritatis AB, necesse esse, ut *totidem percussiones elementares* fiant, ac elementula SV contineantur in AB: Necesse etiam 9. ut singularum percussionum celeritates sint æquales lineis AS, AV &c. Faciendo igitur $BC=AB$ & complendo triangulum ABC
 10. *Singula elementula STXY* exprimere singulas percussiones elementares, quæ in corpus A celeritate AS iam latum, pro ingenerando novo gradu celeritatis SV fieri a corpore H debeant: & 11. *Aream trianguli ABC* exponere summam omnium percussionum elementarium, quæ in corporis H incursum versus A fieri, & a corpore A recipi debeant: Adeoque 12. summam illam esse proportionalem *quadrato* celeritatis AB.

LIII. Esse vero 13. *summam hanc percussionum elementarium proportionalem vi vivæ*, in corpore H extinctæ, & in corpore A genitæ; quoniam omnes illæ procedunt a vi viva corporis H, antequam ipsa extinguitur, & omnes recipiuntur a corpore A ante, quam vis viva celeritatis AB gignitur. *Non posse scilicet æstimationem vis vivæ maiorem esse hac percussionum summam*, quoniam per has *solas* in corpore H extinguitur, & in altero A gignitur. *Non esse minorem*, quoniam vis viva corporis H illas omnes exerit, & corpus A eas omnes recipit, atque aptum fit tantumdem exerere: Igitur hanc esse iustam æstimationem, sive 14. *vim vivam esse proportionalem quadrato celeritatum*.

LIV. His positis, quero, num loco *definitionis*, uti in hoc negotio dari solent, proportionalis, dici possit: vim vivam esse summam omnium percussionum elementarium, quæ impendi debent a corpore aliquo moto, donec

donec id alteri quiescenti elastico, & æquali imprimat motum conceptum cum finito aliquo gradu celeritatis?

LV. Equidem, quæ hoc usque dicta sunt, ex ipsa percussione & successivæ accelerationis natura sequuntur, quocumque illa medio aut modo fieri naturaliter concipias: neque meum est hoc loco, exponere prolixius, quomodo illæ percussiones elementares fiant? Puto tamen, nihil in eo absurdi esse, si *integram percussione* memoratæ *æconomiam* sic concipias. Dum corpus H impingit in corpus A tandem tenditur elater, quamdiu comprimitur ab ictu: comprimitur autem, donec utrumque corpus feratur celeritate & directione eadem. Ea tensione absoluta restituitur elater motu accelerato, qualis in chorda arcus tensa observatur: & per hanc elateris actionem fit secunda in celeritate corporum mutatio; æqualis primæ; reddit enim elater, quicquid absorpsit. Cumque ab initio facilius cedat elater, minor est corporis impulsi localis translatio, crescens usque ad tempus summæ tensionis, idque ex sola corporum collisione: Hoc autem peracto maneret utrique corpori celeritas eadem, nisi per restitutionem elateris, etiam acceleratam, alteri decederent, accederentque alteri corporum novi celeritatis gradus.

LVI. Dabimus *schema*. Quiescat corpus A, & alterum æquale H irruat directe & cum celeritate HA in corpus A: Duretque huius tota impulsio per tempusculum finitum. Per impulsum primum corporis H factum cum celeritate HA, duo fiunt in corpore A: Partim tenditur elater, partim imprimitur corpori A celeritas initialis Aa. Concipi igitur potest, corpori H decessisse gradum velocitatis $ba = Aa$. In secundo igitur

tur momentulo infinitesimo impingit H cum celeritate hb , & præter novam elateris tensionem imprimit corpori A gradum celeritatis novum aa : quo a velocitate corporis H detracto ipsi superest celeritas $a\beta$, & sic porro, donec tensione ad summum perducta corpus A moveatur celeritate CD, & alterum H sequatur velocitate æquali EF. Atque hic iam cessarent, ut ante dixi, incrementa & decrementa celeritatum, nisi restituens sese elater accederet. Quid igitur ille?

LVII. Dum se utriusque corporis elater accelerato motu restituit, duo fiunt: Primo, hæc corpora non obstantibus celeritatum suarum novis variationibus per totum restitutionis tempusculum sunt sibi præsentia, sive contigua; secundo per elaterem corporis H reagentem accedit nova percussio summa in corpus A, & per elaterem corporis A retro agentem destruitur celeritas corpori H adhuc residua. Summa illa exprimitur per aream FGK: unde fit, ut in singulis huius tempusculi infinitesimis corpus A impellatur a celeritate $fg, \Phi\gamma$, &c. Unde tandem ultima corporis A velocitas erit æqualis $KL=LM=HA$.

LVIII. Arbitror, hæc convenire cum prioribus §. 52. & 53. neque adversari receptis de percussione doctrinis: Sint enim duo corpora M & m: illorumque celeritates C & c. Sit $c=0$, quoniam ad hunc casum omnes reduci possunt. Sequitur ex dictis nostris, tendi elaterem, donec celeritas corporis utriusque sit $\frac{MC}{M+m}$. Erit autem ictus; consequenter & elater $= \frac{MmC}{M+m}$. Sed elater in utramq; partem reagit: Applicatus itaque ad massam M corporis impellentis, dat per communia

P celerita-

celeritatem = $\frac{mC}{M+m}$, & quidem in partem contrariam, ut adeo celeritas post ictum fiat $\frac{MC-mC}{M+m}$, & vis composita

per Theor. 10. = $\frac{M(MC-mC)^2}{(M+m)^2}$. Sed applicatus ad mas-

sam m corporis antea quiescentis, dat novam veloci-

tem = $\frac{MC}{M+m}$, quæ priori addita, facit velocitatem to-

talem = $\frac{MC}{M+m} + \frac{MC}{M+m}$, & vim compositam per Theor. 8. =

$\frac{m(MC+MC)^2}{(M+m)^2}$ Est igitur hic novam *ex Natura* exemplum

virium repugnantium & coincidentium. Sit v. gr. $M = m = 1$. erit velocitas corporis m a collisione sola = $\frac{1}{2}C$, & vis = $\frac{1}{4}C^2$; eademque erit celeritas & vis ab elatere genita, si seorsim sumatur. Quia enim $M = m$, æqualis in utroque corpore effectus est elateris sese restituentis; & effectus in corpore M est destructio celeritatis = $\frac{1}{2}C$, & vis = $\frac{1}{4}C^2$: Igitur in corpore m effectus hic seorsim consideratus, foret etiam celeritatis = $\frac{1}{2}C$, & vis = $\frac{1}{4}C^2$. Sed additus corpori ut jam moto, per §. 42. facit celeritatem = C , & vim = C^2 , conformiter theoriæ hactenus expositæ.

LIX. Neque verò per novam hanc percussionis explicationem improbo illam auctorum consuetudinem, qua *ictum* concipiunt, ut *momentaneum*. Faciunt illi pro suo scopo, quærentes *celeritatem* corpori percusso impressam. Hic enim sufficit attendere percussiones elementarium mearum ultimas. Feci autem & ego pro meo scopo, quo *ipsam virium vivarum impressionem* & illius seriem exponere *sine saltu* necessum erat. *Cartesii exceptionem* non moror. Ille *Galileo* successivas accele-

celerationes urgenti, opposuit *globum e tormento propulsum*, qui globulum quiescentem in via sua positum ante se promoveat: Globulum enim eo in casu non propelli tardius ab initio, & successive demum accelerari; quoniam alias & ipse globus impellens ab initio tardius ferretur, & deinde celerius successive. v. *Tom. III. epist. 104. p. 401. 402.* Posses credere, ista festinanter scripta esse: Namque alio in loco ipse suppeditat, quæ respondeas. v. *Tom. II. epist. 109. p. 367.* Mihi sic videtur: *Aut de naturalibus quæritur corporibus, aut de aliis fœcunda imaginatione natis.* Si de illis: *Elastica sunt*, atque hic dici potest, centrum globi impellentis non ferri ab ictus initio tardius, & deinde velocius. Pendet hoc ab elatere corporum, quo fit, ut *partes ab ictu pressæ cedant.* Sin *perfecte dura* fingas corpora; nihil ad illa pertinet lex naturæ §. 52. n. 1. enarrata, nihil etiam nostra, quæ exinde fluunt, corollaria. Diu est, quod per illam suppositionem saltus naturæ obrudi monuerunt eruditi. Ego curiosioribus *questionem* commendo *sequentem*: An corpori duro quiescenti a corpore duro incurrente communicetur vis viva insita? an illud solum ab insequenti corpore promoveatur, uti pondus vecti moto impositum?

LX. Denique illud operæ pretium est annotare: Ex præsentī dilucidatione dispalescere *vera* virium mortuarum, elementorum vis vivæ, & vis vivæ ipsius *discrimina*. Dixi §. 2. ambiguitatem latere in formula loquendi, cum dicitur, vires mortuas esse proportionales factæ ex massa in celeritatem. Est illa plerumque innoxia: Placet tamen hoc paragrapho ab eadem abstinere. Mea sic est sententiæ. Expono *vim mortuam*,

hoc est , potentiam tantum nitentem *per dimensionem unam* ; atque id in corpore naturaliter gravi fieri potest per massam. *Momentum* huius *vis mortuæ* , sive , quod idem est , actionem potentia nitentis (v. Sect. I. def. XI) repræsentò *per dimensiones duas* , v. g. per rectangulum ex massa in celeritatem nisus. Si nullus generatur ex hoc nisu motus , res omnis manet in hisce terminis , & singuli hi nisu per contrarios & æquales eliduntur. Concipio igitur hæc momenta vel nisu tanquam rectangulum aliquod , quod fluere quidem conatur , sed ab alio æquali impeditur , adeoque solidum generare non potest. Sed *virium vivarum elementa* (hoc est , id novi , quod ex continuata & non impedita virium mortuarum actione , tanquam ex fluxu superficiæ , generatur) opus habent *tribus dimensionibus*. Præter enim actionis vel momenti fluentis mensuram , attendi etiam celeritas fluxus debet ; siquidem §. 62. patebit , in percussione corporum tanto celerius fluere impetus illos , quanto est celeritas corporis percutientis maior. Itaque elementum *vis vivæ* exponetur per *prisma elementare* , cuius unam dimensionem facit vis mortua nitens , alteram celeritas nisus , tertiam continuatio & quasi fluxus elementarishuius momenti per contrarios nisu non impediti. Denique *vires ipsæ vivæ* exprimentur *prismate infinito* , quod exsurgit ex integratione omnium horum prismatum elementarium. Ex quo constat , neque ex replicatione additiva virium mortuarum componi vivas ; neque per divisionem redigi vivas in mortuam : non magis atque id de superficiebus & solidis dici potest. Patet etiam , cur & quo sensu vis viva atque mortua sint *heterogenæ*?

LXI. Patet denique , adeo *non dissentire* mensuram

ram virium vivarum Leibnitianam a vera mortuarum æstimatione, ut potius altera sequatur ex altera.

Membrum. V.

LXII. Superest, ut ex hac Theoria rationem red-
damus, *cur vires vivæ inæquales sibi occurrentes fa-
ciant æquilibrium?* Debeo id propter Sectionis I Theor.
8. Schol. 2. Id vero ex hætenus dictis sponte sequitur,
si unicam illam *Lemmatis* loco propositionem addideris,
quam §. 60. modo subinnumus. *Ea hæc est.* Si duo
corpora A & B celeritatibus, quæ sint massarum reci- Fig. 12.
procæ, in se invicem, vel in corpus medium C directe
incurrant, *percussiones* utriusque sunt *isochronæ*; id enim
nisi foret, alterutrius pressio prævaleret, postquam ces-
savit impulsio alterius. Consequitur autem ex hoc lem-
mate, quo maior est corporis A impellentis velocitas, eo
celerius sibi succedere impetus, sive momenta vis nitentis; ut adeo, *si non impedirentur*, elementala ex fluxu horum
nisuum oriunda §. 52. maiora fierent elementulis ex fluxu
impetuum corporis B tardioris eodem tempusculo oriun-
dis. *Si vero impediuntur* illi impetus, ob continuitatem
actionis in utroque A & B sequitur, singulos nisus elidi
per alios sibi oppositos & æquales, adeoque nasci æqui-
librium.

LXIII. Videtur hoc prima specie *paradoxum*, sed
nihil tamen *absurdi* comprehendit. Si nunquam fluant
libere momenta corporis nitentis, opponitur rectangu-
lum rectangulo, neque oritur tertia dimensio; itaque si
 $MC = mc$ (manendo in denominatione §. 58.) obtinebit
æquilibrium; neque generabitur ab eiusmodi im-
petibus

Fig. 12. petibus vis viva in corpore C medio , & utrinque percusso. Sin ita rem concipias, ut corpus A impingat in aliud quiescens æquale D , & corpus B in aliud sibi æquale E : Non impediuntur nisi corporum A & B, sed ita recipientur a corporibus D & E , ut ex eorum continuatione generetur vis viva in D & E. *Mensura* vero *huius vis* , quæ ita gignitur , *non tantum* sequitur magnitudinem impetuum , *sed* proportionem fluxus *quoque* , quo illi se excipiunt. Unde constat, vim genitam, positis licet $MC = mc$, tamen inæqualem fore , si differat tertia dimensio , hoc est , celeritas fluxus , quo sibi succedunt hi impetus v. §. 60. Cumque tertia hæc dimensio etiam sequatur proportionem celeritatis : patet ex uno latere , cur vires vivæ in corpore D & E genitæ, exprimantur per MCC & mcc , uti vires corporum A & B ; & ex altero , cur sibi æquilibrium faciant hæ vires in se invicem, vel in idem corpus C , impingentes.

Fig. 13. LXIV. Perspicuitatis gratia , dicam id *in simili* quoque. Fingatur *vestis* AB fulcro C impositus. Egre-diantur ex ipso fulcri centro C duo corpora *a* & *b* , & ferantur per brachia *aA* , & *bB* celeritatibus , quæ sint reciprocæ massarum , ut habeamus $MC = mc$. Hic recte dici potest: corpus *b* in singulis lineæ *bB* punctis exerere impetum, qui sit ut rectangulum ex massa in distantiam a centro. Adeoque posito $BD = BC$, *si* impetus illi omnes *reciperentur libere* a corpore aliquo $L = b$: exprimeretur earum summa per aream CBD ductam in massam L. Similiter corpus *a* in singulis lineæ *aA* punctis exerit impetum proportionalem rectangulo ex massa in distantiam a centro : itaque , facto $AE = AC$, si & hos impetus sine obstaculo collectos conciperem in corpus aliquod $M = a$;

$M=a$; exponeretur earum summa per aream CAE ductam in massam M. Atque hic casus obtinet in percussione superius exposita §. 51. — 53. itemque in corporibus libere cadentibus, si corpus $L=b$ cadat tamdiu, donec acquirat celeritatem ut CB, & corpus $M=a$, donec acquirat celeritatem ut CA; in hisce enim casibus impetus causæ impellentis & gravificæ omnes recipiuntur in corpore cadente, adeoque generantur vires proportionales hisce prismatis. Sed quoniam in casu vectis nostri, nunquam libere fluunt impetus, sed perpetuo se destruunt, numquam tertia oritur dimensio, neque adeo per impetus hosce successivos generantur areæ CAE, vel CBD, & ex illis prismata: sed singula sibi invicem rectangula $b. BD$, & $a. AE$, vel generaliter (sumendo, $C\beta: Ca = CB: CA:$) rectangula $b. \beta r$ & $a. a e$ sibi invicem æqualia semper sibi opponuntur. Unde necessario oritur æquilibrium. Atque hoc idem sequitur, cum duo sibi invicem corpora occurrunt, quorum vires sunt reciprocae massarum.

LXV. Superest unicum, quod omitti nolim. Qui Leibnitianam æstimationem tuentur, sæpius in ore habent, vires totales esse effectibus suis proportionales. Iam in casu duorum corporum, cum fuerit $MC=mc$, videmus, ponendo corpora non elastica, effectum virium corporis A hunc esse, ut destruant vim corporis B; & effectum virium corporis B esse, ut destruant vim corporis A. Itaque videri posset, pro effectu virium in A, poni posse vires in corpore B destructas: Adeoque propter effectus & virium æqualitatem vires utriusque corporis esse æquales. Id in vulgari æstimatione locum habet, est enim $MC=mc$, quoties datur eiusmodi æquilibrium: Sed in Leibnitiana

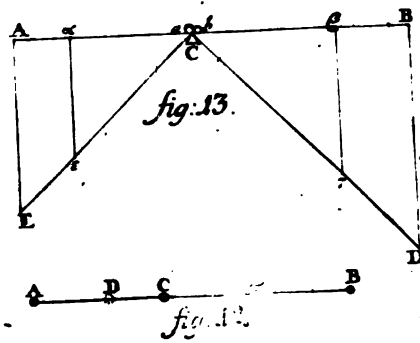
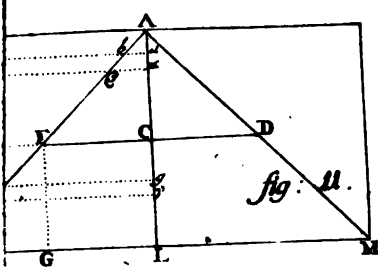
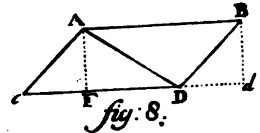
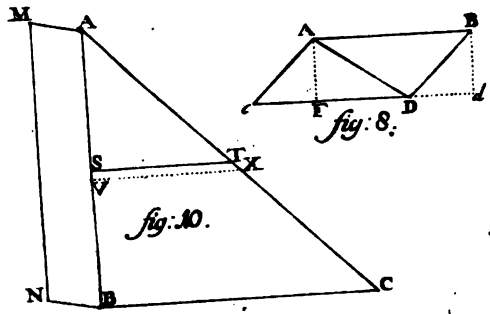
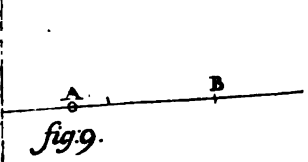
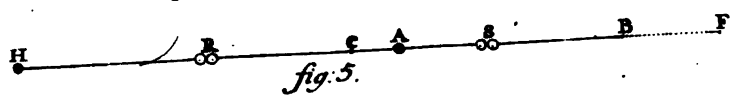
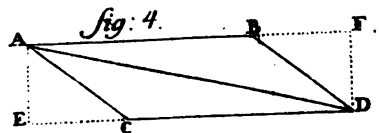
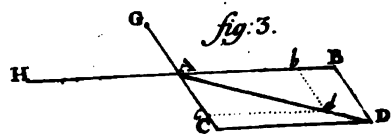
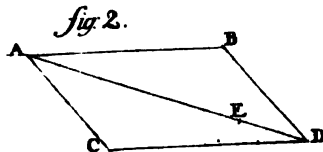
na

na fallit plerumque, quia pro casu æquilibrii, vires MC^2 non sunt æquales viribus mc^2 ; sed $MC^2 : mc^2 = m : M$. Quid hic pro Leibnitio dicendum est?

LXVI. Nimirum *hoc*: vires corporis B, destructæ a viribus corporis A, non possunt haberi pro effectu viribus A proportionali, nisi *massæ* sint *æquales*. Id *duplici* modo ostendam. *Primo*, cum vires æstimantur ex effectu integro, effectus dicit resistencias, per quas consumuntur vires in corpore moto: resistenciæ igitur illæ debent spectari respectu corporis, cui fiunt: itaque & virium nisus, & resistentia nisum destrucens debet applicari ad massam eandem. *Secundo* enim loco, nisi id feceris, nullam habebis virium mensuram; ponendo enim x pro m , & y pro c : æquilibrium erit, quoties $MC = xy = mc$; Sed xy^2 potest hoc non obstante infinitis modis differre a quantitate mc^2 , sic, ut non sit $Mc^2 : xy^2 = m : M$, nisi quando $x = m$. Igitur vis corporis B æquilibrium facientis cum corpore A ($= xy^2$) non potest assumi pro mensura virium corporis A determinata.

LXVII. *Caute* igitur necessum est sequentem attendere: Cum vires æstimantur ex resistenciis, per quas consumuntur, resistenciæ illæ spectantur *ut receptæ ab hac massa*, vel ut profectæ a massa æquali; nequaquam vero ab alia inæquali. Ita fit in gravibus motu retardato ascendentibus: Ita etiam fieri in percussionibus debet. Patetque novo exemplo, quantum momenti lateat *in discrimine massarum*, cum agitur de viribus, & earundem inter se comparationibus. conf. §. 44. 45.

DE



DE MOTV CORPORVM EX
PERCVSSIONE.

DISSERTATIO,

Auctore

Nicolao Bernoulli, Ioh. F.

Hypotheses.

I.



Corpora duo, E & F, per altitudines EB, FC, ex quiete libere delapsa, si velocitatibus ultimo acquisitis directe ad se invicem impingant in M, eam post ictum velocitatem mutuam habebunt, ut sic

M. Nov.
1725.
Fig 1.

sua singula ascendant, donec velocitate utriusque exhausta pervenerint in sitam $\epsilon\Phi$, eorum commune centrum gravitatis pristinam unde prius descenderat altitudinem acquirat, neque eam transgrediatur.

Notissimum hoc est Hugenii axioma, quo passim usus est, quodque adeo evidens reputabat, ut in pari occasione incidenter tantum id monuisse ipsi suffecerit, in tractatu suo posthumo de motu corporum ex percussione.

II. Duo corpora æqualia A & C velocitatibus æqualibus eodem momento contra tertium quiescens B impellentia, æquali etiam post ictum, velocitate resilient.

Fig. 2.

Q

III. Si

Fig. 3. III. Si duo corpora ad se invicem impingentia velocitatibus AB & FL , post impulsum velocitatibus $a\epsilon$ & $\phi\lambda$ recedant, eadem vero corpora aliis etiam velocitatibus ED , MN sibi occurrentia resiliant velocitatibus $\epsilon\delta$, $\mu\nu$. Ipsa quoque hæc corpora se pellentia velocitatibus totalibus $AB + FL$ & $ED + MN$, totalibus $a\epsilon + \phi\lambda$ & $\epsilon\delta + \mu\nu$ repellentur.

Sequitur hinc quod duorum corporum velocitatibus a & b post ictum se mutantibus in velocitates p & q , etiam earum æque multiples na & nb post conflictum producturæ sint æque multiples np & nq

Fig. 4. IV. Duorum corporum velocitatibus AB , CB , degenerantibus post ictum in alias $a\epsilon$, $\gamma\epsilon$, erunt vicissim AB , CB velocitates post impulsum eorundem corporum quæ ante hunc velocitatibus $a\epsilon$, $\gamma\epsilon$ sibi occurrerant.

Pendet hæc hypothesis ab axioma generali, quo dicimus quod abeunte effectu in causam, vicissim causa in effectum mutetur.

Fig. 5. Hoc illustrent principia Catoptrica & Dioptrica, quod radio AB reflectente aut refringente secundum BC , vicissim radius CB reflexus aut refractus viam lineæ AB sit initurus.

Lemma

Fig. 1. Sint duo corpora quæcunque sibi directe occurrentia in M velocitatibus BM , CM , quas cadendo per altitudines EB & FC acquisiverant. Ponantur eadem corpora post impulsum velocitates acquisivisse quibus ad altitudines verticales ϵB , ϕC ascendant. Dico centrum commune gravitatis corporum tam in ϵ , ϕ , quam in E , F constitutorum fore in S , intersectione linearum EF , $\epsilon\phi$.

Si

$C = n$, erit eius velocitas $CB = \frac{mp}{n}$. Concipiatur corpus maius D divisum in duo corpora α & β , quorum prius α sit $= n$, ac proin $\beta = m - n$, & disponantur ita ut eorum commune centrum gravitatis sit in D . Pareat quod hæc duo corpora α & β virgæ $\alpha\beta$ rigidæ gravitatis experti atque velocitate DB se moventi adhærentia, eundem plane effectum in corpus C sint exercitura, quem corpus D eadem sua velocitate motum produxisset, nec non, quod hic effectus constans sit permanens quomodocunque se moveant corpora α & β durante motu puncti D in linea DB , dummodo centrum commune gravitatis non recedat a puncto D .

Ponatur ergo moveri corpus β velocitate $\beta D = BD = p$, & corpus α velocitate αD quæ erit $= \frac{mq - np}{n}$; fingatur insuper circumrotari virga $\alpha\beta$ circa punctum D ut situm acquirat ADB , dum interea punctum D fertur velocitate DB , quo fiet ut corpus β positum in B (utpote duabus velocitatibus æqualibus & directe oppositis gaudens) prorsus sit quieturum, & α positum in A se moturum velocitate $AD + DB = \frac{mp}{n} = CB$. Corpus ergo C (per Coroll. Prop. 1.) post ictum revertetur eadem velocitate qua gaudebat ante impulsu.

Demonstrata propositionis veritate ratione corporis C , vera etiam erit per Prop. I. ratione corporis D . Q. E. D.

Problema.

Datis duorum corporum directe sibi occurrentium massis & velocitatibus: invenire eorundem velocitates post ictum.

Sit

Sit massa corporis in $A = m$, eius velocitas $AB = p$; Fig. 7.
 massa corporis $C = n$, eius velocitas $CB = q$. Mutentur
 velocitates AB & BC post occursum in alteras $\xi\alpha$, &
 $\xi\gamma$, sitque $\xi\alpha = x$, $\xi\gamma = y$ (per propositionem 1.)
 $\sqrt{\frac{mpp + nqq - mxx}{n}}$. Ponantur iam eadem corpora reverti

ad secundum impulsu velocitatibus $\delta\beta$ & $\Phi\beta$, ita ut sit
 $\delta\beta \cdot \Phi\beta :: BA \cdot BC$, $\delta\alpha \cdot \Phi\gamma :: n \cdot m$, seu reciproce ut
 massæ corporum in A & C : reperietur $\delta\alpha = \frac{qnx - pny}{pm - qn}$, &
 $\Phi\gamma = \frac{qmx - pmy}{pm - qn}$. His ita positis exprimantur veloci-
 tates post hunc secundum ictum in ξ per lineas BD &
 BF , & apparebit per secundam partem hypotheseos
 tertiæ quod $AB \cdot \xi\alpha :: \delta\beta \cdot DB = \frac{mxx - nxy}{pm - qn}$, & $CB \cdot \xi\gamma ::$
 $\Phi\beta \cdot BF = \frac{mxy - nyy}{pm - qn}$. Consideratis porro velocitatibus

partialibus $\alpha\beta$, $\gamma\beta$, patet per hyp. 4. degenerare has in
 BA & BC , reliquas vero $\delta\alpha$ & $\Phi\gamma$ (per prop. 2.) ma-
 nere easdem, & per consequens $AD = \delta\alpha$, sicut & CF
 $= \gamma\Phi$. Elicitur ergo etiam (per primam partem hypo-
 theseos 3) quod $BD = BA + AD = p + \frac{qnx - pny}{pm - qn}$, & BF
 $BC + CF = q + \frac{qmx - pmy}{pm - qn}$ unde provenit $\frac{mxx - nxy}{pm - qn} = p +$
 $\frac{qnx - pny}{pm - qn}$, & $\frac{mxy - nyy}{pm - qn} = q + \frac{qmx - pmy}{pm - qn}$, quæ duæ æquatio-
 nes per substitutionem valoris y supra exhibiti similem
 producant æquationem. Primam ergo reduxisse hic

sufficiat, & prodibit per debitam terminorum dispositio-
 nem $mxx - nxy - qnx + pny - ppm + pqn = 0$, quæ æ-
 quatio divisa per $x - p$ (radicem manifeste inutilem dat
 $mxx - ny + mp - qn = 0$, vel, farrogato pro y valore suo,
 $mmxx + mnxx + 2mmpx - 2mqx + mnpp - mnpp -$
 $2mnpq = 0$, vel tandem dividendo per $x + p$, radicem

Q 3

etiam

126 DE MOTU CORP. EX PERCVSSIONE

etiam inutilem, $mmx + mnx + mmp - mnp - 2mnq = 0$,
 quæ æquatio monstrat $x = \frac{mnp + 2mnq - mmp}{mn + mx} = \frac{np + 2nq - mp}{m + x}$
 $= \frac{2np + 2nq}{m + x} - \frac{np - mp}{m + x} = \frac{2np + 2nq}{m + x} - p$. Q. E. I.

EXAMEN PRINCIPIORVM
 MECHANICAE,

ET

DEMONSTRATIONES GEOMETRICAE

DE

COMPOSITIONE ET RESOLUTIONE
 VIRIVM,

Auct.

Daniele Bernoulli, Ioh. F.

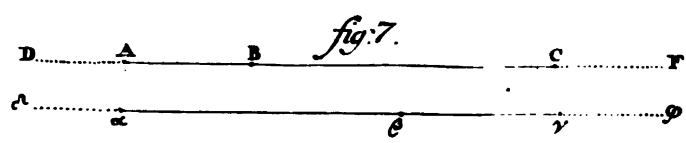
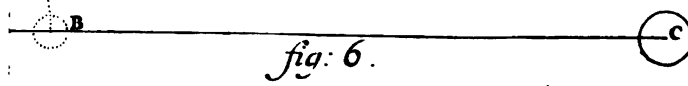
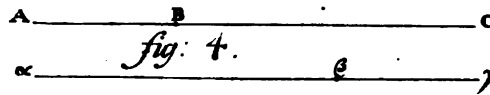
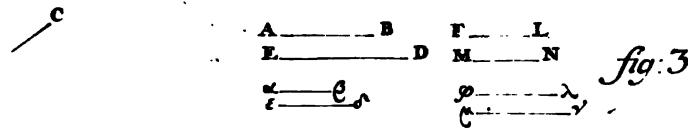
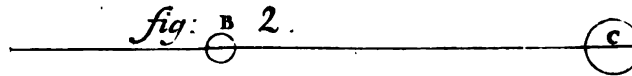
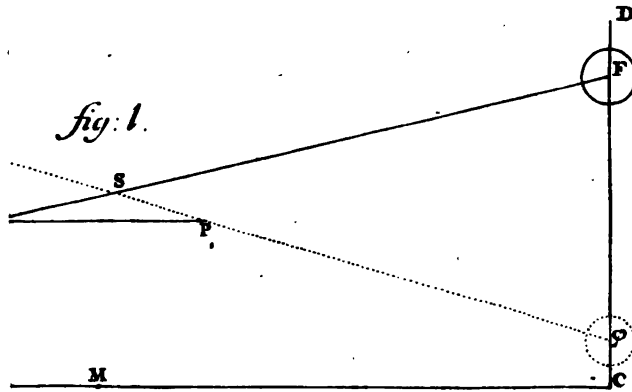
Sectio Prima.

I.

M. Febr.
 1726.



Llam Mechanicæ partem quæ versatur circa æquilibrium potentiarum, totam ex sola compositione & resolutione virium deduci posse, abundè monstravit Petrus Varignon; huic dein principio si addimus alterum, quòd incrementa velocitatum proportionalia sint elementis temporum ductis in vires seu presiones



siones corpora ad motum sollicitantes, obtinemus secundam mechanicæ partem circa motum corporum occupatam. Posteriori principio Galileus primum, ni fallor, usus est pro determinando motu corporum uniformiter acceleratorum. Possunt quoque exinde deduci regulæ communicationis motuum & alia quam plurima, quæ dein infinitis experimentis egregie fuerunt confirmata; experientia ergo potius, si recte iudico, fundatum est principium Galileanum, quam ratione, atque proin annumerandum illis veritatibus, quæ dicuntur vulgo *contingenter vera*, quibus opponuntur *necessario vera*. Potuisset enim natura efficere, ut incrementa velocitatum in corporibus motis proportionalia essent elementis temporum ductis in functionem quamcunque pressionum, ita ut dicto tempore t , pressione p & velocitate v non amplius esset $dv = p dt$, sed verbi gratia $dv = p p dt$ vel $dv = p^3 dt$ &c, quarum æquationum singulæ alias atque alias leges motuum subministrant.

II. Aliter vero seres habet cum principio compositionis virium, cui priorem mechanicæ partem, vulgo staticam nominant, inniti dixi; illius enim demonstrationem inveni plane geometricam, cuius vi demum cognovi, theoremata statica non minus *necessario vera* esse, quam sunt geometrica. Hastenus a nemine demonstrata fuit compositio virium, quam ex compositione motus, quod demonstrandi genus tametsi receptum à viris summis, veluti Newtono, Varignonio, aliisque: minime tamen rigore geometrico munitum est, propositionemque non aliter quam *contingenter veram* reddit, uti inferius demonstrabo; nequaquam autem dubitandum, quin viri modo allegati ipsi dese-

defectam istum optime perspexerint, maluerint tamen aliqualem, eamque facilem & brevem; quam nullam vel valde prolixam magnoque propositionum geometricarum apparatu intricatam demonstrationem addere; Hæc ut mōnerem necesse duxi, ne quis credat me nil nisi actum agere, imo per longos circuitus rem per se obviam petere.

III. Propius iam examinanda res est; exponam primo demonstrationem ordinariam; dein eiusdem defectum indicabo; denique veram demonstrationem subiungam. Demonstrata hætenus fuit compositio virium ex compositio-
Fig. I. sitione motus, hunc in modum. " *Sint potentia.*
 " *duæ concurrentes in puncto A sub directionibus AB &*
 " *AC, quæque se habeant ut AB & AC. Si potentia*
 " *AB sola ageret, moveret punctum A in linea AB, & po-*
 " *tentia AC, si sola ageret, moveret idem punctum A in li-*
 " *nea AC. Erunt autem velocitates primæ, uti ipsæ poten-*
 " *tia; ergo si primo instanti punctum A sollicitatum a po-*
 " *tentia AB pervenerit in b, necesse est, ut ab altera poten-*
 " *tia sollicitatum perveniat eodem temporis momento in c,*
 " *ita ut Ab. Ac::AB, AC. Sed quælibet potentia effe-*
 " *ctum suum exerit, ergo movebitur punctum A ad ambabus*
 " *potentiis animatum primo temporis elemento per Ab &*
 " *per Ac. Notum autem est ex compositioe motus iam*
 " *antiquissimis temporibus demonstrata., punctum ita du-*
 " *pliciter motum eodem tempusculo absolvere elementum. Ad*
 " *quæ est diagonalis parallelogrammi Abdc; est itaque ef-*
 " *fectus potentiarum AB, AC simul agentium post primum*
 " *temporis momentum, idem ac si una sola adesset poten-*
 " *tia, quæ punctum A eodem momento per spatium Ad*
 " *movere valeret: Et cum potentia sint semper ut velocita-*
 " *tes*

tes seu ut elementa iisdem tempusculi descripta, erit potentia illa ad potentiam AB vel AC, ut Ad ad Ab vel Ac; id quod indicat potentiam quæsitam AD esse diagonalem parallelogrammi sub lateribus AB, AC, pariter ac Ad est diagonalis parallelogrammi elementaris A b d c. Aequivalet itaque actio simplex potentiae AD actioni compositae potentiarum AB, AC. Hæc solita illa demonstratio est compositionis virium, quam meis verbis concepi, ne aliena verba afferendo suspicionem alicuius refutationis in me concitarem: Non impugnabo Geometræ, sed Geometriæ defectum. Cæterum confido me in allegata demonstratione nihil omisisse, quod eidem aliquid ponderis superaddere potuisset.

IV. Nihil in illa, ut falsum reiicio, sed quædam ut obscura, quædam ut non *necessario vera*. Præcipuum est, quod velocitates initiales ponantur potentiis proportionales, id quod nihil aliud est, quam ponere elementa velocitatum proportionalia pressionibus seu potentiis per æqualia tempuscula agentibus. Sed iam indicaui sub fine paragraphi 1. potuisse eadem elementa aliæ functioni pressionum esse proportionalia: Nemo enim necessitatem huius rationis identitatis demonstravit, nec unquam, ni fallor, demonstrare poterit. Quod si autem incrementa velocitatum iisdem tempusculis generata ponantur v. gr. radicibus pressionum seu potentiarum proportionalia, alia obtinebitur virium compositio a priori longe diversa nempe talis. Sint duæ potentiae AB, AC abscindantur AN, AM radicibus AB, AC proportionales, Dein fiat parallelogrammum ANQM; producatu-
 R AB &

Fig. 2.

AB & AC simul agentibus. Sequitur autem hæc constructio ex ratiocinio simili illi quod §. 3. expositum est.

V. Opposui hypothefi communi, qua cæteris paribus incrementa velocitatum proportionalia accipiuntur pressionibus, aliam quæ certe attentionem præ reliquis mereatur. Quid? an absurdum fuisset ante instituta experimenta suspicari, naturam hanc sibi proposuisse legem, ut incrementa vis vivæ dato tempusculo genita proportionalia sint pressionibus; sed demonstrabo mox & iam a viris Cel. Hermanno atque Bülfingero demonstratum est, incrementa vis vivæ exprimenda esse, secundum Leibnitium per udu ; oriretur ergo ex ista hypothefi $udu = pdt$, vel (posita p constanti) $vu = 2pt$, & denique $dv = dt \sqrt{\frac{p}{2t}}$, id est, positis temporibus æqualibus fierent incrementa velocitatum proportionalia radicibus pressionum: non itaque sine fundamento hæc a nobis ficta fuit hypothefis. Restat ut ostendam elementa vis vivæ exprimenda esse per udu , seu quod idem est, vim vivam corporis proportionalem esse quadratis velocitatum; mihi autem mensura virium vivarum est numerus elastrorum, quæ corpus tendere potest priusquam motum suum perdat; hac definitione posita demonstrandum erit, corpus velocitate dupla posse quatuor elastra similia similiterque posita ad eundem gradum tendere, cum idem corpus velocitate simpla unicum tendit: Id primus Pater meus ostendit, sed per compositionem motus, qui scrupulum movere poterat; Ego vero idem demonstrabo directe, & quidem ex hoc ipso principio a temporibus Galilei ab omnium nationum Geometris recepto, sed tamen, uti credo, *contingenter* tantum *vero*, quo nimirum ponitur $du = pdt$. Ea demonstrationem. Sit elastrum, quod

Fig. 3.

quod comprimi potest versus initium fixum L. Sit curva BEF talis, ut denotante abscissa LH longitudinem elastri compressi, indicet applicata HD potentiam requisitam ad elastrum in illo compressionis statu conservandum. Sint dein quatuor huiusmodi elastra o, o, o, o , Fig. 4.

& erit applicata $b d$ pro simili abscissa quadrupla applicatae in altera curva. Ponatur in figura tertia elastrum compressum in longitudinem LI, idque sui iuris factum propellere globum A; inquiram ergo velocitatem globi A, cum elastrum acquisiverit statum LH. Sit $LH = x$, $HD = p$, velocitas globi pro illo momento $= v$, tempus quo elastri extremitas pervenit ex I in $H = t$, & erit $dv = pdt = \frac{p dx}{v}$, vel $v dv = p dx$, vel $vv = 2 \int p dx$, & $v = \sqrt{2 \int p dx}$.

Applicetur idem ratiocinium ad figuram quartam, retentis iisdem symbolis & ponendo tantum $4 p$ loco p , atque ita obtinebitur $v = 2 \sqrt{2 \int p dx}$; unde liquet velocitates in punctis homologis H & b semper esse ut 1 ad 2, ergo etiam in puncto B velocitas subdupla erit velocitatis in puncto b , & si motus sit reciprocus, tendet globus A elastrum usque in I & similis globus a velocitate initiali dupla quatuor elastra similiter tendet usque in i . Id itaque extra controversiam positum esse debet, posse corpus quatuor elastra similia similiter tendere cum duplici velocitate & quicumque vires vivas hoc sensu negat (neminem autem esse puto) aut geometra non est, aut definitionem impugnat. Sed unum hic observandum est: nimirum, summam omnium pressio-
 rum momentanearum, quas corpus sustinuit dum tenderet quatuor elastra non quadruplam sed duplam fuisse, aestimando summam omnium pressio-
 rum momentanearum non solum ex ipsis pressio-
 nibus, sed & ex temporibus quibus singulae applicatae fue-

runt, id est, ex $spdt$; nam tantum agit libra duobus minutis, quantum duæ libræ uno minuto, seu tanta est summa omnium pressio^{rum} momentanearum in priori casu, quanta in posteriori; est vero $pdt = dv$, ergo $spdt = v$; unde si quis vim corpori moto insitam definiat ex summa omnium pressio^{rum} momentanearum, quas corpus directe sustinere potest, priusquam motum suum perdat, hic iure illam proportionalem faciet velocitatibus simplicibus; Notandum quoque illam pressio^{rum} summam eandem esse semper pro iisdem corporibus iisdemque velocitatibus initialibus modo pressio^{nes} sumantur directe corporis motui oppositæ; habeat enim corpus velocitatem initialem, qua ascendere possit per altitudinem verticalem DN; idem corpus eadem velocitate initiali ascendere poterit per curvam DO: dico autem in utroque ascensu corpus eandem pressio^{rum} directe oppositarum summam sustinuisse; ductis enim duabus horizontalibus infinite propinquis BM, CN, & verticali BA; erit velocitas in B eadem quæ in M: sit pressio in M = p , erit pressio in B = $\frac{BA}{BC} p$; sit tempus ascensus per MN = dt , erit tempus ascensus per BC = $\frac{BC}{BA} dt$; ergo factum ex tempusculo in pressio^{rum} in utroque casu = pdt , & aggregatum omnium huiusmodi factorum seu summa omnium pressio^{rum} in utroque ascensu eadem est: Et hoc theorema facile mutatur in Leibnitianum, quo asseritur corpus idem eadem velocitate initiali semper eundem numerum elastulorum æqualium tendere, antequam motum suum perdat: Dicitur non potest, quantum principium hoc *conservationis virium vivarum* utilitatis afferat in rem physicam; Nullo enim negotio eius ope solvuntur problemata physica, alias pro valde difficilibus vel forsan despe-

Fig. 5.

desperatis habenda. Cæterum has quoque veritates dynamicas non necessario veras esse patet ex eo, quod deducantur omnes ex principio æquationis $dv = pdt$.

VI. Pergo in examinandis hypothefibus demonstrationis pro compositione virium: Iam indicavi hypothefin, quæ mihi vera quidem, sed tamen talis quæ demonstrari nequeat videtur. Prouti autem ex unica propositione *contingenter vera*, non potest aliquid deduci, quod sit *necessario verum*, ita aliam similem hypothefin in demonstratione latere necesse est. Latet autem in eo quod ponatur, potentiam eundem velocitatis gradum communicare dato tempusculo, corpori moto & corpori quiescenti; concedam potentias AB, AC seorsim agentes motus imprimere puncto A proportionales ipsis potentiis, scilicet Ab & Ac ; quid autem si id negem de potentiis simul agentibus: nonne fieri potuisset, ut potentia alium motum imprimeret corpori iam moto, quam corpori quiescenti? Certe non satis illustratur principium hoc ex eo, quod fingi possit corpus motum in tubo, dum tubus locum suum successive mutat. Fingatur enim tubus CE motus directione Cc non perpendiculari ad tubum, sintque latera tubi perfecte polita, certum est potentiam requiri applicandam in globum a , quæ impediatur ne globus locum in tubo mutet; ergo potentia tubo applicata non potest (saltem non debet) considerari independentem a potentia globo applicata. Si hisce diutius immorari vellem, possem exemplis demonstrare, hanc hypothefin contradictiones involvere, si loco $dv = pdt$ ponatur v. gr. $dv = ppdt$: Sed ad alia prope-
rans hæc relinquam; id adhuc monebo, naturam æ-

Fig. 1.

Fig. 6.

quilibrium equidem sine errore explicari posse, per motum elementarem, id tamen obscure fieri: ubicunque enim est æquilibrium, nullus succedit motus. Sequitur iam pars altera, qua demonstrationes dabo Geometricas pro compositione & resolutione virium.

Sect. II.

Definitiones. Per *pot. AB* intelligo potentiam expressam per *AB*: potentias sibi æquivalere dico, quando eadem vi & per eandem directionem punctum trahunt.

Hyp. I. Potentiis quibuscunque possunt substitui eandem æquivalentes. *II.* Duæ potentiaë conspirantes æquivalent uni potentiaë simplici, quæ est æqualis summæ illarum, & duæ potentiaë directe oppositaë æquivalent uni potentiaë simplici, quæ est æqualis earundem differentiaë. Hæ duæ postremaë hypotheses nil aliud asserunt, quam totum esse æquale partibus & duas potentias æquales & oppositas esse in æquilibrio, quia nulla ratio, cur una alteri prævaleat, quod axioma metaphysicum inter necessario vera est locandum. *III.* Potentia simplex, quæ æquivalet duabus potentiaë æqualibus, æqualiter versus utramque inclinatur, id est, ipsius directio secatur bifariam angulum comprehensum inter directiones duarum potentiarum, id quod ex eodem axioma metaphysico sequitur.

Propositio I. Lemma. Si tres potentiaë *DA*, *DB* & *DC* positaë sint in æquilibrio, erunt quoque earum duplaë vel quævis multiplaë, *Dm*, *Dn* & *Dp* in æquilibrio.

De

Demonstratio. Si enim substituamus loco potentiarum Dm, Dn, Dp has alias $DA + DA, DB + DB, DC + DC,$ in quibus manifestum est æquilibrium, ilico patet propositionis veritas, atque non solum de potentiis duplis, sed & triplis, quadruplis &c. imo quamcunque rationem habentibus cum assumtis $DA, DB, DC.$ Q. E. D.

Prop. 2. Problema Quæritur pot. DB æquivalens duabus potentiis DA, DC æqualibus sibi que ad perpendicularum insistentibus. Fig. 8.

Solutio. Cum potentia DA, DC sint æquales, nullum est dubium circa directionem tertiæ potentia; secabit utique bifariam angulum ADC ; quæritur ergo tantum magnitudo potentia DB ; vocetur itaque pot. $DB, x,$ nominata pot. DA seu $DC, a,$ atque fiat $DE =$ tertiæ continue proportionali ad $DB,$ & DA sumanturque DG & DH æquales ipsi lineæ $DE.$ Ergo (*per Prop. 1.*) pot. DA æquivaleret duabus potentiis $DE, DH,$ atque DC duabus aliis $DG, DH.$ Substituendo itaque loco potentiarum $DA, DC,$ has alias $DE, DH, DG, DH,$ oportet ut hæc quatuor potentia simul agentes æquivalent potentia DB ; sed potentia DE, DG se destrunt, restant adeoque pot. DH, DH seu simplex pot. $2 DH = DB$; seu $\frac{2a^2}{x} = x = a\sqrt{2}.$

Coroll. Ergo pot. DB exprimitur per diagonalem quadrati, cuius latera repræsentant potentias $DA, DC.$

Prop. 3. Probl. Quæritur potentia DB æquivalens duabus potentiis DA, DC ad se invicem perpendicularibus sed quomodocunque inæqualibus. Fig. 9.

Solutio. Sit $DA = a, DC = b; DB = x;$ ducatur per punctum D recta EG perpendicularis ad DB ; sumatur $DR = \frac{a^2}{x}$ id est, = tertiæ continue proportionali
ad

ad DB & DA; & DE fiat $= \frac{ab}{x} =$ quartæ proportionali ad DB, DC & DA. His ita positis patet potentiam DA æquivalere potentiis DR, DE; quia DR, DA, DE per constructionem proportionales sunt ipsis DA, DB, DC; sunt præterea similiter positæ tres priores cum tribus posterioribus ob ang. EDA = ang. CDB. Substitui ergo potentia DA possunt duæ æquivalentes DE, DR: Idem etiam fiat ab altera parte substituendo potentia DC duas alias æquivalentes DN, DG tales, ut DC, DB, DA sint proportionales ipsis DN, DC, DG; & sic quatuor potentia DE, DR, DN, DG æquivalentur potentia DB; est autem $DN = \frac{b^2}{x}$, & $DG = \frac{a^2}{x}$; ergo pot. DG & DE se destruentibus restant potentia DR, DN æquandæ cum potentia DB; unde $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{x} = x = \sqrt{aa + bb}$,

Coroll. 1. Est ergo potentia DB æqualis illi, quæ repræsentaretur per diagonalem rectanguli, cuius latera exprimunt potentias propositas.

Coroll. 2. Constat adeoque de valore seu quantitate potentia DB, verum nihil adhucdum constat de ipsius directione; quod si vero demonstrari insuper posset, non posse potentiam DB æquivalere potentiis lateralibus seu illas agendo in oppositam partem in æquilibrio continere, nisi agat secundum diagonalem rectanguli modo definiti, facillimum demonstratu esset, potentias quas-cunque DA, DC quomodocumque ad se inclinatas esse æquipollentes cum potentia simplici DS, quæ est diagonalis parallelogrammi DASC. Si enim substituas potentia DA duas DP, DF ad se invicem perpendiculares, habebis loco potentiarum DA, DC tres alias DP, DF, DC seu (facta SL perpendiculari ad DC productam)

Fig. 10.

ductam) duas potentias DP, DL æquivalentes potentiaæ DS; est autem DS etiam diagonalis in parallelogrammo obliquangulo DASC; ergo potentia æquivalens potentiis DA, DC repræsentatur per diagonalem DS.

Propositio 4. Probl. Posito potentias BA, BC inter se æquales æquivalere potentiaæ BE angulum ABC secanti bifariam; invenire duas alias potentias inter se æquales BD, BF eidem potentiaæ BE æquivalentes, & quarum directiones angulos ABE, CBE biscent.

Fig. 11.

Sol. Sit pot. BA seu BC = a , pot. BE = b , pot. BD vel BF = x ; fiat, ut BE (b). BD vel BF (x) :: BD vel BF (x). BQ vel BR = $\frac{ax}{b}$. sumatur BS = BQ: Erunt potentiaæ BD & BF æquivalentes cum potentiis BQ, BS & BR, BS, seu potentiis BQ, BR, & 2BS. Præterea, si faciamus BT talem, ut sit = quartæ proportionali ad BA, BE, & BQ, erunt potentiaæ BQ, BR æquipollentes potentiaæ BT = $\frac{ax}{b}$. Ergo posita pro potentiis BQ, BR alia BT, habebitur tandem $BT + 2BS = BE$ seu $\frac{ax}{b} + \frac{2ax}{b} = b$ & $x = b\sqrt{\frac{a}{2a+b}}$

Q. E. L

Prop. 5. Theorema. Si in triangulo ABC rectangulo atque isosceli ducatur BR perpendicularis ad AC, posteaque anguli ABR, CBR biscentur lineis BD, BF ut & anguli DBR, FBR lineis Bd, Bf & sic in infinitum bisecando semper angulos circa diagonalem. Dico, duas potentias simul agentes BD, BF, vel Bd, Bf &c. æqualiter ad BR inclinatas semper æquivalere potentiaæ simplici 2BR.

Fig. 12.

Demonstratio; Potentiaæ BA, BC æquipollent potentiaæ 2BR (per Coroll. prop 2); quærendo nunc per præcedentem propositionem potentias BD, BF eidem

S po-

potentiæ $2BR$ æquipollentes, reperietur (nominando BA, a) BD seu $BF = \sqrt{\frac{a\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$; si autem geometricè quæ-
ratur valor ipsius BD , invenitur $BD = \sqrt{\frac{a\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$; unde
sequitur, lineas BD & BF repræsentare potèntias æqui-
pollentes potentiæ $2BR$. Faciendo nunc $BD = \sqrt{\frac{a\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$
 $= b$ iterumque inquirendo in potèntias Bd, Bf æquiva-
lentes potentiæ $2BR = a\sqrt{2}$, invenitur Bd seu Bf (prop. 4.)
 $= \sqrt{\frac{a\sqrt{2}b}{2b+a\sqrt{2}}}$, quæ quantitas si ponatur $= c$ invenitur ulte-
rius progrediendo pot. $B\delta = B\Phi = \sqrt{\frac{a\sqrt{2}c}{2c+a\sqrt{2}}}$, & sic de-
inceps; sed si $Bd, B\delta$ &c. seu $Bf, B\Phi$ &c. geometri-
ce quærantur, non aliter illæ exprimentur, quod pro-
bat, singula paria potèntiarum BD, BF , seu Bd, Bf
seu $B\delta, B\Phi$ &c. æquipollentia pot. $2BR$ repræsentari
per ipsas lineas $BD, Bd, B\delta$ &c. & $BF, Bf, B\Phi$ &c.
terminatas nimirum a linea recta AC . Q. E. D.

Aliter. Quicumque fuerit angulus ABR sive CBR ,
si potèntiæ BA, BC æquivalent potentiæ $2BR$, fluit
ex præcedenti propositione, potèntias alias applica-
tas ad angulos dimidios prioribusque æquipollentes re-
præsentari per lineas BD, BF . Considerando itaque
rursus loco anguli ABR seu CBR angulum DBR seu
 FBR iterum manifestum fit, potèntias Bd, Bf æquivalere
prioribus BD, BF , & sic de reliquis; ergo cum po-
tentiæ BA, BC æquivalent pot. $2BR$, si sint ad se in-
vicem perpendiculares (per prop. 2.), eidem quoque æ-
quivalent omnes reliquæ BD, BF , & Bd, Bf , & $B\delta$
 $B\Phi$ &c. Q. E. D.

Coroll. Demonstrata ergo fuit compositio virium

in

in omnibus casibus, ubi potentia repræsentantur per latera rhombi, cuius angulus æqualis uni ex hac serie geometrica $1R, \frac{1}{2}R, \frac{1}{4}R, \frac{1}{8}R, \&c.$ per R intelligo angulum rectum.

Prop. 6. Theorema; si duæ potentia æquales BA, BC æquipolleant potentia BF , quam pono bisecari in puncto L a linea AC ; sique per punctum B ducatur perpendicularis DE , cui quoque perpendiculariter insunt AD, CE , dico potentiam BA æquivalere potentiis BL, BD , atque pot. BC potentiis BL, BE . Fig. 13.

Demonstratio. Si neges potentiam BA æquivalere potentiis BL, BD ; fac illam æquivalere duabus aliis, veluti Bl, Bd ; ergo pari ratione pot. BC æquivaleret potentiis $Bl, Be = Bd$; ergo potentia Bd, Bl, Be, Bl æquivalerent pot. BF , seu pot. $2BL$. quod est absurdum. Ergo alterutra potentiarum, in quas resolvi debet potentia BA , necessario exprimi debet per BL , quo demonstrato, immediate fuit ex prop. 3. alteram potentiam sumendam esse æqualem potentia BD , quia nimirum $BA = \sqrt{BL^2 + BD^2}$: eodem modo fit demonstratio ab altera parte. Q. E. D.

Corol. Notæ nunc quoque sunt directiones potentiarum compositarum in infinitis rectangulis, nimirum in omnibus illis, quæ sunt circumscripta lineis BA, BD &c. & quorum alterum latus est BR . Fig. 12.

Prop. 7. Probl. Si BA, BE atque BC, BD sint latera qualiumcunque rhomborum supra definitorum, invenire potentiam in diagonali, quæ æquivalet potentiis BF, BG ; ponendo lineas BF, BG bisecare angulos ABC, EBD . Fig 14.

Solutio. Producantur lineæ BC, BD donec fiant
S 2
æqui-

140 - DEMONSTRAT. GEOMETRICAE

æquales ipsis BA, BE; iunctisque punctis M & N, producat^rur BL in S. Ergo potentiis BM, BN æquipollet potentia 2BS (per prop. 1.) & si quatuor potentia^e BA, BE, BM, BN, simul agere concipiantur, omnes simul æquipollere manifestum est potentiis 2BL, 2BS. Nunc videamus, quid singulatim valeant potentia^e BA, BM inquirendo nimirum potentiam BU illis æquivalentem; quia vero BA=BM bisecabit BU angulum ABM, adeo ut BU congruat cum BF: Resolvatur potentia BA in potentias BP & BL (per coroll. prop. 6) atque potentia BM in potentias BO, BS & sic habebimus quatuor potentias BP, BO, BL, BS, ergo (per prop. 3.) $BU = \sqrt{(BP+BO)^2 + (BL+BS)^2}$; eodem modo reperitur ab

altera parte $BW = \sqrt{(BR+BQ)^2 + (BL+BS)^2}$ Cum vero potentia^e BU, BW æquipollegant potentiis BA, BM & BE, BN seu potentiis 2BL+2BS, manifestum est, nihil superesse pro plenaria problematis solutione, nisi ut fiat sequens analogia: ut BU seu BW ad 2BL+2BS ita BF seu BG ad potentiam quaesitam in diagonali æquivalentem potentiis BF, BC. Hæc nunc, ut effectui demus, sit BA=BE=a; BC=BD=b; AC=ED=c;

$$\text{erit } CL=DL = \frac{aa-bb-cc}{2c}; \text{ MS=BO} = \frac{a^3-abb-acc}{2bc}; \text{ BP}$$

$$=AL = \frac{aa-bb+cc}{2c}; \text{ BL} = \frac{\sqrt{2bbcc+2aabb+2aacc-a^4-b^4-c^4}}{2c}$$

$$\text{BS} = \frac{a\sqrt{2bbcc+2aabb+2aacc-a^4-b^4-c^4}}{2bc}; \text{ ergo BU=BW} =$$

$$\sqrt{(BP+BO)^2 + (BL+BS)^2} = \text{radici sequentis quantita-}$$

tis

tis $\frac{aa+2ab+bb}{4bbcc} \times (2bbcc+2aabb+2aaccc-a^4-b^4-c^4)$
 $+ \left(\frac{aab-b^3+bcc+a^3-abb-acc}{2bc} \right)^2$; est autem radix totius

huius quantitatis $\frac{\sqrt{a^3b+ab^3+2aabb-abcc}}{b}$. Inventa BU

exprimenda restat ipsa BF, ut quarta proportionalis ad EU, 2BL+2BS & BF haberi possit. Illa vero com-
 mode obtinetur faciendo angulum BFZ=ang. BAF; ita enim fit triangulum BAF simile triangulo BFZ, nec nec non triang. BFC simile triang. FZC, ex quo-
 rum triangulorum similitudinibus statim provenit BF=

$\frac{\sqrt{a^3b+ab^3+2aabb-abcc}}{a+b}$. Est itaque quarta proportio-
 nalis ad BU, 2BL+2BS & BF, hæc quantitas

$\frac{\sqrt{2bbcc+2aabb+2aaccc-a^4-b^4-c^4}}{c} = 2BL$. Q.E.I.

Coroll Quia potentia BF, BG æquivalent potentia 2BL, patet illas æquivalentes esse cum potentiis latera-
 libus BA, BE vel BC, BD.

Fig. 15.

Proposio 8. Theorema. Si duæ vires sint æquales, veluti BA, BC erit illarum actio semper æqualis poten-
 tia expressæ per diagonalem rhombi sive potentia 2BR.

Demonst. Si BD, BE sint latera quadrati, erunt poten-
 tia BD, BE æquipollentes potentia 2BR (per prop. 2.) & si BS, BT bifecent angulos DBR, EBR, pariter potentia BS, BT æquivalent pot. 2BR (per prop. 4.) & bifecit rursus singulis angulis, erunt iterum potentia expressæ per novas lineas secantes terminatas a linea DE, sumtæ binæ æquipollentes potentia 2BR (per coroll. prop. 7.) Ergo cum detur progressio in infinitum liquet, non posse duas potentias exhiberi æquales intra terminos BD, BE concurrentes in B atque terminatas a linea DE, quæ

non æquivalentur potentiæ $2BR$. Duplicatis vero angulis inter BR & quamcunque BS seu BT , propositio quoque manifesta fit de illis potentiis, quæ transgrediuntur terminos BD , BE . Sicque tota demonstratio absoluta est.

Schol. Demonstrata compositione virium pro omnibus rhombis, valebit eadem pro omnibus reſtangu-
lis (per prop. 6.) atque pro omnibus parallelogrammis,
per coroll. 2. prop. 3.

Geminus Modus directus
DIVIDENDI SEMICIRCULVM

in data ratione :

Quibus Keplerianum Problema
DE INVENIENDIS PLANETARVM LOCIS
ad datum quodvis tempus,

Solutum exhibetur.

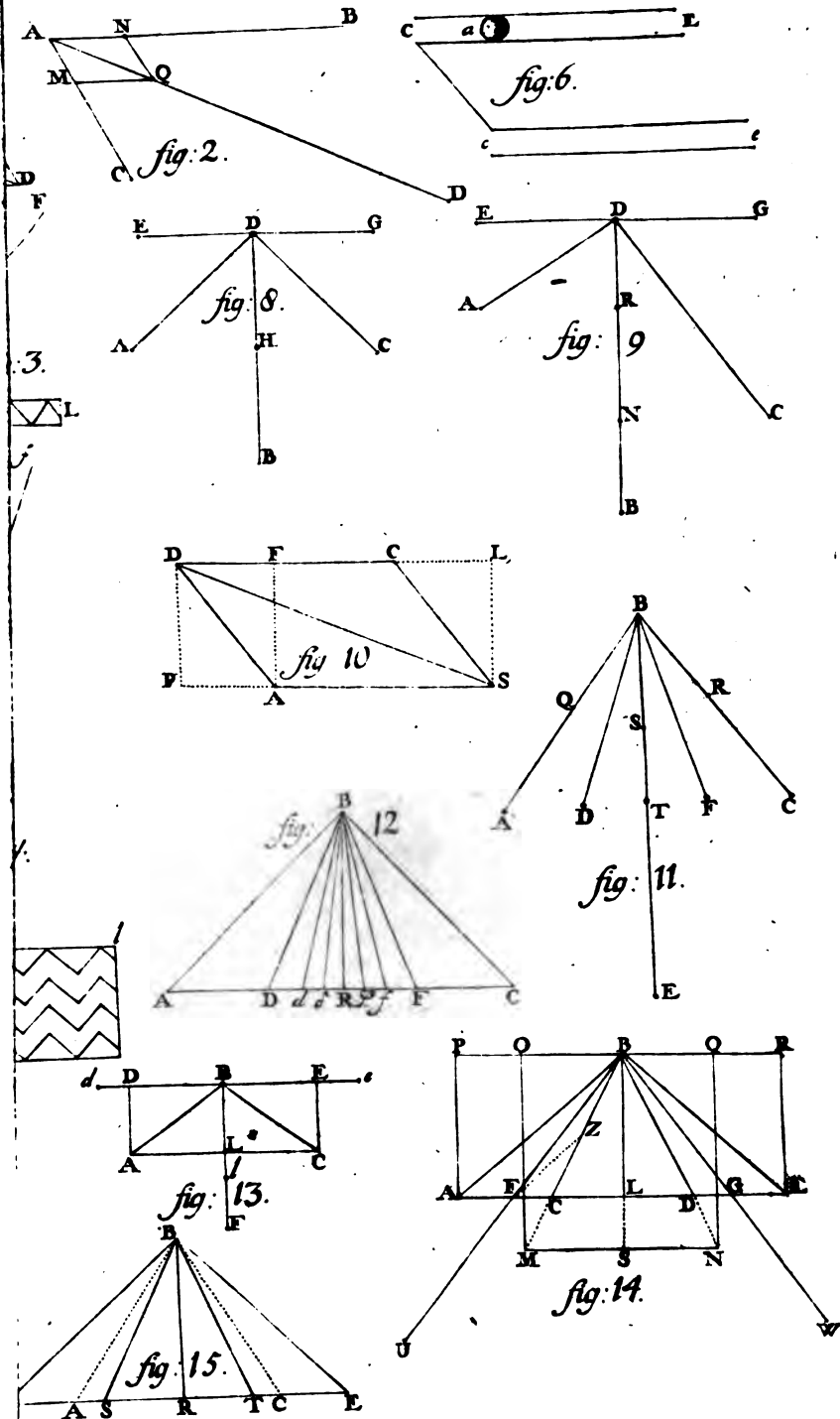
Auctore

Iac. Hermanno.

25. Febr.
1726.



Obannes Keplerus primus quod sciam do-
cuit planetarum semitam ellipticam esse,
& hos planetas ipsos in sua quemque or-
bita ita circumferri, ut areas verrant tem-
pori motionis proportionales. Pulchra
hæc reperta ex Tychonicis observationibus eruta calcu-
lo



lo sagaci industria posito & subducto, recentioribusque observationibus apprime consentanea, Astronomiæ planæ novam induxerunt faciem. In hac vero difficile sese offerebat problema solvendum, ad cuius solutionem nulla via Keplero patebat directæ, quamque proinde per regulam quam vocant *falsi* tentare coactus erat. Keplerus ad finem Partis IV. Commentarii in Stellam Martis fol. 300, problema his verbis enuntiat. *Data area partis Semicirculi, datoque puncto diametri invenire arcum, & angulum ad illud punctum: cuius anguli cruribus, & quo arcu, data area comprehenditur. Vel, Aream semicirculi ex quocunque puncto diametri in data ratione secare:* Subiungens: mihi sufficit credere, solvi a priori non posse propter arcus & sinus *ετερογενειαν*. Erranti mihi, quicumque viam monstraverit, is erit mihi magnus Apollonius.

2. Primus, quantum mihi constat, qui magni Apollonii laudem mereri conatus est, fuit *Christephorus Wrennus*, qui reapse viam directam inivit & problema ope Cycloidis protractæ construxit; *Wallisius* enim constructionem eius ad calcem tractatus de Cycloide prodidit, an vero eam potissimum viam, qualem *Keplerus* sibi monstrari optavit, prefferit, de eo valde dubito. Ipse enim *Cel. Newtonus* qui eandem fere constructionem Prob. 31. Lib. 1. *Princip. Pb. Nat.* repetiit, fassus est, propter difficilem curvæ huius descriptionem, præstare solutionem adhibere vero proximam, qualem per seriem quandam angulorum convergentem exhibuit, nescio tamen, an satis expeditam. Illustrem Geometram, ut in aliis, ita & hic imitati sunt *David Gregorius* & *Iob Keill* uterque enim problema Keplerianum per seriem infinitam solutum dedit, hic in Lectionibus Astronomicis, ille
vero

vero in Elementis Astronomiæ Geometricis. Citra ferierum usum vero eidem problemati solvendo incubuerunt Duumviri de Astronomia præclare meriti *Phil. de la Hire*, atque *Iacobus Cassinus*, & solutiones suas in Commentariis Academiæ Reg. 1710 & 1719 ediderunt. Alia comparuit in Tomo VI. Supplementorum ad acta Eruditorum Lipsiensia, Autore *Petro Horrebow*.

3. Supervacaneum forte videbitur, quod postquam hoc problema tot insignibus autoribus solutum est, id denuo in scenam producere audeam. Audebo tamen, nec hoc faciens actum agere existimo, cum diversi unum idemq; problema solvendi modi utilitate sua non destituantur. Geminum habeo, alterum mere geometricum, alterum vero arithmeticum calculoque astronomico magis accommodum. Problema quod præ manibus habemus est eiusmodi.

Dividere Semicirculum AQD per lineam BE ita, ut trilineum ABE sit ad semicirculum AQD, in data ratione DN ad DH=AD.

Constructio. Semicirculo DGH alteri AQD æquali inscribatur quadratrix DLGH talis indolis, ut ex quolibet eius puncto L ductis LK parallela diametro DH, & LM eidem perpendiculari, sit ubique arcus respondens huius divisionis, nempe DK, ad abscissam DM, ut DKG ad radium DI. Sumatur dein in radio CQ sursum producto & diametro perpendiculari, CP=quadranti AQ, & iungatur PE, ex puncto vero N agatur NL alteri EP parallela, quadratrici alicubi occurrens in L, ex quo puncto deinceps ducta LB diametro AD parallela, occurret semicirculo AQD in optato puncto B, iungendo enim BE, triangulum ABE erit ad semicirculum AQD in data ratione DN ad DH. De-

Demonstratio. Nam ex natura lineæ DLG fit AB (DK) : AQ (DG) :: DM : AC (DI), adeoque $AQ \times DM = AB \times AC = 2 \text{ Sect. } ABC$. Propter parallelas PE & LN, triangula PCE & LMN similia sunt, & præbent CP (constr. AQ) : CE :: LM (BF) : MN, quare $AQ \times MN = CE \times BF = 2 \Delta CEB$, & addendo $AQ \times DM + AQ \times MN = 2 \text{ Sect. } ABC + 2 \Delta CEB = 2 \text{ trilin. } ABE$, quare $AQ \times DN = 2 \text{ trilin. } ABE$; & 2 Semic. AQDA = $AQ \times AD$ vel $= AQ \times DH$; quare Trilineum ABE : Semicirc. AQDA (:: $AQ \times DN : AQ \times DH$) :: DN : DH. Quod erat &c.

Curva DLG est quidem transcendens, cum sit species lineæ *Sinum*, eo tamen rectius ad constructionem adhibetur, quanto facilius Cycloide protracta per puncta describi potest. Per continuam enim bisectionem quadrantis DKG eiusque partium, tot curvæ puncta & tam propinqua inveniri possunt, quot quis voluerit, ducendo tantum per singulas divisiones quadrantis lineas diametro parallelas & per similes divisiones radii DI lineas eidem diametro perpendiculares, occurfus harum perpendiclarium diametro, & illarum parallelarum, suppeditant totidem curvæ puncta.

Dixi curvam DLG speciem esse lineæ *Sinum*: nam LM est sinus arcus DK & DM huic arcui proportionalis, quare abscissæ DM arcus, & ordinatæ LM sinus eorum representant, & hanc ob rationem curva DLG est *linea sinuum*.

Hæc curva, quæ aliis Quadratrix Tschirnhausiana vocatur, quod mentio eius occurrat in *Tschirnhausii Medicina Mentis*, ubi aliquot eiusdem proprietates recensentur; hæc linea, inquam, egregium usum habet in con-

T

stru-

structionibus illorum problematum, quæ ab arcibus circularibus pendent, quod hæc ipsa constructio problematis Kepleriani probat.

Data constructio quoque arithmetica problematis solutionem subministrat. Nam vocando arcum $AB = a$, radium $AC = r$, sinum arcus $BF = s$, quadrantem $ABQ = q$, & tandem $DN = b$, ac $CE = e$, propter curvam DLG fiet $DM = \frac{ar}{q}$, triangula vero similia CPE , & MLN , præbent $MN = \frac{es}{q}$; quare cum fit $DM + MN = b$, fiet $\frac{ar + es}{q} = b$; vel $ar + es = bq$.

Iam vero per ea, quæ *II. Leibnitius* in *Actis Erudit.* 1693 pag. 179 ex calculo differentiali, & ego occasione problematis angularis per communem geometriam, in *Actis* 1703 pag. 351 elicitimus, est $s = a - \frac{a^3}{6rr} + \frac{a^5}{120r^4} - \frac{a^7}{5040r^6} + \&c.$ quare surrogando hanc sinus æstimationem in supra inventa æquatione $ar + es = bq$, habebimus $(r + e)a - \frac{a^3 e}{6rr} + \frac{a^5 e}{120r^4} - \frac{a^7 e}{5040r^6} + \&c. = bq$.

Si iam in hac serie omnes termini, excepto primo, evanescere intelligantur, resultabit $(e + r)a = bq$, hoc est analogia $AE : DN :: AQ : AB$, quæ analogia iam commodam præbet approximationem arcus AB .

Sin vero duo, tres, vel plures ex primis seriei terminis assumantur, orientur æquationes trium, quinque, septem, &c. dimensionum, quæ quidem usui Astronomico non videntur idoneæ. Quare progredior ad modum arithmeticum solvendi hoc idem problema.

5. In secunda figura, exprimat arcus AM anomalam

liam mediam, sitque CE eccentricitas, & iungatur ME ductaque ex centro C semicirculi linea CN parallela ipsi EM, ducatur EN: dico angulum AEN esse anomaliam coæquatam quam proxime: accuratius vero inuenietur hæc anomalia; si iam arcus NM vocetur a & radius AC = r , fiatque $x = \frac{aa}{6rr} - \frac{a^4}{120r^4} + \frac{a^6}{5040r^6}$

—&c. & angulus NEB = $NC^2 \times ax : BE^2$; Angulus AEB erit anomalia coæquata.

Nam trilineum NEB fiet = segmento circuli inter arcum NM & eius subtensam contento, quare cum triangula NEC & NMC super eadem basi NC & inter easdem parallelas NC, ME constituta æqualia sint, erit Sector AMC = trilineo ABE; atqui Sector AMC: Semicirc. AMDA :: AM : AMD; ergo etiam ANBE: Semic. AMDA :: AM : AMD. Hoc est in data ratione. Quod erat &c.

Quod ad angulum BEN attinet, inuenietur is ex eo, quod segmentum circuli inter arcum MN eiusque chordam MN æquari debeat sectori BEN. Iam segmentum illud æquat semissem facti ex differentia arcus MN eiusque sinus in radium CN. Verum cum arcus MN (*hyp.*)

sit a , eiusque sinus = $a - \frac{a^3}{6rr} + \frac{a^5}{120r^4} - \frac{a^7}{5040r^6} + \dots$

erit arcus MN — sinu eius = $\frac{a^3}{6rr} - \frac{a^5}{120r^4} + \frac{a^7}{5040r^6} - \dots$

&c. (hoc est propter $x = \frac{aa}{6rr} - \frac{a^4}{120r^4} + \frac{a^6}{5040r^6} - \dots$ &c.)

= ax . Sector vero BEN æquat semissem rectanguli ex NE in Bb, demissa ex B in EN perpendiculari; Sector enim

enim ob parvitatem anguli BEN instar trianguli rectilinei spectari potest, & perpendicularum Bb instar arcu centro E radio EB descripti. Quum autem segmentum NM æquare debeat sectorem BEN, erit $EN \times Bb = ax$ in CN; adeoque arcus $Bb = CN \times ax : EN$. Est vero ut EB ad arcum Bb , ita radius CN ad angulum BEN = $CN^2 \times ax : EB \times EN$, vel quia EN & EB iam instar æqualium tractari possunt, erit ideo angulus BEN = $CN^2 \times ax : EB^2$; ut ponebatur.

Exempl. Sit cum Keillio $CE = 0.01691$, existente $AC = 1$, quæritur anomalia cœquata AEB, si anomalia media $AM = 30^\circ$. Quare angulus $ACM = 30^\circ$, & in Δ^o MCE invenietur angulus $MEA = NCA = 29^\circ 31' 38'' =$ arcui AN; quare $NM = 28'. 22''$. In triangulo vero NCE, invenitur angulus $NEA = 29^\circ 3' 7''$, & hæc est anomalia cœquata; nam angulus NEB non æquabit 4 minuta quinta, adeoque attendi non meretur.

Tandem dicatur, ut sinus totus ad sinum anguli PCE (erecta nempe in E normali ad AD) ita tangens anguli inventi AEN vel AEB ad anomalam cœquatam in Ellipsi. Cl. Keil per suam seriem invenit angulum AEN, qualem hoc loco absque ullo usu seriei per solam resolutionem binorum triangulorum MCE & NCE, affecti sumus, usus enim præcedentis seriei mihi tantum monstravit, quantus debeat esse angulus NEB addendus iam invento NEA? cum vero is subducto calculo ne quidem ad 4 minuta quinta accedere inveniatur, merito contemnitur.

DE

DE
CALCULO INTEGRALI.

Auctore

Iacobo Hermanno.

M. Mai
1726.

Calculus Integralis inversus est Differentialis : nam modum docet, quo ex proposita quantitate infinitesimali, altera quantitas finita, cuius differentiatione orta est illa, elici debet, quoties hoc fieri potest. Nam non omnis quantitas differentialis integram algebraicam habet, sed sæpissime transcendentem, quæ per quadraturas tantum curvarum exhiberi potest, per artificia hætenus cognita. Itaque genuina methodus calculi integralis media suppeditare debet, quibus certo cognosci possit: an differentialis aliqua proposita integrabilis sit, an vero sæcus; & si primum obtinet, quænam sit eius summa algebraica; si vero talem non habeat, qualis sit figura simplicissima earum, quarum areæ exhibent integram quæsitam, idque non solum tam, cum data quantitas differentialis unicam indeterminatam cum constantibus involvit, sed tunc quoque, cum duas aut plures indeterminatas cum suis differentialibus complectitur. An vero methodus, quam hoc loco communicabo, ea, quæ requiri dixi, præstet, atque hanc ob causam generalis vocari mereatur, intelligentium iudicio & æquitati id omne diiudicandum relinquo.

PRÆNOTANDA.

1. Equationes integrandas sic generaliter deinceps

T 3

ex-

exprimam. 1°. per $du = R^\lambda dK$, 2°. $du = R^\lambda S^\mu dK$. 3°. $du = R^\lambda S^\mu T^\nu dK$, &c. & sic infinitum. In quibus R , S , T , &c. denotant quantitates una, duabus, aut pluribus indeterminatis ut libet compositas; elementum vero dK non modo easdem indeterminatas, quas quantitates R , S , T , &c. continent, involvere potest, sed etiam plures, aut subinde etiam secunda differentialia. Litteræ græcæ λ , μ , ν exponentes indefinitas quantatum R , S , T , designant, casibus particularibus deinceps definiendas.

2. Logarithmos quantatum quarumlibet per litteram l quantatibus illis præfixam, usitato more, posthac significabo, nisi aliquando expresse monendum sit alio sensu hanc litteram l adhiberi. Itaque lx , ly , lx^m significant logarithmos quantatum x , y , & x^m . &c.

3. Per litteram vero \int quantatibus differentialibus præpositam intelligi volo summam seu integrale quantatis, cui eadem littera est præfixa. Adeoque $\int R^\lambda dK$ denotat integralem vel summam elementi $R^\lambda dK$.

Lemma 1.

Integrale fractionis cuiusque $\frac{a dx}{x}$, cuius numerator est multiplum a elementi denominatoris, est logarithmus denominatoris x ad potestatem a evelti. Hoc est $\int \frac{a dx}{x} = lx^a$.

Lemma 2.

Quantitas absoluta, quæ competit seriei cuiuslibet logarithmorum signis + vel - quomodocunque conexorum, est factum singularum quantatum singulis logarithmis respondentium exponente affirmativa vel negativa affectarum, prout logarithmi earum signo affirmativo vel negativo præditi fuerint.

Quan-

Quantitas absoluta seriei $lx + ly - lz$ est $x^l y^l z^{-l}$, hoc est $\frac{x^l y^l}{z^l}$. Et quantitas absoluta huius $a/R + lM$ est $R^a M$.

Ambo hæc lemmata notiora sunt, quam ut demonstratione, cuilibet in hisce vel leviter tantum versato facillime invenienda, egeant, sed tanquam fundamenta sequentibus erant præmittenda.

Theorema 1.

Integralis æquationis $du = R^\lambda dK$, est $u = MR^{\lambda+1}$, in qua M datur per æquationem banc $dK = (\lambda+1) M dR + R dM$.

Hanc æquationem differentialem in sequentibus *Canonicam* vocabo, quia revera regulam suppeditat secundum quam æstimatio litteræ M tuto inveniri potest.

Dem. Differentiando æquationem $u = MR^{\lambda+1}$, fit $du = (\lambda+1)MR^\lambda dR + R^{\lambda+1} dM = [(\lambda+1)M dR + R dM] R^\lambda$ vel propter (*byp*) $dK = (\lambda+1) M dR + R dM$, habetur $du = R^\lambda dK$. Q. E. D.

Theorema 2.

Integralis æquationis $du = R^\lambda S^\mu dK$, est $u = MR^{\lambda+1} S^{\mu+1}$, & æquatio Canonica $dK = (\lambda+1) M S dR + (\mu+1) M R dS + R S dM$.

Dem. Aequatio $u = MR^{\lambda+1} S^{\mu+1}$ differentiata præbet $du = [(\lambda+1) M S dR + (\mu+1) M R dS + R S dM] R^\lambda S^\mu$, hoc est propter $dK = (\lambda+1) M S dR + (\mu+1) M R dS + R S dM$, fit $du = R^\lambda S^\mu dK$. Q. E. D.

Theorema 3.

Aequatio $du = R^\lambda S^\mu T^\nu dK$, *integrale* habet $u = R^{\lambda+1} S^{\mu+1} T^{\nu+1} M$, cuius æquatio Canonica est $dK = (\lambda+1) M S T dR + (\mu+1) M R T dS + (\nu+1) M R S dT + R S T dM$.

De-

Demonstratio huius eadem est ac præcedentium: & similis est processus in infinitum.

Scholium generale.

In applicatione horum theorematum ad exempla particularia tota difficultas in eo fita est, ut ex æquatione Canonica eliciatur æstimatione indeterminatæ M . Id autem hoc modo fit: Seligo in elemento dR aliquod membrum, in quo plures dimensiones respectu indeterminatarum insunt, quam in reliquis membris, & cum hoc membro omnia membra elementi dK divido, cum quibus hæc divisio succedit, nullaque habita ratione coefficientium & signorum, quantitibus per divisionem ortis præpono coefficientes indefinitas $A, B, C, D, \&c.$ & resultabit inde per additionem omnium, quantitas aliqua, quam voco Z , ponique postea debet $M = Z + N$, surrogando enim hanc æstimationem indeterminatæ M in æquatione canonica & conferendo terminos æquationis resultantis cum homologis terminis elementi dK , definientur æstimationes litterarum assumptiarum A, B, C, D .

Quod de elemento dR dictum est, similiter intelligendum est de factis $SdR, STdR, \&c.$ Hæc vero omnia exemplis multo magis illustrabuntur, quam prolixioribus præceptis.

Si fuerit simpliciter $dK = 0$, assumi potest quælibet quantitas R^λ , vel $R^\lambda S^\mu$ &c. prout hoc vel illud commodum videbitur, est enim etiam $R^\lambda dK$, vel $R^\lambda S^\mu dK$, &c. $= 0$. & $\int R^\lambda dK$ vel $\int R^\lambda S^\mu dK$, &c. æquabitur quantitati constanti. Sed veniendum ad exempla particularia.

Exemplum I.

Sit ergo $du = ax^m dx$, quæritur, quid sit u seu $\int ax^m dx$.

Si

— n —1. adeoque $du = R^\lambda dK$. invenire $u = \int R^\lambda dK$.

In hoc exemplo æquatio canonica fit $mx^{m-1}ydx - nx^m dy = -nMdy + ydM$. Hoc loco iterum dR unico membro dy constat, quare divido æstimationem ipsius dK per hoc elementum dy : in quantitate vero $dK = mx^{m-1}ydx - nx^m dy$ unicum membrum inest $-nx^m dy$, cum quo hæc divisio succedat, prodeunte quotu $-nx^m$, quare per monitum 1. Scholii generalis, nulla habita ratione signi — & coefficientis n , scribo Ax^m pro Z , fietque $M (=Z+N) = Ax^m + N$, & $dM = mAx^{m-1}dx + dN$. Quibus in æquatione canonica surrogatis, oritur $mx^{m-1}ydx - nx^m dy = mAx^{m-1}ydx - nAx^m dy - nNdy + ydN$, iam vero facta $A=1$, & destructis destruendis, manebit tantum $-nNdy + ydN = 0$, quare citra omnem scrupulum, pono iuxta monitum ad exempl. 1. datum, $N=0$, & $dN=0$; eritque adeo $M=x^m$, & $u = R^{\lambda+1} M = x^m y^{-n} = x^m : y^n$.

