Abhandlungen

der

Churfürstlich-baierischen

Akademie

der

Wissenschaften

Achter Band,

Welcher die philosophischen enthält.

München, mit akademischen Schriften. 1773.

NB. In der letzten S. der Vorrede Z. 22. lese anstatt 7ten Band 8ten Band.

Vorrede.

Der gegenwärtige 8te Band enthält dreyzehn Abhandlungen, wovon die erste ein Zusatz des Herrn Professors Karsten in Bützow und gleichsam ein Anhang zu derjenigen Theorie von Projectionen der Kugel ist, die man im 5ten Bande der philosophischen Abhandlungen S. 109. findet. In diesem Zusatze wird solche Theorie mit derjenigen von Kegelschnitten verglichen, und ihre vollkommene Uebereinstimmung gezeiget. Der Herr Verfasser liefert uns nicht nur allgemeine analytische Formeln, woraus des Apollonius Sätze von den Kegelschnitten nach der verschiedenen Lage der planorum Secantium hergeleitet werden können; sondern er machet sie auch noch allgemeiner, indem er sie auf schiefe Kegelschnitte anwendet, wo man nicht nach dem apollonischen System die Axe des Kegels auf die Zirkelfläche im Mittelpunkte senkrecht voraussetzet.

Das zweyte Stück S. 33. u. f. von der archimedeischen Wasserschraube ist ebenfalls von vorgenanntem Herrn Professor Karsten, welcher unter den größten Geometern unserer Zeit einen vorzüglichen Rang verdienet. Wer sollte wohl gedacht haben, daß sich über die archimedeische Wasserschraube, eine so uralt-bekannte Maschine, noch was sagen ließe, daß man nicht in hundert andern und selbst in den Elementar-Büchern von der Hydraulik findet. Indessen ist doch gewiß, daß die Eigenschaften dieser Maschine

schine noch bey weiten nicht völlig aufgekläret sind. Selbst der grosse Analyst, Herr Euler hat in dem comment. nov. Petrop. Tom. V. die Theorie davon unvollkommen lassen müssen: weil er auf eine Differentialgleichung der Geschwindigkeit des Wassers in der Spiralröhre gefallen ist, die sich nicht integriren läßt. Dieß mag wohl der Berliner Akademie Anlaß gegeben haben, im Jahre 1766. die Preißfrage aufzuwerfen, wie eine Wasserschraube am vortheilhaftesten anzuordnen sey? worüber sie den Preis dem Herrn Hennert zuerkannt hat. Herr Karsten findet aber die Hennertische Auflösung nicht für zureichend, und hält dafür, daß obige Preisfrage in der Hauptsache unbeantwortet geblieben sey. Das hat ihn veranlasset, gegenwärtige Abhandlung zu schreiben.

Im dritten Stücke S. 87. u. f. handelt Herr Doctor Büchholz zu Weimar vom Spießglaß-Schwefel, und giebt nach manchen Versuchen, die er alle mit Umständen erzählt, eine Methode an Hand, wie dieser Spießglaßschwefel gleich nach dem ersten Niederschlage eben so gut corrigirt und zur Medicin brauchbar gemacht werden könne, als derjenige vom 4ten Niederschlag, den man nach der gewöhnlichen Art zubereitet.

Der Verfasser des 4ten Stückes von den Saugwerken S. 97. u. f. ist wiederum unser mehrbelobter Herr Professor Karsten. Dies Stück ist sehr practisch, und gleichwohl die ganze vollständige Theorie von Saugwerken

ken auf die höhere Analyse gegründet. Der Herr Verfasser theilet sie in vollkommene, unvollkommene und mittlere. Vollkommene Saugwerke sind diejenigen, welche keinen schädlichen Raum haben, und die soviel Wasser geben, als in einer gegebenen Zeit möglich ist: die erste nothwendige Bedingniß hiebey ist, daß das Ventil oben an der Saugröhre seyn muß. Unvollkommene sind, die ihr Ventil zu unterst der Saugröhre haben. Mittlere endlich sind, die zwar ihr Ventil oben an der Saugröhre haben, aber zwischen den Kolben und der Grundfläche des Stiefels einen leeren oder schädlichen Raum lassen. Der H. V. giebt Berechnungen für alle Arten an, und untersuchet in zweyen Abschnitten: 1) die anfängliche Bewegung des Wassers in der Saugröhre und dem Stiefel, ehe es noch den Kolben erreichet, und 2) seine Bewegung in dem Stiefel, wenn schon alle Luft aus dem schädlichen Raume ausgetretten ist. Liebhaber der Hydraulik werden diese Abhandlung mit Vergnügen lesen: worinnen sie die analytischen Formeln auf Gegenstände dieser Art so zu verläßig angewendet finden werden.

Das fünfte Stück, das ist Versuch eines evidenten Beweises der allgemeinen mechanischen Grundsätze S. 147. u. f. haben wir ebenfalls dem unermüdeten Fleiße des H. Professors Karsten zu danken. Es ist leichter (saget der Herr Verfasser,) die physikalischen Wissenschaften zu erweitern, nachdem man es mit den Differential- und Integraltegralrechnungen so weit gebracht hat, als die ersten Anfangsgründe derselben recht evident und ungezweifelt zu beweisen. Dieses Stück dienet zu einer Probe, wie behutsam man verfahren müsse, wenn man sich reine Begriffe bilden, und nicht von vorangenommenen Blendwerken der Einbildungskraft auf Irrwege verleitet werden will.

Im sechsten Stücke S. 177. beantwortet Herr Eusebius Amort, Canonicus Regularis in Polling die Frage: wo so viele Ausgüßungen der Flüße in Baiern herrühren, und wie denselben abzuhelfen sey? der Herr Verfasser sucht die Ursache dieser Ueberschwemmungen in dem häufig anwachsenden Sande, und schlägt etliche Mittel vor, wie man diesem Uebel auf eine leichte Art steuren, und dadurch die Flüsse in ihrem ursprünglichen Bette erhalten könne. Die Schriften dieses berühmten Mannes haben allezeit ihren besondern Werth, sollten sie auch noch so klein seyn. Und um dieser Betrachtung willen haben wir diese kleine Pieçe hier einschalten wollen.

Der Herr Verfasser erzählet am Ende die Stiftung eines Hofmalers, Namens Amorth, (der vermuthlich aus seiner Familie war) um nächst Lengries in ober Baiern die Iser von großen Steinen zu reinigen. Und füget als ein wahrer Patriot den frommen Wunsch hinzu, daß begüterte Leute in Baiern diesem Beyspiele folgen, und entweder bey ihren Lebszeiten oder durch letztwillige Ver-

mächt-

mächtnissen dergleichen Stiftungen zu Säuberung der Flüsse, von dem anwachsenden Sande, zu Verhütung der Ueberschwemmungen zu machen. Der Gedanken ist freylich wie der Herr Autor saget, süße: er ist aber den reichen Stiftern älterer und neuerer Zeiten nicht besonders fühlbar, die nur um das remedium animarum suarum besorget sind, und vermittelst ihrer meistentheils unrechtmäßig erworbenen Güter, alsdenn erst, wenn sie selbige nicht mehr genießen können, das ist, in articulo mortis mit dem Himmel gleichsam composition treffen wollen, ohne sich viel darum zu bekümmern, ob es ihrem Vaterlande nach ihrem Tode wohl oder übel ergehe: weil sie, als Todte und Bürger der andern Welt, mit der unsrigen nichts zeitliches mehr gemein haben. Vieleicht dörften aber doch dergleichen menschenfreundliche Stiftungen mit der Zeit mehr, als jetzo, in die Mode kommen, wenn nur lauter solche Beichtväter, wie der patriotische Herr Amort ist, den reichen Sterbenden aßistirten.

Daß 7te Stück, S. 181. u. f. von verschiedenen Wendungen der krummen Linien. Das Achte von den Centralkräften S. 203. u. f. Und das Neunte S. 245. u. f. von der Berechnung des im Jahre 1769. erschienenen Cometen, hat Herr P. Leonard Gruber, ein Benedictiner Religios von dem Kloster Neden, zur Akademie eingeschicket. Wir müßen die Recension dieser Stücke umgehen, um unsere Vorrede, die schon weitläuftig genug ausgefallen, nicht noch weitläuftiger zu machen. Wir rücken aber dieselben mit Vergnügen ein, weil sie zur Probe dienen, wie die analytischen Wissenschaften in unserm Vaterlande, wo sie bisher noch nicht allgemein worden, aufzukeimen anfangen; und wir wünschen hiernächst, daß unsere Landsleute durch diese Beyspiese aufgemuntert werden möchten, diesen Theil der höhern Geometrie, womit man in der Mathematik und Physik gleichsam Wunder thun kann, ihrer Aufmerksamkeit und Bemühungen würdig achten, und andere aufgeklärte Nationen in dieser Laufbahne, worinnen dieselben es so weit gebracht haben, soviel möglich zu erreichen trachten möchten.

Schon diese wohlgerathenen Versuche beweisen, daß es auch in unserm Clima nicht an Subjecten mangelt, die eine glückliche Anlage zu tiefsinnigen Untersuchungen in der höhern Geometrie haben. Besonders sollten diese Beyspiele unsere Ordensgeistlichen, des Herrn Verfassers Mitbrüder anreizen, in ihren vom Gebethe und Regular-Uebungen übrigen Stunden ihren Geist mit so nützlichen und reellen Sublimitäten zu nähren und zu beschäftigen, anstatt die edle Zeit mit metaphysischen Grillen und andern scholastischen Alfanzereyen zu verschwenden, die weder den Geist zu erleuchten, noch vielweniger das Herz zu bessern vermögend sind.

Der Verfasser des 10ten Stücks S. 279. von dem unterirdischen Bau bey Bergwerken, ist H. Carl Scheidt, der die akademischen Abhandlungen schon mit manchen

schö-

schönen Beyträgen von dieser Art bereichert hat. Zur Empfehlung dieses Stückes dörfen wir den Kennern nur sagen, daß der nämliche practische Bergbaugeist darinnen herrschet, den sie in den vorigen Abhandlungen von Herrn Scheidt, in dieser Materie gefunden haben. Es ist zwar nicht alles neu darinnen, der Herr Verfasser giebt es auch nicht dafür aus. Man findet aber darinnen viele neue brauchbare Anwendungen bekannter Wahrheiten. Und das ist doch noch das beste, was man nach soviel Entdeckungen in ünseren aufgeklärten Zeiten noch erwarten kann. In der That fällt es nicht gar schwer zu entscheiden, ob manche nagelneue Erfindungen, die sich mit bloßen Speculationen endigen, nicht solchen Erweiterungen längst erfundener Wahrheiten nachzusetzen seyn, deren Ausübung dem menschlichen Geschlechte neue beträchtliche Vortheile gewähret.

In dem Eilften Stück S. 317. u. f. liefert Herr Doct. Med. Brunwieser, Stadtphysicus in der baierischen Stadt Kellheim verschiedene Versuche, mit mineralischen sauren Geistern allerhand Farben aus den Hölzern zu ziehen, und zeiget, wie aus diesen Farben, die Röthe, Blaue, Grüne, und Gelbe der Blüthen, Blumen, Früchten und Blätter der Vegetabilien erkläret werden mögen. Die angestellten Versuche sind aller Aufmerksamkeit werth, weil sie auf Schlüße führen können, die in einer so wichtigen Branche des Comercii, wie das Farbewesen ist, seiner Zeit manche Vortheile verschaffen dörften. Der

Herr Verfasser stellet sich die Sache so vor, daß die Farben-Materie oder das Farbenwesen, mit einem alcalischen Salze genau verbunden, in dem Stamme der Bäume und Pflanzen verborgen liegt, und nachdem es alle Fasern des Stammes durchwandert hat, an der Oberfläche der Blätter, Blüthen und Früchten, durch die Action und das Berühren der Luft, welche ganz ungezweifelt mit allerhand sauren Geistern imprägnirt ist, von den Fesseln des alcalischen Salzes, so sich mit den sauren Lufttheilchen vereiniget, entbunden wird, und hiemit die mannichfaltigen Farben entwickelt, die wir an den Blättern, Blüthen und Früchten bewundern. Daß ein alcalisches Salz in allen Holz- und Pflanzarten verborgen stecke, so mit den Farbewesen verbunden ist, davon haben ihn nicht nur des Herrn Marschalls sondern auch seine eigenen Versuche überführet. Er nimmt drey ursprüngliche oder Grundfarben an, aus deren Vermischung alle übrigen entstehen, nämlich gelb, roth und blau: und so giebt es auch in seinem System dreyerley mineralsäuren, deren eine jede auf eine von diesen Grundfarben ihre vorzügliche Wirkung ausübet. So dienet die Salpetersäure vornehmlich die gelbe Farbe hervorzubringen: die Vitriol- und Salzsäuren hingegen sind für die rothen und blauen Farben gemacht.

Diese aus Erfahrungen hergeleiteten Betrachtungen haben den H. V. im zwölften Stücke auf eine Entdeckung gebracht, wie man vermittelst der Salpetersäure, aus verschiedenen meistentheils sehr schlechten und sonst unbrauch-

baren

baren Holzarten ein so schönes und dauerhaftes Gelb herausziehen und hiermit Wollen- Kameelharene und Seidenzeuge färben könne, die an Glanz und Dauerhaftigkeit den Indianischen und andern fremden Farben nichts nachgeben, wie die zur Akademie eingesendeten Musterproben zur Genüge beweisen.

Er hat zwar bis hieher die rothe und blaue Farbe mit seinen mineralischen sauren Geistern nicht erzwingen können. Vielleicht gelingt es ihm aber, und andern unermüdeten Chymisten, noch mit der Zeit, auch in Ansehung dieser Farben, durch hartnäckige Versuche, es eben so weit, als mit der gelben, zu bringen. Daß wir endlich vieleicht in unserm eigenen vegetabilischen Reiche alle Farben finden können, die wir jetzt mit so vielen Kosten von fremden Landen holen müssen.