Exempl. 3.

Sit $du = x^3 dx : \sqrt{(aa - xx)}$, invenire $u = \int x^3 dx : \sqrt{(aa - xx)}$.

In hoc exemplo fit $dK = x^3 dx$, $R = aa - xx$, & $\lambda = -\frac{1}{2}$, quare æquatio canonica pro hoc exemplo, invenietur esse $x^3 dx = -Mxdx + (aa - xx)dM$. Est iam iterum in dR unicum membrum $-2xdx$, cum quo divido $dK = x^3 dx$, provenit $-\frac{1}{2}xx$. Quare neglecta coefficiente $-\frac{1}{2}$, scribo $Z = Axx$, & $M (=Z+N) = Axx + N$, & $dM = 2Axdx + dN$; quibus in æquatione canonica suffectis, prodit $x^3 dx = -3Ax^3 dx + 2aaAxdx - Nxdx + (aa - xx)dN$. Quare posita $1 = -3A$, id est $A = -\frac{1}{3}$, remanebit destructis destruendis, hæc altera $-\frac{2}{3}aaxdx - Nxdx + (aa - xx)dN = 0$, vel $\frac{2}{3}aaxdx$

$= -Nxdx + (aa - xx)dN$. Tractetur hæc remanens æquatio, instar præcedentis æquationis canonicæ; hoc est, dividatur $\frac{2}{3} aaxdx$ per xdx , quia inest æquationi membrum $-Nxdx$, in quo æstimatio litteræ N quæritur, proveniet in quotiente quantitas constans $\frac{2}{3} aa$, quare pono $N = B + O$. & $dN = dO$, quibus in æquatione suffectis nascetur $\frac{2}{3} aaxdx = -Bxdx - Oxdx + (aa - xx)dO$, quare facta $B = -\frac{2}{3} aa$, remanebit æquatio $-Oxdx + (aa - xx)dO = 0$, quare O & dO nihilo æqualia ponenda, adeo ut sit $N = B = -\frac{2}{3} aa$; hinc derivatur $M (= Z + N) = Ax + B = -\frac{1}{3} xx - \frac{2}{3} aa$. Adeoque $u (= MR^{\lambda + 1}) = -[(xx + 2aa)\sqrt{(aa - xx)}]: 3$.

Exemplum 4.

Sit generalius $du = x^{nm-1} dx (a + bx^m)^p$

Habemus ergo $dK = x^{nm-1} dx$, $R = a + bx^m$ & $\lambda = p$, & æquatio generalis Canonica nunc mutabitur in $x^{nm-1} dx = (p+1)bm Mx^{nm-1} dx + (a + bx^m)dM$, & quia in quantitate $(p+1)bm Mx^{nm-1} dx$ inest $x^{nm-1} dx$, dividatur quantitas $x^{nm-1} dx$ per $x^{nm-1} dx$, quotiens reperietur x^{nm-m} , quare facio $M = Ax^{nm-m} + N$, & $dM = nm - m Ax^{nm-m-1} dx + dN$ quibus in æquat. canonica suffectis habetur $x^{nm-1} dx = (p+n)bm Ax^{nm-1} dx + (nm-m)a Ax^{nm-m-1} dx + (p+1)bm Nx^{nm-1} dx + (a + bx^m)dN$. Quare facta $A = \frac{1}{(p+n)bm}$, fiet $(m-nm)a Ax^{nm-m-1} dx = (p+1)bm Nx^{nm-1} dx + (a + bx^m)dN$.

Fiat $N = Bx^{nm-2m} + O$, & $dN = (nm-2m)Bx^{nm-2m-1} dx + dO$, quibus in æquatione canonica secunda, quæ successit in locum primæ, surrogatis, resultat $(m-nm)a Ax^{nm-m-1} dx = (p+n-1)bm Bx^{nm-m-1} dx + (nm-2m)a Bx^{nm-2m-1} dx + (p+1)bm O x^{nm-1} dx +$

V 2

(a +

$(a+bx^m) dO$. Quare existente $B = (m-nm) aA$: $(p+n-1)bm$ inveniatur tertia æquatio canonica $(2m-nm) aBx^{nm-2m-1} dx = (p+1)bmOx^{m-1} dx + (a+bx^m) dO$.

Ponatur tertio $O = Cx^{nm-3m} + P$, & $dO = (nm-3m) Cx^{nm-3m-1} dx + dP$. Quare tertia æquatio canonica mutabitur in

$(2m-nm) aBx^{nm-2m-1} dx = (p+n-2) bmCx^{nm-2m-1} dx + (nm-3m) aCx^{nm-3m-1} dx + (p+1) bmCPx^{m-1} dx + (a+bx^m) dP$. Idcirco facta $C = (2m-nm) aB : (p+n-2) bm$, inveniatur quarta $(3m-nm) aCx^{nm-3m-1} dx = (p+1) bmPx^{m-1} dx + (a+bx^m) dP$.

Simili progressu pervenietur tandem ad æquationem aliquam canonicam $(em-nm) a\Delta x^{nm-em-1} dx = (p+1)bm Zx^{m-1} dx + (a+bx^m) dZ$. In hac vero est e , terminus quicunque seriei numerorum naturalium 1, 2, 3, &c. Δ est terminus seriei coefficientum A, B, C, D cuius ordinem indicat numerus integer $e+1$. Ac denique Z est terminus seriei indeterminatarum M, N, O, P &c. cuius idem ordo est $e+1$. Sit $R = a+bx^m$, & ultima hæc æquatio canonica mutabitur in æquationem $(em-nm) a\Delta x^{nm-em-1} dx = (p+1)ZdR + RdZ$, ducatur hæc in R^p , fietque $(em-nm) a\Delta x^{nm-em-1} dx (a+bx^m)^p = (p+1)R^p ZdR + R^{p+1} dZ$, & integrando $R^{p+1} Z = \int (em-nm) a\Delta x^{nm-em-1} dx (a+bx^m)^p$ dicatur hoc $= Y$, eritque adeo $Z = Y : R^{p+1}$.

Expansis iam omnibus fiet

$$M = Ax^{nm-m} + Bx^{nm-2m} + Cx^{nm-3m} + \&c... \Delta x^{nm-em} + YR^{-p-1}$$

$$\text{quare } u (= MR^{p+1}) = (Ax^{nm-m} + Bx^{nm-2m} + Cx^{nm-3m} + \&c + \Delta x^{nm-em}) (a+bx^m)^{p+1} + Y$$

ubi sunt

$A =$

$$A = (p+n)bm$$

$$B = (m-nm)aA:(p+n-1)bm = (1-n)aA:(p+n-1)b$$

$$C = (2m-mn)aB:(p+n-2)bm = (2-n)nB:(p+n-2)b$$

&c. &c.

$$\Delta = (em-m-mn)a\Gamma, (p+n-e+1)bm = (e-n-1)a\Gamma:(p+n-e+1)b$$

ubi Γ est coefficientis, quæ ultimam Δ præcedit.

Formula igitur gemino casu integrabilis fiet

1^o. Si n sit quilibet numerus integer affirmativus, seu $n=e$, tunc enim fiet $Y=0$, adeoque $u = (Ax^{nm-m} + Bx^{nm-2m} + \&c. + \Delta)(a+bx^m)^{p+1}$

2^o. Si $n-p=e$ seu cuilibet integro affirmativo æqualis, fiet enim hoc casu $u = (Ax^{mn+mp+m} + Bx^{mn+mp+2m} + \&c. + \Delta)(b+ax^{-m})^{p+1}$

in qua sunt $A = -1:mn a$, $B = (1+p+n)bA:-(n+1)a$

$C = (2+p+n)bB:-(n+2)a, \&c.$

Huius rei ratio est, quia $du = x^{m-1}dx(a+bx^m)^p$ mutari potest in hanc quoque $du = x^{nm+p-1}dx(b+ax^{-m})^p$. Sed hic posterior integrabilitatis casus tantum obtinet, cum p est integer negativus, & n integer.

Nam, quia $du = x^{qr-1}dx(b+ax^q)^p$ eiusdem formæ est cum hac $du = x^{mn-1}dx(a+bx^m)^p$, ea integrabilis erit per casum priorem, si r fuerit numerus integer affirmativus; iam si in æquatione $du = x^{mn+mp-1}dx(b+ax^{-m})^p$ ponantur $m = -q$, & $n+p = -r$, mutabitur hæc æquatio in $du = x^{qr-1}dx(b+ax^q)^p$, quæ proinde integrabilis fiet, cum $r = n+p$ æquat numerum quemcunque integrum affirmativum, hoc autem fieri nequit, nisi n fuerit numerus integer, & p quoque, sed negativus.

3^o. Item æquatio $du = x^{bm}dx(a+bx^m)^p$ integrabilis fiet, si p fuerit $= -e - k - \frac{1}{m}$ existente e numero integro. Nam $x^{bm}dx(a+bx^m)^p = x^{bm+2m}dx(b+ax^{-m})^p$,

quare ponendo $m = -q$, & $p = -e - b + \frac{1}{q}$, mutabitur $x^{bm+pm} dx (b+ax^{-m})^p$ in $x^{e q-1} dx : (b+ax^q)^{p+b-\frac{1}{q}}$, quæ per casum primum algebraice integrabilis est. In hoc casu numerus b non est necessario integer, potest enim esse fractus quicumque

4^o. Si in formula $du = x^{nm-1} dx (a+bx^m)^p$, sit $n = b + \frac{l+1}{m}$, mutabitur in sequentem $du = x^{bm+l} dx (a+bx^m)^p$, cuius integralis erit $u = (Ax^{nm-m} + Bx^{nm-2m} + \&c. + \Delta x^{nm-em}) (a+bx^m)^{p+1} + \gamma$

Iam si b fuerit cuilibet numero integro affirmativo e æqualis, fiet $em - nm = -l - 1$, & $nm - em = l$, adeoque $Y = -(l+1) \int a \Delta x^l dx (a+bx^m)^p$. adeoque integrale est

$u = (Ax^{bm-m+l+1} + Bx^{bm-2m+l+1} + \&c. + \Delta x^{l+1}) (a+bx^m)^{p+1} - (l+1) \int a \Delta x^l dx (a+bx^m)^p$. Verum $\int x^l dx (a+bx^m)^p = \int (ax^l + bx^{m+l}) dx (a+bx^m)^{p-1} = \int (aax^l dx + 2abx^{m+l} dx + b^2 x^{2m+l} dx) (a+bx^m)^{p-2} = \int (a^3 x^l dx + 3a^2 abx^{m+l} + 3abbx^{2m+l} dx + b^3 x^{3m+l}) x dx (a+bx^m)^{p-3}$ atque ita porro : unde si p fuerit integer affirmativus, mutabitur $\int x^l dx (a+bx^m)^p$ in $\int a^{p-1} x^l dx + (p-1) a^{p-2} bx^{m+l} dx + \frac{p-1 \cdot p-2}{2} a^{p-3} b^2 x^{2m+l} dx + \&c.) x (a+bx^m)$ quod integrale vero per præcedentia dependet a serie quantitatum absolute integrabilium $+ Q \int x^l dx (a+bx^m)$ ubi Q est quantitas constans ex actuali evolutione formulæ oriunda.

Sed quid eveniet, si p sit numerus integer, sed negativus? Hæc formula $du = x^l dx (a+bx^m)^{-p}$ etiam transformari potest in

$du = (Ex^l + Fx^{m+l} + Gx^{2m+l} + \&c.) dx : (a+bx^m)$ cuius integralis dependet iterum a serie quantitatum absolute inte-

integrabilium $+Q/x^1 dx: a+bx^m$.

Hac ergo ratione huic unico exemplo inclusa sunt singula septem theoremata, quæ in Actis Erudit. 1719. sine demonstratione publicata sunt pag. 269. & theorema octavum inde etiã derivari potest. Scio quidem demonstrationes horum theorematum iam exhibitas fuisse tum a *Bülfingero* nostro, tum etiã a *Nicolao Bernoulli* V. V. C. C. pag. 467. sq. *Act. Erud.* 1720; non inconsultum tamen duxi theorema nostrum generale ad hæc ipsa applicare.

Exemplum 5.

Sit, $du=3k dz-lz dz:zz\sqrt{(kz-lz^3+ mz^4)}=-lz^{-\frac{1}{2}} dz$
 $+3kz^{-\frac{5}{2}} dz:\sqrt{(mz^3-lz z+k)}$ adeoque $dK=-lz^{-\frac{1}{2}} dz+$
 $3kz^{-\frac{5}{2}} dz$, $R=mz^3-lz z+k$, & $\lambda=-\frac{1}{2}$; quare æquatio canonica nunc est $dK=\frac{1}{2}M dR+R dM$. Est vero $dR=$
 $3mz dz-2l z dz$, dividatur ergo secundum monitum primum Scholii generalis membrum $-lz^{-\frac{1}{2}} dz$ quantitatis dK per membrum $-2l z dz$ quantitatis dR , orietur in quotiente neglectis signo & coefficiente $z^{-\frac{3}{2}}$, quare pono $M=Az^{-\frac{3}{2}}+N$, & $dM=-\frac{3}{2}Az^{-\frac{5}{2}} dz+dN$, quibus in canonica surrogatis, prodit $-lz^{-\frac{1}{2}} dz+3kz^{-\frac{5}{2}} dz=\frac{1}{2}Az^{-\frac{1}{2}} dz-$
 $\frac{3}{2}kAz^{-\frac{5}{2}} dz+\frac{1}{2}N dR+R dN$. Quare posita $A=-2$, æquatio hæc destructis destruendis præbebit $\frac{1}{2}N dR+R dN=0$. Propterea per monitum ad exempl. primum, fient N & $dN=0$, atque adeo $M=-2z^{-\frac{3}{2}}$ adeo-

deoque $u (=MR^{\lambda+1}) = -2R^2 z^{-\frac{3}{2}} = -2\sqrt{mz^3 - lz^2 + k} : \sqrt{z^3}$.

Exemplum 6.

Sit $du = (z^5 dz + z^4 dz - 8z^3 dz)(z^5 + z^4 - 5z^3 + 8z - 4)$, id est $= (z^5 dz + z^4 dz - 8z^3 dz)(z-1)^3 \cdot (z+2)^2$. Iam cum in denominatore sint duo factores $(z-1)^3$ & $(z+2)^2$, adhibendum est Theorema secundum, in quo iam $dK = z^5 dz + z^4 dz - 8z^3 dz$, $R = z-1$, & $S = z+2$, item $\lambda = -3$ & $\mu = -2$, itaque nunc fiet æquatio canonica $dK = -2MSdR - MRdS + RSdM$, id est, $z^5 dz + z^4 dz - 8z^3 dz = -(3zdz + 3dz)M + (zz + z - 2)dM$. Quare faciendo $M = Az^4 + Bz^3 + Czx$, & $dM = 4Az^3 dz + 3Bz^2 dz + 2Czdz$, & substitutis hisce in æquatione canonica, fiet $z^5 dz + z^4 dz - 8z^3 dz = Az^5 dz + Az^4 dz - (8A + C)z^3 dz - (6B + C)z^2 dz - 4Czdz$.

Comparationes terminorum homologorum præbent $A = 1$, $B = 0$, & $C = 0$, quare habebimus $M = z^4$. Adeoque $u (=MR^{\lambda+1}S^{\mu+1}) = (z-1)^{-2} \cdot (z+2)^{-1} z^4 = z^4 : z^3 - 3z + 2$.

Exemplum 7.

Sit $du = (3q^5 dx - q^4 x dx + 9q^3 x dx - q^2 x^2 dx - 6q^2 x dx) : (qq - xx)\sqrt{(q^3 + qqx - qxx - x^3)}$. Iam, quia $\sqrt{(q^3 + qqx - qxx - x^3)} = (q+x)^{\frac{3}{2}} \cdot (q-x)^{\frac{1}{2}}$; fiet $du = (3q^5 dx - q^4 x dx + 9q^3 x dx - q^2 x^2 dx - 6q^2 x dx) : (q+x)^{\frac{3}{2}} \cdot (q-x)^{\frac{1}{2}}$. Quare nunc habemus $dK = 3q^5 dx - q^4 x dx + 9q^3 x dx - \&c.$ $R = q+x$, $S = q-x$, $\lambda = -\frac{5}{2}$, $\mu = -\frac{1}{2}$, & æquationem canonicam $dK = -\frac{3}{2}MSdR - \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{3}MRdS + RSdM$. Hoc est $3q^3 dx - q^4 x dx + 9q^3 x dx - qqx^3 dx - 6qx^4 dx = (-\frac{1}{3}q dx + x dx) M + (qq - xx) dM$.
 Quare si fiat $M = A + Bx + Cxx + Dx^3$ æquatio canonica mutabitur in

$$3q^3 dx - q^4 x dx + 9q^3 x dx - qqx^3 dx - 6qx^4 dx \\
 = -\frac{1}{3}qAdx + Ax dx - \frac{1}{3}qCxx dx - Cx^3 dx - 2Dx^4 dx \\
 + qqB - \frac{1}{3}qB + 3qqD - \frac{1}{3}qD \\
 + 2qqC$$

Ex collatione terminorum homologorum eliciuntur æstimationes coefficientum, quales sequuntur. $D = 3q$, $C = 0$, $B = 3q^3$ & $A = 0$. Quare invenitur

$$u = (3q^3 x + 3qx^3) : \sqrt[3]{(q^3 + qqx - qxx - x^3)}$$

Exempla proxime antecedentiã 5, 6, & 7^{um}. mutuo sumfi ex *Newtoni tractatu de Quadraturis*, quibus Celeberr. Auctor seriem suam Theoremate III. pro quadraturis exhibitam, illustravit. Sed quid vetat, quominus hanc seriem ipsam ex primo nostro theoremate derivemus? Est ergo

Exemplum 8.

Sint $R = e + fz^2 + gz^2 + bz^3 + \&c.$ dein $Z = a + bz^2 + cz^2 + dz^3 + \&c.$ & $du = R^{l-1} Zz^{m-1} dz$. Invenire integralem huius formulæ.

Est itaque $dK = Zz^{m-1} dz$, $\lambda = l - 1$, & per theor. I. æquatio canonica $Zz^{m-1} dz = lMaR + RdM$. Ponamus iuxta præcedentiã $M = Az^m + Bz^{m+2} + Cz^{m+2} + Dz^{m+3} + \&c. + N$, eritque

$$M = meAz^{m-1} dz + (m+q).eBz^{m+2-1} dz + (m+2q).eCz^{m+2-1} dz + \&c. RdN \\
 + mfA \quad \quad \quad + (m+q).fB \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + mgA \\
 R = + flqAz^{m+2-1} dz + 2glqAz^{m+2-1} dz + \&c. + lNdR \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + flqB \\
 X$$

Ergo

Ergo æquatio canonica mutatur in sequentem :

$$\begin{aligned}
 & a z^{m-1} dz + b z^{m+q-1} dz + c z^{m+2q-1} dz + \&c. = \\
 & m e A z^{m-1} dz + (l q + m) f A z^{m+q-1} dz + (2 l q + m) g A z^{m+2q-1} dz + l N dR + R dN \\
 & \qquad \qquad \qquad + (m + q) e B \qquad \qquad \qquad + (l q + m + q) f B \\
 & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + (m + 2 q) e C
 \end{aligned}$$

Iam comparatio terminorum homologorum præbet :

$$\begin{aligned}
 A &= \{ a \text{ --- } \} : (m + 0 q) e \\
 B &= \{ + b - (l q + m) f A \text{ --- } \} : (m + q) e \\
 C &= \{ + c - (2 l q + m) g A - (l q + m + q) f B \text{ --- } \} : (m + 2 q) e \\
 D &= \{ d - (3 l q + m) b A - (2 l q + m + q) g B - (l q + l + 2 q) f C \text{ --- } \} : (m + 3 q) e
 \end{aligned}$$

Hæc determinaciones cum *Newtonianis* ad amussim consentiunt.

Verum, quia in ultima æquatione canonica semper aliqua membra remanent, quorum ratio est habenda, adeoque vocabimus hæc membra $G z^{m+4q-1} dz + H z^{m+5q-1} dz + I z^{m+6q-1} dz$, eritque ultima æquatio canonica $- G z^{m+4q-1} dz - H z^{m+5q-1} dz - I z^{m+6q-1} dz = l N dR + R dN$. Ex hac vero elicitur

$$\begin{aligned}
 & - f (G z^{m+4q-1} dz + H z^{m+5q-1} dz + I z^{m+6q-1} dz) R^{l-1} \\
 & = N R^l, \text{ quare vocando } dY = G z^{m+4q-1} dz + H z^{m+5q-1} dz \\
 & \quad + I z^{m+6q-1} dz, \text{ habebimus } N = -Y R^{-l}, \text{ adeoque} \\
 & M = (A + B z^q + C z^{2q} + D z^{3q}) Z^m - Y R^{-l}, \text{ quare inte-} \\
 & \text{grale quæsitum erit } u = (A + B z^q + C z^{2q} + D z^{3q} + \&c.) \\
 & \quad Z^m R^l - Y
 \end{aligned}$$

Ubi quidem sunt

$$\begin{aligned}
 G &= (3 l q + m + q) b B + (2 l q + m + 2 q) g C + (l q + m + 3 q) f D. \\
 H &= (3 l q + m + 2 q) k C + (2 l q + m + 3 q) g D \\
 I &= (3 l q + m + 3 q) b D.
 \end{aligned}$$

In casu, quo series R finitur termino, cuius coefficientis est

est *b*. In aliis casibus omnibus æstimationes litterarum *G*, *H*, *I*, &c. facili negotio obtinebuntur.

Si series $A + Bz^q + Cz^{2q} + Dz^{3q} + \&c.$ alicubi abrupta est, *Y* fiet = 0, adeoque formula absolute integrabilis erit.

Non ab simili modo ex theoremate nostro secundo derivare licet Theorema IV. *Newtoni* Propositione VI^{ta} *Tract. de Quadraturis* exhibitum, sed quia hæc deductio prolixiorum deponit calculum, ab ea nunc abstinerebo.

Pergam ergo ad illustrationem theorematum nostrorum per exempla quantitatum differentialium, duas aut plures indeterminatas varie inter se mixtas, vel subinde secunda differentialia involventium, qualia non mihi ipsi ad arbitrium finxi, sed ab amico mihi sine integralibus suppeditata vel aliunde desumpta sunt. Ad talia enim perinde sese extendit ac ad ea, quæ in superioribus tractavi. Cuius rei leve specimen exemplo secundo superiori iam exhibui.

Exemplum 9.

Sit $du = 3a^3yydy - 6aaxxydy + 3ax^4dy - 6aaxydx + 12ax^3ydx - 6x^5dx.$

Hæc æquatio æquivalet alteri $du = (3a^3x^{-5}yydy - 6aax^{-3}ydy + 3ax^{-1}dy - 6aax^{-4}yydx + 12ax^{-2}ydx - 6dx) x^5.$ Quo casu fit $dK = 3a^3x^{-5}yydy - 6aax^{-3}ydy + 3ax^{-1}dy - 6aax^{-4}yydx + 12ax^{-2}ydx - 6dx$, $R = x$, $\lambda = 5$, & æquatio canonica $dK = 6Mdx + x dM$. Iam ut inveniri possit, quid sit *M*, in quantitate *dK* divido per *dx* omnia illa membra in quibus *dx* inest, prodibunt neglectis coefficientibus & signis $x^{-4}yy$, $x^{-2}y$ & 1, quare pono $M = Ax^{-4}yy + Bx^{-2}y + C + N$. Hoc autem valore litteræ *M*, eiusque elementi *dM*, in canonica substitutis proveniet æquatio:

X 2

+3

$$\begin{aligned}
 &+ 3a^3 x^{-6} yy dy - 6aax^{-3} y dy + 3ax^{-1} dy - 6aax^{-4} yy dx \\
 &+ 12ax^{-2} y dx - 6dx \\
 &= 2Ax^{-3} y dy + Bx^{-1} dy + 2Ax^{-4} yy dx + 4Bx^{-2} y dx \\
 &+ 6C dx + 6N dx + x dN
 \end{aligned}$$

Comparatio terminorum homologorum præbet,

$$A = -3aa, B = 3a, C = -1, \text{ \& remanebit æquatio sequens}$$

$$3a^3 x^{-6} yy dy = 6N dx + x dN.$$

Ducatur hæc æquatio in x^6 , provenietque $3a^3 yy dy = 6Nx^6 dx + x^6 dN$. Utraque pars huius æquationis est integrabilis, inveniatur enim integralis eius

$$a^3 y^3 = Nx^6. \text{ Habemus ergo } N = a^3 x^{-6} y^3, \text{ adeoque}$$

$$M (= Ax^{-4} yy + Bx^{-2} y + C + N) = -3aax^{-4} yy + 3ax^{-2} y - 1 + a^3 x^{-6} y^3, \text{ adeoque}$$

$$u (= MR^6 = Mx^6) = -3aaxxyy + 3ax^4 y - x^6 + a^3 y^3$$

$$= a^3 y^3 - 3aaxxyy + 3ax^4 y - x^6 = (ay - xx)^3.$$

Hoc idem integrale invenissemus ponendo $dK = 3ayy dy - 6aaxxy dy + 3ax^4 dy - 6aaxy dx + 12ax^3 y dx - 6x^6 dx$.

Dein $R = x$ vel $= y$, sed $\lambda = 0$, adeoque $\lambda + 1 = 1$.

Exemplum 10.

$$\text{Sit } du = \left(-\frac{3}{2}cyy dy + \frac{3}{10}abbty^{-1} dy\right) \sqrt[4]{(a^3 b - 2cy^3 + 3abbt)^3}$$

existente $t = \sqrt[4]{accyy}$. Hoc loco est $dK = -\frac{3}{2}cyy dy + \frac{3}{10}abbty^{-1} dy, R = a^3 b - 2cy^3 + 3abbt, \lambda = -\frac{3}{4}$, adeoque $\lambda + 1 = \frac{1}{4}$. & æquatio canonica $dK = \frac{1}{4}M dR + R dM$. Nunc vero, quia $\frac{1}{4}dR = dK$, erit $M = 1$, adeoque $u (= MR^{\frac{1}{4}}) = \sqrt[4]{(a^3 b - 2cy^3 + 3abbt)}$.

Exemplum 11.

$$\text{Si } du = (2axyy dx + cxyy dy - cy^3 dx - 2ccyy dy - 4aaxy dx + 4ax^3 dy + 8ccyy dx - 2aaxy dy) : (y^4 - 8xy^3 + 16xxyy).$$

Quoniam $y^4 - 8xy^3 + 16xxyy$ est quadratum, cuius radix est

est

est $yy - 4xy$; fiat $R = yy - 4xy$, $\lambda = -2$, & $dK = 2axy y dx + cxy y dy - cy^3 dx - 2ccy y dy - 4axxy dx + \&c.$ & æquatio canonica fiet, $dK = -M dR + R dM$. Est vero $dR = 2y dy - 4y dx - 4x dy$. Respicio nunc ad omnia membra quantitatis dK , quæ per $y dx$ dividi possunt, & præscindendo a coefficientibus & signis, inveniuntur quoti xy, yy, xx, y . Pono ideo

$M = Ay + Bxy + Cxx + Dyy$, & inveniemus æquationem canonicam mutari in æquationem

$$\begin{aligned} &+ 2axy y dx + cxy y dy - cy^3 dx - 2ccy y dy - 4axxy dy \\ &+ 4ax^3 dy + 8ccy y dx - 2axxy dy = + 2Cxy y dx - Bxy y dy \\ &+ 4D \\ &+ By^3 dx - Ayy dy - 4Cxy y dy + 4Cxx dy + 4Ayy dx \\ &+ 6D \\ &- 2Cxy y dy - 2Dy^3 dy \end{aligned}$$

Ex comparatione terminorum elicientur $A = 2sc, B = -c, C = a$, & $D = 0$, quare fit $M = 2ccy - cxy + axx$, adeoque $\alpha (=MR^{-1}) = (2ccy - cxy + axx) : (yy - 4xy)$.

Exemplum 12.

Si $du = (4xyz dy - xxz dx - x^3 dz + 2xy^2 z dx + 2xyz dx - 2y^2 z dy - 2y^2 z dx - 2y^3 dz - xz^2 dy + x^2 y dz; R = x - y, \lambda = -2$
 $(xx - 2xy + yy).$

Erunt $dK = 4xyz dy - x^2 z dx - x^3 dz + 2xy^2 dz + 2xyz dx - 2y^2 z dy - 2y^2 z dx - 2y^3 dz - xz^2 dy + x^2 y dz; R = x - y, \lambda = -2$ adeoque æquatio canonica fit $dK = -M dR + R dM$. Iuxta superiora inveniatur sumendum esse $M = Ax^2 z + Bxyz + Cy^2 z$, ope huius mutabitur canonica in æquationem cuius termini homologi inter se comparati præbebunt $A = -1, B = 0$, & $C = 2$, adeoque $M = -xxz + 2yyz$, & $\alpha (=MR^{-1}) = 2yyz - xxz : x - y$.

X 3

Ex-

Exemplum 13.

Si $-addx = (ydx - xdy)^2 x : (xx + yy)^{\frac{3}{2}}$, in hypothesi quod $ydx - xdy$ sit constans. Integrabitur ponendo $du = -addx : ydx - xdy$, $R = xx + yy$, $\lambda = -\frac{3}{2}$, & $\lambda + 1 = -\frac{1}{2}$ adeoque æquatio canonica pro hoc exemplo inveniatur esse $dK = -\frac{1}{2} M dR + R dM$, atque adeo $xydx - xxdx = (-xdx - ydy) M + (xx + yy) dM$; Fiat $M = Ay$, & mutabitur æquatio in $xydy - xxdy = -Axydx + Axxydy$. Quare $A = -1$. & $u (= MR^{-\frac{1}{2}}) = -y : V(xx + yy)$.

Atqui propter differentiale constans $ydx - xdy$, erit etiam $u = -adx : ydx - xdy$ quare $\frac{-adx}{ydx - xdy} = \frac{-y}{\sqrt{(xx + yy)}}$; hinc $adx = \frac{yydx - xdy}{\sqrt{(xx + yy)}}$, vel $abdx = \frac{byydx - bxydy}{\sqrt{(xx + yy)}}$ ducatur in x^{-2} fiet $-abx^{-2} dx = (bx^{-1} ydy - bx^{-2} yydx) : V(xx + yy)$; si nunc iterum sit $R = xx + yy$ fiet pro hac æquatione competens æquatio canonica $bx^{-1} ydy - bx^{-2} yydx = (ydy + xdx) M + (xx + yy) dM$; quare si ponatur $M = bx^{-1}$, æquatio hæc fiet identica; est ergo $c + \frac{ab}{x}$, integrale ipsius $-abx^{-2} dx = MR^{\frac{1}{2}}$, id est $\frac{b\sqrt{(xx + yy)}}{x}$. Quæ æquatio est ad sectiones conicas.

Exemplum 14.

Si $f dx = (dxdy^3 + dx^3 dy - xdx dy ddx + x dx^2 ddy) : 2x^3 dy^3$. Integrare æquationem. Pone $dK = \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} dx^3 dy^{-2} - \frac{1}{2} x dx dy^{-2} ddx + \frac{1}{2} x dx^2 dy^{-3} ddy$, $R = x$, & $\lambda = -3$, adeoque $\lambda + 1 = -2$. Quare æquatio canonica nunc fit $dK = -2M dx + x dM$. Elicietur ergo $M = A + B dx^2 ay^{-2}$. Ope huius vero æquatio canonica abit in

 $\frac{1}{2} dx$

$$\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dx^3 dy^{-2} - \frac{1}{2}xdxdy^{-2} ddx + \frac{1}{2}xdx^2 dy^{-3} ddy$$

$$= -2A dx - 2Bxdxdy^{-2} ddx - 2Bxdx^2 dy^{-3} ddy, \text{quare } A = -\frac{1}{4},$$

$$B = -\frac{1}{4} \& \int dx = -\frac{1}{4xx} - \frac{dx^2}{4xxdy^2}, \text{ vel addita constanti } n.$$

$$\int dx = (4nxxdy^2 - dx^2 - dy^2) : 4xxdy^2.$$

Videantur ad hæc duo postrema exempla, *les Memoires de l'Acad. Royale des Sciences* 1710. circa finem.

DE INTEGRATIONIBVS AEQVA- TIONVM DIFFERENTIALIVM,

ubi traditur

METHODI ALCIVIVS SPECIMEN INTEGRANDI

sine prævia separatione indeterminatarum:

Auctore Joh. Bernoulli.

I.



Quando æquatio aliqua differentialis primi *M. Iun.*
gradus reducta habetur ad $pdx = qdy$, ubi *1726.*

p datur per x , & q per y , hoc est, meo loquendi more, ubi p & q sunt functiones qualescunque datæ indeterminatarum x & y ;

eo casu constructio æquationis nulla premitur difficultate, concessis nimirum quadraturis; quæ & ipsæ generaliter ad extensiones curvarum algebraicarum non ita pridem reductæ sunt, vid. Cel. Hermannii schediasma in actis Lipsi. 1723. meumque de hac materia analytice tractanda editum in iisdem actis 1724. Adeo ut hac in parte nihil ulterius ad maiorem perfectionem desi-

desiderari videatur, nisi hoc tantum, quod, cum infinitis modis, ceu monstravimus, idem præstari possit, ille eligatur qui exhibeat curvam constructu facillimam, cuius extensione uti lúbeat ad quadraturam determinandam. Hanc vero rem, utpote alius negotii, nunc nón attingimus.

II. Quod si autem æquatio differentialis $pdx = qdy$ laborat indeterminatarum permixtione, id est, si utraque quantitas p & q vel alterutra saltem componitur diversimode ex indeterminatis x & y simul, earumque variis potentis, atque contineant vel non contineant varia signa radicalia; id quidem est, quod hodiernum crucem figit geometris, nec quemquam novi hucusque, qui generalem inveniit Regulam (ad praxim applicabilem) integrandi eiusmodi æquationes differentiales, si integrabiles sunt, aut, si non sunt, construendi eas sive per quadraturas sive per rectificationes curvarum datarum; dico notanter *applicabilem ad praxin*, nam cum constructio requirat executionem, nihil pensi haberem alicuius regulæ, quæ in speculatione tantum subsisteret, re ipsa autem nullius esset usus, quæ & totam requireret hominis ætatem, si in levisimis quoque exemplis vellet eam effectui dare. Tales utique regulæ generales, vel potius regularum ideæ, etiam mihi in promptu forent, sed quas ob dictam rationem negligo.

III. Dantur regulæ particulares, etsi omnibus casibus in suo quæque genere applicabiles, quæ cum successu adhibentur: Earum multas ac varias iam eo tempore excogitavi, quo de nascente calculo vix quisquam alius cogitabat, nedum ad eius perfectionem animum applicabat. Inventas regulas communicavi paulo post cum amicis, partim coram, partim per litteras, præsertim cum Illustr.

Mar-

Marchione Hospitalio, in cuius privatam utilitatem initio a me conscriptæ lectiones, in multorum iam manibus versantes, æque ac litteræ meæ cum ipso postea frequenter commutatæ, luculento sunt veritatis testimonio.

IV. Inter prædictas regulas maximam universalitatem sive extensionem habet illa, quæ valet pro omnibus æquationibus differentialibus, quantæcunque dimensionis sint termini, modo ubique sint homogenei, id est, in quibus exponentes indeterminatarum x & y simul sumti eundem in quolibet termino componunt numerum, adeoque litteræ constantes, quæ in eiusmodi æquationibus occurrunt, nihil aliud designant quam numeros coefficientes, nihilque proin contribunt ad dimensionum suppletionem. Monstravi namque talem æquationem mutari in aliam indeterminatas separabiles habentem, si assumendo novam indeterminatam z , substituatur zy pro x , & $zdy + ydz$ pro dx ; vel contra zx pro y , & $zdx + xdz$ pro dy . Aut etiam quod interdum simpliciolem reddit æquationem, si pro x scribatur $z^n y$, atque pro dx , $z^n dy + nyz^{n-1} dz$, vel vice versa $z^n x$ pro y , & $z^n dx + nxz^{n-1} dz$ pro dy ; ita enim fit, ut, cum n sit exponens arbitrarius, pro eo aliquis eligi possit, qui exhibeat æquationem tractabiliorem. Quinimo certissimum est, nihil obstare, quo minus adhiberi queat functio quælibet ipsius z ad arbitrium formata, ponendo ex. gr. $y\sqrt{aa+zz}$ pro x , adeoque $dy\sqrt{aa+zz} + yzdz : \sqrt{aa+zz}$ pro dx ; aut si mavis $x\sqrt{aa+zz}$ pro y , & $dx\sqrt{aa+zz} + xzdz : \sqrt{aa+zz}$ pro dy .

V. Dantur sane casus, ubi talis functionum formatio utilitate sua non caret, præcipue in illis aliquando, in quibus signa radicalia reperiuntur: sciendum enim regulam nostram porrigi quoque ad eas omnes æquationes,

Y

quæ

quæ unum pluresve terminos habent signis radicalibus affectos. Verbi gratia, sit proposita æquatio inter coordinatas x & y alicuius curvæ hæc $axy + dx\sqrt{xx+yy} = 0$, in qua indeterminatæ x & y sunt unius dimensionis, quia quantitas $\sqrt{xx+yy}$ non nisi primæ dimensionis esse censetur; si itaque secundum regulam nostram simpliciter ponatur zy & $zdy + ydz$ pro x , & dx , mutatur æquatio proposita in hanc $\frac{dy}{y} + \frac{dz\sqrt{zz+1}}{az+z\sqrt{zz+1}} = 0$, quæ quidem non amplius laborat indeterminatarum permixtione; at vero irrationalitas adhuc inest, quæ nondum permittit videre, annon forsân ex differentialibus logarithmicis componatur æquatio, unde illa per integrationem ad terminos finitos deinceps reduci possit.

VI. Quam ob rem præstat ut scribam pro x productum ipsius y per convenientem aliquam functionem ipsius z ad asymmetriam tollendam; in hunc finem pono ex. gr. $x = y\sqrt{zz-1}$ ac proinde $dx = dy\sqrt{zz-1} + yzdz:\sqrt{zz-1}$ quibus substitutis in æquatione proposita $axy + dx\sqrt{xx+yy} = 0$, convertetur illa in hanc $(z^3 + azz - z - a)dy + yzzdz = 0$, quæ per divisionem reducta dat hanc alteram $\frac{dy}{y} + \frac{zzdz}{z^3 + azz - z - a} = 0$, ab omni irrationalitate

immunem: Resolvitur vero posterius membrum $\frac{zzdz}{z^3 + azz - z - a}$ in differentialia logarithmica per metho-

dum quam communicavi in Commentariis Acad. Reg. Scient. Paris. an. 1702, & in Actis Lips. an. 1703:

Cum enim denominator huius fractionis $z^3 + azz - z - a$ constet ex istis tribus factoribus $z+a$, $z+1$ & $z-1$, fa-

ciendum est ex præscripto illius methodi $\frac{zzdz}{z^3 + azz - z - a}$

$= \frac{adz}{z+a} + \frac{\beta dz}{z+1} + \frac{\gamma dz}{z-1}$, tum quærendi valores literarum

$a, \beta, \gamma,$

α, β, γ , qui reperientur esse $\alpha = \frac{aa}{aa-1}$, $\beta = \frac{-1}{2a-2}$, $\gamma = \frac{1}{2a+2}$; Quare æquatio nostra $\frac{dy}{y} + \frac{\alpha dz}{z+a} + \frac{\beta dz}{z-1} + \frac{\gamma dz}{z-1} = 0$, (substitutis valoribus ipsarum α, β, γ & dein singulis terminis in $2aa-2$ ductis) abibit in hanc æquationem $\frac{(2aa-2)dy}{y} + \frac{2aadz}{z+a} - \frac{(a+1)dz}{z-1} + \frac{(a-1)dz}{z-1} = 0$, in differentialibus logarithmicis expressam, quæ integrata, ut olim docuimus, reddit $(2aa-2)y + 2aa \log(z+a) - (a+1)\log(z+1) + (a-1)\log(z-1) = IC$, ubi per IC intelligo logarithmum quantitatis constantis pro lubitu assumptæ; reducendo igitur, ut moris est, logarithmos ad potentias, acquiritur æquatio finita scilicet in terminis finitis expressa $y^{(2aa-2)} \times (z+a)^{2aa} \times (z+1)^{-(a+1)} \times (z-1)^{(a-1)} = C$. Nunc vero, ut in coordinatis x & y exprimatur, restituendus est valor ipsius z , qui ex hypothese assumpta $x = y\sqrt{(zz-1)}$, est $= \sqrt{(xx+yy)}$; y , hinc enim emergit $y^{(2aa-2)} \times (\frac{\sqrt{(xx+yy)+ay}}{y})^{2aa} \times (\frac{\sqrt{(xx+yy)+y}}{y})^{-(a+1)} \times (\frac{\sqrt{(xx+yy)-y}}{y})^{(a-1)} = C$; vel quia in denominatoribus habetur y elevata ad $2aa$, ad $-a-1$, & ad $a-1$, quarum summa $= 2aa-2$, patet tres istos denominatores y destrui per alteram y fractionibus præmissam, ita ut tandem hæc prodeat æquatio naturam curvæ determinans $(\sqrt{(xx+yy)+ay})^{2aa} \times (\sqrt{(xx+yy)+y})^{-(a+1)} \times (\sqrt{(xx+yy)-y})^{(a-1)} = C$; Quæ si dextre tractetur ulterius reduci potest in istam $x^{(a-1)} \times (\sqrt{(xx+yy)+ay})^{aa} \times (\sqrt{(xx+yy)+y})^{-a} = C$; vel etiam in hanc $x^{(a-1)} \times (\sqrt{(xx+yy)+ay})^{aa} \times (\sqrt{(xx+yy)-y})^a = C$: Ubi recordandum, per litteram C intelligi perpetuo constantem arbitrariam in omnibus æquationibus sumendam vel eandem vel diversam prout libuerit; quod in sequentibus etiam sicubi reperietur monitum volo.

Y 2

Sin-

VII. Singularis casus considerandus hic venit, existente nimirum $a=1$, quo fit ut duo priores factores in prima æquatione, qui iam erunt $(\sqrt{xx+yy}+y)^2$ & $(\sqrt{xx+yy}+y)^{-2}$ se mutuo destruant, & tertius $(\sqrt{xx+yy}-y)^0$ evadat $=1$, unde tota æquatio foret $1=C$; sic pariter secunda & tertia, ex prima æquatione deductæ, in casu $a=1$, abirent in $1=C$, quod esset absurdum, unitas enim non potest esse æqualis quantitati arbitrariæ C. Quæritur itaque, quid iam sit statuendum, utrum in hoc casu nulla satisfaciatur curva æquationi propositæ, quæ iam est $xdy+dx\sqrt{xx+yy}=0$, aut si aliqua satisfaciatur, quo modo illa determinetur? Hunc scrupulum ut tollam, dico, incommodum istud ex eo venire, quod in præced. §. æquatio $\frac{dy}{y} + \frac{adx}{z+a} + \frac{\beta dz}{z+1} + \frac{\gamma dz}{z-1} = 0$ multiplicata fuerit per $zaz-2$, h. e. per 0 in hoc casu, unde totam æquationem evanescere necesse est. Ut igitur hoc evitemus, notandum est quantitatem $zdz : (z^3 + axz - z - a)$, quam æqualem supposuimus hisce fractionibus $\frac{adz}{z+a} + \frac{\beta dz}{z+1} + \frac{\gamma dz}{z-1}$, continere in se aliquid absolute integrabilis quando $a=1$; illa igitur non potest supponi constare ex meris differentialibus logarithmicis. Quod autem contineat partem aliquam integrabilem, ex eo patet, quod denominator fractionis, qui iam est $z^3 + zz - z - 1$, constet ex duobus factoribus $zz + 2z + 1$, & $z - 1$, quorum ille est quadratum perfectum; unde $dz : (zz + 2z + 1)$ fiet integrabile, est enim eius integrale $= -1 : (z + 1)$. Oportet itaque, ceu monui in præmemoratis Commentariis Paris 1702. pag. 290. Edit. Paris. separare ex quantitate $zdz : (z^3 + zz - z - 1)$ illud quod est integrabile, & tum procedere secundum regulam, quod utrumque simul sic perago: Pono statim

tim $\frac{zx dz}{z^3 + zz - z - 1} = \frac{adz}{z+1} + \frac{\gamma dz}{z-1} + \frac{\pi dz}{zz+2z+1}$, quibus reductis

ad communem denominatorem $z^3 + zz - z - 1$ habebō æ-
qualitatem inter numeratorem zx & summam trium reli-
quorum, quæ erit $(\alpha + \gamma)zx + (2\gamma + \pi)z + (\gamma - \pi - \alpha)$; in-
stituta comparatione terminorum faciendo $\alpha + \gamma = 1$,
 $2\gamma + \pi = 0$, $\gamma - \pi - \alpha = 0$, inveniatur $\pi = -\frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{3}{4}$, $\gamma = \frac{1}{4}$.

His ita inventis integrentur, ut olim monstravimus, ter-
mini æquationis $\frac{dy}{y} + \frac{zx dz}{z^3 + zz - z - 1} = 0$, & prodibit

$$ly + \frac{3}{4} l(z+1) + \frac{1}{4} l(z-1) + \frac{1}{2z+2} = C, \text{ seu } 4ly + 3l(z+1) + l(z-1) = \frac{2}{z+1} + C;$$

hinc ergo considerando unitatem
tanquam logarithmam numeri alicuius qui vocetur n , ha-
bebitur $y^4 \times (z+1)^3 \times (z-1) = C \times n^{-2: (z+1)}$, quæ, substituto
pro z eius valore $V(xx+yy):y$ & reductis reducendis ut
supra factum definit in istam $(V(xx+yy)+y)^3 \times (V(xx+yy)-y) = C \times n^{-2y: \sqrt{(xx+yy)+y}}$, transmutabilem porro in
 $(V(xx+xyy)+y) \times x = C \times n^{-y: \sqrt{(xx+yy)+y}}$, vel etiam non
minus simplici modo in $(V(xx+yy)-y)^{-1} \times x^3 = C \times n^{-y: \sqrt{(xx+yy)+y}}$; quarum autem quælibet si evolvatur, &

homogeneitatis gratia scribatur $bbRR$ pro quadrato quan-
tatis exponentialis, hanc induit faciem $x^4 + 2bRyx - bbRR = 0$. Aio igitur hanc æquationem $x^4 + 2bRyx - bbRR = 0$ oriri ex vera integratione huius differentialis
 $xdy + dxV(xx+yy) = 0$; quod confirmabitur a postero-
ri, si nimirum illa differentietur & quod provenit cum
hac comparetur. Unde videmus curvam propositæ æ-
quationi satisfaciendam non esse algebraicam sed exponen-
tialem, & ita quidem, ut ipsæ indeterminatæ ingrediantur
exponentem, qua in re differt ab omnibus aliis casibus
particularibus æquationis generaliter propositæ $axy + dx$

$dx\sqrt{xx+yy}=0$, utpote quæ in quovis alio casu semper admittit curvam aliquam algebraicam, modo a sit rationalis; aut si a non est rationalis, erit quidem curva exponentialis, sed exponentem nulla quantitas variabilis (sicuti in casu $a=1$) ingreditur, cuiusmodi curvæ dici possunt algebraicis proximæ.

VIII. Paulo fusior fui quam forsân necesse videbatur in discussione huius exempli, quod, cum olim Lutetiæ agerem, multum agitabatur inter Geometras eius loci, ex occasione problematis Beauniani, mihi tunc quoque cum aliis ab Hospitalio propositum atque feliciter solutum, postquam a Geometris insolutum ad me pervenisset: Fusior igitur in hoc fui, ut fieret manifestum, qua dexteritate evitari possit ingens aliquando calculus, in quem intricaremur, si regulas generales, prout primo intuitu se offerunt, sine ulla circumspectione sequi vellemus: Præterquam quod multoties accidat, ut credamus curvas quæ prodeunt per incautam regularum applicationem esse transcendentis, nonnisi per quadraturas aut rectificationes construibiles, quæ tamen si rite tractentur evadunt algebraicæ aut saltem exponentiales, hoc est, tales quæ sunt finitæ & non aliter transcendentis quam ex sola exponentium irrationalitate. Quis enim prima fronte non crederet, æquationem supra §. 5. expressam $\frac{dy}{y} + \frac{dz\sqrt{zz+1}}{zz+z\sqrt{zz+1}}=0$, quæ oritur ex suppositione $x=zy$, deducere ad curvam transcendentem? nisi ante omnia id curet, ut sublata irrationalitate $\sqrt{zz+1}$ per methodum Diophanteam acquirat fractionem rationalem, quam deinde per nostram methodum in §. 6. traditam in differentialia logarithmica resolvat: sed & hic processus operosi

rosi foret calculi; quare tutissimum erit ut statim ab initio dispiciatur, prout exempli cuiusque natura exigit, de commoda aliqua functione assumptæ z substituenda in locum alterutrius indeterminatarum x vel y , quo immediate preveniatur ad æquationem rationalem & simplicem, sicuti hic factum vidimus, ubi sola substitutione $y = x\sqrt{(xz-1)}$ obtinimus hæc tria simul, nempe indeterminatarum separationem, rationalitatem terminorum & maximam possibilem æquationis simplicitatem $\frac{dy}{y} + \frac{zxdz}{z^3 + azz - z^a} = 0$.

IX. Pergo ad methodum a me inventam integrandi æquationes differentiales sine adhibita indeterminatarum separationem, aliave ulla earum in alias transmutatione per substitutionem faciendam; loquor hic de illis æquationibus $pdx + qdy = 0$, in quibus p & q designant functiones rationales & homogeneas indeterminatarum x & y utcunque inter se complicatarum atque permixtarum, modo indeterminatæ in singulis terminis eandem habeant exponentium summam, propter quod functiones, quæ ita sunt comparatæ, ipsasque æquationes differentiales ex illis compositas voco *homogeneas*.

X. Postquam eiusmodi æquationes a fractionibus liberatæ sunt ope multiplicationis; erunt illæ ordinis vel primi, vel secundi, vel tertii, vel cuiuscunque altioris; voco autem *ordinem primum, secundum, tertium* &c. ubi exponentium summa in quolibet termino obtinet dimensionis gradum primum, secundum, tertium &c. His ita definitis, formo sequentem tabellam, quæ conspectui offert ordines æquationum canonicarum; per æquationem *canonicam* intelligo talem, quæ omnes æquationes particula-

culares alicuius ordinis in se complectitur ope coefficientium universalium singulis terminis præfixorum.

Tabella æquationum Canonicarum differentialium.

I. $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=0.$

II. $(axx+bxy+cyy)dx+(exx+fyx+gyy)dy=0.$

III. $(ax^3+bxxy+cxyy+ey^3)dx+(fx^3+gxxxy+bxxyy+iy^3)dy=0.$

IV. $(ax^4+bx^3y+cxxyy+exy^3+fy^4)dx+(bx^4+ix^3y+kxxyy+mx^3yy+ny^4)dy=$

V. $(ax^5+bx^4y+cx^3yy+---+by^5)dx+(ix^5+kx^4y+mx^3yy+---+qy^5)dy=$

XI. Ex hac tabella patet, æquationem canonicam cuiusque ordinis tot habere terminos præfixos ipsi dx , totidemque præfixos ipsi dy , quot habet unitates numerus ordinis unitate auctus. Sic æquatio ordinis primi, habet terminos utrobique duos; ordinis secundi, terminos tres; Tertii, quatuor; Quarti, quinque; & ita porro: Itaque in ordine primo sunt coefficientes universales quatuor, in secundo sunt sex, in tertio octo, in quarto decem &c. Iam dico has omnes æquationes posse integrari seu reduci ad æquationes finitas, exprimentes naturam linearum, quæ singulæ conveniunt suis respective æquationibus canonicis differentialibus. Istæ vero æquationes finitæ erunt semper algebraicæ vel saltem exponentiales, prout exponentes indeterminatarum fuerint vel rationales vel irrationales. Quandoquidem igitur æquationes canonicæ in hac tabella continuanda comprehensæ, includunt omnes quæ dari possunt æquationes differentiales homogeneas & rationales, liquet, si ostendero modum canonicas integrandi, rem generaliter confectam fore pro quacunque eiusmodi æquatione differentiali integranda sine prævia indeterminatarum separatione: Hoc vero est, quod iam docere volo.

XII. In

XII. In antecessum notare convenit, cuicumque æquationi differentiali homogeneæ, sive sit rationalis, sive irrationalis, satisfacere lineam aliquam rectam, id quod ex eo patet, quia, si ponatur $y = nx$, adeoque $dy = ndx$ (assumpto coefficiente invariabili n) iique valores pro y & dy in æquatione differentiali surrogentur, prodibit utique æquatio quæ divisa per dx , & per potentiam ipsius x , cuius exponens est ipse ordinis index, dabit æquationem algebraicam, ab indeterminatis liberam, inter cognitæ a, b, c , &c. & incognitam n , eiusque varias dimensiones; unde supposita radicum extractione ex æquationibus algebraicis, erit illius æquationis radix n coefficientis quæsitus in nx , quod ipsi y æquale ponebatur.

XIII. Ut res exemplo illustretur, capiamus æquationem differentialem canonicam ordinis secundi $(axx + bxy + cyy)dx + (exx + fxy + gyy)dy = 0$, atque in ea substituamus nx pro y ; mxx pro yy & ndx pro dy : Quo facto habebitur $(axx + nbxx + mncxx) dx + (exx + nfxx + nngxx)ndx = 0$; Dividendo igitur per $xxdx$, ac more solito secundum ordinem dimensionum incognitæ n disponendo, resultat æquatio cubica $gn^3 + \frac{f}{c}nm + \frac{e}{b}n + a = 0$, cuius radix n ducta in x dabit valorem ipsius y . Adeoque si construatür triangulum rectangulum (supposito coordinatas angulum rectum facere) cuius basis ad cathetum habeat rationem ut 1 ad n , dico hypotenusam huius trianguli in utramque partem prolongatam esse lineam satisfaciendam æquationi differentialem canonicæ ordinis secundi, cuius coordinatæ sunt parallelæ basi & catheto.

XIV. Loco alterius exempli ex homogeneis irrationalibus sit æquatio in §. 5. proposita $axdy + dx$
Z \sqrt{xx}

$V(xx+yy)=0$. Ubi si ponatur mxx pro yy & ndx pro dy , ac postea dividatur per $x dx$; emerget $na+V(1+nm)=0$, quæ resoluta dat $n=1:V(aa-1)$. Facto itaque triangulo cuius basis ad cathetum sit ut 1 ad 1: $V(aa-1)$, hoc est, ut $V(aa-1)$ ad 1, erit hypotenufa utrimque prolongata conveniens linea æquationi differentiali propositæ $axdy+dxV(xx+yy)=0$, eiusque coordinatæ lateribus parallelæ. Si $a=1$, abit hypotenufa in rectam applicatis parallelam, abscissæ vero evanescent: Hicque casus omnino fluit ex æquatione ad curvam quam supra §. 7. invenimus $x^4+2bRyx-bbR^2=0$, faciendo enim b (quia est arbitraria) $=0$, habetur $x^4=0$, adeoque $x=0$.

XV. Propero nunc ad methodum eruendi quoque lineas curvas, æquationibus canonicis differentialibus cuiusque ordinis respondentibus, h. e. integrandi illas æquationes universaliter, idque sine interventu separationis indeterminatarum. Hoc ut præstetur, formanda est æquatio finita, in quam ingrediantur tot littæræ assumptiæ constantes, quot sunt termini in æquatione canonica integranda, & quæ differentiata easdem cum hac obtineat dimensiones indeterminatarum x & y . Illa autem æquatio finita talem (ceu cuiuslibet attendenti haud ægre patescit) habere debet formam $(x+ay)^\pi \times (x+\beta y)^\tau \times (x+\gamma y)^\rho \times (x+\varepsilon y)^\phi \times \&c. = C$, ut nimirum constituatur productum ex factoribus binomialibus $x+ay$, $x+\beta y$, $x+\gamma y$, $x+\varepsilon y$ &c. ad potentias π , τ , ρ , ϕ &c. elevatis, quod æquale fiat quantitati constanti C , ubi coefficientes α , β , γ , ε , ut & exponentes π , τ , ρ , ϕ , &c. sunt assumpti per calculum investigandi. Quod attinet ad numerum factorum horum binomialium, assumendi sunt duo

duo pro canonica primi ordinis, tres pro canonica secundi ordinis, quatuor pro canonica tertii ordinis, atque ita consequenter. Hoc nempe pacto fit, ut tot simul habeantur assumti coefficientes & exponentes, quot sunt termini in proposita æquatione canonica. Unde differentiando, eum in modum quem statim exponam, assumptam æquationem formatam ex factoribus binomialibus, prodibit æquatio differentialis eiusdem ordinis & tot præcise terminorum, quot canonica habet, adeo ut totidem institui possint comparationes inter utriusque terminorum coefficientes, quæ determinabunt assumptos coefficientes & exponentes, ipsamque adeo æquationem finitam, quæ desideratur, pro data canonica differentiali.

XVI. Dabo exemplum unicum & quidem omnium facillimum, quod abunde illustrabit methodum: Sit æquatio canonica primi ordinis $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=0$ integranda, cui suppono convenire hanc æquationem finitam $(x+ay)^\pi(x+\xi y)^\tau=C$; indagandi ergo sunt valores litterarum a, ξ, π, τ . Hoc ut commode fiat, sumo, priusquam differentietur, logarithmos assumptæ æquationis finitæ, & habebō $\pi \ln(x+ay) + \tau \ln(x+\xi y) = \ln C$, quæ postea more solito differentiatā mihi dat $\frac{\pi dx + a\pi dy}{x+ay} + \frac{\tau dx + \xi\tau dy}{x+\xi y} = d \ln C = 0$; seu peracta reductione, multiplicando scilicet per crucem, ut denominatores tollantur, $(\pi+\tau)x dx + (\xi\pi+a\tau)y dx + (a\pi+\xi\tau)x dy + (a\xi\pi+a\xi\tau)y dy = 0$. Itaque hanc inter & canonicam $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=0$ instituenda est comparatio terminorum similium ad determinandos coefficientes & exponentes assumptos a, ξ, π, τ , unde hæc quatuor emergent æqualitates $\pi+\tau=a, \xi\pi+a\tau=b, a\pi+\xi\tau=c, a\xi\pi+a\xi\tau=e$.

Z 2

Com-

Computo iam recte instituto, reperientur valores optati tam coefficientium quam exponentium, quemadmodum sequitur, scilicet

$$\alpha = \frac{b+c-\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}}{2a}$$

$$\xi = \frac{b+c+\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}}{2a}$$

$$\pi = \frac{eb-ac+a\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}}{2\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}}$$

$$\tau = \frac{-ab+ac+a\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}}{2\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}}$$

Ubi notandum, posse hos valores simplicius exprimi, reducendo nempe x in utroque factore binomiali ad communem denominatorem $2a$, & hunc postea omittendo; sicuti etiam dividendo exponentes inventos per communem quantitatem $a : 2\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}$. Liquet enim, si $(x+cy)^\pi \times (x+\xi y)^\tau$ fuerit = constanti, fore etiam

$(2ax+2aay)^\pi \times (2ax+2a\xi y)^\tau = \text{constanti}$. His ita

monitis, & scripto brevitatis gratia m pro $\sqrt{(bb+2bc+cc-4ae)}$ atque C maiusculo pro quantitate constanti arbitraria, dico hanc æquationem finitam

$(2ax+(b+c-m)y)^{b-c+m} \times (2ax+(b+c+m)y)^{c-b+c+m} = C$, esse integram æquationis differentialis canonicæ

primi ordinis $(ax+by)dx+(cx+ey)dy=0$, omnes possibiles casus particulares huius ordinis in se complectentis.

Potest vero inventa illa æquatio finita mutari in hanc formam, adhibita aliqua dexteritate, $(axx+byx+cyx+eyy)^{-b+c+m} \times (2ax+(b+c+m)y)^{(2b-2c)} = C$, vel in hanc aliam nonnihil diversam $(axx+byx+cyx+eyy)^{(b-c+m)} \times (2ax+(b+c+m)y)^{(-2b+2c)} = C$.

Coroll. I.

XVII. Hinc si $b=c$, erit tunc in prima æquatione

tione inventa , neglecto communi exponente m utriusque factorum , $(2ax+(2b-m)y) \times (2ax+(2b+m)y) = C$; hoc est , multiplicatione actualiter peracta , erit $4aaxx + 8abxy + (4bb-mm)yy = C$, sive, restituto valore ipsius mm & dein per $4a$ diviso , proveniet $axx + 2bxy + eyy = C$, quod idem etiam ex duabus mutatis provenit ; sicuti omnino provenire debet per vulgarem integrandi modum, qui hoc in casu locum habet, cum enim nunc sit $axdx + b(ydx + xdy) + e ydy = 0$, cuius singulae partes sunt integrabiles ; integrentur ergo, & erit duplum sumendo, $axx + 2bxy + eyy = C$; ut modo habuimus.

Coroll. 2.

XVIII. Esto iam alterutra a vel $e = 0$; erit $m = b + c$, quo substituto in prima nostra æquatione mutabitur illa (posito $e = 0$) in hanc $x^b \times (ax + by + cy)^c = C$ vel (posito $a = 0$) in hanc $y^c \times (bx + cx + ey)^b = C$. Idem dant duæ reliquæ, in quas prima illa mutata fuit.

Coroll. 3.

XIX. Si $m = 0$, hoc est, si $bb + 2bc + cc = 4ae$; prima nostra generalis æquatio finita respondens differentiali canonicæ primi ordinis, migraret in hanc quæ absurdum quid contineret $(2ax + (b+c)y)^{b-c} \times (2ax + (b+c)y)^{-b+c} = C$: Quia enim factores nunc sunt æquales, exponentes vero, utpote alter alterius negativus, se mutuo destruunt, haberetur $(2ax + (b+c)y)^0 = C$, sive $1 = C$ i. e. unitas = quantitati arbitrariæ, quod utique esset absolum & nihil indicaret, idemque etiam ex reliquis duabus emergeret. Quocirca cautela aliqua hic opus est, ne quis credat nullam prorsus in hoc casu dari æquationem inter coordinatas x & y ; sic itaque statuo: Fingamus loco exponentis 0 haberi exponentem generalem p , ita ut sit

Z 3

(2ax

$(2ax + (b+c)y)^p = C$; atque cum C denotet quantitatem
 arbitrariam, vocatur illa C^p ; eritque $(2ax + (b+c)y)^p$
 $= C^p$, unde extracta radice exponentis p , fiet $2ax$
 $+ (b+c)y = C$; hoc autem valet qualiscunque fit p , ergo
 etiam quando $p=0$. Proinde dico, æquationem $2ax$
 $+ by + cy = C$ satisfacere in casu quo $m=0$, seu quo
 $bb + 2bc + cc = 4ae$. Atqui hoc ita se habere apparebit,
 si in æquatione $(ax + by)dy + (cx + (\frac{bb + 2bc + cc}{4a})y)dy = 0$,
 pro x & dx ponantur eorum valores ex æquatione in-
 venta elicit, $-(b+c)y : 2a$ & $-(b+c)dy : 2a$, etenim e-
 vanescet ut fieri debet æquatio proposita $(ax + by)dx +$
 $(cx + \frac{bb + 2bc + cc}{4a}y)dy = 0$. Hinc videmus, nullam lineam
 curvam huic casui inservire, sed rectam tantum ex hac
 æquatione $2ax + by + cy = 0$ describendam. Quæ ea-
 dem quoque reperitur, si adhibetur regula in §. 12. tra-
 dita pro determinandis lineis rectis, quas in universum
 omnes æquationes canonicæ admittunt, ut ibidem
 ostendi.

Coroll. 4.

XX. Quod si quatuor coefficientes a, b, c, e sint
 proportionales, adeoque si $ae = bc$ in hoc casu erit
 $m = b - c$; id quod quamlibet ex tribus nostris æquationi-
 bus finitis mutat in $(2ax + 2cy)^{2b-2c} = C$, vel, neglecto
 exponente, in $ax + cy = C$, quæ iterum est ad lineam re-
 ctam. Quod quidem immediate colligi potest ex pro-
 posita æquatione differentiali, quæ in præsentis casu est
 $(ax + by)dx + (cx + \frac{bc}{a}y)dy = 0$ divisibilis per $ax + by$;
 prodit enim $dx + \frac{c}{a}dy = 0$, seu $adx + cdy = 0$; adeoque
 integrando, erit $ax + cy = C$, ut ante. Et hic quidem
 casus cum altero §. præcedentis sunt fortasse soli, qui
 per

per solas lineas rectas solvi possunt, omnemque adeo curvam excludant.

Coroll. 5.

XXI. Cum in æquatione canonica indeterminatæ x, y earumque differentiales dx, dy simili gaudean habitu & relatione inter se invicem, manifestum est posse mutari æquationem finitam in aliam æquipollentem, scribendo tantum in illa y pro x , e pro a , c pro b & vice versa. Quo facto prima nostra æquatio finita $(2ax + by + cy - my)^{b-c+m} \times (2ax + by + cy + my)^{-b+c+m} = C$, induet hanc aliam formam, licet reipsa non diversam $(2ey + bx + cx - mx)^{c-b+m} \times (2ey + bx + cx + mx)^{-c+b+m} = C$. Quod verum esse comperietur, si utraque differentietur eo modo quo usi sumus in §. 16. reducendo nempe ad logarithmos ante differentiationem. Ita quoque reliquæ duæ in has æquipollentes permutantur, $(axx + byx + cyx + eyy)^{b-c+m} \times (2ey + (b+c - m)x)^{-2b+2c} = C$; & $(axx + byx + cxy + eyy)^{-b+c+m} \times (2ey + (b+c+m)x)^{2b-2c} = C$.

Coroll. 6.

XXII. Illud quoque notatu dignum reputo, quod omnes curvæ, quæ respondent æquationibus nostris finitis, habent areas suas quadrabiles, uno tantum casu excepto, quando scilicet $b=c$. Quod sane pro paradoxo haberi posset, nisi res admodum facile demonstraretur ex ipsa æquatione canonica $(ax + by)dx + (cx + ey)dy = 0$ apte disposita. Liquet enim, illam ita posse ordinari, $axdx + cydx + cxdy + e ydy = (c-b)ydx$, ut integrabilis fiat per partes prioris membri, alterum vero designet elementum arcæ ydx in $c-b$ ductum; integrando ita-

itaque per partes prodibit $\frac{1}{2}axx + cxy + \frac{1}{2}eyy = (c-b)$
 $\int ydx + C$, unde $\int ydx$ seu area curvæ erit $\frac{axx + 2cxy + eyy - 2c}{c-b}$
 & proinde quadrabilis, præterquam in casu $c=b$, in quo
 haberetur $=\infty$, h. e. = infinito, quod ipsum indicio est
 in illo casu aream curvæ esse inquadrabilem; etiamsi hoc
 iam concludi possit ex ipsa æquatione ad curvam, quam
 in §. 17. hanc esse invenimus $axx + 2bxy + eyy = 0$, &
 quæ si examinetur, ad hyperbolam vel ellipsin spectare
 observabitur.

Scholium.

'XXIII. Ex hoc, quod ad longum deduximus, spe-
 cimine pro integranda æquatione canonica primi ordinis,
 sine præcedanea indeterminatarum sequestratione, nemo
 non videt, methodum esse generalem pro quocunque ordine,
 assumendo pro secundo ordine hanc æquationem $(x + \alpha y)^\pi$
 $\times (x + \beta y)^\tau \times (x + \gamma y)^\rho = C$; pro tertio hanc $(x + \alpha y)^\pi$
 $\times (x + \beta y)^\tau \times (x + \gamma y)^\rho \times (x + \epsilon y)^\phi = C$, & ita pro cæteris,
 sic enim fiet, ut pro quolibet ordine tot reperiantur lit-
 teræ assumptivæ $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$, &c. π, τ, ρ, ϕ , &c. quot
 sunt coefficientes in æquatione differentiali canonica illius
 ordinis, atque hoc modo obtineantur totidem æqualita-
 tes ad determinandos tam coefficientes $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$, &c.
 quam exponentes π, τ, ρ, ϕ , &c. In altioribus evadit
 calculus operosior quidem, ac propterea molestior, sed
 ideo methodus haudquaquam difficilior, quippe quæ uni-
 formis est in omnibus.

C. G.

C. G.
DE CASIBVS

quibus integrari potest

ÆQVATIO DIFFERENTIALIS

$$ax^m dx + byx^p dx + cy^2 dx = dy.$$

OBSERVATIONES QVÆDAM.



Um Anno 1721. Venetiis inviferem Cl. Zendrinum Medicum & Mathematicum celebrem eo die quo ab urbe difcedere conftitueram, accidit ut Nicolai Bernoulli Ioh. Fil. mentionem faceret, eumque iam ab a-

liquo tempore Venetiis effe mihi affirmaret; igitur mox, ut optaveram, in amicitiam humaniffimi viri perveni, ea- que caufa abitum meum in fextum diem diftuli.

Inter colloquia quæ illo tempore habuimus, & ex quibus me multum profeciffe femper fatebor, æquationem quandam differentialem ab Ill. Riccato olim propofitam mihi oftendit huiusmodi: $ax^m dx + by^2 x^p dx = dy$. ut tentarem, an quò cafu illam vel feperare vel integrare poffem. Inveni igitur paullo poft, fi æquatio generalior ponatur $ay^f x^m dx + by^n x^p dx = dy$. y determinari poffe per x quoties $m = \frac{fp + f - p - n}{n - 1}$, nempe fi c fuerit radix huius

æquationis $bc^{n-1} + ac^{f-1} + \frac{p-m}{n-f} = 0$. effe $y = cx^{\frac{-p-1}{n-1}}$ qui cafus omnium facillimus eft. Deinde datis 30. Iul. A. 1721. litteris ad Cl. Nicol. Bernoullium, tres alios ca-

A a fus

fus integrabiles æquationis $ax^m dx + by^n x^p dx = dy$. detexi, nimirum (1) si ponatur $n=1, p=-1$ esse $y = \frac{a}{b+m+1} + fx^b$ ubi f fit quantitas constans quæcunque. (2) Si $n=2, m=-3p-4$ esse $y = \sqrt{\frac{a}{b}} x^{-2p-2} - \frac{(p+1)}{b} x^{-p-1}$. (3) Si

$n=2, m = \frac{-p-4}{3}$ esse $y = 1: \sqrt{\frac{a}{b}} x^{\frac{2p+2}{3}} - \frac{(p+1)}{3a} x^{\frac{p+1}{3}}$ quas in-

tegrationes ut novas placere sibi testatus est Vir Cl. in responso quod ad meas dedit; paullo post aliis litteris significavit se præter casus mihi observatos modum invenisse peculiarem ex æquatione $ax^m dx + by^2 x^p dx = dy$ alios quotlibet casus integrabiles eruendi & pro iis æquationes algebraicas assignandi, rem simul exemplo confirmavit, posito nempe $m = \frac{-5p-8}{3}$ esse

$$y = \frac{x^{-2p-2} + \left(\frac{p+1}{-b}\right)x^{\frac{-5p-5}{3}} \sqrt{\frac{b}{-a} + \frac{(p+1)^2}{-3ab}} x^{\frac{-4p-4}{3}}}{x^{\frac{-2p-2}{3}} \sqrt{\frac{b}{-a} + \frac{(p+1)}{3a}} x^{\frac{-p-1}{3}}}$$

Tandem litteris 6. Dec. A. 1721. ad me datis statuit æquationem illam differentialem esse integrabilem si $m = \frac{-2np-4n+p}{2n+1}$ ubi per p intelligit numerum rationalem, per n vero numerum integrum quemcunque. Atque hæc ipsa est formula quam ad separationem indeterminatarum huius æquationis dedit Cl. Daniel Bernoullius in Exercitation. Mathemat. p. 77. f. ubi per duo lemmata alternatim casus omnes methodo perquam ingeniosa & facili deduxit.

Consideravit autem æquationem huiusmodi $ax^m dx + udx = bdu$. alteri illi æquivalentem ex qua scilicet non solum exponens p , sed etiam uterque coefficientis a vel b pro lubitu in alium quemcunque transmutari potest.

Pona-

Ponamus exempli causa datam æquationem $cu^s du + fu^b y^2 du = dy$ reducendam esse ad hanc formam (A)... $x^m dx - y^2 dx = dy$ sumatur $u = ex^k, z = by$. ubi fit

$$c = -(b+1) \frac{2}{s+b+2} e^{\frac{-1}{s+b+2}} f^{\frac{-1}{s+b+2}}, b = \frac{ce^{s+1}}{b+1}, k = \frac{1}{b+1}$$

fiat $m = \frac{s-b}{b+1}$ vel, si reducenda sit eadem æquatio ad hanc formam (B)... $dx - y^2 x^m dx = dy$ sumatur $u = ex^k, z = by$ ubi

$$\text{fit } c = -(g+1) \frac{2}{s+b+2} e^{\frac{-1}{s+b+2}} f^{\frac{-1}{s+b+2}}, b = \frac{ce^{s+1}}{s+1}, k = \frac{1}{s+1}$$

fiat $m = \frac{b-s}{s+1}$ ubi observandum est in æquatione Bernoull.

$ax^{\frac{-4n}{2n+1}} dx - y^2 dx = bdy$ casus omnes exponentis $\frac{-4n}{2n+1}$, si n sit numerus affirmativus, & casus omnes $\frac{-4n}{2n+1}$ si n sit negativus reduci posse ad formulam A, omnes vero casus exponentis $\frac{-4n}{2n-1}$ si n sit negativus & omnes $\frac{-4n}{2n-1}$ si n sit affirmativus redigi ad formulam B.

Iam posito $2n-1 = p$ fiat

$$\begin{aligned} & x^{\frac{-2n+1}{p}} + Ap^{\binom{n-0}{n+0}} x^{\frac{-2n-0}{p}} + Bp^{\binom{n-1}{2n-1}} x^{\frac{-2n-1}{p}} + Cp^{\binom{n-2}{3n-3}} x^{\frac{-2n-2}{p}} \\ & + Dp^{\binom{n-3}{4n-6}} x^{\frac{-2n-3}{p}} + Ep^{\binom{n-4}{5n-10}} x^{\frac{-2n-4}{p}} + Fp^{\binom{n-5}{6n-15}} x^{\frac{-2n-5}{p}} + \&c. \\ \} = & 1 + Ap^{\binom{n-1}{n-1}} x^{\frac{-1}{p}} + Bp^{\binom{n-2}{2n-3}} x^{\frac{-2}{p}} + Cp^{\binom{n-3}{3n-6}} x^{\frac{-3}{p}} \\ & + Dp^{\binom{n-4}{4n-10}} x^{\frac{-4}{p}} + Ep^{\binom{n-5}{5n-15}} x^{\frac{-5}{p}} + Fp^{\binom{n-6}{6n-21}} x^{\frac{-6}{p}} + \&c. \end{aligned}$$

leges quibus progrediuntur harum serierum termini perspicuæ sunt, crescunt enim omnes numeri in coefficientibus ordine naturali præter ultimos denominatorum qui servant progressionem triangularium 1, 3, 6, 10, &c. litteræ maiores A, B, C, &c. recepto more indicant coefficientes quæ proxime antecedunt.

His præmissis considero æquationem generalem

A a 2 cu^s

$cu^s du + fu^b y^2 du = dy$ ut iam reductam ad alterutram. formularum A vel B & infiaitorum illorum casuum integrationes uno theoremate complector: Aequationis different.

$x^{\frac{-(n+2n)}{2n-1}} dx - x^{\frac{(-2n-2n)}{2n-1}} y^2 dx = dy$ (ubi n fit numerus integer affirmativus) integralis est $y = \alpha \begin{matrix} \searrow \\ \nearrow \end{matrix} \beta$. Signum $\begin{matrix} \searrow \\ \nearrow \end{matrix}$ denotat divisionem ambiguam, si enim in formula aequationis diff. ex signis $\mp \pm$, datum fuerit superius (qui est casus formulæ A) sumendus est in integrali divisor quem indicat angulus a linea superiore ad horizontalem factus nempe β ; si inferius signum in aequatione diff. datum fuerit, sumatur in integrali divisor quem inferior linea ad horizontalem ascendens designat ut fiat $y = \frac{\beta}{\alpha}$.

Ne quis vero in usu huius canonis hæsitet, exemplis nonnullis eundem illustrabimus quibus intellectis posteriores casus non erunt difficiles.

I. Sit integranda aequatio $x^{-4} dx - y^2 dx = dy$ quæ pertinet ad formulam A, fiet $n=1, p=1, \alpha=x$ $+x$, $\beta=1$. Ergo integralis quæsitæ $y = \frac{\alpha}{\beta} = x$ $+x$ unde sequitur aequationis $dx - y^2 x^{-4} dx = dy$ integrelem esse $y = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{x^{-1} + x^{-2}}$.

II. Sit integranda aequatio $x^{\frac{-8}{3}} dx - y^2 dx = dy$, fiet $n=2, p=3, y = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{x^{\frac{-3}{3}} + 3x^{\frac{-4}{3}} + 3x^{\frac{-5}{3}}}{1 + 3x^{\frac{-1}{3}}}$, unde sequitur aequationis $dx - y^2 x^{\frac{-8}{3}} dx = dy$ integrelem esse $y = \frac{\beta}{\alpha} =$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 + 3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{3}{3}} + 3x^{-\frac{4}{3}} + 3x^{-\frac{5}{3}}}$$

III. Eodem modo æquationis $x^{-\frac{(6+5)}{5}} dx - y^2 x^{-\frac{(6+5)}{5}} dx = dy$ integralis inuenietur

$$y = \alpha \Leftrightarrow \beta = \left(x^{-\frac{5}{5}} + 5x^{-\frac{6}{5}} + 10x^{-\frac{7}{5}} + \frac{25}{3}x^{-\frac{8}{5}} \right) \\ \Leftrightarrow \left(1 + 5x^{-\frac{1}{5}} + \frac{25}{3}x^{-\frac{2}{5}} \right)$$

IV. Æquationis $x^{-\frac{(8+8)}{7}} dx - y^2 x^{-\frac{(8+8)}{7}} dx = dy$ integralis est

$$y = \left(x^{-\frac{7}{7}} + 7x^{-\frac{8}{7}} + 21x^{-\frac{9}{7}} + \frac{98}{3}x^{-\frac{10}{7}} + \frac{343}{15}x^{-\frac{11}{7}} \right) \\ \Leftrightarrow \left(1 + 7x^{-\frac{1}{7}} + \frac{98}{5}x^{-\frac{2}{7}} + \frac{343}{15}x^{-\frac{3}{7}} \right)$$

Quodsi iam progrediamur ad æquationem differentialem uno termino ampliorem $ax^m dx + byx^p dx + cy^2 dx = dy$ (ex qua tamen duæ coefficientium a, b, c , pro lubitu in alias transmutari possunt, ut supra indicatum fuit) similiter varii se offerunt casus integrabiles quorum nonnullos explicabimus.

I. Si $ax^{\frac{4n+2b+4}{-2n+1}} dx + byx^{-1} dx + cy^2 dx = dy$ æquatio erit integrabilis dato n numero quocunque integro.

Demonstr.

Ponatur $y = \frac{-(b+1)}{c} x^{-1} + x^{-b-2} u$ transformabitur æquatio data in hanc

A a 3

ax

$$ax^{\frac{4n+2b+4}{-2n+1}} dx - \frac{(b^2+b)}{c} x^{-2} dx + bx^{-b-3} u dx + (b^2+2b+1)x^{-2} dx - (2b+2)x^{-b-3} u dx + cx^{-2b-4} u^2 dx = \frac{(b+1)}{c} x^{-2} dx + (b+2)x^{-b-3} u dx + x^{-b-2} du$$

five destructis terminis æqualibus, $ax^{\frac{4n+2b+4}{-2n+1}} dx + cx^{-2b-4} u^2 dx = x^{-b-2} du$, multiplicentur omnia per x^{+b+2} fit $ax^{-\frac{2nb+b+2}{-2n+1}} dx + cx^{-b-2} u^2 dx = du$, tandem ponatur $x = v^{\frac{1}{b+1}}$. fiet $\frac{a}{b+1} v^{-\frac{4n}{-2n+1}} dv - \frac{c}{b+1} u^2 dv = du$, quam constat esse integrabilem si n fit numerus quicunque integer.

Potest etiam sic demonstrari: fit $ax^{\frac{-4f+2b}{2f+1}} dx + byx^{-1} dx + cy^2 dx = dy$, (quæ æquatio non differt a priori, si ponatur $n = f + 1$) fiat $y = x^b u$ mutabitur æquatio in hanc $ax^{\frac{-4f+2b}{2f+1}} dx + cx^{2b} u^2 dx = x^b du$, divisis omnibus per x^b fit $ax^{\frac{-4f+b-2fb}{2f+1}} dx + cx^b u^2 dx = du$. Ponatur $x = z^{\frac{1}{b+1}}$. fiet $\frac{a}{b+1} z^{\frac{-4f}{2f+1}} dz + \frac{c}{b+1} u^2 dz = du$, quam constat esse integrabilem si f fit numerus quicunque integer.

Exempl. 1.

Si $m = 2b$ (cui respondet $n = 1$) hoc est, si æquatio data sit $ax^{2b} dx + byx^{-1} dx + cy^2 dx = dy$

erit $y = (-ax)^{\frac{1}{2}} x^b$.

Exempl. 2.

Si $m = \frac{2b-4}{3}$, (cui respondet $n = -2$) hoc est si æquatio

quatio data fit $ax^{\frac{2b-4}{3}} dx + byx^{-1} dx + cy^2 dx = dy$.

$$\text{erit } y = \frac{1}{(-c:a)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{-b+2}{3}} - \frac{(b+1)}{3a} x^{\frac{-2b+1}{3}}}$$

Exempl. 3.

Si $f=1$ hoc est, si æquatio data fit $ax^{-2b-4} dx + byx^{-1} dx + cy^2 dx = dy$, erit $y = (-a:c)^{\frac{1}{2}} x^{-b-2} - \frac{(b+1)}{c} x^{-1}$.

atque sic in similibus exemplis determinari poterit valor y per x & constantes; singularis autem casus est ubi m non determinatur per coefficientes datas, scilicet si fuerit $ax^{-2} dx + byx^{-1} dx + cy^2 dx = dy$, ubi fit

$$y = \left(\frac{-(b+1) + \sqrt{(b+1)^2 - 4ac}}{2c} \right) x^{-1}. \text{ Gabriel Manfredius}$$

in tract. de constructione æquationum differ. primi gradus p. 167. art. 105. cum incidisset in æquationem $nx^2 dx - ny^2 dx + x^2 dy = xy dx$. hæc, inquit, æquatio non apparet quomodo construibilis sit, neque enim videmus quomodo illam integremus, nec quomodo indeterminatas ab invicem separemus. Sed integrari potest per formulam nostram hoc modo: dividatur æquatio per x^2 , fiet $ndx - x^{-1} y dx - nx^{-2} y^2 dx = dy$, positoque $x = z^{-1}$ erit $-nz^{-2} dz + z^{-1} y dz + ny^2 dz = dy$. Ergo $y = \frac{-1 + \sqrt{n^2 + 1}}{n} z^{-1}$.