Das letzte und dreyzehente Stück S. 353. u. f. haben wir von H. P. Clarus Mayr, Benedictiner Religiosen im Kloster Vormbach. Es enthält Gedanken, wie dem fast jährlichen von Austreten der Flüße verursachten Schaden nach den Naturgesätzen des Wassers zu steuren sey. Herr P. Clarus will seine akademische Pflicht erfüllen, welche, den Gesetzen zufolge, von einem jeden ordentlichen Mitgliede alle Jahre eine Abhandlung fordert. Er hat auch diese Pflicht seit seiner Aufnahme fleißig erfüllet, wie die akademischen Abhandlungen von Jahr zu Jahre bezeugen. O! möchte doch dieses rühmliche Beyspiel diejenigen beschämen und bekehren, die da immerfort diese Pflicht andern

dern vorpredigen, und doch selbsten nichts anders thun, als Lärmen, Schreyen, und Tadeln, und die, wenn sie in 12. Jahren einmal höchstens zwey Bogen seichtes Zeug zu Markte bringen, andere für unnütze Mitarbeiter ausschreyen, welche von den wichtigsten Sachen ganze Alphabete schreiben. Da die berühmte Abbtey Vormbach, welcher der H. V. sehr viel Ehre macht, am Innstrom liegt; so hat derselbe Gelegenheit gehabt, über die frequenten Austrettungen dieses reisenden Stroms Betrachtungen genug anzustellen, welche seinem naturforschenden Geiste allerdings angemessen sind. Die Vorschläge, welche er thut, 1) die Flüsse von der Ueberschwemmung zu bewahren, und so unschädlich zu machen als immer möglich ist. 2) sie in ihrem alten Rinnsal zu erhalten oder dahin zurückzuführen und 3) diese anscheinenden Anomalien oder Feindseligkeiten der Natur in Wohlthaten zu verkehren, sind practisch, nicht nur möglich sondern gar leicht, und der Aufmerksamkeit der Regenten sowohl als des Landmanns allerdings würdig. Edle Bemühungen für Religiosen, die einem Orden zugehören, welchem so viele Länder, nebst dem Lichte des Evangelii, auch ihre Cultur und zeitliche Nahrung zu danken haben. Wir beschließen hier die Vorrede zum 7ten Band, empfehlen denselben, wie alle vorige, dem Publico zur geneigten Aufnahme, und wünschen nochmals herzlich, daß solche Schriften unsern Landsleuten zur Aufmunterung dienen möchten, das Reich der höhern Wissenschaften zum Nutzen und zur Ehre des Vaterlands durch ihre löbliche Bemühungen immer mehr zu erweitern.

Zusatz

zu

W. J. G. Karstens

Abhandlung

von den

Projectionen

der

Kugel.

Die Projectionen der Kugel
als
Kegelschnitte betrachtet.

1. §.

Alle Projectionen der Kugel sind Kegelschnitte, selbst die orthographischen Projectionen, wenn der Cylinder als ein Kegel betrachtet wird, dessen Axe unendlich groß ist; nur diejenigen Fälle sind hievon ausgenommen, wenn das Auge in der Ebene desjenigen Kreises der Kugel steht, dessen Projection auf der Tafel gesucht wird. Man stellet sich von allen Puncten im Umfang eines solchen Kreises der Kugel gerade Linien bis ins Auge gezogen vor, welches dabey als ein Punct betrachtet wird. Diese Linien liegen demnach in der Oberfläche eines Kegels, dessen Spitze das Auge, und dessen Grundfläche der Kreis auf der Oberfläche der Kugel ist; es wäre dann, daß die Ebene dieses Kreises durchs Auge gienge. Die Oberfläche dieses Kegels wird von der Tafel geschnitten, und die Durchschnittlinie mit der Tafel ist die Projection des Kreises. Die alten Geometer haben daher die Kugel-Projectionen allemal als Kegelschnitte betrachtet, und es gehört zur Vollständigkeit der Abhandlung von den Projectionen der Kugel, welche ich im vorigen Jahr der Akademie überreicht habe, daß ich noch zeige, wie eine Theorie mit der andern zusammen hänge, und wie eben die Regeln für die Verzeichnung der Projectionen auch aus der Theorie von den Kegelschnitten folgen. Ich werde in solcher Absicht zuforderst die allgemeinen analytischen Formuln entwickeln, woraus alle Sätze, die Apollonius im ersten Buch von der Gestalt der Kegelschnitte nach der verschiedenen Lage der schneidenden Ebene beweiset, kurz und leicht können hergeleitet werden.

2. §.

Die neuern Schriftsteller, welche die Theorie von den Kegelschnitten analytisch abhandeln, zeigen gewöhnlich nur beyläufig, wie diese Linien aus dem geraden Kegel geschnitten werden können, um den Namen zu rechtfertigen, und zu beweisen, daß Linien der zweyten Ordnung und Kegelschnitte einerley Linien sind. Allein allgemeinere Betrachtungen darüber, wie diese Linien nicht allein aus dem geraden, sondern auch aus dem schiefen Kegel geschnitten werden können, haben in vielen Fällen der Ausübung ihren Nutzen, und die obangeführte Theorie von den Projectionen der Kugel ist hievon ein Beyspiel. Die neuere Analysis, und besonders der Gebrauch der allgemeinen trigonometrischen Formuln, erleichtert so, wie viele andere Theorien der Alten, auch diese Betrachtung ungemein, und man ist im Stande, vermittels einer einzigen allgemeinen Aufgabe, alles zu übersehen.

3. §.

3. §.

Hr. Euler betrachtet in der Introd. in Anal. Inf. T. II. Append. Cap. III. zwar die Schnitte des schiefen Kegels: allein der Begrif vom schiefen Kegel, welchen er bey seiner Analysi zum Grunde setzt, ist gänzlich von dem Begrif unterschieden, welchen man sonst mit dem Apollonius gewöhnlich annimmt. Herr Euler nennt nämlich einen schiefen Kegel denjenigen, dessen Grundfläche eine Ellipse, und dessen Axe auf der Ebene dieser Ellipse in ihrem Mittelpunkt senkrecht ist, und dessen Oberfläche übrigens die Eigenschaft hat, daß jeder mit der Grundfläche parallele Schnitt eine Ellipse giebt, die gleichfalls ihren Mittelpunkt in der Axe des Kegels hat. Dieser Begrif läßt sich auf den apollonischen schiefen Kegel gar nicht anwenden: es giebt in demselben gar keine Schnitte, die Ellipsen werden, und ihren Mittelpunkt in der Axe des Kegels haben. Der vom Hr. Euler so genannte schiefe Kegel gehört schon in die Klasse einer andern Art geometrischer Körper, die wegen der Aehnlichkeit mit dem Euclidäischen und Apollonischen Kegel ebenfalls den Namen eines Kegels führen können: aber alsdann erweitert man schon diesen Begrif auf solche Körper, deren Oberfläche mit der eigentlichen Kegelfläche nur diese Aehnlichkeit hat, daß alle gerade Linien, die ganz in diese Oberfläche fallen, sich in einerley Punkt, der die Spitze heißt, schneiden, übrigens aber durch den Umfang einer ebenen Figur gehen, die eine willkührliche Gestalt haben kann, da es beym eigentlichen Kegel ein Kreis seyn muß. Diese kegelartigen Körper kann man füglich wieder nach der verschiedenen Gestalt ihrer Grundfläche in Klassen eintheilen, und ihnen davon die Nämen beylegen. So könnte z. E. der vom Hrn. Euler so genannte schiefe Kegel ein elliptischer Kegel heissen, und dieß würde denn ein gerader oder schiefer elliptischer Kegel seyn, nachdem seine Axe auf der Grundfläche gerade oder schief stünde. Eben so theilt Apollonius die gewöhnlich so genannten Kegel in gerade und schiefe, nachdem ihre Axen die Grundfläche entweder senkrecht oder schief schneiden: und diesen Redegebrauch werde ich auch hier beybehalten. Uebrigens wird sich die folgende Untersuchung auf einige allgemeine Sätze gründen, die ich wegen der Vollständigkeit der Ausführung herseße, da man sie sonst auch beym Hrn. Euler am a. O. Append. Cap. II. §. 26. sq. antrift. Es wird dieß zugleich zur nähern Erläuterung des Eulerischen Vortrags dienen.

4. §.

Es ist die Lage einer Ebene FH (1. fig.) gegen eine andre KL gegeben, welche letztere eine bekannte Lage hat: man soll eine Gleichung für die Ebene FH zwischen dreyen rechtwinklichten Coordinaten suchen, wovon zwey in der Ebene KL liegen, die dritte aber auf ihr senkrecht ist: die Abscissen sollen auf der geraden Linie AB in der Ebene KL genommen werden, deren Lage gegen die Durchschnittslinie FG beyder Ebenen gleichfalls bekannt ist.

Aufl. Von einem unbestimmten Punkt M der Ebene FH sey MQ auf KL senkrecht, und QP auf AB ebenfalls senkrecht gesetzt; so sind $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$ drey senkrechte Coordinaten für die Ebene FH. Man setze, daß AB verlängert mit der Durchschnittslinie beyder Ebenen in F zusammen stosse, so ist $AF = b$, nebst dem Winkel $AFE = \psi$ gegeben. Übrigens sey MS auf EF senkrecht, und man ziehe QS, so ist $QSM = \phi$, der Neigungswinkel beyder Ebenen, gleichfalls gegeben. Man lege nun durch MQ und F eine Ebene FQM, so ergiebet sich an F ein körperliches Dreyeck, dessen Seiten QFM, SFQ, und SFM sind. In demselben ist der Winkel an $FQ = 90°$, und der Winkel an

FS

$FS = \phi$. Setzt man nun $PFQ = \omega$, so wird die Seite $SFQ = \psi + \omega$, und man erhält $tang\ QFM = \sin(\psi + \omega)\ tang\ \phi$, also $z = FQ \sin(\psi + \omega)\ tang\ \phi$. Ferner wird $\sin\omega = \frac{Y}{FQ}$, $\cos\omega = \frac{b + x}{FQ}$. Weil nun $\sin(\psi + \omega) = \sin\psi \cos\omega + \cos\psi \sin\omega$, so drücke man $\sin\omega$ und $\cos\omega$ durch y und x aus, und man erhält die gesuchte Gleichung $z = b \sin\psi\ tang\ \phi + x \sin\psi\ tang\ \phi + y \cos\psi\ tang\ \phi$.

Wenn die Linie AB mit FE zusammen fällt, so wird $\psi = o$, also $\sin\psi = o$, $\cos\psi = 1$, und man erhält $z = y\ tang\ \phi$, so daß nun z von x gar nicht abhängt, wie den Eigenschaften einer Ebene, die in den Anfangsgründen bewiesen werden, gemäß ist.

5. §.

Es ist M (1. fig.) ein Punkt in der Oberfläche eines Körpers, wovon KL eine Durchschnittsfigur vorstellt. Auf diese ist MQ senkrecht, so wie QP auf die grade Linie AB, die in der Ebene KL eine bekannte Lage hat, senkrecht gezogen ist, und man hat für des Körpers Oberfläche eine Gleichung zwischen den Coordinaten $AP = x$, $PM = y$, $QM = z$. Statt der Axe AB aber soll man eine andre FG für die Abscissenlinie annehmen, welche in der Ebene KL liegt, und die vorige unter dem Winkel $BFG = \psi$ schneidet. **Die Frage ist: wie die Gleichung zwischen x, y, und z verändert werden müsse, wann übrigens die Coordinaten senkrecht bleiben.**

Aufl. Man setze auf AB durch A eine senkrechte Linie, welche FG in E schneidet, und nehme E für den neuen Anfangspunkt der Abscissen. Ueberdem sey QS, welche AB in D schneidet,

det, auf FG senkrecht. Ist nun AF $= b$, so hat man PD $= y \, tang \psi$, DQ $= \frac{Y}{cos \psi}$, DS $= (b + x - PD) \, sin \psi = (b + x) \, sin \psi - y \, tang \psi \, sin \psi$, FS $= (b + x - PD) \, cos \psi = (b + x) \, cos \psi - y \, sin \psi$, EF $= \frac{b}{cos \psi}$, SQ $=$ DS $+$ DQ, ES $=$ FS $-$ EF. Wenn man nun ES $= t$, SQ $= v$ setzt, so erhält

man $v = (b + x) \, sin \psi - y \, tang \psi \, sin \psi + \frac{y}{cos \psi}$

und $t = (b + x) \, cos \psi - y \, sin \psi - \frac{b}{cos \psi}$.

die erste Gleichung multiplicire man mit $cos \psi$, die zweyte mit $sin \psi$ und subtrahire sodann die letzte von der ersten, so erhält man $v \, cos \psi - t \, sin \psi = y + v \, tang \psi$, also 1) $y = v \, cos \psi - t \, sin \psi - v \, tang \psi$. Dieß setze man statt y in die zweyte Gleichung, so wird $b + x = \frac{t}{cos \psi} \, y \, tang \psi + \frac{b}{cos \psi^2}$, $= \frac{t}{cos \psi} + v \, cos \psi \, tang \psi = t \, sin \psi \, tang \psi - b \, tang \psi^2 + \frac{b}{cos \psi^2}$, folglich $x = t \left\{ \frac{1 - sin \psi^2}{cos \psi} \right\} + v \, sin \psi$, oder 2) $x = t \, cos \psi + v \, sin \psi$. Wenn diese beyden Werthe statt x und y in die für die Oberfläche des Körpers gegebene Gleichung gesetzt werden, so erhält man die gesuchte Gleichung zwischen t, v, und x.

Wenn man AE $= f$ setzt, so ist $f = b \, tang \psi$, und man hat $y = v \, cos \psi - t \, sin \psi - f$.

6. §.

Es bleibe M (1. fig.) ein Punkt auf der Oberfläche eines Körpers, wovon KL eine Durchschnittsfigur ist: dieser Körper

werde

werde von einer andern Ebene FH geschnitten, und es sey FG ihre Durchschnittslinie mit der vorigen Ebene KL. Die Gleichung für die Oberfläche des Körpers ist zwischen $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$ gegeben, und die Lage der Ebene FH gegen BC ist gleichfalls bekannt. Man soll eine Gleichung für die Durchschnittslinie *MN* mit der Oberfläche des Körpers für rechtwinklichte Coordinaten suchen.

Aufl. Wenn zwo Oberflächen einander schneiden, und man sucht für jede dieser Oberflächen eine Gleichung zwischen dreyen rechtwinklichten Coordinaten, für einerley Abscissenlinie und Anfangspunkt der Abscissen, so daß auch die Coordinaten x und y für beyde Oberflächen in einerley Ebene liegen; so hat man zwo Gleichungen zwischen dreyen Coordinaten, welche für die Durchschnittslinie beyder Oberflächen gehören. Sind nämlich $x = AP$, $y = PQ$, $z = QM$ diese drey Coordinaten, so ist z in beyden Gleichungen einerley, wenn M ein Punkt ist, der in beyden Oberflächen zugleich liegt. Ist also die eine Oberfläche FH eine Ebene, die KL unter dem Winkel ϕ schneidet, ist ferner $AF = b$, $AFE = \psi$; so drückt die Gleichung $z = b \sin \psi \operatorname{tg} \phi + x \sin \psi \operatorname{tg} \phi + y \cos \psi \operatorname{tg} \phi$ mit der Gleichung für die andere Oberfläche zusammen genommen die Natur der Durchschnittslinie MN aus. Allein weil in diesem Fall MN eine Linie von einfacher Krümmung ist, so ist es vortheilhafter, eine Gleichung zwischen zwoen Coordinaten zu suchen, die in der Ebene der Linie MN selbst liegen. In solcher Absicht ziehe man QS auf die Durchschnittslinie FG beyder Ebenen FH und KL senkrecht, und wenn auch AE auf AB senkrecht ist, setze man $ES = t$, $SM = v$ $AE = f$. Ferner suche man nach dem 5 §. für die Oberfläche des Körpers eine Gleichung zwischen t, v und z. Dieß geschicht, indem man $x = t$

$cos\psi + v\,sin\psi$, und $y = v\,cos\psi - t\,sin\psi - f$ nimmt, und diese Werthe in der Gleichung zwischen x y und z statt x und y setzt. Nun hat man überdem für die Ebene FH die Gleichung $z = v\,tang\phi$, folglich zwo Gleichungen zwischen den dreyen Coordinaten t, v, z, für die Linie MN. Setzt man aber AM $= u$, so ist $v = u\,cos\phi$. Dieß in die Gleichung zwischen t, v und z gesetzt giebt eine andre zwischen t, u und z. Ueberdem aber wird $z = u\,cos\phi\,tang\,\phi = u\,sin\phi$, und wenn man dieß statt z setzt, so hat man eine Gleichung zwischen t und u. In solcher Absicht kann also gleich anfangs in den Werthen von x und y, $u\,cos\phi$ statt v gesetzt werden, so hat man

$$x = u\,cos\phi\,sin\psi + t\,cos\psi$$
$$y = u\,cos\phi\,cos\psi - t\,sin\psi - f,$$

da dann diese beyden Werthe statt x und y, imgleichen $u\,sin\phi$ statt z gesetzt, unmittelbar die gesuchte Gleichung zwischen t und u geben.

7. §.

Die Länge der Axe *AC* (2. Fig.) des schiefen Kegels *BCD*, nebst dem Halbmesser *AB* seiner Grundfläche, und dem Neigungswinkel der Axe gegen die Grundfläche $= \alpha$, sind gegeben: man soll eine Gleichung zwischen dreyen rechtwinklichten Coordinaten für den Kegel suchen, so daß zwey derselben in der Ebene der Grundfläche liegen, und die dritte auf ihr senkrecht steht.

Aufl. Man lege durch die Axe des Kegels eine Ebene auf die Grundfläche senkrecht, so ist die Durchschnittsfigur BCD ein Dreyeck, und in dieser Ebene liegt der Neigungswinkel BAC $= \alpha$ der Axe gegen die Grundfläche, auf den Durchmesser BD der Grundfläche, worinn sie von der Ebene CBD geschnitten wird,

setzte

setzte man einen andern $\beta\gamma$ senkrecht, so wird derselbe auch auf der Ebene BCD senkrecht seyn. Ferner sey AL auf der Grundfläche senkrecht, so liegt AL in der Ebene BCD, und man kann nun $A\beta$, AD, AL, für die drey Axen des Körpers annehmen, womit die drey Coordinaten parallel sind. Demnach sey von einem Punkt M der Kegelfläche MQ auf die Grundfläche senkrecht gezogen, und QP auf $A\beta$ senkrecht. Man setze $AP = x$, $PQ = y$, $QM = z$. Durch M lege man die Ebene bMd mit der Grundfläche parallel, welche die Axe des Kegels in H, die Ebene BCD in bd, Al aber in L schneide, so liegt L in bd. Man ziehe die gerade Linie CM, welche in der Oberfläche des Kegels liegt, und mit dem Umfang der Grundfläche in N zusammen stößt. Die Ebene ACN schneide bMd in HM, die Grundfläche in AN, und es sey $AB = AN = r$, $AC = b$, so ist $BAC = AHL = \alpha$, $AL = MQ = z$, folglich $HL = z \cot \alpha$, $AH = z\ cosec\, \alpha$. Ferner ist $CA : GH = AN : HM$, und $CH = CA - AH$, also $HM = \frac{r(b - y\ cosec\, \alpha)}{b}$. Man ziehe LM, AQ, und setze MR auf bd senkrecht, so ist $LM = AQ = \surd(xx + yy)$. Weil ferner der Winkel $MLR = QAD$, so ist $MR = AP = x$, $LR = PR = y$, und überdem $MR^2 = HM^2 - (HL + LR)^2$. Dieß giebt die Gleichung $xx = \frac{rr(b - z\ cosec\, \alpha)^2}{bb} - (z \cot a + y)^2$, oder $xx + yy = \frac{rr(b - z\ cosec\, \alpha)^2}{bb} - zz \cot \alpha^2 - xyz \cot \alpha$ für den schiefen Kegel, und diese Gleichung verwandelt sich in folgende $bb(xx + yy) = rr(b - z^2$, wenn $\alpha = 90°$, also der Kegel ein gerader Kegel ist.

8. §.

Die Gleichung für den Schnitt des schiefen Kegels bey jeder gegebenen Lage der Ebene des Schnitts gegen die Axe und Grundfläche des Kegels zu finden.

Aufl. Es sey fgh (3. Fig.) die Ebene des Schnitts und fh ihr Durchschnitt mit der Grundfläche. Man lege durch die Axe AC eine Ebene BCD auf die Grundfläche senkrecht, welche die Grundfläche in BD, und fh in E schneidet. Auf BD sey AP als die Axe der Abscissen x senkrecht, und sie schneide fh in F. Es sey der Winkel AFE $= \psi$, der Ebene fgh Neigungswinkel gegen die Grundfläche des Kegels $= \phi$, und AE $= f$. Wenn nun M ein Punkt im Kegelschnitt ist, so sey MS auf fh senkrecht, und ES $= t$, SM $= u$. Nimmt man ferner die Coordinaten y und z des Kegels mit AD und Al parallel, wie in 7. §. so hat man die Gleichung $xx + yy = \frac{rr}{bb}(b - z\,cosec\,\alpha)^2 - zz\,cot\,\alpha^2 - xyz\,cot\,\alpha$. Nach dem bf setze man $x = t\,cos\,\psi + u\,cos\,\phi\,sin\,\psi$ und $y = u\,cos\,\phi\,cos\,\psi - t\,sin\,\psi - f$, $z = u\,sin\,\phi$. Wenn man diese Werthe in die Gleichung des Kegels statt x und y, und z, und der Kürze wegen $\frac{r}{b} = m$ setzt, so erhält man für den Kegelschnitt die Gleichung $tt - z\,sin\,\psi\,sin\,\phi\,cot\,\alpha.\,tu + cos\,\phi^2.\,uu - zf\,cos\,\phi\,cos\,\psi.\,u$

$$\begin{array}{rr} + sin\,\phi^2\,cot\,\alpha^2 & + zm^2\,b\,cosec\,\alpha\,sin\,\phi \\ + z\,cos\,\phi\,cos\,\psi\,sin\,\phi\,cot\,\alpha & - zf\,sin\,\phi\,cot\,\alpha \\ - m^2\,cosec\,\alpha^2\,sin\,\phi^2 & \end{array}$$

$+ zf\,sin\,\psi.\,t + ff - m^2 b^2 = 0$. Diese Linie gehört zur zweyten Ordnung, und wenn man die Coefficienten von uu, tu, und tt mit P, Q, R, bezeichnet, so weis man aus andern Gründen,

daß

daß der Schnitt eine Ellipse Parabel oder Hyperbel sey, nachdem $4PR - QQ$ positiv, oder $= o$, oder negativ ist. Es wird aber $4P.R - QQ = 4(cos\Phi + sin\Phi\, cos\psi\, cot\alpha)^2 - 4m^2\, cosec\,\alpha^2 sin\Phi^2$. Daher wird der Schnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel seyn, nachdem

$bb(cos\Phi = sin\Phi\, cos\psi\, cot\alpha)^2 >=$ oder $< rr\, cosec\,\alpha^2\, sin\Phi^2$ oder $b\, cos\Phi >=$ oder $< r\, cosec\,\alpha\, sin\Phi - b\, sin\Phi\, cos\psi\, cot\alpha$ oder $\frac{b}{r\, cosec\,\alpha - b\, cos\psi\, cot\alpha} >=$ oder $< \frac{sin\Phi}{cos\Phi}$, oder auch $\frac{b\, sin\alpha}{r - b\, cos\psi\, cos\alpha}$ $>=$ oder $< tang\,\Phi$

Wenn nun die Abscissenlinie ES den Umfang der Grundfläche in f und h trift, so halbire man fh bey e, und ziehe durch A und e den Durchmesser bd der Grundfläche, welcher auf fh senkrecht ist; so wird die Ebene bld durch bd und die Axe Al gelegt die Ebene des Schnitts fgh in der geraden Linie eg schneiden. Ueberdem schneidet die senkrechte Ebene BCD durch die Axe die Ebene des Schnitts in ES, beyde Durchschnittslinien schneiden die Axe, und folglich einander selbst in dem Punkt K, worinn die Ebene des Schnitts und die Axe des Kegels einander schneiden. Nun hat man an A ein körperliches Dreyeck, dessen Seitenflächen EAe, EAK, und eAK sind, dessen Seiten und Winkel sich bekannter massen wie die Seiten und Winkel sphärischer Dreyecke berechnen lassen. Weil die Ebene AEK auf der Grundfläche senkrecht ist, so ist dieß Dreyeck an AE rechtwinklicht, und eAK die Hypothenuse. Da nun EAe = AFE $= \psi$, EAK $= \alpha$, so ist $cos\, e$AK $= cos\alpha\, cos\psi$, und wenn ε der Winkel an Ae ist, unter welchem Cbd die Grundfläche schneidet, so ist $cot\,\varepsilon = sin\psi\, cot\alpha$. Ueberdem ist auch e die Spitze eines körperlichen Dreyecks, dessen Seiten AeE $= 90°$ ist, der Winkel an eA $= \varepsilon$, und an eE $= \Phi$. Also wird $tang$ EeK $= \frac{sin\,\varepsilon}{cos\,\varepsilon\, sin\Phi} = \frac{tang\,\varepsilon}{sin\Phi} = \frac{1}{sin\psi\, sin\Phi\, cot\alpha}$,

 und

und $tang\ AeK = \frac{\sin\Phi}{\cos\Phi \sin\varepsilon} = \frac{tang\,\Phi}{\sin\varepsilon}$. Da nun $\operatorname{cosec}\varepsilon = \sqrt{(1+\cot\varepsilon^2)}$ $= \sqrt{(1+\sin\psi^2 \cot\alpha^2)}$ so ist $\sin\varepsilon = \frac{1}{\operatorname{cosec}\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{(1+\sin\psi^2\cot\alpha^2)}}$, also $tang\,AeK = tang\,\Phi\sqrt{(1+\sin\psi^2\cot\alpha^2)} = \frac{tang\,\Phi\sqrt{(1-\cos\alpha^2\cos\psi^2)}}{\sin\alpha}$.

Aber im Dreyeck ABC ist $tang\ AbC = \frac{b\sin CAb}{b\cos CAb}$, und es war $\cos AK = \cos CAb = \cos\alpha\cos\psi$, also hie $CAb = \sqrt{(1-\cos\alpha^2\cos\psi^2)}$, folglich wird $tang\ AbC = \frac{b\sqrt{(1-\cos\alpha^2\cos\psi^2)}}{r - b\cos\alpha\cos\psi}$.

Nachdem nun $tang\ Abt >=$ oder $< tang\ AlK$, nachdem ist $\frac{b\sin\alpha}{r - b\cos\alpha\cos\psi} >=$ oder $< tang\,\Phi$, folglich wird der Schnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, nachdem $AbC >=$ oder $< AeK$ ist.

9. §.

Die Durchschnittlinie ge (3. Fig.) der Ebene des Schnitts fgh mit der Ebene brd, welche durch die Axe AC so gelegt ist, daß sie fh halbirt, ist ein Durchmesser des Kegelschnitts, und die mit fh parallelen Coordinaten sind ihm zugeordnet.

Beweis. Der Coefficient von uu in der allgemeinen Gleichung des vor. §. läßt sich so ausdrücken $\cos\Phi^2 + 2\cos\Phi\cos\psi\sin\Phi\cot\alpha + \sin\Phi^2\cot\alpha^2(\sin\psi^2\cos\psi^2)$ $- m^2\sin\Phi^2\operatorname{cosec}\alpha^2 = (\cos\Phi + \sin\Phi\cos\psi\cot\alpha)^2 + \sin\Phi^2\sin\psi^2$ $\cot\alpha^2 - m^2\sin\Phi^2\operatorname{cosec}\alpha^2$. Man setze $\cos\Phi + \sin\Phi\cos\psi\cot\alpha$ $= K$, $\cos\Phi\cos\psi + \sin\Phi\cot\alpha = g$, $m\sin\Phi\operatorname{cosec}\alpha = h$, $mb = r$.

Nun

Nun war im vor. §. $tang\, EeK = \frac{1}{\sin\phi \cdot \sin\psi\, \cot\alpha}$; wenn man also den Winkel $EeK = \eta$ setzt, so wird $\sin\phi\, \sin\psi\, \cot\alpha = \cot\eta$. Diese Werthe setze man in die allgemeine Gleichung für den Kegelschnitt, so erhält man

$$tt = 2\cot\eta, tu + (\cot\eta^2 + kk - hh).\, uu + 2(rh - fg)u + 2f\sin.\, t + ff - rr = 0.$$

Nun ist $Ee = f\sin\psi$; wenn man also $eS = T$ setzt, so wird $T = f\sin\psi + t$, und $t = T - f\sin\phi$. Dieß statt t gesetzt giebt die Gleichung $(T - \cot\eta.\, u)^2 + (kk - hh)\, uu + 2\,(f\cot\eta\, \sin\psi + (7h - fg)\, u + f^2\, \cos\psi^2 - rr = 0$. Man ziehe MS (3. und 4. Fig.) mit eK parallel, so ist der Winkel $MsS = EeK = \eta$, und dieser Winkel ist wenigstens so lange spitz, als α nicht über 90° groß ist, ϕ und ψ aber kleiner als 180° sind, weil $\cot\eta = \sin\phi\, \sin\psi\, \cot\alpha$. Da nun in der Gleichung $\alpha < 90°$ angenommen ist; so ist auch η spitz, und s fällt zwischen e und S, so daß $es = eS - Ss$ wird. Setzt man nun $es = X$, $Ms = V$, so wird $u = V\sin\eta$, und $sS = u\cot\eta = V\cos\eta$, folglich $X = T - u\cot\eta$. Diese Werthe in die vorige Gleichung gesetzt geben

$$X^2 + (kk - hh)\sin\eta^2.\, V^2 + 2\,(f\cos\eta\, \sin\psi + (rk - fg)\sin\eta\, V + f^2\cos\psi^2 - rr = 0.$$

In dieser Gleichung kann man die Coordinaten X und V verwechseln. Wenn nämlich Mp mit fh parallel ist, so wird $ep = V$, und $pM = X$; dann aber gehören zu jeder Absciſſe ep zwo gleiche und entgegen gesetzte Coordinaten. Daraus folgt, daß ge ein Durchmesser sey, und daß die mit fh parallelen Coordinaten ihm zugeordnet seyn.