II.

Si æquatio A... $ax^{2p-1} dx + byx^p dx + cy^2 dx = dy$ integrari potest, erit etiam æquatio

$$B... \frac{(abp+a^2c)}{p^2} x^{2p} + \frac{(2ac+bp)}{p} x^p u dx + cu^2 dx = du$$

integrabilis.

Demonstr.

Demonstratio.

Ponatur $y = \frac{a}{p}x^p + u$, fiet

$$\begin{aligned} ax^{p-1} dx &= \frac{a}{p} x^p dx + u dx \\ byx^p dx &= \frac{ab}{p} x^{2p} dx + bux^p dx \\ cy^2 dx &= \frac{a^2 c}{p^2} x^{2p} dx + \frac{2ac}{p} ux^p dx + cu^2 dx \\ = dy &= du + ax^{p-1} dx \end{aligned}$$

quæ est ipsa æquatio B. si pro u ponatur y , atque similiter, si aliqua æquatio integrabilis revocari possit ad B demonstratum est æquationem A esse integrabilem.

Exempl. 1.

Cum æquatio $ax^{p-1} dx + byx^p dx + \frac{b}{a}y^2 dx = dy$, fit integrabilis (fit enim $y = \frac{a}{b}x^{-1}$) erit etiam $(\frac{ab+abp}{pp})x^{2p} dx + (\frac{2b+bp}{p})yx^p dx + \frac{b}{a}y^2 dx = dy$ integrab. quæ æquatio revocari potest ad hanc formam

$$ax \frac{(b^2 - 4ac) + b\sqrt{b^2 - 4ac}}{ac} dx + byx \frac{(b^2 - 4ac) + b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2ac} dx + cy^2 dx = dy$$

unde eruitur $y = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})x^{\frac{(b^2 - 4ac) + b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} - \frac{c}{x}}{2c}$

Exempl. 2.

Quoniam æquatio $ax \frac{-2b-ac}{b} dx + byx \frac{-b-ac}{b} dx + cy^2 dx = dy$ est integrabilis, (fit enim $y = \frac{-b-ac}{c}x^{-1}$) erit

erit

QVIBVSDAM INTEGRABILIVS. 193

erit etiam $\frac{-ab^3}{(b+ac)^2} x^{\frac{-2b-2ac}{b}} dx + \frac{abc-b^2}{(-b+ac)} x^{\frac{-b-ac}{b}} u dx$
 $+ cu^2 dx = du.$

integrabilis & $u = \frac{-bb}{bc+ac} x^{\frac{-b-ac}{b}} - \frac{1}{c} x^{-1}.$

Exempl. 3.

Quoniam ex æquatione $ax^{\frac{ac-2b}{b}} dx + byx^{\frac{ac-b}{b}} dx$

$+ cy^2 dx = dy$, fit $y = \frac{1}{ab} x^{\frac{-ac+b}{b}} \frac{bx}{a}$

Erit etiam $\frac{(2a^2c-ab)^2}{(ac-b)^2} x^{\frac{2ac-2b}{b}} dx + \frac{(3abc-b)^2}{ac-b} x^{\frac{ac-b}{b}} u dx$

$+ cu^2 dx = du,$

integrabilis & $u = \frac{b^2}{ac-b} x^{\frac{ac}{b}}.$

III.

In quâ usunque casibus integrari potest

A — — $ax^m dx + byx^p dx + cy^2 dx = dy.$
 poterit etiam integrari

B — — $\frac{-c}{m+1} v^{\frac{-m}{m+1}} dv + \frac{-bu}{m+1} v^{\frac{p-m}{m+1}} dv + \frac{-a}{m+1} u^2 dv = du.$

Demonstr.

Ponatur $y = u^{-1}$ mutabitur æquatio A in
 $ax^m dx + bu^{-1} x^p dx + cu^{-2} dx = -u^{-2} du.$

Hæc multiplicetur per $-u^{-2}$ fiet $-cdx - bux^p dx - ax^m$

$u^2 dx = du.$ positoque $x = v^{\frac{1}{m+1}}$ prodibit

B — — $\frac{-c}{m+1} v^{\frac{-m}{m+1}} dv + \frac{-b}{m+1} uv^{\frac{p-m}{m+1}} dv + \frac{-a}{m+1} u^2 dv = du.$

B b

Exempl.

Exempl. 1.

Quoniam æquatio $ax^{\frac{-2b-ac}{b}} dx + byx^{\frac{-b-ac}{b}} dx + cy^2 dx = dy$ est integrabilis, ut antea dictum, poterit etiam integrari $\frac{b^2c}{ac+b} v^{-ac-b} dv + \frac{b^2}{ac+b} v^{\frac{b}{ac-b}} u dv + \frac{ab}{ac+b} u^2 dv = du$. quæ reduci potest ad $ax^{\frac{-ac-2}{ac+1}} dx + byx^{\frac{-1}{ac+1}} dx + cy^2 dx = dy$.

Exempl. 2.

Quoniam æquatio $ax^{\frac{ac-2b}{b}} dx + byx^{\frac{ac-b}{b}} dx + cy^2 dx = dy$ est integrabilis (vid. sup. Ex. 3.) erit etiam $\frac{-cb}{ac-b} x^{\frac{2b-ac}{ac-b}} dx - \frac{b^2}{ac-b} ux^{\frac{b}{ac-b}} dx - \frac{ab}{ac-b} u^2 dx = du$. quæ revocari potest ad hanc formam

$$ax^{\frac{2-ac}{ac-1}} dx + byx^{\frac{1}{ac-1}} dx + cy^2 dx = dy \text{ integrabilis.}$$

Exempl. 3.

Quoniam $ax^{-2} dx + byx^{\frac{-1 \pm \sqrt{1-4ac}}{2}} dx + cy^2 dx = dy$ est integrabilis, fit enim $y = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1-4ac}}{2c} \right) x^{-1}$

$\frac{-b}{c} x^{\frac{-1 \pm \sqrt{1-4ac}}{2}}$ erit etiam integrabilis.

$$ax^{-2} dx + bux^{\frac{-3 \pm \sqrt{1-4ac}}{2}} dx + ay^2 dx = dy$$

$$\& \text{ fiet } y = I: \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1-4ac}}{2a} x - \frac{b}{a} x^{\frac{1 \pm \sqrt{1-4ac}}{2}} \right)$$

IV.

Si in æquatione generali ponatur $c=0$ æquatio erit integrabilis dato $\frac{m-p}{p+1}$ numero integro affirmativo, potest autem hæc æquatio ad simpliciores terminos reduci, si po-

fi ponatur $x = z^{\frac{1}{n}}$, fiet enim $ax^{\frac{m-p}{n}} dz + bydz = dy$. Ergo $ax^m dx + bydx = dy$ erit integrabilis si n sit numerus integer positivus.

Exempla.

Si $n=1$ erit $y = \frac{-a}{b}x - \frac{a}{bb}$

Si $n=2$ erit $y = \frac{-a}{b}x^2 - \frac{2ax}{bb} - \frac{2a}{b^3}$

Si $n=3$ erit $y = \frac{-a}{b}x^3 - \frac{3ax^2}{bb} - \frac{6a}{b^3} - \frac{x^6 a}{b^4}$

& generatim dato n numero quocunque erit $y =$ seriei infinitæ

$$\frac{-a}{b}x^n - \frac{an}{2b}x^{n-1} - \frac{an(n-1)}{3b}x^{n-2} - \frac{an(n-1)(n-2)}{4b}x^{n-3} - \&c.$$

quæ toties abrumpitur quoties n est numerus integer positivus.

Si vero ponamus

$$y = ax^e u + \beta x^f u^2 + \gamma x^g u^3 + \delta x^h u^4 + \epsilon x^k u^5 + \&c.$$

transmutabitur æquatio $ax^m dx + bydx = dy$ in

$$ax^m dx + bax^e u dx + b\beta x^f u^2 dx + \&c.$$

$$= (ax^e + 2\beta x^f u + 3\gamma x^g u^2 + \&c.) du +$$

$(ax^{e-1} u + \beta f x^{f-1} u^2 + \gamma g x^{g-1} u^3 + \&c.) dx$. quæ similiter erit integrabilis si m sit numerus integer positivus ; ad quam formam reduci possunt plurimi casus particulares quorum integratio sine hoc theoremate non facile succederet.

Exempl. 1.

Sit data æquatio $x^3 dx + (2x-1)u dx - 2u^2 dx = (x-2u)$

du hoc est $a = a = e = 1. f = \gamma = \delta = \&c. = 0. \beta = -1. b = 2.$

$m = 3$. habebitur $u = \frac{x \pm \sqrt{2x^3 + 4x^2 + 3x + 3}}{2}$

B b 2

Exempl.

Exempl. 2.

Sit æquatio data

$$ax^2 dx + \frac{2}{3}ux dx - \frac{b}{5}ux^2 dx + u^3 dx - bu^3 x dx - bu^4 dx \\ = -\frac{1}{3}x^2 du - 3xu^2 du - 5u^4 du.$$

erit $\alpha = -\frac{1}{3}$. $\beta = 0$. $\gamma = -1$. $\delta = 0$. $\epsilon = -1$. & reliqui coefficients $= 0$. $e = 2$. $g = 1$. $k = 0$. $m = 2$. quam ob rem ipsa æquatio dextre tractata perducetur ad

$$u = \left(\frac{(-ab^2 x^2 - 2abx - 2a) \pm \sqrt{(ab^2 x^2 + 2abx + 2a)^2 + x^6}}{2b^3} \right)^{\frac{1}{3}} \\ + \left(\frac{(+ab^2 x^2 + 2abx + 2a) \pm \sqrt{(ab^2 x^2 + 2abx + 2a)^2 + x^6}}{2b^3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

V.

Æquatio $ax \frac{-2ac-b}{b} dx + bx \frac{-2ac}{b} u dx + cu^2 dx = du$ est integrabilis, si $\frac{\mp ac}{2ac-b}$ sit numerus integer.

Demonstr.

Si ponatur $u = y - \frac{b}{2c} x \frac{-2ac}{b}$ fiet

$$\left\{ \begin{aligned} & ax \frac{-2ac-b}{b} dx \\ & + bx \frac{-2ac}{b} u dx = by \frac{-2ac}{b} dx - \frac{b^2}{2c} x \frac{-4ac}{b} dx \\ & + cu^2 dx = -by \frac{-2ac}{b} dx + \frac{b^2}{4c} x \frac{-4ac}{b} dx + cy^2 dx \\ & = du = dx \frac{-2ac-b}{b} dx \quad \dots \quad + dy. \end{aligned} \right.$$

hoc est, omissis terminis qui sese destruunt,

$$\frac{b^2}{4c} x \frac{-4ac}{b} dx + cy^2 dx = dy.$$

quam constat esse integrabilem si $\frac{\mp ac}{2ac-b}$ sit numerus integer.

VI.

VI.

Aequatio $ax^{2e} dx + bux^e dx + \frac{b^2}{4a} u^2 dx = du$ est integrabilis si $\frac{e+1}{2e+2}$ sit numerus integer.

Demonstr.

Si ponatur $u = y - \frac{2a}{b} x^e$ fiet

$$\left. \begin{aligned} & \int ax^{2e} dx \\ & \int + bux^e dx = -2ax^{2e} dx + byx^e dx \\ & \int + \frac{b^2}{4a} u^2 dx = ax^{2e} dx - byx^e dx + \frac{b^2}{4a} y^2 dx \end{aligned} \right\}$$

$$= du = -\frac{2ae}{b} x^{e-1} dx - - - - - + dy.$$

feu omiffis terminis qui feſe deſtruunt $\frac{2ae}{b} x^{e-1} dx + \frac{b^2}{4a}$

$y^2 dx = dy$ quam conſtat eſſe integrabilem ſi $\frac{e+1}{2e+2}$ ſit numerus integer.

ANALYSIS AEQVATIONVM
 QVARVNDAM
 DIFFERENTIALIVM,

Auctore

Nicolao Bernoulli Ioh. F.

I.

x. Jul. 1726

A

Equationes differentiales quæ indeterminatas habent ad simplices potentias elevatas, si ex tribus constent terminis, omnes ad hanc formulam reduci possunt per divisionem

$$(A) \quad ax^m y^n dx + bx^p y^q dx = dy$$

& simplicius ad hanc

$$(B) \quad ax^m y^n dx + by^q dx = dy$$

acquirit enim æquatio (A) formam æquationis (B) si loco x^{p+1} ponatur simplex quædam littera: Denique si æquatio (B) dividatur per y^n , considereturque y_i^{-n+1} ut quantitas simplex, apparet posse æquationi (B) aliam conciliari formam simpliciolem, scilicet talem

$$(C) \quad ax^m dx + by^q dx = dy.$$

II Si quis generaliter æquationem (C) ad algebraicam reducere vel faltem in aliam transmutare posset ab indeterminatarum commistione liberam rem faceret meo iudicio utilissimam omnique laude dignam. Nemo autem, quantum scio, hætenus fuit, qui id præstiterit: Illud tamen a Cel. Hermanno, Patreque meo iam monstra-

stratum fuit, admittere æquationem (C) indeterminatarum separationem, quoties $q=1$, hancque restrictionem quodammodo compensarunt eo, quod loco x^m in primo termino possit accipi quæcunque functio ipsius x . Idem postea ego quoque inveni diversa via, quam in sequenti §. exponam. Tametsi enim viri allegati methodos suas publico non denegarint, puto tamen posse rei analyticæ aliquid emolumenti accedere, quotiescunque nova analysi antea nemini usitata theoremata eruuntur.

III. Sit ergo æquatio (D) $X dx + by dx = dy$, sitque c ille numerus, cuius logarithmus est unitas: ponatur $y = c^{bx}$ & $dy = bc^{bx} z dx + c^{bx} dz$; erit ergo $X dx + bc^{bx} z dx = bc^{bx} z dx + c^{bx} dz$, vel $X dx = c^{bx} dz$; vel (F) $dz = c^{-bx} X dx$, in qua posteriori æquatione indeterminatæ iam sunt a se invicem separatæ.

IV. Sunt præterea casus infiniti, in quibus æquatio (F) ad algebraicas per integrationes reduci potest, quando scilicet X denotat potentiam quandam rationalem ipsius x ; id est quando posito b numero integro & positivo habetur $X = x^b$, ita ut deinde sit (G) $dz = c^{-bx} x^b dx$. Est autem $c^{-bx} x^b dx = c^{-bx} x^b dx - \frac{b}{b} c^{-bx} x^{b-1} dx + \frac{b}{b} c^{-bx} x^{b-1} dx - \frac{b \cdot b-1}{bb} c^{-bx} x^{b-2} dx + \frac{b \cdot b-1}{bb} c^{-bx} x^{b-2} dx - \frac{b \cdot b-1 \cdot b-2}{b^3} c^{-bx} x^{b-3} dx + \frac{b \cdot b-1 \cdot b-2}{b^3} c^{-bx} x^{b-3} dx &c.$

quod si b sit numerus integer positivus abrumpitur hæc series, quæ talis est indolis ut semper bini termini integrari possint; mutabitur ergo æquatio (G) post integrationem non omiffa constante a in hanc aliam (H) $z + a$

$$= -\frac{1}{b}c^{-bx}x^b - \frac{b}{bb}c^{-bx}x^{b-1} - \frac{b \cdot b-1}{bbb}c^{-bx}x^{b-2} - \frac{b \cdot b-1 \cdot b-2}{bbbb}c^{-bx}x^{b-3} \text{ \&c.}$$

Pro reductione ulteriori æquationis (H) substituemus pro x valorem ipsius $c^{-bx}y$ (nam ab initio §. 3. positum fuit $y=c^{bx}z$) & sic habebitur æquatio talis (L) $c^{-bx}y + a = -\frac{1}{b}c^{-bx}x^b - \frac{b}{bb}c^{-bx}x^{b-1} - \frac{b \cdot b-1}{bbb}c^{-bx}x^{b-2} - \frac{b \cdot b-1 \cdot b-2}{bbbb}c^{-bx}x^{b-3} \text{ \&c.}$ quæ nimirum satisfacit genera-

liter æquationi (D) §. 3. posito $X=x^b$. Est vero æquatio finalis (L) mediæ naturæ algebraicam inter & differentialem, scilicet est ex ordine æquationum exponentialium. Sed omnino algebraica fit, si constans ad libitum assumenda a ponatur $=0$; tunc enim tota æquatio dividi potest per c^{-bx} & obtinetur $y = -\frac{1}{b}x^b - \frac{b}{bb}x^{b-1} - \frac{b \cdot b-1}{bbb}x^{b-2} - \frac{b \cdot b-1 \cdot b-2}{bbbb}x^{b-3} \text{ \&c.}$ quæ æquatio pure algebraica etiam satisfacit æquationi differentiali $x^b dx + by dx = dy$, sed illam non totam complectitur, quod pariter iam Celeb. Christianus Goldbach alia via usus acute observavit.

V. Redeo ad æquationes §. 1. expositas, quarum una semper ad alteram reduci potest. Dicendum ergo æquationem (A) non minus quam aliam (C) separationem indeterminatarum admittere generaliter; modo fit $q=1$; hic id notari meretur, quod si vel in unico alio casu idem præstari possit, succederet res generalissime; solus casus $q=1$ talis est: ut non mutari possit in alium. Id ut intelligatur plenius ponemus verbi gratia in æquatione hac $ax^m y^n dx + bx^p y^q dx = dy$, posse semper indeterminatas separari si $q=3$; multiplicentur termini per y^r & orietur $ax^m y^{n+r} dx + bx^p y^{3+r} dx = y^r dy$; ponatur $y = z^s$ ita ut habeatur $ax^m z^{ns+r^s} dx + bx^p z^{3s+r^s} dx = sz^{r^s+s-1} dz$; di-

vida-

vidatur æquatio per sz^{r+s-1} & erit $\frac{a}{s} x^m z^{r+s-1} dx + \frac{b}{s} x^p z^{2s+1} dx = dz$, quæ iam æquatio non minus generalis est, quam ipsa æquatio (A).

VI. Considerabimus imposterum æquationem (C) ad quam omnes §. I. expositæ reduci possunt. Si in illa consideretur q tanquam numerus datus, inveniri poterunt valores ipsius m , ut formula reductionem desideratam admittat. Ita v. gr. nemo non videt posse semper esse $m=0$; facile quoque apparet, posse idem præstari, si sit $m = \frac{q}{1-q}$, quia ponendo $y = z^{1-q}$ mutatur hæc æquatio $ax^{q:1-q} dx + by^q dx = dy$ in hanc $ax^{q:1-q} dx + bz^{q:1-q} dz = \frac{1}{1-q} z^{q:1-q} dz$ cuiusmodi æquationum homogenearum reductionem Pater meus iam diu docuit: Poterunt forsan alii valores præter dictos unicuique obvios erui, an vero infiniti dubito, nisi cum $q=2$, quem solum casum hanc prærogativam habere suspicor, dignum proin particulari Geometrarum attentione. Commendatus publice examini eorum fuit a Cl. Com. Riccato in Actis Lips. Suppl. Tom. 8. p. 73. Nemo autem observata sua cum publico communicavit præter fratrem meum, qui ostendit modum reducendi æquationem Riccatianam ad indeterminatarum separationem usque, quoties $m = \frac{-4c}{2c+1}$, ubi c potest denotare quemcunque numerum integrum; & nuperrime etiam coram Societate monstravit Cl. Christianus Goldbach methodum inveniendi æquationes algebraicas æquationi Riccatianæ in certa hypothesi satisfaciennes: Ultimum hoc nos ambo primi præstitimus ante hos quinque annos & certe fecimus hac in re, quod prima fronte impossibile videri poterat eo, quod generaliter casus æquationis modo defini-

C c niti

niti pendeant omnes a quadratura circuli vel hyperbolæ, ita ut non desit suspicioni locus, æquationes algebraicas exhiberi non posse nisi simul vel circuli vel hyperbolæ quadratura innotescat. Dabo in sequentibus paradoxæ solutionem, nunc ipsam analysin aggrediar.

VII. Cum fuerit $q=2$ fit æquatio (C) talis

$$(M) ax^m dx + byy dx = dy$$

ponatur $m=0$, & erit (N) $adx + byy dx = dy$, vel $dx = \frac{dy}{a+byy}$, cuius æquationis constructio pendet a quadratura circuli, si ambæ quantitates a & b sint affirmativæ vel ambæ negativæ, secus postulat quadraturam hyperbolæ. Nunc ostendam quomodo ex casu $m=0$ infiniti alii deduci possint. In æquatione (M) ponatur $x = (m+3)^2: m+2 p^{1: m+3}$ & $y = -\frac{1}{b} \times (m+3)^{-2: m+2} p^{-1: m+3} - \frac{a}{b} \times (m+3)^m: m+2 p^{-2: m+3} q^{-1}$, atque sic obtinebitur nova æquatio priori plane similis, nempe talis

$$(N) a p^{-m-4: m+3} dp + b q q dp = dq.$$

Ex hac autem similitudine æquationum (M) & (N) concluditur quod quoties m est casus separabilitatis, sit quoque $\frac{-m-4}{m+3}$ talis: hincque statim infiniti oriuntur; si enim $m=0$, fit $\frac{-m-4}{m+3} = -\frac{4}{3}$; dein si $m = -\frac{4}{3}$, fit $\frac{-m-4}{m+3} = -\frac{8}{5}$, & sic porro: omnes hi casus $m=0$, $m = -\frac{4}{3}$, $m = -\frac{8}{5}$ &c. continentur in hac formula generali $m = \frac{-4^n}{2^n + 1}$ intelligendo per n numerum integrum.

VIII. Ex præcedenti §. patet posse hanc æquationem $ax^{-4^n: 2^n+1} dx + byy dx = dy$ semper geometricæ ope quadraturæ circuli vel hyperbolæ construi, quoties n est numerus integer, quia semper potest reduci ad hanc æquationem $a ds + b t t ds = dt$; sed pro hac reductio-

ductione requiruntur & plures substitutiones , quo maior fuerit numerus n , unde non nisi magno labore desiderata reductio obtineretur , nisi lex generalis observetur pro requisitis substitutionibus , qua mediante dein unica substitutione res perfici potest. Cæterum me non monente patet, quod sicuti ex æquatione (M) deducta fuit altera (N) ita reciproce ex hac illa deduci possit, unde si $\frac{-m-4}{m+3}$ fit casus separabilitatis erit quoque m talis ; hinc novus eruitur casus & ope huius infiniti alii ; fiat ergo $\frac{-m-4}{m+3} = 0$ & erit $m = -4$; dein fiat $\frac{-m-4}{m+3} = -4$, & erit $m = -\frac{8}{3}$; & sic continue alii separabilitatis casus eruntur , qui continentur in hac formula generali $m = \frac{-4^n}{2^n - 1}$, quam combinando cum priori fit denique $m = \frac{-4^n}{2^n + 1}$. Ita quoque invenerunt Cl. Goldbach & frater meus præter ipsum problematis Auctorem ; nemo autem nostrum alios insuper reductionis casus invenire potuit.

IX. Hactenus methodum tradidi, qua apparet esse formulam $ax^{-4^n} : 2^n \pm 1 dx + byydx = dy$, separabilem quoties n est numerus integer , atque eandem exprimere æquationem ad curvas quarum constructio dependet vel a quadratura circuli vel a quadratura hyperbolæ. In hac re id notatu dignum puto , quod si a & b sint quantitates altera negativa altera affirmativa , semper æquationes algebraicæ dari possunt pro eadem illa æquatione modo allegata , cuius constructio postulat quadraturam hyperbolæ : Neque tamen exinde fluit (quod prima fronte videtur) hyperbolæ quadratura : Demonstrare autem possum , solas æquationes differentiales a quadratura hyperbolæ pendentes tales esse posse, ut contineant æquationes partim algebraicas , partim non algebraicas : Exem-

plum iam superius dedi §. 4. ubi demonstravi æquationem $x^b dx + bydx = dy$, posito $b =$ numero integro positivo continere æquationes partim algebraicas partim a quadraturæ hyperbolæ pendentes ; iam alterum exemplum apponam atque æquationes algebraicas dabo pro hac æquatione differentiali $-ax^{-4^n} : 2^n + 1 dx + byydx = dy$.

X. In §. 7. monstravi omnes separabilitatis casus expressos per $\frac{-4^n}{2^n + 1}$ ita inter se cohærere ut semper unus ad alterum reduci possit , quapropter si in unico casu æquatio algebraica desiderata erui potest, poterit per reductiones idem præstari in omnibus reliquis. Inquiram itaque æquationem algebraicam satisfacientem casui particulari huius æquationis $ax^m dx + byydx = dy$. Sit æquatio algebraica talis

$$y = ax^n + \beta x^{n+1} + \gamma x^{n+2} - - - + \delta x^{n+p}$$

per a, β, γ &c. intelligo coefficientes incognitas ; & per n & p itidem numeros determinandos pro exponentibus indico ; determinabo primo n & p : substituatur in æquatione proposita differentiali valores pro yy & dy , & habebit æquatio resultans neglectis coefficientibus talem formam

$$x^m dx + x^{2n} dx + x^{2n+1} dx + x^{2n+2} dx - - - + x^{2n+2p} dx \\ = x^{n-1} dx + x^n dx + x^{n+1} dx - - - + x^{n+p-1} dx.$$

ut hæc æquatio fiat identica, efficiam ut primus & secundus terminus sint homogenei, dein quoque ut tertius sit talis respectu primi ab altera parte, nec non ultimus ab una parte respectu ultimi ab altera parte ; ita fient omnes intermedii homogenei ; exinde obtinentur huiusmodi æquationes $m = 2n, 2n + 1 = n - 1$. & $2n + 2p = n + p - 1$; vel $m = -4, n = -2$ & $p = 1$; hi valores indicant, posse æqua-

æquationem talem $y = ax^{-1} + \xi x^{-2}$ satisfacere huic æquationi differentiali $-ax^{-4}dx + byydx = dy$, modo a & ξ recte definiantur; definiuntur autem ex comparatione æquationum post substitutionem valorum pro yy & dy ; fiet nimirum $a = -\frac{1}{b}$ & $\xi = +\sqrt{\frac{a}{b}}$; habemus itaque pro hac æquatione differentiali (P) $-ax^{-4}dx + byydx = dy$, hanc algebraicam (Q) $y = -\frac{1}{bx} + \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{a}{b}}$. Si porro fiant substitutiones §. 7. indicatæ tam in æquatione differentiali (P) quam in integrali (Q) poterunt successive æquationes algebraicæ erui pro singulis casibus huius æquationis generalioris $-ax^{-4n} : 2n+1 dx + byydx = dy$: Imo si recte observetur lex substitutionum, in seriem redigentur omnes illæ æquationes algebraicæ magis minusve compositam pro ratione magnitudinis numeri n ; verum fatendum est, magnam attentionis perspicaciæque vim pro illa obtinenda requiri; felicem tamen successum expertus est Cl. Christ. Goldbach. (vid. p. 187): hanc seriem considerans, ut & naturam substitutionum pro separationis negotio requisitarum, inducor ut credam plane impossibile esse, semper in æquatione generali Riccatiana ($ax^m ax + byydx = dy$) æquationes algebraicas eruere vel separare indeterminatas; cæterum cur in casu particulari $m = -\frac{4n}{2n+1}$, necesse sit, ut a & b affirmative sumtæ habeant signa diversa liquet ex eo, quod in æquatione algebraica (Q) habeatur $\sqrt{\frac{a}{b}}$ quæ secus fieret imaginaria; confirmatur hinc quod dixi §. 9. solas æquationes quæ pendunt a quadratura hyperbolæ posse partim esse pro curvis algebraicis, partim pro transcendentibus.

XI. Hæc iam inveneram cum Venetiis agerem eademque cum fratre Daniele per litteras communicave-

ram, qui alia methodo æquationes illas algebraicas directe, id est, integrando eruit, postquam prius iam casus separabilitatis reperisset: transcribam hic ipsius verba in latinum sermonem versa excerpta ex litteris, quas Basilea ad me dedit. „ Libenter, inquit, intellexi ex ultimis tuis
 „ Te dare posse æquationes algebraicas pro æquatione
 „ Riccatiana $-ax^{-4n}: 2n \pm 1 dx + byydx = dy$; hoc ego minus
 „ fieri posse putassem; sed eius rei certior a Te factus
 „ mox idem inveni; mitto Tibi methodum meam, quæ
 „ illam cum Tua comparare possis. Sit (A) $-ads$
 „ $+bttds = dt$; ergo $-ds = \frac{dt}{a-br}$, & integrando cum ad-
 „ ditione constantis C, erit $C - s = \frac{\log. \sqrt{a} + i\sqrt{b} - \log. \sqrt{a} - i\sqrt{b}}{2\sqrt{ab}}$,
 „ vel si n dicatur numerus, cuius logarithmus est unitas,
 „ habebitur (B) $n^{C-s \times 2\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a} + i\sqrt{b}}{\sqrt{a} - i\sqrt{b}}$, est ergo æquatio (B)
 „ identica cum proposita (A). ponatur in utraque $s = -x^{-1}$
 „ & $t = \frac{1}{b}x + xxy$, & erunt æquationes resultantes adhuc i-
 „ denticæ: differentialis quæ prodit talis est $-ax^{-4}dx$
 „ $+ byydx = dy$, altera exponentialis ita se habet, si recte
 „ reducatur (D) $n^{(Cx+1) \times 2\sqrt{ab}} = \frac{x + bxy + \sqrt{ab}}{x - bxy + \sqrt{ab}}$; sed cum C
 „ sit quantitas arbitraria & constans, faciamus illam infi-
 „ nitam & erit primum æquationis exponentialis mem-
 „ brum infinitum; oportet ergo ut & alterum sit ta-
 „ le, idque est, cum denominator ipsius = 0, seu $-x$
 „ $-bxy + \sqrt{ab} = 0$; seu $y = -\frac{x + \sqrt{ab}}{bx}$ seu $y = -\frac{1}{b}x + \frac{1}{bx}\sqrt{\frac{a}{b}}$
 „ quæ proin comprehenditur in hac æquatione $-ax^{-4}$
 „ $dx + byydx = dy$. Si vero C ponatur quantitas infinita
 „ negativa, erit primum æquationis (D) membrum = 0,
 „ quapropter iam numerator alterius membri debet esse
 „ = 0, unde $y = -\frac{1}{b}x + \frac{1}{bx}\sqrt{\frac{a}{b}}$, & combinando utrumque va-
 „ , , lozem

valorem ipsius y , habebitur denique $y = -\frac{1}{bx} + \frac{1}{ax} \sqrt{\frac{a}{b}}$, quæ,
 ultima æquatio plane eadem est cum illa, quam mihi
 perscripsisti; de reliquis casibus nihil dico; nosti enim,
 illos per methodum nostram reductionum facile habe-
 ri ope unius iam inventi.

C. G.
 METHODVS INTEGRANDI
 AEQVATIONEM DIFFEREN-
 TIALEM

$$aydx + bx^n dx + cx^{n-1} dx + ex^{n-2} dx + etc. = dy.$$

ubi n sit

NUMERVS INTEGER POSITIVVS.

Postquam Cel. Ioh. Bernoullius demonstravit, 20. Sept. 1726.
 æquationem quancunque differentialem, in
 cuius terminis licet x & y permixtæ sint, si
 modo in quocunque termino eadem reperia-
 tur exponentium summa, esse integrabilem, patet hoc
 ipsum theorema ad innumeras alias æquationes, in quibus
 summa exponentium non est constans per idoneas sub-
 stitutiones extendi posse, nam si v. gr. sit æquatio

$$(a + bxy + cx^2y^2 + ex^3y^3 + \&c.) dx + (lx^2 + mx^3y + nx^4y^2 + \&c.) dy = 0,$$

vel

$$(ay + bxy^2 + cx^2y^3 + \&c.) dx + (lx + mx^2y + nx^3y^2 + \&c.) dy = 0.$$

in

in quarum utraque parte summa exponentium continuo crescit, sola substitutione $y = z^{-1}$ ad eandem exponentium summam revocari possunt; & generatim, data æquatio $(ax^\pi + bz^\tau x^{\pi-1} + \&c.)dx$
 $+ (mx^\pi z^{\tau-1} + nx^{\pi-1} z^{2\tau-1} + px^{\pi-2} z^{3\tau-1} + \&c.)dz = 0.$
 ad æqualem exponentium summam reducitur si fiat $z = y^\tau.$

Præterea licet huiusmodi substitutione quæ omnium facillima est non obtineatur reductio quæsitæ ad æqualem summam exponentium, non illico existimandum est reductionem nullam succedere, fieri enim potest ut natura terminorum substitutiones magis complicatas postulet, sic v. gr.

$adx + bdy + cxdx + exdy + fydx + gydy = 0.$
 indiget his substitutionibus

$$x = z + \frac{bf - ag}{cg - ef}$$

$$y = u + \frac{ae - bc}{cg - ef}$$

ut redigatur ad formam

$$(cz + fu)dz + (ez + gu)du = 0.$$

Æquatio

$$\left. \begin{array}{l} axdx + cxdx \\ +bcx + 2exx \\ +bx^2 + c^2x \\ +3cx^2 \\ +2x^3 \end{array} \right\} = 0$$

indiget substitutione

$$x = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4y}}{2}$$

ut redigatur ad formam

$$axdx + bydx + exdy + ydy = 0.$$

Theo-

Theorema vero, quod iam proponimus in hoc cum Bernoulliano convenit, quod nullo terminorum numero, nulla coefficientium determinatione limitetur, sed eo differt, quod non requirat constantem summam exponentium in uno quovis termino, neque ad eandem reduci possit.

Ut ostendamus æquationem nostram in quocunque casu non solum separabilem esse, sed etiam integrabilem, a facillioribus exemplis incipiemus.

Sit $aydx + bxdx + cdx = dy$.

Invenietur $y = -\frac{b}{a}x - \frac{(b+ac)}{a}$

Sit $aydx + bx^2 dx + cxdx + edx = dy$.

erit $y = -\frac{b}{a}x^2 - \frac{(2b+ac)}{2a}x - \frac{(2b+ac+a^2 e)}{2aa}$

Sit $aydx + bx^3 dx + cx^2 dx + exdx + fdx = dy$.

erit $y = -\frac{b}{a}x^3 - \frac{(3b+ac)}{2}x^2 - \frac{(6b+2ac+a^2 e)}{a^3}x - \frac{(6b+2ac+a^2 e+a^3 f)}{a^4}$

Ex quarum coefficientium progressionem facile eruitur integralis nostræ æquationis, dato pro n numero quocunque integro positivo

$$y = -\frac{b}{a}x^n + \frac{nA-c}{a}x^{n-1} + \frac{(n-1)B-e}{a}x^{n-2} + \frac{(n-2)C-f}{a}x^{n-3} + \&c.$$

ubi litteræ maiores A, B, C, &c. indicant coefficientes terminorum proxime antecèdentium.

D d

DE

DE EPICYCLOIDIBVS
IN SVPERFICIE SPHAERICA
DESCRIPTIS.

Auctore

Iacobo Hermanno.

M Nov.
1726.

Triginta quatuor iam effluxere anni, ex quo ænigma geometricum de miro opificio te-
studinis quadrabilis Hemisphæricæ Autore
D. Pio Lisci Pofillo Geometra Florentiæ
exiit in publicum. Sub hoc nomine,
quod per anagramma significat *Postremo Galilæi Discipulo,*
Vincentius Vivianus Magni Ducis Heturriæ Mathematicus
latere voluit. Is enim impresso programme æni-
gma suum peritioribus Analystis examinandum commen-
davit his verbis: Cuius (ænigmatis) divinatio a secretis
artibus illustrium Analystarum vigentis ævi expectatur,
quod in Geometriæ pura historia versatus, ad tam re-
condita videatur invalidus.

Iplum vero ænigma ita habebat : Inter venerabilia
olim Græciæ monumenta extat adhuc, perpetuo quidem
duraturum, Templum augustissimum ichnographia cir-
culari ALMAE GEOMETRIAE dicatum, quod te-
studine intus perfecte hemisphærica operitur : Sed in
hac fenestrarum quatuor æquales areæ (circum ac supra
basin hemisphære ipsius dispositarum) tali configuratione
am-

amplitudine, tantaque industria, ac ingenii acumine sunt extructæ, ut his detractis, superstes curva testudinis superficies, pretioso opere musivo ornata, Tetragonismi vere geometrici sit capax.

Præsentis ænigmatis enodatio (quod spectat ad huius admirabilis fornix tum constructionem expeditissimam, tum quadraturam, *Sereniss. FERDINANDO Magno Principi Etruriæ*, Scientiarum & Nobiliorum Artium Cultori ac Patrono Generosissimo, ab eodem ænigmatista oblata iam est; qui quidem simul non dubitat, quin hoc ipsum ænigma a singulis litterario in orbe degentibus hodie præclarissimis Analystis sit statim divinandum, proprias quadrations impertiendo singularis testudinis huius tetragonismicæ ab hemisphæra dissectæ, & ipsorum peracutas indagines, multiplicesque industrias ad hoc unum idemque collimantes impatienter expectat, ut hinc, qui temere contumelias in Geometriam iacere audent, silere discant, vel potius maxima cum voce exclament: *ob! unica verorum sciscitabilium scientia a Divina in hominum mente infusa, ut hæc imperviis, mutabilibus, fallacibusque contemtis, æterna ista, quæ semper & unicuique sunt eadem, tantum appetat, nihilque aliud unquam magis innocuum scire perquirat. Hucusque Vivianus.*

Ex hoc proponendi modo, & ex eo, quod ad celeberrimos ævi sui Geometras programma suum mitti curavit, facile quis in opinionem venerit, hoc ænigma arduum & difficile solutu Autori suo visum fuisse; verumtamen cum non dubitarit, quin recentioribus analystis statim sit solvendum, forte non tam a difficultate quam ele-

gantia problema hoc suum tanti fecit , & credibile quoque est, hoc ænigma Præclarissimo Viro in veterum geometria innutrito & magna diligentia cuncta excutere solito plus negotiū dedisse quam aliis Analystis , qui methodos infinitesimales magis in promptu habebant. Illustris enim Leibnitiū eodem die, quo notitiam problematis nactus est, eius solutionem invenit, quam peculiari scheda descriptam & *Magno Etruriæ Principi* inscriptam proximo cursore Florentiam miserat, & paulo post totidem verbis in Acta Eruditorum 1692. transtulit; occurrunt quoque quinque solutiones diversæ, quas *Iac. Bernoulli* in eodem Actorum Anno Mens. Augusto exhibuit. Dedit quoque *Wallisus* aliquot solutiones in Cap. 192. suæ Algebræ. Sed omnium fere elegantissimæ videntur esse constructiones, quas *Vivianus* ipse in peculiari opusculo Italico sermone Anno 1692. Florentiæ edito, sed sine demonstrationibus, publico impertivit, vid. Act. Erudit. 1694. pag. 207. Demonstrationes a *Viviano* suppressas ex propria penu deprompsit deinceps & dedit *P. Abbas Guido Grandus* in singulari opere, quod *problemata Vivanea* inscripsit. Totius ænigmatis solutio eo redit, ut testudo iis fenestris aperiatur, quibus de superficie tota hemisphærii detractis ut residua maneat superficies geometricæ quadrabilis, quod infinitis diversis modis fieri potest. Iam olim *Pappus Alexandrinus* Collectionum Libr. 4. Prop. 32. ostendit, portionem sphæricæ superficiæ quadam spirali interceptam, dati cuiusdam trianguli octuplam esse; & facile fuit posteris alias in sphære superficie portiones invenire, quæ datis planis rectilineis æquales essent.

Sed difficilior videri poterat problema, si loco spatio-

tiorum in superficie sphaerica quadrabilium, quærentur lineæ geometricæ *rectificabiles*. Ita saltem sentit *Carol. Ernestus Offenburgius*, qui in *Actis Erudit.* 1718. pag. 175. hoc problema proposuit : *Testudinem Hemisphaericam fenestris ovalibus perforare, quarum unaquæque peripheriam absolute rectificabilem habeat.* Utrum hic Autor problema suum solverit nec ne, de eo mihi nihil constat, hoc saltem novi, problema non esse tantæ difficultatis, quantæ illud esse Autori videtur; solutio enim facilis manat a consideratione *Epicycloidum Sphaericarum*. Quid vero per has *Epicycloides* intellectum velim, explicatur in definitione sequenti.

Definitio.

Epicyclois Sphaerica est curva in superficie sphaerica descripta a puncto in peripheria basis alicuius coni recti assumpto, dum coni huius perimeter basis volvitur in circumferentia alicuius circuli immoti, vertice coni in centro sphaeræ (cuius radius æquat latus coni) immoto manente.

Basis coni dicatur itidem *Circulus generator*, & circulus, super quo circulus generator volviur, ita ut singulæ partes peripheriæ generatoris singulis partibus peripheriæ huius successive applicentur, dicatur *Circulus immobilis*. Hoc motu planum circuli generatoris constanter dato angulo ad planum circuli immobilis inclinatum est.

Si conus rectus *ABC*, cuius basis est circulus *HI* revolvatur circa verticem suum *C*, ut circumferentia basis *BIAH* moveatur in circumferentia *BDM* alterius circuli *BM* centro *C* & radio *CB* descripti, erit circulus *HI* *generator*, & circulus *DM* is, qui *immobilis* vocatur, & punctum *L* in perimetro circuli generatoris re-

Fig. 1.

volutione huius circuli super peripheria LDE, describet in superficie sphaerica curvam LFE, quam *Epicycloidem Sphaericam* appello.

Radius Sphaerae in cuius superficie Epicyclois Sphaerica describitur, est ubique aequalis lateri conici CB.

Non autem necesse est ut circulus immobilis sit circulus in sphaera maximus ut fig. 1. Potest etiam esse circulus minor, ut fig. 2. circulus ex diametro BS, nam si in circumferentia huius circuli, circulus ex diametro AB qui est basis conici recti BAC dicto modo volvatur, ut singulae partes huius singulis partibus peripheriae circuli immobilis successive applicentur, punctum describens etiam nunc incedet in Epicycloide in superficie Sphaerae BAS descripta, sive circulus generator, extet supra planum circuli immobilis BS, sive subter idem planum depressus sit.

In omni casu planum circuli generatoris ad planum circuli immobilis dato angulo inclinatum est, in fig. 1. angulo ABC, in secunda vero angulo ABR, si circulus AB sit super plano BS, vel supplemento anguli ABR si sit subter plano BR. In omni ex hisce casibus longitudo Epicycloidis est ad diametrum circuli generatoris in ratione data. Ad id ostendendum sequentibus lemmatis opus habemus.

Lemma I.

Fig. 3. Datis lateribus trianguli obliquanguli $be\beta$, nempe βe & be , & angulo intercepto $be\beta$, invenire tertium latus $b\beta$. Fig. 3.

Dicantur $e\beta = p$, $eb = q$, sinus anguli $be\beta = g$, sinus complementi $= b$, ad radium $= 1$, eritque latus quaesitum $b\beta = \sqrt{(pp - 2bpq + qq)}$. *Lem-*

Lemma 2.

Si arcus BOL femicirculi BLA, in sua elementa Lm distributus intelligatur, erit summa omnium $BL.Lm$, quam summam iam usitato more, per $\int BL.Lm$ designabo, erit inquam $\int BL.Lm = AB.BP$, facta nempe $AP = AL$. **Fig. 4.**

Nam triangula similia ABL & mLn præbent $AB:BL :: Lm : Ln$; ergo $BL.Lm = AB.Ln$, ergo $\int BL.Lm = \int AB.Ln$; atqui $\int AB.Ln = AB$ in omnes Ln , omnes vero Ln sunt $= AB - AL$ (constr. $= AB - AP$) $= BP$, ergo $\int BL.Lm = AB.BP$, Quod erat &c.

Theorema.

Pars Epicycloidis Sphæricæ EL descripta a puncto describente L provolutione circuli generatoris HL super immobili EB ex E ad B, est ad $2BP$, facta $AP = AL$, ut $\sqrt{(aa - 2bab + bb)}$ ad a , si nempe radius circuli BE, hoc est BC sit $= a$, radius BG circuli HL $= b$, ac cosinus inclinationis circuli huius ad circumulum immobilem $= b$, ad radium $= 1$.

Per B ducatur tangens BV circuli immobilis BE, & hæc tanget etiam circ. generatorem HL in eodem puncto B. Intelligantur in circ. generatore & in circulo immobili duo arculi indefinite parvi & æquales $B\beta$ & Bb , ductaque ex b in BV normali be , iungatur βe , eritque angulus βeb mensura inclinationis plani HL ad planum BEC circuli immobilis. His positis

Si circulus generator HL promoveatur, lineola $B\beta$ rotabitur circa punctum B usque dum cadat super Bb , interea vero describet BL sectorem $LB/$ similem sectori $B\beta b$, in quo sectore arculus $L/$ est elementum Epicycloi-

cloidis hoc motu genitum, habemus ideo $BL : Ll :: B\beta : b\beta$; vel $Ll. B\beta = BL. b\beta$.

Iam dicendo radium circuli immobilis BE , qui est $BC = a$, radium circuli generatoris $BG = b$, arcum $Bb = Be = B\beta = ds$: erunt $eb = \frac{ds^2}{a}$, $e\beta = \frac{ds^2}{b}$ & cosinus anguli $\beta eb = b$; surrogatis ergo in lemm. 1. $\frac{ds^2}{b}$, $\frac{ds^2}{a}$

pro p & q , inuenietur $b\beta = \frac{ds^2 \sqrt{(aa - 2bab + bb)}}{ab}$, & æquatio $Ll. B\beta = BL. b\beta$ mutabitur in $ab. Ll = ds. BL$ in $\sqrt{(aa - 2bab + bb)}$, hoc est $= BL. Lm \sqrt{(aa - 2bab + bb)}$, ergo $ab \sqrt{Ll}$ hoc est $ab. EL = \sqrt{(aa - 2bab + bb)}$ in $\sqrt{BL. Lm}$ (id est per lemm. 2.) $= AB. BP \sqrt{(aa - 2bab + bb)} = b. 2BP \sqrt{(aa - 2bab + bb)}$ & dividendo per b , habetur $a. EL = 2BP \sqrt{(aa - 2bab + bb)}$. Quare $EL : 2BP :: \sqrt{(aa - 2bab + bb)} : a$. Q. E. D. *Coroll. 1.*

Ergo tota epicyclois est ad duplam diametrum AB circuli generatoris ut $\sqrt{(aa - 2bab + bb)}$ ad a .

Coroll. 2.

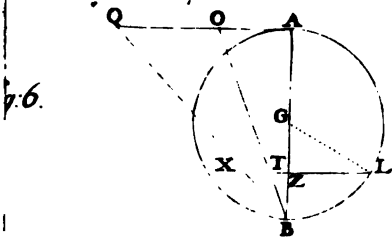
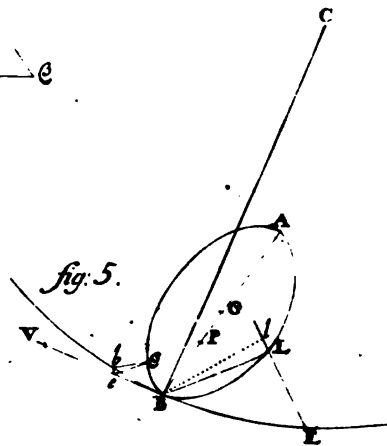
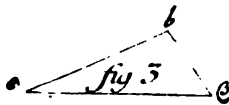
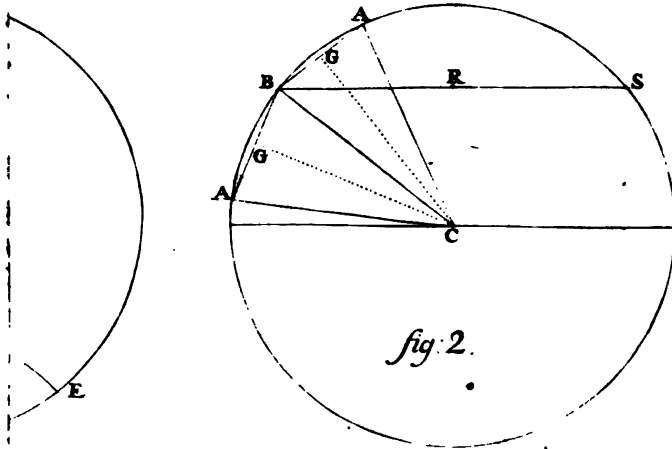
Si $b = 1$ seu finui toti, quod contingit, cum ambo plana circuli generatoris & immobilis coincidunt, tunc erit Epicyclois ad duplum diametri generatoris, ut $a - b$ ad a , id est ut differentia radiorum circuli immobilis & generatoris, ad radium immobilis.

Problema.

Invenire in plano Sphæræ ichnographico quocunque puncta ichnographica Epicloidis. Vid. Fig. 6.

Fig. 6.

Sit ALB circulus generator seorsim descriptus, ad terminum A diametri AB erecta normaliter indefinita AQ , capiantur in eadem partes AO , AQ , quæ sint ad dia-



diаметrum AB ut sinus rectus & sinus complementi ad radium, & ducantur OB , QB . Postea accepto quolibet arcu BL ductoque eius sinu LZ protendatur hic sinus usque ad occursum X cum recta BQ . Quibus factis in plano sphaerae ichnographico ad radium CE fiat angulus ECB qui sit ad angulum BGL ut radius GB ad CE , capiatur in radio BC portio $Bt = XZ$, & perpendicularis $tu = LZ$ ad radium BC , dico punctum u , esse punctum optatum ichnographiae epicycloidis: id est erecta in u ad planum CBE perpendicularis per punctum epicycloidis transibit; distantia vero huius puncti a puncto u , aequat ubique respectivam TZ . Hoc pacto tot puncta ichnographiae Epicycloidis inveniuntur, quot quis voluerit: & *Offenburgi* problema in tota sua latitudine solvitur, describendo supra & infra circulum immobilem RS (fig. 2.) epicycloides, nam binæ oppositæ formabunt fenestram ovalem; & constructio geometrica fiet, si in fig. 6. BG ad BC fuerit ut numerus ad numerum. Q. E. F.

PRINCIPIA DYNAMICA,

Autore

Christiano Wolfio.



On ignotum est, Illustrum *Leibnitium* men-*M. Dec.* suram virium demonstrasse per motum 1726. gravium ascendentium: quam eius demonstrationem una cum alia *Cel. Johannis Bernoulli* in Elementis Mechanicæ exhibui.

Monuit quoque *Leibnitius* in Actis Eruditorum A. 1695.

E e

P. 154.

p. 154, se ad eandem virium æstimationem ex simplicissima consideratione spatii, temporis & actionis pervenisse: id quod mihi ansam dedit iam. A. 1710 mensuram virium ex motu æquabili eruendi. Repereram autem in motu æquabili vires æstimari posse per impetus ad spatia applicatos, seu in hypothesi mobilium æqualium per celeritates ad spatia applicatas. Hinc enim eandem, quam *Leibnitius* dedit, prodire virium mensuram evidens est. Omnis vero cardo rei in eo vertitur, ut ostendatur, quod impetus ad spatia applicare liceat. Ut igitur id appareat, *Principia Dynamica*, quæ hactenus desiderantur, summa, qua fieri potest, perspicuitate demonstrare constitui. Quoniam vero fecunda virium definitio latet, unde earundem mensuram eruere licet, eius loco axiomata quædam sumo: Et cum ex intentione *Leibnitii* in Dynamicis, ea, quæ vires & actiones corporum spectant, independenter a phænomenis, abstrahendo quam maxime ab omni re sensibili, ex solis notionibus derivemus, ne cui in demonstrationibus theorematum fundamentalium noster arguendi modus videatur parum evidens, notandum est, nos data, per quæ quæsitam determinatur, sumere tanquam unitatem, & quæsitum tanquam unitatem alteram, atque toties ponendo data, quoties ponitur quæsitum, rationem quæditorum determinare per rationem datorum; cum sic in casu rationali ea prodeat ratio, quæ est numeri ad unitatem, in irrationali ea, quæ est rectæ ad rectam quandam datam. Sicuti enim data simul sumpta, per quæ determinatur quæsitum, arithmetice considerantur ut unitas; ita geometricè ut linea quædam data. Unitas cum sit indivisibilis, data omnia in replicatione simul sumenda, prout ponuntur

tur in unitate : alias enim ex replicatione non enascetur homogenum, quod numero respondet, & ad unitatem positam rationem habere potest. His notatis, & evidentes erunt nostræ illationes, & abusus evitabitur, in quem alias facilis est prolapsus.

Axioma 1.

1. *Si duo vel plura mobilia æqualia, eadem celeritate moveantur, vis eorundem eadem est.*

Scholion.

2. Vim corporis, quæ in motu locali sese exerit, a massa & celeritate pendere, ita ut pro massa vel celeritate maiore maior sit, nemo in dubium vocat. Quod si ergo mobilia fuerint æqualia, hoc est, si eadem fuerit utriusque massa; virium quantitas a sola celeritate pendet. Quamobrem, si eadem fuerit celeritas, eadem quoque esse debet virium quantitas, sive vires sint in ratione simplici, sive in quacunque multiplicata vel submultiplicata celeritatum.

Axioma 2.

3. *Eadem vi eodem tempore eadem absolvitur actio.*

Scholion.

Eadem vi longiori tempore maiorem absolvi actionem quam breviori, & contra eodem tempore vi maiore actionem maiorem absolvi quam minori, nemo dubitat. Quantitas adeo actionis pendet a quantitate virium & temporis. Quamobrem, si vires fuerint æquales & tempus idem, actio quoque eadem esse debet.

Definitio 1.

4. *Vim vivam cum Leibnitio, vel etiam simpliciter vim appello, quæ motui locali adhæret.*

Definitio 2.

5. *Vim* vero *mortuam* cum eodem dico, quæ in solo conatu ad motum consistit. Unde etiam *Conatum* appellare soleo.

Definitio 3.

6. *Vis pura* est, cui in agendo contraria nulla resistit.

Corollarium.

7. *Vis* igitur *pura* toto actionis tempore invariata manet.

Scholion.

8. Istiusmodi *vis* in motu æquabili sese exerit, si concipiatur fieri in medio non resistente. Quotocunque enim intervallo mobile promoveatur, eadem tamen semper subsistit celeritas, consequenter *vis motrix* eadem. Effectus adeo, quem producit, eam minime absorbet. Secus sese res habet in motu gravium, ubi *vis* in ascensum tota impenditur.

Definitio 4.

9. *Actio pura* dicitur, quæ exercetur vi motrice pura.

Scholion.

10. Talis est *actio mobilis* motu æquabili lati in medio non resistente (v. 8.)

Definitio 5.

11. *Actio uniformis* est, quæ duplo tempore dupla, triplo tripla & ita porro, seu in genere, quæ est ut tempus.

Scholion.

12. Istiusmodi *actio* in motu æquabili locum habet, ubi mobile continuo eadem celeritate moveri pergit, si nempe motus fieri concipitur in medio non resistente.

Definitio 6.

13. *Effectus vis motricis extra conflictum* est translatio mobilis per spatium.

Scholion

Scholion 1.

14. *Papinus* negat dari aliquem effectum vis motricis, ubi nulla resistentia superanda, neque enim admittit eius effectum alium, nisi qui in superanda resistentia sese exerit. Vid. Acta Eruditorum A. 1591. p. 7. Ex definitione effectus in genere, quæ metaphysica est, erroris redarguitur. Ipso etiam usu loquendi refellitur. Quilibet fateri debet, idem fuisse effectum, siue mobile vi impressa a termino A usque ad terminum B progrediatur, siue ab homine ex loco A in locum B transferatur. Equis vero dixerit, hominem nihil egisse, dum corpus quoddam ex loco A in locum B transtulit. Enim vero non opus est, ut ea de re disputemus. Utemur descriptione præsentem tanquam nominali, quæ adeo arbitraria est. Si quis igitur translationem mobilis per spatium effectum vis motricis appellare renuit, is non invitis nostris demonstrationibus aliud quodcunque nomen voci huic substituat.

Scholion 2.

15. Si motus fit in medio non resistente, effectus purus est, qualem nos in sequentibus constanter supponimus. Si vero in medio resistente, idem mixtus est, cum pars virium continuo resistentiæ mediæ impendatur, donec tandem vis omnis prorsus consumatur.

Definitio 7.

16. *Effectus nocuus est*, qui vim motricem absorbet: *innocuus*, qui eam intemeratam relinquit.

Scholion.

17. *Effectus innocuus est in motu æquabili: nocuus in ascensu gravium, & in superanda resistentia.*

E e 3

Axioma

Axioma 3.

28. *Si idem mobile per idem spatium transfertur, effectus idem est.*

Scholion.

19. Supponimus nempe motum fieri in medio non resistente, aut saltem abstrahimus ab actione, quæ impenditur in superandam resistantiam mediæ: id quod licet, quamdiu temporis nulla habetur ratio, quo effectus producitur.

Theorema 1.

20. *Si corpora inæqualia eadem celeritate moventur, vires sunt ut massæ.*

Sit corporis m celeritate c moti vis v . Ergo corporis alterius æqualis m eadem celeritate c moti vis etiam v est (§. 1.) consequenter corporis bis m celeritate c lati vis est bis v . Eodem modo patet, fore corporis ter m celeritate c moti vim ter v , & in genere corporis mm ($=M$) celeritate c moti mv ($=V$.) Est igitur $V : v = M : m$ hoc est, corporum inæqualium eadem celeritate motorum vires sunt ut massæ. Q. E. D.

Theorema 2.

21. *Actiones uniformes eodem tempore absolute sunt inter se ut vires.*

Demonstratio.

Absolvatur vi v actio v tempore t . Ergo eadem vel æquali vi v eodem tempore t absolvetur alia actio a priori æqualis (§. 3) consequenter vi bis v absolvetur eodem tempore t actio bis a . Similiter patet, vi ter v eodem tempore t absolvi debere actionem ter a &c. Immo in genere, vi ut mv ($=V$) absolvi debere actionem

ut

ut $na (=A)$ eodem tempore t . Est igitur $A : a = V : v$, hoc est, actiones eodem tempore absolutæ sunt ut vires. Q. E. D.

Corollarium 1.

22. Si corpora inæqualia eadem celeritate moventur, vires sunt ut massæ (§. 20.) Actiones igitur corporum, quæ eadem celeritate moventur, eodem tempore absolutæ sunt in ratione massarum (§. 21.)

Corollarium 2.

23. Si $A = a$, erit $V = v$, hoc est, si actiones eodem tempore absolutæ fuerint æquales, vires æquales sunt.

Theorema 3.

24. *Actiones uniformes viribus æqualibus absolutæ sunt inter se ut tempora, quibus absolvuntur.*

Demonstratio.

Abolvatur vi v tempore t actio a . Ergo eadem vi v eodem vel æquali tempore t absolvetur actio alia a eidem æqualis (§. 3.) consequenter vi eadem v tempore bis t actio bis a . Eodem modo patet, vi eadem vel æquali v tempore ter t absolvi debere actionem ter a & quadruplo tempore t actionem quadruplam a , immo in genere tempore quocunque $nt (=T)$ actionem $na (=A)$. Est igitur $A : a = T : t$, hoc est, actiones viribus æqualibus absolutæ sunt ut tempora, quibus absolvuntur. Q. E. D.

Theorema 4.

25. *Actiones uniformes sunt in ratione composita temporum & virium.*

Demonstratio.

Actiones uniformes A & a eadem vi V productæ sunt

sunt inter se ut tempora T & t , quibus producuntur (§. 24.) Producatur iam actio alia a eodem tempore t , quo a producitur, vi quacunque V . Erit $a : a = V : v$ (§. 21.) Ergo $A : a = TV : tv$, hoc est, actiones uniformes sunt in ratione composita temporum & virium Q. E. D.

Corollarium.

26. Si corpora inæqualia eadem celeritate ferantur, vires sunt ut massæ (§. 20.) Actiones igitur uniformes in hypothesei mobilium inæqualium eadem celeritate latiorum sunt in ratione composita massarum atque temporum.

Theorema 5.

27. *Vires inæquales eandem actionem absolvunt temporibus sibi reciproce proportionalibus.*

Demonstratio.

Actiones uniformes A & a sunt in ratione composita temporum T & t atque virium V & v (§. 25.) quare cum sit $A = a$ per hypothesein; erit $TV = tv$ consequenter $V : v = T : t$, hoc est, vires sunt ut tempora reciproce. Q. E. D.

Corollarium.

28. Quodsi mobilia eadem celeritate moventur, vires sunt ut massæ (§. 20.) adeoque actionem eandem absolvunt temporibus eorum massis reciproce proportionalibus (§. 27.)

Theorema 6.

29. *Si duo mobilia æqualia per spatia inæqualia transferuntur, effectus sunt ut spatia.*

Demonstratio.

Transferatur mobile m per spatium f & denotet e effectum. Ergo si idem vel æquale mobile m per idem vel

vel æquali spatium S transfertur, erit effectus etiam ut e (§. 18.), consequenter si mobile m transfertur per spatium bis f , erit effectus bis e . Et eodem modo patet in genere, si mobile m transfertur per spatium quodcumque $nf (=S)$, fore quoque effectum ut $ne (=E)$. Quare, si mobilia fuerint æqualia, erit $E:e=S:f$, hoc est, effectus sunt ut spatia. Q. E. D.

Theorema 7.

30. Si duo quæcumque mobilia per idem spatium transferuntur, effectus sunt inter se ut massæ eorundem.

Demonstratio.

Transferatur mobile m per spatium f & denotet e effectum. Ergo, si idem vel æquale mobile m per idem vel æquale spatium f transfertur, erit denuo effectus e (§. 18). Si igitur mobile fuerit ut bis m , quod cum simplici m per idem spatium f transfertur, effectus erit ut bis e . Quare cum eodem modo pateat, esse in genere effectum ut $ne (=E)$, si mobile, cum alio m per idem spatium f translaturum, fuerit ut $nm (=M)$; evidens est, quod sit in hac hypothesi $E:e=M:m$, hoc est, effectus sint ut massæ mobilium per idem spatium translatorum. Q. E. D.

Corollarium.

31. Quando corpora inæqualia eadem celeritate moventur, vires sunt ut massæ (§. 20). Quod si ergo per eadem spatia transferuntur, effectus sunt ut vires (§. 30.)

Theorema 8.

32. Si duo quæcumque mobilia per spatia quæcumque transferuntur, effectus sunt in ratione composita massarum atque spatiorum.

F f

De-

Demonstratio.

Si duo mobilia æqualia, quorum massæ sunt ut M , transferuntur per spatia quæcunque S & f , erunt effectus E & ϵ uti spatia S & f (§. 29.) Transferatur iam mobile, cuius massa ut m , per idem spatium f cum altero M ; erunt effectus ϵ & e ut massæ M & m (§. 30.) Quare $E : \epsilon = MS : mf$, hoc est, effectus quicunque sunt in ratione composita massarum & spatiorum, per quæ mobilia transferuntur. Q. E. D.

Corollarium.

33. Si $E = \epsilon$ erit $MS = mf$, adeoque $M : m = f : S$, hoc est, si effectus fuerit idem, spatia sunt massis reciproce proportionales

Theorema 9.

34. In motu æquabili effectus sunt in ratione composita massarum, celeritatum atque temporum.

Demonstratio.

In omni motu, adeoque & in æquabili, effectus E & e sunt in ratione composita massarum M & m atque spatiorum S & f (§. 32.) Sunt vero spatia S & f in motu æquabili in ratione composita celeritatum C & c atque temporum T & t . Quare effectus E & e sunt in ratione composita massarum M & m , celeritatum C & c atque temporum T & t . Q. E. D.

Corollarium 1.

35. Quodsi fuerit $T = t$, erit $E : e = MC : mc$, hoc est effectus innocui eodem tempore producti sunt in ratione composita massarum M & m atque celeritatum C & c .

Corollarium 2.

36. Cum impetus I & i sint in ratione composita
mas-

massarum M & m atque celeritatum C & c : effectus innocui E & e sunt in ratione composita impetuum I & i atque temporum T & t (§. 34.)

Corollarium 3.

37. Effectus adeo innocui eodem tempore producti sunt ut impetus.

Corollarium 4.

38. Si $C=c$, erit $E:e=MT:mt$, hoc est, si duo mobilia eadem celeritate moventur, effectus innocui sunt in ratione composita massarum atque temporum.

Corollarium 5.

39. Quodsi ergo mobilia M & m fuerint æqualia & celeritate eadem moveantur, erunt effectus innocui ut tempora T & t , quibus producuntur.

Corollarium 6.

40. Si mobilia æqualia eadem celeritate moventur, vis eorundem eadem est (§. 1). Effectus adeo innocui viribus æqualibus producti sunt ut tempora, quibus producuntur (§. 39.)

Corollarium 7.

41. Actiones uniformes viribus æqualibus absolutæ sunt etiam in ratione temporum, quibus absolvuntur (§. 24). Actiones adeo uniformes viribus æqualibus absolutæ sunt ut effectus, qui per eas producuntur (§. 40).

Corollarium 8.

42. Si $M=m$, erit $E:e=CT:ct$, hoc est, si duo mobilia fuerint æqualia, effectus sunt in ratione composita celeritatum C & c atque temporum T & t .

Corollarium 9.

43. Si $E=e$, erit $MCT=mc t$, consequenter
 $F f 2$ $MC:$

$MC: mc = t: T$, hoc est effectu existente eodem, impetus MC & mc sunt ut tempora T & t reciproce.

Corollarium 10.

44. Eodem modo patet, esse $C: c = mt: MT$, hoc est, effectu existente eodem, celeritates C & c esse in ratione composita reciproca massarum m & M atque temporum t & T .

Corollarium 11.

45. Quodsi igitur ulterius $m = M$, erit $C: c = t: T$, hoc est, si duo mobilia fuerint æqualia, effectus idem producitur temporibus, quæ celeritatibus reciproce proportionales sunt.

Corollarium 12.

46. Si vero fuerit $T = t$, erit $C: c = m: M$, hoc est, si idem effectus innocuus eodem tempore producitur, celeritates C & c sunt reciproce ut massæ m & M .

Theorema 10.

47. *Actiones, quibus idem effectus producitur, sunt ut celeritates.*

Demonstratio.

Si duobus mobilibus M & m diversa celeritate C & c latis idem producitur effectus, tum is aut eodem tempore producitur, aut tempore diverso.

I. Quod si mobilia fuerint æqualia & effectus idem diverso tempore producat, celeritates erunt ut tempora reciproce, quibus is producitur (S. 45), hoc est, corpus, quod tempore $\frac{1}{2}T$ effectum producit, movetur celeritate $2C$, cum alterum, quod effectum tempore T producit, moveatur simplici celeritate C , & ita porro. Iam evidens est, actionem uniformem esse duplam, quæ
di-

dimidio tempore effectum producit; triplam, quæ subtriplo, & ita porro; hoc est, actiones in eadem ratione crescere, in qua decrescit tempus, quod effectui ab eodem mobili impenditur consequenter $A : a :: t : T$. Quare cum sit $C : c :: t : T$ per *demonstrata*; si ab eodem mobili existente idem effectus producitur diverso tempore, actiones sunt ut celeritates. *Quod erat unum.*

II. Si idem effectus producitur eodem tempore, mobili existente diverso; celeritates C & c sunt reciproce ut massæ M & m (¶. 46.) scilicet si $m = \frac{1}{2}M$, erit $c = 2C$, seu corpus dimidium movetur celeritate dupla. Quoniam hic eadem ratio massarum, quæ in casu priori erat temporum, ratio vero celeritatum eodem modo sese habet; perinde est, sive massæ sint eadem & tempus diversum, sive massæ diversæ & tempus idem. Sed in casu priori actiones A & a sunt reciproce ut tempora, directe ut celeritates, *per modo demonstrata*. Ergo & in hoc posteriori eadem actiones A & a erunt reciproce ut massæ, vel directe ut celeritates. *Quod erat secundum.*

III. Denique si idem effectus diverso tempore producat, mobilibus M & m existentibus diversis; ponamus effectum eundem e eodem tempore T produci actionibus A & a : erit $A : a :: m : M$ per *cas. 2*. Producat idem effectus e tempore t actione a , mobili existente m , qui tempore T actione a producebatur: erit $a : a :: t : T$, *per cas. 1*. Est igitur $A : a :: tm : TM$. Sed effectui existente eodem, $C : c :: tm : TM$ (¶. 44). Ergo $A : a :: C : c$, hoc est, actiones, quibus idem effectus producitur, sunt ut celeritates. *Quod erat tertium.*

Corollarium.

48. Actiones eodem tempore sunt ut vires (§. 21.) Ergo, si idem effectus innocuus eodem tempore produci- tur, vires sunt ut celeritates (§. 47.)

Theorema 11.

49. Si duo mobilia eadem celeritate feruntur, actio- nes sunt ut effectus innocui.

Demonstratio.

Producatur actione a effectus e celeritate c . Ergo eadem celeritate actione bis a producietur effectus bis e ; actione ter a effectus ter e & ita porro, consequenter actione $na (= A)$ effectus $ne (= Z)$. Sunt igitur actiones A & a ut effectus innocui E & e . Q. E. D.

Theorema 12.

50. Actiones uniformes sunt in ratione composita ef- fectuum & celeritatum.

Demonstratio.

Effectus E & e eadem celeritate C producti sunt ut actiones A & a , quibus produciuntur (§. 49.) Produca- tur iam actione a idem effectus E celeritate c , qui actione a celeritate C produciatur: erunt actiones a & a ut cele- ritates C & c (§. 47.) Ergo actiones uniformes A & a sunt in ratione composita effectuum innocuorum E & e atque celeritatem C & c . Q. E. D.

Corollarium.

51. Quoniam $EaC = eAc$ (§. 50.) erit $E: e = Ac: aC$; hoc est, effectus innocui sunt in ratione composita ex directa actionum & reciproca celeritatum.

Theo.

Theorema 13.

52. *Actiones uniformes sunt ut impetus ad spatia applicati, quæ motu æquabili describuntur.*

Demonstratio.

Actiones A & a sunt in ratione composita effectuum E & e atque celeritatum C & c (§. 50.) Sed effectus E & e sunt in ratione composita massarum M & m atque spatiorum S & s (§. 32) Ergo actiones sunt in ratione composita massarum M & m , celeritatum C & c atque spatiorum S & s . Quamobrem, cum in motu æquabili impetus I & i sint in ratione composita massarum M & m atque celeritatum C & c ; erunt actiones A & a in ratione composita impetuum I & i atque spatiorum S & s , seu ut impetus ad spatia applicati. Q. E. D.

Corollarium.

53. In motu æquabili spatia S & s eodem tempore absoluta sunt ut celeritates C & c , & impetus in ratione composita massarum & celeritatum seu ut MC & mc . Actiones igitur eodem tempore absolutæ sunt in ratione composita ex simplici massarum M & m atque celeritatum duplicata C^2 & c^2 , hoc est, $A : a = MC^2 : mc^2$.

Theorema 14.

54. *In motu æquabili vires sunt in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum.*

Demonstratio.

Actiones uniformes eodem tempore absolutæ A & a sunt in ratione composita ex simplici massarum M & m atque duplicata celeritatum C^2 & c^2 (§. 55). Sed eadem sunt ut vires V & v (§. 21). Ergo etiam vires V & v sunt in ratione composita ex simplici massarum M & m atque

m atque duplicata celeritatum C^2 & c^2 . Q. E. D.

Corollarium 1.

55. Mobili igitur existente eodem, vires sunt in ratione duplicata celeritatum.

Corollarium 2.

56. In motu quomodocunque accelerato in fine cuiuscunque temporis vires sunt in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum in fine istius temporis acquisitarum.

Corollarium 3.

57. Quoniam gravia per altitudinem quamcunque cadendo eam celeritatem acquirunt, qua ad eandem ascendere possunt; igitur vires projectorum, quibus ascensus inchoatur, sunt in ratione composita ex simplici massarum & duplicata celeritatum, quas per altitudines, ad quas ascendunt, cadendo acquirere valent.

Scholion.

58. Atque hæc est illa demonstratio, quam in hypothesis mobilium æqualium & rationis duplæ celeritatum A. 1710. cum Illustrissimo Comite ab *Herberstein*, illustri *Leibnitio*, atque aliis communicavi, æstimans actionem motricem per impetus ad spatia applicatos, quamque *Leibnitius* in suam cum viris celeberrimis *Iohanne Bernoulli* atque *Iacobo Hermanno* aliisque communicatam, recidere scripsit d. 12. Ian. A. 1711. datis litteris dicto fidem his verbis faciens: " Calculum virium purarum
" seu actionum talem instituo. Sit spatium s , tempus t ,
" velocitas v , corpus c , effectus e , potentia p , actio a ,
" In motu æquabili erit tv ut s , e ut cs , tp ut a . Atque
" hæc quidem sine demonstratione assumi possunt. Ac-
cedit,

cedit, quod demonstrandum, *ev* ut *a*. Hinc porro plurima theoremata demonstrari possunt, e. gr. *p* ut *cv*². Nam *tp* ut *ev*: sed *e* ut *cs*, & *f* ut *tv*. Ergo fit *tp* ut *ctv*², seu *p* ut *cv*². In motu inæquabili res etiam procedit; sed ordinatim invicem ducenda sunt, quorum rationes componuntur, & in elementaribus, unde deinde summa dat æstimationem totalem. Atque in his continetur pars meorum dynamicorum, abstracta maxime a rebus sensibilibus; etsi deinde per experimenta verificetur. Nullus itaque dubito, me hic principia *Dynamice* menti *Leibnitii* conformia proposuisse, quibus via ad ulteriora sternitur.

Theorema 15.

59. *In motu gravium seu æquabiliter accelerato vires sunt in ratione composita spatiorum, per quæ gravia descendunt, atque massarum.*

Demonstratio.

In tempusculo infinite parvo, quo grave per spatium infinite parvum descendit, motus supponitur æqualis, adeoque duorum mobilium *M* & *m*, quæ per inæquales altitudines descenderunt, actiones motrices *A* & *a* sunt in ratione composita tempusculorum *dT* & *dt* atque virium *V* & *v* integro descensu acquisitarum (§. 25). Eædem vero etiam sunt ut impetus *MC* & *mc* ad spatia *dS* & *df* applicati, quæ ulterius descendendo tempusculis *dT* & *dt* celeritatibus temporibus *T* & *t* per spatia *S* & *f* acquisitis *C* & *c* describerent (§. 52.) Habemus itaque $VdT : vdt = MCds : mdf$, consequenter $VCdT :$

$$Gg \qquad vcdt$$

$vcdt = MC^2 dS : mc^2 df$. Est vero in motu gravium ex hypothesi *Galileana*, seu æquabiliter accelerato, $C^2 : c^2 = dS : df$ & $C : c = dT : dt$. Ergo $VdT^2 : vdt^2 = MdS^2 : mdf^2$, consequenter $dTVV : dtv = dSVM : dfvm$. Quoniam itaque in tempusculo infinite parvo vires V & v perinde ac massæ M & m constantes sunt; erit $TVV : tvv = SVM : fvm$, consequenter $T^2V : t^2v = S^2M : f^2m$: &, ob $T^2 : t^2 = S : f = C^2 : c^2$ ex natura motus æquabiliter accelerati, $VC^2 : vc^2 = MSC^2 : mfc^2$. Est igitur $V : v = MS : mf$, hoc est, vires sunt in ratione composita spatiorum, per quæ gravia descendunt, atque massarum. Q. E. D.

Corollarium 1.

60. Quoniam grave vi cadendo acquisita ad eam altitudinem ascendit, unde decidit: Vires gravium ascendentium sunt in ratione composita massarum & altitudinum, ad quas ascendunt.

Scholion 1.

61. Atque hoc est illud principium, quod in viarium æstimatione a *Leibnitio* suppositum constanter negarunt *Papinus*, alique antagonisti.

Corollarium 2.

62. Quoniam ascensus gravis ascendens est effectus nocuus (§. 16), est autem ut massa ducta in altitudinem, per quam ascenditur (§. 32); vires sunt ut effectus nocui in ascensu gravium ex hypothesi *Galileana*. (§. 60.)

Scho-

Scholion 2

63. Perperam igitur omnis effectus statuitur causæ proportionalis.

Theorema 16.

64. Effectus innocui sunt in ratione composita, ex simplici temporum & subduplicatis virium atque massarum.

Demonstratio.

Effectus innocui E & e sunt in ratione composita massarum M & m , celeritatum C & c atque temporum T & t (§. 34). Sed vires V & v sunt in ratione composita massarum M & m simplici atque celeritatum duplicata C^2 & c^2 (§. 54), adeoque celeritates C & c in ratione composita ex subduplicata massarum reciproca & subduplicata virium directa, nempe ut $\frac{v}{VM}$ ad $\frac{v}{vm}$. Quamobrem effectus E & e sunt in ratione composita temporum T & t directa, atque virium & massarum subduplicatis \sqrt{VM} & \sqrt{vm} . Q. E. D.

Corollarium 1.

65. Si $T=t$, erit $E:e=\sqrt{VM}:\sqrt{vm}$, hoc est, effectus innocui eodem tempore producti sunt in ratione composita ex subduplicatis virium atque massarum.

Corollarium 2.

66. Si præter $T=t$ etiam $M=m$, erit $E:e=\sqrt{V}:\sqrt{v}$, hoc est, effectus eodem tempore, mobilibus existentibus æqualibus, producti sunt in ratione subduplicata virium.

Theorema 17.

67. *Vires sunt in ratione composita effectuum eodem tempore productorum & celeritatum.*

Demonstratio.

Sunt enim ut actiones eodem tempore absolutæ (§. 21). Sed eædem actiones sunt in ratione composita effectuum eodem tempore productorum atque celeritatum (§. 50). Ergo vires sunt in ratione composita effectuum eodem tempore productorum atque celeritatum Q. E. D.

Corollarium.

68. Effectus E & e sunt in ratione composita massarum M & m atque spatiorum S & s (§. 32). Ergo vires V & v sunt ut MSC ad msc , hoc est, ut impetus MC & mc ad spatia S & s applicati.

Theorema 18.

69. *Conatus seu vires mortuæ sunt in ratione composita massarum & celeritatum.*

Demonstratio.

Per legem continuitatis *Leibnitianam* conatus considerari potest instar vis vivæ moventis corpus per spatium infinite parvum, hoc est, revera nullum. Quare, cum conatui sic considerato applicari possit theorema de viribus vivis puris attenda differentia, quæ inter casum hunc ultimum & ceteros intercedit, vires puræ autem sint ut MSC ad msc (§. 57), evanescentibus spatiis S & s , in præsentī casu revera nullis, erunt conatus ut MC ad mc . Q. E. D.

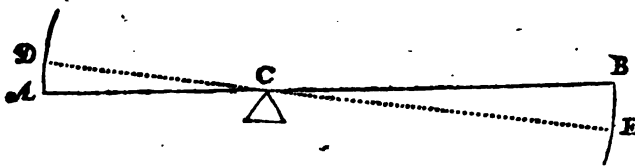
Scho-

Scholion. I.

70. Obtinet hoc in veste ceterisque potentiis mechanicis. *Leibnitius* in Actis Erudit. l. c. p. 150. paulo aliter rationem reddit, cur conatus sint celeritatibus proportionales : putat enim, in ipso initio motus descensus seu ipsas quantitates spatiorum descensu percursorum, nempe adhuc infinite parvas seu elementares, esse conatibus descendendi proportionales. Enimvero quoniam nostra principia cum suis concordare agnovit (§. 58), imo agnoscere debuit, cum nullum dederimus theoremata, quod non cum mensura virium Leibnitiana consentiat, nondum videtur illo tempore Dynamica ex primis suis principiis constituisse. Sane nec vires vivæ in omni hypothesi gravium sunt spatiis proportionales : neque enim solum ex demonstratione superiori (§. 59) patet, id tantum convenire hypothesi Galilæanæ ; verum, si demonstrationem generaliter concipias, patebit ulterius, fore vires in ratione composita ex simplici massarum, duplicata spatiorum directâ, & duplicata temporum reciproca. Quoniam igitur in hypothesi Galilæana spatia sunt in ratione temporum duplicata ; singulari hic ratione contingit, ut vires spatiis proportionales evadant.

Corollarium I.

71. Si vectus ponderibus in A & B onustus moveatur



veatur
circa centrum
motus C,
translatio

ponderum per spatia AD & BE fit eodem tempore. Sunt adeo effectus E & e, seu $M \times AD$ & $m \times EB$, hoc

Gg 3

est,

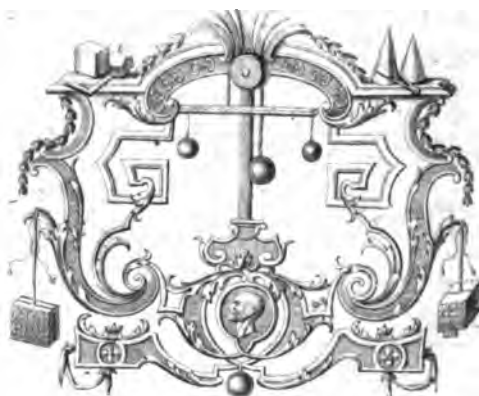
est, $M \times AC$ & $m \times CB$ ut imperus MC & mc (§. 37),
consequenter $M \times AC$ ad $m \times CB$, ut conatus descendendi
(§. 69).

Corollarium 2.

72. Quodsi ergo conatus descendendi fuerint æ-
quales, erit $M \times AC = m \times CB$, consequenter $M : m = CB : AC$.

Scholion. 2.

73. En igitur demonstrationem theorematis me-
chanici & fundamentalis ex principiis Dynamicis dedu-
ctam. Mittimus alia, quæ inde derivari poterunt. Ne-
que enim in præsentis nobis propositum fuit, quam princi-
pia Dynamicæ constituere.



CLASSIS
SECUNDA,
continens
PHYSICA.



NOVA
PLANTARVM GENERA,

Auctore
I. C. Buxbaum.

I.
Chamædaphne.



Requens est Ingræ & Careliæ uliginosis & terra turfæea scatentibus ericetis frutex, Botanicis hucusque minus notus, qui merito novum constituit genus, cuius notæ sunt: Flores monopetali, campaniformes globosi, fructus in quinque loculamenta divisi, seminibus fœti exiguis subrotundis. Adde modum nascendi, qui Polygonato vulgari respondet. Descriptio sit sequens: Radix lignosa, tortuosa, repens, ramosa, quæ hinc inde fibras in fasciculos congestas dimittit, novos quoque iuxta stipitem emittit stolones. Caudex digiti fere crassitie, spadiceus, dodrantali spatio

Hh

ter-

terram superans, in duos vel tres maiores, hique rursus
 in minores brachiantur ramos arcuatos & versus terram
 inclinatos. Folia ex summis egrediuntur ramis, alter-
 natim posita, oblonga, ex rotundo paulum acuminata,
 rigida, granulis albidis adpersa, quasi pustulata, supe-
 riore parte obscure, inferiore vero dilutius viridia, gla-
 bra, hyemisque patientia, petiolis brevibus adhaerentia &
 erecta. Inferiora sunt maiora, eque horum alis gemmae
 novorum surculorum prodeunt quatuor vel quinque, su-
 periora vero successive, quo altius adscendas, minora &
 magis rotunda, tandemque Serpilli foliorum æmula eva-
 dunt. Ex singulis horum alis singuli enascuntur flores,
 brevi petiolo reflexo insidentes, penduli, nivei, quinque
 laciniis acutis conniventibus dissecti, calyce quinquifido,
 brevi, fusco, & ab alio bifido sustentato cincti, decem
 staminibus, pistillum breve quinquetrum ambientibus
 præditi. Sequuntur capsulae quinquangulares, quinque-
 loculares, & quinque valvis ab apice dehiscentes, peri-
 anthio instar stellæ expanso insidentes. Mirum in hac
 planta est, quod folia, quæ tota retinet hyeme, media
 demum æstate abiiciat. Floribus enim ultimis Maii &
 primis Iunii diebus emarcidis, iam novi ex alis foliorum
 inferiorum rami frugiferi surgunt surculi, qui maius in-
 crementum sumentes Iulio producant folia & florum
 gemmas, prioris interim anni foliis delapsis, ramulisque
 nudis cum solo relictis fructu. Gemmae vero novi sur-
 culi eo perveniunt, ut, si calycem, quo obvolvuntur, im-
 maturum aperias, stamina florum futuri anni clare se
 conspicienda exhibeant. Videtur autem tota planta tempe-
 state accedente frigida, Augusto nempe & Septembri,

exa-

exarefcere. Vere tamen fequenti, fi aliquot faltem dies fol læte fulferit, folia ante nigra viridem acquirunt colorem, & planta floribus onufta elegantiffimis non fine ftupore confpicitur. Ramulus, qui ante annum floruerat, eft aridus, foliis orbis, capfularum feminalium faltem veftigia brevi etiam interitura oftendens, terræque proximus, licet ante annum in fummitate fruticis locatus. Quamvis enim fingulis annis hic frutex procrefcet, nunquam tamen evadit altior, fed caudex femper verſus terram inclinatur & novas agit radices. Ob foliorum aliquam cum Lauro fimilitudinem nomen hætenus vacuum, olim tamen variis tributum plantis, revocamus & Chamædaphnen nominamus. Vid. Fig. I.

II.

Potamopitys.

Planta hæc paluftris facie externa convenit cum I. Bauhini Equifeti facie Polygono fœmina, feu Limnopevece Cordi, ob florem & fructum vero longe diverfa, uti patebit ex descriptione fequenti: Radix fibrofa. Caulis palmaris fere, interdum ramosus, (qualem noſtra figura exhibet) reftus, rotundus, concavus, ex multis articulis pyxidatis conflatus. Ex his ipsis articulis egrediuntur folia radiatim poſita, ſex, ſeptem vel octo, quæ radici proxima & inferiora, ſunt anguſta, mollia atque virentia, Gallii foliorum æmula; ſuperiora vero multo latiora, quatuor, tria vel interdum duo ſolum coniuſta. Ex foliorum alis exeunt flores parvi, albicantes, ex petalis quatuor, anguſtis & acutis, cruciatim poſitis, conſtantes, ſeffiles, calyce pariter quatrifido ſuſtentati, in floribus

H h 2

me-

medio pistillum rotundum, quatuor staminibus cinctum. Fructus sequitur rotundus, quadricapsularis, seminibus gracilibus lunatis foetus. Character itaque huius plantæ est: Folia stellata, flores tetrapetali & fructus in quatuor loculamenta divisi. Pertinet iuxta Raium ad Herbas flore tetrapetalo anomalas. Occurrit in palustribus Thraciæ, non longe a Bosphoro prope pagum Boivæteri, floret Maio. Fig. II.

III.

Ceratocarpus.

Huius notæ sunt: Folia graminea. Flores apetalii, calyce destituti, embryoni insidentes. Fructus triangulares depressi, capsulæ Bursæ pastoris fere similes, bicornes & bivalves, semine foeti unico, singularis figuræ, longum enim est, gracile & teres, cuius extremitates instar arcus inflexæ & sibi invicem adductæ intermedia coniunguntur membrana. Descriptio vero est sequens: Radix parva, fibrosa, ut mihi videtur, annua, ex qua cauliculus unicus, lignosus & angulosus, ab exortu statim ramosus. Folia angusta, graminea, unum vel duo, singulo ramo nec non singulæ capsulæ aut flori ex caule emergenti singulum apposita, rigida, in medio carinata. Ex alis foliorum aut ramulorum nascuntur flosculi staminei, exigui, latei, nullo obvoluti calyce, sed fructum stipantes tenerum, qui deinde abit in capsulam bicornem supra descriptam. Crescit in locis squalidis, salinis & arenosis, circa mare Caspium, in regione Tagestan, nec non circa Astrakan. Autumno caulis a radice a ventis divellitur & vagatur per campos, more Eryngii aut Echinophoræ. Ob duos capsulæ aculeos fen
cor-



fig. 2.



fig. 3.

cornua sic appellare placuit. Describitur a Tournefortio in Corollario novum genus, Ceratoides, a fructu cornuto. Diu hæsi dubius, anne Ceratocarpus noster sit eius Ceratoides folio Psyllii. Sed fructum dicit bica-psularem a flore remotum. Suspectus tamen mihi est, quod nullam Ceratoidis dederit figuram. Forsitan vidit plantam immaturo adhuc fructu & deceptus est. Fig. III.

D E
DIRECTIONE CORPORVM
GRAVIVM

IN VORTICE SPHAERICO,
E T

FIGVRA NVCLEI,

Disertatio Experimentalis,

Auct.

G. B. Bülfingero.

Occasio et Destinatio Experimenti.

I.



Vnt anni complures; ex quo occasione *M. Nov.* epistolæ a *Iac. Bernoullio* ad *I. Chr.* 1725. *Sturmium* scriptæ, & in *Actis Erud.* *Lipf.* 1686. *M. Febr.* p. 92. seqq. exhibitæ, visum mihi est, recte illos subducere rationes suas, qui *ex motu vorticis*, qualem

H h 3

Car-

Cartesius statuit, *Sphærici*, circa sphaeræ axem gyrante, concludant, *gravia* illius ope potius *ad axem*, quam ad centrum telluris tendere debere. Posito enim, uti *Cartesius* voluit, ætherem aëremque constare corpusculis ad concipiendum motum vehementiorem aptioribus, quam sunt terrestria, additoque, quod vulgaribus constat experientis, corpora vehementiori motui apta fortius niti ad peripheriam, si in circulo illa moveri contingat, adeoque cætera ab illis propelli ad centrum motus illius circularis: certum erat, terrestria per impulsum illum colligi a peripheria *ad centrum*. Sed quale centrum? centrum ipsius *sphaeræ*, & vorticis totius? *an* centrum *circuli* cum æquatore vorticis *paralleli*?

II. *Cartesiani*, ut explicatio propius accederet ad Phænomenon gravitatis, cui scil. explicando hæ vorticum hypotheses a *Cartesio* destinabantur, ex illa vorticis actione derivarunt nisum *ad ipsius Sphaeræ centrum*, eoque facto & directionem gravium, & figuram telluris sphaericam conati sunt exponere.

III. Contradixit *Cartesianis* inter complures alios præcipue *Cbrist. Hugenus*, ratus, ex isto vorticis motu sequi impulsum gravium non ad centrum totius sphaeræ, sed ad centrum circulorum æquatori parallelorum, sive ad axem; plane uti *Keplerus* dixerat, & ante *Cartesium* *schematismo* expresserat, in *Epit. Astron. Copern.* p. 97.

IV. Plausibilis hoc est primo statim intuitu, videtur enim rationi congruum, si duo corpora in circulari
ali-

aliquo plano simul mota inæquales nifus habeant, adeoque imbecillius a fortiori repellatur, ut illud repellatur *in eodem plano*, in quo utrumque nititur ulterius progredi. Placuit itaque id argumentum non paucis.

V. *Hugenius*, ne in sola refutatione falsi subsistere videretur, & explicando phænomeno aliquid accommodum inveniret, pro obtinendis directionibus gravium ad horizontem perpendicularibus, & figura telluris prope sphaerica per vorticem generanda, substituit gyrationi Cartesianæ *aliam*, qua materia subtilis superficiei sphaericæ inclusa, infinite variis sub illa superficie directionibus movetur, secundum arculos circuloꝝ sphaeræ maximorum. Cuiusmodi fere illud est, quo *Ioh. Cbrist. Sturm* in Colleg. Curios. P. II. Epist. ad *Henr. Morum* §. 23. p. 23. innuit: circulos vel arcus potius, a singulis materiae subtilis partibus descriptos, ita concipiendos esse, ut omnes gyrationis suæ impetum ab uno sphaeræ puncto nactæ intelligantur. Secuti sunt Hugenianam nifium rationem plures alii, & novissime *Cel. Wolfius* in Physico Systemate; difficultatem vero, vel, si mavis, impossibilitatem vorticis eiusmodi opposuerunt *Sturmio* *Iac. Bernoullius*, l. c. Actor. Lips. & *Hugenio Saurinus*.

VI. Novas scil. Cartesianæ causæ suppetias tulit *Cel. Saurin*, eandemque vacillantem conatus est omnino stabilire, editis duabus in hanc rem commentationibus, quarum prima in *Ephemerid. Erud. Gall. ad A. 1703.* p. 38. seq. obvia, non modo solvere Hugenianum adversus Cartesianos vortices ratiocinium, sed etiam demonstrare satagit, ex reactione superficiei sphaericæ, vorticem

ticem fluidum ambientis, generari nifum ad ipsius sphaerae centrum. Secunda in iisdem *Ephemerid. Gall. ad A. 1707. m. Maio* p. 327. & seqq. excusa, primo quidem pro Cartesio vrget, si vel maxime vortex conciperetur ab initio Cylindricus, illum tamen ipsa sui in vicinum fluidum pressione redactum iri in figuram sphaericam, vel sphaeroidicam; Deinde vero phaenomenis naturae multo magis respondere motum vorticis circa telluris axem ex occidente in orientem gyrantis, quam interruptas illas gyrationum, in circulis maximis factarum, portiones Hugonianas. Intellego ex *Commentariis Acad. Scient. Paris. ad A. 1709. p. 167. edit. Batav.* opposuisse Saurinianae meditationi primae nonnulla viros Clar. *Parentium & Montreum*, sed quae ingeniosissimum Auctorem a sententia sua adeo non dimoverint, ut potius pro perfecte demonstratis habeat, quae A. 1703. in Hugonianas Demonstrationes dixerit.

VII. Liceat sine cuiusquam iniuria fateri, me in re adeo lubrica, & variis composita circumstantiis, *semper nonnihil basisse* circa demonstrationum hactenus exstantium evidentiam, adeoque subinde optasse, ut res *experimento* decidi luculento posset; maxime cum viderem, summos viros v. g. *Jac. Bernoullium* l. c. ambiguos esse, an ex fundamento superficiei sphaericae deduci possit, quod ad centrum potius sphaerae, quam circuli paralleli tendat nifus corpusculorum a peripheria propulsorum. Etsi enim mihi videbar intelligere rationem, cur futurum non sit, ut ad centrum sphaerae tendant corpuscula; nolui tamen in re difficili meum interponere iudi-

iudicium; aut præcipitare conclusionem, nondum consultata per experimentum natura.

8. Succurrit facile animo *notissimum Hugonii experimentum*, in causa gravium frequenter adhiberi solitum: quo is, assumpto vase cylindrico Diametri 8-10". & altitudinis 4-5", idem aqua & ceræ hispanicæ abrasis particulis replevit, vitro superne obtectum, & tabulæ lignæ impositum, cuius ope in gyrum agi celerrime poterat. Facto enim motu vasis perniciosissimo, & inhibito iterum repente eodem motu, accidit, ut aqua diutius adhuc gyros continuaverit suos, & hispanicæ ceræ particulas circa centrum baseos cylindri in cumulum quasi hemisphæricum coegerit. *Non id tamen instituto satisfecit meo*, quod subinde mihi videbatur, circumstantias in hoc experimento tales misceri, quales non admittant vortices sive Cartesiani sive Hugoniani, si qui in rerum natura occurrant sphærici. Præcipue nuclei tantum hemisphæroidici productio, & cylindricus vortex, & sustentans corpora fundus vasculi, ad huius quæstionis definitionem minus convenire videbantur.

Fig. 2.

IX. Cœpi igitur primo cogitare, annon ita institui res possent, ut vice dimidiati *nucleus* prodiret *integer*, finis enim assumptorum a Cartesio & Hugenio vorticum cœlestium est sphæræ genesis. Atque hic facile animum subiit cogitatio, si vas cylindricum in medio esset divisum diaphragmate basibus parallelo, & in parte eius inferiori miscerentur aquæ corpuscula non multo leviora specificè, quam est aqua: futurum fortassis, ut inferne non minus dimidia nuclei pars in medio diaphragmatis colligeretur, quam superne; maior aut minor pro mate-

I i

riæ,

riæ, quæ adhiberetur, maiori aut minori quantitate, aut diversitate gravitatis specificæ. Tentavi aliquid in eam rem, non sine omni successu: sed difficilior tamen huius experimenti dextre capiendi ratio est, & vortex non definit esse cylindricus; ut de influxu gravitatis & levitatis corpusculorum aquæ mixtorum in figuram nuclei nihil dicam. Quos enim ego obtinui nucleos, sphericis profecto non fuerunt.

X. Visum igitur est, vortices eiusmodi cylindricos, tanquam ab hoc naturæ factis remotiores, adhuc missos facere, eandemque *propius* imitari; *excitato vortice* potius *spherico*, in quo ad imitationem Hugeniani experimenti, corpuscula specificè graviora primo quidem ab aqua in vase gyrante mota abriperentur; adeoque, ut coniectura erat, durante quidem vasis gyratione extremum occuparent; sed cessante illa ab aqua diutius motum continuante ad interiora pellerentur; exhibitura figuram, uti facile conicere licebat, sive sphericam sive cylindricam.

XI. Id consilium, iam ante tres vel quatuor annos captum, non licuit executioni dare, nisi paucis abhinc hebdomadis; adhibitis in eam rem vitris & machinis, quibus ad lumen manus affricu excitandum *Hauksbeius* primo & deinde cæteri hucusque usi sunt: *feliciori*, quam prius divinaveram, successu. Cum enim animus esset attendere ad figuram, quam cessante vitri motu, gyrante autem sola in illo aqua, partes ceræ hispanicæ, ab aqua propulsæ, acquisituræ essent; aër, qui sese invito mihi obtruserat, & passim ab aqua se separaverat, durante & vitri & aquæ motu gyrante talem induit figuram,
ut

ut non gravate ferrem, turbari ab illo motum ceræ & aquæ ad quietem redeuntis; consequenter genesin figuræ, quam a ceræ memoratæ particulis expectaveram, eludi.

XII. Experimenti illius aliquoties, & *coram Societate*, facti circumstantiæ potiores hæ sunt:

Experimentum.

Assumpsi vitrum utcunque sphericum; diameter enim æquatoris maior est cæteris, & Poli desinunt in eum quasi quendam truncatum. Instructum illud est circa polos suos cylindris metallicis, prominente axiculo dotatis, in quorum altero conspicitur rotula minor fixa, cui filum circumduci potest, præfente in eum finem crena. Id vitrum per foramen cylindri alterius implevi aqua, pauco pulvere ceræ hispanicæ nigrae & scobeferrea: aptaque ad machinam, cuius ope alioquin pro excitando per affricum lumine rotationes similibus sphaerarum vitrearum fieri solent.

Fig. 4.

XIII. His factis cœpi versare manubrium machinæ prædictæ, ut gyros agere vitrum inciperet, vidique:

1. Superius in vitro sese ostendere bullam (uti dicitur, vel potius segmentum) aëris, quæ instituta rotatione deflecteret in eam partem, in quam dirigebatur rotatio.

2. Scindi vero illam in medio sui, antequam deflectat, per aquam extima sphaeræ loca affectantem.

3. Continuato paululum motu, ceræ & ferri pulverem adhærere lateribus vasis circa æquatorem motus, per modum zonæ; postquam antea iam.

I i 2

4. Ali-

4. Aliquot impulsibus superne proiectus iterum sua gravitate decidisset.

5. Cessante vitri motu aërem interturbare ascensu suo motum aquæ, & sic impedire, quo minus succedere sperata ceræ & scobis ad centrum vel axem impulsio regularis fieri posset. Hoc *primum* tentamen erat.

XIV. Repleto igitur *iterum* vitro, sic, ut, cum inverteretur, nulla superius bullula aërea conspici amplius posset, incoavi denuo gyrationem, & observavi :

6. Passim erumpere in aqua bullulas aëris minores, & colligi in maiusculas, & cessante deinceps motu, vidi earum plurimas adhærere particulis ceræ hispanicæ

7. Facto concitatore motu aëreas illas particulas ex latere, in quod *nro.* 1. deflectebant, propius subinde ad axem sphaeræ & rotationis accedere.

8. Tandemque elegantem visui exhibere cylindrum, eundemque

9. Prout motus gyrationis fieret velocior, graciliorem; in quo tamen

10. Bullulæ illæ aëreæ inter sese contiguæ non erant, sed inter aqueas gyrabant.

11. Remittente nonnihil motus celeritate cylindrus ille aqueo-aëreus reddebatur Diametri amplioris, adeoque laxioris, ut sic dicam, mixtionis.

12. An aucta motus pernicitate colligi bullæ illæ in cylindrum continuum possint, nolui tentare metu damni, quod fortassis vitro inferri possit, hætenus unico ad hoc experimentum.

13. Si motu remissiori bullulæ antea separatæ coibant in maiores, figura earum sphaerica non fuit, sed latior

tior ex ea parte, ex qua aquæ rotantis impulsus adveniebat, auctior ex opposita.

14. Elegantissimum fuit spectaculum, quod admissio in maiori copia aëre, & cylindro adhuc valde amplo, conspiciendum sese præbuit, dum bullulæ quædam aëreæ non transibant centrum vorticis sphaerici, sed ex latere dextro, quorsum descendens aqua tendebat, faciebant gyros quasi ellipticos, aliæ centrum vorticis transgressæ spiras, quales pro motu planetarum Cassinus descripsit in Memoir. de l'Acad. 1709. p. 328. Sit LMNO sectio æquatoris, vel circuli ad illum paralleli in vitro sphaerico: Sit ABCD sectio Cylindri: repræsentabit *abcd* gyrum unum, & EFGHI gyros alteros utcunque expressos imitatione liberiori.

Fig. 5.

15. Cum sissetur motus vitri, & cylindrus aëreo-aqueus esset nonnihil amplior, vidi post parvulam morulam coarctari cylindrum illum adhuc gyrantem, & tum demum fieri iterum ampliore, & dissolvi.

16. Ascendere tandem bullulas aëreas ad summitatem, sed maiores plerasque motu retrogrado potius, quam directo. Exprimat ABC directionem aquæ in vase iam quiescente. Sit B summitas eius, rotetur bullula secundum *pqrs*: rarissime fiebat, ut veniret ex *p* per *q* in B, sed venientes ex *q* per *r* in *s*, inde regrediebantur in B ibidem postmodum hæsuræ.

Fig. 6.

XV. Cætera, quæ in hisce tentaminibus ex occasione observavimus, fere huc redeunt:

17. Cera Hispanica & limatura Martis faciebant zonam, sive zodiacum quasi quendam circa æquatorem.

Fig. 7.

18. Inæqualis tamen densitatis, &, si ad minutias respicere placeat, latitudinis.

19. Erat pars eius, quæ sese, remittente paululum velocitate rotationis, a reliqua separabat, & ab æquatore plus vel minus recedebat, Tropicum repræsentans, aut Polarem circulum.

20. Mobilis illa, prout intendebatur motus, vel remittebatur nonnihil, adeoque spiras agens in superficie sphæræ concava, &

21. Si multum minuebatur motus celeritas, abscondebatur sese pars illa in cylindros polares.

22. Si motus vitri inhibebatur, pars pulveris circa æquatorem vorticis hærens decidebat gravitate sua, sed irregulariter, ob turbas ab ascendentibus hinc inde bulbulis aëreis factas.

XVI. In prioribus tentaminibus nequidem $\frac{1}{1000}$ capacitatis vasis repleta erat aëre, sed cum aëris copia maior admittebatur, ut $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{6}$ partem vasis occuparet, & velocitas gyrationis nonnihil intendebatur :

23. Collectus est aër in cylindrum, circa medium sphæræ, ab omni aqua liberum, cuius intima superficies apparebat politissima ;

24. Neque magna rotationis celeritas requisita est, ad conservandum huncce nucleum cylindricum, postquam semel genitus erat ;

25. Manebatque, inhibito licet sphæræ motu, tamdiu, donec aqua gyrans ob affricum ad vitri latera motum & nisum suum amitteret.

Con-

Conclusiones.

XVII. Enarratis hucusque Phænomenis facile foret, in causas uniuscuiusque singulatim inquirere ; facile etiam, ostendere leges vorticum , quibus obtineri possunt phænomena pro desperatis habita ; v. gr. spirales alternatim maiores , minoresque corporum cœlestium , & similia. Non id vero præsentis instituti est , quo hoc unum agimus, ut figuram nuclei a vortice sphærico generandi definiamus ; eoque ipso *viam* sternamus ad solvendum *Problema Mechanicum* , quo leges vorticum tales requiruntur , ut nucleus oriatur sphæricus.

XVIII. Duae igitur *conclusiones* hic potissimum inferimus : *altera* rem spectat, *altera* pertinet ad modum ratiocinandi de vorticibus : Vtraque in exponenda gravitatis causa utilis & necessaria videtur.

XIX. Constat igitur experimenti fide , & oculorum testimonio ; *in vortice sphærico circa axem sphæræ rotato, corpuscula cedentia* , hoc est , ea , quæ ab impulsu fluidi vorticosi a peripheria versus medium pelluntur , *non coire in nucleum sphæricum, sed cylindricum* : Itaque ex solo eiusmodi vortice non satis exacte deduci directionem corporum cedentium versus centrum vorticis, sed illam tendere ad axem gyrationis.

XX. *Cessat* itaque *dubium* , quo hæcenus in diversa distracti fuerunt eruditi, postquam natura exemplo oculis obvio prodidit , quid in obscuro faciat, cum vortices rotat ex Cartesii præcepto. Puto autem, satiscommode in hoc experimento exprimi conditiones desiderati vorticis. Habemus fluidum, superficie sphærica comprehensum , & actum in gyros circa axem sphæræ.

XXI.

XXI. Verum est, motum rotatorium imprimi a-
quæ per actionem superficiæ ambientis, eandemque si-
mul cum aqua ferri in eandem plagam; Fortassis pro
Cartesio dicas, motum vorticosum *in natura aliter* im-
pressum esse, & superficiem concludentem quiescere.
Nam id vero illationi nostræ officiet. Quicquid sit de mo-
do, quo vortici motus ab initio imprimitur, considera-
mus illum in statu manenti. Quo casu neque officit su-
perficiæ extimæ quies, uti vidimus *nro.* 15. & 25. in ex-
perimentis. Manet igitur, quod §. 19. diximus.

XXII. Alterum hoc esto: *Pro iudicanda directione*
vis centrifugæ particularum fluidi circa axem rotantium
considerari debet illud planum, quod æquatori parallelum
est, non vero planum meridiani, vel alterius circuli in
in sphaera maximi. Patet id ex figura nuclei cylindrica,
vi cuius directio corporum cedentium est perpendicularis
ad axem in planis æquatori parallelis.

XXIII. *Iuvat* autem hoc attendere, quoniam, si *ra-
tiocinio* agere solo vellemus, posset res videri dubia. Ex
una quidem parte sic infero: quoniam ipse motus, a quo
vis centrifuga oritur, non fertur secundum meridianum
vorticis, vel circuli alterius maximi æquatorem secantis,
sed secundum circulos æquatori parallelos: igitur & di-
rectio vis centrifugæ particulæ cuiuscunque erit in planis
æquatori parallelis.

XXIV. Ex altera autem parte superficiem atten-
dendo sphaericam alia ab aliis æstimatio eruta est. *Iac.*
Bernoullius, loco superius citato ingeniose monet, plana
circuli paralleli, v. g. tropici, & circuli maximi v. g. ec-
lipticæ sese interfecare in linea, quæ utriusque circuli
tan-

tangens sit. Si ergo punctum contactus, rotari incipiens iuxta ductum tropici, conatum habeat recedendi per tangentem, hactenus æque æstimari posse, quod recedat a centro Eclipticæ, atque a centro tropici, cum eadem sit utriusque tangens. Nullam igitur rationem esse, cur pulsio globulorum fiat in plano verticali potius, quam in plano circuli paralleli, vel quovis alio, cum tangens illa, secundum quam recedere conatur globulus, infinitis planis sit communis. Ambigit itaque hoc loco Vir eximius ob sphaeræ rationem.

XXV. *Alibi* ex hac ipsa consideratione pronunciat pro Cartesio. Postquam enim in iisdem Actis A. 1695. p. 547. de pressione fluidorum adversus latera vasorum annotaverat, fieri illam perpendiculariter ad superficiem continentem, ex eo intulit, directionem corpusculorum retro impulsorum ferri erga centrum sphaeræ, quæ scilicet sola sit ad superficiem perpendicularis.

XXVI. *Alio* nonnihil modo ad eandem pervenit conclusionem *Cel. Saurinus*, Journ. des Savans, A. 1703. M. Jan. p. 40. 41. Ille, concesso, quod particulae cedentes ferrentur directe ad axem, si circulus æquatori parallelus conciperetur seorsim, aut in vortice cylindrico constitutus: negat, idem obtinere, si fluidum superficie comprehendatur sphaerica. Meretur ingeniosa Viri *Cel.* annotatio, ut & hoc loco legatur:

Il est clair, que la matiere fluide, qui dans le plan, du cercle parallele, dont le Diameter est DN, fait effort, pour s'éloigner du point O suivant OD, & qui par son effort pousse au point C la surface spherique, dont le cercle PAQE est une section par l'axe; il est clair dis-je, que

K k

,, que

" que cette matiere n'est pas autrement repoussée par la
 " surface , qu'elle pousse , qu'elle le seroit par un plan , qui
 " toucheroit cette surface au point D. Ainsi selon les loix
 " de la Méchanique , son effort en ce point est reflechi con-
 " tre le fluide , qui est a coté , suivant la corde DM égale a
 " DN ; or cet effort étant soutenu par la réaction du flu-
 " de suivant la meme corde MD , il s'ensuit , que la surfa-
 " ce spherique est pressée au point D par deux forces éga-
 " les , dont l'une agit suivant OD , & l'autre suivant MD ,
 " d'ou resulte dans ce point de la surface une impression sui-
 " vant la direction CD , qui est celle de la Diagonale du
 " parallelogramme fait par les deux cordes MD , ND. Si
 " l'on met donc maintenaut au point D un corps grossier ,
 " qui ne fasse aucun effort par lui meme , la matiere flui-
 " de , qui agit suivant OD , & celle , qui exerce sa réaction
 " suivant MD prendront le dessus avec un égal effort , &
 " le pousseront suivant DC vers le point C , qui est le centre
 " du tourbillon , & non pas vers le point O , qui est le cen-
 " tre du cercle parallele. Et comme le meme raisonnement
 " a lieu , quelque plan du cercle que l'on considere , & dans
 " quelque point du plan que l'on suppose le corps grossier , il
 " me paroît démontré , que dans l'hypothèse de Mr. de
 " Cartes les corps pesants doivent suivre par tout en tom-
 " bant la même direction , qui tend au centre de la terre ,
 " conformément a l'experience , & contre l'objection pro-
 " posée. &c.

XXVII. Quorsum ista ? scilicet ut intelligatur,
 quod dubium esse poterat Viris utique magnis, sed ratio-
 cinantibus tantum, id vel tyroni experimentum capienti
 obvium & in aprico fuisse. Nimirum ex peripheria po-
 tius

tius

tius circuli rotando descripti sumendas esse perpendicularares lines , quam ex superficie ambiente ; quia *non tam ad superficiem concludentem perpendicularis est directio corpusculorum cedentium, quam ad axem gyrationis.* §. 19. Quid futurum putas , si superficies fuerit Elliptica , si Parabolica , aut utcumque genita ex rotatione curvæ ABCDE circa axem ? Fallor ? an concipi illa debet , ut composita ex infinitis cylindrulis contiguis rotatione elementorum PMmp genitis ? vel , si mavis , ex infinitis annulis cylindricis sese ambientibus , & eundem axem habentibus ?

Fig. 9.

XXVIII. Saltem hoc certum est , *per vortices Cartesianos generari nucleos cylindricos.*

Coniectura.

XXIX. Queritur , *quid fieri debeat , ut nuclei exsurgant sphaerici ?* Hoc artis esse communiter existimant ; credo , quoniam simplicibus neglectis maiora sectantur artificia. Præmissis , quæ dixi , non est problema hoc difficile. Accipe methodum , quæ me ad solutionem perduxit.

XXX. Vidimus, excitato vortice Sphaerico, cuius axis AB sit *horizonti parallelus*, obtineri cylindrum quoque abcd , cuius axis AB horizonti parallelus est. Supponamus nunc *axem* rotationis EF *verticalem* horizonti, & abstrahamus ab eo , quod sive gravitas sive levitas corporum inducere potest , discrimine : obtinebitur cylindrus quoque esgb , cuius axis EF est ad horizontem verticalis. Si *utrumque motum* supponas coniungi , ob actionem alteram , quæ a rotatione secundum axem AB pendet , cogetur cylindrus esgb ab b versus i , & ab e versus

Fig. 10.

sus k , a g versus l , & ab f versus m ; vice versa ob actionem a rotatione secundum axem EF pendentem, urgebitur pars cylindri $abcd$, ab a & d versus i & l , atque a b & c versus k & m : *qualis* inde *figura* enascitur?

XXXI. Primo quidem intuitu videtur, emergere *communem* duorum *cylindrorum* $abcd$ & $efgb$ (sed qui diametrum nonnihil ampliorem acquirant) *sectionem*, hic per $iklm$ utcumque representatam: futurum adeoque corpus angulosum, cuius anguli in i , k , l , m . cadant in medio quadrantum AE , EB , BF , FA . Quique adeo evitari non possint, nisi per novam rotationem secundum axes no & pq , qua supposita anguli iterum incidant in medio spatiorum EO , OB & sic porro: ut adeo ad evitandos tandem angulos omnes deveniendum sit ad hypothesein *Hugenianam*, de rotatione secundum axes omnes possibiles, sive quod idem est, de recessu fluidi gyrantis secundum omnes circulos maximos.

XXXII. Sed vero facile est, evitare isthæc devia, si attendatur ad genesin cylindrorum $abcd$ & $efgb$. oritur nimirum cylindrus $abcd$ ex eo, quod facta gyratione circa axem AB unaquæque bullula nititur versus punctum aliquod axis AB : & cylindrus $efgb$ ex eo, quod facta gyratione circa axem EF unaquæque nititur versus punctum aliquod axeos EF . Coniuncta igitur utraque rotatione unaquæque bullula nititur *in utrumque axem*.

XXXIII. Ut in *punctum* utrique axi *commune*, adeoque in centrum sphaeræ nitatur, sic obtineas. Sic uterque vortex æqualiter fortis; sit fluidi gyrantis & particularum illi immersarum ea ratio, ut vires corpusculorum cedentium centripetæ fiant directe uti distantia ab axe: mani-

manifestum est, in corpusculo cedente nisum oriri compositum, cuius directio TO est diagonalis laterum TQ & TP ad centrum sphaerae tendens. Duplici igitur hac rotatione combinata, *nucleus* orietur *sphaericus*; namque illud receptum est, ut sphaerica nuclei figura derivetur ex directione corpusculorum versus centrum.

XXXIV. Si tamen haereas: finge corpus angulosum, cuius sectio sit, v. g. *abcd*. Per hypotheses §. 33. vis cuiusque particulae nitentis versus centrum, erit proportionalis distantiae eius a centro *bo*, *eo*, *fo*, itaque remotior *b* dimovebit lateraliter proximas sibi particulas *e* & *f*: donec omnes sint in aequilibrio & aequidistantes a centro; hoc est, donec nucleus sit sphaericus. Fig. 11.

XXXV. Haec abstracte dicta eo sufficiant, ut intelligas, quid ad genesis nuclei in vortice sphaerici requiratur, & quid sufficiat? Quomodo id obtineri *experimento* possit, sequenti dissertatione exponam. Tum vero simul indicabo, quousque haec ad doctrinam *gravitatis Mechanicam* aut *Physicam* applicari possint, & non possint? Putamus enim, nos in eo argumento aliquid profecisse, sed plura etiamnum restare.

Annotatio ad §. 35.

Ista suo tempore. Quae autem hic *de gravitate polliceor*, singulari dissertatione postea persecutus sum. Ea nunc Lutetiae Parisiorum excuditur, quoniam nuperrime praemio affecta est ab *Academia Scientiarum Parisina*. In sequentibus igitur non tam ad huius doctrinae *applicationem* respicio, quam ad eius confirmationem et amplificationem. M. Jun.
1728.

• Ad §. 16. lin. 1. nota, pro $\frac{1}{1000}$ legendum esse $\frac{1}{100}$, et in marg. §. 3. ad lin. ult. fig. 1.

K k 3

DE.

DESCRIPTIO VASORVM CHYLIFERORVM.

Auct.

Joan. Georg. Du Vernoi.

M. Jun.
1726.



Ad vitam Animantium conservandam, etsi omnes certatim partes unitis viribus conspirent, organa tamen nutritioni dicata præcipua vitæ fulcra dici, eamque ob causam in Anatomis publicis choream ducere merentur. Quamobrem hæcce iterum exactissime oculo perlustrare, ultimamque manum illis speciatim partibus imponere, quibus ad cor alibilis succus naturaliter deferri solet, haud supervacaneum nobis visum est. Namque, id obiter dixerim, de eo minime dubitandum est, dissectiones hominum non unius tantum, sed diversarum terrarum, Rei universæ anatomicæ magnam utilitatem allaturas, quia fieri potest, ut vis climatis, aut educationis, partes variis modis immutet, quibus dein variationibus anatome plurimum aut adiuvari, aut impediri potest, quod æque de anatome comparata affirmandum est.

*Origines
vasorum
chylifer.
hactenus
incognitæ
& quare?*

Si qua in re, certe in venarum tum in genere, tum in specie chyliferarum originibus investigandis vehementer laborant anatomici: Difficultatis tamen veram causam non declarant, quam plurimorum cadaverum inspectio-

ne

ne edoctus hanc esse, deprehendi. Illi valde hallucinantur, qui putant, vasa chylifera, quæ super intestina niveo colore extus apparent, intus eodem colore infecta esse, quæ opinio me ipsum sæpius quoque fefellit, quando aperiebam cadavera optima, in quibus tota superficies exterior, copiosissimis vasculis, eaque chylo in iis conglaciato referta erat. Intestina sine mora incidebam, postea fotu calidæ emollebam, & alia eiusmodi artificia, in spem origines quæsitæ inveniendi; sed incassum omnia. Huius infelicis successus causa, in chyli diversitatem, potius reiicienda est, quam in exilitatem vasculorum, quæ quidem maxima est: Nam albedo chyli ea minus inconspicua fineret, verum potius specie filorum argenteorum manifestaret. Res equidem notissima est, eam chyli proprietatem esse, ut chamæleonte mutabilior sit, hoc est, varians secundum differentiam locorum seu partium, quas inhabitat: Raro enim aut nunquam eius color, dum in intestino adhuc fluctuat, cum colore eiusdem iam convasati coincidit. Ille ob substantiarum heterogænarum admixtionem cineritio flavescens, hic lactei coloris est, ut dissectiones cadaverum me edocuerunt; & quia colore flavescente interior superficies intestini ante infecta est, ob hanc causam infelix quædam obnubilatio exoritur, conspectum horum vasculorum præpediens, & fere impossibilem efficiens. Obvium est filtri exemplum, quo hocce phænomenum illustrare licet. Quando liquores colorati probe agitati filtro iniiciuntur, alio colore tingi internam, alio externam superficiem observamus, quoniam in transitu purificatio seu depuratio, sicque immutatio coloris producitur:

Par-

Particulæ enim tenuiores & magis dilutz solæ transeunt, crassiores vero intus retinentur. Idem fere accidit, in intestinis chylum transcolantibus, uti experientia testatur.

Aliud non infrequens impedimentum occurrit, quo obstante ad optatam metam pervenire non licet. Interdum enim accidit, ut vasa chyliifera, quæ super intestina deambulant, chylo distenta videantur; E contra parte, qua cavitatem respiciunt, vacua & inanita, adeoque inconspicua reperiantur, quod a variis causis provenire potest.

Propter dictas rationes, origines vasorum chyliiferorum, sive locum, quo enascuntur, nemo adhuc affectus est. Per locum non intelligimus hoc vel illud intestinum, prout titulo gracilis aut crassi insigniri solet: Nam controversiam istam de ortu chyliiferorum inferius aptiore occasione pertractabimus. Hic per locum intelligendum est, pars illa determinata intestini, in qua radices seu oscula chyliiferorum ductuum implantantur. Unumquodque enim intestinum amplissima superficie, variisque particulis in ea contentis a natura præditum est; quæ particulæ modo iuga, modo profunditates efformant, uti satis notum est. Quare iure postulo, ut certus locus assignetur, ex quo origo chyliiferorum derivari possit. Omnes Anatomici, quotquot a temporibus *Asellii* & *Pecqueti* de vasis chyliiferis commentati sunt (excepto uno *Cowpero*, qui ex arteriis Mesaracis novam eorum suppeditavit originem) adeoque nuperrimus quoque isque diligentissimus Professor Italus, a tota intestini superficie chyliiferorum ortum derivant, hancque in-

nume-

numerabilibus osculis pertusam esse absque dubitatione pronuntiant. Experimenta tamen non invenio, uti necessarium est, ad dubitationem omnem tollendam, nulla quoque rationum momenta, quibus experimentorum defectus suppleatur. Nam, quod chyli copiam attinet, novimus distributionem chyli non raptim, sed successive perfici, hinc non tanto vasculorum numero opus esse, ad chylum exhauriendum. Quod poros attinet creberrimos, in intestinis observatos, novimus certo, a poris in palato, oesophago & stomacho exstantibus, haud diversos adeoque glandularum intestinalium tantum emissaria esse. Quod denique frequentiam chyliferorum in extrema superficie attinet, etsi ea super totam intestini superficiem, magna copia sine ordine discurrere nonnullis visum sit, incertum adhuc est, quamvis intus lege enascantur? an numerus internus respondeat exteriori &c. Plura non addam, quia satis apparet, non ut assertum, sed ut coniecturam accipiendum esse, quicquid super origine vasorum chyliferorum ab anatomicis haecenus divulgatum est. Si nostrae observationes ægre fidem invenerint, quia vel novæ vel difficilioris indaginis sunt, non sumus valde succensuri, quia singulari artificio nobis revelata sunt, quæcunque hocce scripto continentur.

Locus aliquis separatus in cavo intestini existat, in *Origines* quo, reliqua tota superficie exclusa, radices chyliferorum ductuum seu eorum oscula implantata sunt. Hæc *chylif. de-* iam pridem celeberrimi Angli cogitata fuere, uti verba *tectæ.* ipsius testantur: "*Fortasse lactæe in plicis intestini termi-*,
natae, tenuiorem & magis aquosam chyli partem absorbent; Glissonius.

L 1

" sunt

“sunt enim spongiosæ, & nonnihil prominent in ipsum chy-
 lum, qui iisdem in suo descensu affricatur. Verisimile est
 hic loci aquas, quæ mox ab ingurgitatione profusa per u-
 rinam redduntur, primo abliguriri. Necesse enim est,
 ut in transitu non diu morentur, cum parum immutata
 mox micu excernantur. Si vero descenderent per totum
 tractum ilei ad initium coli, certe non per urinam, aut per
 sedem egrederentur.,” De valvulis quidem intestini,
 quæ hætenus chyli ferorum consortio destitutæ credebantur,
 præcipue hic sermo est, quæ opinio nostro satis
 invento præcludere videtur. Hocce tamen inventum,
 quod sensuum testimonio nititur, quodque industriæ, non
 vero opinioni debemus, longe alia includit, uti mox su-
 mus exposituri.

Valvulæ intestinal. originem dant omnibus vasis chylum ventibus. Intestinales valvulæ, non solum chyli ferorum consortio participant, sed ausim dicere, has solas isto frui privilegio in toto intestino. Nam per novam rationem præparandi intestina, vasorumque chyli ferorum semitas in cavum usque intestini, uti sæpius factum est, persequendi, ne umbram horum vasculorum in cava superficie intestini, etsi exterior iis satis referta esset, internoscere potui, nonnisi sero veram huius effectus causam, quam ab initio difficultati regressus tribuebam, intelligens. Nequaquam verò propter hanc difficultatem regressus, quam probe novi, conatus in hacce disquisitione irriti fiunt, ut plerique sibi imaginantur: Hæc enim difficultas tandem vinci & superari potest. Verum id accidit propter impossibilitatem res inveniendi & videndi, ubi non sunt, aut ubi acies oculorum pertingere non valet. Vnicum fontem ac originem, nimirum valvulas intestinales, in quibus tanquam aptiore & editiore loco
 vasa

Vasa chyliſera prudentiſſime diſpoſita ſunt , animadvertente nobis licuit. In ſumma valvularum crepine ſeu fine, oſcula chyliſerorum ſic conſpeximus, ut preſſione digito, deorſum verſus dictam crepidinem facta, liquor foras iniectus, e quibusdam oſculis ſub tenuiſſimi roris ſpecie in cavum inteſtini proſiliret. Quum porro, adhibita ſumma diligentia, exitum materiæ in nulla alia parte valvulæ, quam in ima, fieri cognoſceremus, hic proinde ſtatuumdum eſſe principium chyliſerorum iudicavimus. Intentio quoque erat numerum, diſpoſitionem & conformationem minimorum oſculorum ſimul obſervandi, ſi per incredibilem eorum anguſtiam lubricitatemque valvularum, licuiſſet. Summa oſculorum, quæ unaquaque valvula comprehenduntur, incerta eſt, attamen mediocriſ, quantum ego coniiicere valeo. Numerare eorum plexus per cava inteſtini diſtributos non ita difficile eſt, quoniam in unaquaque valvula unus plexus naturaliter continetur, quare neceſſe eſt, ut ſumma plexuum æqualis ſit ſummæ valvularum, ſimulque diſtantia plexuum, ut diſtantia valvularum, quæ trium linearum eſt. Plexuum figura circularis eſt inſtar coronæ : Nam ſicuti in palpebrarum tarſis, ita in limbo valvularum, orificia chyliſerorum ea ratione diſpoſita ſunt, ut totum ambitum compleant, quod ex eo ſatis evidens eſt, quia nulla alia parte valvulæ, quam ima, exitus materiæ iniectæ obſervatur.

*Oſcula
vaſorum
chyliſ. in
coronam
diſpoſita.*

Totum itaque artificium, quod ſub hacce chyliſerorum detecta ſtructura contentum eſt, in hoc conſiſtere videtur. Primo, quum chyliſera diſtinctum vaſorum genus, cuius actio, parenchyma inteſtini proprie non ſpectat, ſed chylum ſolummodo vel liquida eius cavo innatantia, conſtituant

stituant, ob hanc causam sic disposita sunt, ut extra superficiem intestini multum promineant & caput, ut ita loquar, erigant, quia valvulae per circulos concentricos dispositae, profunde in cavum intestini sese demittunt. Propterea quando intestinum chylo aut substantiis quibuscunque liquidis abundat, motuque peristaltico cietur, quando in systole eius parietes propius accedunt, valvularumque diameter minor; viceversa in subsequente diastole latera recedunt, adeoque valvularum diameter maior efficitur, necesse est, ut valvulae una cum orificiis in coronam dispositis, liquidis praeterlabentibus saepius intingantur, sicque repetitis immersionibus & emersionibus, pars fluidissima, quae orificiis chyli ferorum quasi affricatur, ingressum inveniat, regressum vero impediant valvulae frequentissimae dictis vasis inclusae. Secundo quia plurimum interest, ut talis dispositio chyli ferorum, quam minime labefactetur, ideo duplicatura valvulae, ceu theca, inclusa sunt, quia primae viae magis quam caeterae partes iniuriis obnoxiae & expositae sunt: Praecipue vero tubulis chyli feris in situ perpendiculari retinendis, latera valvulae multum inservire videntur, prout natura actionis requirit.

His omnibus circa ortum chyli ferorum prolatis manifestum est, in toto intestino valvulas nobilissimas & primarias partes esse, licet usus caeteros hisce assignatos ea propter falsos esse minime censendum sit.

*Incessus
chyli fer. in
dorso in-
testini.*

Quod ad reptatum chyli ferorum super intestini dorsum spectat, quamquam non ea industria & sedulitate pro reptatu, quam pro ortu inveniendone opus sit, nec rarum sit hodie, intestina videre chyli feris refertissima, in quibus

bus adeo eorum reptatum observare facillimum est; attamen, si recte iudico, tum descriptione, tum delineatione, satis naturæ consentaneis caremus: Nam primo, inter intestinorum chylifera & sanguinea vasa, respectu copię & dispositionis, ingens discrimen invenio. Comparavi in hunc finem utriusque generis vasa, postquam liquoribus convenientibus ea replevissem; & primo intuitu chylifera, sanguineis inferiora numero esse deprehendi; dico primo intuitu: Nam tardare non oportet, quia quum citius dispareant quam sanguinea, facile hæc ipsique nervi, pro illis imponunt & pro chyliferis ab incauto pictore accipiuntur, quales errores non infrequenter committi ab eiusmodi hominibus sibi relictis solent. Cavendum est deinde, quando vasa ista chylo adhuc distenta contemplari volumus, a motu, nec non spiritus ardentis affusione, ille enim chylum in fugam vertit; hic vero tingit colore rubente, sicut hocce phænomenon cum admiratione aliquoties observavimus. Quo pacto per simplicem spiritus ardentis ex frumento destillati affusionem, absque admixtione, color albus in rubrum transmutetur, id equidem conceptu arduum est. Verosimile est, quadam principii salino-sulphurei, per poros vasculorum penetrantis admixtione, hocce phænomenon generatum fuisse, eodemque forte modo in viventibus, principiorumve haud dissimilium accessione & actione, sanguificationis negotium institui, quia sicuti a succorum alterantium permixtione albedo chyli in intestinis generatur; ita etiam conversionem chyli in sanguinem, a simili causa licet ignota pendere, rationi consonum videtur. Si a nostro scopo minus alienum esset hic inquirere,

Phænomenon curiosum.

rere , num inter alias causas, ab usu spirituum ardentium, quorum in toto Imperio tanta est consumtio , incolarum optimus habitus & cutis color florentissimus procedant, uti in hancce sententiam propendemus, amplam sanedi-cendi materiam haberemus, tum de hacce consuetudine perantiqua, tum de aliis scitu dignis, quæ de Russicæ Gen-tis victus ratione, sanitate, morbis, remediis, partim Doctiss. Medicorum aliorumque hominum relationibus, partim experientia propria didicimus. Hæc vero in a-liam occasionem commodius reiciuntur.

*Duplex
chylif. or-
do in su-
perficie
intestini.*

Tab. I I.

Fig. I.

Lit. a.

Itaque, quod ad incessum chyli ferorum spectat, qua-cunque parte intestini, sive anteriore sive posteriore in-vestigatio instituat, duplex chyli ferorum ordo seu ra-mificatio in conspectum venire solet, de qua tamen ha-ctenus nemo quod sciam, sive iconem, sive descriptio-nem communicavit. Tum sede, tum forma a se invi-cem plurimum discrepant. Una, quæ profundior adeo-que origini propior est, inter vasculosam & musculo-sam tunicam continetur, ideoque minus conspicua est, & tantum per nebulam internosci potest. Pone unam-quamque valvulam conniventem, talis ramificatio arbus-culam referens, ad utrumque intestini latus, situque transversali, seu quod idem est, cum fibris annularibus parallelo, locata est, hæque ramificationes sibi tum in uno, quam in altero latere simillimæ sunt, absque sensi-bili tamen communicatione. Per hæc vero ramificationes earumque truncum chylus recta via ad mesenterium tendit.

Lit. b.

Super hæcce chyli fera, quædam alia deambulare vidimus sub extrema tunica, quæ instar vitri transparentis est, quorum ea propter conspectum obtinere facillimum est

est. Hæc, quia a priorum forma & incessu plurimum discrepant, nervi potius quam ductus chyliferi esse videntur. Nam veluti filamenta in longum extensa, ramificationes prius descriptas ad angulos modo rectos, modo obliquos secant atque propagine penitus carent; ex adverso amplitudine illas superant, hancque fere ab una extremitate ad alteram, ubique æqualem servant. *Tab. II.*

Quamobrem hancce speciem chyliferorum ad singula- *Fig. I.*
rem finem comparatam esse minus dubitandum est. Id *Lit. b.*

equidem ex eo satis clare apparet, quod per hosce canaliculos incurvos, magis liberos, manifesta inter subiacentia chylifera communicatio locum habeat, quibus adeo chylus via ampliore versus mesenterium deferri potest. Deinde non inter propinquos solummodo, sed etiam inter remotiores ductus, hancce communicationem obtinere eaque uniformi tendentia, ut a ramificationis unius principio seu radicibus versus finem seu truncum alterius, qui in principio mesenterii est, hi protendantur, non minus perspicue observavimus. Finem quod attinet, ad quem veritatis quadam specie, descripta chyliferorum structura referri potest, is esse videtur, ut, si quando propter varia obstacula, chylus per intimiora vasa, quibus ad mesenterium recta via devolvi assuetus est, minus progredi potest, ne retrorsum pelleretur, per altera vasa abduci possit, quæ ideo ampliora sunt & nulla divisione gaudent. Propterea officii quadam similitudine, emissariorum nomine satis notò, non immerito appellari possunt.

Cur duplex chylif. ordo?

Proximum nunc est, ut originibus & speciebus chyliferorum, una cum eorum super intestini parietes dispositione perlustratis, nonnulla circa rem satis obviam, sed

*Tam ant.
quam post.
intestini
superfi-
ciei vasa
chylifera
propria.*

*Tab. II.
Fig. I.
Lit. a. c.*

*Egressus
chylif. per
paria.*

sed hactenus prætermiffam , fcilicet de chyliferorum e-
gressu ex intestino , paucis expediamus. Quum facies inte-
stini duplex fit , anterior & posterior ac in una totidem
chyliferorum ramificationes extant , ac in altera , non
immerito quæritur , num prope intestini finem , ubi me-
senterium incipit , utriusque lateris chylifera in commu-
nem truncum confluant ? an e contrario truncos diver-
sos & distinctos efforment. Facile error & lapsus com-
mittitur , si perfunctorie & sine ea circumfpectione , qua
ad hanc disquisitionem opus est , hoc negotium suscipi-
tur. Ideo factum est , ut sine ullo fundamento a pleris-
que prior sententia adoptata aut silentio prætermiffa ,
nemini vero altera , quæ sola vera est , quæque
nostris confirmata est observationibus , perspecta. I-
gitur duplicem truncum chyliferorum prope finem inte-
stini , unum anteriorem , alterum posteriorem , demon-
strante oculo , luculenter conspeximus. Nullum vero
inter illos sensibile discrimen datur , nisi quoad locum e-
gressus: ille enim superiori .a. hic inferiori .c. intestini latere
ad mesenterium tendit , hancque dispositionem uterque in
mesenterio retinet , uti in seqq. palam fiet. De cætero
amplitude quæ setam porci æquat nec non externa
conformatione , perfecte conveniunt.

Per paria itaque , ex intestino versus mesenterium ,
vasa incedere chylifera , ex modo dictis manifestum est ,
quod non minus de vasibus sanguiferis intestini verum esse
deprehendimus. Attamen rariores sunt chyliferorum
quam sanguineorum obstructions , cuius differentia ratio ,
tum a copia , tum a qualitate sanguinis procedere
potest. Interdum etiam ipse chylus in suis vasibus sistitur ,
uti

ut exemplo cuiusdam Senis constat " cuius intestina ,, præter belle conspicua ac turgentia vasa chylifera ,, frequentissimos passim candicantes globulos , pannici ,, magnitudinem æquantes continebant, ex quorum singu- ,, lis singula chylifera vascula emergebant, qui eodem mo- ,, do turgebant atque ipsamet vascula. Verum talia ex- empla rarissima sunt : Nam ad liberiolem chyli per angustissima & compressa vasa transitum, duo ostia cum duplici trunco concessa sunt : Etsi una harum via- rum deficit, per alteram adhuc, quamquam parcius, suc- ci alibilis dispensatio fieri potest.

Quibus intestinis concessa sint chylifera, an omnibus promiscue & qua proportione, an gracilibus duntaxat? id postremo expediendum est. De gracilibus nulla amplius lis est, uno excepto duodeno. Circa reliqua vero hoc notandum est, ea quidem chyliferis non destitui, sed chylo tantum rarissime distendi, ob quam causam inconspicua sunt eorumque existentia in dubium revocatur. Id vero a duplici causa provenire putandum est : Quarum prima est, quod non satis iusto post pastum intervallo, tales homines occiduntur & aperiantur ; vel enim distributio chyli peracta, vel incipiens est. An mi- rum in oculos non venire crassorum intestinorum chy- lifera adeo diffusa, ad quæ serius & post satiata de- mum reliqua omnia descendit chylus : Porro ad aliud impedimentum, quod admodum sensibile nobis visum est, hic attendendum est, ad differentiam scilicet in- testinorum, item ad raritatem chyliferorum super ea in- cedentium. Quo enim magis versus finem intestinorum accedis, eo chyliferorum numerus magis decrescit, in-

*Intestina
crassa aq;
ac tenuia
chylif gau-
dent.*

crefcit e contra crassities inteflinorum, quo fit ut vafcula non eadem facilitate in crassis internofcantur quam in tenuibus quæ fere transparent. Ea propter tamen non ftatim eorum exiftentia in dubium revocanda eft.

*Inceffus
chylif. in
mefente-
rio per
paria.*

Ad mefenterium, ceu vaforum chyliferorum campum, feu quod idem eft, ad chyli per cavitatem abdominis inceffum, & quæ circa hunc forte minus perfpecta funt, ordo nos perducit. Prima obfervatio numerum chyliferorum in limine mefenterii incedentium, nec non locum hifce proprium refpicit, quarum quidem rerum cognitione hætenus deftituti, neceffe eft ut circa chyliferorum & chyli motum, tendentiam, phænomenaque varia, multa falfa & incerta prolata exftent. Quum ea fit mefenterii humani ftructura, ut duabus a fe invicem diftantibus membranif feu lamellis conftet, fepto craffiore adipofò interposito ita diftinctis, ut veluti duplex loculamentum, unum ventrem, alterum dorfum fpectans efformetur, jure meritoque Anatomico incumbit, ut quam potiffimum camera chylifera inclufa funt, an fuperiore, an inferiore, an vero in utraque fimul? ita oftendat, ut demonftrationis loco haberi poffit, fecus circa chyliferorum numerum maximopere hallucinabimur. Iam fupra diximus, gemino trunco ex intefтино prodire vafa chylifera, uti detracto intefolini extimo involucro, quod utriusque mefenterii lamellæ productio eft, clare apparet. Ex eo fequi videtur, duplicem in mefenterio feriem chyliferorum ad efle, unam quidem fupra feptum, alteram vero inferius infra feptum, id quod a nullo Anatomicorum hætenus indicatum eft, cuius quidem caufa eft, quoniam nemo chyliferorum truncorum ex intefтино egredientium duas ferief

adhuc

adhuc vidit & determinavit, quamquam nexus mesenterii cum intestino idem edocere videatur, quemadmodum experimenta anatomica plus quam una vice instituta, id extra omnem dubitationis aleam ponunt. Sic connexum est mesenterium intestino, ut huius medietati septum adiposum, quod duabus mesenterii lamellis interpositum est, firmiter alligatum hacque ratione intestinum in duas partes æquales quasi divisum sit, reflexis supra infraque prædictis mesenterii lamellis, quæ intestinum involvendo, in parte mesenterio opposita demum coniuncta, tunicam extimam efficiunt. Ex eo perspicuum est, ea chylifera, quæ e parte intestini anteriore prodeunt, commercium nullum cum posterioribus habere, neque horum coniunctionem cum illis ob crassitiem septi, possibilem aut facilem esse, neque etiam opus esse ad sui exitum, ut tunicam extimam intestini pertendant, uti consideranti patet.

Postquam specie tubuli capillaris, vix setæ porcinæ mediocris crassitiem æquantis, ad confinia mesenterii uterque truncus pari passu ambulans pervenit, peracto duarum fere linearum itinere, faciem suam subito permutat. Nam momento truncus talis exilis in duos tres quatuorve surculos, vix truncis minores scinditur, qui integrum manipulum tubulorum capillarium constituunt. Eorum nonnulli mox coeuntes, insulas oblongas efformant; alii separatim incedunt, obviamque factis aliis propaginibus inosculantur, mox novus iterum tubulus exsurgit, qui postremo cum plurimis aliis ex toto intestinorum ambitu concurrentibus sic confunditur, ut eum internoscere ac discernere amplius impossibile sit. Cæterum a vasis sanguineis, quæ pinguedine oblecta

*Facies
chylif. in
mesenterio
Tab. I I.
Fig. I.
Lit. ddd.*

M m 2

sunt,

sunt, chyliфера satis distare observavimus: Inter ambo enim, tota mesenterii pinguedo sic interiecta est, ut ad contactum pervenire non possint, quod multo magis de superiore & inferiore chyliferorum serie intelligendum est, quoniam adhuc magis a se invicem distant, siquidem immediate sub mesenterii lamella in pinguedinis superficie locata sunt. Attamen communicatio omnis inter chylifera primæ & secundæ speciei, eapropter non deneganda est, nam semel propaginem vidimus, e facie mesenterii superiore versus inferiorem, per septi substantiam contendentem & glandulæ corpus subeuntem, quæ adeo pro communicatione, non tamen immediata haberi potest.

Confluxus chyliferor. Talis chyliferorum incessus est toto illo spatio, quod est inter intestina & aream illam quæ ad universi ductuum chyliferorum systematis congregationem destinata est. Singuli enim trunci, e tota intestinorum circumferentia huc convolantes, quando ad aream istam plurimis glandulis confitam & admodum concentratam perveniunt, ad tantam, ut ita loquar, confusionem ac implicationem rediguntur, quæ non solum intuentium oculos mirum in modum afficit, sed quoque singularem in se continere usum significat.

Usus.

Quamobrem, ut usum paullisper attingamus, non hunc solummodo contextum admirabilem omnium undique ad angulos acutos confluentium vasculorum perpendere oportet, sed hoc etiam considerationem meretur, quod eadem dispositio in utraque mesenterii facie oculis se sistat. Nam quia bis occurrit, necesse est, ut magnæ utilitatis transitusque adeo chyli per hosce meandros indispensabilis sit necessitatis, alias, si una infusio.

x Phoca

Comm: Acad: Sc: Tab: II: pag: 276.



ex Catopardo



tionis chyli ratio esset, minime istis ambagibus opus fuisset. Itaque suppono chylum qui ex intestinis successive vasa chyli ingreditur homogenum seu similem sibi non esse adeoque in vasculis illis maximam chyli differentiam dari, quia dum chylus in intestinis elaboratur, aliæ & aliæ particule varix indolis extricantur, quæ emancipatæ avolant, vasisque chyliiferis successive transportantur; Et hoc quidem eousque non malum aut damnosum esse videtur, quamdiu scilicet vasis adhuc vehitur chyliiferis; Sed si chylus sub tot contrariis formis massæ sanguineæ ingeritur, tum ita tutum non amplius est, quoniam duplex inde malum subsequi potest, vel enim particule divisim sanguini immixtæ nimis dissociantur ac divelluntur adeo, præter naturæ consilium, ut vel nunquam vel tardissime in nexum convenientem pervenire queant, vel particule sic dissociatæ, tumultus & perturbationes excitant, quas servato vinculo minus suscitare valuissent. Quamobrem, ut me expediam, situs, numerus, contextus chyliiferorum, verbo, singula quæ in præfata dispositione occurrunt, nihil aliud quam prudentem exactamque commixtionem significare videntur: contrariis enim motuum directionibus crebrisque anastomosibus hic occurrentibus necesse est, ut chyli particule millies locum mutant, sui que generis particulis obviam veniant, iisque maritentur, ac probe inter se misceantur, antequam libertatem obtineant effugiendi versus loca destinata, hoc est, receptaculum & ductum *Pecqueti*.

Quamquam versus receptaculum & ductum *Pecqueti* omnem chylum contendere verum ac indubium sit, mo-

Progressus chylifer. versus receptac. dus tamen incedendi chyliferorum in homine fere ignotus aut perperam descriptus est. Præter generales difficultates, quæ ordinarie in horum ductuum administratione obstant, novum impedimentum hic suggeritur a partium superincumbentium molesto situ, & facilitate læsionis, quæ ob incredibilem implexum simulque profundam immersionem raritatemque vasculorum chylum vehentium, uti evitari, ita reparari vix potest. Hisce non obstantibus, optatum tamen successum in hacce difficili administratione obtinuisse nobis visi sumus. Præter usum nobilem, quem præstare diximus laudatum chyliferorum concursum alius non prætermittendus est, scilicet reductio chyliferorum ad minorem numerum; nam chylum per tot distinctos & disiunctos canaliculos in massam sanguineam difficulter ingredi posse, ipsa ratio & ceterorum vasorum leges persuadent. Igitur numerum chyliferorum imminui & reduci, eorum contra amplitudinem augeri omnino concedendum est. Missis, quæ super hoc numero, a variis professoribus divulgata sunt, ea, prout nobis oblata sunt, paucis describam. Uti chyliferorum numerus ad unitatem se reduci non patitur, ita numerum quinarium ea excedere nunquam observare potui:

Eorum reductio ad numerum quinarium.

Tab. 12. Quamquam lusum in hisce vasis fieri concedam, quinque
Fig. 1. perpetuo vasa in cadaveribus ad hunc finem incisis, versus receptaculum contententia clare & distincte numeravi: Sed cavendum est a lymphæ ductibus, ne hos cum illis confundamus & sic chyliferorum numerum temere augeamus. Quod eorum magnitudinem attinet, excepto uno quod capacius est, æqualem inter se proportionem obtinent, adeoque a vasis, quæ vocantur primi generis

neris, vix differunt. Denique, quam in abdomine via ad memoratum receptaculum incedant, probe affectus sum. Nam, postquam remotis removendis, ad pancreas perventum est, ibi ad dextram eius extremitatem cui incumbit oblique & ligamentis tendineis annexum est principium ieiuni, vasa nostra ex mesenterii finibus egredi & apparere incipiunt. Vnum, quod patentius est, 5. sub posteriore & inferiore pancreatis facie sinistrorsum versus incedit, mox venam renalem sinistram aditasque lumbares glandulas transcendens in proximum receptaculum, eiusque anticam partem terminatur. Reliqua, in antica magis pancreatis facie conspicua sunt, eique veluti fundamento incumbunt: Oblique enim inter duas extremitates pancreatis ascendunt, hinc per partem posteriorem rursus pari numero descendunt, distinctisque canalibus, ad exortum arteriæ mesentericæ superioris, non quidem in medio receptaculi, sed in eius apice seu principio ductus thoracici inferuntur. Quidam veterum, memoratum intestinum super corpus pancreatis in canibus observantes, ea pancreati singularem usum præstare sunt imaginati; Verum potius pancreas illis infervire dicendum esse videtur: Nam, quia pancreas septo transverso & stomacho propius adstat, necesse est, ut chylifera vim & pressionem utriusque sentiant, sicque motus chyli adiuvetur. Deinde a violentis intestinorum distractionibus eo tutiora sunt, quo pancreatis firmiore basi gaudent.

*Transitus
chylif. su-
per pan-
creatis
dorsum.*

Hactenus de universo systemate chyliferorum, tanquam re adhuc nova & ardua, cui anatomicus metu infau-

fausti eventus manum admovere detrectat, ne eius fama inde periclitetur. Minus ardua res est chyli receptaculum & thoracicum ductum investigare: Nam hodie a quovis solerti anatomico id postulatur, ut in singulis cadaveribus tam hominum quam brutorum quæ sua parvitate se non excludunt, ea perpetuo ante oculos sistere & demonstrare valeat. Varia in hunc finem a viris exercitatissimis excogitata & divulgata sunt artificia, quæ hic nolo repetere; ea tantum quæ in theatro nostro in usu sunt, communicabo.

*Requisita
pro de-
monstra-
tione re-
ceptac. &
ductus
Pecqueti.*

In omnibus dissectionibus qua publicis qua privatis ad id semper respiciendum est, ut quæ invicem naturaliter cohærent, ea si fieri potest, quam minime disiuncta, seu per fragmenta demonstrantur: Pulchrum enim est ac utile, partes videre integras, quoad universam structuram quæ ad ipsas pertinet, absque mutilatione, cum omnibus administrantibus & ad functionem necessariis particulis, uti in vivente corpore id sese habet. Ex hacce regula sequitur, duplici tantum ratione seu methodo vere anatomica posse tradi seu demonstrari partes, de quibus præcipue hic sermo est, altera cum tota chyli ferorum congerie ac proinde cum universo systemate vasorum chylum vehentium, uti modo fecimus & tradidimus; altera cum systemate vasorum lymphaticorum inferioris & mediæ ventris, uti nunc sumus exposituri.

*Nova me-
thodus
proponi-
tur.*

Incipiendum est in alterutro inguine, quoniam electio arbitrio professoris relinquatur. Hinc si in uno difficilius succedit experimentum, in altero tentare idem proclive est. Arbitrio quoque professoris relin-
qui-

quitur , an velit ante iniectionem ventrem cadaveris prius aperire nec ne , quia ad successum experimenti id indifferens est. Si denique in utroque inguine ob pinguedinis copiam vel aliud impedimentum irritum fiat experimentum , aperiendum erit abdomen , & detracto peritonæo ad alterutrum latus pelvis vasa quæ sita momento adsunt. Quando propter effluxum lymphæ inconspicua sunt , hocce signo internoscere licet nempe albescentis & plani filamenti umbra super venas cruales aut iliacas oblique incedentis, quas ea propter Soli aut luminis obvertere non inutile erit. Quod restat, una iniectione absolvitur. Si in utroque latere iniectio facta sit, omnium lymphæ ductuum ex femoribus *aa.* ex cavo pelvis *bb.* ex peritonæo *cc.* visceribusque totius abdominis prodeuntium incessum , societatem cum vasis sanguineis, transitum per varias glandulas, crebras anastomoses & inde formata retia , plexus & truncos , ipsamque cisternam & continuatum ductum thoracicum uno conspectu observare licet, uti inferius explicabimus. Beneficio huius methodi universalis incidi in rem admodum curiosam , quæ forte ob defectum solum prædictæ methodi rarius offerri solet : Pauca enim pluralitatis receptaculorum ductuumque thoracicorum tam in brutis quam hominibus exempla prostant. Vid. *Pecquetus*, *Bartolinus*, *Blancardus*, *Kerkringius* qui triplicem vidit, *Louverus*, *Sylvius*, *Bourdomus*, *Tauvrius*, *Eduardus Vium* in *Ephemerid. nat. Curios.* *Muraltus* in *exper. anat.* *Saltzmanus*. *

Tab. 12.

Fig. 1.

N n

Bis

* *Excerptum Epistolæ a Celeberrimo Io. Saltzmano d- 4 Junii 1727. ad nos datæ. En babes ea quæ su-*

Duplex receptac. cum duplici canali thoracico, in viro & femina Bis primo in virili, ex quo figura desumpta est, & deinceps in foeminino subiecto, duplex receptaculum cum duplici canali thoracico perspicue observavimus & praesentibus *Illustrissimis Blumentrostiis* aliisque demonstravimus. Vasa utriusque lateris lymphatica *aaaa*. non uti moris est in unum alveum confluebant, sed duplex erat ampulla dextra & sinistra, in quas separatim terminabantur. Nullam inter eas sive in figura sive in longitudine

periore anno de ipsis bisce viis in homine observavi, ut taceam multa alia praecedentibus detecta temporibus. Vidi nempe, multisque Medicinae Doctoribus & Cultoribus, quibus eum intueri volupe erat, demonstravi ductum thoracicum prorsus extraordinarium, receptaculum erat duplex, alterum a latere corporis 2^{dae} lumborum vertebrae satis amplum & oblongum referebat sacculum, qui mox angustior redditus sub arteriae aortae trunco eo in loco, ubi emulgens utrinque ab eo abscedit, ascendebat super medium eisdem vertebrae corpus, dein iterum dilatatus in saccum oblongum & capacem ordinarium receptaculum constituentem abibat. Ex hoc 4 canales, duo maiores & totidem minores emergebant ultimae dorsi vertebrae incumbentes. Praeterea duplex etiam insertio in utramque venam subclaviam conspiciebatur, ductu in duos ramos diviso eosque insignes & non uti alias fieri solet, rursus coeuntes in sulcamque veluti efformantes, dexter longior erat sinistro & arteriam subclaviam illius lateris supergressus anfractu tortuoso literam S maiusculam satis accurate referebat. Sinister plures pariter anfractus describens venae subclaviae eius lateris in loco

dine differentiam sensibilem deprehendimus , præ- *Tab. 12.*
 ter hoc unum , quod sinistra A. tumidior, amplior & *Fig. 3.*
 quoad situm eminentior dextra B. erat, quæ profundius ver- *Lit. A. B.*
 sus pelvim inclinabatur quartæ fere vertebræ lumbari
 insistens. Hæc inæqualitas in causa est , quod ductus
 thoracicus dexter ad eum gradum altitudinis quo si-
 nister haud assurgat , quoniam scilicet versus infe-
 rio-

Nn 2

rio-

*ordinario inferebatur, nempe parti superiori prope insertio-
 nis venæ iugularis internæ locum. Quæ uti & plura
 alia hio vivo repleta iucundissimo spectaculo sese exhibebant.
 Idem hius in infinita etiam vascula lymphatica tum in hoc
 tum in aliis subiectis penetraverat, nimirum quæ a glandulis
 dorsalibus, oesophagi, iugularibus pullulant, item myriades
 a confiniis thymi, a medulla spinali per specum osseam verte-
 brarum prodeuntes, plures in utroque latere aortæ nec non
 ex aqualiculo ad latus arteriæ iliacæ sinistræ ascendentes ver-
 sus receptaculum. Quod vero hisce omnibus anteferendum
 esse iudico visum repertum, est quod d. 20. Febr. huius an-
 ni in vasa lactea primi generis prope intestinum ieu-
 num inquisiverim & post diuturnum laborem omni adhibita
 diligentia, & qua in eiusmodi labore opus utique est patien-
 tia, unum tandem detexi insigne, in quod hius immissus in
 pleraque vasa lactea per mesenterium dispersa penetravit
 tum primi tum secundi generis, quorum plurima in fascicu-
 los & glomeres velut collecta, curiosorum oculis se sistebant
 Quæ mihi spem faciunt fore, ut integrum vasorum & la-
 ctiorum & lymphaticorum systema hio repletum in abdomi-
 ne exhibere & demonstrare mihi aliquando liceat.*

riorem extremitatem longiore est, viceversa quoniam extremitas inferior sinistri brevior est, superioris e contra longitudo maior esse debet, ut veluti mensuræ inter utrumque & æqualitatis ratio servaretur.

Reliqua sive receptaculorum sive ductuum thoracorum conformationem & communicationem spectantia, non minus curiosa & attentione digna erant. Etsi enim per transversas & laterales anastomoses *bb.* ambo receptacula communicare videantur, communicatio tamen talis est, ut non indiscriminatim ex uno in alterum, sed ex dextro solummodo in sinistram circuitus liquorum locum habeat. Per diverticula *cc.* deinde utrinque forma arcuum receptaculo appensa, quandam diversionem qua pars liquoris a transitu per totum cavum vesiculæ dispensatur, fieri manifestum est, quod pariter de tribus parallelis ductibus *ddd.* ex summo vesiculæ dextræ una cum ductu thoracico, ad certam altitudinem ascendentibus intelligi debet: Propterea tota liquoris quantitas non recta seu immediate e receptaculo in ductum thoracicum exsilire potest, sed pars eius aliquanto spatio per memoratos particulares ductus elevatur, antequam ad ductum principalem perveniat.

Fig. 3. Quod ductus attinet thoracicos, sicuti duo receptacula ad
Lit. C. D. utrumque vertebrarum latera sibi parallela, ita etiam duo canales unus *D.* a dextris sub vena cava, alter *C.* a sinistris sub aorta per totam spinæ longitudinem decurrentes in conspectum veniebant, quorum etiam in conformatione & incesu observata diversitas, non sine diversi usus ratione comparata nobis visa est: Nam præter altitudinis, quæ in-
 fini-

sinistro ut supra indicavimus maior erat quam in dextro differentiam, id discriminis quoque evidentissime adparebat, quod in dextro ea fere rectitudo esset quam in fistula barometri observare solemus. Ad secundam dorsalem vertebra demum insignem efficiebat angulum seu flexuram nec non bifurcationem seu insulam, ex qua nova propago versus sinistrum canalem sese inclinans simulque cum duobus aliis ramis ex sinistro prodeuntibus ad venam subclaviam sinistram contendens, abscedebat. Dexter sinistro crassior & amplior erat: Sinister econtrario admodum sinuosa & flexuosa via cum crebris & prolixis bifurcationibus * * * * duplicem fere ductum thoracicum mentientibus totoque eius tractu conspicuis incedebat. Priusquam sententiam nostram de hac conformationis diversitate simulque pluralitate receptaculorum & ductuum generaliter exponamus, indicare modum oportet, quo ad exemplum receptaculorum duo thoracici canales in nostro subiecto inter se invicem communicabant. Tribus locis, prope ortum, & in medio per brachia seu tubulos transversos *e* nec non per memoratam propaginem **F** e dextri canalīs sine productam eam institui communicationem, qualis supra inter duo receptacula descripta est, luculenter conspeximus. Inter plurima vasa lymphatica simul in conspectum venientia, unum monstruose distentum sub clavicula sinistra locatum occurrebat, quod una cum cæteris eo fine repræsentari curavimus, ut quantam lymphæ ductus absque ruptura distractionem pati possint, uno hoc exemplo intelligi possit. Ex eo tamen formationem tumorum vesiculosorum, cuiusmodi

Fig. 3.

Lit. E.

Lit. F.

Lit. G.

articulo observationum anatomicarum exemplum exstat, nondum explicari posse censemus.

Postremo, ut historię finem imponamus, in iis subiectis in quibus pluralitas tum receptaculorum tum canalium thoraciorum, ad similitudinem descripti casus occurrit, determinandum est quis duorum proprie chyliiferus sit? Nam improbable videtur utroque simul chylum sursum devehī. Quare, si nullum aliud signum, quo differentia hæc intēosci queat occurrit, suspicari licet (modo conformatio dispar sit) illum proprie pro chyliifero habendum esse, cuius sive situs sive conformatio cum cognita structura & situ ordinario maxime convenit, quia nulla ratio est ut in duobus canalibus eundem liquorem tranantibus diversa insit conformatio. Propterea in nostro subiecto non immerito pro chyliifero sinistrum C. agnoscimus, per quem chylus sicuti per alterum canalem D. lymphā, devolvitur.

Fig. 3.

Cæterum per exempla citata incertum dubiumque fieri videtur, quisnam genuinus & naturæ magis consentaneus numerus harum viarum sit? quia infiniti casus dari possunt, in quibus duplici receptaculo ductuque thoracico carere periculosum videtur; Et quia recens & in paucis hominibus tentata fuit hæc encheiresis anatomica (ad minimum qua nos proponimus methodo) suspicari licet, an defectu methodi & diligentię potius quam naturali defectu viæ de quibus sermo nunc est, duplices rarius inventæ sunt. Quam ob rem suademus, ut vel in utroque inguine, vel ad utrumque latus aqualiculi uti supra dictum est, hæc disquisitio sæpe instituat.

Nunc

Nunc tempus est ut ea, quæ secundante laudata methodo tum circa receptaculum tum canalem thoracicum specie quadam novitatis nobis innotuere, ~~scilicet~~ veritatis studio exponamus. De differentia inter marem & foeminam prout in utroque sexu hæ viæ nobis oblatae sunt, etsi ab aliis prætermissa, verba primum facienda sunt. Eandem vero quam in cæteris partibus duorum sexuum, differentiam proportionemque observavimus: In foeminis enim contractiores & exiliores sunt pro maiori parte quam in viris, etsi huius inæqualitatis causam ignoremus. Cogitare licet in foeminis, propter evacuationes solennes quibus obnoxiae sunt necessitatemque alendi foetus, minorem lymphæ copiam ex partibus inferioribus refluere, eamque ob causam tanta ductus amplitudine opus non esse quam in viris diversa temperie gaudéntibus. Cæterum in individuis, salva illa generali in sexu differentia, eam constantiam & varietatem quæ a solertibus alias anatomicis obiicitur iconibusque eorum representatur, invenire non potuimus: Nostra enim methodo quæ absque flatu & liquoribus spissis, absque expansione perficitur, ea uniformitas semper apparuit, quæ communiter in organis nutritioni dicatis, in quibus variationes raro contingunt, observari solet. Loquor de variationibus vere talibus, quæ structuram & faciem peregrinam conciliant: Nam quoad variationes minoris momenti, uti sunt crassities, amplitudo, inclinatio maior vel minor &c. tales utique dari concedendum est.

De Receptaculo *Pecqueti* eiusque vera conformatione per anaten detecta nunc dicendum est, quæ si cum anatomicorum descriptionibus & delineationibus minus

Differentia respectu sexus.

*Tab. 12.
Fig. 1.
Lit. A.*

Similitudo receptaculi cum vesiculis seminal.

mus concordant, soli naturæ & difficultati præparationis tribuendum est. Postquam tum pinguedinis tum succingentis membranæ velamenta, præmissa iniectioe, remota sunt, ea receptaculi configuratio apparet, qualis a nemine adhuc observata & delineata fuit, quæ idcirco non nisi adhibita singulari attentione ac circumspeditione videri & cognosci potest. Non melius quam cum seminis masculini receptaculis comparari illud potest, si tantum multitudinem intestinulorum demas. Plurimum enim intestinulorum transparentium per fibrillas colligatorum partim anfractuosorum partim perpendicularium atque inter se communicantium aggregatum est, in quo proinde contenta fluida in quendam circuitum agi videntur: Namque primo basis seu fundum *A.* intestinulo circulum efformanti simile est, cuius duæ extremitates *dd.* superius intertiam quandam cavitatem *e.* dehiscent: Cæterum toto ambitu hocce intestinulum clausum adeoque cœcum est. Eiusdem dextro lateri intestinulum aliud *f.* connascitur, quod mox iterum receptum parvam insulam producit. Conspectus prædictarum extremitatum insigni vase chyliifero *g.* quod anteiacet, impeditus est. Illud enim sinistrorsum veniens, postquam ad receptaculi confinia pervenit, versus latus eius dextrum oblique contendens eo quem diximus loco ad angulum acutum implantatur chylumque in huncce gyrum evomit: Hoc pacto necesse est, ut chylus cui hicce gyrus destinatus est, e dextra in sinistram partem devolutus circuitum instituat.

Parte postica eiusdem gyri, aliud capacius intestinulum *g.* annexum est, quod particularem cavitatem constituere videtur. Ut huius formatio seu connexio ususque rite exponatur.

ponantur , ab ima pelvi originem repetere necessum est. *Tab. 12.*
 Utrinque remota peritonæi lamella, ex femoribus, ex tota *Fig. 1.*
 pelvi contentisque in hac visceribus, numerosi lymphæductus *abc.* qui super vasa iliaca oblique ad latus eorum externum transeunt, sursum progredi observantur, quorum dextri ad venarum, sinistri ad arteriarum iliacarum concursum, iuxta venæ cavæ & aortæ truncos glandulasque iliacas *bbbb.* exstant; Quando eousque pervenerunt, ut propter multam pinguedinem qua memoratæ glandulæ obstitæ sunt ab ulteriore quasi transitu prohibeantur, tum nexus & retia efformant quorum pulchritudinem non parum augent diversa hisce immixta lymphatica rarioris speciei, uti sunt peritonæi *cc.* & medullæ spinalis, quæ a nonnullis pro vasis lacteis seu chyliferis perperam accipiuntur. Huic plexui deinde succedunt duo vel tria vascula grandiora *ii.* pinguedine libera, tum lateri tum dorso venæ cavæ & aortæ accumbentia mox facto exiguo progressu visui sese proripientia, quoniam reliquam viam usque ad partem receptaculi posticam sub vena & sub arteria absolvunt quas ideo prius removere necesse est, ut tum incessus tum insertio quam utriusque lateris lymphatica dextrorsum & sinistrorsum distincto caudice in receptaculi posteriorem partem, de qua supra, instituunt, in conspectum venire queant. Hæc pars postica receptaculi cum anteriore *A.* quam chylo dicatam esse diximus, nulla parte communicat.

Ex eo perspicuum fieri videtur, pro utraque fluidorum specie conceptacula propria condita esse, *Aliud chyli*, *li*, aliud unum in chyli gratiam quod anterius est & ventrem respicit, alterum huic subiacens capacius & *lymphæ* *receptac.* dorsum respiciens in lymphæ gratiam adeoque

O o

ambo

*Necessitas
duplicis
receptac.*

que ambo fluida invicem non commisceri uti hoc fieret, si in unum alveum effunderentur uti hactenus visum est. Ex una autem contemplatione decursus & tendentiae utriusque fluidi simulque ductuum advehentium præfatæ dispositionis causam intelligere facillimum est: Nam quia in homine chylus superne descendit, lymphæ contra ascendit, talis motuum contrarietas duplicis conceptaculi necessitatem omnino indicare videtur, ne scilicet alter alteri impedimento esset vel etiam, ne confluentium simul massarum onere cisterna nimium gravaretur aut laceraretur.