10. §.

Die Größe der beyden halben Durchschnittsmesser zu finden, wovon der eine in ge fällt, und der andre mit fh parallel ist.

Aufl.

Aufl. Man setze der Kürze wegen A, 2B, C, statt der dreyen Coefficienten in der letzten Gleichung zwischen X und V, so hat man $X^2 + A.V^2 + 2B.V + C = o$. Nun suche man die Werthe von V, wenn $X = d$ ist, so findet man aus der Gleichung $V + \frac{2B}{A}. V = -\frac{C}{A}$ folgende Wurzeln $V = -\frac{B}{A} + \frac{\sqrt{(B^2 - AC)}}{A}$. Hieraus ergiebt sich, daß der Mittelpunkt des Kegelschnitts um den Abstand $-\frac{B}{A}$ von e entfernt sey, und unterhalb e liege, wenn $\frac{B}{A}$ positiv ist. Ziehet man nun durch den Mittelpunkt eine neue Abscissenlinie mn mit fh parallel, so wächst (4. Fig.) die Ordinate $Ms = V$ um das Stück $ec = \frac{B}{A}$. Setzt man also die neue Ordinate $ey = Y$, so wird $V = Y - \frac{B}{A}$, und dieser Werth in die obige Gleichung für den Kegelschnitt gesetzt giebt folgende: $Y^2 = \frac{B^2 - AC}{A^2} - \frac{1}{A} X^2$. Daher ist die Hälfte des mit fh parallelen Durchmessers $em = \frac{\sqrt{(B^2 - AC)}}{\sqrt{A}}$

$$= \frac{\sqrt{(f \sin\psi \cos\eta + (rh - fg) \sin\eta)^2 - (kk - hh)(ff \cos\psi^2 - rr)}}{\sqrt{(kk - hh)}},$$

und die Hälfte des zugehörigen Durchmessers $eg = \frac{\sqrt{(B^2 - AC)}}{A} =$

$$\frac{\sqrt{(C. f \sin\psi \cos\eta + (rh - fg) \sin\eta)^2 - (kk - hh)(ff \cos\psi^2 - rr)}}{kk - hh}.$$

11. §.

Die Gestalt des Kegelschnitts zu finden, wenn die Ebene des Schnitts auf der Axe des Kegels senkrecht ist.

Aufl.

Aufl. Wenn EF (3. Fig.) mit AF parallel, also $\psi = 0$ ist, so fällt e in E, und EF ist auf BD folglich auf die Ebene BCD senkrecht, so daß nun AEK $= \phi$ wird, und $\eta =$ EeK $= f$EK $= 90°$. Wenn demnach überdem der Winkel AKE (2. Fig.) $= 90°$ ist, so ist die Ebene Fsf auf der Axe des Kegels senkrecht. Man setze also (2. Fig.) $\psi = 0$, und AKE $= 90°$, so wird $\phi = 90° - \alpha$. Diese Voraussetzungen geben $k = g = \cos\psi + \sin\phi \cot\alpha = \sin\alpha + \cos\alpha \cot\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$, und $h = m \cos\alpha \operatorname{cosec}\alpha = m \cot\alpha$. Folglich wird $A = gg - hh = \operatorname{cosec}\alpha^2 - m^2 \cot\alpha^2$, $B = rh - fg = mr\cot\alpha - f\operatorname{cosec}\alpha$, $C = ff - rr$. Man setze diese Worte in die Gleichung $x^2 + A.V^2 + rB.V + C = 0$, so ergiebt sich die Gleichung

$X^2 + (\operatorname{cosec}\alpha^2 - m^2 \cot\alpha^2)V^2 + 2(mr\cot\alpha - f\operatorname{cosec}\alpha)V + ff - rr = 0$. oder $V^2 + \frac{2(mr\cot\alpha - f\operatorname{cosec}\alpha)V}{\operatorname{cosec}\alpha^2 - m^2\cot\alpha^2} = \frac{rr - ff - X^2}{\operatorname{cosec}\alpha^2 - m^2\cot\alpha^2}$. Nun ist in der 2. Fig. GE eine Hauptaxe des Schnitts, und wenn c der Mittelpunkt des Schnitts ist, so wird $Ec = -\frac{B}{A} = \frac{f\operatorname{cosec}\alpha - mr\cot\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha^2 - m^2\cot\alpha^2} = \frac{f\sin\alpha - mr\sin\alpha\cos\alpha}{1 - m^2\cos\alpha^2}$. Nachdem also dieser Ausdruck positiv oder negativ ist, fällt c oberhalb oder unterhalb Ff. Nimmt man die Abscissen auf dem mit Ff parallelen Durchmesser, so erhält man $Y^2 = \frac{B^2 - AC}{A^2} - \frac{1X^2}{A}$ (10. §.), und im gegenwärtigen Fall wird $B^2 - AC = (rh fg)^2 - (gg - hh)(ff - rr) = (rg - fh)^2 = (r\operatorname{cosec}\alpha - m f\cot\alpha)^2 X^2$

also $Y^2 = \frac{(r \operatorname{cosec} \alpha - mf \cot \alpha)^2}{(\operatorname{cosec} \alpha^2 - m^2 \cot \alpha^2)^2} - \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha^2 - m^2 \cot \alpha^2} X^2$, oder

$Y^2 = \frac{(r \sin \alpha^2 - mf \cos \alpha \sin \alpha)^2}{(1 - m^2 \cos \alpha^2)^2} - \frac{\sin \alpha^2}{1 - m^2 \cos \alpha^2} X^2$. Demnach

ist die halbe Zwergaxe $= \frac{r \sin \alpha - mf \cos \alpha \sin \alpha}{1 - m^2 \cos \alpha^2}$

$= \frac{r b \sin \alpha (b - f \cos \alpha)}{bb - rr \cos \alpha^2}$, und die halbe conjungirte Axe,

$= \frac{r - mf \cos \alpha}{\sqrt{(1 - m^2 \cos \alpha^2}} = \frac{r (b \cos \alpha)}{\sqrt{(bb - rr \cos \alpha^2}}$. Nachdem also die Gestalt des Kegels so oder anders beschaffen ist; kann der Schnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel seyn. Es werden nemlich diese drey Fälle statt haben, nachdem $b >= $ oder $< r \cos \alpha$ ist. Man hat aber $\tan$ ACB $= \frac{r \sin \alpha}{b - r \cos \alpha}$. Nachdem also ACB ein spitzer, ein rechter, oder ein stumpfer Winkel ist, nachdem ist der Schnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Folglich ist der Schnitt nicht allemal eine Ellipse, und auch in dem Fall, wenn ACB spitz ist, fällt der Mittelpunkt der Ellipse nie in die Axe des Kegels.

Soll nämlich das letztere erfolgen, so muß $Ec = EK$ seyn. Da nun $EK = f \sin \alpha$ ist, so müßte $\frac{f \sin \alpha - mr \sin \alpha \cos \alpha}{1 - m^2 \cos \alpha^2} = f \sin \alpha$ seyn. Hieraus folgt $f \sin \alpha - mr \sin \alpha \cos \alpha = f \sin \alpha - m^2 f \sin \alpha \cos \alpha^2$, oder $r \sin \alpha \cos \alpha = m f \sin \alpha \cos \alpha^2$, folglich $r = mf \cos \alpha$, oder $b = f \cos \alpha$, und $f = b \sec \alpha$. In diesem Fall also müßte der Schnitt durch die Spitze des Kegels gehen. Es ist nämlich $AK = f \cos \alpha$; also wäre in diesem Fall $AK = AC$. Daher kann der Mittelpunkt der Ellipse gar nicht in die Axe fallen, wie denn

denn auch in eben diesem Falle beyde Hauptaxen $= o$ werden, so daß die Ellipse in einem Punkte zusammen geht. Hindurch wird also dasjenige bestätiget, was im 3. §. behauptet worden.

12. §.

Wenn in der allgemeinen Gleichung für den Kegelschnitt (8. §.) $b = \infty$, also $\frac{r}{b} = m = o$ gesetz wird, so hat man die allgemeine Gleichung für den Schnitt eines schiefen Cylinders, dessen Axe gegen die Grundfläche unter dem Winkel $= \alpha$ geneigt ist. Die Gleichung selbst wird folgende.

$$
\begin{array}{llll}
tt - 2\sin\phi\sin\psi\cot\alpha\, tu & + \cos\phi^2 uu & - 2f\cos\phi\cos\psi\, u & + 2f\sin\psi\, t + ff = o. \\
\quad + 2\cos\phi\cos\psi\sin\phi\cot\alpha & & - 2f\sin\phi\cot\alpha & \qquad - rr \\
\quad + \sin\phi^2\cot\alpha^2 & & &
\end{array}
$$

Der Schnitt ist allemal eine Ellipse, weil $(\cos\phi + \sin\phi \cos\psi \cot\alpha)^2$ allemal positiv ist. In dem Fall, wenn dieser Ausdruck $= o$ wäre, hätte man $\cot\phi = - \cos\psi \cot\alpha$. Aber

$$tang\, AeK = \frac{tang\,\phi \surd(1 - \cos\alpha^2 \cos\psi^2)}{\sin\alpha} = \frac{- \surd(1 - \cos\alpha^2 \cos\psi^2)}{\cos\psi \cos\alpha},$$

und $tang\, Abc = \frac{\surd(1 - \cos\alpha^2 \cos\psi^2)}{\cos\psi \cos\alpha}$, folglich $AeK = AbC$. Dies ist der Fall, da im Kegel der Schnitt eine Parabel seyn würde, woraus hier ein System zwoer grader und paralleler Linien wird, wie den Eigenschaften des Cylinders gemäß ist, und die Gleichung am kürzesten ergiebt, wenn man wie im 9. §. den Anfangspunkt der Abscissen in e, und die Ordinaten mit gd parallel nimmt.

Es verwandelt sich nämlich die letzte Gleichung des 9. §. in folgende
$X^2 + kk\, sin\, \eta^2 V^2 + 2f(cos\, \eta\, sin\, \psi - g\, sin\, \eta) V + f^2 cos\, \psi^2 - rr = o$,
weil $h = o$ wird. Ueberdem ist $k = cos\, \phi + sin\, \phi\, cos\, \psi\, cot\, \alpha = o$, also auch $cos\, \phi\, cos\, \psi + sin\, \phi\, cot\, \alpha - sin\, \phi\, cot\, \alpha\, sin\, \psi^2 = o$. Weil nun $sin\, \phi\, sin\, \psi\, cot\, \alpha = cot\, \eta$, so wird, $g - cot\, \eta\, sin\, \psi = o$, oder $cos\, \eta\, sin\, \psi - g\, sin\, \eta = o$. Daher erhält man die Gleichung $X^2 + f^2 cos\, \psi^2 - rr = o$, und V wird nicht durch X bestimmt. Aber es wird $X = \pm \sqrt{} rr - f^2 cos\, \psi^2) = \pm\, ef$.

13. §.

Wenn die Ebene des Schnitts auf der Axe des Cylinders senkrecht ist, so wird die Gleichung so verändert $V^2 - 2f\, sin\, \alpha.\, V = (rr - ff - X^2)\, sin\, \alpha^2$. Ueberdem wird GE eine Hauptaxe des Schnitts, und wenn c der Mittelpunkt des Schnitts ist, so wird $Ec = f\, sin\, \alpha = EK$, so daß der Mittelpunkt in die Axe des Cylinders fällt. Setzt man also $Y = V - f\, sin\, \alpha$, so erhält man die Gleichung $Y^2 = rr\, sin\, \alpha^2 - X^2\, sin\, \alpha^2$, und es wird die Hälfte der mit Ff parallelen Axe $= r$, die Hälfte der conjugirten Axe $= r\, sin\, \alpha$. Der schiefe Cylinder hat also die Eigenschaft, daß alle durch seine Axe senkrecht geführten Schnitte Ellipsen werden, deren Mittelpunkte in des Cylinders Axe fallen. Man könnte daher diese Eigenschaft mit H. Euler Introd. in Anal. inf. Append. Cap. III. §. 52. für die Erklärung des schiefen Cylinders annehmen, wenn es nicht aus andern Gründen besser wäre, die gewöhnliche beyzubehalten, dessen zu geschweigen, daß bey dieser letzten Erklärung die Betrachtung des schiefen Cylinders aus den Anfangsgründen ganz wegbleiben müßte.

Uebri-

Uebrigens erhält man aus dem 10. §. $B = f(\cos\eta \sin\psi - g \sin\eta)$, $A = (\cos\phi + \sin\phi \cos\psi \cot\alpha)^2 = kk$, $C = f^2 \cos\psi^2 - rr$. Rechnet man also die Abseissen vom Mittelpunkt, so wird die allgemeine Gleichung diese:

$$Y^2 = \frac{f^2 (\cos\eta \sin\psi - g \sin\eta)^2 - kk (f^2 \cos\psi^2 - rr)}{K^4} - \frac{1}{K^2} X^2$$

Die Hälfte des mit fh parallelen Durchmessers ist

$$= \frac{\sqrt{(f^2 \cos\eta \sin\psi - g \sin\eta)^2 - kk (f^2 \cos\psi^2 - rr)}}{K},$$

und man hat die Hälfte des zugehörigen Durchmessers, wenn man jenen Ausdruck mit $\frac{1}{K}$ multiplicirt, da denn η der Conjugationswinkel ist, und $\cot\eta = \sin\phi \sin\psi \cot\alpha$.