*Glandule
lumbaræ.*

Quod denique receptaculi finem attinet, animadvertendum est vice appendicis duos ei canales perpendiculares *kk.* anteriori posteriorique receptaculo respondentes, in quibus proinde adhuc inpermixta ac divisa fluida devolvi videntur continuatos esse, qui postremo aliquot linearum progressionem facta usque ad arteriarum celiacæ & mesentericæ superioris glandularumque lumbarium confinia elevantur unumque in truncum conflunt, quem tum situs tum aliorum indiciorum testimonio pro fine receptaculi non immerito reputamus, cuius proinde tota longitudo 19 linearum est. Cum duobus prædictis canalibus non confundendus est tertius hisce parallelus vasque insignis lymphaticum quod ad receptaculi corpus non pertinet, verum e sinistri renis regione sumpto principio ibidem quo duorum prædictorum canalium confluxum esse diximus, terminatur. Cæterum, ut nihil intactum relinquamus, unam circa glandulas receptaculo aditas *mm.* quæ toties errandi ansam præbuere, animadversionem sustinere non inutile visum est: Primo conspectu inter glandu-

las

las lombares ipsamque receptaculum nulla distinctio apparet, quia propter circumfusam pinguedinem unum veluti corpus continuum efformare, quam suspicionem augent superambulantia vasa chylifera quæ ad glandulas æque ac receptaculam pertinere creduntur: Ex quo factum est, ut singularem inter glandulas & receptaculum familiaritatem in chyli gratiam institutam esse multis persuasum sit. Verum enimvero si ulla in parte certe in locis hisce inaccessis cautatione opus est; Equidem in glandularum ad receptaculum positum tum vero incessu chyliferorum super glandulas, quid opus est mysterium quærere? ab una namque situs partium ac dispositionis abdominis ratione potius quam necessitudine aut familiaritate pendere hancce chyliferorum & lombarium glandularum viciniam unicuique consideranti patet.

Vena alba *Eustachii* quæ immediatæ succi alibilis dispensatricis seu ultimæ portæ ad sanguinem ductusque thoracici seu chyliferi nomine hodie nota est, etsi novarum accessionum minus indiga sit, eam tamen silentio præterire nostri instituti ratio minus patitur. Idcirco eius quæ supra inter receptaculum chyli & seminis virilis receptacula instituta est comparationis memores, prædictam venam albam *Eustachii* cum parastata variis locis distracta & evoluta variisque hinc inde spiris & circumvolutionibus lateralibus constante, non male venire deprehendimus: Propterea omnium gyrorum & anfractuum ratione habita, hancce venam (ad minimum hominis longitudinem) quæ alias in suo situ & connexionione naturali thoracis longitudinem adeoque 14. pollices vix excedit, æquare necesse

O o 2

est.

*Differen-
tia in aliis
animali-
bus.*

est. Talis vero in aliis animantibus nostra manu diffe-
ctis e. gr. in phoca, in catopardo *Americanorum*, in
elephanto dispositio nobis haud oblata est ; Cuius dis-
criminis ratio in eo forte consistit, quod in hisce animan-
tibus voracioribus motus chyli raro intermittit , pro-
pterea in ductu thoracico semper pleno tales circumvolu-
tiones seu anfractus minus necessarii sunt quam in ho-
mine, in quo chylus statis temporibus ac minori copia di-
stributus minus præcipitanter per huncce canalem devol-
vitur. Deinde, quum in homine maior quam in ani-
mantibus ratione destitutis perfectio seu concoctio chyli
requiri videatur, ideo fortasse singularis illa fabrica com-
parata est, ut chyli particulæ melius sese expandere cer-
tumque caloris gradum in hisce mæandris acquirere va-
leant priusquam sanguini ingerantur. Denique in illis
casibus ubi chylus vel lympa exitum facilem e ductu
thoracico invenire minus potest tales anfractus utilissi-
mi sunt, quia sursum nitentibus & in ascensu perpendicu-
lari impeditis humoribus locum cedunt donec illud ob-
staculum sublatum sit. Si id cito non tollitur, tum sane pe-
riculosum est : Nam ut de totali fluxus abolitione quæ
metui potest nihil dicam, duo funesti status inde enas-
cuntur 1. imminutio succi alibilis & roris in sangui-
ne necessarii, cuius sane defectu sanitatis & virium labefa-
ctatio æque certo quam illius affluxu earum conservatio
producitur 2. eorundem succorum in partibus va-
riis stagnatio contra naturæ consilium, unde destillatio-
nes & congestiones hydropicæ, quæ minus ab hepatis
aliorumque viscerum labe quam a prædicto canalis tho-
racici aliquali infarctu etsi ignoto proxime generantur.

Tri-

Tribus tantum locis præmemorati in vena *Eustachii* anfractus seu plexus in conspectum veniunt , reliqua canalis parte simplicis ductus parum flexuosi speciem referente , cuius integram & naturalem dispositionem accurate delineatam hic sistimus. Præter generalem gyrorum compagem quædam alia in eodem contextu non minus curiosa & scitu digna quæ propterea minus præmittenda sunt , visui se offerunt. Vertebris non ita annexus est canalis thoracicus uti vulgo traditur : Nam plures ex singulis gyris secedentes propagines sub illo ita reflectuntur , ut a dextrolatere ad sinistrum progrediantur indeque rursus super eundem via retrograda ad dextrum latus incedant , quibus proinde tam superius quam inferius circumvolutus canalis pyramidis armillarumque laxè cingentium speciem exhibet : Ex quo perspicuum est tum a prædictis orbibus tum vasis sanguineis subtensis & pinguedine substrata suspensum teneri canalem thoracicum , ne contactu spinæ humorum præterlabentium cursus immoraretur. Ulterius res animadversione dignissima circa memoratos plexus nobis oblata est , qua nova ratio ascensus humorum per ductum thoracicum hætenus ignota luculenter demonstratur : Inter inferiorem medium & summum plexum qui minimus est , ea communicatio intercedit qua aditus ex uno in alterum ita patet , ut a trunci principalis ductusque ingressu fluida dispensari hisque gyris absorberi queant: Hanc vero communicationem per quasdam propagines seu rivulos ab uno fasciculo ad alterum usque protensos institui , evidentissime conspeximus : Quamobrem ex ta-

Tab. 12.
Fig. 1.
L. CCC.

li dispositione minus dubitandum est comparatam hanc esse, ut quedam humorum præterfluentium divisio in ea contingeret ea quidem lege, ut minor pars per ductum seu truncum principalem, maior vero ad latera per memoratos anfractus cursum suum absolvat, donec ad superiorem partem canalis perventum sit.

Cæterum satis perspicuum est in homine chylum non perpendiculariter ascendere uti hæcenus traditum est, neque talem ascensum cum humana figura convenire, e contra necesse est ut is a motu recto & perpendiculari multum declinet eique consequenter adiumenta externa ab autoribus assignata parum aut nihil inserviant. De septo quidem transverso pulcherrimam observationem subiungere non abs re erit. Etsi huic ita adaptatus sit canalis thoracicus, ut in medio processum ex abdomine versus thoracem ambulare eaque de causa actionem septi indefinenter pati videatur uti omnibus in confesso est, aliquid tamen adiciendum est sine

Tres fasciæ musculares a nemine descriptæ earumque usus.

quo actio prædicta intelligi minus potest. Tres fasciæ seu lacerti insignes canalisi thoracici principio applicati circa ultimam vertebra dorsalem in conspectum veniunt, quorum etsi valde conspicui sint tum descriptione tum delineatione penitus caremus: Hi partim dextro partim sinistro processui seu appendici alligati versus oppositum latus sic inclinantur, ut a dextris ad lævum & a lævo ad dextrum latus oblique vergentes, super ductus thoracici principium crucem seu decussam efficiant cum hocce solummodo discrimine, quod trium harum fasciarum duæ ad dextrum, una ad sinistram diaphragmatis processum pertineat: Etsi ad regendum forsan lymphæ chylique motum promovendumque, hæc fascias comparatas esse satis probabi-

babile sit , eodem tamen tempore id forte efficiunt ne in magnis computationibus aliisque occasionibus nimiam plenitudinem receptaculo inducentibus, dirumpi illud aut supra modum dilatari possit.

In canalis thoracici sine seu insertione aliud æque artificiosum, æque ignotum quodque pariter usui singulari comparatum est machinamentum observare proclive est. Ante osculum eius *a*, quod in subclaviæ parietem posticum implantatum est, chordæ species *b. c* venæ iugularis regione veniens dictoque osculo circumducta apposita est. Eius principium gemino processu seu crure constans sub valvula prædictæ venæ ostio accumbente conspicuum est, uti didacta valvula id conspiciere fas est: Hinc facta crurum conjunctione chorda seu lacertus ad ductus thoracici osculum recta contendens illudque zonæ seu annuli instar cingens ambiensque producitur; Equidem in hocce exili sed eleganti lacerto singularis artificii characteres satis luculentos adeoque sive ad dissepimentum sive munimentum osculi sive directionem chyli aut sanguinis sive actionem propriam valvulæ aptissimos internoscere licet: Nam ad valvulæ basin chorda memorata sic prætenfa & alligata est, ut propter fibram tendineam specie futuræ per medium eius ductam, necesse sit valvulam contracta chorda simul contrahi & vicissim explicari; Cuius proinde chordæ conformatio & dispositio tam certa tam constans est, ut quando plura oscula occurrunt, quemadmodum tria a nobis observata sunt aliquando, totidem valvulis totidem simul chordarum appendices respondentes in conspectum veniant.

Machi-
namen-
tum arti-
ficios. in
sine canal.
thorac.

Tab. 12.
Fig. 2.

Lit. a b.

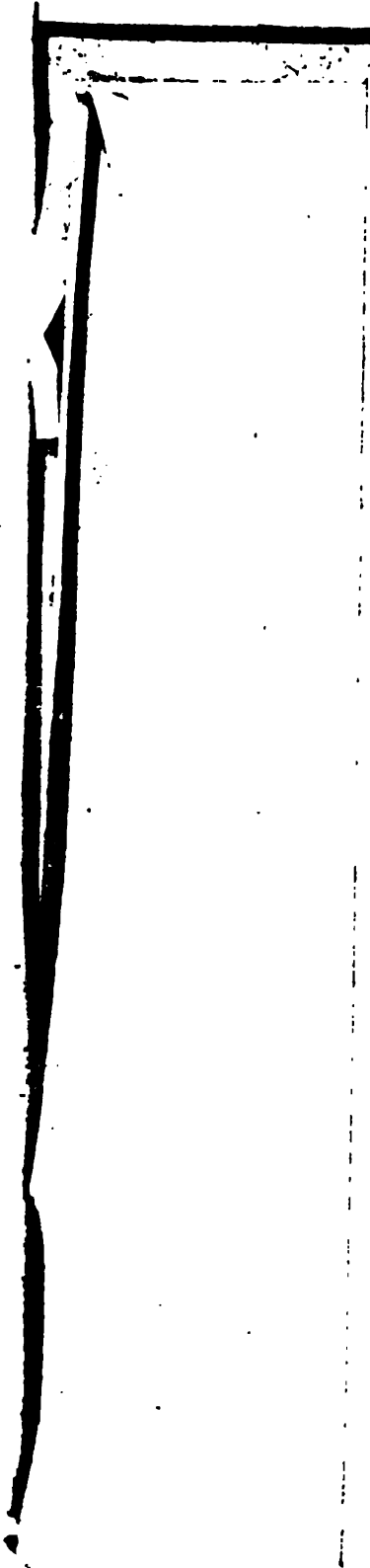
Po-

*Valvula
canalis
thoracici.*

Postremo iuxta fibram istam tendineam, veram ac integram habitudinis & configurationis valvulae cognitionem nihil tale opinantes assecuti sumus. Ea quidem primo aspectu speciem valvulae bivalvis refert, quia propter subtilitatem administrationisque difficultatem difficile est omnia promte ac sufficienter uti decet perspicere: Postmodum adhibita maiore diligentia constat eam neque ad bivalvium neque ad semilunarium sed distinctum valvularum genus reducendam esse: Namque super foramen seu osculum ovale quod transversim locatum est, sic adaptatam vidimus valvulam ut fimbriae totam osculi circumferentiam occupanti similis esset, Ad haec non aequaliter lata & ampla est praedicta fimbria, sed ea parte seu extremitate, qua fibra tendinea chordae supra memoratae eam pertransit amplior latiorque est quam toto alias ambitu, quo efficitur, ut singularis cuiusdam ac novae valvulae characterem praese ferat.

Ten-

17 12



TENTAMEN
NOVAE DE MOTU MUSCULO-
RVM THEORIAE

Auct.

Daniele Bernoulli Ioh. F.

Sectio I.

I.



Inflationem musculorum sine praevio *M. Aug.*
spirituum animalium per nervos in fibras 1726.
musculares influxu fieri non posse Physio-

logorum statuunt plerique, idque praesertim colligunt ex eo, quod impedito per ligaturam nervi spirituum influxu, nullus plane succedit muscoli illius, ad quem nervus tendit, motus. Argumenta alia attuli quam plurima in dissertatione *de Respiratione*. Prouti autem in hoc satis conveniunt, ita e contrario maxime ambigunt de modo, quo spiritus musculos inflare brevioresque reddere possint: Alii autem, spiritus facere in fibras musculares, quod aqua in funes: (funes enim madefacti intumescunt, contrahuntur & pondera ingentia elevant) Sunt qui vasa sanguifera a spiritibus comprimi, sicque ob motum sanguinis impeditum musculos turgere dicunt; multi denique, quorum sententia invaluit maxime, putant effervescentiam in sanguine subitaneam oriri a spirituum mixtura talem, quae machinulas, quas dicunt, seu loculamenta in cavitatibus fibra-

P p

rum

rùm muscularium recondita inflare possit ; alii rursus aliter senserunt , quæ sententiarum diversitas satis probat, vix aliud quam coniecturas in hoc argumento incerto dari posse, hasque inter illam optimam esse dicendam, quæ minimas patitur difficultates.

II. Problemata, quæ circa motum musculorum proponi possunt, talia sunt: 1. quomodo muscoli notabiliter breviores fieri possint? 2. quomodo minima spirituum quantitas & sine ullo fere sui dispendio subsequente musculos ita decurtare valeat? 3. quo pacto muscoli brevissimo tempore & contrahi & restitui queant? Theoriam admitti posse nullam, quin hisce quæstionibus plane satisfiat, quilibet videt: Sunt dein alia phænomena non ita stricte ad propositum pertinentia, quorum tamen genuina explicatio non parum roboris theoriz conciliare potest: Nullam denique motus musculorum rationem excogitabimus, quin in multa problemata Geometrica pertrahamur, si veras mensuras, sine quibus nihil unquam certi statui potest, desideremus: Eiusmodi sunt illa, quæ in Sectione secunda tradam.

III. Incipiam a structura musculi quantum id instituti nostri ratio postulat; constat ex anatomicis, nullum esse musculum, ad quem non tendat ramus arteriz, a cuius ligatura (quod hic in transitu dixerim) non minus quam ab ligatura nervi musculus motum suum perdit, quamvis non ita promte. Ipse vero musculus maxima parte constat ex fibris longitudinalibus, tum etiam ex minimis fibrillis transversalibus: de utroque genere monenda & notanda quædam habeo speciatim.

IV. *Fibræ longitudinales* dividi facile possunt in a-
lia

lia filamenta multo magis subtilia atque ita disposita , ut cylindrum cavum efferment ; concipio hæc filamenta ut laxè quidem inter se connexa , sed quæ tamen non facile extenduntur : ita fiet ut cum cavitas fibræ longitudinalis inflatur , filamenta circa medium aliquantulum a se invicem recedant , sed in longitudinem parum vel nihil crescant. Concipe *filamenta* quamplurima , quorum extrema sint *ac* & *bd* ita laxè inter se connexa ut facile *bd* possit deduci ab *ac* , quæ autem in longitudinem difficulter extenduntur. Cogita dein ista filamenta in cylindrum convolvi ita , ut *ac* & *bd* ad se invicem accedant , & sic habebis fibræ longitudinalem , qualem vides representatam per *AB*. Cavitas autem quæ interne relinquitur semper repleta est sanguine , id quod satis apparet ex fibrarum rubedine & superveniente colore albicante , si per musculi arteriam iniectiones fiant cum aqua tepida. In tendinibus fibræ solidiores sunt & compactiores nec proin sanguis illarum cavitates subire potest ; unde color albus.

V. Pergo ad *fibrillas transversales* : has videmus perpendiculariter incedere super fibris longitudinalibus ad certas quasdam distantias : connectuntur earundem ope fortiter *filamenta* fibras longitudinales componentia : pono enim fibrillas transversales ab uno filamento ad aliud procedere sicque totam fibræ longitudinalem amplecti instar annuli ; tales fibrillæ transversales in figura prima exprimuntur per lineas *ef*, *gb* &c. & in figura secunda per circellos *EF*, *GH* &c. atque sic dividitur cavitas totius fibræ longitudinalis in plura *loculamenta* (alii *machinulas* dicunt) quale est v. gr. *EFGH* comprehensum inter duas fi-

brillas transversales vel annulares EF, GH: Cæterum non dubito, quin hæ fibrillæ transversales meræ sint nervorum propagine, sunt enim, ut ex anatomicis constat, *tenaces & duræ, distractioni & rupturæ resistunt, dum apice acus eas discindere tentamus. conf. Borell. de mot. anim. part. I. prop. I.*

VI. Quæ de structura musculi præmissi fere omnia ab anatomicis iam fuere demonstrata; pauca mente supplenda supposuimus, sed certe nihil quod cum observationibus celeberrimorum quorumvis Anatomicorum vel minimum repugnet: Tuto proin amplectemur, quicquid ex iis eliciemus. Dixi in præcedente §. cavitatem fibræ longitudinalis dispesci in plures *macbinulas* terminatas ab utraque parte a *fibrilla transversali* vel potius *annulari*; talis exhibetur in figura secunda per EFGH; sed ut distinctius appareret, illam seorsim repræsentavi in figura tertia sub forma cylindri, cuius basis est circulus EFM vel HGN & cuius altitudo est EH vel MN vel FG. Ostendendum est, quo modo minimo spirituum influxu talis machinula cylindrica possit acquirere formam dolii valde ventricosi, atque sensibilibiter decurtati, qualis figura quarta exhibetur.

Fig. 3.

Fig. 4.

VII. Cogitemus hunc in finem fibrillas annulares EMF & HNG paululum contrahi (hanc autem contractionem explicabo inferius) in longitudinem alterius figuræ emf & bng; mutabitur figura cylindrica in aliam convexam & talem, ut 1^{mo} singula *filamenta eph, mn &c.* longitudinem conservent quam ante habuerant; Difficulus enim extenduntur: & 2^{do} ut capacitas *macbinulæ* in utroque casu sit eadem: Est enim *macbinula* sanguine repleta

pleta, qui neque erumpere neque aeris instar in minus spatium redigi potest? Ad hæc requiritur, quod in Sectione secunda demonstrabo, ut machinula in longitudine contrahatur nempe ut acquirat longitudinem *mn*, cum ante haberet longitudinem *MN*, tum etiam necesse est, ut intumescat circa medium ita ut amplitudo media *PQ* excrescat in maiorem *pq*; nihil vero est quod impediatur istam intumescantiam ob laxam, quam inter se habent *filamenta*, cohærentiam. Confer ubique §. 4.

VIII. Videtur iam tota quæstio eo reducta, ut indicetur modus, quo fibrillæ transversæ contrahuntur: hunc vero ex ipso spirituum animalium influxu immediate deduco: Spiritus enim utcunque subtiles, spatium tamen occupent necesse est, possunt itaque minimas cavernulas fibrillarum transversalium replere, sicque aliqualem in hisce fibrillis contractionem producere; minima certe spirituum quantitas ad hoc negotium sufficiet 1^{mo} quia exigua contractio requiritur, ostendam enim deinceps parvulas in *fibrillis transversalibus* contractiones fat magnas producere posse in *fibris longitudinalibus*, si certæ proportionales assumantur; 2^{do} quia cavernulæ *fibrillarum transversalium* minimæ sunt & plane non comparandæ cum cavitatibus fibrarum longitudinalium. Huc quoque facit, quod dixi in fine §. 5. *fibrillas transversales* meras nervorum videri propagines. Cæterum non opus puto ut moneam, de singulis machinulis intelligendum esse, quod de unica dixi, & sic quamlibet fibram longitudinalem totumve musculum contrahi posse.

IX. Dispiciamus nunc in quantum hæcce nostra sententia satisfaciat desideratis §. 2. expositis; præcipuum

est, *an musculus notabiliter decurtari possit?* De hoc ipse dubitaveram ante institutum calculum, facile videns capacitatem machinulæ alicubi maximam esse; sed docuit me postea calculus, fieri posse, ut musculus plane quinta totius longitudinis suæ naturalis parte brevior fiat, ita ut si quis musculus quinque pollices longus sit, is maxima sui contractione ad quatuor pollicum longitudinem reducatur. Sufficit autem hæc contractio abunde phænomenorum explicationi: dubito enim num experimentis demonstrari possit esse vel unicum musculum qui maiori quam quinta longitudinis suæ parte contrahi queat. Experimentum feci, quod videre est in fine huius sectionis, quo maximam musculorum rectorum oculi contractionem exploravi, & inveni, quod ipse vix sperassem, & de quo hæsito, an non casui potius attribuendum sit, quam alicui necessitati, inveni, inquam, contractionem maximam in dictis musculis tantillo minorem, quam quæ modo definita fuit; dabitur forsân occasio alia plura de hac re experimenta instituendi.

X. Pergo ad alteram quæstionem, *an contractio musculi minimo spirituum influxu & sine ullo fere eorundem dispendio succedere possit?* partem quæstionis primam ex §. 8. satis confirmari puto; circa alteram vero partem Observo, quod motus musculorum sine minima spirituum iactura omnino fieri possit, siquidem nihil impediat, quo minus spiritus post musculi actionem a *fibrillis transversalibus* versus principia nervorum refluant: id ipsum autem ideam nostram non parum commendat. Apparet denique & contractionem & restitutionem musculi momento citius absolvi posse, neque enim aliud ad id tempus requi-

requiritur quam quod a fluxu & refluxu spirituum impenditur, id est, brevissimum. Interim quid sit, quod spiritus a nervorum principis ad ultimas extremitates fluere faciat id aliis indagandum relinquo, refluxum autem deduco a virtute elastica *fibrillarum transversalium*; sic dicendum est muscolum in contractionis statu permanere, quamdiu æquilibrium adest inter illud prius motus principium, quodcumque sit, & conatum qui inest minimis *fibrillarum transversalium* particulis sese restituendi.

XI. Superfunt alia quædam indicanda, quæ pro sententia nostra facere videntur: Dein huic primæ sectioni finem imponam. Dixi supra, fieri posse, ut spiritus omnes, vel saltem maxima eorundem pars, postquam in muscolum egerunt, refluant; Si enim avolare dicas, unde tanta spirituum quantitas, qua continuo reparari possint? Solum cor plus centies millies contrahitur quotidie, cogites de homine pedibus iter ingrediente, de actione continua plurium aliorum muscutorum vitalium; fingas haud exiguam alimentorum partem in spiritus converti, vix tamen millesimam grani partem obtineas pro una cordis systole, de qua ego non video, quomodo tantæ contractioni sufficere possit. Facile porro intelligitur cur ligata arteria motus pereat in musculo, ad quem arteria tendit, nisi enim *machinulæ fibrarum* sanguine repletæ sint, motus succedere nequit, unde novus ab arteriis suppeditetur continuo sanguis necesse est, sequitur exinde quoque ligatura arteriæ motum in musculo paulatim non protinus tolli, quod experientia confirmatur. Quod in tendinibus nulla contractio vel intumescencia observatur, id peti debet ex ultimis verbis §. 4. Denique cur
nullus

nullus musculus in continuo contractionis statu vel per horulæ quadrantem permanere possit non a defectu virium, sed ab impedita circulatione sanguinis per *machinulas* deducendum esse existimo. Superest experimentum, de quo in fine §. 9. mentionem feci.

Experimentum

Pro inveniendis maximis contractionibus muscutorum rectorum oculi.

Fig. 5. **I**N plano verticali duxi lineam horizontalem *bm*, in cuius extremitatibus *b* & *m* affixi utrobique chartulam characteribus notatam, dein in eadem ab horizonte altitudine inquisivi, locum, in quem oculum dextrum (clauso sinistro) ponere possem, ita ut in utraque chartula characteres distinguere valerem immoto capite, sed moto bulbo oculi, modo versus internum modo versus externum canthum. Locum autem solícite exploravi proximum, quantum fieri posset, lineæ *bm*; omni porro, qua poteram, vi oculum detorsi in utramque partem, curans ut in neutram partem inclinarem caput, tandem exactissime locum detexi: Dicam quid invenerim. Repræsentet circellus *cdje* sectionem horizontalem bulbi in eodem plano cum lineâ *bm* constitutam, sitque lineâ *op* perpendicularis in lineam *bm*, inveni $op=7$, $bp=8$, & $pm=6$, ibi cum oculus constitutus erat poteram detorquendo oculum pro lubitu in utraque chartula characteres distinguere, at appropinquando caput tantillum versus *p*, in neutra distinctio apparebat, & declinando caput in alterutram partem

tem motu parallelo cum *bm* in altera scheda distincte in altera confuse apparebant characteres.

Ut intelligatur, quid ex isto experimento sequatur, ad duo attendendum est; 1^{mo} quod oculus dum in orbita sua movetur, ipsius centrum *o* immotum manet; 2^{do} quod in retina sive, ut alii volunt, in choroidea unicus sit locus puta *q*, in quo distincte imaginem percipimus, qui fere pupillæ *n* oppositus est. Ut itaque obiectum in *b* distincte videamus, requiritur ut locus *q* perveniat in *f* seu *n* in *c*, hicque motus fit ope musculi adducentis *bxg*, extenditur autem simul ipsius antagonista seu abducens *asg*, & si abducens agit, quantum potest, pervenit punctum *q* in *d* seu *n* in *e*, extenditurque musculus adducens: ergo dum oculus movetur v. gr. a *c* in *e* dimidium motus fit a restitutione musculi abducentis, reliquum ab eiusdem contractione, invenitur autem angulus *bon* ex trigonometricis esse 89 grad. 26 min. eiusque dimidius 44°. 43'. dicendum ergo musculum abducentem maxima sua contractione rotationem producere in oculo 44°. 43'. totidemque alterum adducentem.

Porro prædicti musculi *asg*, *bxg* inseruntur bulbo oculi haud procul ab iride puta in *a* & *b*, cum eodemque uniti sunt usque in *s* & *x* ita ut *gs*, *gx* fere tangant circumulum, observavi etiam esse *sg* vel *xg* ad diametrum bulbi fere ut 20 ad 9; ex his datis haud difficulter inferitur, quanta sit maxima abducens contractio, sumatur nimirum arcus *st* 44°. 43'. & ducatur *gt*, erit *gt* ad *gs* proxime ut 9 ad 11. hincque sequitur maximam musculi abducens contractionem esse æqualem $\frac{1}{5}$ seu paulo minorem quinta longitudinis naturalis parte. Expe-

Q q

rimen-

rimentum simili modo circa musculum attolentem & deprimentem institui potest, si loco *hm* horizontalis alia verticalis ducatur.

Sectio II.

QVA VARIÆ DILVCIDATIONES GEOMETRICAE IN PRAECE- DENTEM THEORIAM EXHIBENTVR.

I.

Theorema I. curva quam singula *filamenta* faciunt durante *machinulae* inflatione semper est elastica, cuius axis coincidit cum axe *machinulae*.

Demonstratio. Concipiamus duo plana infinite propinqua, quorum intersectio communis sit axis *machinulae*, erunt singuli arcus circulares in superficie *machinulae*, a duobus planis resecti ut distantiae ab axe, si iam porro consideremus fluidum *machinulae* inclusum ut elasticum, necesse est per leges hydrostaticas, ut fluidum ubique eundem habeat elasticitatis gradum, quapropter potentiae *filamentum* illud comprehensum inter duo plana extendentes, erunt ubique ut latitudines *filamenti* seu ut arcus intercepti inter duo plana sive ut distantiae ab axe, id est, ut applicatae ad curvam quaesitam, constat autem ex mechanicis, potentias semper esse reciproce ut radii osculi; erit itaque curva, quam *filamentum* induit, huius

huius indolis ut habeat ubique applicatas suas reciproce proportionales radiis osculi, quam proprietatem elasticæ convenire constat.

II. *Schol. 1.* Differt itaque curva, ad quam *filamenta* se componunt in nostra hypothese ab illa, quam induunt in hypothese effervescentiæ; in hac enim *filamenta* durante musculi inflatione eandem latitudinem conservare assumitur, & sic hiatus inter duo quævis *filamenta* proxime intervenire, per quem aer postquam impetum fecit in *filamenta*, avolare possit, atque in hac hypothese circulare figuram filamentis attribuendam esse, certissimum est; quod nuper demonstravit Cel. *Petrus Antonius Michelotti* in apologia, quam pro Patre meo conscripsit contra Cl. *Mead*, quem tamen pro sua hypothese recte conclusisse minime negamus.

III. *Scholion 2.* Cavendum, ne hic ordinaria æquatio elasticæ accipiatur, quæ minus generalis est; nam sequeretur exinde, nullam in machinulis succedere posse mutationem si filamentum EPH & solidum ex ipsius revolutione circa axem MN generatum considerantur ut invariabilis & constantis magnitudinis. Tradam itaque æquationem generalem pro omnibus elasticis instituto nostro satisfaciendis. Sit MN axis curvæ bisectus in R, ducantur perpendicularis RP, eique parallelæ duæ applicatæ proximæ ca, db, sit Rc=x, ca=y, Pa=s, cd=dx, oa=dy, ab=ds: habemus itaque posito elemento ds constante radium osculi = $\frac{dy ds}{dx}$. ergo per proprietatem elasticæ erit productum ex applicata in radium osculi = constanti, ponamus quantitatem illam constantem = $\frac{1}{2}aa$, & habebitur $-y dy ds = \frac{1}{2}a addx$ & integrando cum additione constantis cuiusdam homogeneæ qualis est $+\frac{1}{2}bb ds$

Fig. 6.

Q q 2

habe

habebitur $+bbds - yyds = aadx$, & sumendo quadrata ponendoque $dx^2 + dy^2$ pro ds^2 , posteaque reducendo æquationem obtinebitur æquatio finalis $-dx = \frac{(+bb+yy)dy}{\sqrt{(a^4 - b^4 + 2bbyy - y^4)}}$; sumo $-dx$, quia vi æquationis utrumque signum accipi potest, crescente autem x ponitur decrescere y .

IV. *Coroll.* In puncto P debet elementum abscissæ infinite esse maius quam elementum applicatæ, hoc autem fit, si in prædicta æquatione $-dx = \frac{(+bb+yy)dy}{\sqrt{(a^4 - b^4 + 2bbyy - y^4)}}$ ponatur denominator $= 0$; unde obtinetur $a^4 - b^4 + 2bbyy - y^4 = 0$, vel $aa = +bb + yy$, vel deniq; $y = \sqrt{(aa + bb)}$, est itaque $RP = \sqrt{(aa + bb)}$.

V. Quoniam pro maxima possibili contractione musculi eruenda requiritur ut algebraice exprimatur tam solidum quod generatur ex revolutione curvæ EPH sive dimidiæ PH circa axem MN, quam longitudo curvæ, quoniam etiam hæ algebraicæ expressiones valde sunt prolixæ & non nisi magno labore obtinentur per approximationes, ideo aliam curvam loco elasticæ accipiemus tractabiliorem, sed quæ tamen a figura elasticæ parum recedat. Pro idonea substitutione duo requiruntur, 1^{mo} ut curva in P sit perpendicularis, & 2^{do} ut radii osculi crescant decrescentibus applicatis, ita ut ubique radii osculi fere sint in reciproca ratione applicatarum. Posteriori conditioni satisfacit huiusmodi æquatio $c - x = (3bby + y^3) : 3aa$, quæ dat radium osculi ubique $= (a^4 + (bb + yy)^2)^{\frac{3}{2}} : 2a^4 y$, quæ expressio indicat esse proxime

xime radium osculi applicatæ reciproce proportionalem, modo y valorem non habeat plus quam mediocrem respectu quantitatum a & b . Sed hæc curva nullibi est ad applicatam perpendicularis, aut itaque ad altiores æquationes deveniendum erit aut in alia curva acquiescendum non ita stricte desiderato secundo satisfaciente. Credo autem melius fieri non posse ob multas rationes quam considerando curvam PH tanquam parabolam cuius axis est PR & cuius vertex P. Est enim hæc curva perpendicularis in P ad PR; crescunt quoque radii osculi decrescentibus lineis ac ; suntque fere in reciproca constanti ratione si parameter parabolæ magna sit & ramus PH exiguus accipiatur, quod utrumque fit in hypothesi nostra. Denique hoc commodi accedit, quod tam solidum rotatione curvæ circa RN generatum quam ipsa curvæ longitudo possint quantitibus finitis exprimi.

VI. Sit iam $RN=c$, $RP=b$, parameter $=a$, & erit $NH=\frac{ab-cc}{a}$; sit porro quadratum radii ad aream circuli ut 1 ad m & erit solidum circumvolutione curvæ PH circa RN descriptum $= (15maabbc - 10mabc^3 + 3mc^5) : 15aa$ & longitudo curvæ $PH = \frac{a}{4} \log. \left(\frac{a}{\sqrt{(aa+4cc)-2c}} + \frac{a^3}{16a} - \frac{(\sqrt{(aa+4cc)-2c})^2}{16a} \right)$; & cum utraq; quantitas (solidum & curvæ longitudo) sit constans priorem faciemus $=mm^3$, posteriorem $=100$, prior æquatio quam deinceps vocabo (A) dat $b = \frac{cc}{3a} + \sqrt{\left(\frac{45aan^3 - 4c^5}{45a6c} \right)}$; altera æqua-

Q 9 3

$$\text{æquatio (quam vocabo B) talis est } 4a \log. \left(\frac{a}{\sqrt{aa+4cc}-2c} \right) \\ + \frac{a^3}{(\sqrt{aa+4cc}-2c)^2} - \frac{(\sqrt{aa+4cc}-2c)^2}{a} = 1600.$$

VII. *Theor. II.* Non potest musculus contrahi ultra quintam longitudinis suæ naturalis partem

Demonst. Si in æquatione (B) consideretur a ut quantitas variabilis, facile tentanti apparebit esse alicubi radicem totius quantitatis complexæ maximam. Si dein c ponas esse maiorem quam 80, erit illa radix maxima maior quam 1600, secus erit minor, unde liquet æquationem B nullam habere radicem realem, quoties c minor est quam 80. Sed c est $=RN=$ dimidiæ longitudini musculi contracti, & $PH=$ dimidiæ longitudini musculi non contracti $=100$; summa itaque contractio non potest excedere quintam longitudinis naturalis partem.

VIII. *Scolion.* Quoties c maior est quam 80 habet æquatio B duas radices, id est, duo valores litteræ a assignari possunt qui æquationi (B) satisfaciunt, inter quos maior est accipiendus. Assignavi autem valorem litteræ c vero paulo minorem, propius ad verum accedes, si definito numero addas 4 centesimas. Possunt vero huiusmodi minutia negligi. Feci quoque calculum in hypothesi, esse curvam PH arcum circularem & tum inveni maximam contractionem partium 18, cumque parabola magis accedat ad naturam elasticæ quam circulus radios suos osculi constantes habens, statuendum est admissa elastica, maximam contractionem paulo maiorem esse quam illa quæ oritur, cum PH consideratur ut arcus parabolicus; unde ut numerum rotundum habeamus, illam faciemus partium 20 seu unius quintæ totius musculi longitudinis.

IX.

IX. Theor. III. Ut musculus quantum fieri potest contrahatur, requiritur ut longitudo machinulæ sit ad eiusdem diametrum in maiori ratione quam 100 ad 77.

Dem. Theorema manifestum fiet considerando quid fiat si successive minor accipiatur diameter machinulæ posita eiusdem longitudine constanti; determinatur autem diameter machinulæ ab ipsius soliditate; unde statim ponemus loco n^3 numerum sat magnum, dein minorem continuo. Sit primo loco $n^3 = 4000000$ & cum in statu naturali musculi sit PH linea recta seu arcus parabolæ cuius parameter infinita, ponendum statim est $a = \infty$; & sic mutatur æquatio A in hanc $b = n\sqrt{\frac{n}{c}}$, sed est quoque in statu naturali $RN = PH$ seu $c = 100$, ergo $b = 200$, & $NH = \frac{ab - cc}{a} =$ (in præsentī casu) 200 , unde posito $n^3 = 4000000$ fit semidiameter machinulæ ad eiusdem semilongitudinem ut 200 ad 100, seu ut 2 ad 1; hæc ita se habent antequam musculus contrahatur, ponatur iam contrahi musculum, ita ut RN, quæ antea fuerat centum partium, nunc habeat v. gr. 99. id est, ponatur $c = 99$, & ope æquationis (B) inquiratur in valorem ipsius a ; dein per æquationem (A) innotescet quoque valor ipsius b seu RP, & tandem quoque ipsius NH seu $\frac{ab - cc}{a}$. Sic invenietur RP, iam maior & NH minor quam 200 part. hocque pacto semper aliquid accedet lineæ PR diminueturque linea NH (ponendo successive $c = 98$, $c = 97$, $c = 96$ &c.) donec tandem ponas $c = 89$; hunc enim si transgrediaris terminum, non amplius decreſcere sed crescere rursus lineam NH deprehendes; unde haud difficulter infertur non posse c minorem esse quam 89 neque proin musculi contractionem

nem maiorem quam 11 partium. Ponamus iam valorem minorem pro n^3 quam 4000000 & sic maior obtinebitur contractio; est autem eo usque diminuendum n^3 , donec maxima contractio fiat 20 partium; id erit, cum facies $n^3 = 6000000$; fitque tunc semidiameter machinulæ non contractæ 77 part. patet proin requiri pro maxima contractione ut longitudo machinulæ sit ad diametrum in maiori ratione quam 100 ad 77.

X. *Coroll.* Ut fibra longitudinalis contrahatur quinta parte oportet ut fibra transversalis brevior fiat $\frac{27}{77}$ totius suæ longitudinis. Positis enim $n^3 = 6000000$ & $c = 100$, fit $NH = 77$ & facto $c = 80$ fit $NH = 50$; est ergo contractio fibræ transversalis $\frac{27}{77}$ longitudinis suæ totius. Si ad maiorem distantiam fibrillæ transversales essent collocatæ, magis contrahi deberent, quæritur ergo an tanta contractio, quæ viginti septem partes septuagesimarum septimarum exæquat, fieri possit in fibra transversali? De hoc autem nequaquam dubitandum; Nam cum cavernulæ fibrarum transversalium spiritibus replentur, disponuntur ad figuram solidi, quod generatur ex rotatione elasticæ circa axem; & quando prædictæ cavernulæ spiritibus maxime sunt repletæ, fit elastica rectangula; est autem longitudo elasticæ rectangulæ ad axem proxime ut 11818 ad 4741: ergo maximæ cavernularum contractiones esse possent $= \frac{7^9 7^7 7^7}{7^7}$, seu valde propinque $= \frac{27}{77}$, quæ quantitas multo maior est quam $\frac{27}{77}$.

XI. *Theorem.* IV. Si longitudo machinulæ muscularis habeat ad eiusdem diametrum rationem minorem quam 100 ad 77, nunquam ad quintam partem decurtari musculus potest; & quo minor fuerit ratio longitudinis ad diametrum

metrum, eo minores contractiones requiruntur fibrarum transversalium pro similibus contractionibus fibrarum longitudinalium.

Demonstratio prioris propositionis partis constat ex §. 9. altera vero pars elucescet, si diversos assumendo valores pro n^3 videatur, quanta contractio fibræ transversalis requiratur in singulis casibus pro contrahenda machinula v. gr. una centesima. Reperietur autem quod in propositione dictum est. Ita vidimus in §. 9. quod posito $n^3 = 4000000$, maxima contractio fibræ longitudinalis sit undecim illarum partium, quarum machinula in tota longitudine naturali habet centum, & quod pro illa obtinenda fibra transversalis debeat decurtari novendecim ducentisimis, quæ quantitas minor est illa, quæ pro simili effectu requireretur si n^3 esset = 600000.

XII. *Coroll.* Verosimile est, diversam structuram inesse fibris musculorum longitudinalibus: Scilicet illas minus frequenter decussari a fibrillis transversalibus in musculis, qui maioribus contractionibus destinati sunt, frequentius in aliis. Distantiam autem fibrillarum transversalium a se invicem nunquam excedere $\frac{1}{7} \frac{0}{7}$ partes diametri fibræ longitudinalis; & cum per experimentum Sectioni primæ subiunctum constet, maximam musculorum rectorum oculi contractionem fere tantam esse quanta vi theoriæ nostræ esse potest, statuendum est in his musculis distantiam fibrillarum transversalium parum deficere a $\frac{1}{7} \frac{0}{7}$ partibus diametri fibræ longitudinalis.

R r

Eius-

Eiusdem
EXPERIMENTVM
CIRCA NERVVM OPTICVM.

EXtat in Act. Lips. A. 1683. pag. 68. experimentum, quo demonstratur, spatium esse in media choroidea (sive, ut alii volunt, retina) ad imaginem obiectorum percipiendam plane ineptum, eoque D. Mariotte usus est contra D. Pecquet in examinando primario visus organo. Disceptatum autem fuit a viris clarissimis, an perforationi choroideæ a nervo optico, an vero plexui vasculorum sanguiferorum in retina conspicuo tribuendum sit, quod experimento monstratur. vid. *Hist. Reg. Sc. Acad. Paris. conscriptam a D. Du Hamel.* Ego autem putavi, id diiudicandum esse ex figura, situ & magnitudine loci illius extra radiorum actionem positi; possunt enim hæc omnia exactissime determinari sequentem in modum.

Fig. 7. In pavimento (cuius parti aliquot pedes longæ ad meliorem experimenti successum pannus niger insterni potest) ponatur moneta argentea O: ducaturque recta OA; Dein accipiatur pendulum, cuius altera extremitas oculo dextro admoveatur, altera ad pavementum non omnino pertingat. Tandem clauso oculo sinistro directaque constanter dextri acie in imam penduli partem, ita paulatim corpus versus sinistram promoveatur, ut penduli extremitas continuo sit in recta OA, quæ dum fiunt, exacte

acte observetur locus, ubi obiectum O visu perdi incipit. Sit ille in C ; posteaque continuando motum, accurate quoque notetur punctum A , in quo obiectum O iterum percipitur: Bifecta linea AC in D , ductaque perpendiculari BH , fiat in BH , quod ante in linea OA , id est, diligenter observentur puncta B & H tanquam limites intra quos cum existit penduli extremitas, obiectum O visui se surripit: linea BH denuo bisecetur in F linea perpendiculari GE , & in hac pari conditione quaerantur puncta E & G ; idem fiat in aliis lineis LP , MN &c. Atque per omnia ista puncta ducatur linea curva $HEBGH$, quæ erit huius indolis, ut quamdiu oculus correspondet puncto intra curvam, obiectum O nullo modo appareat, si extra curvam cadit axis visionis, idem mox percipiat. Dicam nunc, quæ ipse experiundo observavi reductis singulis quantitibus ad longitudinem penduli, quam voco 100. Inveni ergo $OC=23$, $AC=10$, $BD=3$, $DH=13$, & $EG=14$: Ex quibus liquet, curvam accedere ad ellipsin. Cuius centrum est in F , & cuius axis maior est ad axem minorem ut 8 ad 7.

Restat nunc indagandum, quomodo ex observatis his determinari possint situs, figura & magnitudo spatii illius ad visum inutilis. Id vero nullo negotio obtinetur; cognitæ enim lineis AC , EG , LP , MN , HB &c. determinantur lineæ analogæ in oculo. Quamvis autem BH maior sit quam EG , fient tamen ipsarum analogæ in oculo æquales, adeo ut figura elliptica in circularem mutetur: & erit diameter circelli illius æqualis septimæ parti diametri totius bulbi. Centrum eius distabit septem vigesimis quintis partibus diametri bulbi a puncto pupillæ op-

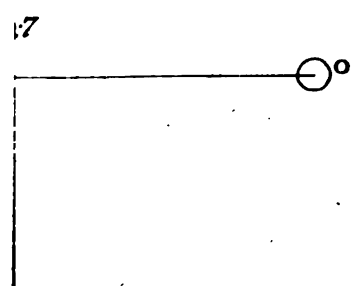
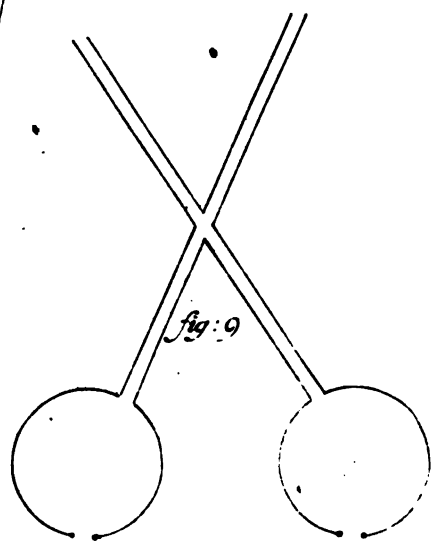
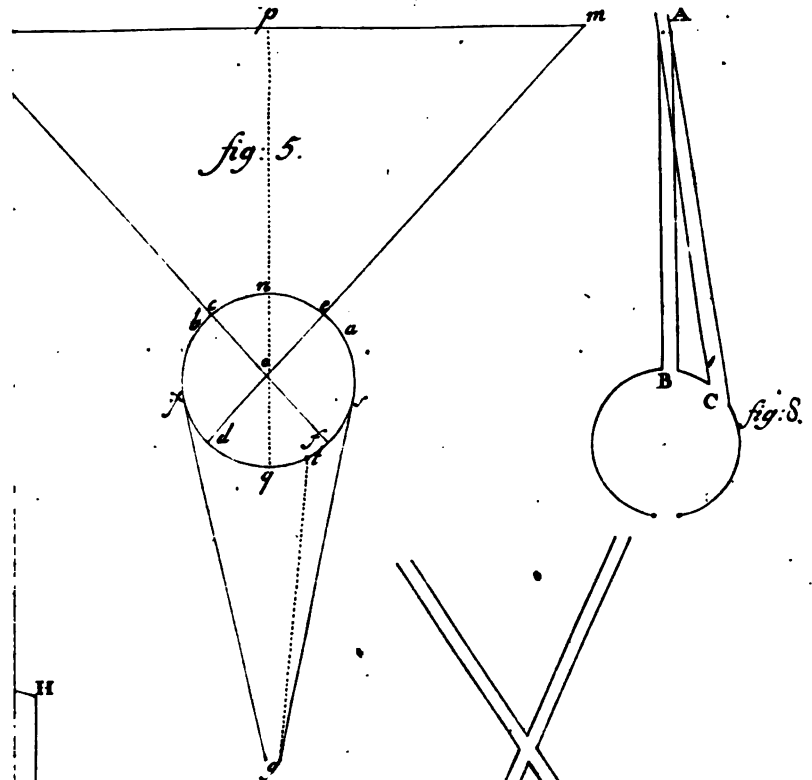
posito, eritque simul supra medium oculi paululum elevatum. Hæc omnia exacte cum nervo optico in oculo humano conveniunt adeo, ut iam sententia D. Mariotte sit hac in parte extra omne dubium posita.

Quod si ergo insertio nervi optici sit causa phænomeni illius a D. Mariotte observati, planum est, non debuisse nervum hunc directe e regione pupillæ in bulbum inseri: ita enim omnia obiecta in medio perforata nobis apparent, illudque, in quod oculos defixos nunc habere solemus, non videremus: dum vero nervus opticus lateraliter bulbo insertus fuit, efficitur, ut illa tantum obiecta perdamus, quæ sub certo angulo ad latera sunt posita. Neque unquam unum idemque obiectum amborum oculorum sensui se surripere potest, si nervi optici a laterè sint oculo implantati; id vero semper fieret, si essent pupillæ e diametro oppositi.

Alterum Corollarium, quod deduco ex eodem experimento, tale est. Non potuit nervus opticus aliter quam ad perpendicularum oculo inseri. Nam cum locus insertionis sit ad visum inutilis, natura in id intenta esse debuit, ut fieret inter omnes possibiles minimus: hocque obtinetur, dum perpendiculariter bulbum nervus ingreditur.

Quod si nervi recta ab originibus suis, scil. cruribus medullæ oblongatæ ad oculos tetendissent, necessario contra alterutrum præmissorum lemmatum peccatum fuisset; cum enim principium nervi optici sit fere e regione oculi constitutum, uti hic in A, manifestum est, esse nervum AB (quem perpendiculararem pono ad spheram seu bulbum oculi) e regione pupillæ positum. Sed si nervus late-

Fig. 8.



lateraliter in C fuisset oculo insertus , eo ipso obliquus evasisset.

Dum vero nervi non recta tendunt ad oculum , sed *Fig. 9.* prius coniunguntur, utriusque postulato ex aere satisfiit, uti id ex sola inspectione figuræ non apparet.

Si quis exinde rationem coniunctionis nervorum opticorum deducere volet , ei facile suffragabor.

DE
 VARIIS BAROMETRIS SENSIBILIORIBVS,
 ET
 EORVM NOVA SPECIE, AC VSIBVS:

Auctore
 G. B. Bülfingero.

Recensio Barometrorum.

I.



Originem Barometrorum & species exposuit *Dalencéus* singulari libello. *M. Aug. 1726.* Pauca ex illo tempore nova accesserunt , sed aliqua tamen , eaque digna Eruditorum attentione. Præcipua Virorum cura fuit, ut variationes altitudinum fiant *sensibiliores* ; huic enim operæ incubuerunt *Cartesius* , *Hooekius* , *Hugenius* , *Amon-tonius* ,

tonius, *la Hirius*, & *Io. Bernoullius*. Alterum *Amon-tonii* præ reliquis studium fuit, ut ab effectu gravitatis discerneret, quæ *calori* debentur, & liquorum expansioni. Neque exciderunt conatibus viri solertes; præsto sunt varia illorum artificia, alia tamen aliis meliora. Succurrit & mihi aliquod; videamus, utrum id calculum mereatur intelligentium?

II. Primo dicam *de alienis*. Refero autem ad duas potissimum classes, quicquid mihi innotuit. *Alii* sola machinæ *forma* variationes reddere sensibiliores laborarunt, *alii* adhibitis diversæ gravitatis specificæ liquoribus.

III. Si pro Mercurio adhiberetur *aqua*, & tubi fierent triginta tres pedes alti, quales in Collegio *Cur. I. C. Sturmii* * videntur: essent variationes utique sensibiliores multo, quam in Barometris esse solent mercurialibus simplicibus. Verum quis toleranter feret incommodum altitudinis? quis aere aquam purgabit, ut nihil eius ad summitatem avolet? & quis in ordinem rediget extensiones aquæ calori debitas? congelationem impedire aliquando possumus.

IV. Qui cum *Cartesio* tubum ea in parte, qua Mercurius ascendendo & descendendo ludit, ampliorem faciunt, eidemque aquam vel oleum innatare volunt, variationes in strictiori tubo indicatura; non facile effugiunt incommoda aeris suprema occupantis, patiunturque tum ab illo aere, tum ab ipso liquore variationes a calore oriundas, observationemque gravitatis turbaturas. Ostendit utique *Io. Poleni*, ** repetitis tubi inversionibus, posse præ-

* *P. II. Tent. V. p. 76 seqq.* ** *Giornale dei Letter. d'Italia, T. 5. p. 300.*

præcipuam aeris, ex aqua evolantis, portionem expelli: an universus ita excludi aer possit, nec dixero asseverate, nec negavero. Illud certum est, hoc remedium esse magni faciendum, si quis uti Cartesiano velit Barometro: Eo enim adhibito præter caloris influxum vix puto superesse alias difficultates sensibiles: irregularitates nimirum a diversa fluidi supra Mercurium altitudine pendentes facile licet ad regulam revocare, & in ipsa graduum scala simul attendere: ut adeo laudem omnino mereatur illa *Io. Poleni* emendatio.

V. Evitavit priorum aliquot incommoda duplicando tubos *Christianus Hugenius* *. Admonuit vero *la Hirius* ** quæ supersint in Hugeniana constructione imperfectiones. Ipse *la Hirius* eodem duplicationis tuborum artificio, in eum, quem & *Hookius* *** adhibuerat, modum inflexo, evitavit aut imminuit pleraque superiorum incommoda; mediis ingeniose excogitatis, non tamen ab omni difficultate liberis. Conf. cum ipsius *Viri eruditi* commentatione allegata *Hermannus* quoque in *Phoron.* §. 324. & infra §. 12.

VI. Duplicavit alio quidem consilio tubos *Amonionius*, sed ea ipsa methodo sensibiliores fecit variationes quoque, & nonnulla priorum incommoda penitus evitavit. Legimus artificium construendi Barometrum, cuius altitudo

* *Journal des Savans* A. 1672. d. 12. Dec. p. 173. ed. Bat. ** *V. Memoir. de l'Acad. des Sciences* A. 1708. p. 207. 208. edit. Batava. *** *Philosophical Transactions Abriq'd by John Lowthorp.* Vol. 2. p. 10. ex *Trans.* n. 185.

do fit 14 vel 7 tantum pollicum ; in ephemeridibus Gal-
lorum *, impletoque intermedio tubo duobus, si placet,
liquoribus possumus variationes multo sensibiliores redde-
re, ac in simplici Barometro. Curavi aliqua fieri ab
egregio Societatis huius artifice, *Luca de Coffa*; Neque
fefellerit spem nostram successus : Sed fatendum est, in i-
psa huius Barometri structura expertos nos esse difficul-
tates, quas non facile omnes superabunt ; ut adeo non
mirer, idem, etsi curiosum & elegans, repetitumque
magnis encomiis & peculiari libello ab anonymo Gal-
lo **, passim tamen non innotescere ; nec describi in
compendiis vulgaribus.

VII. Ista pertinent ad classem unam. Ex sola
Barometrorum *figura* auxilium alii quaesiverunt ; & dupli-
ci quidem methodo ; alteri maiores Mercurio variationes
inducere studuerunt ; alteri ordinarias observare saltem ac-
curatius. Illud fecerunt, qui superiorem tubi partem
inclinant a perpendiculo ad horizontem. Antiquum
est artificium, cuius primum inventorem nescio ; Inve-
nitur autem propositum ab Anonymo in *Transact. Ang-
lic. n. 236. **** describiturque passim ab aliis. Quo-
niam facile est paratu, & augendo inclinationem potest
reddi subinde sensibilius, itaque commendari meretur.
Supremam tamen exactitudinem variis intercedentibus
impedimentis non assequitur. Inter illa sunt frictions vi-
tri auctæ ; cohesio Mercurii, quæ diffuxum eius in tubis
angu-

* *Journal des Savans. A. 1688. d. 10. Maii.*

** *Vid. omnino Acta Erudit. Lips. ad A. 1711 M. Iul.
p. 319. 320. *** Trans. Abridg'd Vol. 2. p. 12.*

angustioribus impedit, in amplioribus irregularem præstat; incommoda caloris per inclinationem sensibilia &c.

VIII. Optimum in hoc genere sine dubio illud est, quod *Iob. Bernoullio* debemus, expositum in *Phoronomia Iac. Hermami* §. 324. Constat superne, ubi variationes fiunt altitudinis, vasculo ad libitum ampliore, inferne tubus incurvatur, ut horizonti parallelus excurrat; vel, quod in praxi commodius est, super plano horizontali ad arbitrium reflectitur. Monuerunt Academici Parisini, *Iob. Dom. Cassinum* ante complures annos talia molitum esse, sed neglexisse deinceps hanc methodum, quoniam sese aer Mercurio miscuerit in tubo horizontali nonnihil ampliore. vid. *Phoron.* l. c. p. 180.

IX. Feci periculum rei, & deprehendi, *illam succedere*, quando tubi horizontalis diameter lineam non excederet. Metui ab initio frictionum incommoda ob tubi angustiam, sollicitus, ne illæ minores variationes sufflaminarent: sed experimento didici, in Barometro *probe* parato tanta non esse. Quando enim Barometro antea quiescente Mercurii altitudinem visurus ex *la Hirii* præcepto * illud paululum percusseram, observavi aut nihil aut parum differre loca, in quibus hæreat Mercurius ante & post succussionem. Scala variationum in eo, quod primum fieri curavi, est septies maior ordinaria. *Artificium* meum *construendi* hæc Barometra, quia plurimum differt ab iis, quæ proponuntur ab aliis, *Iob. Bernoullio*

S s

apud

* *Vid. Memoir. de l'Acad. des Sciences. A. 1712. p. 4. edit. Bat.*

apud Hermannum 1. c. & Cbr. Wolffio in Experimentis Tom. II. §. 33. p. 63. quia simul facile & exactum est, in notis * dabo.

X. Ex-

* *Assumatur portio tubi amplioris 3. digitos longa, & ex uno latere claudatur hermetice, ex altero mediante lampade affigatur tubo cuidam graciliori longitudinis 28. pollicum. Meum quidem instrumentum ex utraque cylindri amplioris parte habet tubum graciliorem. Superiorem vero non esse necessarium facile intelligas. Tubus ita paratus & inversus impleatur Mercurio usque ad altitudinem unius vel duorum pollicum, cautelis iisdem respectu aeris, quæ vulgo attendi solent. Hoc factò sumatur tubus novus tantæ longitudinis, ut nonnihil superet spatium, quod pro ratione diametri eius & vasis superioris amplioris percurret in variatione sua Mercurius. Sit autem diameter luminis tubi huius circiter unius lineæ. Iungatur hic ope lampadis ad tubum priorem, loco, quo is a Mercurio vacuus est. Ex medio tubi amplioris mensuretur mediâ Mercurii altitudo, v. g. 27. pollicum; atque in hac distantia mediante lampade inflectatur tubus ita, ut pars una sit ad alteram perpendicularis. Inflexa hæc pars, quæ instrumento debite erecto futura est horizontalis, ne nimium occupet spatium, aut a linea horizontali facile sursum aut deorsum deflectat, in varias iterum inclinari partes potest; quas ope tabulæ alicuius planæ facile est examinare, &, si quæ a plano deflectant, ignis ope reducere. Inverso instrumento Mercurius e tubo ampliori descendens implebit non solum id, quod*

X. Exactiores facere observationes, variationum licet in Mercurio aut liquore adhibito non maiorum, studuerunt *Rob. Hookius*, *Hauksbeius*, *Steph. Gray*, & fortasse alii. Illi adhibuerunt pondera, filo circa axem ducto appensa, quorum alterutrum Mercurio incumbere, alterum libere penderet. Axi indiculum affixerunt, qui gradus circuli, vel minores quascunque divisiones in tabula circulari designaret*. Admonuit vero ipse *Hookius*** non respondere spei successum, quoniam per saltus indicentur variationes.

S s 2

XI.

in tubo verticali supererat, sed partem etiam tubi horizontalis, in quo deinceps ultro citroque movebitur. Illud probe notandum, in iungendis atque inflectendis tubis gracilioribus cavendum esse a nodis & angulis acutioribus, ne augeantur frictioinum impedimenta, uti in eiusmodi casu factum memini. Ceterum ex datis tubi amplioris, & graciliorum diametris facile est determinare punctum inflexionis tuborum, & longitudinem tubi horizontalis, ut metus nullus sit, ne Mercurius vel extra horizontalem sursum propellatur ab aere graviori, aut ob leviolem extra tubum horizontalem profluat. Cautionis tamen loco sursum reflexi extremitatem tubi horizontalis ad altitudinem unius pollicis, & contra periculum pulveris supremum apicem denuo deorsum converti.

* *Vid. Hauksbee in Cursu Experim. Tab. I. Pneumat.* ** *Vid. Philosoph. Transactions Abridg'd, by Lowthorp. Vol. 2. p. 10.*

XI. *Grayi* artificium elegans est, & accuratum, si solerti manu fabrefiant machinæ* ; potest etiam adhiberi, ubicunque observari altitudo Mercurii in aliquo tubo exacte debet: neque aliis premitur incommodis, quam illis, quæ in Barometro simplici occurrunt; eo autem ipso abest a perfectione sensibilitatis, quæ queritur. Quid si minoribus aeris variationibus non obsequatur Barometrum simplex, uti passim eruditi consentiunt? Eo certe in casu destituet spectatores suos machina, alioquin peringeniosa.

XII. Diximus, quæ hactenus eruditi artificia proposuerint, ut, si minus nostra placeant, placeat tamen aliquid ex memoratis. Illud prius admoneri debet, in quo pleraque omnia convenient. 1. Omnia hoc habent, ut Mercurii summitas variet; itaque nisi tubus sit perfecte æquabilis (quis autem hoc speret) irregularitates oriuntur a frictione; &, nisi sit perfecte eiusdem amplitudinis, accedunt aliæ ob rationem tubi capillaris: Notum enim est, Mercurium non ascendere ad libellam in tubis paulo angustioribus, idque pro ratione diametrorum. Queritur de hoc incommodo non præter rationem *Iurinius*** . 2. Omnia patiuntur difficultatem a diversitate ascensus & descensus Mercurii, qui eo casu convexam, hoc concavam induit superficiem; adeoque etsi in lateribus vitri eandem attingat altitudinem, gravitatem Atmosphæræ eandem tamen non indicat. Miror, id nondum esse compositis exprobratum Barometris. 3. Omnium variationes turban-

* *Vid. Phil. Trans. Abr. l. c. p. 12. ex Trans n. 240.* ** *Philos. Trans. Abrig'd. by H. Jones Vol. IV. P. 1. p. 435. 436. ex Trans. n. 363.*

bantur a calore & frigore, ob diversas & irregulares liquorum expansiones, atque condensationes. 4. Composita omnia urgentur difficultate cognoscendi diametros tuborum, idque per totam variationis longitudinem. 5. Necessaria succussio * generat oscillationes in compositis minimum æque incommodas, quam in ipsis simplicibus. Denique 6. difficultates parandi a prioribus omnibus sunt pene inseparabiles.

XIII. Non soleo difficultates imputare aliorum inventis, nisi methodus mihi succurrat, qua tolli illas vel imminui posse autumo. Ut intelligam, quam prope ad veritatem accedam, aut ab ea absum, accipe scopum, & structuram novi cuiusdam Barometri, quod non ita pridem animo succurrit.

Scopus et Structura novi Barometri.

XIV. *Mens est*, habere Barometrum, quod variationes gravitatis etiam minores indicet; nihil a tubi inæqualitate incommodi patiatur; nihil a diversitate ascensus & descensus Mercurii; quod expansiones & condensationes a calore & frigore oriundas discernat ab effectu gravitatis; quod non indigeat mensura diametrorum in tubis; in quo oscillationes minimum impedimenti faciant; quod ab exhalatione, putredine, congelatione &c. nihil patiatur; quod paratu non sit difficile; quod denique examen suæ exactitudinis secum vehat.

XV. Pro hoc fine assumatur *Barometrum vulgare*

S : 3

sim.

* V. supra §. 9.

Tab. 15.
Fig. 3.

simplex *recurvum*; annotetur in illo locus supremæ altitudinis, idque vel ex observatione, si iam tum per aliquot annos facta est; vel ex mensura actuali altitudinis tubi. Attendatur autem, ut non plus Mercurii sit in tubo & vasculo, quam ut ille in parte recurva attingat *d*. locum tribus minimum lineis inferiorem vasculo *b*, quando ad summam possibilem altitudinem *a* ascendit; Potest autem loco altitudinis *a* assumi quæcunque non nihil maior illa, quam Mercurius ad summum attingit, sic ut altitudo *da* sit maior paulo omni hactenus observata.

Fig. 4.

XVI. Affigatur hic tubus *tabula æneæ*, ABCD latitudinis non multo maioris quam est ipse tubus. Dividatur illa incipiendo a linea horizontali *c d* in pollices & gradus, ductis scilicet lineis ad *c d* parallelis. Excavetur etiam hæc tabula, ut tubus eidem quasi immitti possit, non omnino tamen, sed pro sui dimidio, sic ut tubus ubique stringat divisiones ex utroque sui latere in tabula factas.

XVII. Immergatur tabula cum tubo v. gr. in *aquam*, donec Mercurius attingat locum *a*. & notetur, ad quam profunditatem tubus sub aquamersus sit. Dico, si fiat: uti gravitas Mercurii ad gravitatem aquæ, ita altitudo aquæ supra lineam *c d* ad profunditatem Mercurii sub linea *a*; hanc quartam proportionalem a tota altitudine *a c* sublatam, relinquere *veram Mercurii altitudinem*, ad quam dato tempore per Atmosphæræ gravitatem suspensus hæret.

XVIII. *Demonstratio* facilis est; elevatur enim Mercurius a pondere Atmosphæræ & aquæ incumbentis: detracta igitur altitudine, quæ pressioni aquæ debetur, resi-

residuum æquipollet pressioni aeris. Ne calculis opus sit, dabo facile remedium §. 39.

XIX. Patet autem, hoc Barometrum esse tanto *sensibilius* simplici, quanto liquor, cui tubus immergitur, est Mercurio levior specificæ. Igitur, etsi non possit in infinitum augeri sensibilitas, potest tamen eousque, ut sufficiat scopo observationum.

XX. Potest etiam sine alio medio indagari ipsa *liquoris specificæ* ad Mercurium *gravitas*; quod si enim attenderis, quanta requiratur submersionis profunditas, donec Mercurius elevetur ad altitudinem unius digiti, ratio gravitatum specificarum erit inversa altitudinum memoratarum.

XXI. Atque ut hoc exacte observari possit, adhibere vitrum licebit convexum, simplex aut duplicatum, cum aut sine filis, affixum tabulæ, sic tamen, ut sursum, deorsumque moveri sibi parallelus possit; ita enim fiet, ut videri exactius possit terminus Mercurii in tubo, & illius cum linea tabulæ adpositæ, ad quam examinatur, congruentia. Atque hic usui esse potest artificium *Steph. Grayi*, superius §. II. memoratum. Facilius tamen est simplex alicuius lentis convexæ usus.

XXII. Difficile est, cum tabula mergitur in liquore, impedire omnino *oscillationes* & Mercurii & ipsius liquoris. Duo tamen hic adminiculo esse possunt. *Pri-*mo optarem, ut tota hæc tabula suspenderetur in tubo vitreo satis longo & nonnihil amplo; ut deinceps ope filii, quod circa axem in supremate tubi positum circumvolvitur, mediante manubrio rotatili & cochlea sine fine, tubus leniter, & sine violenta concussione, posset a-

que

caloris ab effectibus *gravitatis* Atmosphæræ? alii generose negligunt hanc difficultatem, & incommoda dissimulant: alii palliant nævum superficialiis excusandi rationibus; *solus*, quem sciam, *Amontonius* ex instituto rem persequitur. Liceat mihi hic esse prolixiori.

XXVII. Quibus Amontoniana Barometrorum *simplicium correctio* placet, * eandem facile ad nostrum applicare poterunt. Curent, ut linea *cd* incidat in medium vasculi amplioris ad recurvam tubi partem affixi; & habebunt Barometrum simplex ordinarium, cui omnia convenient, quæ ordinariis competunt. Neque impediet felicem successum aquæ vel alterius liquoris adhibiti expansio. Ex §. enim 20. semper erui potest relatio eius ad Mercurium præsentem, adeoque præsens eius altitudo vera inveniri, non secus, imo melius & exactius, quam si illa simplici Barometro investigata esset. Obtentâ autem altitudine Mercurii in hac tempestate, per Amontonianam deinde tabulam reduci potest ad altitudinem Mercurii calidioris aut frigidioris, tempore constructionis adhibiti.

XXVIII. Visum est aliquando, rem omnem facilius & brevius sic inveniri posse. Assumatur ex definitione Amontoniana, ** Mercurium transeundo a summo frigore ad calorem summum augeri parte $\frac{1}{3}$ sui voluminis. Patet, illum, si frigidissimus occupet spatium *acd*, calidissimum non posse eodem illo contineri, sed posita eius

Tab. 15.
Fig. 3.

* v. *Memoir. de l'Acad. des Sciences A. 1704. p. 230. edit. Bat.* ** v. *Memoir. de l'Acad. des Sciences A. 1704. p. 225.*

eius summitate in *a* ascensurum tribus minimum lineis supra *d*. Posset igitur expansio eius a calore veniens subinde agnosci per altitudinem *ed* supra *d* assurgentem: eademque ad totum spatium *acde* comparari; idque vel simpliciter pro longitudine horum spatiorum *ed* & *acde*, si tubulum supponas sensibilibiter, & quoad hos respectus æquabilem; vel si hæc etiam minutias respicere velis, operosiori examine. Ita igitur ratio densitatis Mercurii ab uno tempore ad aliud innotesceret: Consequenter præcisa gravitatis Atmosphæræ mensura omni tempore definita foret. Haberentur enim pro omni tempore altitudines Mercurii & densitates.

XXIX. Favet huic methodo sententia *Amontonii*, qui monet,* se experimento didicisse, quod *tubi Barometrorum ordinarii nullam a frigore constrictionem*, aut a calore ampliationem sensibilem patiantur. Hoc enim pharmaco prioribus addito, nihil amplius ad attingendum scopum nostrum desiderari posse video. Solum enim hoc anxios nos habere posset, quod & vitrum a frigore contrahatur, & a calore expandatur, atque adeo incrementum voluminis Mercurii semper maius sit in calore, quam est soliditas cava tubuli *ed* memorata. Optandum itaque foret, ut & altera hæc *Viri egregii* sententia modo indicata, & prior expansionis mensura §. 28. essent exploratæ.

XXX. *Fateor* autem *invoitus*, me non dum omni dubio liberatum esse, per experimenta ll. cc. proposita. Persuasum mihi est per experimenta thermometro-

T t 2

rum,

* v. *Memoir. de l'Acad.* 1704. p. 373.

trorum , * quod a calore amplietur cavitas phialæ ; ut id vulgo infertur ex descensu subitaneo fluidi, cum thermometer aquæ calidæ immergitur. Itaque raturum etiam erit ; in experimento Amontoniano ** spatium illud , per quod Mercurius subsidit , non explere totam Mercurii contractionem ; constrictus enim & tubus fuit a frigore. Maior itaque est expansio & contractio Mercurii & spiritus vini , quam loco mox memorato definitur. Similiter itaque metuas ; ne in experimento altero , quo aucta vasis vitrei capacitas inquirebatur , expansio liquoris contenti simul facta eandem exhibuerit iusto minorem. Nolim vero id pertinaciter contendere , quoniam tota experimenti illius ratio descripta non est.

XXXI. Illud facile iudices , cum tanta huius sententiæ Amontonianæ pro meo scopo utilitas esset, me nihil intentatum reliquisse, sed omnino præoptasse, ut eandem, si fieri posset , confirmarem. Neque enim omnis statim spes decollabat. Differunt phialæ pro thermometris adhibitæ a tubis Barometrorum , soliditate laterum , & capacitate interna plurimum. Non igitur impossibilem iudica-

* v. *Memoir. de l'Acad. A. 1700. p. 153. & A. 1705. p. 101. cui conf. præcipue A. 1710. p. 563. ubi recensetur experimentum prioris conversum. Repetii utramque experimenti classem , occasione dubitationis subortæ circa veram phænomeni causam : immissoque alternis vicibus coram Societate nostra in aquam fervidam & glaciale thermometro Fl-rentino , factum comperi ita habere , uti traditur.*

** v. *Memoir. A. 1704. p. 225.*

dicabam Amontoniani huius experimenti cum thermometricis conciliationem.

XXXII. Pro hoc autem fine sumsi *tubulos* aliquot *graciliores*, sed *longiores*, eosdemque inflexi, uti Fig. 7. Tab. 14. videtur; eo saltem fine, ut longior tubus in breviori spatio confineretur: extremitatem unam infundibulo *ab* instruxi, alteram diduxi in tubulum capillarem *cd*. Infundibulo sufficientem Mercurii quantitatem simul infudi; ut, cum semel inciperet fluere, nullus se aer immiscere posset. Quoniam cedere aer per tubuli capillaris orificium poterat, momento temporis implebatur tubulus, & effluebat ex tubulo capillari; donec in crure altiore *be* esset ad libellam: Tum vero ope lampadis obsignabatur hermetice tubus capillaris, sic, ut non plus aeris remaneret, quam ut id acutissimo visu vix agnosci posset. Instrumentum ita paratum *alternis vicibus* aquæ *fervidæ* & *glaciali* coram Societate nostra immerfi, sed nullum in frigida ascensum subitaneum; aut in fervida descensum Mercurii licuit distinguere. Examinaui vero tubulum, an ullibi bullula aeris aut particula solum eius intercepta sese dilaret in fervida; neque id observare potui. Sicuti desit facultas acquirendi sibi aut efficiendi tubulum cum infundibulo; itemque hermetice, & satis caute obsignandi tubulum capillarem: potest is glutine adhibito satis exacte tubum claudere, postquam eum suctione (quod semper facile, & in tubis amplioribus fere necessarium est) implevit.

XXXIII. Patet igitur, adhiberi methodum posse, quam §. 28. descripsimus, non sine fructu. Non tamen hæc *sola* est. Suppetit & alia, quam eo fine de-

T t 3

scri-

Tab. 14.
Fig. 7.

scribam, ut conferri invicem utraque, &, quænam melior sit, *ex præxi* ipsa possit definiri. *Duo* autem sunt, quæ hic requiro; *Primo* necessum est, ut dato quocunque tempore queas definire altitudinem Mercurii supra libellam. Id ope liquoris fieri exacte sic potest.

Tab. 15.
Fig. 4.

XXXIV. Mergere Barometrum, donec Mercurius attingat lineam *a* & nota altitudinem liquoris supra lineam *cd* in scala divisionum apposita. §. 17. Si hoc in casu Mercurius supra lineam *cd* elevatus est, merge amplius; si depressus infra *cd* extrahe tubum, donec Mercurius perfecte respondeat lineæ *cd*. Examina, quid singulæ hæc altitudines (pro gravitate liquoris specifica, per §. 20. definita) faciant reductæ ad altitudines Mercurii. Tum vero, pro obtinenda vera ad hoc tempus altitudine Mercurii supra libellam in altero tubo deme in priori casu, in posteriori adde altitudinem ultimam ad primam. Negligo hic altitudinem liquoris *cd* ut contemptibilem: si nolis, facile est illam simul considerare; sufficit enim sumi illam, cum ad liquorem pertinet, simplici oculorum iudicio.

XXXV. Ita primum obtinemus. *Secundum* postulat, ut densitatem quoque Mercurii præsentem pernoſcas. Perge igitur hoc ordine: Si aqua vel liquor adhibitus quicunque eandem semper densitatem servaret, posset ope §. 20. inquiri densitas Mercurii præsens ad præteritam. Cum id de nullo adhuc liquore cognitum sit, methodo illa §. 20. hoc solum intelligitur, quæ sit unoquoque tempore Mercurii & liquoris mutua densitas. Pro scopo autem præsentis requiritur adhuc aliquid amplius. Quodnam illud? dicis; nimirum hoc, ut densitas alterutrius

utrius sub diversis temporibus spectati possit invicem conferri. Ita enim, si densitatem Mercurii calidi possis cum densitate aquæ eiusdem temporis calidæ; densitatem aquæ calidæ cum densitate frigidæ; densitatem aquæ frigidæ cum Mercurio eiusdem temporis frigido exacte comparare: poteris quoque densitatem Mercurii uno tempore calidi cum densitate eiusdem alio tempore frigidi conferre eadem exactitudine.

XXXVI. Primum & tertium possumus ope §. 20. Quæritur adhuc secundum. Atque ita reducitur omnis tandem difficultas ad hoc, ut *densitatem aquæ* diversis temporibus variam possis invicem *conferre*. Hoc diu & a pluribus & diversimode solutum est problema. Placet ex illis hanc seligere methodum, qua *corpus solidum*, v. g. metallicum, in utraque aqua solícite ponderatur, & examinissò pondere iudicatur fluidi densitas. Ponderus illud ne & ipsum contrahi frigore, & calore expandi obiicias, potest assumi in statu medio, quo calorem v. g. manus ordinarium neque multum excedit, neq; ab illo multum deficit.

XXXVII. Atque ita tandem effectum puto, ut *problema in sese difficillimum*, adhibitis operationibus quidem pluribus, (tribus scil.) sed facilibus, reduxerim *ad problema* ab omnibus *facile* semper habitum. Postulo etiam hac de causâ, ut, si *Areometra* dari concedunt Phisici, concedant quoque hanc meam machinam, separato a gravitate caloris effectu, esse non Baroscopium modo, sed *Barometrum*, quo non discernere solum variationes gravitatis in Atmosphæra liceat, sed etiam *metiri*.

XXXVIII. Unicum illud addo, si quis non summam quærat exactitudinem, *posse illi sufficere dicta §. 28.*

vel

vel etiam, adhibito pro liquore altero, oleo Tartari per deliquium, cuius non magna dicitur esse rarefactio*, posse negligi operationem §. 35. Error enim a calore oriundus, uti facile calculus docet, præmissa solum operatione §. 20. parum erit sensibilis. Quin imo, si liquor fuerit valde obnoxius expansioni, ut v. g. Spiritus vini, tum etiam neglecta cautela §. 20. adhibita sola operatione §. 34. error a calore & frigore minor erit, quam in Barometris simplicibus. *Prout igitur ad maiorem spectator exactitudinem adspirat, ita pluribus cautelis adhibitis ad eandem potest pertingere.*

XXXIX. *Quotidianus* vero Barometri usus potest etiam hoc artificiolo reddi commodior; si ex altero latere quidem a linea horizontali *cd* numerentur lineæ & digiti incipiendo ab unitate. Ex altero autem ita, ut adscribantur pollices altitudinis Mercurii ab Atmosphæra suspensi ad ea loca, in quibus aqua supra tubum consistet, atque intermedipm spatium deinceps in 12. partes maiores dividatur, quarum singulæ lineis Mercurii respondeant, iterumque in 12. partes divisæ duodecimas linearum indicent. Sufficiens hæc, ubi ad calorem attendere non oportet; cum autem hoc fieri utile est, non gravaberis diligentiam adhibere maiorem, sequendo §§. 33. 34. 35.

XL. Non succurrunt nunc animo difficultates aliz, ad quas in superioribus nondum attenderim, nisi hæc una, *an hoc Barometrum sit etiam portatile?* Est vero, si velis. Non solent obambulare Barometra quotidie; igitur

* v. *Memoir. de l'Acad.* 1704. p. 369.

tur Barometrum portatile dicitur, quod data occasione possit ex loco uno in alium deferri sine detrimento. Simplicia habentur pro portatilibus, præcipue, si recurva sunt. **Extrahe nostrum ex liquore suo, & inverte, habebis Barometrum simplex recurvum.** Si metuas, ne aqua, quæ in vasculo ampliori stagnaverat, in alteram tubi partem intret (etsi hic metus præcaveri possit, si tubus sit angustior, & Mercurii ea copia, ut nequeat omnis intrare in crus longius) potes per §. 23. aquam prius extrahere ope siphonis recurvi capillaris.

XLI. Commodius hoc est: relinque tubum Mercurialem cum tabula sua in altero ampliori, si vasculum inferius sit ita amolum, ut Mercurius a succussione lateris oscillans in descensu non effluat, & tubus a vasculo ad inflexionem ita longus, ut, si Mercurius ad summitatem ascendat, non tamen recedat ad usque inflexionem tubi. Hoc modo potes *erectum* transportare Barometrum.

XLII. Si *inversum* aut *inclinatum* transferre ideo malis, ne a succussionibus Mercurii ascendens frangatur tubi summitas; cura, ut tubus inferne bis inflexus sit, & Mercurius, cum ad summitatem ascendit, non ultra crus primum recedat. Fieri hæc omnia facile possunt.

XLIII. Illud pro difficultate non reputo, si quæras, quomodo suspendi debeat tabula, ut *crus* Barometri longius sit *perpendiculare*? Cura, ut linea suspensionis transeat per centrum gravitatis tabulæ & tubi commune illud, quod obtinet cum tabula est ad dimidium sui versa. Differentias enim illius centri, ob inæqualitatem laterum tubi, pro maiori aut minori eius immersione variantis facile

U u

negli-

negliges sine incommodo. Sin omnem velis scrupulum evitare , affige pendulum tabulæ , atque sic ad parietem firma machinam , ut id designet lineam axi Mercurialis tubuli parallelam ; talem enim antea describes. Atque ista hucusque de structura novi nostri Barometri dicta sunt: quibus unum illud epimetri loco subiungam.

XLIV. Si non requiras , ut calorem a gravitate discernat Barometrum , sed tamen vulgari & simplici sensibilius evadat , careatque nonnullis Barometri simplicis defectibus , (vid. §. 12. n. 1. 2.) & structuræ sit non difficilis: potest ita satisfieri petito Tuo. Sint duæ tabulæ ad angulum rectum iunctæ , sic tamen , ut altera maneat fixa , altera circa axem rotari , & rotando radere priorem possit. Tabulæ rotatili affigatur Barometrum simplex , sed ordinario longe maius , superne si placet sphaerula instructum , sed tibi tamen strictioris. In eo tubo assumatur punctum aliquod v. g. in altitudine quatuor pedum ab inferiore bullula Mercurio plena: in maiore , aut minore , prout Barometrum sensibilius desideratur aut minus sensibile. Tum vero inclinetur tabula mobilis cum affixo sibi Barometro , donec Mercurius attingat punctum memoratum ; & observetur magnitudo anguli comprehensi inter situm tubi inclinatum & horizontem. Si enim hic maior est , Atmosphæræ maior gravitas est pro ratione sinuum anguli inclinationis. Non igitur difficile erit , construere scalam super tabula immobili , quæ exhibeat altitudinem Mercurii in mensuris usitatis. Ita novam obtinemus Barometri structuram , quam tamen superiori postponendam esse putamus.

Ufus

Ufus Barometrorum sensibiliorum.

XLV. Sufficiant illa tandem : Dicamus nunc , *cui usui ?* Facilis subinde quæstio , nec æque facilis semper responsio ! Hoc loco attendimus vel ad usum Barometrorum omnium sensibiliorum vel ad nostrum singulariter. Certum est , plures de machinis sollicitos fuisse , quam de usibus earum. Igitur non ineptum puto , id problematis loco proponere Eruditis , ut indicent , *quibus potissimum utilitatibus Physicis* , adhiberi exactior variationum gravitatis cognitio possit ?

XLVI. Mea , salvis melioribus , hæc fere sententia est : etsi Barometra proprie dicant solum , non prædicant ; huc usque tamen ad prædicendas tempestates adhiberi præcipue consueverant. Cum sæpe fallerent divinationes , accusari contigit machinas ; non secus atque sensus accusari solent , cum præcipitata fallunt de sensibus iudicia. Igitur emendationes quæsitæ sunt ; atqui non dantur aliæ , nisi ut sensibiliores fiant mutationes , & ab irregularitate caloris atque frigoris liberentur. Id quidem bene se habet , sed ad *præcognoscendas* tempestates *nihil* confert. Observamus , ne quidem ad illas Mercurii variationes , quæ in simplici Barometro facile discernuntur , consequi semper sensibiles tempestatum differentias ; igitur neque ex minoribus adhuc variationibus prædici illæ probabiliter possunt. Ad hunc igitur finem immediate nondum adhiberi posse Barometra illa sensibilia existimo.

XLVII. Fortassis tamen id *mediate* fieri aliquando posset , si quis detegeret artificium ex variatione

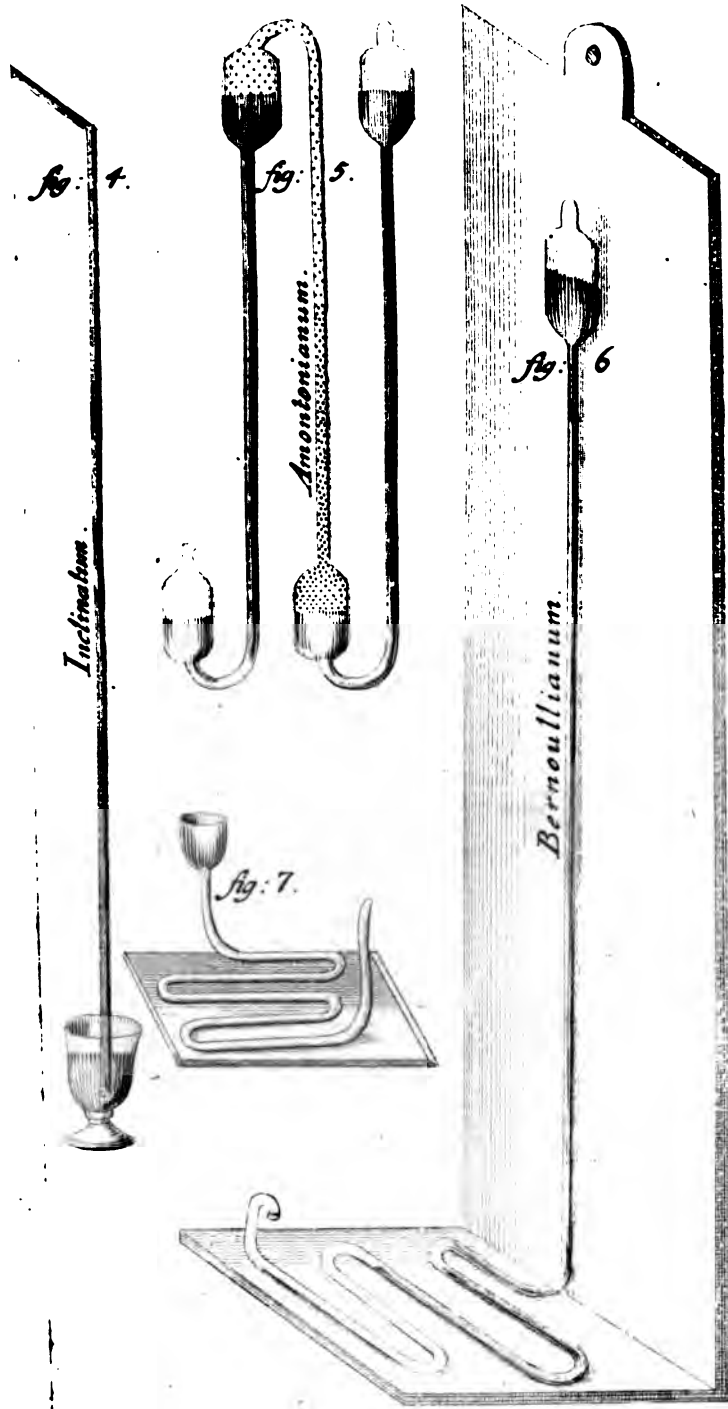
U u 2

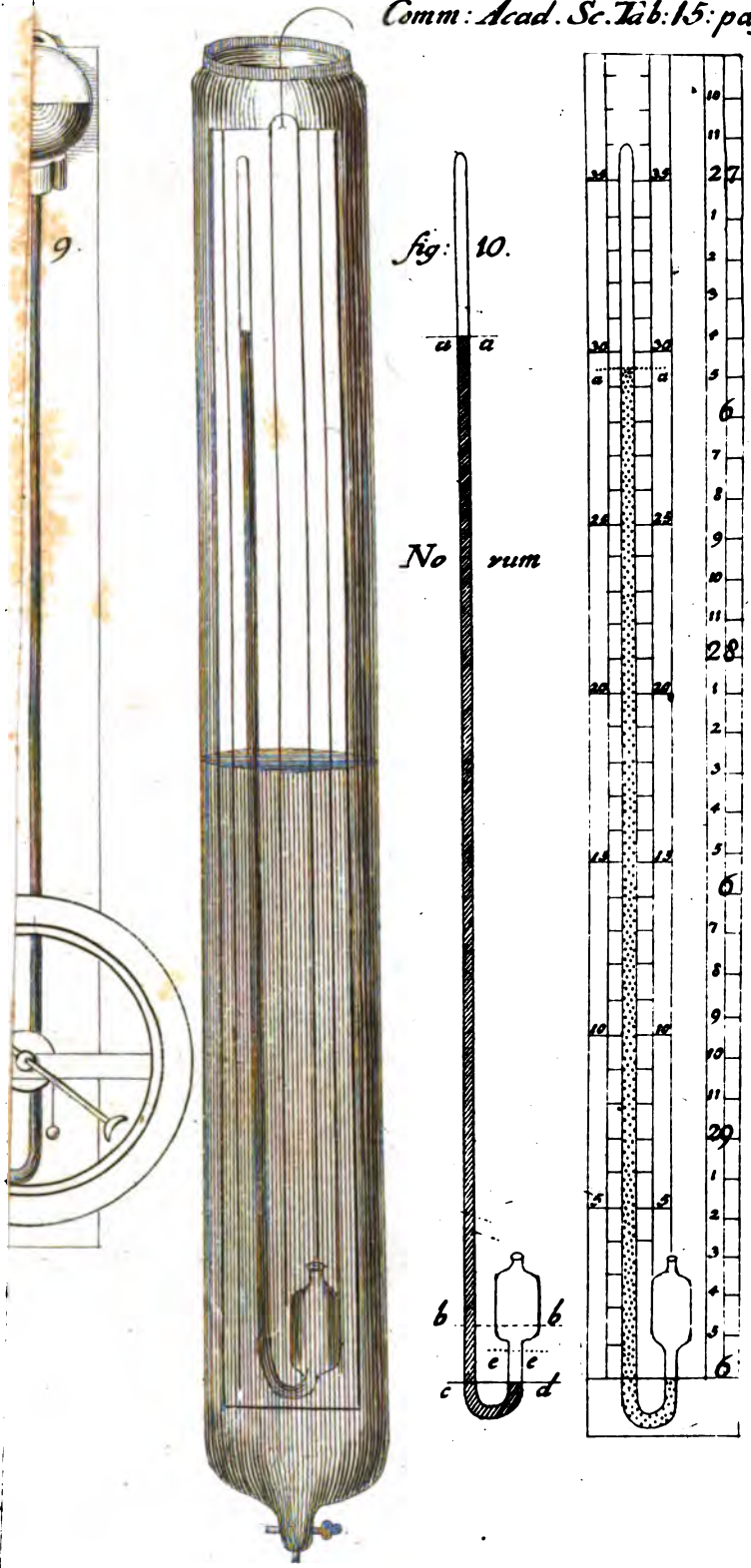
gravi-

gravitatis eruendi *ventorum successiones*, ab hisce enim plurima pendet tempestatum varietas. Sed vero ventorum ortus & effectus magis sunt compositi, quam ut ex sola Atmosphæræ gravitate hauriri earum cognitio possit. Dubium etiam est, an ex cognito per complura instrumenta, reliquas aeris proprietates indicantia, statu Atmosphæræ nostro, probabilis de vento aut statu Atmosphæræ futuro coniectura fieri possit? -

XLVII. Hactenus igitur illum placet usum assignare, ut ope sensibilibioris Barometri accuratior *scala variationis* pro maiori minorive *montis*, & *metalli fodine* altitudine & profunditate habeatur, eo consilio, ut inquiratur, an fortasse assumtis hisce differentiis, observatione cognitis, tanquam elementis alicuius loci geometrici possit regula aliqua inveniri pro altitudinibus quoque maioribus, quam per experimenta possunt indagari? Pro hoc fine necessariæ sunt observationes eorum, quibus non deest *commoditas locorum*, iuga montium & fodinarum profunda. Curandum vero; ut altitudines & profunditates illæ explorentur mensura actuali per partes, non calculo ex angulis (præter unam stationem mensuratam) solis facto: Videndum quoque, ne in circulum incidamus vitiosum. Cum enim ob fallacias visus in iudicandis altitudinibus, oriundas ex radiorum refractionibus, aliquando Barometra ad metiendas montium altitudines adhibeantur, manifestum est, altitudines hoc modo cognitæ nostro scopo minime conducere.

XLVIII. Possit etiam *suspicio* moveri, annon radii luminis per Atmosphæram transeuntes maiorem minoremve refractionem patiantur, sub diverso gravitatis statu?





statu? Gravior enim est aer, vel ob auctam altitudinem vel densitatem; utraque variat refractionum quantitates, altera ob refracti radii longiorem viam, altera ob maiorem refractionis angulum. Quæritur itaque: an illa, si quæ est, refractionis variatio a diversa Atmosphææ gravitate veniens, observationibus & experimentis solicite institutis sit *sensibilis*? & alicuius in *Astronomia* momenti?

XLIX. Ad cognoscendam naturæ consuetudinem in transitu ab uno gradu gravitatis ad alium; ad observandas varietates gravitatis a vento pendentes; quin etiam a nube una vel pluribus ad horizontem vel verticem positus, usurpari utiliter & cum fructu posset *novi generis Baroscopium Caswellianum*, * cæteris omnibus sensibilius & præstantius, si in illo liceret caloris atque frigoris effectus vel evitare, vel discernere. Id igitur si quis possit, rem præstiterit omni laude dignissimam.

L. De nostra Barometri correctione illud speciatim dicere licet, posse illud inservire pro cognoscendis eodem tempore diversorum liquorum gravitatibus specificis; pro indaganda veritate sententiæ Amontonianæ §. 29. memoratæ; pro definienda contractionis tuborum, si quæ est, mensura, ut, quamnam illa proportionem sequatur, intelligas &c. de quibus, si quid utile cognovero, suo tempore dicendi locus non deerit.

U u 3

CATO-

* v. *Transact. Abridg'd by Henry Jones Vol. IV. P. II. p. 6. — 10. ex Trans. n. 290. Prolixior structura & demonstratio est, quam ut hic describi possit. Itaque unum hoc agimus, ut eandem attentioni Lectorum de meliori commendemus.*

CATOPARDI
PHOCAE & ELEPHANTI*
CISTERNA & CANALIS THORACICVS
primum detectus
a Io. Georgio Du Vernoi.

M. Sept.
1726.



Anis, equus, lupus, leo, lynx, felis odorata & non odorata, cuniculus, porcus, erinaceus, vitulus adeoque undecim solummodo animantium genera eo cum successu incisa sunt, ut viarum chyli ferarum conspectus in iis aliquando oblatus sit. Ex hisce vero non omnes, sed paucæ solummodo delineatæ; aliæ neglectæ uti ex historia animalium abunde patet. Propterea differentia viarum chyli ferarum in variis animantium speciebus notitiam perexiguam nos tenere fatendum est. Nemo interea scire potest, in quibusnam speciebus canalis thoracicus latus dextrum potius quam sinistrum vel utrumque simul occupet? Num eius insertio contraria sit? Num chylus alia via quam per thoracem in sanguinem perveniat, & quæ forte aliæ sunt innumeræ proprietates circa huncce chyli transitum observandæ oculo minus indifferenti considerandæ. Itaque quum in Elephanto chylus haud diversa ratione quam in pennatorum genere sine ope ductus thoracici ad massam sanguineam contendit; quum in Phoca canalis thoracicus sub forma arcus offertur; quum denique singularem in Catopardo huius

con-
* Anno 1727. demum instituta fuit Anatomie Elephanti, cuius ductus thoracicus aptiorem hic locum obtinere visus est.

conformationemprehendimus:magna sane suspicio est, in cæteris quoque animantibus magnum circa vias chyli-feras discrimen a conditore animantium constitutum esse.

Quælibet animantia, quæ tantum non subtilitate sua visus aciem effugiunt, quocunque morbo ac tempore defuncta ad hancce disquisitionem adhibere licet, sicuti tribus hisce exemplis comprobavimus.

Prima dissectio fuit cuiusdam feræ in vivario SVAE IMP. MAI. defunctæ, a Parisiensibus *Chatpard.* vocatæ; vid. *Memoires pour servir a l'histoire des Animaux.* Raio *Catuspardus* seu *Catus montanus Americanor.* *Synops. animal. quadrup.* pag. 169. In hacce dissectione præter vias chyli-feras quædam sponte oblata sunt, quæ ad perficiendam magis ornandamve huius quadrupedis historiam, adeoque pro supplemento ad laudatam Parisiensium descriptionem conferre visa sunt.

Effigiem felinam aut lynceam, caput rotundum, rostrum breve, auriculas felinas, duos prælongos dentes caninos in utraque mandibula, sex incisores qui in superiore maxilla crassiores sunt, totidem molares in inferiore & octo in superiore, quorum duo utrinque positi vix apparent, digitos denique in singulis pedibus quaternos unguibus cinereo aduncis instructos obtinet, magnitudine lynceam aut vulpeculam æquans. Quem mensi sunt Parisienses, uno pollice altitudinis & dimidio pede longitudinis nostro cedit. Cauda felinæ similis est, cum unius pedis longitudine & trium pollicum peripheria. Pellis maculosa est & tricolor ex pilis flavescens nigris & albis, non asperis neque longis, picturam mixturamve macularum admirabilem efficientibus, Dorsi maculæ nigræ & flavescen-
tes,

tes, ad ventris latera albæ & flavæ, in ventre partim flavæ & nigrescentes, quales etiam in pedibus conspicuæ sunt. Figura macularum veluti in Tigride oblonga seu virgata, quo caractere hæc fera æque ac Tigris a Pantheris differt. In medio dorsi macula una præ aliis notabilior est instar fasciæ in longum protensa, quædam minus longæ sunt uti in ventris lateribus aliæ minores & breviores, figuræ ovalis, maculis prioribus inclusæ, quatuor in cervice, quarum duæ mediæ serpentum instar flexuosæ prope occiput ad invicem inclinatæ mox in duo cornua figuræ V terminantur duæ aliæ exteriores pariter flexuosæ, posterius ad radicem auricularum terminantur: eo loco quo desinunt, duæ tenues fasciolæ inter duas auriculas usque ad palpebræ superioris medium protenduntur relicto vacuo seu area in vertice plurimis punctis nigricantibus seu maculis confersa. Prope angulum oculi exteriorem, duæ utrinque fasciæ incipiunt, per medium genæ oblique sub auribus descendentes invicemque coeuntes. Cauda maculosa ex annulis imperfectis exteriori seu superiore parte flavis nigrisve, inferiore vero canis nigrisve pilis ornata. Denique notandum est, non solum mystaci sed etiam superciliis genisve infixas esse setas partim albas partim nigras easque valde rigidas, pellemque fortem exspirare odorem.

Non licuit in nostro similem imperfectionem seu defectum deprehendere, qui in Catopardo Parisiensibus secto conspicuus erat, quique variis præbuit ansam ratiociniis puta utriusque testiculi & vasorum præparantium deferentiumve defectum absque ullo apparente castrationis signo

gno. Excepto thymo, qui in utroque deficere visus est, nec non vesiculis spermaticis glandulisque sublingualibus, omnium partium apparatu bene instructus erat. Præter penem vagina sua inclusum sed admodum gracilem, testiculos duos bursa continebat a vellanam æquantes, una cum parastatis, ductibus deferentibus in prostaticæ corpus desinentibus arteriisq; & venis spermaticis, quæ propter suam exilitatem ægré inveniri possunt. Quod reliquas partes attinet, nimirum ossa, musculos, caput, pectus cum inclusis visceribus, ea fere eadem sunt cum iis, quæ partim in laudata descriptione, partim in descriptionibus hyænæ odoriferæ seu cati zybethici * iam tradita sunt. De exquisito huius animalis odoratu suspicionem facit, ampla turbinatorum ossium ossisque cribrosi superficies, item sinuum frontaliu numerus auctus. De acie visus, punctum nigricans in fundo choroïdis, quod in lynce pariter observatum est, nec non undecim muscoli oculum moventes, una cum magnitudine glandulæ lachrymalis. De voracitate & cita dissolutione ciborum testantur dentes, lingua valde aspera & quasi spinosa, aculeis versus gulam inclinatis, glandula magna salivalis musculo oculi deprimenti adeoque orbitæ adhærens, cum ductu excretorio iuxta ultimum dentem molarem hiante, item duæ aliæ glandulæ conglomeratæ in cælo palati conspicuæ, quæ glandularum sublingualium officio defunguntur, ventriculi pinguedo, crassities nec non foramina variz magnitudinis, quorum nonnulla granum hordei facile, alia vix setam admittunt, qualia in

X x

prin-

* *item Leonis, cuius dissectio bis sub prælo sudantibus administratur.*

principio duodeni simul conspeximus. Denique pancreatis amplitudo hepatisque seu potius vasorum biliariorum singularis fabrica silentio minus prætermittenda est: Nam præter superficiem hepatis plurimis punctis seu maculis albicantibus respersam, id notatu dignum visum est, quod singuli ductus hepatici in unum ductum haud confluunt, sed distinctis orificiis ductui cystico inosculantur, specie ductuum hepatico-cysticorum. Ductus pancreatici & cholidochi ingressus communis in duodeni cavitatem quatuor digitis infra pylorum, in quo loco tunica intestini in tumorem oblongo-rotundum elevata est, sub qua species receptaculi in conspectum venit, in quo bilis & succus pancreaticus invicem permisceri videntur, antequam in cavum intestini effluent. Vesicula ipsa biliaria sic conformata est, ut duobus sepimentis horizontalibus, certa distantia remotis ac in medio foramine pertusis, in duas veluti cameras distincta sit. Postremo Lienis 8. transversos digitos longi situs admodum curiosus visus est: Nam in medio ventris sub umbilico quasi fluctuat, sicuti omento ablato, quo instar panni omnia intestina obvolvuntur, luculenter conspeximus.

Tab. 11.
Fig. 2.

Hisce præmissis Pecquetiani receptaculi & canalis thoracici, prout in hac rarissima fera hæc viæ nobis oblatae sunt, descriptio accurata suppeditanda est. Tum vasa lymphatica ex imo ventre utrinque ascendunt *aa*, tum tria 4ve vasa lactea mesenterii *bb* in fasciculum collecta, ex *A*sellii pancreate sub arteria mesenterii superiore incedunt, primo in conspectum veniunt iisque cisterna continuata est. Cisterna ipsa *c* vesicula simplex, parva, oblonga, transparent, digiti minimi apicem vix admittens, cuius
fitus

situs ordinarius est , factoque *g.* linearum itinere ductus thoracici formam assumens : Pulchrior ac ornatior tum fabrica tum situ tum insertione minus ordinaria canalis thoracicus *ddd* visus est. Triquetram laternam referens ex tribus tubulis in medio distantibus ac denuo infra & supra coeuntibus constat, hæcque conformatio tribus in locis *eee* perspicue apparet. Duo hinc efformantur canales *ff* diversæ capacitatis distantia aliquot linearum separati, qui non super dorsi spinam iuxta venam sine pari, sed iuxta latus sinistrum aortæ super radices costarum usque ad cordis basin incedunt. Eodem tempore arteriæ intercostales modo sub illis modo super illos decurrere observantur. Porro duo prædicti canales tandem coeunt, sicque unus efficitur ductus straminis crassitie, prope arcum aortæ incipiens, & iugulum versus sub carotide sinistra ad venam iugularem contendens *g.* Equidem quum in animantibus hætenus notis canalis thoracicus haud supra altitudinem vasorum axillarium aut subclaviorum ascendat , Catopardo paucisque aliis id proprium est ut ultra memorata vasa subclavia notabiliter excurrat, (huicce vero animantium generi claviculæ concessæ sunt) maioremque adeo longitudinem acquirat , quippe ad medium fere cervicis perveniens, facta levi inclinatione in venam iugularem internam sinistram definit.

Phoca.

Phoca incola est Maris Balthici & Newæ fluminis isque in omnibus piscinis Petropolitanis ad curiositatem alligatus venalis prostat. Exemplo itaque Eruditorum ma-

X x 2

ris

Tab. II.
Fig. 3.

ris Balthici Academiaeque Parisinae in hac quoque urbe Imperiali vitulus marinus nuper dissectus est. Instituti autem ratio postulat, ut de viis chyliiferis a nobis primum detectis solummodo idque quam brevissime agamus, quumque primum amphibium sit in quo receptaculi ductusque *Pecqueti* demonstratio facta est, nihil obstare videtur, quo minus in aliis huius speciei animantibus tam minoribus quam maioribus, uti sunt equus marinus, rana, lutra, castor &c. easdem vias existere dicamus. 1. Observari meretur inferiorum partium lymphatica ad cisternam contendente vix ultra pelvim ascendere, quia situs cisternae talis est, ut proxime ad pelvis confinia ortum suum habeat. 2. Cisterna a omni artificio vacua est, ampullam valde amplam oblongamve simulque pellucidam seu hydatiformem referens. 3. Non dispar habitudo canalis huic continuati *bbb*, siquidem magna simplicitate, unaque bifurcatione in principio, altera prope extremitatem, cum duplici ramo ad venam axillarem contendente praeditus est. Eius porro notabilis amplitudo excedens proportionem corporis; Arcus denique quem efformat, cuiusmodi exemplum antea nunquam visum est, singulari attentione digna sunt.

Elephantus.

Inter omnia Animantia terrestria Elephantus ob summum eius pretium molemque corporis maximam cultro anatomico dignissimum aptissimumque censendum est. Quis vero non putet sibi facile esse, absque cognitione inventorum *Asellii* & *Pecqueti*, clausis fere oculis, vias chyliiferas in tam vasto corpore invenire? nisi dissectiones
trium

trium quatuorve Elephantorum a *Pecqueti* temporibus institutæ contrarium edocerent. Causa nulla alia esse potest quam I. quia ad canalis thoracici præparationem necessaria est talis resolutio, ut Professor non manibus solummodo, sed pedibus & toto suo corpore intra ipsum corpus Elephanti sese demittat in eoque ceu carcere aut ventre balænæ per aliquot horarum spatium perduret. Atqui sub talibus conditionibus vias chylicas videre nemo cupit. Altera causa est quod Professores Elephantorum, eos viis prædictis penitus destitutos esse fortassis credant; Equidem aliquam rationem seu fundamentum huicce opinioni inesse fatendum est: Nam distinguere inter vias *Afellianas* & *Pecquetianas* omnino necesse nobis videtur: Etsi incredibile & conceptu arduum sit Animantia dari ductum habentia thoracicum sed vasis lacteis destituta, id tamen certo certissime affirmare possumus quacunque arte diligentia & præparatione adhibita, ea per integrum octiduum frustra quæsitâ fuisse. Si quis de nostra diligentia potius quam de naturæ defectu dubitet obüciens, vasa lactea non tam defuisse quam latuisse, is consideret nihil fuisse quod eorum conspectum difficilem nobis reddere posset: Non earum parvitas, siquidem in *Cuniculis* & *Erinaceis* Elephanto milles magnitudine inferioribus ea conspicua sunt: Non pinguedo neque concidentia: Talia enim obstacula non amplius hodie curamus. Verum enimvero, ut minor hallucinationis suspicio supersit, illud etiam probe attendendum est, in toto mesenterio quod admodum amplum & vastum erat, non solum vasa lactea sed etiam glandulas

las mesaraicas , lacteorum perpetuas in aliis animantibus comites ita defuisse, ut ne vestigium earum appareret.

Tab. 11.
Fig. 4.

Unius hac vice canalis thoracici eique appensorum lymphæ ductuum carotidem hominis fere æquantium existentiam certo statuere possumus: Nam quod receptaculum attinet, ambiguum est quid proprie hocce nomine appellari debeat, siquidem eo in loco ubi ordinario cisterna adesse solet, nihil præter quatuor canales *aaaa* ductui thoracico appensos invenire & observare licet. Prædictis ductibus canalis thoracicus *bbbb* simplex sed magnitudine sua Elephanto respondens continuatus est. Is ductu simplici absque divisione & bifurcationibus magnamque rectitudinem observans, super spinam dorsalem vena sine pari & aorta stipatus incedit. Postquam ad 3. dorfi vertebram pervenit, notabilem dilatationem *c* duos pollices longam in eo observavimus, cuius causa proinde seu naturalis sit sive præternaturalis incerta est. Canalis porro in eo loco paulisper a spina dorfi recedens obliquo incessu summum thoracis iugulumve petit, tandemque in latere colli sinistro duos in ramos *dd* breves dispescitur, qui ad venæ iugularis cum axillari confluxum desinere visi sunt. Tractus itaque seu longitudo canalis thoracici fere 4. ped. diameter 4. lin. æquat. Postremo haud prætermittendum est in toto eius tractu nullas nobis valvulas oblatas fuisse, etsi amplitudo canalis tanta fuerit, ut digitum minorem facile admitteret. Vice versa substantia ductus post detractam pinguedinem eam crassitiem obtinebat, quæ ordinario in vena iugulari hominis observari solet.

DE

DE LVCE BOREALI.

Auctore

Fr. Chr. Maiero.

I.



Um in borealibus nostris oris apparitio lucis huius tam frequens fit, ut & vulgus eam non admiretur amplius, facile mihi fuit intra breve temporis spatium magnum observationum numerum colligere. Has in præsentis scripto communico, una cum meditationibus meis de origine lucis borealis, quas, cum novæ sint, publico intelligentium iudicio exponere decrevi, ut sic, quantum eæ valeant, ex aliis cognoscam.

M. Oct.
1726.

II. Propositum mihi est rem ita pertractare, ut primo succinctam phænomenorum omnium descriptionem adornem, ex observationibus meis hætenus habitis collectam. Deinde, ut conclusiones aliquot inde deducam, quarum ope, adhibitis in subsidium propositionibus ex scientia physica petitis, in arcana huius lucis penetrare an-
nitar.

III. Ob duplicem lucis borealis apparentiam duæ eius species constitui possunt. Prima vulgaris est & in his terris crebrior, sub arcus forma septentrionem occupat, radios sive virgas lucidas ad verticem mittit, & luce quæta splendet. Altera quæ rarior est, cælum ver-
sus omnes plagas occupat, in partes dissipata est, quibus brevissimæ aut nullæ ut plurimum adhærent virgæ, splen-
dor

dor eius ut plurimum undulare aut tremulare putatur. Ex dicendis postea palam fiet, has duas species reipsa non differre, soloque situ duplicem hanc apparentiam effici.

IV. Primæ speciei phænomena sequentia sunt:

1. Arcus lucidus versus boream ita disponitur, ut eius cavitas horizontem spectet, convexitas verticem.

2. Altissima arcus pars boream ad sensum semper exacte tenet.

3. Utpurimum crura horizontem attingunt.

4. Quo altior est arcus, eo amplius expanduntur crura.

5. Altitudinem arcus nunquam ultra 40. gr. observavi, nec amplitudinem crurum ultra semicirculum.

6. Quo depressior est arcus, eo concinnior & regularior est eius rotunditas; ut plurimum quo altior est, eo magis vitari solet ab intercedentibus fissuris, hiatibus, protuberantiis, flexuris, &c. Interdum, altitudine nil mutata, inconcinnus arcus sensim in ordinem componitur, & vicissim.

7. Accidit sæpe, ut novi arcus generentur, qui priori aut altiores aut humiliores esse solent, semper tamen priori coalescunt; quo ipso fit, ut humilior aut altior evadere videatur.

8. Altior tamen & humilior quandoque fit sine novis accedentibus arcubus observabilibus.

9. Spatium intra arcum & horizontem conclusum semper est tenebricosum; stellarum tamen radios clarissime transmittit, nisi nubibus oppleatur atris.

10. Interior arcus margo obscurus est plerumque, exterior lucidus; confinium vero lucis & obscurita-

ritatis distinguere non licet, quia una alteri sensum confunditur.

11. Virgæ, vel & interdum latiores tractus lucidi in longum exporrecti, exteriori arcus margini insunt, & paulo debilius lucent quam ipse arcus. Accidit autem sæpissime, ut ea arcus pars ex qua virgæ exeunt magis luceat quam reliquæ.

12. Omnes recta ad verticem tendunt, quem attingunt sæpe, imo traicere quandoque videntur.

13. Eiusdem pene latitudinis est unaquæque virga tam in fine quam in principio.

14. Equabilis fere splendoris virga est quælibet; nisi quod prope arcum lucidior interdum videri solet quam prope verticem.

15. Duratio unius virgæ brevis & incerta est; decem circiter minorum secundorum esse solet ordinarie.

16. Ortus earum & interitus ut plurimum subitaneus est. Quandoque tamen apud arcum prius apparent quam in vertice, quandoque hic ordo inversus est: sic etiam mox hoc illove ordine intereunt.

17. Interdum, sed raro, integræ non sunt, & in frustra quasi dissectæ videntur.

18. Moventur plerumque, aut versus ortum, aut versus occasum; mox tardius, mox celerius; interdum una celerior est altera, ita ut sese mutuo assequantur, vel cursu antevertant. Interea vero nec virgarum rectitudo nec directio ad verticem mutatur.

19. Raræ interdum adsunt aut nullæ, lucido licet

Y y

arca

arcu existente ; Interdum tam copiosæ adfunt, ut arcus pectinis instar appareat.

20. Sæpe accidit ut multæ simul orientur, & evanescant iterum simul.

21. Stellæ ubique transparent , excepto obscuro arcu margine interiore , qui stellas tegit, si adest.

22. Sæpe accidit, ut nubes aliquæ appareant, quæ altiores sunt quam quas lux borea sub se reliquit. Quod quidem ex diversis coloribus & motibus manifestum fit; impossibile enim est ut nubes in eodem cœli loco visæ diversimode ferantur & illuminentur, nisi ratione altitudinis a terra multum differant.

V. Secundæ speciei phænomena sequentia sunt :

1. Primo aspectu cœlum flammis conflagrare videtur , Lux tremula & corruscans apparet , eo fere modo , quo in acervo prunarum candentium lux tremula vagari solet : Hæc vero corruscatio interdum magis, interdum minus, interdum vix sensibilis est.

2. Attentione adhibita diligentiori, lucidas nubeculas hinc inde dispersas notare licet. Interdum facilis est hæc observatio , interdum difficilis ; prout sc. nubeculæ aut spissæ sunt aut subtiles ; item prout vel tarde, vel cito deflagrant.

3. Cum aliquando nubeculam talem in ipso vertice hærentem contemplerer, eaque mox accenderetur, mox extingueretur iterum, observavi, eam subinde obscuriorem evadere, sensimque nubem nigricantem sub se relinquere, qua obtegebatur tandem.

4. Idem postea in aliis nubeculis animadverti, deprehendi autem, quod interea, dum accenduntur & ex-

tin-

tinguntur, locum & figuram suam aut parum aut nihil mutant.

5. Dum accenduntur, tamdiu fere accensæ manere solent ac virgæ prioris speciei durant (§. 4. n. 15.)

6. Nubeculæ quæ a vertice remotæ sunt proiiciunt interdum virgas lucidas, sed breves & graciles: eo breviores quidem quo propiores sunt vertici.

7. Ex relatione aliorum habeo, quod luculis talibus fulgura quandoque interspergantur cœrulea.

8. Hanc lucis borealis speciem raro observavi solam; focia fere semper adfuit prima species prius recensita; una alteram aut præcedit aut sequitur.

9. Lux nubecularum harum tanta est nunquam quanta arcus esse solet. (§. 4. n. 1.)

10. Lux hæc versus horizontem sæpe saturior est quam in vertice, ita ut interdum horizon undique splendeat, eo fere modo ut arcus boreus ipse.

(§. 4.)

VI. Utrique speciei communia phænomena sunt sequentia.

1. Apparere solet utraque species ab æquinoctio autumnali ad æquin. vernale. Æstate enim vidi nunquam.

2. Utplurimum luci succedere solent nubes ab initio squammatim dispositæ, postea augmentur & coarcentur sensim sensimque.

3. Utraque species sereno aut semisereno cœlo plerumque apparere amat; animadverti eam tamen quandoque per densas, & cœlum ubique tegentes nubes hinc inde dehiscentes.

Y y 2

4. U.

4. Utriusque lucis splendor est pallidus, aut subalbidus.

5. Utraque lux levi vento interdum versus aliquam mundi plagam ferri solet, quæ tamen semper contraria est plagæ versus quam ventus in inferiore aeris regione spirat. Nullam huic phænomeno contrarium exemplum expertus sum hucusque.

6. Non raro animadverti tepidam tempestatem antecedere solere aut & comitari, gelidam sequi.

7. Si accidat ut continuis aliquot noctibus appareat, (quod sæpe fit) sequentes lucis subinde fiunt debiliores, ut tandem vix conspicuæ sint.

8. Duratio utriusque lucis variabilis est valde, sæpe pernoctes sunt, sæpe & paucarum horarum, prout nempe aer quiescit, aut agitur.

VII. Ex consideratione enarratorum phænomenorum concludo, quod hæc duæ species non nisi apparenter differant. *Communes enim utrinque sunt proprietates plurimæ (§. 6.) & quæ cuilibet peculiare esse putantur, ex sola situs diversitate postmodum explicabo, quæ quidem diversitas ipsa observatur (§. 3. §. 4. n. 1. 2. 3. §. 5. n. 1.)*

VIII. De virgis lucidis dico, quod generentur reflexione radiorum emissorum a materia lucida, quæ ibi non existit, ubi virgas videmus. *Quicquid videmus, id radiis videmus aut directis, aut refractis, aut reflexis: Si virgæ viderentur radiis directis, necesse foret, ut materia earum lucida in longum extensa 1°. existeret in planis cuivis observatori verticalibus (ob §. 4. n. 12), hæc autem plana in aliis locis spectantium inclinata sunt ad horizontem, sequeretur ergo quod materia ubique in verticalibus simul, simul*

simul etiam in planis inclinatis hæreat; quod impossibile est. 2°. Necessè foret ut materia hæc, in partibus a spectatore remotis, esset latior, & in propinquis proportionaliter gracilior, alias enim non possent apparere ubique æquelatæ; (§. 4. n. 13.) atqui pro diversis spectatoribus deberet hæc latitudinis varietas eodem tempore varia esse, (quod ex regulis opticis constat) & materia disponderetur pro situ locorum, quos spectatores diversi occupant; hoc vero impossibile est, ergo & visio directæ virgarum impossibilis est. Si loco diversorum spectatorum assumas aliquot phænomena ab eodem spectatore diversis temporibus observata, idem concludendum erit; nam nulla ratio est, cur omnes ignes eidem spectatori in directione constanti semper disponantur? Si visio refracta foret, deberet ultra vaporum refragentinm regionem materia lucida existere quæ mox accenditur mox extinguitur (§. 5. n. 3. & 4.) quæ ventis agitatur (§. 6. n. 5.) quæ vapores crassos post se relinquit (§. 5. n. 3. §. 6. n. 2.) & quæ fulgurat (§. 5. n. 7.); Atqui hæc omnia isti regioni non convenire videntur. Addo, quod sol, luna, aut stellæ lucidiores tales virgas etiam producere deberent quandoque per refractionem, quod tamen nunquam hoc modo fit, nec quomodo fieri possit per principia optica, aut per similes casus ostendi potest. Ita excluditur quoque visio refracta & sola reflexa relinquitur: quod quidem probandum erat.

IX. De loco materiæ lucidæ dico, quod existat in ea aeris regione ubi nubes hæere solent. Nam inferior arcus margo obscurus, cui lucidus semper contiguus est, pro nube aut vapore censendus est. (§. 4. n. 10.) maxime ideo quia ventis agitatur (§. 6. n. 5.) cum præterea ipsa lux in nubes abire soleat (§. 6. n. 2.) imo sub nubeculæ aut

Y y 3

vapo-

vaporis lucidi forma appareat (§. 5. n. 2.) & versus horizontem densior fiat (per §. 5. n. 10): patet banc materiam nubium conditiones habere omnimodas, consequenter & locum & distantiam a terra.

X. Ut plures conclusiones formare liceat, introducā subsidiarias propositiones aliquot ex physicis petitas, quarum prima hæc sit: Nubes in aere quieto ita pendent, ut inferior earum superficies plana sit & a terræ centro ubique æquidistet. *Quia enim gravitas aeris specifica in æqualibus a terræ centro distantibus eadem est, nubes autem, quæ constant ex eiusdem generis vaporibus, ibi subsistunt, ubi earum gravitas specifica coincidit cum gravitate aeris, patet, nubes subsistere in loco qui æquidistet ubique a centro terræ, adeoque in planitiem expandi terræ superficiei ad sensum parallelam, eoque exactiorem quo aer quietior est.*

XI. Fidem huic propositioni facit experientia, qua constat, nubes, quo propiores sunt horizonti, eo & basim magis rectilineam habere, quæ horizonti semper parallela est; Hoc ideo fit, quia planities nubium inferior eminus posita a latere spectatur atque ita tanquam linea apparet.

XII. Cæterum & ratione & experientia constat, quod nubes nubibus immineant; hoc est, quod planities unius nubis longius a terra distet quam planities alterius: Id quod & eo tempore evidenter observatur quandoque, quo lux borea apparet (§. 4. n. 22).

XIII. Aliud lemma hoc est: Obiecta quæ in aere æque alta sunt, horizonti eo propria esse videntur, quo sunt remotiora ab oculo spectatore; & vicissim obiecta æque alta, quo horizonti apparent propiora, eo quoque sunt remotio-

motiora a spectatore oculo. *Hæc ex scientia optica desumpta sunt, ubi rigide demonstrantur.*

XIV. Ex priori lemmate intelligitur & hoc: Si linea in aere pendula, eminus a vertice posita, secundum parallelum orbis terrestris extensa, & a terra ubique distans sit; ea sub arcus forma apparebit, eo modo uti arcus lucis boreæ (§. 4. n. 1. 2. 3. 4.) Et vicissim; si linea a terra æquealta sub arcus forma appareat, cuius summa altitudo sit exacte versus boream posita, illa erit secundum parallelum terrestrem in aere expansa. *Hæc ab iis qui opticam callent facile intelliguntur, quapropter a demonstratione nunc abstinere licet tuto.*

XV. Hisce positis dico, quod materia lucis borealis secundum parallelum terrestrem fere in aere disposita sit. *Nam hæc materia in nubium regione versatur (§. 9.) ergo a terra ubique distat æqualiter (§. 10.) Porro, sub arcus forma apparet, cuius summa altitudo est ad boream directæ (§. 4. n. 1. 2. 3. 4.) inde per §. 14. sequitur quod occupet tractum in aere secundum parallelum terrestrem extensum. Dico autem fere, nam curvæ arcus borealis non semper est exactissima (§. 4. n. 6.)*

XVI. Ex opticis porro notum est, quod corpus figuræ irregularis inconcinne & inæqualis, figuram magis regularem, concinnam & æquabilem habere putetur, quo longius ab oculo removetur: Intelligitur inde cur arcus boreus eo exactior adpareat, quo propior est horizonti (§. 4. n. 6.) *Eo enim casu est remotior. (§. 13.)*

XVII. Si corpora aliquot in aliqua planitie utunque dispersa & disiecta sint, apparebunt quoque oculo tanquam disiuncta, si quidem perpendiculariter ad illud

Iud planum positus sit ; quo magis autem oculus hoc planum oblique intuetur, eo propius coire videbuntur obiecta, imo continuum corpus tandem constituere videbuntur : Item, lux sive color obiectorum singulorum augebitur & saturior evadet. *Hæc iterum tanquam certissima ex opticis suppono.*

XVIII. Nubium planities circa verticem hærentes perpendiculariter aspiciuntur ; sed quæ ad horizontem vergunt eminus & oblique aspiciuntur. *Intelligitur hoc lemma ex §. 10. & 11.*

XIX. Hisce superstruo sequentem de luce borea propositionem. Materia lucis huius in nubeculas lucidas est dispersa & disiuncta ; prior autem lucis species continua (§. n. 1.) & clarior (§. 5. n. 9.) apparet ideo, quod in hoc casu materia eminus & oblique aspicitur. *Quia enim hæc materia in planitiem terræ parallelam diffusa est, (§. 9. & 10.) apparet in vertice eo modo quo diffusa est, (per §. 18. & 17.) apparet autem disiecta (§. 5. n. 2.) ergo & disiecta est. Porro cum prior species a posteriori non nisi apparenter differat (§. 7.) necessario sequitur quod & materia prioris speciei sit disiecta ; Itaque utriusque speciei materia in nubeculas lucidas est dispersa. Prior autem species ad horizontem vergit semper (§. 4. n. 5.) adeoque oblique aspicitur (§. 18.) necesse est ergo ut tanquam continua & clarior appareat. (§. 17.) Q. E. D.*

XX. Ex dictis intelligitur quomodo explicanda sint phænomena quibus inter sese differunt ambæ species.

XXI. Nunc pro explicandis virgarum phænomenis præmittam unam & alteram propositionem. Prima est : Si punctum aliquod lucidum in planum horizontale crispatum
non-

nonnihil, & partibus politis constans, desuper irradiet, radiosque ad oculum spectatorem reflectat, tum oculo apparebit linea aut virga lucida quæ a lucido puncto ad oculum recta extenditur. *Ex regulis opticis demonstrari potest propositio; verum & quotidiana experientia eam docet: Luna enim, aut stella lucida quævis in superficiem aquæ tranquillioris irradians, oculo repræsentat talem virgam qualem descripsi.*

XXII. Huic alia innititur propositio; quod scilicet inferior nubium, aut vaporum, superficies lucida puncta sursum splendentia, sub virgæ lucidæ forma, iterum deorsum reflectat. *Crispa enim est, plana, & particulis aqueis aut glacialibus politis constat (§. 10.) planities nubium inferior. Sed præterea experimento didici veritatem propositionis huius: Noctu enim aliquando, suborto incendio, duas vel tres verstas a domicilio, quod Petroburgi habeo, distante, excitatus rumore solito ad fenestram cum amico spectandi gratia accurri, mox sublatis in cælum oculis, virgam vidimus ambo candentem, a plaga incendiî ad oculos nostros, sive ad verticem cæli, extensam, reflexam a nubibus nivem parturientibus, crescentem mox, mox & decrescentem, prout incendium augebatur quoque.*

XXIII. Confirmatur hæc propositio alio phænomeno, quod Petroburgi ita rarum non est, uti in Germania aut Gallia esse solet. Accidit nimirum quandoque hyemali tempore, ut sol in ortu aut occasu constitutus lucidam & candicantem caudam verticaliter sursum proiicere putetur; describitur ea in Commentariis Academiæ Scientiarum Gallicæ (Anno 1703. pag. 78) eique simillima fuit quam incendium supra memoratum for-

Z z

mavit

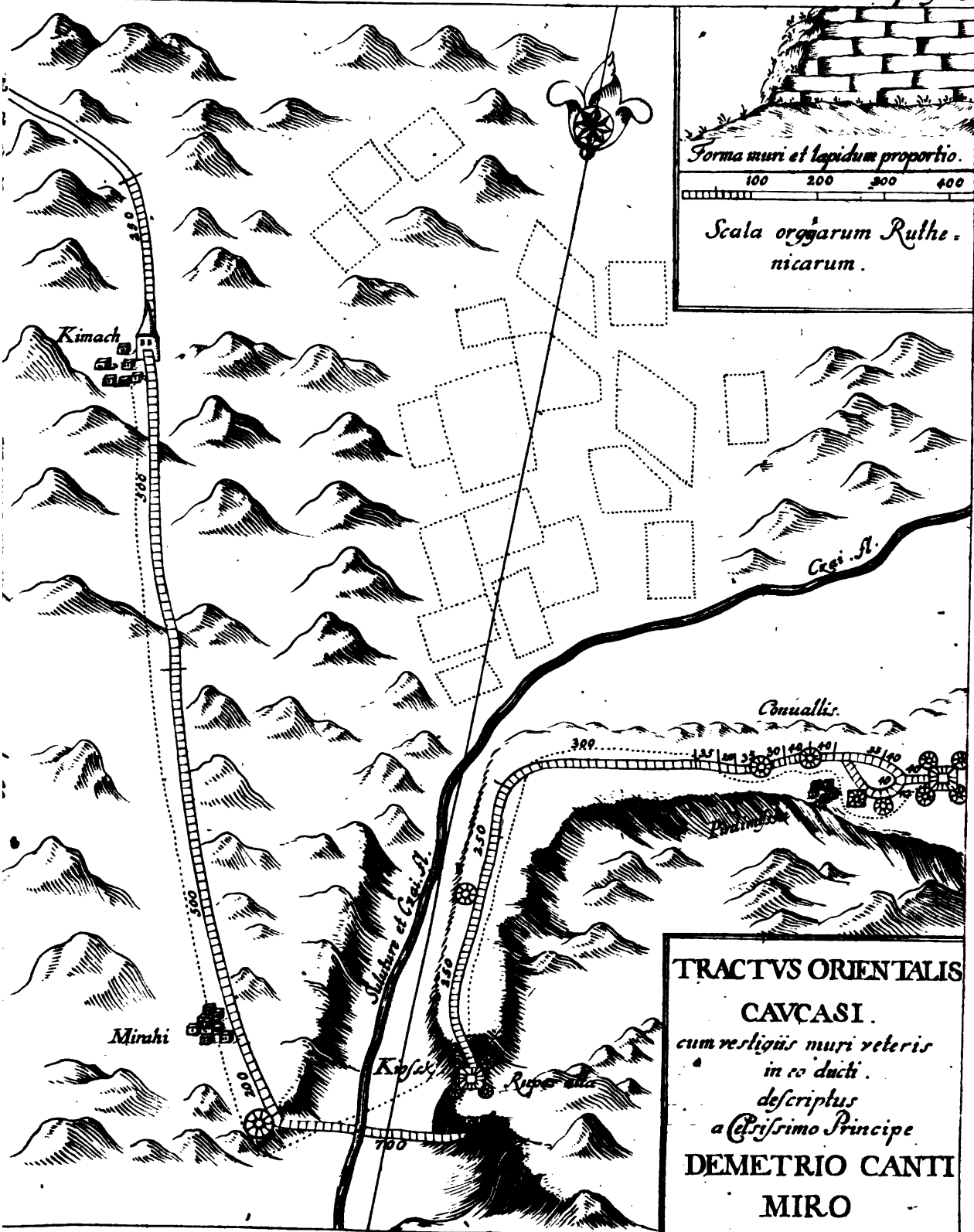
mavit (§. 22.) Oritur autem hæc cauda a radiis solaribus, in planities vaporum ex particulis glacialibus constantium ab horizonte sursum vibratis, & ad oculos spectantium reflexis, eo prorsus modo quo virgæ lucidæ in superficiebus aquarum generantur. (§. 22.)

XXIV. Hisce præmissis dico : Quod virgæ lucis borealis orientur a reflexione lucis quæ existit in nubeculis lucidis (§. 19.) dum nimirum hæc nubeculæ radios sursum proiectant in planities vaporum superimminentium subtilissimorum, a quibus deinde reflectitur sub formis virgarum. *Oriuntur virgæ reflexione (§. 8.), ergo a nubeculis lucidis (§. 19.) oriuntur ; nulla enim alia tum temporis lux in aere existit, & virgarum splendor tamdiu durat quamdiu nubecularum coruscatio : (§. 4. n. 15. §. 5. n. 5.) Planities autem vaporum reflectens supra nubeculas existit, quod intelligitur ex phænomenis allegatis §. 4. n. 9. 10. 11. 22. item §. 12. consequenter illa virgas eo modo format quo dictum est §§. 21. 22. 23. Hac propositione explicantur phænomena adducta §. 4. n. 11. 12. 13. 14. §. 5. n. 6.*

XXV. Quod si præterea supponatur, quod planities tam imminentes, quam nubeculæ lucidæ, levi vento agitentur, in promptu erunt explicationes phænomenorum §. 4. n. 16. 17. 18. 19. 20.

XXVI. Item quia materia lucida supra se vapores habet, quos illustrat, infra nullos, patet ratio phænomeni §. 4. n. 9.

XXVII. Si liquor in vase aliquo contentus in superiori sua parte versus plagam aliquam agitetur, fiet ut inferior



Forma muri et lapidum proportio.

100 200 300 400

*Scala orggarum Ruthe-
nicarum.*

**TRACTVS ORIENTALIS
CAVCASI.**
*cum reliquis muri veteris
in eo ducti.
descriptus
a Crisimo Principe
DEMETRIO CANTI
MIRO*

ferior pars liquoris ad fundum, moveatur in plagam contrariam. *Veritas huius & ratione & experientia facile adstruitur. Ceterum ex eo pronum est concludere, quomodo producatur phenomenon §. 6. n. 5. allegatum.*

XXVIII. Quas dedi hucusque explicationes certitudinis gradum aliquem habere arbitror; restant autem alia phenomena, quorum explicationes æque certas non promitto: Quid de istis sentiam paucis declarabo; præmissis aliquot propositionibus subsidiariis.

XXIX. Aerem ubique inflammabilibus scætere spiritibus seu vaporibus subtilissimis, constare puto ex fulguribus; ex perpetuis exhalationibus telluris, sulphure, nitro, & salibus ubique abundantis; ex capitibus mortuis, quæ ex aere vitriola, salia &c. sugunt.

XXX. Si tales inflammabiles spiritus copiosi in spatium nimis arctum congregentur, flammam concipiunt & deflagrant ultro. Hæc quoque propositio multis probatur experimentis physicis vulgo notis.

XXXI. Chymia quoque teste, subtiliores quivis spiritus a frigore in minus spatium colliguntur: quidam facilius quidam difficilius. Non loquor hic de ea spirituum collectione qua condensantur & in fluidi formam rediguntur, sed qua solummodo propius ad se invicem coeunt.

XXXII. Dum sol ab æquatore versus meridiem recedit, regiones aeris boreales frigidæ evadunt, idque eo magis quo sunt borealiores, & quo longius sol recedit. Præterea regiones aeris eiusdem paralleli sive climatis eodem fere frigoris gradu afficiuntur. Dico fere, nam aliæ quoque præter solem sunt causæ huc concurrentes,

solis tamen absentia sine dubio præcipua frigoris causa est. *Manifesta est hæc propositio, nec probatione ulteriori indiget.*

XXXIII. Hisce subiungo propositionem, quam quidem pro certissima venditare non audeo, supponere tamen cogor in gratiam sequentium; ea hæc est: Spiritus inflammabiles vaporibus aqueis, caloris ope, commiscentur & implicantur, separantur postea iterum, accedente frigore dum aquei citius coeunt quam spiritus inflammabiles.

XXXIV. Nunc dico: Sole in regionibus borealibus versante, vel ventis calidis spirantibus, aer calefit, vapores aquei subtilissimi in aerem attolluntur, miscenturque spiritibus inflammabilibus (§. 33. & 29.); recedente sole ad meridiem, frigus succedens, in eodem climate æqualiter distributum (§. 32.), Spiritus inflammabiles aqueis mixtos in nubeculas subtilissimas colligit (§. 31. & §. 19.), ex quibus spiritus inflammabiles sensim sese expediunt, & supra illas congregantur (§. 33.), quorum sufficiens copia collecta flammam concipit & deflagrat (§. 30.) qua consumpta nova colligitur & accenditur, & fabula hæc tamdiu luditur quam possibile est: *Hisce convenire puto quæ Celeberrimus Prof. Wolfius dixit, dum materiam lucis boreæ immaturam fulguris materiam nominavit.*

XXXV. Ex dictis facile intelligitur generatio materiæ lucidæ; (§. 19.) Eiusdem dispositio secundum tractum climatis alicuius (§. 15.) & tam crebro repetita accensio extinctioque nubecularum lucidarum (§. 5. n. 3. & 4.) *Forsan etiam repetita fulgura in tempestatibus æstivis similem habent ortum.*

XXXVI.

XXXVI. Dum aquei vapores ab inflammabilibus successive destituuntur, graviores fiunt, subsidunt & visibiles evadunt; quo posito adscitisque quæ supra (§. 17.) dicta sunt, intelligitur ratio phænomenorum §. 4. n. 10. §. 5. n. 3. & 4. §. 6. n. 2.

XXXVII. Hoc pacto fere cuncta, quæ luci boreali accidere solent, utcunque explicata dedi. Copiosior autem hæc materia est, quam ut omnem exhaurire potuerim, coactus proinde fui multa concise dicere ut brevis fierem. Si occasio & rei dignitas id tulerint, plura aliquando de distantia materiæ lucidæ a terra proferre licebit, eam enim determinare possum geometricè, datis altitudine arcus, crurumque amplitudine horizontali, & concessa mea hypothesi, quam supra (§. 15.) attuli. Sit enim sinus elevationis poli $=q$. Sinus maximæ arcus altitudinis $=m$. Sinus dimidiæ amplitudinis crurum $=g$. Semidiameter terræ $=a$ & sinus anguli qui æquatur altitudini arcus maximæ, & æquatoris altitudini simul sumtis $=b$, sic fiet distantia materiæ in vertice arcus existentis ab observatore $=\frac{2amqgg}{r(rbb-ggq)}$. Inventionem huius regulæ, eiusdemque applicationem ad exempla dabo alio tempore.

XXXVIII. Sub finem annotare lubet, quod borealis lux antiquis temporibus æque ac nostris nota fuerit; Erant qui eam in prodigiorum numerum retulerunt, erant & qui meteoris accensuerunt, eiusque causam investigaverunt. In posteriorum numero Aristoteles est, qui in Meteorol. Lib. I. cap. 4. & 5. eam clarissime describit: Lucem, quam ego verticalem voco, ille comparat flammæ

in area ab accensis stipulis ortæ, flammæque tremulas vocat capras, alteram vero arcuatam speciem chasma nominat, vocabulo tum temporis usitato & desumpto ab interiore nigro arcus spatio, quod voraginem apte representat; virgæ nostræ illi trabes sunt quas ex chasmate ascendere dicit. Plurima quoque lucis borealis phænomena describit Plinius in Hist. Nat. Lib. II. capitibus 26. & 27. Qui meteorum hoc pro extraordinario & mirabili phænomeno habuerunt plures sunt. Duo addam antiquitatis testimonia a Bayero nostro mihi suppeditata. Primum extat in Chronico Edeffeno f. 407. (quod habetur in Iosephi Simonii Assemani Biblioth. Orient. Tom. I.) his verbis: „Anno Seleucidarum 813. ignis multus, visus est in boreali plaga, qui tota nocte arsit,“. Alterum est Roberti Monachi, qui in Libr. V. Historiarum Hierosolymitanarum ad A. C. 1097. ita fatetur: „Sub illa nocte Cometa inter alia cœli sidera rutilabat & fuz lucis radios producebat, & inter Septentrionem & Orientem igneus rubor in cœlo corruscabat,“. Adde hinc Marcum Squarzialupum, qui in dissertatione de Cometis, figuram lucis satis bonam dedit, cum hac descriptione: „Cœlum Anno 1575. in Vindemia Mense Octobris per noctem integram arsit, vel ardere visum est. Res mihi nunquam prius visa, & omnibus certe mortalibus tremenda. Lux magna, latitante luna, ad Silesiam & Sarmatiam extitit, instar erepusculi matutini. Erat in horizonte plaga in arcum eminens & oblonga: Atque ex lucido isto tractu a summa extremitate radii ingentes modo hic modo ibi rectissimi erumpebant. Qui radii vel diu immoti ac turbinati stabant

„ bant , vel dissipabantur & novi subinde prodibant. Et
 „ (quod cum stupore contemplabar) ex radiorum inter-
 „ vallis emicabant flammæ ingentes , tremulæ , quæ mox
 „ in cœli verticem una post aliam cursu celerrimo fere-
 „ bantur. In quo loco non pauci aliquamdiu manebant,
 „ mox aliquæ evanescebant. Vidi ego nocte concubia
 „ ab utraque lucis extremitate radios ad medium spatium
 „ (ad *Zenith*) festinantes atque inter sese adversos & in-
 „ festos tanquam duas acies inimicas acerrime concurren-
 „ tes. Factus ibi confictus & radiorum confusio , sese
 „ inclinantium , adversos prementium , mox refugientium,
 „ se attollentium & contorquentium cum incredibili colo-
 „ rum , punicei , violacei , flavi , rubei varietate. In
 „ hac pugna & cœlesti certamine , inclinata orientis par-
 „ te radii occidentes valentiores , fortiores & victores a-
 „ paruerunt. Qui facile sibi credunt , bellum horrendum
 „ iam iamque inter nos & Mahometanos fore dicebant &c.
 Huc referendas puto plurimas alias relationes antiquas &
 recentes de exercitiis , de hastis , armis militaribus &c. in
 cœlo visis.

R.A.

RARI AC PROPE INAUDITI EX
UTERO MORBI HISTORIA

VNA CVM NECESSARIIS MEDICIS
ANIMADVERSIONIBVS

^a
Petro Antonio Michelotto

perscripta.

M. Nov.
1726.

EX utero potissimum foemina diversa vehementiaque mala nasci, & experientia notum, & a Græciæ Medico Hippocrate animadvertum est. Perdiuturnæ, & haud vulgaris, nervorum in splendidissima muliere distensionis nervorum observationem cum Luca Scroëckio Celeberrimo, hoc tempore, Augustæ Vindelicorum Medico, & A. C. N. C. meritissimo Præside hos ante quatuor annos communicavi. In præsentia insolitæ, pene incredibilis, &, nisi me amor negotii suscepti fallit, in omni medicinæ parentum cum Græcorum tum Arabum memoria inauditæ ex vulva ægritudinis historiam legentibus sisto.

Iudæa virgo duos & viginti annos nata, cui Riccam parentes *Caravalei* cognominati dixere nomen, hos ante quinque & viginti menses, in morbum incidit suppressæ ex tristibus animi affectionibus menstruæ purgationis: inde primum angina; tum, interposito aliquo tempore, rheumatismo; deinde sinistri lateris dolore per hyemem

cor-

correpta sanguinis ex brachiis pedibusque detractio, aliisque idoneis medicamentis ab spectato, qui assidebat, Medico Moyse Coheno præscriptis curatur. Manente vitio mensium suppressionis cum vehementi ventris intentione, mœroreque cum crebro, difficilique spiritu concitatarum arteriarum pulsibus, continentibusque musculorum ad brachia pertinentium exiguis tremoribus, continuante, medicamenta mulieribus hysterico morbo fere exanimatis præberi solita, & nominatim remedium, cui *uterino elixiri* nomen autor Crollius imposuit, data. Sub eo auxilio singultus, & cuiusquemodi generis sive solidam, sive fluidam formam habentium alimentorum vomitus exortus est: adversus quem medicamentorum, tum opium recipientium, tum ventriculum confirman- tium, compositionibus frustra tentatis, quem modo lau- dabam Medicus, diffusus reliquis præfidiis, ad gelidas ex aqua, in qua modo subacidorum ceraforum, modo fragorum, modo limoniorum malorum succus cum modica portione solutus erat, potiones prudenter confugit: quibus, in stomachi resolutione vomitum neque calidis neque anodynis remediis cedentem coniunctum habente, a me quoque prospero successu non semel adhibitis, consecutus quidem est, ut ægra & continere, & coquere cibos posset, non tamen ut reliqua mala se remitterent: ad quæ ineunte Autumno Anni *MDCCXXIV* rerum omnium, sive cibi, sive potus, sive medicamenti speciem obtinentium, insigne fastidium, urinæ suppressio, inexpugnabilisque alvi adstrictio accessere. Eo tempore mollientia olea, aliaque medicamenta ducendæ alvi causa in anum per clysterem infundebantur, quæ, quum repellerentur, de-

speratis pene rebus, nutrientia quoque iuscula ex capo, gallinaceisve pullis, recentium ovorum vitellos intus solutos habentia, in ultima intestina (ex quibus etiam lactea vasa oriri, non esse negandum summus nostræ ætatis Professor Io. B. Morgagnus apprime animadvertit) semel atque iterum die agere tentatum est. Verum enimvero, sive postremo coli tractu, & fortasse continuati etiam recti magna parte, a præpollente inclusorum flatuum vi reliqua intestina, & peritonæum vehementius distendente (quod verosimilius hoc in casu mihi videtur) ad dextrum sinistrumve infimi ventris cavæ latus compulsis, atque ad id arcte oppressis: Sive illis ipsis intestinorum partibus, ob valentissimas nervorum in thoracis, ac ventris imi penitiora pertinentium, quibus ægra in præsentia quoque vexatur, distentiones, maximopere contractis, renitentibusque: sive hac, inquam, sive illa de causa, neque reficientia, quæ dicebam, clysmata admitti quibant. Ita affectam, ita conflictatam nulla edendi, aut bibendi, nulla meiendi, nulla deiiciendi neque proximo hyeme, neque subsequente vere cupido cepit: Sorbilia ova, calida tepentiaque iuscula, cuiusquemodi generis vinum, gelidæ potiones etiam ex *ciocolatte*, (sic enim a nostratibus appellatur) lac mistum cum saccharo vel frigidissimum, hæc, inquam, atque horum similia, aut ex toto in fastidio erant, aut reficiendarum virium causa, non ex appetitu, interdum assumta protinus reddebantur. Anni tempore verno acutissimo sinistri lateris doloreprehenditur: Alii Medici ad consilium adhibiti sanguinem ad eum levandum, pondo circiter unciarum trium, ex respondente pede iacenti, morbo, longissimaque abstinencia

cia

tia confectæ mittere non verentur : ipso dolore per istiusmodi anceps auxilii genus , sub quo vires haud multum admodum labefactari visæ sunt , sublato, sanguinis paulum tussi extunditur. Post hæc singultus , seu potius quidam vomendi conatus, per quem humor colore subobscuro, odoreque urinæ ad longum tempus in ischuria retentæ persimilis sæpius evomebatur, subortus est : qui sine medicamentis brevi postea finivit. Subsequenti æstate , sive raptim mutatione morbi aliqua ex parte in contrarium facta , sive blandis assidentis matris alia atque alia pro cibo & potione assidue offerentis hortatibus, sollicitationibusque tandem decumbens filia commota modo tenuem ex citreis malis aquam, modo liquorem ex subacidorum cerasorum cum mele, ac vini spiritu fermentato succo (Wisnâ vulgo hic appellatur) ad cochlearia aliquot haurire cœpit : atque intra hos quidem liquores substitit, donec ad medium circiter Octobrem anni proxime exacti, quo constrictorio ventriculi motu sursum versus cum atrifere humoris vomitu, reverso, nec cibos, nec potiones, nec remedia devorare poterat, perventum est. Quum eam tum una cum curante Medico viderem, uti memoratum ventriculi motum remedio liquidi Helmontii *Laudani* ex stillatitia citrei mali aqua septem, octove guttarum numero potui dato cohibere, & pergelidam ex capi succo citrei mali odore imbuto, certa ratione cum saccharo misto sorbitione pro cibo offerre tentarent, suasi. Sed ne hæc quidem tenuit. Nihilominus tamen intra octo dies, quibus mente iam turbata, brachia & crura inæqualiter dispergens, seque huc illuc violenter interdum convertens, modo obdormire, modo

tristibus veluti exterrita imaginibus eiulare videbatur, ventriculus ex toto conquievit, atque ita quidem, ut & aquam & liquorem, de quibus mentionem feci, continere octavo die posset: post quod tempus mentis quoque turbatio, terroresque remoti sunt, & ventris intentio, tametsi interim neque feces, neque urina emittebantur, paulum imminui visa est. Silentio hic præterire non decet: duobus circiter mensibus antequam huius admirandi morbi historiam perscribere inciperem, ægram, & de quo supra scripsi, lateris dolore denuo exceptam, & ab eo, sanguine ad duas tresve uncias ex brachio dolenti lateri respondente extracto cito liberatam esse. Verum hoc illud est præcipue scitu necessarium: ipsius ægræ, quæ a Septembri Mense MDCCXXIV. in præsens tempus vitam sine omni fere potu transegit, corpus neque ex toto languere, neque notabiliter emarcescere: quanquam insignis feri sanguine tincti copia cum ex pede, tum ex brachio summæ quoque cutis lymphæ ductibus scalpello in sanguine mittendo laceratis, cicatriculisque (quarum ea quæ in lævo brachio existit in profundum ulcus versa est) tardissime forsitan ob malum universi corporis habitum confirmatis quotidie longissimum tempus manavit.

Facies in præsentiarum quoque colore est quidem fere naturali, at vero eam una cum reliquo corpore neque in speciem, quemadmodum ante hos tres menses videbatur (distendente scilicet tunc aere ex omnium pene corporis capillarium arteriarum cruore, animalium spirituum cuneolis, quam sanis hominibus esse debent, acutioribus pulso, atque muscularium fibrarum interstitiis, invisibilibusque cutis foraminibus intercluto) naturaliter ali,
cutis

cutis cum subiectis musculis ubique locorum præterquam in abdomine aliquantum collapsa clave ostendit. Cuncti sensus, si unum tactum, qui una cum motu in dextro femine & crure hebes est, excipias, vigent; vigor animi nequaquam obtusus; supinum corpus semper, viribus musculorum affectis, iacet; ventriculus, præcordiaque cum reliqui imi ventris magna parte, & vehementer intenta sunt, & ad tactum leviter sonant; persistit quidem menstruorum, & urinæ suppressio: veruntamen nulla omnino urinariæ vesicæ turgescencia manu percipitur; venter ne spiritum quidem per inferiores partes reddit; neque cibi, neque potus cupiditas ne in præsentia quidem est: attamen cremoris ex contusis dulcibus amygdalis aqua ex citreo malo expressi paulum, sic affectam a matre assidue rogitatam, sollicitatamque ante hos undecim menses per diem noctemque degustare cœpisse, idque nunc quoque continuare, certissimum est: nullus quidem sudor præterquam in palmis manuum, pedumque plantis neque interdiu, neque noctu oritur: veruntamen oleagineam materiam ex sebaceis universæ ferme cutis glandulis erumpere, cum ex totius pene corporis graveolentia, tum præcipue ex unctuosa illa sorditie, quam suis indusiis inhærescere, ægra hætenus se observasse mihi retulit, certo constat: nullus fere ex naribus mucus, nulla pene ex ore saliva emittitur: difficillimus somnus est; corripit interdum quidam frigoris sensus; sæpe ventriculi, sæpius capitis dolor torquet; brachiorum, manuumque musculi in dextra præcipue parte continenter intremunt, crebra difficilisque respiratio est; coagitantur semper cum corde arteriæ; tristitia sæpe infestat, interdum tamen hilaritas

est: nutrientia autem, de quibus supra scripsi, clysmata in rectum intestinum indita ut protinus repelluntur, sic cuiusquomodi generis & alimenta & medicamenta vi deglutita extemplo in præsentem quoque redduntur. Veruntamen illud ignorare non oportet: Acidulæ aquæ ex fonte *Lælio Recobarii* importatæ cyathum unum alterumve mense circiter antequam huic historiæ finem imponerem potui datum, ventriculum retinuisse, eoque tempore urinam obscuri coloris exigua ægram (quod tamen & proxime præterito anno, quo ne guttam quidem illius mineralis aquæ assumpsit, non semel accidit) quantitate reddidisse.

Quod genus, quæ natura, per quas causas factus & auctus hic morbus sit, ad ea, quæ hæctenus retuli acriter intendentibus animum, haud difficulter admodum, uti opinor, innotescet. Lotii, eorum, quæ per alvum excedere consueverunt, sudoris, menstruarumque purgationum suppressio; narium mucii, salivæ insigniter imminuta secretio: hæc, inquam, omnia, incomprimentium morborum numerum, eorum nimirum, qui ob fluidorum in nostris corporibus, aut ex toto deficientibus, aut notabiliter decrefcentibus cooriuntur separationibus, referendum esse, præclare demonstrant: cepisse vero a tristitia, & suppressis mensibus, artuum tremores, agitationes artuum, crebram, difficilemque respirationem, intentionem ventris; insolitam abstinentiam, mentis motionem eiusmodi malis intervenisse; exanimari interdum ægram inde ad se redire; odoribus cum suavibus, tam fœdis lædi, queri modo de corde, modo de ventriculo, sæpe de capite; modo tristem, modo hilarem esse; interdum sopor-

re premi, plerumque vigilare; dextro femine, dextroque crure interdumque resolutam videri, inde se dextrorsum, sinistrorsumque violenter convertere; varios appositos cibos potionesque summo fastidio habere: hæc, inquam, atque his similia, virginem nostram vehementissime ex vulva laborare haud obscure declarant. Quoad abditas, continentisque huiusmodi morbi causas attinet: invisibilis fluidi ex cerebro, ac cerebello euntis, redeuntisque particulas in vehementes, dissonosque reditus motus summa mœstitia a primordiis morbi una cum nervis tum in exteriora, tum in penitiora corporis, & in uterum præcipue finitimasque partes pertinentibus repente actas esse coniecerim. Incremento deinde paulatim morbo, continuantibus nerveorum filamentorum per thoracem, ac ventrem discurrentium contractionibus separationum, excretionumque fluidorum naturales leges irrecepisse præcipites donec ad omnium pene, qui in nostro corpore sunt humorum suppressiones, imminutasve secretiones perventum sit. Ad hæc ingenti aerearum particularum copia, animantium spirituum impetu, acredineque (quæ longam abstinentiam sequi consuevit) ex articularum ad ventriculum, intestina, iecur, splenem, uterum, peritonæum spectantium, arteriis reliqui corporis ob vehementes, in quas a morbi utique primordiis continenter aguntur, distractiones forsitan laxiorum: ex harum, inquam articularum sanguine expulsa, inque earum partium sinus ac caveas nequaquam resistentes compulsæ, universum pene ventrem vehementer intentum, & ventriculum ad eam distentionem redactam esse, ut motiones ad famem excitandam, retinendos, concoquendosque cibos per

pernecessarios iam obire non possit. Porro ut ex memoratorum spirituum in cor, arterias, thoracis, aliarumque partium musculos influxibus, quam naturaliter esse debeat, celerioribus, velociore cordis & arteriarum motus, crebram difficilemque respirationem, musculorum tremores, continentesque pene vigiliis enatas crediderim: Sic inæquales vehementesque membrorum, quas una cum temporariis mentis commotionibus ægram non semel hoc in morbo excepisse ante retuli, coagitationes ex dissimilibus, præcipitibusque illorum ipsorum spirituum motibus exortas esse, existimarem. Sed illud potissimum interrogari me a legentibus posse sentio: qui fieri queat, ut iuvenis hæc, & tamdiu sine ullo omnino alimento vixerit, & solo liquoris, de de quo supra memoratum est, potu vitam tot menses traxerit, in præsentia etiam sustineatur? Quibus pro ingenii mei modulo respondeo: eam non multo secus ac viperæ in vitreis vasculis vere, æstate, atque autumnoinclusæ, seu potius terrestres cochleæ partem autumnii, totamque hyemem in opertis testaceis tabernaculis sine omni plane esca viventes vitam trahere, verisimillimum esse. Namque & continuo iacet in lectulo, & visibilia humorum pene nihil excernit. Manare vero exigua corpuscula, tum per invisibilia cutis foramina, tum per os ex pulmonibus, ut omnino negare non ausim, sic eorum corpusculorum, speciem vaporum habentium, haud multum admodum hoc in morbo extra corpus ferri: ex summæ tabis, sudoris in universa ferme cute absentia maxime probabile censeo. Quandoquidem itaque iacens haud insigniter tenuatur, paulum admodum movetur, & visi-

visibilem quidem humorum fere nihil, invisibilem vero paucillum reddit: Manifestum est, nec sanguinem, nec humores maximopere absorberi; ac propterea neque villos, membranas, nervos, sanguinis aliorumque liquorum ductus, musculosque constituentes, mobilium particularum ex illis ipsis villis manare, atque per aera dispergi iugiter conantium eruptione insigniter exinaniri, seu in talem resolvi; atqui assumendi cibi necessitas in universis animantium generibus ex villorum memoratas partes compingentium, continua inanitione, notabilive continenter decedentium particularum naturales operationes sive animales motus subsequi solita excretionem dependet: Iuvenem igitur de qua hactenus retuli, in qua fortasse oleaginosi quoque humoris in sebaceis universae cutis glandulis, Celeberrimo animadvertente Morgagno, separari soliti aucta praeter naturam crassities insensibilem (quemadmodum Medici loquuntur) transpirationem insigniter minuit, & ieiunium septem amplius menses sustulisse, & paucio fluido alimento etiam nunc sustineri, sine aliquo commento prodigii edisseri potest.

Ratione haud multum admodum dissimili, quemadmodum praestantissima virgo ex Patricia Gente Foscarena Patavii inpraesentiarum in cœnobio D. Marci commorans, triennem ferme (quod a viris amplissimis eius consanguineis accepi) tulerit abstinentiam, aliaque virgines, quae referentibus Fr. Citesio, eruditissimoque Fortunio Liceto, plures annos nihil plane assumpsere, vitam traxerint, per causas mechanicis similes exponi posse, mihi videtur; nedum enodate explicari complurium dierum, mensumve abstinentiae a Ioh. Quercetano, R. Do-

B b b

donzo

378 DE MORBO VTERI HISTORIA.

donæo, Valeſco, Tharautano, Henrico Sampſonio, aliisque obſervatæ.

Ex propoſita hiſtoria, aliisque conſimilibus a modo allegatis rei medicæ ſcriptoribus perſcriptis primum omnium conſtat, haud eſſe fabulam: Homines interdum mulieresque præfertim, quas uterus diutius male habet, ab cuiusquemodi generis cibis & potionibus in adverſa valetudine abſtinentes, non duos tantummodo, tres pluresve dies, quemadmodum credebat Hippocrates, verum etiam complures meſes annosque vitam ducere poſſe. Hoc illud deinde colligitur, noſtræ ægræ corpus (mirum dictu) pro ratione longitudinis abſtinentiæ haudquaquam eſſe tenuatum, ſecus ac in puellis a Citeſio, Quercetano, & Sampſonio productis, in quibus flavescens abdomen cum areſcentibus incluſis viſceribus longiſſimo ieiunio extenuatum ad ſpinam collapſum obſervabatur. Verumtamen de virgine quadam Patavina noſtræ quod ad abſtinentiæ tempus, aliaque morbi ſymptomata ſpectat haud multum admodum diſſimili ex Alexandro Vigontia Medico narrans ante laudatus Licetus, nequaquam eam tabidam, ſed vivido colore, & in ſpeciem fanæ extitiſſe ait. Venetiis Quarto Kalendas Quintiles C1515CCXXVI.

Vid. Hippocr. Lib. de Flatibus, & M. C. N. C. Deour. I. A. 1111 & Fort. Licet. Libr. de iis, qui diu vivunt ſine aimento.

OB-

OBSERVATIONES ANATOMICAE.

I.

Globuli cavi, pellucidi, qui unionum forma visceribus appensi sunt, quoad eorum producendi modum a Viris eruditis excogitatum, nova hodie difficultate laborare videntur: Nam hydatides hodiè ostenduntur, quæ non in superficie solummodo sed in profundo partium generatæ sunt, uti autopsya testatum facit. Hæ in cavitate quadam cuiuslibet visceris aggregatæ, serum continentes purum, pedunculis modo annexæ modo liberæ iacent. vid. *Ruyfchius. Courtil. Journ. des Sc. An. 1697. fol. 442. 457. Histor. Reg. Acad. Paris. fol. 454. Mem. de l'Acad. Roi. des Sc. A. 1704.* Iam manifestum est in hacce specie notionem glandularum ac lymphæductuum paulo infelicius applicari, sicuti rationes tum ex partium structura tum ex obstructionibus artificialibus desumptæ demonstrant. Omnium vero gravissima difficultas illa est, quæ in certa specie hydatidum nobis oblata est, cuius nullum exemplum forte existat. Hæ magno numero & sub varia magnitudine amplo sacco inclusæ sunt, omni nexu solutæ & liberæ, nullo pediculo præditæ nec sibi invicem cohærentes, & (quod attentione dignissimum est) in sua cavitate alias vesiculas minores, quæ similiter cavæ aliisque vesiculis exiguis scætæ sunt, continentes. De hisce seqq. historia legi meretur.

Tumores vesiculosi.

Exeunte Anno 1726. in hepate viri fumo carbonum extincti, cuius reliqua viscera nullo sensibili vicio

rupta erant, prope fundum vesiculæ felleæ magnus eminebat tumor globosus, cuius alterum hæmisphærium substantiæ hepatis firmiter incorporatum erat. Post eius separationem, antequam incideretur, lanci impositus est, isque unam libram & quatuor drachmas pendebat, ex cuius proinde mollitie & albo colore magnam humoris quantitatem in eo collectam esse visum est. Incisione facta rem secus se habere humoribusque vacuum tumorem esse admirati sumus. Tota eius cavitas ab imo usque ad summum incredibili numero vesicularum compressarum & pelliculas uvarum vacuas mentientium infarcta erat, hancque vesicularum congeriem unus sacculus globosus cute admodum dura & crassa eaque exterius lævi & polita, interius vero aspera constans, septemque drachmas pendens continebat. Eo aperto odore omni vacuum deprehendimus, etsi vesiculæ colorem viridescentem obtinerent. Quamquam earum prodigiosa quantitas esset, sui omnes iuris hoc est liberæ & solutæ absque ulla sive cum sacco sive inter se invicem connexionem, mutuo tantum sese exosculantes & comprimentes iacebant, verbo, exactissime pelliculas uvarum vacuas tum figura tum colore herbaceo seu viridescente æmulabantur. Substantia pellicularum minime fibrosa seu organica, sed concretum quoddam gelatinosum esse videbatur. Quoad magnitudinem, sub triplici differentia oblatæ sunt nempe maiorum, minorum & minutissimarum, quæ invicem permixtæ acervo eodem comprehendebantur: Ovum nonnullæ columbinum, aliæ fabam, aliæ denique pisum æquabant.

Exteriore harum vesicularum dispositione sic perlustrata

strata ad interioris quoque cavitatis contemplationem devenire necesse fuit, successu minime pœnitendo, siquidem in phænomeni extraordinarii & forte inauditi cognitionem præter spem incidimus. Postquam vesicularum nonnullarum expansio seu insufflatio immisso aere facta est lucique hæ exponerentur, aliquid in earum cavo quod flatu sese movebat, includi nobis visum est: Vesiculis igitur apertis, nihil aliud quam minores vesiculæ ab omni nexu liberæ, inæqualis magnitudinis, minime inter se cohærentes, in vacuo fluitantes, numero ternario quaternariove, magna cum lætitia spectatorum oblatae sunt. Cæterum tum colore, tum figura, tum substantia, a contigente vesicula quæ ovarii vices tenebat, haud ab similes erant. Postremo ne quicquam intactum relinqueretur, cupido incessit eas omnes vesiculas toto acervo comprehensas enumerandi earumque summam extrahendi. Itaque sine respectu magnitudinis, portio harum vesicularum permixtarum usque ad unius drachmæ pondus lanci imposita est. Quæ numeratae præter minores earum cavo contentas septuagenarium numerum cum uno aut altero completum, efficiebant: Ex quo vesicularum summa, quæ quidem ultra 9000. ascendit, facile colligi potest.

Tab. 12.
Fig. 4.

Hoc certe phænomenum etsi solutu difficile, ex bullis humorum vitiosorum magis quam fragmentis organicarum partium originem suam trahere verosimile est,

II.

Eousque quorundam hominum stultitia excedit, ut *Exsplicii*, hoc est, sine liene vivere pro summo bono ali-

*Ruptio
Lienis.*

B b b 3

quan-

quando teneant. Idcirco in generis humani perniciem quædam operatio, transfusoria funestior inventa est quam *Excisionem lienis* vocant. Culter ligneus super hypochondrium applicatur, quem una manu suspensum tenet artifex, deinde malleum altera manuprehendit, ac cultrum magna vi, unaque cum ipso lienem, uti fabulatur, percutit. Quo facinore perpetrato, non solum disruptionem lienis ab ictu factam esse impudenter affirmat, sed talia etiam exhibet remedia quæ vim habent totam massam lienis dissolvendi eamque sic comminutam modo per vomitum modo per alvum vel quacunque via alia expellendi. De hacce invisibili excisione lienis vid. *Journ. des Savans* 1672. Quum in hoc negotio non de ære solummodo, sed de vita hominum certo certius agitur, periculum saltem indicandum est: Etsi enim tales impostores disruptionem lienis neque intendant neque forte possibilem aut noxiam esse putent, lienum tamen ex levi causa diffractorum mortemque inferentium exempla contrarium demonstrant, laterisque percussiones periculo plenas evidenter significant. In hunc modum Vir iuvenis, pugnis cum altero sese exercens in hac urbe subito mortuus est: Vix enim cultro incisus abdominis tegumentis quæ vehementer distenta erant, tanta copia cruoris exiit, ut pelles omnes præsentis vix sufficerent, unde venter statim detumuit; Lienem in medio ruptum, ea parte qua stomacho obversus est, hocque proinde vulnere hæmorrhagiam excitatam fuisse perspicue observavimus.

III.

Hæmorrhagia omenti.

Sub eodem tempore, percussione Abdominis infelicem exitum alia dissectio foeminae a milite percussæ & subito mor-

mortuæ nobis exposuit. Postquam enim totum abdomen sanguine effuso oppletum esset, ex omenti hæmorrhagia hanc occubuisse ex hoc uno constabat, quia inter folia omenti parvi grumuli intercepti & inclusi erant. Cæterum in rarissima hac læsione, illud forte in considerationem trahendum est, quod præter naturæ institutum, omentum fundo uteri connatum esset. vid. *Ruyseb. Obs. Anat. Chirurg.* LXIII. & LXXXIII.

IV.