14. §.

Wenn die Gestalt des Kegels gegeben ist, also r, b, und α, bekannt sind, zu finden, wie groß die Winkel ϕ und ψ genommen werden müssen, damit der Kegelschnitt ein Kreis werde.

Aufl. Die Durchschnittslinie der Ebene des Schnitts mit derjenigen Ebene durch die Axe, welche die Durchschnittslinie der Ebene des Schnitts und der Grundfläche halbirt, ist allemal ein Durchmesser des Kegelschnitts, und die ihm zugehörigen Ordinaten sind mit der Grundfläche parallel. So lange nun der Conjugationswinkel ein schiefer Winkel ist, kann der Schnitt kein Kreis seyn, weil der Kreis keine solche zusammengehörige Durchmesser hat, die sich unter einem schiefen Winkel schneiden. Damit also der Kegelschnitt ein Kreis werde, wird allemal erfordert, daß der Conjugationswinkel $EeK = \eta = 90°$ sey. Also muß $\cot\eta = \sin\phi$

$\sin\psi\ \cot\alpha = 0$ seyn. Weil nun nicht $\cot\alpha = 0$ seyn kann, wenn der Kegel ein schiefer Kegel ist, so ist entweder $\sin\phi = 0$ oder $\sin\psi = 0$. Im ersten Fall ist der Schnitt mit der Grundfläche parallel, und es ist aus den Anfangsgründen bekannt, daß alsdann der Schnitt ein Kreis sey. Wenn nun ϕ nicht $= 0$ ist, so muß $\psi = 0$, folglich fh auf BD senkrecht, und die Ebene des Schnitts auf der Neigungsebene BCD der Axe des Kegels gegen die Grundfläche senkrecht seyn. Damit nun in diesem Fall der Schnitt ein Kreis werde, wird überdem erfordert, daß die beyden Durchmesser, woran der eine mit fh parallel, der andre auf fh senkrecht ist, gleich groß seyn, wobey übrigens vorausgesetzt wird, daß AEK $<$ ABC sey, damit der Schnitt in die Klasse der Ellipsen gehöre. In dem Fall nämlich, wenn (2. Fig.) AEK $>$ ABC ist, würde die Voraussetzung, daß die Axen gleich seyn sollen, eine gleichseitige Hyperbel geben. Gehört aber der Schnitt in die Klasse der Ellipsen, so werden ihre Axen gleich, und der Schnitt wird ein Kreis, wenn in der Gleichung $Y^2 = \frac{B^2 - AC}{A^2} - \frac{1}{A}X^2$ (10. §.) $A = 1$ ist. Es war aber $A = kk - hh$, und wenn man aus dem 9 §. die dasigen Werthe statt k und h wieder herstellt, aber $\sin\psi = 0$, und $\cos\psi = 1$ setzt, so erhält man $k = g = \cos\phi + \sin\phi\cot\alpha$, $h = m\sin\phi\,\mathrm{cosec}\,\alpha$, und man findet ϕ aus der Gleichung $\cos\phi^2 + 2\cos\phi\sin\phi\cot\alpha + \sin\phi^2\cot\alpha^2 - m^2\sin\phi^2\,\mathrm{cosec}\,\alpha^2 = 1$. Dividirt man nämlich mit $\cos\phi^2$, so wird $(\cot\alpha^2 - m^2\,\mathrm{cosec}\,\alpha^2)\tan\phi^2 + 2\cot\alpha\tan\phi = \tan\phi^2$, und von dieser Gleichung ist die eine Wurzel $\tan\phi = 0$ für den Fall, wenn die Ebene des Schnitts mit der Grundfläche parallel ist. Die andere Wurzel giebt sich aus der Gleichung $2\cot\alpha = (1 - \cot\alpha^2 + m^2\,\mathrm{cosec}\,\alpha^2) \times \tan\phi$, oder wenn man mit $\sin\alpha^2$ multiplicirt $2\cos\alpha\sin\alpha = (\sin\alpha^2 - \cos\alpha^2 + m^2\tan\phi$, folglich $\tan\phi$

$$= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{m^2 - (\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2)} = \frac{\sin 2\alpha}{m^2 - \cos 2\alpha}.$$

Wenn

Wenn man in dem Ausdruck $tang\,\phi = \frac{2\,sin\,\alpha\;cos\,\alpha}{m^2 - cos\,\alpha^2 + sin\,\alpha^2}$ Zehler und Nenner durch $m^2 - cos\,\alpha^2$ dividirt, so erhält man $tang\,\phi = \frac{2\,sin\,\alpha\;cos\,\alpha}{m^2 - cos\,\alpha^2} : \left(1 + \left(\frac{sin\,\alpha^2}{m^2 - cos\,\alpha^2}\right)\right) =$ $\left(\frac{sin\,\alpha}{m - cos\,\alpha} - \frac{sin\,\alpha}{m + cos\,\alpha}\right) : \left(+\frac{sin\,\alpha}{m - cos\,\alpha} \times \frac{sin\,\alpha}{m + cos\,\alpha}\right)$. Es ist aber $tang\,ABC = \frac{b\,sin\,\alpha}{r - b\,cos\,\alpha} = \frac{sin\,\alpha}{m - cos\,\alpha}$, und $tang\,ADC = \frac{b\,sin\,\alpha}{r + cos\,\alpha} = \frac{sin\,\alpha}{m + cos\,\alpha}$. Folglich wird $tang\,\phi =$ $\frac{tang\,ABC - tang\,ADC}{1 - tang\,ABC\;tang\,ADC}$, oder $tang\,\phi = tang\,(ABC - ADC)$, also $\phi = ABC - ADC$, und $ABC = \phi + ADC = CGE$. Dies ist also die sectio coni subcontraria der Alten (Apollon. Con. Lib. I. Prop. V.) und es erhellet zugleich aus der bisherigen Analysi, daß kein andrer Schnitt, als die sectio subcontraria einen Kreis geben könne, dafern nicht die Ebene des Schnitts mit der Grundfläche des Kegels parallel ist (Apoll. Con. Lib. I. Prop. IX.)

15. §.

Man setze nun in den Formuln des 10. §. $\psi = 0$, also $sin\,\psi = 0$, $cos\,\psi = 1$, $cot\,\eta = 0$, $cos\,\eta = 0$, $sin\,\eta = 1$, so wird $A = gg - hh$, $B = rh - fg$, $C = ff - rr$, folglich $\frac{B^2 - AC}{A^2}$ $= \frac{(rg - fh)^2}{(gg - hh)^2}$, und man erhält für den auf der Neigungsebene der Axe gegen die Grundfläche senkrechten Schnitt diese allgemeine Gleichung $Y^2 = \frac{(rg - fh)^2}{(gg - hh)^2} - \frac{1}{gg - hh}X^2$, die Abscissen vom Mittelpunkt auf der mit Ff parallelen Axe gerechnet; und wenn c der Mittelpunkt ist, so hat man $Ec = -\frac{B}{A} = \frac{fg - rh}{gg - hh}$. Setzt man aus dem 9. §. statt g und h ihre dortigen Werthe, so wird $\frac{(rg - fh)^2}{(gg - hh)^2} = \frac{(r(\cos\phi + \sin\phi\cot\alpha) - fm\sin\phi\,\mathrm{cosec}\,\alpha)^2}{((\cos\phi + \sin\phi\cot\alpha)^2 - m^2\sin\phi^2\,\mathrm{cose}\,\alpha^2)^2}$ $= \frac{(r\sin(\alpha+\phi) - fm\sin\phi)^2\sin\alpha^2}{(\sin(\alpha+\phi)^2 - m^2\sin\phi^2)^2}$, und $\frac{1}{gg - hh} = \frac{\sin\alpha^2}{\sin(\alpha+\phi)^2 - m^2\sin\phi^2}$. Folglich erhält man die Gleichung $Y^2 = \frac{(r\sin(\alpha+\phi) - fm\sin\phi)^2\sin\alpha^2}{(\sin(\alpha+\phi)^2 - m^2\sin\phi^2)^2} - \frac{\sin\alpha^2}{\sin(\alpha+\phi)^2 - m^2\sin\phi^2}X^2$. Ueberdem wird $Ec = \frac{f(\cos\phi + \sin\phi\cot\alpha) - rm\sin\phi\,\mathrm{cosec}\,\alpha}{(\cos\phi + \sin\phi\cot\alpha)^2 - m^2\sin\phi^2\,\mathrm{cosec}\,\alpha^2} = \frac{f\sin\alpha\sin(\alpha+\phi) - rm\sin\phi\sin\alpha}{\sin(\alpha+\phi)^2 - m^2\sin\phi^2}$.

Wenn nun $gg - hh = 1$, also der Schnitt ein Kreis ist, so wird $Y^2 = \frac{(r\sin(\alpha+\phi) - fm\sin\phi)^2}{\sin\alpha^2} - X^2$, weil $\sin(\alpha+\phi)^2 - m^2\sin\phi^2 = \sin\alpha^2$ wird, also ist der Halbmesser des Kreises $= \frac{r\sin(\alpha+\phi) - fm\sin\phi}{\sin\alpha}$ und $Ec = \frac{f\sin(\alpha+\phi) - rm\sin\phi}{\sin\alpha}$, da denn $\phi = ABC - ADC$ seyn muß.

16. §.

Wenn die Axe des Kegels $b = \infty$, also aus dem Kegel ein Cylinder wird, so ist $m = 0$, und man hat für den auf die Neigungsebene der Axe gegen die Grundfläche senkrechten Schnitt

Schnitt

Schnitt die Gleichung $Y^2 = rr - \frac{\sin\alpha^2}{\sin(\alpha+\phi)^2} X^2$, und $Ec = \frac{f \sin\alpha}{\sin(\alpha+\phi)}$. Damit der Schnitt ein Kreis werde, muß $tang\,\phi = - tang\,2\alpha$, also $\phi = 180° - 2\alpha$ seyn. Folglich wird $EKA = 180° - \phi - \alpha = \alpha$, und $EK = EA = f$. Nun wird ferner $\alpha + \phi = 180° - \alpha$, also $\sin(\alpha + \phi) = \sin\alpha$, und dies giebt $Ec = f$. Demnach fällt der Mittelpunkt des Kreises in die Axe des Cylinders, und sein Halbmesser ist dem Halbmesser der Grundfläche gleich. Es wird nämlich die Gleichung so verändert $Y^2 = rr - X^2$.

17. §.

Dafern die Axe des Kegels dem Halbmesser seiner Grundfläche gleich, also $r = b$ und $m = 1$ ist; so liegen die drey Punkte B, C, D. im Umfang eines Halbkreises, über BD, folglich ist $BCD = 90°$, und $ADC = 90° - ABC$. Wird nun $\phi = ABC - ADC$ genommen, so ist $\phi = ABC - 90°$, $AKE = 180° - (\alpha+\phi)$, und $\alpha = 180° - 2\,ABC$, folglich $AKE = 90°$, und der Schnitt ist auf des Kegels Axe senkrecht. Wenn demnach $r = b$ ist, so giebt jeder auf die Axe senkrechte Schnitt einen Kreis. Da nun in eben diesem Fall $\alpha + \phi = 90°$ ist, so wird $\sin\phi = \cos\alpha$, und $\cos\phi = \sin\alpha$. Demnach fällt der Mittelpunkt in c, wenn $Ec = \frac{f - r\cos\alpha}{\sin\alpha}$ genommen wird, und der Halbmesser des Kreises wird $= \frac{r - f\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Fällt überdem in eben diesem Fall der Mittelpunkt der Grundfläche in die Ebene des Schnitts, so gehet Ff durch A. und es ist $AE = f = o$, also $Ec = - r\cot\alpha$, und der Halbmesser des Kreises $= \frac{r}{\sin\alpha} = r\,cosec\,\alpha$.

18. §.

Dieß ist der Fall der stereographischen Projection der Meridiane der Kugel, wenn die Tafel selbst ein Meridian ist, wofür man gewöhnlich den ersten Meridian annimmt, und das Auge im Pol dieses Meridians stehet. (Man vergleiche nun hiemit die Abhandlung von den Projectionen der Kugel, worauf ich in der Folge allemal der Kürze wegen unter dem Namen der **vorigen Abhandlung** verweisen werde.) Wenn der Meridian PLQ (6. Figur der **vorigen Abhandlung**) die Tafel GPHQ unter dem Winkel GTF = CT*l* schneidet, so ist dieser Winkel $= 90° - OTl$, und OT*l* ist der Neigungswinkel der Axe des optischen Kegels gegen seine Grundfläche, der in der bisherigen Ausführung $= \alpha$ gesetzt ist. In der **vorigen Abhandlung** war GTF $= \gamma$, also ist hier $\cot \alpha = \tan g\, \gamma$, und $\operatorname{cosec} \alpha = \sec \gamma$. Dies giebt den Halbmesser der Projection $= r \sec \gamma$, und seinem Abstand von PQ, oder TC $= - r \tan g\, \gamma$, wie im 16. §. **voriger Abhandlung**.

19. §.

Die stereographische Horizontal-Projection der Meridiane (21. §. der **vorigen Abhandlung**) gehört ebenfalls hieher, wenn die Tafel der Horizont des Punkts (5. Fig.) Z ist, und das Auge im Nadir stehet. Man lege durch OT als die Axe des Kegels eine Ebene O*bd* auf den Meridian *bpdq* als des Kegels Grundfläche senkrecht, und die Durchschnittslinie mit dem Meridian sey *bd*; so ist OT*b* der Neigungswinkel der Axe gegen die Grundfläche, welcher bisher $= \alpha$ gesetzt ist, und sein Maas ist der Bogen O*b* eines größten Kreises der Kugel. Wenn nun, wie im 21. §. der **vorigen Abhandlung**, die Breite des Orts Z $= \lambda$ und der Stundenwinkel L*p*Z $= \phi$ gesetzt wird, so ist im sphärischen Dreyeck O*bq* die Seite O*b* $= \alpha$, O*q* $= 90° - \lambda$ und der Winkel

O*qb*

$Oqb = LpZ = \phi$. Bey b aber ist ein rechter Winkel, folglich wird $\sin\alpha = \cos\lambda \sin\phi$, und $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1.}{\cos\lambda \sin\phi} = \sec\lambda \operatorname{cosec}\phi$. Dieß giebt den Halbmesser der Projection $r \operatorname{cosec}\alpha = r \sec\phi \operatorname{cosec}\lambda$, wie im 21. §. voriger Abhandlung.

20. §.