Inter mortes subitas hominum insolens exemplum hæmorrhagiæ occultæ Stomachi se sistit, non ea de causa lethalis, quia sanguis extra nimium in modum prorumpit; sed quia stomachus citius sanguinis copia opprimitur & suffocatur quam eius sive per os sive per intestina effluxus excretionem fieri potest. Eo autem modo homo sexagenarius enecatus est improviso absque ulla suspitione causæ in stomacho latentis, hoc est, sine vomitu, sine deiectionibus cruentis. Tota cavitas ventriculi uno prægrandi & formam eius referente grumo cum in modum obfessa & oppleta erat, ut spatium nullum vacuum inter pylorum & sinistrum orificium relinqueretur. Cæterum prædictam massam nihil aliud esse quam purum sanguinis grumum absque alterius substantiæ permixtione tum visu tum experimento cognovimus. In stomacho mirum dictu! perfectæ integritatis: In Liene contra putredinis notæ deprehensæ sunt.

V.

Notas seu impressiones fulminis tam externas quam internas in variis regionibus annotatas, forte non omnino contemnere licet, ut natura huius stupendi phænomeni paulo

*Notæ seu
impressiones
fulminis.*

386 OBSERVATIONES ANATOMICAE.

clarius elucescat: Abdominis & membri genitalis inflatio: Cutis lateris sinistri in durum corium igne torrefactum commutata, in reliquis partibus purpurea, in collo rubra: Sanguinis ex aure dextra stillicidium: In summo vertice vulnus lacerum absque cranii læsione, non penetrans, 2. lineas longum & $\frac{1}{2}$ latum, externe conspectui oblata sunt. Interne præter copiam sanguinis insolitam in cranii apertione erumpentem, sanguis in duræ matris sinus instar aquæ fluidus, item in ventriculis & basi cerebri, inque vertebrarum theca seri magna copia inclusa apparuit. Pectore aperto uterque Pulmo mediocriter collapsus nigricansque; Cordis ventriculi, auriculæ, vasaque communia sanguine vacua. Separatis denique abdominis tegumentis intestina una cum stomacho præ inflatione magno impetu proiecta sunt. Hepar, Lien ac Renes vitio carebant: Sed vesica tum fellea tum urinaria vacuæ & collapsæ, cum ureteribus retentione urinæ valde distentis.

Hæc in viro super fluvium navigante fulmineque perempto observata fuere.



CLAS-

CLASSIS
TERTIA
CONTINENS
HISTORICA
et
CRITICA.



DE ORIGINE ET PRISCIS SEDI-
BVS SCYTHARVM.

Auctore

Theophilo Sigefrido Bayero
Regiomontano.



Vomnes intelligant iam inde a principio, *M. Mart*
quae mea de Scythicis gentibus opinio *1726.*
fit, ita praedico, me nequaquam ex ea-
rum stirpe Sarmaticas, Rufficas & Scla-
uonicas gentes, aut Hunnos veteres no-
strosque Hungaros, aut denique Tattaricos populos re-
petere, sed Lituanos & veteres Prussiae incolas, (1) tum

Ccc 2

Cu-

(1) *Non tui inique ea, quae eruditi viri in Memoriis
Treuultin's in me iecerunt, cum nostram de Prussicis origi-
nibus sententiam attingerent : spero enim eos pro aequitate
sua, plus mihi, cognita causa, concessuros esse.*

Curones, Liuones, Aestios, Fennos, & Lappones, & paucos alios. Ista tam directa confessio obuersabitur animis haec nostra legentium; donec in progressu id a nobis paullatim constitutum reperient. Cum Ruthenos non patior supposititiam Scytharum esse prolem, iam fructum eum refero, quod turbari stirpes & inferi nobilissimam per se gentem alienis populis non sino. Simul et illud operae pretium facio, quod de eâ regione, quae a Scythico nomine antiquitus nobilitata fuit, nunc accessio ingentis Russorum imperii est, exquirendo veterem memoriam elicio & quasi exprimo, quod aut verum sit, aut ad veritatem quam proxime aecedat, ne dicam, illis me adiumento esse, qui in edisserendis Hungarorum, Polonorum, Tattarorum, Turcarum, aliorumque populorum originibus, ad Scythas veluti tempestate delati, tamquam ad saxum adhaerescunt.

Nam, qui ante nos de Scythicis rebus commentati sunt, vno insigni maxime errore implicati constrictique fuerunt, a quo nisi prouidemus, oleum & operam in restituenda veteri gentis illius memoria perdimus, multorumque aliorum populorum origines aut proxima originibus coinquinamus. Multos & magnos viros citare possem, ni fatius sit, eorum nomina, ex quibus quotidie in aliis proficimus, in hac aberratione silentio obtegere, quam quasi pompam hac praeterducere. Extendunt autem Scythicum nomen vastissimis terrarum spatiis ab Istri propemodum fontibus & Vistula Balticoque mari, iuxta Oceanum septentrionalem & Pontum Euxinum Caspiumque mare, vsque ad extremum orientem. Eo in errore vetusti quoque scriptores praeluserunt, nostrisque fue-

fuere offensioni. Primus eorum de quibus constat, Ephorus in quarto historiarum libro, orbem terrarum inter Scythas, Indos, Aethiopus & Celtas diuisit. Fragmentum eius loci Cosmas Indicopleustes in Topographia christiana conseruauit. (2) Non sum nescius, quod a Diodoro Siculo (3) obiecta est Isocrateo illi Ephoro veri negligentia & quidam quasi stupor: sed quam lenissime pronounciari velim, postquam historiae eius interciderunt, ut iudicari non possit. Video igitur Ephorum, cum locorum positus per certa capita distribuere & explicare constitueret, insigniorum nomina gentium vastioribus spatiis adhibuisse, nulla mala fraude, at successu infelici. Nam Ephoro quoquo modo dicta, pro exploratis habebant Graeci plerique & Romani, ita gliscebatur error posteritate. Igitur tot tamque diuersae stirpis gentes non modo intra communem quandam regionem definitae, vnum omnes Scytharum nomen his auctoribus subierunt, sed etiam ab illa regionis appellatione in eandem nationem sunt conflatae. Sic Cimmericorum res cum Scythicis, Scytharum cum Sarmaticis, Russicis, Hunnicis, Tattaricis commiscuntur. Sunt qui deinceps non modo regiones, sed etiam tempora confundunt. Nam quaecumque regionum aut gentium illarum nomina apud omnis aevi scriptores reperiunt, ea ad describendam geographiam adhibent, tamquam aleatores tesseras, quibus temere in tabulam ja-

Ccc 3

ctis

(2) f. 148. (3) f. 26. ed. *Steph* ἀλλ' ἐκ ἂν τις παρ' ΕΦόρω ζητήσμεν ἐκ παντός τρόπου τάχειβες, ὁρῶν αὐτὸν ἐν πολλοῖς ὀλιγωρηκότα τῆς ἀληθείας. *Apud Ephorum accuratationem consummatam frustra quis quaesierit, qui videat in multis eum parvi pendisse veritatem.*

etis, quaecumque fors exit, situm illarum definiat, τῆς
 εἰς, ἢ τῆς κῦβοι, quae quidem secum, si verum spe-
 ctant, commentata & meditata habere debebant. No-
 bis adhibenda diligentia est, ne noster labor in easdem
 reprehensiones iure meritoque incurrat, neque quis nos de-
 bito testimonio priuet, nihil nos ex vano haurire voluisse &
 inexplorata non edidisse pro compertis.

Scythas plerique a Magogo Iapeti filio ortos refe-
 runt, quorum in numero Samuel Bochartus facile princeps
 est. In ea opinione nemo est antiquior Iosepho, (4)
 qui quidem Scythas nomine cieat. Haussisse autem vide-
 tur ex Ezechiele (5) qui terram Magog ad septemtrionem
 Caucasi inter Tanaim & Volgam ponit. At idem il-
 le cum populum Scythicum *Gog in terra Magog* adpel-
 lat, satis perspicue ostendit, alium populum Magog ante
 Scytharum irruptionem illa loca incoluisse, quae adhuc
 priscum nomen apud gentes Asiaticas retinuerint. Tan-
 tum igitur abest, ut Ezechiele auctore Scythas a Mago-
 go repeti conueniat, ut is etiam adversarius huic opi-
 nioni sit. Alii Turcas quoque & Tattaros Magogicae stir-
 pi adserunt, quos quasi ab aboriginibus suis Ezechiel *Ma-
 gog* nuncuparit. Itaque de primis Scytharum paren-
 tibus & auctoribus non liquere puto. Hoc tamen mihi
 visus sum ex argumentis minime vanis coniectura conse-
 qui, Scytharum maiores ex Armenia descendisse ad au-
 strum atque tum orientem petiisse hibernum, donec ad se-
 ptemtrionem Caspii maris, a tergo vrgentibus aliis fami-
 liis,

(4) *Antiq. Iud. Lib. I. c. 7.* (5) *c. xxxviii.*
 xxxix.

liis, concesserunt. Ex eo tempore ad septentrionem maris Caspii & ad Volgam eos degisse reperio, iuxta Massagetas & Issedonas. Scythae ipsi se mille ante Darii expeditionem annis ortos tradidere apud Herodotum. (6) Interferitur huic loco a Scythis fabula: Targitaum Scytharum patrem Ioue & Borysthenis fluminis filia natum, tres habuisse filios. Nomina eorum hæc sunt: Leipoxais, Arpoxais & minimus natu Colaxais. Colaxais imperium caelesti prodigio adeptus est, a quo inter Scythas nobilissima domus οἱ βασιλῆες οἱ καλέονται Παραλάται *reges, qui dicuntur Paralatae*: a Leipoxai Αυχάται, ab Arpoxai, Κατίαι καὶ Τράσπιδες. Colaxais rursum in tres diuisit filios gentem. Vniuersi se Σκολότας τῆ βασιλῆος ἐπωνυμίην *Scolotos, quod regum cognomentum est*, adpellarunt. *Scythae* sunt vocati tantummodo a Graecis, vt diserte monet Herodotus. Inde autem manauit vocabulum, quod, cum Graeci, qui inter eos in coloniis Ponticis degebant, admirabilem eorum in sagittando artem & industriam cernerent, sagittariosque ab iis *Scythas* dici audirent, id nominis toti genti attribuerunt. Et manet adhuc vocabulum in Scythicae originis linguis. Hodie Lituani *Szauti iaculari & iaculatorem* significat, a quo est apud Constantinum Szyruidum *Szaidu, arcu, sagittis iaculor & Szaukie sagitta, spiculum*, Fennis & Laponibus sagittarius est *Skytta & Kytta* seu *Kyt*, sic Curo-nibus & Aestiis & Laponibus. Veteribus denique Prutenis, vt Praetorius in orbe Gothico nos docet, fuit *Szytbi*. Manauit etiam in aliorum & diuersae stirpis po-
pu-

(6) L. IV. c. 7. ed. Gron.

pulorum linguas. Et apud Graecos Scytharum nomen per monumenta euasit célebrius, quam Scolotorum, verum quidem, sed obscurum nomen. Mansit tamen Scolotorum nomen apud Athenienses in ludibrio. Nam publici ministri & vigiles Athenis dicti sunt *Τολόται*, iidem & *Σκύθαι* & *Τοξόται*. Tolotae a Scolotis deprauatum. Scythae iidem, quod sagittarii essent & in medio foro habitarent sub pellibus. Sic apud Romanos per contemptum a Phrygibus, Dacis, Syris, Getis, serui nomina habuere.

Quantum in hac Scytharum narratione apud Herodotum verum esse videatur, quaerendum nobis duco. Ego vero eiusmodi veteres gentium memorias contemnere non soleo. Forte, quod a Ioue & Borysthenide Herodotus interpretatus est Targitaum prognatum fuisse, id eo factum, quod pater ei Pappaeus aliquis (Pappaeum autem summum deum dixere Scythae, Iouem suum Herodotus putauit) & mater e Cimmeriis ad Borysthenem, regia domo oriunda esset. Sub Targitao Scythae in vnum corpus & rempublicam coaluere, diuisi postea in tres eius filios totidemque tribus. Plerique populi a constituta primum republica aut insigni aliqua conuersione originem repetierunt. Chaldaei Callistheni de vetustate eorum sciscitanti, mille nongentorum trium annorum summam edidere, teste Porphyrio apud Simplicium de caelo. Ex quo colligitur, Chaldaeos centum et quindecim annis diluuium posteriorem gentis suae originem posuisse, ab eo tempore cum reipublicae formam subierunt. Ergo cum Scythae mille annis ante Darii expeditionem se ortos tradunt, initium reipublicae suae nobis apperiant.

riunt. Si expeditionem Darii ante annum periodi Iulianae 4200 collocamus, historia Scythica caput tollit circiter annum 3200, siue annis 1514. ante epocham Dionysianam, extremo tempore seruitutis Israelitarum in Aegypto.

De prisca autem Scytharum regione Herodotus (7) ita acceperat: Scythas, Nomadas fuisse, et in tuguriis passim circum opportuna pascuis loca trans Araxem coluisse, inde pulsos a Massagetis bellum intulisse Cimmericis super australi mari seu Ponto Euxino habitantibus. His veluti parum consonantia ex Arimaspeis Aristeae Proconnesii addit: Arimaspos pepulisse Issedonas, Issedonas a tergo vrsisse Scythas, Scythas, non, nisi cedendo ab infesta Issedonum vicinitate se defendere potuisse, idcirco inuasisse Cimmericorum regiones. Hic vero Herodotus: (7) ὅδε ἕτος συμφέρεται περὶ τῆς χώρας ταύτης Σκύθησι ita nec Aristeae cum Scythis conuenit in regione, quam primitus incoluerint, constituenda. In quo autem, Herodote, Aristeas Scythaeque dissentiunt? Scythae, se primitus ultra Araxem coluisse tradunt: at Aristeas iuxta Issedonas, hoc est, ad orientem Caspii maris. Ita videlicet est. Araxem quem Scythae dicerent, Herodotus ignorauit, putauitque, illum esse in Media ἐκ Μαρηνῶν, (8) quae ad meridiem vicina Armenis pronincia est. (9) Is autem Araxes longissime utique ab Issedonibus & oriente distat. Sed non vidit Herodotus, Scythas ab hoc flumine non potuisse se in Cimmericorum regiones infundere. Quae enim illa fuit discursatio, si Scythae per

D d d

Me-

(7) L. IV. c. 13. (8) L. I. c. 202. seu potius Μαρηνῶν ut Gronouius recte edidit. (9) L. V. c. 48

Medicas prouincias patefacto itinere, traiectoque Araxe, in Cimmericorum terras irrupissent, atque inde persequentes hostium agmen, fallentibus fugientium vestigiis, per errorem viae in Mediam, eadem qua iuerant, reuersi, ex inopinato incidissent. Hoc ne obiiceretur, timuisse videtur Herodotus. (10) Igitur regionem ab Istro ad Cercinitin vocat *veterem Scythiam*, tamquam ex ea regione Scytharum maiores per Bosporum Thracicum in Asiam minorem superioremque & Araxe traiecto per claustra Caucaesa in Cimmericorum terras concesserint. Siue ita scenam, seu quemcunque in modum instruxerit Herodotus, vndique haeret & tenetur.

Dicam, sicuti sentio, neque tam Herodotum, quam eos, quorum testimonio est vsus, producam quasi in forum ad tribunal, exquisitiusque tamquam in iudicio testes admotis quaestionibus percunctabor. Dicebant Herodoto, Scythas trans Araxem iuxta Issedonas & Massagetas coluisse: pulsas Scythas Massagetas vltiora Araxis (1) sub oriente Caspii maris tenuisse e regione Issedonum, qua in latissimam planitiem terra se diffundit. (2) Eum Araxem dicebant cum Istro de magnitudine certare & in ostiis multas amplecti insulas, Lesbo aequales magnitudine. Nihil horum ad Araxem Mediae conuenit: non Massagetarum situs, non magnitudo fluminis, non tot et tantae in ostiis insulae. Omnia autem ad Volgam. Ad Orientem Massagetae veteres: longitudo fluminis Istrum tertia parte superat: ostia ad octoginta et amplius, (3) quae in-
fulas

(10) L. IV. 99. (1) L. I. 201. (2) L. I. 202. (3) Nicol. Visseii Noord en Oost Tartarye f. 700.

fulas ingentes circumdant. Quod ait Herodotus: Ἀρά-
 ξης λέγεται καὶ μέζων καὶ ἰλάσων ἕναί τῃ Ἰστρο.
Araxes et maior et minor esse Istro dicitur, id quoque con-
 firmat, de duobus fluuiis eum inauduisse, quorum alter, hic
 Volga maior Istro, alter, qui nunc quoque *Rus*, minor
 fuit. Et fuisse utique Volgae vetustis temporibus no-
 men *Araxes* siue *Rus*, *Ros*, & *Rbas*, satis exploratum ha-
 beo. Onomacritus & incertus auctor peripli Ponti Eu-
 xini Tanaim dicunt ex *Araxe* flumine in Maeotim exone-
 rari. Aristoteles quoque in meteorologicis (4) aucto-
 res habet, ἐκ Παρναύου (ex Paropamisō dicere se putat)
 maximo omnium ad orientem hibernum monte, Bactrium,
 Choaspen & *Araxem* fluere τῆς δὲ ὁ Ταναΐς ἀποχί-
 ζεται, μέρος ὧν, εἰς τὴν Μαιώτιν λίμνην, ἀπὸς Ἀρα-
 ξε Ταναΐς διυφισ (pars enim eius est) in Maeotim palu-
 dem exoneratur. Ortus est error e Tanais & Araxis vi-
 cinitate. Accedit Agathemerus (5) qui *Iaxartem*, *O-*
xum, *Rbymnum*, *Rbos* (qui est Mediae *Araxes*) *Cyrum*
 (qui est *Kur*, cum hoc *Araxe* se miscens) & denique *A-*
raxem Caspio mari infundi scribit. Quis non videt, eum
 ab oriente littora Caspia obire, donec ad septentrionem
 definit in Volga? Claudius autem Ptolemaeus Volgam
 vocat *Pā Rba*, quod nomen adhuc frequenter in ore ha-
 bent Rutheni, ut ne ab aetate quidem et temporum po-
 pulorumque miris conuersionibus obliterari potuerit. In-
 ter caetera sic loquitur Claudius: ἕξι καὶ ἑτέρα τῷ *Pā*
 ποταμῷ ἐκβολὴ πλησιάζουσα τῇ τῷ Ταναΐδος. Vos-
 sius ad Melam in eo emendat vocem ἐκβολὴ & rescribit

Ddd 2

ἐπι·

(4) L. I. c. 13. (5) p. 235 ed. Gron.

ἐπισηροφῆ. Sed relinquendus est suus Ptolemaeo error, qui Volgam & Tanaim misceri atque orientalem quidem Volgae alueum in Caspium mare, occidentalem autem in Tanaim exonerari credidit. Duo quoque fluminis illius ostia Pomponius Mela habet (7) sed in Caspio tantum mari: *multi*, inquit, *in Caspio sinu magni parvique amnes fluunt: sed, qui famam habet, ex Cerauniis montibus vno alueo descendit, duobus exit in Caspium, Rba.* Ammianus Marcellinus (8) *huic Tanai Rba vicinus est, amnis, in cuius superciliis quaedam vegetabilis eiusdem nominis gignitur radix, proficiens ad usus multiplices medelarum.* De Rba barbaro eum loqui intelligo. Videtur autem illud nomen Rbos et Rbaeque alia similia ex antiqua mortalium communique lingua ad Scythas aliosque populos permanasse, quo fluuium dixere. Apud Arabas est *Roba*, apud Turcas et Persas est *Rud*, apud Ruthenos ρῆκα *Reca*. Quae fluminis adpellationes, et apud Graecos PEIN et fortassis Rhenus, Rhodanus, Rhaduna apud Gedanum, tum Eridanus seu Rhodon Ptolemaei et Marciani Heracleotae, (nunc Duna apud Rigam) et Russa in Prussia, non nisi reliquiae priscae linguae sunt. Est eodem referendus Eris fluuius apud Lycophronem, (9) cum Cassandra canit Amazonas Εριν Lagmum Telamum & Thermodontem reliquisse et inuasisse Athenienses. Vbi Ioannes Tzetzes Ερις Λάγμος Τήλαμος Θερμώδων; ποταμοὶ Σκυθίας. Ex vicinitate Thermodontis Eris ille cognoscitur situs fuisse in Ponto. Xenophon-
tist

(7) III. c. 9. (8) L. XXI. c. 16. (9) v. 1333

ti est *Ictis* (10) & ex eo fortassis, etiam Plinio. In Mesopotamia duo flumina fuere, quae Arabes appellauere *Roba*, hoc est nihil aliud quam *fluuios*. Alter apud Edeffam quem Scirtum Macedones coloni dixerunt, alter eo inferior, qui a Ptolemaeo et nunc ab Arabibus Chaboras dicitur. Ex illo fecere Graeci *Καλλιρόην*, ut in historia Edeffena ostendi, ex hoc ipse Xenophon (1) fecit Araxem, alium utique ab Araxe Mediae, quem Xenophon non attigit. Mansit etiam postea corruptum Araxis nomen. Nam geographus Arabs, quem Iosephus Scaliger inspexit (2) Carcesiam urbem ait allui a flumine

الهرياس السبي الخبور

Al Harias cognomento Al Chabor. *Harías* est ab *Araxe* Graecorum in Mesopotamia, *Araxes*, ab *Roba*. Graecorum autem aurium tam admirabile fuit fastidium, ut barbaros vocabulorum sonos non ferrent. Itaque seu noua nomina gentium locorum hominumque e lingua sua effingebant, seu barbara ita ori aurique Graecae aptabant, ut vix tenue remaneret vestigium, unde essent ducta. De ea consuetudine Plato in Cratylo disputat. Is quoque in Timaeo vocabula Atlantici sermonis retinere non audebat, nisi Graece enuntiata. Sed vaga fuit enunciandi talia libido, nullis definita praecipis, ut in primis e Persicis et Medicis et Armenicis nominibus intelligi potest.

Est igitur Volga, ille *Araxes*, cuius ad orientem prisci Scythae vicini Massagetis et Issedonibus degerunt.

D d d 3

Mas-

(10) ἐν ἀναβάσει L. V. c. 6. (1) *ib.* L. I. c. 4. (2) *De emendat. temp. f.* 399.

Massagetas enim non modo Herodotus, sed etiam omnis veterum turba ad borapelioten Caspii maris collocat. Laonicus Chalcocondylas ad septemtrionem Caspii maris ponit, (3) et praeterea adicit, eos ante id tempus ad alteram Araxis ripam egisse, nunc autem trajecto flumine citeriorem partem tenere. Quis non videt Araxem illum esse Volgam? ni cui visum sit quoque, meridie non lucere. Hic fluuius cum latissime pateret et a multis gentibus accoleretur, mirum non est, si quosdam suo insigniuit nomine. Ut nunc Bulgari a Volga profecti, nomen a fluuio tractum conseruant, ita Russos opinor ab eodem dictos et Roxalanos, quasi Alanos ad Russum fluuium. Ptolemaei Βορῆσται, quasi ad *Russum* populi.

Hunc quoque illum esse Araxem indico, ad quem contra Massagetas male res gessit Cyrus. Herodotus, cum audiisset, Cyrum transmissis Araxe petisse Massagetas et petiisse a Babylone, illum ipsum in Media Araxem dici putauit in Clio. Qui eum non satis intellexere, Araxem alium sibi quaesiuere sub oriente, ut trajecto eo, petere Massagetas posset Cyrus. Isaacus Vossius Oxum sibi elegit, quem Christophorus Cellarius secutus est. Nihil tamen habent, quod pro ea sententia pugnet, et longius ab Oxo siti fuere Massagetae, quocirca veteres quidam, teste Plinio, (3) ultra Iaxartem posuere aras Cyri, veluti ille esset Araxes. Iaxartem autem Scythae, ut ait Plinius, (4) seu quicumque alii fluminis accolae, *Silyn* vocarunt, aut fortassis *Sibyn* quod nomen adhuc permanet. Neque tamen etiam pro Iaxarte aliqua idonea verosimilitudo

(3) f. 62. et 67. ed. Paris. (4) L. VI. c. 16.

litudo pugnat. Profectus autem est Cyrus in hanc expeditionem, ut nobis videtur, non contra solos Masagetas, sed in primis contra Scythas. Haesit enim semper Regum Persarum animis, quam impotenter Scythae deuictis Medis in Asia superiori egissent. Atque illud tot bellorum initium est ab Herodoto indicatum, qui summa cura hoc egit, ut ostenderet, per quas causas bella ex bellis seminata fuerint. Babylonem Cyrus cepit secundum Vsserii rationes anno periodi Iulianae 4176. Anno vno post et paullo amplius, si Xenophonti credimus, gentes a Syria vsque ad mare Erythraeum sibi subiecit. Inde adhuc sunt anni minimum septem vsque ad extrema Cyri. Hoc omni tempore tum in Asia minori, tum ad Caucasum & in Scythia res potuit gerere, donec apertis per arma regionibus, traiecto nauibus et per pontem a se factum, Volga, Masagetas est adortus.

Quo autem tempore Scythae Araxem traiecerint et Tanaim, ostendam postea. Nam id potius & prius quaerendum est, quibus regionum spatiis Herodoti aetate coluerint.

DE

DE SCYTHIAE SITV,
QVALIS FVIT
SVB AETATEM HERODOTI.

Auctore

T. S. Bayero.

M. Maio.
1726.

Qui primi omnium Graecorum, quos ex veteris memoriae miserabili strage relictos accepimus, de Scythis aliquid prodiderunt, Onomacritus et Aeschylus, post Anacharsidis Scythae in Graeciam aduentum scripsere. Is, ut Herodotus testatur, Gnuri filius, Saulii regis Scytharum frater fuit: Gnurus autem Lyci, Lycus Spargapithis. Quamquam Samosatensis in Scytha, patrem non Gnurum, sed Daucetam, nescio quo auctore, citat, et Diogenes Laertius fratrem Caduidem regem. Athenas venit, teste Sosicrate Rhodio et Ολυμπιάδων ἀναγραφή Olympiadis XLVIII. anno primo, archonte Eucrate, qui anno vno interiecto, Soloni successerat: annis admodum XVII, postquam Asiae imperio exciderunt Scythae et feruile bellum reperere domi. Ex quo opinor factum, ut nullae res Scytharum, ita Graecorum monumentis celebrarentur, quam quod de bello ciuili recens gesto ab Anacharside audiuerant. Erat autem Graeca natus matre: ut potius credam Diogeni Laertio, Graece locutum, quam Luciano aut commentitiis Anacharsidis epistolis,
non

non nisi Scythicae linguae facultatem habuisse. Situs tamen locorum Scythicorum nondum planissime explorari potuisse videntur. Anacharsin Athenis aut in alia Graeciae vrbe cognoscere poterat Anaximander Milesius, haud minor viginti annis. Is inter primos ab Agathemero (1) refertur, qui geographiam tabulis comprehenderunt. Ab eo fortassis Onomacritus sua mutuatus est, cum argonautica, Orphei nomine, Athenis Olymp. LXV. ederet. Pindarus quidem Abarin quoque, quem alii Scytham, alii Hyperboreum putant fuisse, sub Croesi temporibus Athenas venisse cecinit, sed videtur Anacharsin habuisse in animo, qui iis fere temporibus in vrbe fuit. Nec dubito, quin illius auctoritate decepti fuerint Eusebius & Hieronymus, cum ad Olymp. LIV. annum II. et initia Croesi, Abarin ponunt e Scythia venisse in Graeciam. Hippostratus III. Olympiade, alii apud Harpocratonem Olymp. XXI. eo venisse contendunt. Immo Firmicus Maternus, vt eum Iosephus Scaliger et Mauffacus emendarunt, Troianis temporibus aequalem facit. His autem temporibus nulli Scythae noti esse potuerunt, vt cum Herodoto, Harpocrate et scholiasta Aristophanis *ἰπώρων* malim Abarin Hyperboreum dici, atque ex Graecis ad Pontum coloniis repetere, quos ego Hyperboreos in Delum et Athenas sacrificia legatosque misisse censeo, vt in alia dissertatione postea ostendam. Nisi Herodoti Melpomene potius vera nobis cecinit, Abarim illum inficetam esse fabulam. Anacharsin vtique nullus Scythia videtur secutus

E e e

tus

(1) p. 1. ed. Hudson.

tus in Graeciam; si eum frater in nemore Graecis sacris operantem, odio externarum religionum sagittis, traiecit: quamquam me non fugit, alios auctores esse, ad centum vsque annos vitam produxisse Anacharfin. In Onomacrito autem, siue ab Anaximandro, siue ab alio acceperit, multa ieiuna et futilia sunt; ut in ignotis adhuc regionibus et populis. Quaedam tamen, ut explorata, ab Herodotea narratione propius absunt. Nam quoad Onomacriti heroes cursum nauigationis per Ponti littora meridionalia peragunt, nota et vera locorum nomina legimus: cum autem ad occidentem et orientem flectunt iter, tum nec Amazones, nec Tauri suis in sedibus colunt, et ab Araxe fluuio scaturigines Thermodontis, Phasidis Tanaisque deriuantur, quod in tanta antiquitate et longinquitate, non abhorrente a commentis fluuiorum cursu, ferendum est. Ad septemtrionem autem Onomacritus permiscet omnia, populosque, quos fando audiuerat, hac illac temere proiicit. Quod autem in eo vitium est maximum, Maeotin paludem cum mari septemtrionali coniungit perpetuo alueo. Illic ponit Pactos, Arcteos, Lelios crudeles: illic

Τοξοφόρους τε Σκύθας, Ἀρεως πρὸς Θερμόποντας,
& Argonautas per Tauros, Hyperboreos, Nomadas,
Caspios, Riphacos in oceanum Hyperboreum seu Mortuum ad Macrobios ducit & ad Cimmerios intra Riphaeum et Caspium montem in tenebris viuentes, deinde in Hiberniam perque Herculeum fretum ad columnas Herculis, idque quo magis sit ridiculum, paucorum dierum decursu. Haec imperite fingendi licentia patefacit Onomacriti inscitiam, cui nihil fere praeter nomen Scytharum vici-

vicinorumque quorundam populorum innotuerat. Itaque cauendum est sedulo, ne hunc hominem ignotis rebus vanisque figmentis oblectantem alios, tamquam bonum et accuratum de illis terris testem citemus, ut fecere ante nos nonnulli eruditi viri. Qui secundum eum Argonautica scripserunt, non quae gentes reuera antiquissimis temporibus isthic coluerint, sed quas sua aetate aut quocumque alio tempore isthic recenseri acceperant, ab Argonautis petitas tradiderunt. Itaque in iis maiori etiam opus est cautione, quam quae ab illis eruditis viris, quos dixi antea, adhibita est, qui dissonantia in Onomacrito et ceteris argonauticis scriptoribus comparando fecere, ut erroribus plena essent omnia.

Aeschylus Onomacrito concinit in Prometheo vincto, Scythas supra Maeotin coluisse. Sic enim canit:

Καὶ Σκύθης ὄμιλος

Οἱ γὰρ ἔχατον πόρον ἀμφὶ

Μαιῶτιν ἔχουσι λίμναν

Et Scythica turba,

Quae terrae extremam regionem, circum

Maeotin tenet paludem.

Idem Scytharum regionem in solitudinibus collocat et ad oceanum vsque producit, quocum misceatur Maeotis. Noti isthic sunt ei Scythae Nomades

Οἱ πλεκτὰς ζέγας

Πεδάρσοι νάισιν ἐπ' εὐκύκλοις ὄχοις

Ἐκηβόλοις τόξοισιν ἐξηρητημένοι

Qui casas vitiles

Incolunt, sublimes super rotundis curribus,

Arcubus longe iaculantibus instructi.

Noti eidem Chalybes et Amazones et angustiae Maeoticae.

Ista Scythicarum regionum ignoratio mansit vsque ad Darii expeditionem : tum enim per Ionas ceterosque Graeci corporis , qui in exercitu eius erant , inuestigatum est , quodin eum latuerat diem. Ex eorum numero Scylax Caryandensis circum littora exploratum est a Dario missus , cuius periplus exstat. Pontica littora multo solertius descripsit quam Onomacritus et quaedam eorum tractuum alia , conuenientius Herodoto. Herodotus Scylacem nouerat a Dario Hystaspe ad describenda Asiae littora missum ; Europae autem et Scythiae littora eundem obiisse non nouerat. Aelius vero Dionysius Halicarnassensis in libro de Alexandria primo auctor est, Scylacem Europae et Scythiae periplus dedicasse Dario, vt habet incertus auctor in elogio Scylacis edito primum ab Hoeschelio. Siue Darii mandato , siue priuato consilio littora illa obierit , seu ab aliis nautis tradita tantum consignauerit (Caryanda autem patria eius, Cariae iuncta fuit, et Carum nauigationes sunt notissimae (2)) nihil tamen est verius , quam ad hanc aetatem referri debere eius periplus. Haud sum ignarus, Henricum Duedum, quem ego virum semper feci maximi, Scylacem hunc longe infra Herodoti aetatem ponere, sed is nescio quomodo mihi in tota illa disputatione, tamquam in salo sine remigio et velis iactari videtur. Quae enim sunt tanta argumenta, vt eius sententiam praeferam Isaaci Vossii ceterorumque opinioni? Quia, inquit, quaedam in periplo Scylacis leguntur, quae memoriam inferiorum

(2) L. I. c. 171.

rum aetatum attingunt. Fateor id ita esse, sed ex iis quaedam acutissimi iudicio viri ad Olympiadem CXI. alia ad Olymp. CXVI. nonnulla ad Olymp. CXXXV. referenda sunt, quod sex et nonaginta annorum interual- lum est. E contrario in Scylace reperias certas antiquio- ris aevi notas. Agnuit id Doduellus quoque in multis et in vno maxime, quod Scylax Tyrum vocat insulam, quae peninsula post Macedonis expeditionem Persicam fuit. Vixit igitur ante id bellum. Praeterea Sylacem scripsisse ea aetate necesse est, cum Africae omnis Asiaeque littora notiora essent, quam Italiae, Galliae, Hispaniaeque. Idcirco apud eum Volsci tantum et Campani et Samnites, at Roma nulla, fama urbis nondum per Graeciam peruulgata. Ex quo mihi res fit sine controuersia, cetera aliis temporibus conuenientia, scribarum curiositate allita fuisse Sylaci, deinde in librum recepta, ut multis aliis, praesertim huiusmodi scriptoribus accidit. Post hoc tempus tantum Athenis cognoscendi has regiones desiderium obtinuit, ut optimates consumerent in foro totos dies, ἐν τοῖς θαύμασι, καὶ πρὸς τὰς ἐκ τῆ Φάσιδος καὶ Βορυσθένος καταπλέοντας *spectandis praestigiis et cum iis qui a Phaside aut Borysthenes adnauigauerant*, ut ab iis cognoscerent miracula, ut habet apud Athenaeum Aristoteles. (3) Haec vero θαύματα peperere insanas de Scythis fabulas, quo non immerito Heraclidis Abarim retulisse videtur Mauffacus.

At Herodotus alio ingenio fuit, qui cum Olbitis Ponticisque aliis sic est versatus, ut non omnino fabulas sper-

E e e 3

neret

(3) f. 6.

neret omnes, haud ignarus, in iis nonnumquam veritatis aliquid recondi, tamen, quod esset in omni re verissimum, sagaciter inuestigaret. Quibus igitur in locis sub Darii expeditionem Scythae degerint, ut ab Herodoto est vulgatum, explicabo. Tenuere autem regiones inter Borysthenem et Tanaim. Ad meridiem illis Tanais, ut noster ait, nulli vero ad eius vltiorem ripam Scythae, nisi exules a reliquo corpore et rebelles, sed longius ad orientem a ripa Tanais reiecti. Iam Herodotus ab Istro ad Borysthenem decem dierum iter esse scribit, a Borysthene ad Maeotin paludem decem quoque dierum, ab oriente Scythiae ad occidentem viginti numerat dies, a Ponto totidem ad Melanchlaenos, ad septemtrionem Scythiae oppositos. In diem ducena stadia numerat. Quem nunc in modum nos expediemus, cum omnis de stadiis quaestio difficultatibus maximis impedita est? Videor mihi viam reperisse, qua quam potest fieri proxime accedam ad veritatem. Eratosthenes, ut Strabo auctor est, in gradum vnum aequatoris stadia locc dabat, at Claudius Ptolemaeus ex diligenti, ut ait, obseruatione, tantummodo stadia lb. quem magna veterum turba consequitur. Herodotea stadia concordant cum stadiis Ptolemaei, ut patet perspicue, comparantibus Herodoti dimensiones, quas subieci, cum exactissimis tabulis Delilianis, quas in his terrarum tractibus collocandis secuti sumus. Ait autem Herodotus

Pontum Euxinum latum esse qua

est latissimus

3200 stadia

Os

SCYTHIAE.

407

Os Ponti seu Bosphorum esse latum	4
Os Ponti esse longum vsque ad Propontidem, admodum	120
Propontidem esse latam	500
Et longam	1400

Secundum has igitur Herodoti rationes, in iis regionibus, de quibus quaerimus, in gradum longitudinis vnum stadia CCXLVII erunt numeranda, singula pedum sexcentorum, vt Herodotus diserte postulat: seu pedes 208200

Nunc dimensionem Scythiae ad calculum exigemus.
dies, stadia, gradus cum pedibus

Ab Istro ad Borysthenem	10	2000	5	159000
A Borysthene ad Maeotin	10	2000	5	159000
Ab oriente ad occidentem Scythiae	20	4000	11	109800
A Ponto ad Melanchlaenos seu septemtr.	20	4000	8	5

Duae dimensiones Herodoteae, quas primo loco posui, non admodum abhorrent a veritate, si ab Istro ad Borysthenem propter littus iter instituas, quae causa est, vt Maeotis quoque a Borysthene aequali spatio dirimatur. Nam vtrobique, per littorum in interiora recedentium sinus, cursus interceptus fuit. At in agris Scythicis libero patentique campo, qui nec syluis nec montium iugis impediretur, rectum erat iter. In vno ambigi potest, cum ab occidente orientem versus viginti viam dierum esse Herodo-

rodotus scribit , a quibus quasi carceribus suos cursores in stadium hoc emittat. Egregie autem aperit sententiam suam Herodotus , cum Scythiam intra Agathyrsos , Neuros , Androphagos , Melanchlaenos includit. Quod eius dictum nisi in oculis feramus , nusquam cohaerebit res : nunc autem omnia inter se optime colligata a nobis comparataque reperietis , vt aut sic fuisse Scythas sitos putem , aut , quoniam in his nulla tanta esse certitudo potest , haud longe nos a veritate aberrasse. Est igitur Scythia sita intra 45. et 57. fere gradum longitudinis , at 47. et 55. gradum latitudinis , e qua coloni transgressi Borysthenem , aliquantum terrarum , vsque ad Tiram occuparunt. Ego vero haud grauate non modo eius Scythiae , sed et vicinarum gentium , quae seu intra huius imperii proximos fines , seu aliquanto etiam longius sitae fuerunt , regiones ex Herodoto exhibebo in tabula.

Primum omnium is ordo est fluminum , quae Herodotus habet , (4) Ex Scythia , quinque fluii decurrentes augebant Istrum. Porata , (Ammiano Marcellino Porota ,) magnus fluius , ab oriente descendens , ad hoc tempus priscum nomen retinet. Quis enim ignorat Prutam ? Magnus vtique fluius in quem incidunt Colazinus , Cosmanus , Zuzur , Zur , Bassenus , Caroccia , Caminea , Caldarussa , Zizia , Valemare , Valebratuleni , Mosna , Nirnoua , Calmazuia , Sapusna , Strimba , Serata orientalis et occidentalis , Cigieza , Larga et Ilana , vt eos nomine recenset Demetrius Cantemirus princeps eruditissimus in historia Moldaviae MSta. Graeci postea nomen

(4) IV. 47. 48.

men Poratae Herodoto teste inflexerunt, ut deprauatum esset Πυρρός quasi *igneum* dicas, unde Constantino Porphyrogenetae est Βεῦρος (8) et nunc *Prut*. Tiarantus Herodoti, *Alaut* fluius est. Nam ab Herodoto inter Tiarantum et Poratam tria magna flumina ponuntur, quot utique inter hunc fluium et Alautam intersunt. Quo accedit, quod Ptolemaeus quoque Alautam suam sic posuit. Ex tribus autem Ordissus est is, qui adhuc nomen vetustum retinet: *Argischa* enim vocatur. Post Herodotum dictus a Graecis Αρδῆσκος, ut adparet e scholiis in Hesiodum. (9) Naparis Herodoti est *Ialoniza*. Ararus, Ptolemaeo Hierastus (quod nomen vetus Prutae fuisse Cantemirus putauit) Constantino Porphyrogenetae Σίερος, corrupto veteri vocabulo, nunc quoque *Siretus* et *Moldaua* quibusdam dicitur. Est enim fluius Moldaviae proprius ex ultimis finibus versus Poloniam profluens atque duobus ostiis in Danubium se exonerans, undique montibus et saltibus cinctus, ut Cantemirus Princeps testatur. Secundum hos fluios Maris nos aduertit, qui adhuc a fontibus ipsis retinet nomen vetus *Marosch* seu *Merisch*, donec ad Segedinum, amisso nomine, Tibisco miscetur, quocum in Istrum se exonerat. Maris autem Herodoto separatur a Scythicis fluminibus, nec nobis memorandus, nisi ad eum Agathyrsos poneret Herodotus. Fluios, qui ab Haemo et a Thracia exonerantur in Istrum, non attingo, quoniam nihil ad propositum nostrum conferunt. Sequitur Tiras, qui apud

Fff

Tur-

(8) *De administr. imperio* f. 108. ed. Band. (9)
p. 261. ed. Heinsii.

Turcas in *Turlae* cognomento aliquantum veteris nominis retinet, Constantino Porphyrogennetae et Graecis aliis *Danastris*, vnde nunc *Dnister* dicitur. Oritur e lacu, Scythas a *Neuris* separante. Ex lacu dico, Herodoti fide, qualiscunque scaturigo fluminis sit. Secundum *Tiram* est *Hypanis* fluuius, qui nunc *Bog*. Rudbeckius *Pripelium* esse censuit: cui alibi satisfecisse mihi videor. (10) *Hypanis* oritur e lacu, qui *Μήτηρ Υπάνιος* Herodoto dicitur et in Scythica regione ad occidentem est situs, iuxta quae loca *ἄγριοι ἵπποι λευκοί*. Ostium fluminis huius *Dio Chryostomus* (1) sic describit: prope a mari efficere ingens stagnum, limosum et tranquillum serena tempestate; fluuium ipsum esse profundum et vehementem; ripam paludosam, arundine et arboribus oblitam, adeo vt arborum quaedam in stagno quoque adpareant, malis nauium similes: isthic salis esse copiam. In *Hypanim*, teste Herodoto, infunditur paruus et amarus riuus *Amaxampes* dictus *Scythis* (quod ille Graecis *ἰεράς ὄδός* significare scribit) qui terminus est *Alazonum* et *Scytharum Aratorum*. Abest autem a mari octingentis stadiis: nam quatuor dierum cursu ad mare vsque ab *Amamaxampe* amarus dicitur fluxisse *Hypanis*. Alio loco (2) *Ἐξ ἀμπαίων* regionem ponit Herodotus intra *Borysthenem* et *Hypanim*, dicitque ex ea regione fluere *Exampenriuum*, quem autea *Amaxampem* vocauerat. Cum ad hunc vsque riuum paene aequali interuallo *Hypanis* et *Tiras* fluunt, paullo infra riuum amarum, *Tiras* in ambitum deflectit et *Hypanis* quoque diuergit secundum Herodotum.

(10) de numo *Rhodio* p. 9. (1) f. 437. (2) f. 157.

tum. Quae signa me induxerunt, ut Amaxampem ea in regione ponerem, ubi nunc fluviolus *Sinauda* situs est. Borysthenes Hypanim excipit, incerto auctori peripli Ponti Euxini Danapris dictus, ex eoque nunc *Dnipter* veteri Scythico vocabulo. Post Herodotum quidam qui longinquiora, quae comperta non habebant, tradere tamen sunt ausi, ex montibus, quos Alaunicos vocant, fontes Borysthenis repetunt. Sed mirandum non est, si omnium capita fluminum aut in lacubus et paludibus aut in montibus ponuntur a priscis geographis, ne quid ignorare videantur. Et Borysthenis quidem fontes Matthias Michovius Canonicus Gracouiensis annotavit, in Sendomiriensis agri planitie scaturire, non in montibus, quales eo in agro sunt nulli. Borysthenes fluvius est, teste Herodoto, nulli nisi Nilo secundus: purissimo alveo labitur et fata penes se foecunda habet salisque copiam in ostio καὶ κήτεια μεγάλα ἀνάκλανθα τὰ Ἀντακίου καλέσσι, quem piscem torrent accolae fluminis. Cognoscatur Graecis fluvius ab Gerrheo regione, quae quatuordecim navigatione dierum distabat a mari. Ab eadem regione Gerrheo decem dierum via Scythae Aratores ad Borysthenem colebant. In ostio Borysthenes et Hypanis eodem lacu miscebantur, priusquam in Pontum se exonerabant. Ostiorum utriusque fluvii latitudo aequalis, lacus ducentorum stadiorum tractu porrigebatur. Promontorium, quod est extremum, medio inter utrumque fluviium situ, Hippoleon vocabatur, Cereris delubro insigne. In eo autem promontorio, cuius e regione in mare se praecipitabant e lacu flumina, propugnaculum Alektoros (coniux ea Sauromatarum regis fuit) Dionis Chrysostomi ae-

tate erat. Ad ortum solis Panticape ex lacu quodam a borea fluens Hylaeamque regionem stringens infundebatur Borystheni. Situm eius isthic pono, vbi *Samara* nunc est, aut paullo infra hunc riuum. Nam Scythae Agricolae, cognati Scytharum Agricolarum ad occidentalem Borysthenis ripam degentium, a Panticape vndecim itinere dierum, hoc est ad Gerrhum vsque colebant. Igitur haud longe a mari Panticape absuit. Dionysius vtiq; Periegetes aliiq; haud longe a Ponto ostia eius describunt, ex quo opinor factum, vt quidam Panticapen comparantes cum Hypani, dicerent, infra Olbiam seu Borysthenem urbem Borystheneis misceri fluctibus.

(3) Secundum Panticapen Hypacris ex lacu per medios Scythas Nomadas delapsus a dextero relinquens Hylaeos, ad Cercinitin urbem infundebatur Ponto. Gerrhus autem fluuius in ipsis fontibus regionem Gerrhum attingens, medius inter Scythas Nomadas & Regios fluebat, donec in Hypacrin aquas fundebat suas. Apud Claudium Ptolemaeum confusa sunt omnia: Hypanis aliquot gradibus orientalis Borysthene describitur, vt possis ex eo suspicari, Hypacrin esse in Ptolemaeo scribendum. Diuersus ab eo apud Ptolemaeum est Cercinitis fluuius, qui in sinum Cercinitin Pontumque se exonerat, vt de Gerrho et Hypacri Herodotus habet: at Gerrhus a Ptolemaeo longe hinc reicitur ad orientem, veluti qui miscetur Maecoti. Quod ne quis adeo miretur, in Ptolemaeo sciat numeros graduum esse deprauatos. Si enim Alexandrinum geographum recte inspicias, Hypanis ad occi-

(3) *Plinius L. IV. c. 12.*

occidentem Borysthenis collocatur, disertis verbis. Est ergo Cercinitis Ptolemaei, idem, qui erat Herodoti Hypacris. Qui autem factum sit, ut Gerrhus in Maeotin defluere videretur Ptolemaeo, qui Herodoti testimonio Hypacri & Ponto miscebatur, illum scrupulum facile tollam e Plinii egregio quidem, sed corrupto loco (4) *Sinus*, inquit, *Carcinitis appellatur, flumen Pacyris, a tergo lacus Buges fossa emissus in mare. Ipse Buges a Coreto, Maeotis lacus sinu, petroso discluditur dorso. Recipit amnes, Gerrbum, Hypanim, ex diuerso venientes tractu. Nam Gerrbus Basilidas et Nomadas separat: Hypanis per Nomadas et Hylaeos fluit, manu facto alueo in Bugem, naturali in Coretum. Vbi Pacyrin esse Herodoti Hypacrin, Harduinus iam annotauit: Bugen esse Βύκην λίμνην, Bycen Flacci et Bucen Melae idem monuit. Sed manet scrupulus, quod Coretum non animaduertit esse legendum *Cercinitin*, idque ex Herodoto, quem Plinius hoc loco secutus est. Nam qui poterat Gerrhus ad orientem in Bycen lacum, Hypacaris ab occidente in Coretum seu ultra Bycen exonerari et duo tamen flumina, ut Mela loquitur, *uno ostio effluere, diuuisis fontibus & aliunde dilapsa*, et quidem influere in Cercinitin, ut non obscure Plinius innuit. Ita igitur est: Hypacris et Gerrhus uno ostio in Cercinitin et Pontum voluebantur, ducta tamen usque in Byzen & Maeotin paludem fossa, per quam altero ostio, sed manu facto, exonerabantur. Haec est celebris illa fossa, quam a vernis Scytharum ductam Herodotus commemorat. Constan-*

Fff 3

tinus

(4) L. IV. c. 12.

sinus Porphyrogenneta ait(5) illam sua aetate fossam terra obrutam fuisse κατεχώθη ἢ αὐτὴ σάδα καὶ ἐς δάσους ἐγένετο πολὺ. Tanais ultimus fluviorum Scythicorum, nunc *Tan* & *Don*, ἐκ λίμνης μεγάλης, Herodoto teste, fluebat, (quae λίμνη nunc *Juan* nomen habet) & praecipitabat se in Maeotin. Séd perquam est obscurum, quos Herodotus dicat fluuios *Lycum Oarum* et *Syrgin* in Maeotin incidere. Lycum etiam Ptolemaeus habet ad occidentem, tribus citeriorem gradibus Tanai, itaque forte est fluuius *Silik*, qui aliquid veteris nominis retinuit, nisi illud ipsum vetus nomen est, ex quo Graeci pro consuetudine sua inflexo fecere Lycum, ut minus barbare sonaret. Oarus autem, si est Ptolemaei Agarus, rationes Herodoti turbat: esset enim ad occidentem Lyci ponendus. Nunc obscurum est quidem, quo in loco eum positum fuisse oporteat, certum est tamen, inter Lycum & Tanaim ab Herodoto collocari. Syrgis alibi *Χεργίς* dictus Herodoto (6) influit in Tanaim. Necessè est igitur esse eum, quem Tanaim minorem vocant & *Sevierky*, quod vestigium veteris est vocabuli. Haec flumina Herodotus dicit a Thyssagetis fluere; (7) non utique ex ipsa Thyssagetarum terra, sed ex vicina regione, nam paullo postquam id dixerat, Oarum fluuium in desertis ponit, quae infra Thyssagetas, seu ad meridiem iis erant. Reliquus est Araxes seu Volga, ut supra demonstraui. Duo maria Pontus Euxinus & Caspium mare notiora sunt, quam ut de iis quidquam dicendam

(5) l. c. f. 113. (6) L. VI. c. 123. (7) L. IV. 123.

dum esse videatur. Aristeas ille Proconnesius Νοτίῃ θάλασσαν vocat Pontum, *australem* Scythis respicientibus: at Herodotus Βορρῆην, a Graecia. In Herodoto id quoque summam hominis accuratorem & fidem indicat, quod Caspium mare non ut nostrum nonnulli quadratum, sed quod paucis ante annis deprehensum est a Ruthenis, longius porrectum prodit, pro portione latitudinis. Ad occidentem Caspii maris Caucasum collocat, ad orientem vero immensam planitiem, cuius partem non minimam Massagetarum teneant. Haec planities celebratissima est apud Arabas Persasque scriptores nomine *Kapbğjak* et *Dascht*, quod *planitiem* significat. Describit denique, sine nomine tamen, montes ad remotiorem orientem. Volga enim ad occidentem, altiori ripa includitur, unde ea regio *Nagorna*, id est, *montana* hodie dicitur. Nequaquam isthic montes sunt, sed planities altiori cum ripa. Ad orientem autem ingens est planities, quae regio idcirco *Lugavoa* hoc est *campestris* vocatur. Sunt igitur montes illi ab Herodoto memorati, nulli alii, quam qui nunc dicuntur Vergaturii, olim *Ripbaei* dicti.

Postquam haec, quae nulla vis temporum, nulla fortunae iniuria labefactare potuit, maria, flumina montes, planitiem, suis in locis terminavi, his vtar adiumentis ad describendas suis regionibus gentes. Timonax primo de Scythis libro (8) quinquaginta diversas Scytharum gentes esse scribit. Cum autem incertum est, qua aetate Timonax haec scripserit, sitne hoc de suae aetatis populis intelligendum, an ita a

(8) ap. Schol. Apollonii Rhodii L. IV. v. 321.

superiorum temporum scriptoribus acceperit, nihil compendii ex eius testimonio facio. Sequar igitur naturae quasi ordinem, ac positus populorum ex Herodoto definiam, confirmaturus opinionem meam idoneis argumentis, vbi opus esse videbitur. Iam ab Istro, in littore Ponti Tiritae occurrunt iuxta ostia Tirae, vbi nunc Bielogrodum et Butziaki populi. Mediterranea Scythae Aratores tenuere a fluuio Tiaranto vsque ad Tiram, quos fluuios Herodotus idcirco Scythiae annumerauit. Tenuere igitur Valachiam, Moldauiam et exiguum tractum Transyluaniae. Magis ad occidentem erant Agathyrsi, gens et ipsa a Scythis profecta, ultra Marin fluuium, hoc est in Transyluania occidentali. Transgressis Tiram, ad littus Callipidae et supra eos Alazones, vtrique intra Tiram et Hypanim. Alazonum situs certioribus notis intelligitur, quam Callipidarum. Nam mater Hypanis secundum Herodotum discernit Alazonas a Scythis: ad orientem, Alazonum fines sunt e regione Amaxampes. Relinquitur nunc regio ad mare vsque Callipidis iuxta Olbitas, vt Halicarnassensis habet. Olbitae populi ἐπὶ τῇ Ὑπανίῳ supra Hypanim, Alazones παρα τὸν Ὑπανίῳ ad Hypanim, vtrique ad occidentem Olbiae vrbis, Alazones tamen borealiores Callipidis. Ergo Alazones in palatinatus Podoliae meridionali parte ad Caminiecum et in Braclaiensi, qua inter Bogum et Nisterum porrigitur, Callipidae vero in orientali Braclaiensium tractu et in Ozacouienfi agro. Intra Hypanim et Borysthenem Olbitae Graeca colonia, vbi nunc *Dzike Pole* campi deserti et Ozacouienfis agri aliqua pars est. Vltiora insederant Scythae Ἀγοτῆρες Aratores, cognati Scythis, quos

quos supra in Valachia et Moldavia constitui, tum necessitudine proxima tum morum similitudine. Dirempta erat vtriusque quasi Scytharum Aratorum corporis coniunctio, ad septemtrionem apud fontes Tirae per Neuros, ab Alazonibus per fontem Hypanim ipsum, usque ad Hamaxampen. Gerrhus ad Borysthenis fluvii orientem regio, aberat a mari quatuordecim dierum iter. Ab ea regione decem dierum itinere, Scythae Agricolae colebant usque ad Olbitas. Incoluere igitur palatinatum Braclaviensem, quidquid regionum a fontibus Bogi ad Kiouiam usque inter Borysthenem et Hypanim est, praeterquam quod ad confluentes vtriusque fluminis Olbitae coluere. Neuri a fontibus Tirae supra Scythas Aratores usque ad Borysthenem egerunt, in parte palatinatus Leopoliensis Belzensis et Volhyniensis orientali. Quae regio ab iis est Neuris dicta. (9) Magis ad occidentem Geloni et Budini, ubi nunc Chelmenensis et Brescianensis palatinatus est. Antiquitus Neuri ad orientem Borysthenis sedes habuerunt, supra Scythas Agricolas, (10) *Neuroi* seu *Neuroi* dicti Graecis scriptoribus. (1) Sed vna *γενεα* ante Darii expeditionem, quoniam tanta vis serpentium ex eorum terra nascebatur et a septemtrione e solitudine adueniebat, ut persistere amplius ea in regione non possent, ad Budinos commigrarunt, a quibus in vicinitatem agrorum admissi sunt. Anno periodi Iulianae 4199 Babylonem recuperavit Darius atque ex eo tempore profectus ad bellum Scythicum, ut Herodotus

Ggg

ini-

(9) *Herodotus L. IV. c. 51.* (10) *ib. c. 105.*-(1) *Eustathius ad Dionysii v. 310.*

initio Melpomenes testatur. Vnam $\gamma\epsilon\upsilon\epsilon\acute{\alpha}\nu$ ab annis tribus et viginti describere videtur Herodotus, (2) vsque ad annos quatuor et triginta. Ergo Neuri circiter annum periodi Iulianae 4176 aut 4165 traiecerunt Borysthenem. Nihil tamen addit Herodotus, ex quo satis constet, vbi Neuri antea coluerint, seu vbi suas Geloni Budinique habuerint sedes. Ego quibus rationibus inductus suis eos locis posuerim, dicam. Budini, magna gens, Scythicae stirpis fuere, pulsati autem priscis temporibus a ceteris sui corporis, ex Scythia ad occidentem Borysthenis concesserunt. Ex eo enim nata est fabula Graecorum de Gelono et Agathyrsi fratribus Scythia pulsatis, quae ab Herodoto commemoratur. Vt autem Agathyrsi ad occidentem, ita Budini eodem se receperunt. Geloni autem Graeca colonia, teste Herodoto, misti Budinis, partem quiddam Graecae consuetudinis retinuerunt, partem adsciuerunt a barbaris mores Scythicos. Ex ea re evenit, ut Budini Gelonorum quoque nomine cicerentur. Perperam vero hoc, iudice Herodoto, cum diuersae stirpis, diuersorum morum essent Geloni mistaque Graecis et Scythicis lingua vterentur, Budini tantum Scythica; cum Geloni agrum colerent, hortos haberent, vrbesque frequentarent, Budini autem tantummodo pecuariae rei operam darent. Ex ea tamen confusione fabula est excusa de Gelono, tamquam Scythicae familiae patre, cum nihil ad Budinos pertineret, nedum ad Scythas.

Urbs

(2) Nam L. I. c. 7. in duas et viginti $\gamma\epsilon\upsilon\epsilon\acute{\alpha}\varsigma$ ἀνδρῶν nondum integras numerat annos 505. et L. II. c. 42. ait tres $\gamma\epsilon\upsilon\epsilon\acute{\alpha}\varsigma$ efficere annos centum.

Vrbs Gelonus in Budiniis sita, Gelonis illis cognomen-
tum originemque debuit. Muro circumdata fuit, cuius
singula latera triginta stadiorum erant, aedes omnes e la-
teribus, templa deorum Graecorum et arae, simulacra
autem lignea. Stephanus Byzantius urbem in Sarmatis
ponit: Γελωνοὶ πόλις Σαρματίας. Haec Budinorum
et Neurorum migratio memorabilis est in septemtrionali
historia. Nam, ut ex mythologis septemtrionalibus in-
telligimus, ab eo tempore Odinus primus et Fenni, seu
Neuri et Budini profecti sunt ad sinum Bothnicum et in
ipsam Scandinaviam. Ergo Neuri coluere antea ad
Desnam fluvium, postea vero in imo pede Lithuaniae et
parte quadam Volhyniae, Budini autem et Geloni in Po-
lesiae finibus. Supra Neuros et Budinos Herodotus deser-
ta ponit ad septemtrionem, interserens, quantum consta-
ret sibi. Nam, ut habet in Theseo Plutarchus, qui ve-
terum situs regionum describebant, si qua fingerent cog-
nitionem eorum, arenis et siccitate squalere agros, limosas
esse paludes et Scythica iuga et mare glaciatum finge-
bant, ne in tabulis inane spatium pro incomperito relinqueret-
ur. Venedi tamen et Electrudes insulae ad mare Bal-
thicum et Eridanus, qui nunc Duna est ad Rigam, no-
ta fuisse Herodoto nomina, sicuti alibi nobis dictum
est. (3)

Ultra Borysthenem ad littus, Hylaea est regio, quae
a Panticape et Hypacri includitur, sola totius Scythiae
sylvestris. Nunc isthic locorum Tattaria Minor est. Su-
pra eum tractum Scythae Γεωργοὶ seu Agricoolae, trium

Ggg 2

iti-

(3) *V. dissertationem de numo Rhodio*

itinere dierum, iuxta Panticapen porrecti in orientem, et Borysthene aduerso vndecim dierum, itaque fere ad fluium vsque, quem Desnam nunc vocant, in tractibus Ucraniae orientalis. Isthic Gerrhus regio et sepulcra regum Scythicorum erant. Supra vero ἔρημος ἐπὶ πολλὸν *ingens solitudo* & ultra eam Androphagi ἔθνος ἴδιον καὶ ἑδαμῶς Σκυθικόν, *gens peculiaris et minime Scythica*, in agri Smolenscensis Vitepcensisque tractibus. Postea iam sola et inculta loca, ὅσα ἡμεῖς ἴδμεν *quantum scimus*, inquit Herodotus. Traiecto Panticape, Scythae Nomades iuxta Gerrhum fluium ad septemtrionem vergunt, pars et ad occidentem Hypacris sita. In Chersoneso Tauri colebant magnam partem ad occidentem, nam orientem peninsulae Scythae Regii Αἰετοῖ seu Optimi dicti tenebant, qui inde vsque ab hac regione ad Gerrhum et Cercinitin sinum, ultraque fossam e Gerrho ductam in Bycen, boream versus ad lacum, ex quo Tanais oritur, atque ad orientem ad ostia Tanais se porrigebant, quas regiones nunc Tattari Crimmeses, Nogaici, Cosacique incolunt. Supra Scythas Regios Melanchlaeni, gens minime Scythica in agro Mosquensi vicinoque ad orientem tractu. Quod ad boream pergebat magis, lacubus, paludibus et desertis ab Herodoto repletum. Plutarchus, (5) ab his, qui Scythiam et Thraciam peragrauerant, frequentes lacus et paludes iis in locis reperiri compererat, ex quo Posidonius frigoris vehementiam per has regiones oriri credidit. Satis frigide hoc, ut opinor, Posidonius. Ultra lacus et deserta πτερὰ κεχυμένα *plumas effusas* aerem obtinere fe-

re

(5) T. II. f. 951.

rebant, ut prospectus iter facientium interciperetur: quod de niuis copia Herodotus interpretatur. Posteritas tamen huic Scytharum ioco indulfit, quae Pterophoron regionem appellauit, *ab assiduo niuis casu, pinnarum similitudine*, vt ait Plinius. (6) Regionem ad Maeotin, per quam Lycus et Oarus fluunt, Maeotida vocat Herodotus. Ultra Tanaim in intimo sinu Λάξιοι aut potius Λάξιοι Sauromatae colebant. Intimus sinus est, qua Maeotis longissime recedit intra Asiae littora, vbi Tanaim accipit. Hi Lazii Sauromatae boream versus coluere quindecim dierum via. Quo minus ad stadia hos dies comparem, obstaculo mihi est, quod, cum omnis ea regio montana est, plura in gradum vnum stadia et incerto numero consumuntur. Vt, cum Herodotus a Maeoti ad Phasin triginta dierum iter esse dicit, id vero quatuor admodum graduum spatium est, per montes et divertigia viarum, cum in planitie triginta dies gradus duodecim efficerent Herodoto. Posui itaque Lazios eo in loco vbi multis post Herodotum temporibus coluerunt. Herodotus (7) hic errauit, cum *λαξίους παρα τὴν λάξιν* seu fortitionem, nescio quam, dictos esse, opinatus est. Nam veluti ad hoc *ἔτυμον* Iudens *δευτέραν τὴν λάξιν* nactos ait Budinos, supra Lazios, magis ad boream. Amazonas Herodotus scribit profectas a Sarmatis iuxta Istrum et Ponti Maeotisque littora ad septentrionem, apud Cremnos excensionem fecisse, et praedatorum more emensas spatium, quod a Cremnis ad ostia Tanais est, ad septentrionem confedissee et commistas postea cum Scythis, consilium cepisse trañciendi Tanaim. (8) Hic sedes posuere suas inter Lazios

Ggg 3

et

(6) L. IV. c. 12. (7) L. IV. 21. (8) Herod. L. IV. c. 110.

et Budinos, vtrisque ad meridiem. Lingua vsae sunt Sarmatica: Scythicam aegre didicere a Budinis, quorum concubitus petebant, ita vt *σολοικίζην* dicantur Herodoto. Supra Budinos ad boream desertum est septem diebus continuatum, videlicet a Syrgi fluuio et scaturigine Lyci atque Oari fluuiorum. Altius deserto illo Thyrsagetae, Valerio Flacco Thyrsagetae, populus magnus, nec a Scythica stirpe, & cum iis Iyrcae, iisdem in tractibus colebant, apelioten versus. Orientaliores his Scythae Rebelles seu Exules, qui a Regiis Scythis profugerant. Omnis eorum regio *πεδιάς ἔσκαθύγεως* *campestris*. A Scythis Exulibus incipiebat scruposa & confragosa regio, quae denique in excelsos montes surgebat. Iam in his regionibus montes sunt nulli, nisi ultra Volgam Riphaei, quos nunc Vergaturios vocant. Hi nobis in ordinando situ illarum gentium pro cynosura erunt. Est quidem tota ripa occidentalis Volgae dicta *Nagorna* seu *montana*: sed qui eo in fluuio nauigarunt, montes nullos viderunt, tantummodo ripam altiolem, cum orientalis ripa palustris est et vna ingens planities. Ergo montes praeter Riphaeos, reliqui sunt nulli. Sub radicibus horum montium Argippaei ab Herodoto ponuntur, iidem Sacri dicti et Calui a caluitie, quam et viri & mulieres ab incunabulis perpetuo seruarunt. Hi Calui *ἔσιμοι ἔγένεα ἔχοντες μεγάλα*, iuris aequique peniti legumque magistri, inuiolabiles non armis, quae nulla habent, sed religione omnium circa eos populorum. Ad eos Scythae et Graeci mercatores a Borysthene et Ponto omni commeabant. Scythae ad eos se proficisci dicebant, per septem interpretes et linguas. Necessè est
igi-

igitur, multos populos minores diuersarum stirpium interiectos fuisse, qui nunc ignorantur. Ultra Argippaeos ad boream nemo peruenit ob altitudinem montium, quorum ad radices Argippaei agebant. Argippaei ferebant, intra eos montes colere Aegipodas, vltraque esse, qui sex menses dormiant, quod extremam indicat septemtrionem. Ad orientem Argippaeorum Arimaspi erant, ita, vt his quoque essent ad boream Aegipodes et Gryphes auri custodes. Supra omnes Hyberborei incertis sub arcto spatiis collocantur. Omnes hae gentes supra Argippaeos et Issedonas neque Scythis neque Graecis mercatoribus noti fuere: soli Argippaei et Issedones de iis aliquid ferebant. Iam Massagetae sub ortu solis, trans Araxem, ad Caspium mare e regione Issedonum amplissimis terrarum tractibus continebantur. Issedones autem ad occidentem habebant Argippaeos vicinos, ad boream Arimaspos, ad meridiem, forte et ad orientem Massagetas, et pertingebant ad Caspium mare, vt haec dilucidius ex subiecta a nobis tabula adparebunt.

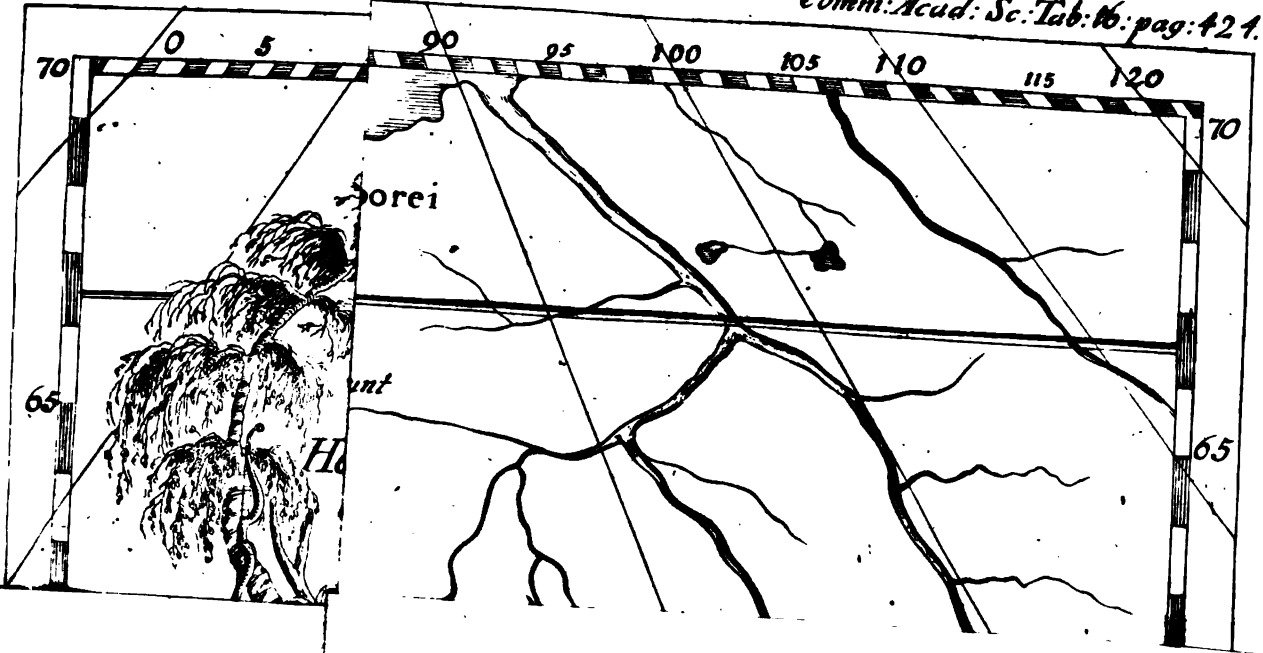
Sic igitur Herodoto duce gentium illarum situs descripsimus, vt natura spatiorum et indicia probabilia pati sunt visa. Quantum a nobis dissentiat Olaus Rudbeckius et quam vagis ratiociniis populos illos per omnem septemtrionem serat, in compendio dicam. Callipidae, inquit, sunt ad Borysthenem. Halizones, vbi nunc Halizum est. Scythae Aratores in Polonia Liouoniaque. Neuri ad Vistulae orientalem ripam, ad Naruam vsque, denique Scythae Agricolae, qui ad orientem Borysthenis erant, in Moscuenfibus agris. Scythae Regii sunt Tartari Crimenses. Melanchlaeni sunt Moscuenfes ad Ladogam

gam vsque et Onegam. Budini sunt ad Balticum mare. Thyssagetæ in Carelia et Sauolaxia. Iyrcae sunt in Russia ad Iyrgowitz. Scythæ Calui sunt Lappones, Sacri sunt Vpsuiones. Argippæi sunt Sueci qui ab Arkippar Suecico vocabulo *telis pugnare* dicti, ad quos Scythæ per septem linguas commearunt, Polonicam, Russicam, Lituanicam, Esthonicam, Finnicam, Lapponicam. Issedones denique sunt in Esthonia. Quibus ego consutandis non immorabor, cum per se quisque nullo negotio intelligere potest, ex iis, quæ diximus, nimis soluto vagoque cursu tetendisse a Borysthene in Scandinaviam, ut nec flumina, nec montes, nec paludes retardarent euro levio-rem vento, atque eo in cursu seminasse passim Scythas Herodoti, veluti dentes Cadmei draconis.

Nicolaus Vitfenius in prima editione septentrionalis et orientalis Tartariæ (9) parte prima de regionum harum antiquis incolis egit Herodotumque produxit, sed nusquam explicuit. In altera autem editione (10) partem illam primam prorsus omisit. Ne quis denique miretur a nobis Eridanum Herodoti et Venetos iis in locis poni. Diximus causam in dissertatione de numo Rhodio, et dicendi erit locus alias, cum multa præterea, quæ hic prætermisimus, explicandi potestas dabitur.

(9) *Noord en Oost Tartarye Amst. 1692. f. 107.*

(10) *Amst. 1705.*



DE MVRO CAVCASEO.

Auctore

T. S. Bayero.

CVM PETRVS MAGNVS Derbentum et circumiectas regiones bello Persico deditio-
 ne in potestatem accepit, vt erat animo non modo in belli pacisque consilia erecto, sed etiam
 qui grauissimas imperii curas tali otio temperaret, ex quo aliquis doctrinae honos, artibus accessio, publice priuatimque fructus et vndique gloria compararetur, quidquid spectatu dignum in illa expeditione occurrebat, partem per se contemplatus est, partem per fidos industriosque homines explorauit. In primis aduertere exercitus Rusfici oculos inaccessa Caucafi iuga, communita castellis et muro, vt adparebat, firmissimo et vt tradebatur a gnaris regionum, vasta longitudine porrecto inter Caspium mare et Pontum. Pars muri, quae subiecta erat oculis, de omni reliqua mole coniecturam mouebat, quanta et quam admirabilis esset, praesertim in illa solitudine, super illis montium fastigiis et cum praeterea hominum sermo et ipse lapidum color ad vetustatem vltimam tam insignis artificii opus referret. His rebus incensus ad spectandum muri situm Demetrius Cantemirus Moldaviae Princeps ad Imperatorem se contulit, ostenditque cupere se, suscepta circum murum excursionem, tam nobile gentis alicuius rerum dominae monumentum explorare. Col-
 laudatus ab Imperatore cum viginti admodum dimachiis

M. Octob.
1726.

H h h

mu-

murum, qua potest, obit, tractum eius, diuergia, propugnacula et vicina muri describit, viam metitur. Longius processuro metus obiciebatur a Dagestanorum infidiis, quas manipulus ille, si vndique in ignota et confragosa regione barbari coarrentur, effugere non poterat. Rediit Cantemirus e discrimine tanto sub vesperam incolumis, et quae cognouerat, in commentarios retulit. Ad ceteras virtutes eo in Principe summa animi magnitudo erat, multo vsu periculisque exercita, et doctrinae eruditionisque incredibiles amores, vt, quae ad veterum superiorumque temporum memoriam in horum populorum rebus requireres, haud aequae ex alio cognoscere posses: cuius laudis testes sunt commentarii, quos partem perfecit de Turcarum et Moldaueorum rebus, partem de antiqua Dacia, aliosque complures adfectos reliquit. Chartas in quibus muri situm descripserat, communicatas accepi ab Antiocho Cantemiro Principe patris virtutum aemulo et imitatore studiorum: commentariorum quoque laceras schedas, in quibus perpauca, quae memoriam fugitura sunt visa, notauerat, eiusdem beneficio Principis excussi, interea dum caremus maxima parte eorum, quae sapientissimus Demetrius ab se animaduersa, e memoria repetiturus fuerat, nisi diabethes, cum eum in Derbentina expeditione inuaserat, paulo post incomparabilem virum extinxisset. Elaborandum igitur mihi videbatur, vt monumentum, quod doctissimi Principis eruditione et luce ingenii multo illustrissimum futurum erat, ita ex antiquitate explicarem, vt desiderium illius aliquantum lenirem mea opera.

Demetrius igitur tractum muri, quem obiit et orgyis
sta-

stadiisque Ruthenicis dimensus est, et montium vicinorum conualliumque situs et viarum anfractus recessusque inter equitandum tumultuario opere consignauit, in castris autem paullo exactius descripsit. Sunt fortasse in his quoque, quae retractaturus ad amussim erat: sunt quae nos dubios relinquunt. Quia autem nihil, quod eo pertineret, in schedis Principis repertum est, malimus ita, ut consignatam accepimus tabulam publice exhibere, quam priuatim quidquam ex coniectura immutare. Atque ut inde ab vrbe incipiamus, a qua est profectus, et quam ex eius schedis diligenter descriptam habemus, Derbentum caput Schirvani (quae prouincia a Cyro flumine ad territorium vrbis porrigitur, ex quo Dagestana, hoc est, montana regio ad Circassios vergit) ad mare est situm in loco decliui. Inde iam occidentem versus mons in asperam rupem surgit, in qua arx locata est. Eam ex vrbe petunt per portam *Kyrclar*, et via media est fossa per durissimum excissa saxum, quadraginta in longum orgyias, in latum quatuor, tres in profundum. Ab summa arce ad centesimam orgyiam pagus est *Piridimisky*, quasi *genium* seu *daemonem Damascenum* dicas. Est enim in illo pago monumentum cuiusdam *Piridimisky*, quem Damasceni filium regis fuisse perhibent. Titulum in ingenti sculptum lapide Demetrius legere non potuit, quod litteras Cuficas et ipse ignorabat et nemo alius, qui interpretaretur, erat. In vrbe turris diuerso a ceteris et squalidiori lapide ad septemtrionem constructa, vltimam antiquitatem referebat: et adfirmabant ciues, hic Alexandrum coepisse fundamenta vrbis iacere. Sunt autem, si ab arce descendas ad mare, in septemtrionali mu-

ro hae vrbis portae. Prima *Driardizi Capusi*, altera *Kyrclar Capusi*, tertia *Babulbab* seu *porta portarum*, magnificae structurae opus, quod adhuc vetus nomen vrbis conseruat. Latum est duas orgyias, altum vnam. Superius limen non arcus in modum testudine firmatur, sed lapides ingentes postibus ad rectos angulos innituntur, nullis inter se ferramentis deuincti. In subterranea portula (*Babulkyiamar*, *portam extremi iudicii* vocant) figurae, incertum an hieroglyphicae, exstant. Ferunt autem, portulam aequali cum ceteris altitudine exstructam paulatim subsedisse, et cum tota hansta fuerit, censorium illum humano generi adfore diem. Ab vrbe profectus Demetrius per septem stadia Ruthenica, (*) vt ipse testatur, murum explorauit. Adparet enim e tabula, exploratas ab eo fuisse 328 5 orgyias, quae efficiunt sex stadia et ducentas octoginta quinque orgyias reliquas. Nam cum excelsa iuga, scrupeam viam et saltus vallesque studiose perreprat, dum metitur murum, dum sub meridiem corpus curat, eundo redeundoque dies effluxit. Addit tamen in schedis Demetrius, certo constare, murum ad fontes Ihrani fluminis in finibus Georgiae per quadringenta et quinquaginta stadia produci. Illius ego fluminis nomen nusquam locorum in Georgiae limite reperio, igitur venit mihi ex dimensione illa De-
me-

(*) *Stadium Ruthenicum dicitur* верста *Voersta* et continet 500 сажень *Saschen* seu *Orgyias Ruthenicis*. *Vnum Saschen* habet 3. аршинъ *Arshin* seu *vnas Ruthenicis*. *Vna vna Ruthenica* est aequalis 28, 100 digitis Londinensibus.

metrii et ex ipso situ in mentem, esse fluvium *Tori* in tabulis Delilianis ad 63. gradum longitudinis et $44\frac{1}{2}$ gradum latitudinis. Montes conspiciuntur ad Derbentum diuersa altitudine: summum fastigium est montis *Scbadagy*, quasi *Regium dicas montem*, quia Nufriuanus filius Kieicubat in eius vertice domum condidit, in quam animi caussa recreandi nonnumquam diuertit. Altitudinem quadrante dimensi, octodecim stadiorum obseruassei bi sunt visi. Secundus ille ab Ariarathe habetur, mediam amplius partem niuibus obtectus. Montes plerique in Caucaſi tractu, vt a Constantino Principe Demetrii filio, qui cum patre murum obiit, accepimus, praerupti et asperi rupibus virgultisque consiti, nonnumquam in cacumine planitiem protendunt. In conuallibus sunt vineae. Vnum vicum se videre Constantinus meminit, in quo Iudaei Persicae Ebraeaeque linguae callentes. Per montium iuga et valles murus continuatus, nunc in rui nisiacet. Turres quaedam cum portis integrae, praefert im in vallibus, Moscuenſis vrbis turribus non dissimiles. Crassus est murus orgyiam Ruthenicam tantummodo vnam. Lapides sunt, vt Xenophonteo verbo vtar, *κογχυλιάτοι*, quales ea in regione reperiuntur, trium vlnarum Ruthenicarum longitudine, crassitie vnius vlnae: lateres nulli vsquam visi. Nec ferramentis aut caemento deuincti sunt lapides, sed politura sola et struendi artificio ita commissi, vt vix rima adpareat. Non omnittendum duxi hoc loco, quod cognitum est ab interprete Georgiani Principis, qui in hac vrbe aliquanto tempore egit. Hic Princeps cum cogereſtur, ab insidiis in tuta se recipere, Tefisio septentrionem versus Oſsetum petiti

tiit et inde ad radicem Caucaſi vertit in Tuchetum, tum in Tianetum et Eretum, donec in finibus Schamachiae vrbs ſuperata aſperitate montium, planitiem tenuit. Tum vero Bacuam conceſſit atque inde nauigijs Derbentum. Ab Offeto octo dierum itinere Caucaſum a ſiniſtro, et in cacumine eius, muri rudera conſpexerunt. In Delilianis tabulis, (1) ad Pontum Euxinum ſub 44. gradu latitudinis et 58 $\frac{1}{2}$ gradu longitudinis, prope ab Dandaro vrbe muri veſtigia notata ſunt, quae ſecundum Cudurum fluuium ab auctro in boream vergunt, atque ad extremum paullulum inſlectunt in orientem, quinque admodum et ſeptuaginta ſtadiorum Ruthenicorum tractu. Siue a Soſcamo Sabba principe Georgiae, ſiue a Cruſio aut Zura-beco eius muri notitiam clariffimus geographus habuerit, eſt proſecto inſigne argumentum continuati inter vtrumque mare Caucaſei muri. Inueni poſtea P. Archangelum Lambertum. miſſionarium e congregatione de propaganda fide, in itinere Iberico (2) murum illum, quem in tabula exhibet, ita fere deſcribere: *regionem eſſe vaſtam, et murum ſupra ſexagies mille paſſus ductum: paſſim ab turribus et cuſtode milite defendi: a praecipuis vrbs Odiſci tiuibus, ſingulis menſibus, delectos milites eo mitti, qui diſmiſſis ſuperioris menſis excubitoribus, cuſtodiam agant: a mari regionem paullatim aſſurgere uſque in altiffimum Caucaſi culmen: inferiore regionem, partem a natura et paludibus, partem ab arte et ligneis arcibus muniri, ne cui inui-*

(1) *Regionum vicinarum maris Caſpii A. 1723. editis.* (2) *Dans le Recueil de voyages au Nord T. VII. p. 176.*

inuitis militibus iter pateat. Iam ab hoc muro vsque ad eum fluuium, ad quem Cantemirus certo compererat murum ab oriente protendi, non magnum spatium intercipitur, in quo seu deleta sunt vestigia muri, seu non explorata et memoriae prodita.