Um auch die Lage des Mittelpunkts C der Projection auf der Tafel zu finden schließe man so. Die Ebene Obd schneide die Tafel in TG, so ist G ein Scheitel des Kegelschnitts, wenn G in Od liegt. Ueberdem sey Nn die Durchschnittslinie der Tafel und der Grundfläche des Kegels, so ist TG auf Nn senkrecht, und der Mittelpunkt C liegt in GT. Um ihn zu finden, muß man $TC = - r \cot\alpha$ nehmen (17. §.). Es war aber $\operatorname{cosec}\alpha = \sec\lambda \operatorname{cosec}\phi$, also wird $\cot\alpha = \surd(\sec\lambda^2 \operatorname{cosec}\phi^2 - 1)$, und $TC = -r\surd(\sec\lambda^2 \operatorname{cosec}\phi^2 - 1)$. Weil nun $\sec\lambda^2 \operatorname{cosec}\phi^2 - 1 = \operatorname{cosec}\phi^2 + \tan\lambda^2 \operatorname{cosec}\phi^2 - 1 = \frac{1 + \tan\lambda^2 - \sin\phi^2}{\sin\phi^2} = \frac{\tan\lambda^2 + \cos\phi^2}{\sin\phi^2}$ $= \frac{\tan\lambda^2 (\sin\phi^2 + \cos\phi^2) + \cos\phi^2}{\sin\phi^2} = \frac{\tan\lambda^2 \sin\phi^2 + \sec\lambda^2 \cos\phi^2}{\sin\phi^2}$ $= \frac{\tan\lambda^2 \tan\phi^2 + \sec\lambda^2}{\tan\phi^2}$; so wird $TC = -r \frac{\surd(\tan\lambda^2 \tan\phi^2 + \sec\lambda^2}{\tan\phi^2}$. Ferner ist das sphärische Dreyeck BpN bey B rechtwinklicht, und die Seite $Bp = \lambda$, der Winkel $BpN = \phi$, folglich $\tan BN = \sin\lambda \tan\phi = \cot BTG = \cot DTC$. Das giebt $\sin DTC = \frac{1.}{\surd(1 + \sin\lambda^2 \tan\phi^2)} = \surd\frac{1 : \cos\lambda^2}{1 : \cos\lambda^2 + \tan\lambda^2 \tan\phi^2} = \frac{\sec\lambda}{\surd(\sec\lambda^2 + \tan\lambda^2 \tan\phi^2}$,

 und

und $cos\,DTC = \frac{sin\,\lambda\,tang\,\phi}{\sqrt{(1 + sin\,\lambda^2\,tang\,\phi^2}} =$

$\frac{tang\,\lambda\,tang\,\phi}{\sqrt{(sec\,\lambda^2 + tang\,\lambda^2\,tang\,\phi^2)}}$. Man setze nun CD auf BT senkrecht, so ist $DC = TC\,sin\,DTC = -\frac{r\,sec\,\lambda}{tang\,\phi}$, und $DT = TC\,cos\,DTC = -r\,tang\,\lambda$, beydes wie im 21. §. voriger Abhandlung.

21. §.

Wenn die Ebene des Kegelschnitts nicht allein auf der Neigungsebene der Axe gegen die Grundfläche senkrecht ist, so hat man $\psi = o$, und $\phi = 90°$. Damit aber der Kegelschnitt ein Kreis werde, muß $tang\,\phi = \frac{sin\,2\,\alpha}{m^2 - cos\,2\,\alpha}$ seyn, oder $cot\,\phi = \frac{m^2 - cos\,2\,\alpha}{sin\,2\,\alpha}$. Demnach wird bey gegenwärtiger Voraussetzung $\frac{m^2 - cos\,2\,\alpha}{sin\,2\,\alpha} = o$, und $m^2 = cos\,2\,\alpha$, oder $\frac{rr}{bb} = cos\,\alpha^2 - sin\,\alpha^2$, folglich $rr + bb\,sin\,\alpha^2 = bb\,cos\,\alpha^2$. Ueberdem giebt diese Voraussetzung $sin(\alpha + \phi) = cos\,\alpha$, also den Halbmesser der Projection $= \frac{r\,cos\,\alpha - fm}{sin\,\alpha}$, und $Ec = \frac{f\,cos\,\alpha - r\,m}{sin\,\alpha}$. Geht überdem der Schnitt durch den Mittelpunkt der Grundfläche, so ist $f = o$, also der Halbmesser des Schnitts $= \frac{r\,cos\,\alpha}{sin\,\alpha} = r\,cot\,\alpha$, und $Ec = -\frac{r\,m}{sin\,\alpha} = -\frac{r\,r}{b\,sin\,\alpha}$.

22. §.

Dieser letzte Fall findet seine Anwendung bey der stereographischen Projection der Parallelkreise des Aequators auf einem Meridian als der Tafel, wenn das Auge im Pol dieses Meridians stehet. Es sey in der 9. Fig. zur vorigen Abhandlung wo DLd einen Parallelkreis vorstellt, dieses Parallelkreises Halbmesser $= r$, der Kugel Halbmesser $= \rho$. Wenn nun e sein Mittelpunkt ist, und man ziehet Oe als die Axe des optischen Kegels, so ist der Neigungswinkel dieser Axe gegen die Grundfläche $= e\mathrm{OT} = \alpha$, und $\mathrm{O}e = b$. Ferner ist $\mathrm{T}e = b \sin\alpha$, $\mathrm{OT} = \rho = b \cos\alpha$, und $\varrho\varrho = \mathrm{T}e^2 + rr$, also $bb \cos\alpha^2 = bb \sin\alpha^2 + rr$, wie erfordert wird, damit die Projection ein Kreis werde. Ueberdem geht die Tafel durch den Mittelpunkt des Parallelkreises, also wird der Halbmesser der Projection $= r \cot\alpha = \frac{r\mathrm{OT}}{\mathrm{T}e}$. Wenn nun die Breite des Parallelkreises $= \psi$ ist, so wird $\mathrm{T}e = \varrho \sin\psi$, und $r = \rho \cos\psi$, also $\frac{r}{\mathrm{T}e} = \frac{\cos\psi}{\sin\psi} = \cot\psi$, folglich ist der Halbmesser der Projection $= \rho \cot\psi$. Weiter wird $\mathrm{E}c = -\frac{rr}{b \sin\alpha} = \frac{\varrho\varrho \cos\psi^2}{\varrho \sin\psi} = -\rho \cos\psi \cot\psi$. Da nun $\mathrm{T}e = \rho \sin\psi$, so wird $\mathrm{T}c = \rho(\sin\psi + \cos\psi \cot\psi) = \rho \times \frac{\sin\psi^2 + \cos\psi^2}{\sin\psi} = \rho \operatorname{cosec}\psi$, welches mit dem 19. §. der vorigen Abhandlung übereinstimmet.

23. §.

Bey der stereographischen Horizontal-Projectionen der Parallelkreise des Aequators läßt sich die bisherige Theorie (6. Fig.) so anwenden. Man ziehe OM, OC, und ON, wenn MFNf der

Parallelkreis und C sein Mittelpunkt ist; so ist OC die Axe des optischen Kegels, und der Parallelkreis die Grundfläche. Die Ebene des Meridians OBZβ ist die Neigungsebene der Axe gegen die Grundfläche, und der Neigungswinkel selbst ist OCN $= a$. Auf der Ebene dieses Neigungswinkels steht die Tafel BFβf senkrecht, und sie schneidet die Grundfläche des Kegels unter dem Winkel TEM $= \psi$. Weil nun TC auf MN senkrecht ist, und auch ETZ $= 90°$, so ist CTZ $=$ TEC $= \psi$, und OTC $= 180° - \psi$, so wie TCO $= 90° - \alpha$, folglich TOC $= 180° -$ OTC $-$ TCO $= \alpha + \psi - 90°$. Man setze CO $= b$, und CM $= r$, so hat man $\sin$ OTC : $b =$ $\sin$ TCO : TO, also TO $= \frac{b \sin \mathrm{TCO}}{\sin \mathrm{OTC}} = \frac{b \cos \alpha}{\sin \psi} =$ TM. Ferner $\sin$ OTC : $b = \sin$ TOC : TC, also TC $= \frac{b \sin \mathrm{TOC}}{\sin \mathrm{OTC}} = \frac{b \cos(\alpha + \psi)}{\sin \psi}$.

Aber TM² $=$ TC² $+$ CM² also $\frac{bb \cos \alpha^2}{\sin \psi^2} = \frac{bb \cos(\alpha + \psi)^2}{\sin \psi^2} + rr$.

Hieraus folgt $bb \cos \alpha^2 = bb (\cos \alpha \cos \psi - \sin \alpha \sin \psi) + rr \sin \psi^2$, oder $bb \cos \alpha^2 = bb (\cos \alpha^2 \cos \psi^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \psi \cos \psi + \sin \alpha^2 \sin \psi^2) + rr \sin \psi^2$. Wenn man nun $1 - \sin \psi^2$ statt $\cos \psi^2$ schreibt, so erhält man ferner $2\, bb \sin \alpha \cos \alpha = rr + bb \sin \alpha^2 - bb \cos \alpha^2) \times \tang \psi$, folglich $\tang \psi = \frac{bb \sin 2\alpha}{rr - bb \cos 2\alpha} =$

$\frac{\sin 2\alpha}{m^2 - \cos 2\alpha}$. Demnach ist vermöge des 14. §. der Schnitt ein Kreis.

24. §.

Der Halbmesser dieses Kreises ist vermöge des 15. §. $= \frac{r \sin \alpha + \phi - f m \sin \phi}{\sin \alpha} = \frac{r(b \sin \alpha + \phi - f \sin \phi)}{b \sin \alpha}$, und wenn man

$f \sin$

in der Linie ET den Abstand $Ec = \frac{f \sin \alpha + \phi - r m \sin \phi}{\sin \alpha}$ $= \frac{b f \sin(\alpha+\phi) - rr \sin \phi}{b \sin \alpha}$ nimmt, so ist c der Mittelpunkt der Projection. Es sey der Kugel Halbmesser $= \rho$. so ist $\rho = \frac{r}{\cos \psi}$. Ueberdem ist der Winkel $OKT = 180° - (\alpha + \phi)$, wenn nemlich K der Punkt ist, worinn OC von der Tafel geschnitten wird. Daher ist im Dreyeck OKT die Seite $OK = \frac{\rho}{\sin(\alpha+\phi)}$, im Dreyeck ECK aber die Seite $KC = \frac{f \sin \phi}{\sin(\alpha+\phi)}$, folglich $OK + KC = b = \frac{\rho + f \sin \phi}{\sin(\alpha+\phi)}$, und $f \sin \phi = b \sin(\alpha+\phi) - \rho$. Dies statt $f \sin \phi$ gesetzt giebt den Halbmesser der Projection $= \frac{\rho r}{b \sin \alpha}$. Nun war im 28. §. der vorigen Abhandlung die Breite des Orts $Z = \phi$, und des Parallelkreises Breite $= \psi$. Daher ist der Bogen $ON = \psi + \phi$, und $ZM = \psi - \lambda$. Im Dreyeck OCN aber ist die Seite $ON = 2 \rho \sin \frac{1}{2} (\psi + \lambda)$ der Winkel $ONM = \frac{1}{2}(180° - (\psi - \lambda)) = 90° - \frac{1}{2}(\psi - \lambda)$ und $OCN = \alpha$. Folglich hat man im Dreyeck OCN die Proportion $b : \cos \frac{1}{2} (\psi - \lambda) = 2 \phi \sin \frac{1}{2} (\psi + \lambda) : \sin \alpha$, und diese giebt $b \sin \alpha =$ $b \sin \alpha = 2 \rho \cos \frac{1}{2} (\psi + \lambda) = \rho (\sin \psi + \sin \lambda)$. Daher wird der Halbmesser der Projection $= \frac{\rho}{\sin \psi + \sin \lambda} = \frac{\rho \cos \psi}{\sin \psi + \sin \lambda}$.

Ferner ist $b f \sin(\alpha+\phi) = ff \sin \phi + f \rho$, also $Ec = \frac{(ff - rr) \sin \phi + f \rho}{b \sin \alpha}$. Man hat überdem $(CM + CE)(CM - CE) =$

(Tß

$(T\beta + TE)(T\beta - TE)$, oder $rr - ff = \varrho\varrho - TE^2$. Dieß giebt $Ec = \frac{(TE^2 - \varrho\varrho)\sin\Phi + f\varrho}{b \sin\alpha}$. Es ist aber $TE = \frac{\varrho \sin\psi}{\sin\Phi}$, also $(TE^2 - \varrho\varrho)\sin\Phi = \frac{\varrho^2 \sin\psi^2 - \varrho^2 \sin\Phi^2}{\sin\Phi}$; ferner $\varrho \sin\psi = CT = f \tang\Phi$, folglich $f = \varrho \sin\psi \cot\Phi$ und $Ec = \frac{\varrho^2 \sin\psi(\sin\psi + \cos\Phi)}{b \sin\alpha \sin\psi} - \frac{\Phi \sin\varrho^2}{b \sin\Phi}$. Ist nun ÆQ die Durchschnittslinie des Aequators mit dem Meridian, so ist $QTZ + CTZ = 90° = \lambda + \Phi$, also $\sin\Phi = \cos\lambda$, und $\cos\Phi = \sin\lambda$. Ueberdem war $b \sin\alpha = \varrho(\sin\psi + \sin\lambda)$, also findet man $Ec = \frac{\varrho \sin\psi}{\sin\Phi} - \frac{\varrho\cos\lambda}{\sin\psi + \sin\lambda} = TE - \frac{\varrho\cos\lambda}{\sin\psi + \sin\lambda}$, und daraus folgt $TE - Ec = Tc = \frac{\varrho\cos\lambda}{\sin\psi + \sin\lambda}$, welches wiederum alles mit dem 28. §. der vorigen Abhandlung übereinstimmet.

W. J. G.

W. J. G. Karstens
Abhandlung
von der
Archimedeischen
Wasserschraube.

Von der Archimedeischen Wasserschraube.

1. §.

Herr Leonh. Euler hat im V. Theil der Comment. Nov. Petrop. eine Theorie der Wasserschraube vorgetragen, welche auf die nunmehro bekannten neuen Erweiterungen der Hydraulik gebauet ist; er hat die Rechnungen darüber so weit getrieben, als es die Schwierigkeiten der Integrationen, die dabey vorkommen, zulassen: ist aber genöthiget gewesen, die Untersuchung abzubrechen, weil er kein Mittel fand, diejenige Differentialgleichung zu integriren, woraus die Geschwindigkeit des Wassers in der um die Spindel gewundenen Röhre gefunden werden müste. Nach der Zeit hat die königliche Akademie der Wissenschaften zu Berlin die Preisfrage aufgegeben, wie eine Wasserschraube am vortheilhaftesten anzuordnen sey, und sie hat im Jahr 1766. dem Herrn Hennert den Preis zuerkannt. Der Herr Hennert gründet in der Preisschrift seine Rechnungen mit Herrn Euler auf einerley Differentialgleichung, und scheint zu glauben, daß er die erwehnte Geschwindigkeit des Wassers in der Wasserschraube der Theorie gemäß richtig gefunden habe. Herr Hennert müste demnach eine wichtige bisher noch unbekannt gewesene Methode zu integriren erfunden haben, wenn er dieses wirklich geleistet hätte: sein Vortrag aber hat meine Erwartung gar nicht erfüllet, er scheint mir vielmehr sehr wichtigen Erinnerungen ausgesetzt zu seyn, und nach meiner Ueberzeugung ist die Preisfrage in der Hauptsache unbeantwortet geblieben. Deswegen glaube ich, daß es nicht ohne Nutzen seyn werde, wenn ich in diesem Aufsatz zeige, wieweit man in der Theorie von dieser Maschine eigentlich gekommen sey; und wenn ich zugleich diejenigen Formuln entwickele, woran man sich bey der Berechnung und Anordnung einer Wasserschraube mit ziemlicher Sicherheit so lange halten kann, bis man Mittel gefunden hat, die Schwierigkeiten der Theorie zu überwinden.

2. §.

Es wird nicht nöthig seyn, daß ich mich umständlich mit einer Beschreibung von der Gestalt der Wasserschraube aufhalte. Das Wesentliche davon besteht bekanntermassen darinn, daß eine hohle Röhre um einen Cylinder so geführt wird, daß ihre centrische Linie die Gestalt einer Schraubenlinie bekömmt. Uebrigens finde ich nicht undienlich zu erinnern, daß es nach Leupolds Urtheil im Theatro Machin. Hydraul. P. I. IV. Cap. 67. §. schwer sey, eine bleyerne Röhre in der Gestalt einer Schraubenlinie um die Spindel zu führen. Deswegen ist es auch wohl gewöhnlich, daß man die Wasserschraube inwendig ohngefehr wie eine Wendeltreppe zurichtet, wovon man a. a. O. Zeichnungen findet, so wie auch Vorschriften gegeben werden, wie alles aus hölzernen Stücken,

cken, die hier auch Schaufeln heissen, gehörig zusammengesetzt, und hiernächst mit eisernen Reifen verbunden werden kann. Ferner bemerke ich noch, daß um eine und eben dieselbe Spindel zwey, auch wohl drey verschiedene Röhren geführt werden können, worauf sich die Eintheilung in einfache, doppelte und dreyfache Wasserschrauben gründet. Indessen ist es nur nöthig, die einfache Schnecke zu betrachten, weil dasjenige, was von dem einem Schneckengang erwiesen wird, hiernächst ohne Schwierigkeit auf die übrigen angewandt werden kann.

3. §.

Es sey nun ABCD die Spindel (1. Fig.) in einer, wie gewöhnlich, gegen den Horizont geneigten Lage, und AETGHC sey die centrische Linie der um die Spindel geführten Röhre. Das Rechteck ABCD sey ein verticaler Schnitt durch die Axe Oo, und durch B sey BK in dieser Verticialfläche horizontal gezogen, so ist CBK der Neigungswinkel der Spindel gegen den Horizont, BA ist der Durchmesser der untern Grundfläche, und der Punct A liegt unter allen Puncten im Umfang der untern Grundfläche am höchsten über eine durch B horizontal liegende Ebene. Die Figur ist nun so gezeichnet, daß der unterste Anfangspunct der Schraubenlinie ebenfalls in A fällt. Steht nun das Wasser bis an *hi*, so kann bey dieser Stellung der Spindel kein Wasser in A hinein treten, dafern die Oefnung A höher als der Wasserpaß *hi* liegt. Beym Umlauf der Spindel durchläuft die untere Oefnung A den Umfang des Kreises AαBPA, und bey jedem Umlauf wird diese untere Oefnung unter Wasser seyn, so lange sie in dem Bogen αBPa bleibt, wenn man annimmt, daß $a\alpha$ die Durchschnittslinie der Wasserfläche mit der Grundfläche der Spindel sey, so wie *hi* die Durchschnittslinie eben der Wasserfläche mit der Verticalfläche ABKCD ist. Weil die Wasserfläche sowohl, als auch die Ebene $A\alpha B\alpha$ beyde auf ABKCD senkrecht sind, so ist $\alpha\alpha$ auf ABKCD senkrecht, folglich auch auf AB und *hi.*, so daß die Bogen $A\alpha$ und $A\alpha$, imgleichen $B\alpha$ und $B\alpha$ gleich groß sind. Man stelle sich nun die Verticale Ebene DABKC unbeweglich vor, und nehme an, die Spindel drehe sich einmal so um, daß die untere Oefnung der Schnecke von A durch α, B, P bis wieder nach A laufe; so wird diese untere Oefnung unter Wasser seyn, so lange sie in dem Bogen $\alpha BP\alpha$ bleibt, und es ist aus den Gesetzen der Hydrostatick schon begreiflich, daß durch die untere Oefnung, so lange sie unter Wasser bleibt, das Wasser in die Schnecke hinein dringen werde. Nur muß man hiebey zum Grunde setzen, daß die Schnecke nicht zu schnell umlaufe, damit das Wasser Zeit genug behalte, in die Röhre hinein zu treten. Wenn nun die Schnecke in die Lage gekommen ist, welche die 2. Figur vorstellt, wenn die untere Oefnung den Bogen $AbB\alpha$ durchlaufen hat, und bey a wieder über das Wasser herauf steigt, der Bogen aMf aber sich in eben diesem Augenblick nah unter dem Wasser befindet; so ist derselbe jetzt mit Wasser angefüllt. Es muß demnach nun untersucht werden, unter welchen Umständen diejenige Menge Wasser, welche bis dahin in die Röhre hinein getreten ist, beym fernern Umlauf darinn bleiben, und nach und nach höher steigen werde.

4. §.

Es ist der Winkel gegeben, unter welchem die Schraubenlinie den Umfang der Spindel schneidet, nebst dem Neigungswinkel der Axe der Spindel gegen den Horizont, die untere Oefnung befindet sich an ihrer höchsten Stelle bey A: man soll die Höhe eines gegebenen Puncts M der Schraubenlinie, über eine durch B horizontal gelegte Ebene finden.

Aufl.

Aufl. Es sey MP mit der Axe (1. Fig.) der Spindel parallel, und man setze den Bogen $AP = x$, den Winkel $MAP = \eta$, so ist $PM = x \tang \eta$. Ferner sey MR vertical und PT horizontal, so ist MPT der Neigungswinkel der Spindel gegen den Horizont. Man setze diesen Winkel $= \vartheta$, so ist $MT = PM \sin \vartheta = x \tang \eta \sin \vartheta$: die durch B horizontal gelegte Ebene heisse Kürze halber die **Fundamental-Ebene**, und MT schneide diese Ebene in R. Wenn nun auch Pr auf eben dieser Ebene senkrecht ist, so hat man $Pr = TR$. Es sey noch PN auf AB senkrecht, so ist PN horizontal, und wenn NS auf die Fundamental-Ebene senkrecht gezogen wird, so ist auch $NS = Pr = TR$. Weil nun $NBS = 90° - \vartheta$, so wird $NS = BN \cos \vartheta = TR$, und die gesuchte Höhe $MR = x \tang \eta \sin \vartheta + BN \cos \vartheta$. Der Halbmesser AO der Spindel sey $= r$, so ist $BN = 2r - AN$ und $AN = r \sin v \frac{x}{r}$, folglich die gesuchte Höhe $MR = x \tang \eta \sin \vartheta + r (2 - \sin v \frac{x}{r} \cos \vartheta$, oder auch $MR = x \tang \eta \sin \vartheta + r (1 + \cos \frac{x}{r}) \cos \vartheta$.

5. §.

Aus dieser Gleichung fliessen folgende Sätze. Wenn $x = 0$ ist, so hat man $MR = 2 r \cos \vartheta$, wie auch aus Betrachtung der Zeichnung unmittelbar erhellet. So lange als x sehr klein ist, wächst MR, wenn x wächst, denn $x \tang \eta \sin \vartheta$ wächst mit x, und $r (1 + \cos \frac{x}{r}) \cos \vartheta$ nimmt zwar ab: allein nur sehr wenig, weil $\cos \frac{x}{r}$ sehr nahe $= 1$ ist, so lange x sehr klein bleibt. Wie lange MR wachse, findet man vermittelst der Differential-Rechnung, es wird nemlich $\partial MR = \partial x \tang \eta \sin \vartheta - \partial x \sin \frac{r}{x} \cos \vartheta$. So lange dies Differential positiv bleibt, so lange wächst MR, und dies erfolgt, so lange $\sin \frac{x}{r} < \tang \eta \tang \vartheta$ bleibt. Wenn aber $\sin \frac{x}{r} = \tang \eta \tang \vartheta$ wird, so ist MR am grösten, und nimmt wieder ab,

wenn

$\sin\frac{x}{r} > \tang\eta \tang\vartheta$ wird. Es sey demnach $\sin\frac{AQ}{r} = \tang\eta$ $\tang\vartheta$, und QL mit der Spindelaxe parallel, so liegt der Punct L in der Schraubenlinie höher, als die zunächst vorhergehenden und nachfolgenden Puncte.

Wenn $x = \frac{1}{2}\pi r$ wird, so ist $\sin\frac{x}{r} = 1$, und grösser kann dieser Sinus nicht werden. Für grössere Werthe von x nimmt $\sin\frac{x}{r}$ wieder ab, so daß aufs neue $\sin\frac{x}{r} = \tang\eta \tang\vartheta$ wird, wenn $x = \pi r - AQ$ ist. Für grössere Werthe von x muß also $\sin\frac{x}{r} < \tang\eta \tang\vartheta$ werden, und MR wieder wachsen. Wenn demnach $AP = \pi r - AQ$ genommen, und PM mit der Spindel-Axe parallel gezogen wird, so liegt M niedriger, als die zunächst vorhergehenden und nachfolgenden Puncte der Schraubenlinie. Für $x = AQ$ hat die Höhe $L\rho$ einen größten, für $x = AP = \pi r - AQ$ aber hat MR einen kleinsten Werth: und wenn eine durch L horizontal gelegte Ebene die Schraubenlinie in l schneidet, so ist LMl derjenige Bogen, der sich auf einmal mit Wasser füllen kann, (arcus hydrophorus). Man stelle sich vor, das Wasser, worinn die Spindel steht, steige höher hinauf, als L liegt, so wird durch A Wasser in die Schnecke hinein treten, und es wird sich nicht allein der ganze Bogen ALMl mit Wasser füllen, sondern es wird auch noch über l hinaus in die Röhre hinein treten, so weit bis es in der Röhre eben so hoch, als draussen steht. Wenn hiernächst das äussere Wasser wieder bis unter L sinkt, so wird etwas durch A heraus laufen, aber der ganze Bogen LMl wird mit Wasser angefüllt bleiben.

6. §.

Dafern die Schnecke das Wasser zu heben dienen soll; so muß der Neigungswinkel der Grundfläche gegen den Horizont

rizont grösser seyn, als der Winkel der Schrauben-Linie mit dem Umfang der Grundfläche.

Beweis. Es sey der Winkel ABS $< \eta$, also $90° - \vartheta < \eta$, so ist $\cot\vartheta < \tan g\,\eta$, folglich $\tan g\,\eta \tan g\,\vartheta > 1$. Wenn aber die Höhe $L\varrho$ einen grösten, und MR einen kleinsten Werth haben soll; so muß $\sin\frac{QA}{r} = \sin\frac{AP}{r} = \tan g\,\eta \tan g\,\vartheta$ seyn. Dies würde also bey der angenommenen Voraussetzung $\sin\frac{AQ}{r}$, oder $\frac{\sin AP}{r} > 1$ geben, welches nicht möglich ist. Wäre ABS $= \eta$, also $\cot\vartheta = \tan g\,\eta$, so hätte man $\tan g\,\eta \tan g\,\vartheta = 1, = \sin\frac{AQ}{r} = \frac{\sin AP}{r}$, folglich müste $\frac{AQ}{r} = \frac{AP}{r} = \frac{1}{2}\pi$ seyn, und die Puncte L und M würden wie P und Q in einen zusammen fallen, so daß der Wasserhaltende Bogen LMl verschwände. In der Schnecke kann demnach nur alsdenn nach hydrostalischen Gesetzen Wasser stehen bleiben, wenn ABS $> \eta$ ist.

Es muß demnach auch $90° - \eta > 90° -$ ABS seyn, also $90° - \eta > \vartheta$, da dann $90° - \eta$ der Winkel ist, welchen die Schraubenlinie mit den Ordinaten PM einschließt. Dieser muß also grösser seyn, als die Neigung der Spindel gegen den Horizont.

Wenn man $\tan g\,\eta \tan g\,\vartheta = T$ setzt, so erhält man AQ $= r\,A \sin T$, und AP $= r(\pi - A\sin T)$ (5. §.) da dann diese Gleichungen dienen, die Puncte P und Q, also auch L und M zu finden.

7. §.