Non dubito, multos fore, qui mirentur, cum relatum legent de tam nobili vetustatis monumento, per PETRI M. expeditionem ab obliuione vindicato: alios, qui scire cupiant, quantum de eo ante hoc tempus cognitum fuerit, plerosque qui conquerantur de totius muri situ tractuque non penitus omnia exacta et comperta teneri. Quibus ego, quantum in me est satisfaciam explicaboque quae memoria teneo: nam quae exploranda adhuc sunt, ea posteritatis cura esto.

Graeci sero aliquid de Caucaſo monte, (quem Scythae *Graucaſum a candida niue*, quasi Alpes quasdam appellarunt,(3) per Ponticas colonias cognouere. Eum igitur, quod in regione longinqua (vt tum erat) atque idcirco fabulis apta situm existimabant, duriori supplicio multatum Prometheus credere, si e Iouis mandato ad Caucaſum alligaretur, quo vtique liberatum eum veniret nemo, nisi Hercules aliquis. Hesiodus Prometheus tantummodo columnae alligauerat: at Aeschylus, primus, quod quidem constat, relegauit in Caucaſum illum, qui inter Pontum et Caspia littora affurgit. Herodotus, quod Halicarnassi natus et in Asia multum versatus esset inter praefectos regios, earum conditionem terrarum, quae sub Persis continebantur, exactius quam quisquam alius co-

gno-

(3) *Plinius L. VI. c. 17.*

gnouit. Is in Euterpe Caspium mare tradit quindecim dierum longitudine et octo dierum latitudine comprehensum, ad occidentem habere Caucasum praetentum vastitate et altitudine eximia, multisque diuersarumque nationum mortalibus frequentatum, qui vestes pingebant succo, ita vt animantium figurae non pictae, sed intextae viderentur, durabili lanae colore. Eo monte, (vt is in Thalia ait) Persarum imperium terminabatur, et ab eius incolis quinto quoque anno centeni pueri et totidem puellae tributum mittebantur regi. Ad septemtrionem Caucasi nihil iam Persici iuris erat et ad orientem Caspi maris planities immensi spatii, Massagetarum sedes, nota erat. Claustra quoque duo in Clio obscure attingit, per quae Cimmerii Scythaeque diuersis regionibus viisque effusi sunt in superiorem minoremque Asiam. Nihilo notior Caucasus per expeditiones Alexandri imperiumque Lysimachi aut Asiae Syriaeque regum, quoniam illorum quoque res in obscuro iacent. L. Lucallus, rebus aduersus Mithridatem gestis, haud longe ab eo monte absuit. Cn. Pompeius Romanorum primus prope a Caucasaeis claustris confedit. Lucanus (4) Pompeium ita loquentem inducit in Pharsalicis:

*Si vos, o Partbi, peterem cum Caspia claustra,
Et sequerer duros aeterni Martis Alanos,
Passus Achaemeniis late decurrere campis.*

Ex eo tempore claustra duo Caucasi, ad orientem Caspia (a vicino mari, a quo etiam tractus montis ad orientem diuersgens, Caspius dictus, si qua Eratostheni fides)

(5) ad

(4) L. VIII. v. 222.

(5) ad occidentem Caucasea innotuere, temere inter se confusa a scriptoribus, quod Plinius non vno loco reprehendit. Ita Lucanus perperam vocat Caspia, cum ea Pompeius, aut Romanus quisquam imperator numquam attingit. Nam, ut de Pompeio dicam, is, quod ex Appiano et Plutarcho liquido constat, postquam ad Euphratem affecutus Mithridatem, magno nocturno praelio superavit, fugientis vestigiis inhaerens, primum diuertit in Armeniam, progressus deinde in Albaniam, (quae intra Caucasum Armeniamque sita erat) in Iberos ad opprimendum Mithridatem mouit. Mithridates autem, cum interim Dioscuriade hibernasset, perlustrata in circuitu ora Pontica, profugit in Bosporum et ad Scythas. Ea via sequi oportebat Romanos. Itaque, ut Appianus dilucide habet, (6) claustra Scythica, qua nemo penetrauerat antea, Pompeius infedit et in reditu Albanis ob defectionem bello illato, illico vertit in Armenos. Cum ad Caspium mare tenderet, obiecta ei sunt terriculamenta ab aliis alia, et praecipue serpentum multitudo, teste Plutarcho: (7) misit tamen suorum aliquos exploratum, atque aquam e Caspio mari allatam, ut ante eum Alexander, ut nuper Ruthenicus quoque exercitus, dulcem reperit. Ita enim est in littoribus, qua flumina accipiuntur, nondum amisso sapore. Eodem errore Plinius (8) etiam eos, qui Corbulonis res in Armenia sub Nerone gestas enarrauerunt, Caspia et Caucasea claustra

Iii

con-

(5) *Ap. Strab. f. 568. ed. Henr. Petri.* (6) *p. 400. ed. Tol.* (7) *f. 638.* (8) *Plinius e Varrone* (9) *L. VI. c. 13.*

confudisse indignatur. Addit deinde etiam tabulam earum regionum a Corbulone missam in urbem, nomen Caspiorum claustrorum isthic ponere, vbi Caucasea erant. Ergo Cornelius Tacitus quoque alicubi (10) ab errore eo circumuentus est. Claudius Ptolemaeus Caucaseas portas in Iberia Sarmaticas dixit, Caspias vero, Albanias, et has nimis longe remouit a mari Caspio, nisi fortassis aditum, vbi primum Caucafi iuga separantur et conualli locum faciunt, indicare voluit.

Quales autem illae portae fuerint, e Varrone (sine is, quo vsus est Plinius, M. Terentius, siue P. Aticinus sit, vterque Pompeio vsque ad summum discrimen familiaris) e Varrone igitur et M. Agrippa nobis constaret, nisi commentarii eorum intercidissent: Nunc incertum est, quantum ab alterutro acceperit Plinius, quantum e Corbulonis commentariis inferuerit. Nam Corbulo rebus magnis in Armenia gestis, adeo Romanos impleuit fama claustrorum Caucafi, vt Nero in vanis gloriosus, expeditionem in Sarmatas moliretur per Caucaseas portas, quas Caspias peruerse dicebant, quamuis, vt ait Plinius, (1) a portis Caucaseis vix pateret aditus ad Caspias, per oppositos montes. Plinius igitur, seu ab expeditionis Pompeianae comitibus et exploratoribus, siue a Corbulonis militibus acceperit, Caspias portas, scribit, „(2) inter iuga praerupta angusto transitu fitas, longitudine VIII. millium passuum, *toto opere manu facto*, ita „ vt vix singula plaustra commearent: dextra autem laeuaque

(10) *Annal. L. VI. c. 33.* (1) *L. VI. 13.* (2) *L. VI. 14.*

uaque ambustis similes scopulos impendere: aquae inopiam in XXXVIII millia passuum (in quibusdam codicibus tantum XXVIII. M.) perdurare: angustias impeditae corruatum e cautibus salis liquorem, tum serpentum multitudinem transitum, praeterquam hieme, non permittere. De portis Caucaseis autem Plinii apponam verba: (3) *portae Caucaseae magno errore a multis Caspiae dictae, ingens naturae opus montibus interruptis repente, ubi fores obditae, ferratis trabibus, subter medias anae diri odoris fluente, citraque castello, quod vocatur Cumania, communito, ad arcendas transitu gentes innumeras: ibi loci, terrarum, orbe portis discluso, ex aduerso Harmastis oppidi Iberum. Praecipua illa Iberiae vrbs est, quam Ptolemaeus Harmasticum vocat.*

Post id tempus nihil magnopere de Caucaseis Caspiisque portis est relatum, vsque ad CPlin sedem imperii Romani constitutam, ubi et vicinior Caucasus erat vrbi rerum orientis potenti et barbarorum irruptiones in Armeniam Asiam Syriam consecutae sunt frequentes, de quibus tam Graeci quam Syri scriptores commemorant. Itaque Claudianus sub Arcadio, paullo ante Stiliconis caedem, de bello Getico canens, inquit:

*Nome videbantur, quamuis adamante rigentes,
Turribus inualidis fragiles procumbere muri,
Ferrataeque Getis ultro se pandere portae?
Nec vallum densaeque fudes arcere volantes
Cornipedum saltus, iamiam conscendere puppes
Sardoniosque habitare sinus et inospita Cyprī
Saxa parant, vitamque freto spumante tueri.*

Iii 2.

Se-

(3) L. VI. c. 11.

Secundum eum Procopius Caesariensis multis rebus in oriente admotus, Caucaſi portas duas Tzur et Caucaſeam in bello Gothico (4) nominat. In bello Perfico autem (5) portas Caucaſeas ampliffime deſcribit. Ait enim: Taurum Ciliciae excurrere in Armeniam Perfarmeniam, Albaniam et Iberiam et quanto procedit longius, tanto accreſcere in altitudinem: trans Iberiae fines inter arctiſſimas anguſtias eſſe tramitem, ſeu clauſtra quaedam L. ſtadium longitudine et deſinere in monte praerupto et inſuperabili, niſi, quod per eum natura ſic eſt molita exitum, vt manu patefactus videatur. Eam portam Caſpianam ab antiqua vsque memoria adpellari ait. Egreſſis portam aperiri campum vbertim irriguum, ampliffimo regionis ſpatio et alendis aptum equis, in eoque Hunnos ad Maeotin vsque colere, qui inoffenſo itinere vsque in Iberiam hac excurrere poſſint equites, alia via nec ſine ſumma moleſtia, nec niſi omiſſis equis penetrari eodem poſſe: neceſſe enim eſſe praecipitia montium et anfractus cum discrimine perreptari. Eam montis clauſtrorumque naturam Alexandrum contemplatum portam muniuiſſe valuis et caſtellum ſuper ea poſuiſſe, vt ſeptemtrionales populos includeret. Cum Procopius Caſpianam portam dicit, quae erat Caucaſea, ea vetus multorum fuit offenſio, vt ſupra e Plinio docui. Et is error adeo infecit omnes ſcriptores, vt cum nomine memoria ipſa Caucaſearum portarum paullatim aboleretur. Caſpiarum autem portarum (quae ex eo tempore celebriores euaserunt) hanc deſcriptionem Euaſthius Theſſalonicen-

(4) *L. IV. c. 3.* (5) *f. 28. ed. Pariſ.*

censis in parecbolis Dionysianis (6) dedit : Medos in orientem esse versus vsque ad Caspias portas, quae intra Mediam continentur clavesque Asiae appellantur: montes autem esse, aut potius praeruptas rupes in modum portarum, et seu a mari, siue a Caspiis incolis nomen habere: hac a septemtrione in Hyrcaniam et Caspiam Persiamque iter esse, gentesque boreales transitu prohiberi.

Haec fere ita de Caucasais et Caspiis claustris nostri homines prodiderunt, nemo autem ex omni vetustate, seu Latinus, seu Graecus scriptor, muri, qui ductus esset in Caucaſo, mentionem iniecit. Arabes vero et Persae murum hunc celebrant scriptis et nomine

سر یا جوج و ما جوج

seu agveris obiecti Gogo et Magogo. Thomas Hyde in epistola de mensuris et ponderibus Sinensium, existimauit se illum murum in Sinis reperisse. In eo autem eruditissimum virum ratio fugit. Abulgafus Bagadur Chan in *Schagjare Turki, genealogia Turcarum* de muro Sinico fatus ait:

في عرب سر دیر تیرک بران نور نور
دیرار خطای خلجی اونکوزیم

Arabice vocatur Sed, quod Persice est Dir seu porta, veteri lingua Turcica Turcurga, Chataica seu Sinica lingua, Vnguli. Haec ita corrupte scripsit Abulgafus, corruptius in Ruthenicam, ex ea in Germanicam, sic denique in

Iii 3

Gal-

(6) ad v. 1034

Gallicam linguam translatus editusque. (7) Nam illud *Vngu li*, est *Van li*, quod *decies mille stadia* significat, quo nomine Sinenſes regni ſui quaſi moenia vocant. Ab eo muro autem Abulgaſus diſtinguit hunc, quem Alexander Magnus oppoſuit gentibus *Jagjugj et Magjugj*, (8) quas Tattari dicunt, habere nares ſimiles caninis, et murum aeneum nequidquam lingere adhuc: proxime autem ante illum extremum et cenſorium diem perrupturas moenia naribus eſſe. Ab hoc denique diſtinguit murum, quem *Nuſſchiruan* (9) e regione Schamachi circa regnum ſuum duxit.

Hic ille eſt, quem in ruinis adhuc iacere comperimus. Alter ab eo non eſt diuerſus, ſed fabuloſo nomine et commentis Mahometanis obſcuratus. Nam cum Mahometes in Surata decima octava ab Alexandro intra duos montes murum conditum ait, ex eo eſt quaeritum ab ſectae illius et ſuperſtitionis hominibus, ubi terrarum is eſſet. Eledriſus multa ridicula tradit, Alſalemo Altargjeman (ſeu Interprete) auctore. Alſalemus ait, ſe miſſum eſſe a chalipha quodam, qui in inſomnio aggerem hunc Alexandri inter terras ſuas et inter Gogum Magogumque medium, veluti patere viderat, ut qui ille eſſet agger, diligenter exploraret: dediſſe ſibi chalipham praefidium quinquaginta equitum et quinque millia denariorum et munus praeterea decies

(7) p. 118. 119. (8) In Germanico et Gallico interprete *Iadſutz-madzutz* l. c. (9.) Ex quo illi fecere *Nau-Schiruanadill Sultanum Sazaarem Schamatbiae*, invito Abulgaſo.

cies mille drachmarum; equitum autem vnicuique quinquagies mille drachmas stipendium et com meatum in annum vnum, centum denique mulos, qui aquam et necessaria alia portarent. Quis ille chalipha fuerit, neque Abdalla Ebn Chordaba, neque Eledrifus, qui memoriam rei ex Alsalemno conferuarunt, prodidere. Quoniam autem Alsalemus profectum se refert ab vrbe Sermenraia, ex eo notam temporis duco. Nam Motasemus chalipha Abbasidarum octauus, sub auspiciis principatus, quem A. C. **I 0 0 0 0 X X X I V.** inuit, sedem imperii Bagdado transtulit Sermenraiam, haud longe a Bagdado sitam ad Tigrim. Ceteri chaliphae deinceps ad Motadedum, eadem in vrbe commorati sunt. Motadedus A. C. **I 0 0 0 0 X C I I I.** sedem imperii Bagdado restituit. Sex igitur chaliphae, annis fere sexaginta, Sermenraiae egerunt, eoque tempore plerosque interpretes Graecos inter Arabas fuisse ex Albulpharagio intelligimus, quorum numero hic Alsalemus Altargjeman inferendus est. Alsalemus Sermenraia cum litteris chaliphae profectus est ad Isaacium Eben Ismael Armeniae dominum, *Tepb-
lisum*. Ab Armeno cum commendaditiis litteris ad regulum *Alfarir*, atque deinceps ad regulum *Lan* et dominum *Philaschae* peruenit. Ab hoc quinque impetratis ducibus, septem et viginti diebus ad extremos fines regionum *Besegert* penetrauit. Haec tam obscura nomina in Romana editione (in qua Eledrifus pessime hab tus truncatusque meliori parte est) interpretari nos oportet. A Tessifio venit in *Alfarir*, quae regio sita est ad Caspium mare et *Alserir Aldebeb* (*tbronus aureus*) vocatur, in qua censetur Derbentum. *Lan* videtur corruptum

raptum ex *Labgjan*, quae vrbs in Gilana regione est, Laginum Europaeis dictum, quadritui via a Casbino. *Pbilasbab* quale sit, augurari non possum. At *Besegerd* est regio *Besa*, seu vt Arabes pronunciant, *Phasa*, quasi *borealem* dicas, quod ad ortum brumalem Persepoleos vrbs sita est. Hinc in regione nigra, (Cimmerias tenebras inaudiuerat vanissimus homo) decem itinere dierum adeo foetere aerem sensit, vt aegre dirum odorem balsamis temperaret. Itinere mensis vnus, per loca a Gogo Magogo vastata confecto, denique post sex alios dies ad Chacanum Otcos venit, qui propinqua monti huic tenuit, cuius in hiatu agger erat. Hic ille murum inspexit duobus fere stadiis ab vrbe situm. Ex eo consequitur, comminisci eum iter per Persiam Indiaeque aliquam partem. Nam in reditu quoque se ait ductum ab illis castellis versus Chorasanum in Samarcandiam. Et cum ad Gihonem seu Orxanthum, in regione Ilak, a Schabalegico agro vsque ad exitum vallis Alschasch, etiam muri vestigia, teste Abulfeda, reperiuntur, hinc ille Alsalemus fabulae totius apparatus petiisse videtur. Agite ergo, inspiciamus cum Alsalemum murum. Mons confidebat in vallem centum quinquaginta Sauadicis seu Eracensibus latam cubitis. Isthic porta erat ferrea, quinquaginta cubitos alta, duabus perastatis munita, quarum vnaquaeque lata erat XXV. cubitos, extraque portam prominebat, crassitie decem cubitorum. Tota porta constructa erat lateribus ferreis aere inductis. Parastatae autem quinquaginta cubitos altae, tectum impositum habebant centum et viginti cubitorum. Super tecto eminebat aliud aedificium vsque ad cacumen montis, cuius in summo

summo culmine ferreae pinnae conspiciantur et in pinna quavis summa, cornua duo sibi obuersa. Valuae clausae erant, vnaquaeque quinquaginta cubitos lata, quinque crassa. Pessulus quoque cernebatur septem cubitos longus, vnum in ambitu crassus. Is pessulus viginti quinque cubitis a terra aberat, et quinque cubitis pessulo altior sera et clavis longa cubitum vnum et semis, cum duodecim ansis de catena pendentibus. Limen portae inferum decem cubitorum latitudine et longitudine centum cubitorum. Praefectus illarum arcium cum decem equitibus obire solitus portam, et malleis pessulum percutere, tum vt audiant populi vltra portam, adesse custodes, tum vt ipsi, quid geratur, resciant. Ibi vero ferebant, se admotis auribus, murmur animaduertere ingentis populi, qui vltra colat. Non longe a loco illo castrum a se visum refert, decem stadiorum amplitudine et arces duas prope portam, altas latasque ducentos cubitos, interque eas fluuium manare. In vna earum asseruari instrumenta, quibus exstructum sit propugnaculum et ferrea caldaria et cochlearia adesse, in quibus lateres ferrei sint apparatus. Lateres quoque aliquot ab Alsalemo sunt visi, longitudine cubiti vnus et amplius, palmae autem vnus altitudine. Denique, vt fabula desinat in risum, visam narrat aliquando super pinnis muri, multitudinem hominum e gente Gogi et Magogi, quos adeo metuebant, quibus tanta claustra, tot arces, tot turres opposuerant, ferrea et aenea omnia, contra quos inaccessum natura sua montem muro et arte firmauerant: eorum autem tres vento adflatos decidisse de pinnis. Viros fortes et bel-

K k k

lato-

latores optimos opinabimini ? immo vero duorum cum semisse palmorum pumiliones fuere.

Spektatum admissi risum teneatis amici.

Ita ex somniis chaliphæ excisa fabula, in somniis Alsalemi definit.


Gregorius Malatiensis quanto propius a Caucaſo aberat, tanto probabiliora, quam ille Africanus Eledriſus, de ſitu muri protulit : neque is tamen ſine commento. Alexandrum, ait (10) rogatum, vt aggerem *Jagjugj* exſtrueret, murum condidiſſe ex lapidibus ferreis et aeneis, qui accenſo igne in vnum ſolidum faxum coaluere, cubitos duodecim longum, octo latum : vbi autem eum perfecit, veniſſe ad locum aggeris magni *Babolabuab*, in conuallibus regionum *Kapbgjak*, effoſſoque fundamento, per montes ipſum produxiſſe vsque ad mare

Romanum ſeu CPlitanum *Colzum*. Regio قنجاق

Kapbgjak ab Arabibus Perſis et Armenis etiam *Daſcht* (quod Antonius Giggæus *ſolitudinem* interpretatur, *Golius* autem *planitiem deſertam*) et دشت قنجاق

Daſchte Kapbgjak vocatur. Situm eius Arabiades in hiſtoria Timuri ita deſcribit : (1) *Regio Daſcht ab aſtro mare Colzum, impetuoſum et naufragiis infame habet, et mare Mezri, porrectum inde a regione Romanorum ſeu CPlitanorum. Haec duo maria ſe contingerent, niſi montes Circasſii interieſti eſſent, quo minus miſcerentur : ab oriente habet fines regnorum Cbouareſmiae et Otrar et Sagnak, et*
poſt

(1) p. 108.

post ceteras regiones pertingit ad Turcestaniam, et terram Getarum, porrigitque se ad confinia Sinarum, in regnis Mogul et Chatai. A septentrione autem Emirus Siberiae et Berar et Kapbar et arend est, sicut montes: et postea cingitur deserto, in quo ferae et aues syluestres vagantur, quae sunt recreationi principibus: nemo persequitur fines eius deserti et extrema eius nemo obit: ab occidente attingit regio Russiae et Bulgariae et quidquid christiani nominis prouinciarum est. Hanc regionis Kapbgjak descriptionem obscuram faciunt quaedam locorum ignota nomina, quae explicanda nobis sunt. Et primum ab austro est mare Colzum. Mohammed Alfraganus (2) alique ita vocant sinum Arabicum, ab vrbe in littore Aegypti, quae Ptolemaei est Clyfma. Arabiades autem mare Caspium dicit. Est enim Arabi huic familiare, ut quod vocabulum alienissimum est ab usu, id maxime usurpet. Bernardus da Parigi, (3) Angelus a S. Iosepho et Meninskius Persis Turcisque *Calsun* et *Colzum* mare Caspium vocari testantur. Thomas Hyde autem (4) Persam quendam producit, qui eius nominis tamquam imperite adhibiti causa, reprehendit populares suos. Gregorius Malatensis *Colzum* vocat Pontum Euxinum: sed aut Gregorius se sefellit, aut imperiti scribae manu hoc insertum fuit. Mare *Mezri* non Aegyptiacum est, sed Magnae Urbis siue CPoleos: nam  *Mezri* quamcunque urbem magnam vocant. Montes Circassii
K k k 2 est

(2) p. 36. (3) *Vocabulario Italiano Turchesco* p. 1321. (4) *Commentario in R. Abramam Peritfol.* p. 65.

est ipse Caucasus. Ad orientem terminatur notis regionibus. Chouaresmia et Turcestania non ignobiles. Regio

Getarum est **قنا** *Kata*, vt Arabiades et quidam

alii, vt plerique autem, *Cbata*, in quo auctor Logat Mesnau
cauillans ait, qui sic scribunt, reuera **خطا** *Cbata*,

hoc est *errorem* scribere. Cataia illa est extra Sinas, vetus Getarum nomen, vt alibi euictum dabo. Paulo obcurius Arabiades Cataiam hanc et Mogulensem terram vsque ad Sinarum regiones intra *Kaphgjak* includit. Sed Taj Altuarich Saadi Effendi in annalibus Ottomannicis et ex eo auctor Nimetullah seu lexicus Persici, in voce *Turc* testantur, Cataeos et Chotenos incolere

دست قیچاق *Desti Kapgjak*. Abulgafus

Bagadur Chan in **شجر قنرک**

Schagjare Turki regionem hanc describit intra flumina

تیز و اتیل و یایق *Tim et Atil et*

Iaik. Tanaim dicit et Volgam, qui Etel etiam CPlitanis scriptoribus vocatur et notum nomine suo Iaicum. Praeterea scribit in *Kaphgjak* coluisse *Vrussos et Olacos et Magjaros et Baskiros*, pulsos autem esse a *Kaphgjako*, qui filius fuit ducis cuiusdam in exercitu Ogusi Chani. Is quia postumus a matre in caua arbore editus, ab eo nomen habuit. Nam veteri lingua Turcica *caua arbor* est *Capshak*. Ab hoc regio, vt is ait, dicta, quod eam et ipse et posterius eius tenuerunt quatuor mille annos, vsque

que ad Gingiscanum. Sunt in his fabulosa, praesertim quod diluuium excedit ille Abulgasi calculus: attamen satis vetus id regionis nomen est, nec Graecis ignotum. Nam cum Polybius *Aspasiacas Nomadas* inter Tanaim et Oxum commemorat, (5) *Ἀσπασιακῶν* plane corruptum est ex *Kapbgjak*. Planities autem ipsa Herodoto et Procopio quoque innotuit; eamque R. Abraham Peritfol vocat *deserta continentis terrae, pertinentia ad Gomer et Magog*, Plinius (6) autem *planitiem immensam et Aegypto similem*.

Me non poenitet a proposito esse digressum ad explicandum huius situm regionis, quod et geographiae pars, quae magna obscuritate vrgetur, explicatio mea opera euasit ad historiae lucem, et simul id effeci, vt nobis constaret, quibus in conuallibus aggerem Gogi et Magogi Gregorius reponat. Quod autem scribit ductum fuisse a

باب الابواب *Babolabuab* ad Pontum vsque

Euxinum, id nos magis confirmat: Nam Derbentum

recentius nomen est a Persis inditum et **در بند** *Derbend*, *ianuae seu portae vinculum* significat, Germanicis fere vocibus. Turcae *Demir capi, ferri portam* dicunt. Et Hayho Armenus: (7) *Miralis, inquit, dicitur porta ferri, quam Alexander firmavit propter nationes gentium varias et diuersas in profundo Asiae habitantes, quas nolebat posse habere ingressum in Asiam maiorem absque suo mandato. Et est illa ciuitas sita in quodam districtu maris Caspii et tangit magnum montem Cocas. Cocas est Cau-*

Kkk 3

ca-

(5) p. 862. ed. Gron. (6) L. VI, c. 17. (7) p. 9.

casus. At Arabes hanc urbem haud fere aliter quam veteri nomine *Babolabuab*, portam portarum nuncupant, in quibus Nassireddinus Tufaeus et Vlugbegus Tattarus eam longitudinis et latitudinis dimensionem ponunt, quae adhuc Derbento eorum auctoritate in tabulis tribuitur.

Quoniam illum adeo celebrem aggerem suis spatiis et regionibus definiuimus, de eo quaeramus, quod opinionibus et sermonibus orientalium populorum vulgatur, Alexandrum Magnum auctorem conditoremque eius muri esse. Non opus est, ut commoueamur, cum tot testes Arabas, Persas, Tattaros nos circumstiteret et vrge re videmus. Nam fieri aliter non potest, quam ut fabulentur, cum Mahometem suum sequuntur, fabulatorem inficetum et ridiculum. Gregorius Malatiensis quidem e Iacobitarum secta Maphrianus fuit, sed et is adulatus est Mahumetanis, quocumque potuit in loco, usque ad turpitudinem et tantum non fuit eius iudicium, ut satis sciret, *quid distent aera lupinis*. Mahometes autem in Surata XVIII. ita scenam instruit: Dulkarnainum ex mandato Dei progressum usque ad eum locum, ubi primum sol oritur, inde prosequentem iter intra duos venisse montes, intra quos populi, nescio, qui, eum exorauerint, ut se contra Gogum et Magogum defenderet ducto aggere: illum vero ope eorum ferrum liquefactum ad murum construendum adhibuisse, vaticinatum praeterea, fore aliquando, superante Gogo et Magogo murum, ut ferrea illa moles in cineres subsidat. Quid huic homini facias? Elephanti corio circumtentus fuit, non suo. Interim assentatores eius illud Artotrogi mussitasse videntur.

dentur: *assentandum est, quidquid hic mentibitur*. Verum in hoc loco interpretes nonnihil dissentiunt. Sunt, qui illum Dulkarnainum contendunt fuisse Arabiae Felicis regem, filium Harethae et patrem Abrahae regum, quorum ex genere Balcais regina Sabae fuisse fertur, quae ad Salomonem venit. (8) Maior autem meliorque pars Alexandrum a Mahomete hic indicari sentiunt, quem cur *Dulkarnain* seu *bicornem* dicant, multae sunt sententiae ab eruditis explicatae. Nec vero haec de Alexandro finxit Mahometes, sed aniles fabulas e Iudaeorum, Arabum, Graecorum scholis et circulis acceptas, tamquam Palladia intulit in commentarios suos *summaque in arce locavit*. Iosephus autem inter Iudaeos primus est, qui tribus verbis Alexandrum claustra Caspia ferreis portis communiuisse tradidit. (9) Cuius quanta in his fides sit, vel ex eo puto liquere, quod Alexandro Pamphylium mare scribit ita ad transitum se apperuisse, ut Iudaeis, Mose duce, sinus patuerat Arabicus (10) ἡ τῆτο inquit πάντες ὁμολογῶσιν ὅτι τὰς Ἀλεξάνδρου πράξεις συγγραψάμενοι. Quae illa est impudentia! Rem eandem de Alexandro, auctore muri et debellatore Caucaseorum populorum orientales omnes in scripta retulerunt, quo etiam illud spectat, quod Musladinus Sadius Schirasensis in Gulistan canit, Alexandrum magnis cum molestiis ingressum esse Cimmeras tenebras. (1) Samaritani autem in libro Iosuae, seu chronico gentis suae sub primis CPlitani

im-

(8) *Abrahamus Eccbellensis in chronico orientali f. 254.* (9) *de B. I. L. VII. c. 29.* (10) *in archaeol. L. II. c. 7.* (1) *f. 503.*

imperii temporibus edito (quod e codice Goliano descriptum habeo) Alexandrum comminiscuntur, Indiam Persiam et *BiladilRum* hoc est, Asiam minorem et quidquid in Syria Mesopotamiaque Romani iuris eo tempore erat, ceterasque prouincias sub iugum misisse, tum autem desiderio videndi *terram Seir* ingressum esse tenebras: *Et ingressi sunt* (Macedones) *iter trium dierum in tenebris, dein tenuerunt terram, quae supra regionem hanc sita erat et hostiliter inuaserunt contemplatique sunt in luce.* Tum vero gemmarum, vnionum, aurique montes visi sunt: quid enim e Cimmeriis tenebris repente prodeuntes et ad defuetam lucem caecutientes non videre sibi viderentur? De muro tamen illo nihil Samaritani. At Hegeſippus, non ille quidem ad eò antiquus, sed qui plurima a Iudaeis, hoc est, e vano hãusit, ita omnia narrat: per claustra ferreae „portae, quae Alexander praerupto Tauri montis iugo „imposuit, cum ceteris gentibus fuisse coercitos Alanos: „incoluisse autem eos Scythicum Tanaim finitimaque „eius et Maeotin paludem, et veluti quodam carcere illius arte et ingenio inclusos, vt suis se continerent terris, „alienas non incurſarent. Haec ita in oriente percrebuerunt, vt ad Procopii quoque aures peruenirent. Et Geruasius Tilberienſis sic fatur: (2) *in India est mons Caspius a quo mare Caspium vocatur, intèr quem et mare, Gog et Maeog, ferocissimae gentes a Magno Alexandro inclusae fuerunt, quae humanis carnibus et belluanis crudis vescuntur.*

Iam quae ex incorruptis Graecorum monumentis comperta tenemus, ea minime nobis permittunt credere
illis

(2) T. I. Script. Brunſuic. f. 911.

illis, Alexandrum ad hunc Caucasum excursionem fecisse. Alexander Olympiade CXI. 2. primo vere Eleunte soluit et ad Sigeum adpulit, ad Granicum autem pugnavit Thargelionis sexto die, seu Maii Iuliani die XXII. Inde Cariam Phrygiam Lyciam Pamphyliam ingressus, superatis Ciliciae et Amanicis Tauri claustris in Syria ad Issum mense Macmaesterione, qui nobis October est, praelium alterum commisit. Ex eo per se quisque intelligit; tempus Alexandro superfuisse nullum, quo veluti otiosus excurreret ad Caucasum. Post ea Tyrum obsedit septem menses et summa vi cepit, Olymp. CXII. 1. Hecatombaeonis *ἑκατόμβης*, seu Sextilis Iuliani vicefimo. Vrbe ea occupata Aegyptum petiit, ordinatisque rebus ab ora Hellepontis vsque in Aegyptum, ad Thapsacum rediit Olympiadis CXII. 2. Hecatombaeone, seu Quintili Iuliano. Cum exercitu Persico pugnavit ad Arbelam seu Gaugamala, Pyanepsione, seu Nouembri mense. Darius eo praelio victus mulieres et reliquum regiae suae apparatus ad Pylas Caspias misit. (3) Alexander autem magnis itineribus Persepolin festinauit, et Darium in Media castra habentem secutus, cum isthic neque Scythas, neque Cadusios auxilia ei misisse, ut fama vulgauerat, ab Ecbatana cognouit, cum paucis equitibus persecutus est fugientem in Parthiam. Hic quidem Arrianus scribit, (4) Alexandrum ex Media in Parthiam irrupisse per Pylas Caspias, sed quaecumque illa intra Mediam Parthiamque claustra fuerunt, non utique sunt Caspia, quae quaerimus. Quod sane Plutarchus vi-

LII

dit,

(3) *Arrianus p. 205. ed. Blanc. (4) p. 208.*

dit, (5) qui ex eo argumentum ducit, Iberos Macedonum imperium declinasse, *Ἀλεξάνδρου διὰ ταχέων ἐκ τῆς Υερκανίας ἀπαρόντος*, quod *Alexander raptim excessit ex Hyrcania*. Inde vero Bactrios et Indos adiit et ex his terris redux Babylone decessit. Non satis mihi est, coarguisse fabulam, nisi ipsam originem eius patefaciam. Alexander Zopyriona miserat in Pontum, belli ducem. Is mouit in Scythas, (6) hoc est, ad Caucasea claustra, et, si Macrobio credimus, (7) vsque ad Borysthenitas peruenit in armis. Caesus autem est cum XXX. millium exercitu. Nunc fabularum *accipe insidias, et crimine ab vno, discite omnes*. Habes enim insigne exemplum ingenii eorum, qui superioribus seculis, ex minimis quibusque argumento suspicandi capto, alia commenta ex aliis seuerunt. Scythae (vt illi interpretabantur) et Sarmatae et Poloni, gens eadem vnumque corpus. Ergo victoria Scythica vertitur in gloriam Polonici nominis. Victi superatique sunt graui bello Macedones a Polonis, vt Vincentio Cadlubeco visum est, victus (quid enim dissimulem?) Alexander. Porro Quirites! veritatem amittimus. In XXX millibus non est verosimile caesos fuisse ad vnum omnes, sed aliquos cladi superfuisse. Quonam existimemus, eos se recepisse? Inclusi erant ab asperissimis regionibus et infestissimis gentibus. Spes omnis terrestri itinere per inuictos populos reuertendi conciderat. Ergo tutius mari Caspio et nauibus se committebant. Quo autem exitus patebat? Nempe in orientalem et septem-

(5) in *Pompeio* f. 637. (6) *Iustinus* L. XII. 2.
 (7) p. 238.

ptemtrionalem oceanum. Iam in portu nauigabant, cum Balticum e septemtrionali mari tenerent, et expedita erat via in Franconiam Saxoniam Prussiamque meam. Nam Scandinauia, vt veteribus visum, insula est. Vnum ego testimonium adponam e geographo Rauennate, (9) qui ea hausit ex Graecis, *a parte septemtrionale habet totus mundus finem praedictum oceanum, qui venit de India Serica Bactriana et portas Caspias, (lege portis Caspiis) qui oceanus tangit Scythiam eremosam, iterum Amazonas, vbi eas, postquam egressae sunt de montibus Caucasii, fuisse legimus: postmodum tangit ipse oceanus Roxolanos, nec non Sarmatas, item Scythas, postmodum Rerefenos, et Sidesfenos: verum etiam Germani, vbi egit habitare, (fortassis etiam Germanos ibi aiunt habitare,) Danos, nec non Saxos (Saxones) etiam Frixas (Frisios.) Amazonas autem egressas, vt ait e Caucasii montibus, iuxta Colchidem ponit (10) et Scanziam seu Scandinauiam non aliter quam insulam vocat.*

Quid, malum, inquires, his coniecturis potest excogitari pinguis? Verum illud quidem, attamen verte-
re haec in historiam iis temporibus, cum tam infeliciter scriptores utebantur vetustarum rerum monumentis. Itaque Otfridus monachus Francicas stirpes, Vitechin-
dus Corbeiensis et Gotofredus Viterbiensis Saxonicas repetunt a Macedonibus. Albertus Staden-
sis etiam Prussicas, Rugianas et Holsatias. *Inuenitur, in-*

LII 2

quit,

(9) p. 293. ed. Porchetonis. (10) p. 140.

quit, quod reliquiae fuerint Macedonum et mortuo Alexandro, per totum orbem sint dispersi: quia enim Alexander virtute eorum deuicerat Asiam, eo defuncto, se illi terrae amplius committere non audebant, sed cum trecentis nauibus recesserunt, quae omnes perierunt, exceptis quatuor et quinquaginta, quarum octodecim Pruciam occuparunt, duodecim Rugiam, quatuor et viginti applicuerunt ad Albiam, quarum vna, trans Albiam, Syluam incoluit et succidit, in qua postea sunt inuenti et Holsati appellati. Nondum satis exculpta fabula, accessit Gobelini Personae nobile ingenium: iter enim aditusque omnes patefecit ὁ δαιμόνιος Macedonibus fugitiuis in Prussiam. Macedones, inquit, quos Alexander apud montes Caspios, tamquam sibi fideliores ad custodiam patriae reliquerat, audientes eum esse mortuum, turbati sunt valde et perpendentes odium incolarum, per terram redire in Macedoniam desperabant: quare trecentis nauibus praeparatis, miserunt se in mare Caspium et diu nauigantes per mare oceanum, sedes sibi quaerebant: sed dum longius oberrabant, maris tempestate omnes naues eorum praeter LIIII perierunt, de quibus tandem XVII naues intrabant Pruziam et XII naues terram Rugen et littora maris propinqua. Intelligitis, opinor, fabulas similes esse lolio, fatas e paruo semine, nactasque vbera, sed luxuriantia magis quam culta ingenia, in immensum illis temporibus accreuisse, nunc vbi messis facienda est, purum historiae frumentum fecerendum esse a lolio.

Est praeterea alia fabulae illius et huius origo. Alexandrum res gefisse ad Caucasum, a Graecis quibusdam

dam Arabes acceperunt. In iis est Dexippus, (1) qui Alexandrum ad Caucasum et Maeotin, partis victoriis, in Indiam vertisse scribit. Dexippum Diodorus Siculus secutus est, (2) ut ex fragmentis illius colligo. Ceteri scriptores tantummodo Caucasum commemorant, omis-
sa Maeotide. Vocant autem Caucasum, non hunc nostrum, sed Paropamisum supra Indiam et Bactriam. Originem erroris apperuerunt Strabo (3) Plutarchus in Alexandro (4) et Arrianus in Indicis (5) quamquam hic in historia Alexandri incautus egit, Aristobuli auctoritate deceptus, qui adeo stolide se dederat in historia, ut, cum in Hydaspes Alexandro recitaret, is librum eum abiiceret in fluvium, parum ut abesset, quin Aristobulum simul daret praecipitem prae indignatione. (6) Cum Alexander superatis Bactris, in Sogdianam et ad Paropamisum deflexisset, venit Macedonibus in mentem Caucasus, quem in scena audiuerant Athenis, ut per Graeciam omnem, celebrari, atque ut eum in partem gloriae traherent, Paropamisum vocauere Caucasum, fluviumque Orxantum, ut Plutarchus putat, credidere esse illum Scythicis armis terribilem Tanaim. Iam ad Tanaim et Maeotin audiuerant Amazonas antiquitus degisse. Ergo eas quoque Alexandri rebus sine pudore miscuerunt elegantes homines. Venisse reginam cum magno comitatu quaesitum ex Macedone liberos, et ut impletam se

LII 3

sen-

(1) *Excerpta Eusebii Graeca* 57. et *Cedrenus* (2) L. XVII. 83. (3) f. 787. (4) f. 690. 691. (5) p. 511. (6) *Lucianus quomodo historia conscribenda* p. 610.

senfit, rediisse ad Tanaim suum. Apud Plutarchum multa exstant, ex quibus haec vanitatis coarguuntur. Quis enim grauior est auctor Alexandro ipso? e cuius accuratissimis ad Antipatrum mandatis hoc vnum proditum est, Scytharum regem nuptias filiae obtulisse. Et cum Onesicritus haec de Amazonibus historiae suae inseruisset, Lyfimachus rex, qui expeditionis ad Paropamisum comes fuerat, recitantem Onesicritum memorabili dicto repressit, *καὶ πῶς τότε ἤμην ἐγώ;* atqui, *vbi, malum, ego, cum hoc accideret, fui?* Vt autem ille de Caucaſo error Macedonum animis se insinuaret, magna regionuum imperitia effecit. Nam Graeci post Herodotum, vt ex Argonauticis maxime scriptoribus et Dionysio Periegete et Eustathii parecbolis Dionysianis liquido intelligimus, Asiam sub septemtrione omnem arctioribus spatiis contrahebant, vt Pontum Euxinum proxime ad Caspium mare et aliquanto borealiorem ponerent, Maeoti palude Caspioque mari alueo quodam communi coniunctis. Ita Tanaim ab oriente ducebant, et Caucaſum montem sub Tanai porrigebant vsque ad extremum orientem. Turbato totius orbis situ, Chorasmos prope Colchos et Scythas ponebant et Pharaesmenem Chorasmiorem regem, vt est apud Arrianum, narrabant, ad Ponticam et Scythicam expeditionem se Alexandro obtulisse ducem, velati viarum, ob tantam regionis vicinitatem, gnarum. Nempe Diodorus (7) in descriptione Asiae, ad orientem et septemtrionem prouinciam recenset vltimam Sogdianam et Bactrianam, haud longe a Tanai et Indiam

Cau-

(7) L. XVIII. 5.

Caucaſo terminat. Idem ille Diodorus (8) Alexandrum tradit ſedecim diebus traiecto Paropamiſo, urbem condidiſſe Alexandriam in Caucaſo, qua in Mediam via aperiatur. Habuit igitur in animo clauſtra Caſpia et Derbentum urbem. Ab hoc quoque orientali Caucaſo Polybius (9) Oxum fluere tradit. Praeter hanc geographiae adeo perturbatam faciem, alia res etiam Macedonas in errorem ſeduxit, Strabone iudice. Imenerant in Paropamiſo ſacram quandam et horribilem ſpeculuncam: eam illico comparabant cum tragoediis ſuis, in eaque Prometheum fuiſſe vinctum et ab Hercule liberatum ferebant. Talibus cothurnis inceſſit fides rerum ab Alexandro ad Caucaſum geſtarum. Neque id adeo mirandum eſt. Sunt enim in Alexandrii rebus multa alia incredibilia, vt Hieronis alicuius aut Gelonis aut Clearchi res multo celebratiores euaserint fide et auctoritate prodentium, quam tanti herois, ſicuti Arrianus cenſet. Et adhuc indignabitur quiſquam, ſi orientales multo his vaniores, temere omnia credidiſſe dicimus, et conſuſa perturbaviſſe magis, et fabulis aſſuiſſe fabulas?

Quae neque futura, neque facta ſunt, tamen illi ſciunt.

Falſon' av vero?

Non flocci faciunt: dum illud, quod lubeat, ſciant.

Ex quo fonte igitur opinio illa manauerit, inuicte declaravi. Simul adparet, qua cauſa Derbentum ab Alexandro conditum ferant. Nam, vt Arrianus (10) habet, ad Paropamiſum Alexandria ab eo eſt condita. Plinius (1) oppidum illud ſupra Indiam collocat. Eius

rei

(8) L. XVII. 83. (9) p. 863. (10) p. 230. (1)
L. VI 23.

rei memoria conseruata est, sed tracta in diuersa, gentium ambitione. Nam Mugalenses quoque contendunt in regione ea, quam tenent, Alexandrum res gessisse et vrbes condidisse. Testimonio illis sunt loca, nunc deserta quidem, sed ruinis ingentibus aduertentia oculos iter facientium, quorum octo numero nonnemo cum per Selengam Sinas peteret, se animaduertisse Nicolao Vitfenio (2) retulit. Nec tantum eductas e saxo domos, sed fratas quoque lapide vias. Haud longe a muro Sinico ruderata et columnae lapideaeque turres adparent. Haec oppida Alexandrum euertisse Mogalenses opinantur. At in alia Mugalensium desertorum regione (3) vrbs est *Jki Burchan Koton* seu *Trimingzing*, (Rutheni *Bogatiri*, hoc est, *beroum urbem* vocant) eam autumant urbem Alexandrum condidisse. At, vt diximus supra, alii Alexandriam eam ponunt ad Caspia claustra, rursus alii ad Caucasea, vbi adhuc nominis illius oppidum est. Non, quo ab Alexandro conditum putem, sed quod seu nomen eius in omni fere Asia illustre, impostum est vrbibus etiam posteriori tempore conditis, seu quod alii principes eodem nomine, vrbes a se conditas, a se dici voluerunt. Fuere autem in Georgia, et Mingrelia multi principes Alexandri.

Quaeret nunc quisquam, quem ego conditorem muri huius fuisse censeam? Ego vero vtinam vera ita confirmare possim, quam facile aliena a fide destruxi. Sed
in

(2) Nic. Vitfenius in Tattariae descriptione *Noord en Oost Tartarye tweede druk t' Amsterdam 1705. parte II. p. 98.* (3) *ib. f. 127.*

in tam obscura et in corruptis monumentis destituta re, malim conuellere popularem opinionem, quam meam inferere. Si quis Medos prima fundamenta claustrorum iecisse autumat, ego non intercedo. Nulli enim populo concessere in magnificis sumptuosisque operibus. Haud procul a Babylone absuit τὸ Μηδείας τῆχος *Mediae murus* latitudine XX pedum, altitudine C. longitudine XX parasangarum, totus operelateritio. (4) At Larissae et Mespilorum rudera Xenophonti visa, illa, C pedum hæc L, pedum altitudine, fundamentum ostentarunt λίθου ξενῶ κογχυλιάρου, vt in hoc muro Caucaseo. Super eo fundamento lateritius murus fuit. (5) Forte ab Medis quoque claustra Ciliciae Syriaeque, muro ducto castellisque vsque in mare communita sunt, quae Xenophon eleganter descripsit. (6) Et Medos Scythae graui bello ac seruitute sex annorum affixerant, vt eos non modo naturae munitis, sed etiam artis moliminibus coerceri consultum videretur. A Medis ad Persas claustrorum illorum possessio transit. Quapropter Ibn Phacreddin Angjou homo Persa, (7) totius regni Persici tractum a *Babolabuab* ad Omanicum vsque mare, hoc est, ad sinum Arabicum definit et ab Oxo vsque ad Euphratem. Ultra Caucasum satis constat Persas nihil tenuisse. Deuictis Persis, hæc claustra et mare Caspium in Macedonum potestate fuerunt Nam de Seleuco Nicator Plinius tradit, (8) circumuectum eum esse Caspium mare, circumuectum etiam

M m m

i a m

(4) *Xenophon in expedit. Cyri L. II. c. 4.* (5) *ib. L. III. 4.* (6) *ib. L. I. 4.* (7) *apud Thomam Hyde in historia religionis Persarum p. 418.* (8) *L. VI. c. 17.*

iam Antiochum Seleuci filium et praefectum classis eorum Patroclen. Et erat regnum eorum vsque in Indiam protensum, mari Adriatico et Ponto Caucasoque inclusum, quantum antea Persarum fuerat. Murum autem ante Seleucum Nicatora ductum in Caucaso fuisse nullum, ex eo mihi fere videor intelligere, quod in Plinio (9) extat his verbis: *Claudius Caesar a Cimmerico Bosporo ad Caspium mare CL millia prodidit: eaque perfodere cogitasse Seleucum, quo tempore a Ptolemaeo Cerauno est interfectus.* Nam illud consilium non tantummodo videtur pertinuisse ad vtriusque maris coniunctionem, verum etiam ad munimentum regni aduersus barbaras gentes, quo veluti ripa striga esset. Si igitur ab Antiocho Sotere aut ab Antiocho Theo murus primum ductus fuerit, non est mirandum, quod Alexandri vocatur. Nam quaedam, quae ἐπιγονοὶ eius gesserunt, huic tribuntur Alexandro. Luculentum exemplum est, quod orientales *aerem Alexandream* et *aerem Dulkarnain seu Bicornis*, dicunt eam epocham, quae a Seleuco Nicatoris, duodecimo post Alexandrum defunctum anno instituta est. Sub Seleuco Callinico Nicatoris pronepote iam fractae sunt vires Seleucidarum, cum Parthi defecerunt. Armeni quoque et Hyrcani extulere caput. Et *Hyrchanum regem τῆς παρῶν δεσπότῃν Caspiorum claustrorum dominum*, Vespasiano imperante fuisse, Iosephus auctor est. (10) Caucasea tenebantur a Ponti regibus et deuicto Mithridate in Romanis diuionibus censebantur. Iberi autem custodie

(9) L. VI. c. 11. (10) de B. I. L. VII. c. 29.

stodiebant. (2) Eo autem tempore murum iam concidisse credibile est, quoniam mentionem eius fieri non inuenimus apud illos, qui portas tamen Caucaſeas non ignorarunt.

Cum Mahometani duce Gjerai Chano Derbentum et Anderum vrbes occupassent, Muhamed Auabi Akraſſi inſiſtus est, vt, excuſſis Arabum Perſarumque ſcriptis, antiquitates Dageſtanas Turcice commentaretur. Is liber a praefecto vrbs dono datus est PETRO Augusto, atque nunc in collegio exterorum negotiorum aſſeruatur. Scribit autem, murum Caucaſeum ab Alexandro conditum denique ita corruiſſe, vt vix veſtigia extarent. Cubadem autem, patrem Nuſreuani, Perſarum regem, bellum geſſiſſe cum Hacano, rege Turcarum et Hyrrorum. Hacanum illum dominatum fuiſſe regno Nucrato et Ruſſis vniuerſis, exercitum quadricies mille militum habuiſſe: tandem pace compoſita, Hacanum in matrimonium dediſſe Cubadi filiam, actumque eſſe inter ſocios reges de muro condendo, quo ſecernerentur prouinciae: Cubadem autem a Gabriele angelo admonitum de Alexandri muro, ſuper iſtis fundamentis, ab arena aggeſta perpurgatis, inaedificaffe partem muri meridionalem, intra annum vertentem, atque deinceps quod reliquum erat a mari vsque ad vltiorem partem Tibriferani (quae vrbs a Derbento nonaginta agaris diſtet, ſtadiis Ruthenicis admodum quadringentis et quinquaginta) perduxiffe et ferreis portis comuniuiſſe intra annos ſeptem, vt centum milites aduerſus centies mille hoſtes ſe defendere poſſent. Ab eo

M m m 2

tem-

(2) *Iosephus de Antiq. L. XVIII. 6.*

tempore Armeniam Mediamque ab incursionibus hostium tutas fuisse. Cubadem, ordinatis ad vtriusque muri portas custodiis, filiam Hacani post vnius conditionem noctis remisisse ad patrem, dissimulantem hanc tam grauem iniuriam, et reuersum esse in Aderbeidrianam, seu Mediam et Arak seu Parthiam. In his quaedam accedunt ad veram historiam. Versamur enim iam in illis temporibus, in quibus historia Persica et orientalis paene omnis, e fabulis ad veritatem, veluti de nocte vergit in diluculum. Erit igitur operae pretium, ista exigere ad nostrorum testimonia scriptorum. Quod de Chacano Turcarum Hirrorumque rege habet, is est titulus, qui Hunnis Turcis et Tattaris summae maiestatis fuit. Hirri autem sunt *Oigur*, populus, cuius res nunc ex Abulgaso Chano nobis factae notiores. Haec leuiter attingo, quod, nisi temperarem impetum, praeuideo me abreptum iri in prolixam rerum illarum commentationem. Iam licebit Procopium comparare cum Acrasio. Is, postquam bella Ephthalitarum Hunnorum cum Peroze patre Cubadis attingit, proditque Perozen per insidias ab Hunnis circumuentum caesumque cum omni exercitu, et Cubadem annos duos tributa Hunnis pependisse, venit ad mentionem Caucasearum portarum, quas, vt dixi supra, confundit cum Caspiis. Hoc etiam ex ipsa re elucet, quam e Procopio narraturus sum. Loca enim, quae ad Caspia claustra vergebant, in Persarum potestate erant, vna cum Armenia orientali, quam idcirco illorum scriptores temporum Persarmeniam vocant. Scribit igitur Procopius (3) portas Caucaesas multorum in potestate fuisse, donec

cas

(3) f. 28.

cas tenuerit Ambazuces Hunnus, Anastasio et Romanis impense amicus. Is extrema iam aetate legatos misit ad Anastasium, pecuniae certam summam petiit, portas et arcem Romanis traditurus. Anastasius consilio inito deprehendit, molestam militi Romano earum custodiam fore, quod comneatus in loco rebus omnibus nudo aegre subueheretur, quodque gentes circum illa loca Romanis non essent subiectae, legatis humaniter appellatis, carere se castello posse ostendit. Post mortem Ambuzacis (4) Cobades ex castello filios eius eiecit Persicumque praesidium imposuit. Post id tempus Iustiniano imperante et rebus orientis a Belisario praeclare administratis, missus est ad Cubadem Rufinus legatus de pace. Cubades autem multa questus est apud Rufinum de Iustiniano et Romanis. Se claustra Caucasi, cum Anastasius emere nollet, ne, alendo ad eorum praesidium milite, sumptus faceret, occupasse, communi Romanorum suoque commodo, ne ea barbari in Romanas suasque prouincias irrumperent, se numerosissimum exercitum tutandis illis angustiis imposuisse et aluisse suis sumptibus, Romanorum compendio. Ita, dum exercitum vnum obiicit barbaris, ne omnia ferre et agere in suo Romanoque agro possint, iniustum esse, Romanos non quiescere, vt necesse sit, alium exercitum iis obiici, quos aduersus externam vim tutaretur. Diu se postulasse, vt Romani aut finibus Persicis (tota Mesopotamia) excederent, aut, si bellum facere suis prouinciis vellent, cura alterius exercitus alendi se leuarent, aut saltem ad tuenda

Mmm 3

Cau-

(4) *ib. f. 46.*

Caucasi claustra parem militum numerum mitterent, sumptusque alendi praesidii secum partirentur. Pacem coitutam non esse, nisi alterutrum Romani faciant. Haec anno quarto Iustiniani Cubades a Rufino postulauit. Insecutum est bellum, Romanis neutram conditionem accipientibus. Id bellum Romanis prouinciis excidium attulisset, ni Cubades vita defunctus et Chosroes Hunnorum irruptionibus fuisset exagitatus. (5) Ad eum cum legati a Iustiniano essent missi, de pace conuenit. Inter ceteras conditiones latum, vt, nisi Romanis videretur communi cum Persis praesidio claustra Caucasi tutari, centenaria CX hoc est, vndecies centena millia auri pondo Persis appenderent. Nec diuturna pax fuit. (6) Chosroes enim haud ita multo post Syriam inuasit et Antiochiam cepit. Ad Antiochiam de pace actum. Chosroes Romanis eam legem tulit, vt in praesenti quingenta, in singulos autem annos quinque centenaria auri tributum penderent Persis ad praesidium Caucasi excubantibus. Is Chosroes est, quem Persae Nusriuanum cognomento Cosres vocant, omnium ante se regum longe maximus. A cuius potentia non abhorret tanti muri machinatio: et longum fuit illius imperium, vt perficiendo operi sufficeret. Nam, teste Georgio Syncello, (7) annos octo et quadraginta regnauit. Ad postremum non praetermittendum duxi locum Gregorii Malatiensis, qui postquam murum ab Alexandro conditum perhibuit, in eam sententiam fatus est. Reges Persarum non destitisse, quaerendo muro, donec eum reperiret Jazdegerdus filius Bahram lu-

(5) *ib. f. 64* (6) *f. 112.* (7) *f. 360.*

Juri, Jesdegerdi nepos, Saporis pronepos: eum vero murum lapidibus ex aere et plumbo extruere coepisse, nec tamen perfecisse. Cosroam Nufriuanum denique summis montium fastigiis murum adiunxisse, et in mare produxisse mille passus, portisque ferreis clausisse, ut a centum hominibus ea regio obsideretur, quam vix centies mille defendissent antea ab excursionibus: perfecto opere statuisse eum, ut praefectus regionis, honoris causa, solio aureo insideret. Quae postea acciderunt, praesertim sub Iustiniano Rhinotmeto, ca breuitatis causa consulto praetereo. Hunc enim industriae nostrae modum statuimus.



OBSER-

**OBSERVATIONES
ASTRONOMICAE
PETROPOLI
FACTAE**

Monitum.

AD calcem cuiusque Tomi horum Commentariorum Academicorum reservabitur Diarium Observationum Astronomicarum; idque potissimum hunc in finem, ut tempus suppetat recipiendis Exterarum Regionum Observationibus, respondentibus illis, quæ quolibet anno fient Petropoli in Observatorio Imperiali, aut aliis in locis Imperii Russici. Inserentur igitur ex his Observationibus peregrinis illæ, quæ aut coincident cum nostris, aut quarum comparatio cum nostris utilitatis aliquid ad promovendam Astronomiam et Geographiam asferre videbitur.

Recensentur autem in primo hoc Tomo non nisi Observationes Satellitum Jovis, quarum ope stabilita fuit differentia Meridianorum Petropolitani et urbium totius Europæ celeberrimarum, e quibus Observationes nostris congruas accepimus. Differuntur in proxime sequentem Tomum horum Commentariorum, illa, quæ facient ad determinandas buius nostræ urbis Latitudinem et Refractiones.

Ecli-

**ECLIPSES SATELLITVM IOVIS,
OBSERVATAE PETROPOLI,**

a

Fratribus

Iosepho Nicolao deL'Isle

&

Ludovico deL'Isle de la Croyere.

Ann.	N. S.	temp.	vero.
1726	10	12 ^{b.} 47 [']	0 ["]



Immersio primi satellitis, observata per Tubum Campanianum 15. ped.

nocuerunt autem eo tempore nimia crepusculi claritas, atque adhuc alia; unde ultra minuta prima in definiendo tempore non licuit assurgere.

Aug. 9 14 51 30

Immersio primi satell. per eundem Tub. 15. ped. aliumque 20 $\frac{1}{2}$ ped. observata. Ob eadem vero quae antea impedimenta, fides haberi assignato tempori non potest, nisi extra $\frac{1}{4}$ minuti unius primi.

N nn 2

Im-

1726 Aug.	18	^{b.} 11	15	46	Immersio primi per Tubum 15. ped.
			11	15 52	Per Tubum 20½ ped. cœlum serenum & aër tranquillus erat, non procul autem a Iove Luna.
Sept.	10	11	32	51	Immersio primi per Tub. 15. ped.
			11	32 56	per Tub. 20½ ped. tempestate valde serena & tranquilla.
	22	16	13	20	Immersio secundi per Tub. 15. ped. tempestate satis serena, non obstantibus nubeculis quibus- dam.
Oct.	19	12	21	46	Emersio primi. per Tub. 15. ped. Satelles autem Iovi valde vicinus erat.
		28	8	47 8	Emersio primi. per Tub. 15. ped. intra aliquot minuta secunda.
Dec.	6	7	11	18	Emersio primi, per Tub. 20½ ped.
		10	30	31	Emersio secundi, per Tub. 20½ ped. exacta.
		10	30	38	per Tub. 15. ped. exacta.
	29	7	15	36	Emersio primi, Tub. 20½ ped. exacta.
		7	15	48	Tub. 15. ped. exacta.
1727 Ian.	2	10	59	46	Immersio tertii per Tub. 15. ped. cœlo nebuloso.

per

1727 Ian. 2. ^b 11 ^o 17

per Tub. 20½ ped. puto autem hanc alteram observationem certiore, & exactam intra pauca minuta secunda. Quamvis enim cœlum serenum videretur, non ita tamen distincte apparerat Iupiter uti alias solebat, transiens nempe subinde per vapores, qui ipsum deformabant, coloribusque inficiebant.

7 10 9 56

Emerfio secundi per Tub. 20½ ped.

10 10 4

per. Tub. 15. ped.

Febr. 1 7 17 15

Emerfio secundi per Tub. 20½ ped. exacta.

Aug. 5 11 52 23

Immerfio tertii per Tub. 22. ped. cœlo sereno & tranquillo; tardus autem huius satellitis motus impediēbat certitudinem immerfionis usque ad aliquot minuta secunda. Præterierant iam iam 4 aut 5 minuta prima ab initio diminutionis.

7 10 59 27

Immerfio primi per Tub. 22. ped. nocuit autem Iupiter horizonti proximus.

8 13 37 9

Immerfio secundi, per Tub. 22. ped.

21 14 50 30

Immerfio primi, per Tub. 22. ped.

N n n 3

Immer-

1727 Aug.	30	11	15	18	Immersio primi per Tub. 22. ped. cælo sereno & quieto.
Sept.	2	10	43	57	Immersio secundi. Tubo 22. ped. cælo sereno & tranquillo.
	6	13	11	24	Immersio primi per Tub. 22. ped. non detegebatur autem prius Iupiter, nisi imminuto iam Sa- tellite.
	9	13	21	35	Immersio secundi per Tub. 22. ped. cælo sereno.
	10	9	34	30	Emersio tertii per Tub. 22. ped. cælum erat tranquillum, sed non ubique serenum.
	15	9	36	32	Immersio primi per Tub. 22. ped. cælo sereno & tranquillo.
Oct.	31	10	8	48	Immersio primi, per Tub. 15. ped. Dubia nonnihil ob ventum, nubes & viciniam Lunae.
Dec.	2	8	46	30	Emersio primi. per Tub. 22. ped. exacta, tempestate valde se- rena, nec obstante vicinia Sa- tellitis & Iovis.
	12	14	6	0	Emersio tertii. per Tub. 22. ped. cælo tranquillo, sed non plane sereno.
1728 Ian.	8	12	14	44	Emersio secundi per Tub. 15. ped. certa non nisi intra aliquot min. secunda ob impetus venti.
	12	33	34		Emersio primi per Tub. 13. ped. intra aliquot min. secunda ob eundem ventum.

ped.

1728 Ian.	10	5	58	7	Emerfio tertii per Tub. 22. ped. aliquot min. secundis incerta, ob ventos vehementes.
		7	0	12	Emerfio primi, per Tub. 22. ped. nocebant venti.
	17	7	56	31	Immerfio tertii, per Tub. 13. ped.
		8	53	4	Emerfio primi, per Tub. 22. ped. exacta.
		9	55	14	Emerfio tertii, per Tub. 22. ped. bona.
Febr.	16	10	59	26	Emerfio primi, Tub. 22. ped. intra pauca m. sec.
	18	5	28	20	Emerfio primi. Tub. 15. p. cælo fereno, sed claro adhuc crepusculo.
	25	7	24	10	Emerfio primi Tub. 22. p. cælo fereno.
	27	6	40	5	Emerfio secundi Tub. 22. p. cælo fereno & tranquillo.
	29	8	0	29	Immerfio tertii per Tub. 22. ped. cælum ferenum erat & tranquillum, incerta tamen est hæc observatio intra 10. aut 15. min. secunda, evanefcente, & redeunte Satellite aliquot vicibus.
Mart.	10	11	18	19	Emerfio primi, per Tubos 13. & 15. ped. cælo fereno & tranquillo.

Im-

1728 Apr. 12 8 16 12

10 30 40

Immersio tertii per Tub. 15.
ped. cœlo sereno & tranquillo.Emersio tertii, per Tub. 15.
ped. cœlo sereno & tranquillo;
quamvis autem Iupiter non mul-
tum supra horizontem elevatus
fuerit, observatio certa est intra
paucula quaedam min. secunda.*Notae ad has Observationes.*

Primæ harum Observationum usque ad mensem Fe-
bruarii 1727. factæ sunt per Telescopia 15. & 20 $\frac{1}{2}$
pedum, a Fratre meo de la Croyere & a me. Frater
meus sæpissime adhibebat Telescopium Campanianum
15. ped. ego vero aliud 20 $\frac{1}{2}$ ped. cuius ope immersiones
primi & secundi satellitis sex aut septem min. secundis tar-
dius observabam quam frater meus ope sui Tubi; Emer-
siones contra citius ego detegebam, plane ita, uti huius
rei sæpius experimentum cepimus in Gallia, utque etiam
apparet ex his nostris Observationibus, Augusti 18. Sept.
10. Decembr. 6. 1726. nec non Ianuarii 7. 1727. Ob-
tulit sese interim quoque differentia 12. min. secundorum
in Emersione primi Dec. 29. 1726. ut alias maiores ad-
huc taceam, nempe 21. min. secundorum in Immersione 3.
Ian. 2. 1727, tribuenda vero est hæc ultima differentia
tarditati motus huius satellitis, circumstantiisque etiam
temporis, quæ in latere observationis notatæ sunt.

Postquam deinde Frater meus mandato Imperiali
hinc

hinc Archangelopolin profectus effet mense Aprili 1727. deportassetque secum Telescopium $20\frac{1}{2}$ ped. ego in reliquis Observationibus frequentissime usus sum Tubo 22. ped. cuius ope, ut multis vicibus Parisiis expertus sum, Immerfiones primi & secundi satellitis 5. aut 6 secundis tardius animadvertere mihi licuit, quam ope Tubi $20\frac{1}{2}$ ped.

Inserviit mihi quoque aliquando in ultimis hisce Observationibus Telescopium Campanianum 15. ped. aliudque in Anglia elaboratum 13. ped. quod multa claritate obiecta exhibet. Quin etiam sæpissime observationes habitæ sunt per tres hosce diversos Tubos 13. 15. & 22. ped. adiuuantibus me post abitum Fratris mei Dnis Krafftio & Vignon; at vero cum non semper accideret ut momenta Observationum tanto præcise intervallo inter se distarent ac Tuborum longitudines illud requirebant: adscribendum id esse putavi diversæ oculorum constitutioni; itaque consultius esse credidi ut recenseam ex omnibus his observatis ea, quæ maximam partem ipse ego definivi ope Telescopii omnium nostrorum longissimi. Ab initio etiam cum meus adhuc frater mecum esset, hoc aliquoties premebamur incommodo, ut per quosdam dies, in hieme præsertim, Sol non conspicuus esset, quod etiam sufficiebat ad errorem aliquem tempori inducendum. Eiusmodi Observationes, quarum tempus verum incertum est ex hac ipsa causa quam allegavi, sunt maxime Octobr. 19. 28. 1727.

Sequentibus temporibus anni nempe 1727. & 28. certior magis fui de tempore vero, exigendo sæpius quam

○ ○ ○

alias

alias motum horologiorum ad Solem, favente nimirum occasione, ut incunte vere anni 1727 lineam meridianam ducere potuerim, iuxta methodum a me designatam in Commentariis Acad. Reg. Scient. Paris. 1719. p. 54.

ECLIPSES SATELLITUM IOVIS
NOSTRIS RESPONDENTES,
OBSERVATAE
IN OBSERVATORIO REGIO PARISINO
A D. D.
CASSINO ET MARALDO
per Telescopia 17. & 18. ped.

N.S. temp. vero

1726 Aug. 9¹² 59 49

14 51 30

1 51 41

Prima Observatio.

Immersio primi observata Parisiis.

Eadem observata Petropoli, per Tub. 15 & 20 $\frac{1}{2}$ ped.

Differentia meridianorum.

Quoniam vero Petropolitanum tempus illa vice non exactum erat nisi intra quadrantem minuti primi, obstante nimirum nimio crepusculo aliisque impedimentis, quæ Satellitem iusto citius e conspectu nostro removerunt, differentia meridianorum exinde paulo maior emergere debet. Supponam itaque illam vi huius observationis ^b 1. 51. 50.

Se-

Secunda Observatio.

1726 Aug.	16	14	55	4
	I	18	28	53
<hr style="width: 100%;"/>				
	18	9	23	57.
<hr style="width: 100%;"/>				
	II	15	49	
<hr style="width: 100%;"/>				
	I	51	52	

Immersio primi exacte Parisiis Observata.

Periodus huius Satell. per Tabulas.

Emersio I. veluti Parisiis apparere debebat.

Emersio observata Petropoli, capiendū tempus medium inter Telescopia 15 & 20½ ped.

Differentia meridianorum, quam veræ valde propinquam credo, quamvis enim mihi heic loci Lunæ vicinæ nocuisset; idem etiam Parisiis accidit, adeoque differentia meridianorum exinde variari non potuit.

Tertia Observatio.

Sept. 8	15	12	5
	I	18	29 10
<hr style="width: 100%;"/>			
	10	9	41 15
	II	32	54
	I	51	39

Immersio primi observata Parisiis.

Periodus primi Satellitis iuxta tabulas.

Immersio, uti Parisiis observari debuit.

Observata Petropoli, capiendū medium inter tempora Tuborum 15 & 20½ ped.

Differentia meridianorum.

Ooo 2

Quar-

1726 Oct.	19	^b 10	29	"	53
			12	21	46
			1	51	39

Quarta Observatio.

Emerfio primi, observata Parisiis, dubia nonnihil.

Eadem observata Petropoli per. Tub. 15, ped.

Differentia meridianorum.

Dixi in notis antecedentibus ad meas observationes, quod non plane certus sim de vero tempore huius observationis. Eadem Parisiis habita, dubia nonnihil est, quia scilicet Satelles in utroque loco nimis vicinus Iovi erat, qui non nisi ante sex dies in oppositione Solis fuerat. Cum tamen differentia meridianorum exinde prodeat non nimis diuersa a præcedentibus, observatio hæc non adeo erronea credenda est; auferam tamen 3. secundam, cum breviori Tubo, Emerfio hæc Petropoli quam Parisiis observata fuerit, ut adeo differentia meridianorum sit vi hu-

ius observationis ^b 1 51 50.

Quinta Observatio

Emerfio primi Parisiis.

Eadem Petropoli, per Tub. 15, ped. intra pauca secunda.

Dis-

28	^b 6	54	"	35
		8	47	8

^b ' "
1 52 33

Differentia meridianorum, quæ minui debet tribus secundis, ob diuersam Tuborum longitudinem ; aliisque adhuc quibusdam ob errorem qui in Petropolitana irrepfit observationem, quique effecit vt feriusiusto mihi apparuerit emerfio; utcunque autem tractetur hæc Observatio, differentiam tamen meridianorum producit, non minorem quam

^b ' "
1. 52. 20. quæ multo maior est quam reliquæ præcedentes, credo autem præcipuum errorem exinde esse, quod aliquot dies sine Sole hic exegimus circa hoc tempus, uti antea iam annotavi, quapropter non rationem huius observationis habendam cenfeo.

Sexta Observatio.

1726 Dec. 6 ^b ' "
5 20 20
7 11 18

Emerfio primi Parisiis.
Eadem Petropoli, per Tub.
20 $\frac{1}{2}$ ped. dubia nonnihil.

1 50 58

Differentia Meridianorum, quæ aucta 5. secundis veluti diuersa Tuborum longitudo id re-

^b ' "
quirit, efficit differentiam 1. 5 1. 3. reiiciendam rursus, quia dubia nonnihil fuit nostra observatio.

Ooo 3

Septi-

Septima Observatio.

1727 Ian. 7 8^{b.} 19' 0[^]
 10 10 0

 1 51 0

Emerfio fecundi Parisiis inter nubeculas obfervata.

Eadem Petropoli, capiendū medium inter Tubos.

Differentia Meridianorum, quæ ob nubes, Parisienfem obfervationem fine dubio retardantes, augeri aliquot fecundis debet; cum autem quantitas huius retardationis æftimari nequeat, etiam hæc obfervatio in computum finalem admitti non debet.

Octava Observatio.

Aug. 21 12^{b.} 58' 30"
 14 50 30

 1 52 0

Immerfio 1. Parisiis, ubi factelles dum intraret umbram amiffus fuit vento Tubum agitante.

Eadem Petropoli, per Tubum 22. ped.

Differentia Meridianorum, quæ minui debet 7 ant 8 fecundis ob diverfam longitudinem Tuborum, atque adhuc aliis quibusdam fecundis ob agitationem venti quæ Parisienfi Tubo nocuit, atque iufto citius Satellitem e confpectu removit. Poterit itaque

que supponi differentia a reliquis
non multum diversa, $1. 51. 50^{\prime}$.

Nona Observatio.

1727 Aug.	30	^{b.} 11	15	18	"
	1	18	29	5	
<hr style="width: 100%;"/>					
	28	16	46	13	
		14	54	7	
<hr style="width: 100%;"/>					
	1	52	6		

Immersio primi observata Petropoli per Tub. 22. ped. caelo sereno & tranquillo.

Periodus huius Satellitis iuxta Tabulas.

Immersio uti Petropoli accidere debebat.

Immersio observata Parisiis, ubi Satelles sex oculis elapsus, Iove inter tenues nubeculas vertente.

Differentia Meridianorum, minuenda 7. aut 8. secundis uti praecedens ob diversam Tuborum longitudinem, atque adhuc quibusdam ob nubeculas Iovem Parisiis impediens, unde satistutum erit supponere vi huius observationis differentiam meridianorum

$1. 51. 50^{\prime}$.

Dif-

*Differentia Meridianorum Parisiensis
& Petropolitani, cum Longitudine Petropoleos a Pri-
mo Meridiano per Insulam Ferri transeuntem.*

Quodsi iam a novem observationibus modo recensitis auferantur 5ta, 6ta & 7ma. ob rationes ibi allatas, medium inter sex reliquas non multum ablu-
dens emerget 1. 51. 50. unde non dubito hanc differentiam Meridianorum Parisiensis & Petropolitani pro vera assumere, in Tempore nimirum. Non exactior enim haberi potest, nisi per maiorum Observationum non interruptarum quantitatem utriusque loci, secus atque in paucis correspondentibus, quas attulimus, accidit. Per Observationes vero Rev. P. Feuillée in Insulis Canariis habitas Anno 1724. comparatasque cum Parisiensibus, Longitudo Parisiorum respectu, partis maxime Occidentalis in Insula Ferri, quæ & ipsa Canariorum maxime occidentalis est, inventa fuit præcise 20 graduum, plane sicuti Frater meus natu maior nomine Guilielmus amplius quam 20 annis antea prædixerat, uti videre est in Diario Eruditorum anni 1700 quam etiam determinationem semper adhibuit in construendis suis Mappis Geographicis, reclamantibus omnibus aliis Astronomis & Geographicis; Conversa igitur in Gradus differentia modo inventa Temporis Parisiensis & Petropolitani, additisque 20 gradibus prodibit vera longitudo Petropoleos in gradibus a primo Meridiano 47. 57 30.

EC-

ECLIPSES SATELLITVM IOVIS
 PETROPOLITANIS RESPONDENTES,
 ET OBSERVATAE
 BONONIAE IN ITALIA,
 A DOM. EUSTACHIO MANFREDI.

Prima Observatio.

N. S. ^h " 46
 1726 Aug. 18 11 15

Immersio primi observata Pe-
 tropoli per Tub. 15. ped. cœ-
 lo sereno & tranquillo, vicinis
 inter se Luna & Iove.

1 18 28 53

Periodus huius Satellitis eo
 tempore.

16 16 46 53

Immersio primi, veluti Pe-
 tropoli apparere debuit.

15 29 0

Eadem observata Bononiæ
 per Tubum 11. ped. Bononien-
 sium aut 13. ped. Paris. dubia

1 17 53

Differentia Meridianorum,

quæ minui debet 3["] ob diversam
 longitudinem Tuborum, erit igi-
 tur eadem numeris rotundis

1. 17. 50. sed Bononiensis ob-
 servatio dubia erat, unde etiam
 a Dno Manfredi non nisi minuta
 prima notata sunt.

Ppp

Secun-

Secunda Observatio.

1726 Dec.	6	^b 7	'11	"18	Emersiso primi Petropoli per Tub. 20½ ped. dubia.	
		1	18	28	9	Periodus Satellitis eo tempore
		4	12	43	9	Emersiso uti Petropoli appare- re debuit.
Dec.	4	^b 11	'27	"45	Observata Bononizæ per Tub. 13. ped. dubia.	
		1	15	24	Differentia meridianorum, quæ differentia augeri debet circiter	

"
10, propter diversam tuborum
longitudinem, prodibit ea igitur
1. 15. 34. sed dubia erat obser-
vatio Petropoli & Bononizæ.

Tertia Observatio.

Dec.	29	7	15	48	Emersiso primi observata Pe- tropoli per tub. 15 pedum exacte.
		5	59	26	Eadem observata Bononizæ per Tub. 13. ped.
		1	16	22	Differentia meridianorum,

cui adicienda sunt 3" ob di-
versam Tuborum longitudi-
nem, emerget itaque differentia

^b
1. 16. 25. quæ recte sese habere
videtur, cum Petropolitana ob-
servatio exacta fuerit, neque Bo-
noniensem dubium aliquod tur-
baverit.

Quar-

Quarta Observatio.

1727 Ian.

7 10 10 4

Emerfio fecundi observ. Petropoli per Tub. 15. ped.

8 54 12

Eadem Bononiæ per Tub. 13. ped.

1 15 55

Differentia Meridianorum. Hæc quoque observatio nulli dubio subiecta est, retinenda igitur

pro iusta, aucta prius 3 pro diversa Tuborum longitudine, unde meridiani distabunt ex hac

observatione 1. 15. 55.

Quinta Observatio.

Aug. 21

14 50 30

Immersio primi observata Petropoli per Tub. 22. p.

13 34 39

Eadem observata Bononiæ per Tub. 13. ped.

1 15 51

Differentia Meridianorum. Observatio hæc, cum dubia non sit notata, retineri debet, abiectis tantum 12. sec. pro diversa Tuborum longitudine; erit adeoque differentia meridianorum per

hanc observationem 1. 15. 39.

Sexta Observatio.

Sept. 6

13 11 24

Immersio primi, Petropoli, per

OBSERVATIONES

per Tub. 22. ped. ubi Iupiter non prius apparuit, quam Satelles iam iam minui cœperit.

1727

11 55 17

Eadem Bononiæ per Tub. 13. ped.

 1 16 7

Differentia Meridianorum, mi-

nuenda ob diversos Tubos 12.

ut prodeat eadem ^b 1. 15. 55. quæ pro legitima assumenda est. Quamvis enim hic Petropoli Iupiter non nisi minuto iam Satellite apparuerit, non tamen id me impedit quo minus persequerem eum usque ad totalem immersionem.

Septima Observatio.

1728 Febr. 16

10 59 26

Emergio Imi, Petropoli, per Tub. 22. ped. intra aliquot sec.

9 43 8

Eadem Bononiæ per Tub. 13. ped.

 1 16 18

Differentia Meridianorum, 12. augenda ob diversos Tubos, ut

adeo proveniat ^b 1. 16. 30. intra aliquot secunda, ultra quam exactitudinem Petropolitana hæc Observatio sese non extendit.

Dif-

*Differentia Meridianorum Petropolitani
& Bononiensis in Italia.*

Per septem Observationes paulo ante enumeratas inventa fuit hæc differentia uti sequitur: nempe

			^b	[']	["]
per primam	-	-	I	17	50
secundam	-	-	I	15	34
tertiam	-	-	I	16	25
quartam	-	-	I	15	55
quintam	-	-	I	15	39
sextam	-	-	I	15	55
septimam	-	-	I	16	30

E quibus si auferatur prima, tanquam nimis diversa a cæteris, capiaturque medium inter sex reliquas, habebimus

differentiam horum Meridianorum quam proxime ^b ['] ["] I 16 0 quæ amplectenda tamdiu est, dum in utroque loco exactiores habeantur Observationes.

ECLIPSES PRIMI SATELLITIS

IOVIS

**PETROPOLITANIS RESPONDENTES,
OBSERVATAE ULYSSIPPONE**

A REV. P. CARBONE S. I.

Per Tub. Campan. 30 palm. Rom. aut 20½ ped. Regior.

Prima Observatio.

1726. Aug. 9 14 51 30 I Mmersio primi obs. Petropoli
Tub. 20½ ped. dubia 15 sec.
ob crepusculum.

Eadem

OBSERVATIONES

$$\begin{array}{r} 12 \ 13 \ 30 \\ \hline 2 \ 38 \ 0 \end{array}$$
 Eadem observata Ulyssipone,
 Differentia Meridianorum,
 quæ augeri potest aliquot secundis
 ob crepusculi claritatem, quæ Pe-
 tropoli Satellitem sine dubio iusto
 citius e conspectu removet, sup-
 ponam itaque vi huius observa-

tionis, 2. 38. 10.

Secunda Observatio.

1726 Sept. 10 11 32 56 Immerfio primi obs. Petropoli
per Tub. 20 $\frac{1}{2}$ ped.

$$\begin{array}{r} 8 \ 54 \ 54 \\ \hline 2 \ 38 \ 2 \end{array}$$
 Eadem Ulyssipone.
 Differentia meridianorum, ve-
 rz sine dubio valde propinqua,
 cum nihil excipi possit, contra
 utramque observationem, ipsaque
 hæc differentia cum præcedenti
 etiam fere consentiat.

Tertia Observatio.

Oct. 28 8 47 8 Emerfio primi, observata Pe-
tropoli per Tub. 15. ped. intra
aliquot secunda.

$$\begin{array}{r} 6 \ 8 \ 52 \\ \hline 2 \ 38 \ 16 \end{array}$$
 Eadem Ulyssipone.
 Differentia meridianorum mi-
 nuenda 7. secundis pro diversa
 Tuborum longitudine erit igitur

hæc differentia correctæ 2 38 9.
In-

Inventum est per Observ.	1	2	38	10
	per 2	2	38	2
	3	2	38	9
ubi medium est		2	38	7

Annotatio ad has Observationes, in qua deducitur, quantum tota fere Europa in Longitudinem sit extensa.

Observationes quas modo recensimus factæ Ulyssipone & congruentes cum Petropolitans, primæ omnium forsitan sunt, quæ in Europa unquam factæ sunt cum aliqua exactitudine, tanta in distantia; cum igitur Ulyssippo urbs maxime occidentalis sit totius Europæ; neque in Russia, parte Europæ maxime Orientali, hucusque aliæ observationes accuratæ factæ sint, quam Petropoli; poterit præcedens Meridianorum Ulyssiponensis & Petropolitani differentia haberi, pro maxima extensione totius Europæ in Longitudinem, quantum hucusque accurate definiri potuit, per immediatas observationes. Supra dicta meridianorum differentia in partes circuli

conversa sit: 39. 31. 45.

Acce-

Accepi etiam quasdam observationes Satellitum Iovis, Berolini a D. Kirch, Norimbergæ a D. Rost, Madriti à P. Nicasio Grammatici, & Pekini a P. Ignatio Kögler Soc. Iesu, tribunalis Astronomiæ in Sinis præside, habitas; cum vero paucæ sint, necesse est ut in sequens volumen horum Commentariorum situm Petropoleos respectu harum celebrium totius Terræ Urbium, differam; ubi spero me interea temporis novas exinde Observationes accepturum esse, quarum ope securius stabilire possim has Longitudines.

FINIS.

rec