Man stelle sich nun (2. Fig.) die Schnecke in jeder andern willkührlichen Lage vor, ohne daß die untere Oefnung sich an ihrer höchsten Stelle bey A befindet, etwa wie in der 2. Fig. wo sich die untere Oefnung bey a in dem Halbkreise AaPB befindet. Man erweitere in Gedanken die cylindrische Fläche der Spindel unterhalb der Grundfläche AB, und stelle sich zugleich vor, die Schraubenlinie werde ebenfalls unterhalb a verlängert bis sie mit AD in A′ zusammenstößt. Man lege durch A′ eine Ebene mit der Grundfläche der Spindel parallel, so giebt ihr Schnitt mit der Cylinderfläche einen der Grundfläche gleichen Kreis A′Q′P′B′. Nimmt man nun $A'Q' = r\, A\, sin\, T$, $A'P' = r\,(\pi - A\, sin\, T)$ und zieht alsdenn Q′L und P′M mit der Cylinder-Axe parallel, so ist wie im 5. §. L der höchste und M der niedrigste Punct des wasserhaltenden Bogens: es sind aber diese Puncte mit denjenigen nicht einerley, welche im 5. §. bestimmet wurden, auch ist ihre Höhe über der Fundamentalebene von der dortigen unterschieden. Um ihre Höhe für den gegenwärtigen Fall zu finden, erwäge man folgendes. Wenn man sich durch B′ eine Horizontalfläche vorstellt, so ist die Höhe des Puncts L über diese Ebene $= A'Q'\, tang\, \eta\, sin\, \vartheta + r\,(1 + cos \frac{A'Q'}{r})\, cos\, \vartheta$, und die Höhe des Puncts M über dieselbe $= A'P'\, tang\, \eta\, sin\, \vartheta + r\,(1 + cos \frac{A'P'}{r})\, cos\, \vartheta$. Die Horizontalfläche durch B′ liegt aber um das Stück B′B $sin\, \vartheta$ niedriger, als die vorige durch B, und es ist $B'B = A'A = Aa.\, tang\, \eta$. Wenn also der Winkel $AOa = \phi$ folglich $Aa = r.\phi$ gesetzt wird; so erhellet, daß man von jeder der angegebenen Höhen das Stück $r\,\phi\, tang\, \eta\, sin\, \vartheta$ abziehen müsse, um sie in die Höhen über die Horizontalfläche durch B zu verwandeln. Demnach wird die Höhe des Puncts $M = (A'P' - r\,\phi)\, tang\, \eta\, sin\, \vartheta + r\,(1 + cos' \frac{A'P'}{r})$ $cos\, \vartheta$.

Wäre

Wäre a in dem andern Halbkreise AbB befindlich, so würde der Bogen Ma die Linie AD oberhalb A schneiden. Wenn man sich also den Durchschnittspunct A' oberhalb A vorstellt, so sieht man wohl, daß die Höhe des Puncts $M = (A'P' + r\phi)$ $tang\,\eta\,sin\,\vartheta + r\,(1 + cos\,\frac{A'P'}{r}\,cos\,\vartheta$ werden müsse. Dasselbe ergiebt sich auch daraus, weil alsdenn der Winkel ϕ in der vorigen Gleichung das entgegen gesetzte Zeichen haben muß.

8. §.

Diese Schlüsse machen (2. Fig.) die Art und Weise begreiflich, wie das Wasser bloß wegen seines Gewichts in der Wasserschraube steigen kann. Man stelle sich nemlich vor, die niedrigste Oefnung stehe anfangs in A, da noch alles ledig ist, und die Schnecke werde nun so gedrehet, daß die untere Oefnung von A durch b, B, P, Q laufe. Erreicht sie nun beym Herabsteigen bey a' das Wasser, so tritt dasselbe nach den Gesetzen der Hydrostatick in die Röhre so hoch hinein als es draussen steht, vorausgesetzt, daß die Maschine nicht zu schnell umlaufe. In dem Augenblick nun, da A in P ankommt, ist zwar derjenige Bogen mit Wasser gefüllt, der sich von P aus bis wieder an die Wasserfläche auf der andern Seite erstreckt: allein wenn in diesem Augenblick der Umlauf gehemmet wurde, und das Wasser alsdenn tiefer herab sänke, als P liegt, so würde auch alles in die Schnecke schon hineingetretene Wasser wieder herauslaufen, weil P niedriger liegt, als die übrigen Puncte des mit Wasser angefüllten Bogens. Wäre aber die untere Oefnung schon über P hinaus bis nach a' vorgerückt, so würde unter eben den Umständen nicht mehr alles Wasser auslaufen, weil die zwischen m und a' befindlichen Puncte höher als m liegen. Gesetzt also, daß auch das Wasser nur bis an die

Horizontallinie $a'\alpha'$ stünde, und die untere Oefnung bey a' schon über dem Wasserpaß $a'\alpha'$ hervorsteige, so würde doch der Bogen $a'mb'$ sein Wasser halten, wenn auch b' in dem Wasserpaß $a'\alpha'$ liegt. Steigt nun beym fernern Umlauf der Schnecke die untere Oefnung weiter hinauf von a' bis a, so kann die hinein getretene Masse Wasser nicht in demselben Bogen $a'mb'$ bleiben: Denn es ist nun m nach m' geruckt, und M liegt nun niedriger, als m'. Also muß das Wassertheilchen was vorhin in m war, jetzt nach M gerückt seyn, und man sieht leicht, daß alle übrige Wassertheilchen, um eben soviel gehoben sind, als M höher wie m liegt. Zur Erleichterung der Sache kann man sich die ganze hineingetretene Masse im Punct m vorstellen, so erhellet, daß diese Masse in der geraden Linie PM immer weiter hinauf rücken müsse, wenn die Schnecke umzulaufen fortfährt.

9. §.

Wenn die Sehne QV auf AB senkrecht steht, (1. Fig.) so ist sie horizontal, und die bisherige Ausführung ergiebt, daß die Grundfläche der Wasserschraube bis an diese Sehne unter Wasser stehen müsse, wenn die Schnecke bey jedem Umlauf die möglichst gröste Menge Wasser schöpfen soll. Steht das Wasser niedriger, so schöpft die Schnecke nicht soviel: ja sie würde gar nichts schöpfen, wenn das Wasser noch unter der Horizontallinie PN stünde. Es ist aber $AQ = r\, A \sin T = AV$, und dadurch werden die Puncte V und Q bestimmt. Eine grössere Tiefe unter dem Wasser ist, soviel sich aus dem bisherigen Vortrag beurtheilen läst, unnöthig. Wenn sich nun die Länge des wasserhaltenden Bogens zur Länge eines Schraubenganges wie $v : \mu$ verhält, und es ist die Menge Wasser, die der ganze Schraubengang fassen würde, $= Q$, so schöpft die Schnecke bey jedem Umlauf die Menge Wasser

ser $\frac{v}{\mu}Q$. Diese Menge tritt beym zweyten Umlauf der Schnecke aus dem untern Schraubengang in den nächsthöhern, beym dritten Umlauf aus dem zweyten Schraubengang in den dritten u. s. f. bis es endlich nach soviel Umläufen, als Schraubengänge vorhanden sind, aus dem obersten Schraubengange ausläuft. Das Wasser nemlich, was nach dem ersten Umlauf in LMl stand, wird nach dem zweyten Umlauf in L'M'l' stehen, u. s. f.

10. §.

Es sey nun die Schnecke (1. Fig.) in einer gewissen willkührlichen Lage befestiget, und man nehme an, daß in einem Schraubengange der wasserhaltende Bogen mit Wasser angefüllet sey: so wird das Gewicht dieses Wassers die Schraube zu drehen streben. Wäre das Gewicht dieser ganzen Masse in dem Punct M beysammen, so würde man das Moment, womit dasselbe die Schraube und ihre Axe Oo zu drehen strebte, so finden. Dieß Gewicht sey $= p$, so ist die Richtung MT desselben vertical. Man zerlege es nach den Richtungen MP und MX, so daß MX in der Ebene PMT auf MP senkrecht steht, so wird der Druck nach MX $= p \sin$ MTX $= p \sin$ TMP $= p \cos \vartheta$. Es sey MY mit PO parallel, so ist die Ebene XMY auf PM, folglich auch auf Oo senkrecht, und das Moment des Drucks nach MX $= g \cos \vartheta\, r \sin$. XMY. Nun sey Zz die Durchschnittslinie der Ebene XMQ mit ABCD, so ist der Winkel MYZ $=$ POB. Ferner ist die Ebene MPT mit ABCD, also MX mit YZ parallel, folglich der Winkel XMY $= 180° -$ BOP $=$ AOP, und das Moment des Drucks MX $= p \cos \vartheta\, r \sin$ AOP. Da nun AOP $= \frac{\text{AP}}{r}$, so ist $\sin$ AOP $= \sin \frac{\text{AP}}{r} = tang\, \eta\, tang\, \vartheta$ (6. §.) also wird das Moment des Drucks nach MX $= pr \sin \vartheta\, tang\, \eta$.

11. §.

11. §.

Das Moment zu finden, womit das Wasser, so wie es durch den ganzen Bogen *LMl* ausgebreitet ist, die Schnecke um ihre Axe zu drehen strebt.

Aufl. Es sey M ein unbestimmter Punct des wasserhaltenden Bogens, das Stück AM der centrischen Linie $= s$, der Bogen AL $= \varepsilon$, und die Länge des wasserhaltenden Bogens LM$l = \lambda$; so sind die Kreisbogen AP $= s \cos \eta$, AQ $= \varepsilon \cos \eta$, AQPB$q = (\varepsilon + \lambda) \cos \eta$, folglich APB$q = \lambda \cos \eta$. Wenn nun LQ und lq mit der Axe der Spindel parallel, Qv und $q\mu$ aber auf AB senkrecht sind, so ist A$v = r \sin v \frac{AQ}{r}$, und A$\mu = r \sin v \frac{APBq}{r}$. Wenn ferner das Gewicht der ganzen Masse Wasser $= p$ gesetzt wird, so ist das Gewicht des in M befindlichen Elements $= \frac{pds}{\lambda}$. Das Moment, womit dies Element die Schraube zu drehen strebt, ist $= \frac{pds}{\lambda} \cos \vartheta : r \sin$ AOP (10. §.) $= \frac{pds}{\lambda}$ NP $\cos \vartheta$. Nun ist AP $= r$ A $\sin v \frac{AN}{r} = r$ A $\sin v \frac{x}{r}$, wenn man AN $= x$ setzt, folglich d. AP $= \frac{rdx}{\sqrt{(2r,x - xx)}} = \frac{r\,dx}{NP}$, und es war AP $=$ $s \cos \eta$, also wird $ds = \frac{rdx}{NP \cos \eta}$. Dies statt ds gesetzt giebt das Moment, womit das in M befindliche Element die Schraube zu drehen strebt, $= \frac{r\,p\,d\,x \cos \vartheta}{\lambda \cos \eta}$. Wird nun die Summe der Momente aller Wassertheilchen von L bis M $= \mu$ gesetzt, so hat man

man vermittelst der Integration $\mu = \frac{r p x \cos \vartheta}{\lambda \cos \eta} + C$. Es ist aber $\mu = 0$, wenn $x = Av = r \sin v \frac{AQ}{r}$ ist, also wird $\mu = \frac{r p \cos \vartheta}{\lambda \cos \eta}$ $(x - r \sin v \frac{AQ}{r})$; und um dasselbe für den ganzen wasserhaltenden Bogen zu haben, muß man $x = A\mu = r \sin v \frac{APBq}{r}$ setzen, woraus der Ausdruck

$$\mu = \frac{r p \cos \vartheta}{\lambda \cos \eta} r \left(\sin v \frac{APBq}{r} - \sin v \frac{AQ}{r} \right)$$

folgt, oder auch

$$\mu = \frac{r p \cos \vartheta}{\lambda \cos \eta} r \left(\cos \frac{AQ}{r} - \cos \frac{APBq}{r} \right).$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch auf folgende Art verkürzen. Weil L und l die äussersten Puncten des wasserhaltenden Bogens sind, so liegen sie gleich hoch über dem Horizont. Aus dem 4. §. aber ergiebt sich die Höhe des Puncts L über die durch B horizontal gelegte Ebene, wenn man AQ statt des dortigen α setzt, und die Höhe des Puncts l über eben die Ebene, wenn man APBq statt x setzt. Sucht man auf diese Art beyde Höhen, und setzt sie einander gleich, so kommt man auf die Gleichung

$$AQ \tan \eta \sin \vartheta + r \left(1 + \cos \frac{AQ}{r} \right) \cos \vartheta =$$

$$APBq \tan \eta \sin \vartheta + r \left(1 + \cos \frac{APBq}{r} \right) \cos \vartheta.$$

Daraus folgt

$$AQ \tan \eta \tan \vartheta + r \cos \frac{AQ}{r} = APBq \tan \eta \tan \vartheta + r \cos \frac{APBq}{r},$$ folglich $$r \left(\cos \frac{AQ}{r} - \cos \frac{APBq}{r} \right) = (APBq - VQ)$$

tang η

$tang\,\eta\;tang\,\vartheta = \lambda\,cos\,\eta\;tang\,\eta\;tang\,\vartheta$ (weil $APBq - AQ = QPBq = \lambda\,cos\,\eta = \lambda\,sin\,\eta\;tang\,\vartheta$. Dieß in den gefundenen Werth von μ gesetzt giebt $\mu = \frac{r\,p\,cos\,\vartheta}{\lambda\,cos\,\eta} \times \lambda\,sin\,\eta\;tang\,\vartheta = r\,p\,tang\,\eta\;sin\,\vartheta$.

Wenn das ganze Gewicht p indem Punct M beysammen wäre, so würde das Moment desselben eben so groß seyn. (10. §.) Deswegen wird dieß Moment leicht gefunden, wenn man p berechnen kann, und diese Rechnung setzt voraus, daß man die Länge des wasserhaltenden Bogens λ finden könne. Wenn nemlich jeder Querschnitt der um die Spindel gewundenen Röhre $= k^2$ ist, so hat man $p = \gamma k^2 \lambda$, wo λ das Gewicht eines Cubic-Fusses Wasser bedeutet.

12. §.

Die Länge des wasserhaltenden Bogens *LMl* zu finden.

Aufl. Es sey der Kreisbogen $AQ = \alpha$ der dem höchsten Punct L zugehört, so hat man $\alpha = r\,A\,sin\,T$, und $T = tang\,\eta\;tang\,\vartheta$. (6. §.) Ferner sey $APBq = \beta$, so erhält man aus dem vorigen §. die Gleichung $cos\,\frac{\alpha}{r} - cos\,\frac{\beta}{r} = \left(\frac{\beta}{r} - \frac{\alpha}{r}\right) tang\,\eta\;tang\,\vartheta$. Man setze $cos\,\frac{\beta}{r} = z$, so hat man $\frac{\beta}{r} = A\,cos\,z$ so wie $\frac{\alpha}{r} = A\,sin\,T$, und $cos\,\frac{\alpha}{r} = \surd(1 - TT)$. Dies giebt

$$\surd(1 - TT) - z = (A\,cos\,z - A\,sin\,T)\,T,$$

oder $z + T.\,A\,cos\,z = \surd(1 - TT) + T.\,A\,sin\,T$. Wenn aus dieser Gleichung z gefunden ist, so hat man zugleich $A\,cos\,z = \frac{\beta}{r}$,

also

also auch $\frac{\beta - \alpha}{r}$ und $\beta - \alpha$. Es ist aber $\beta - \alpha = QPBq = \lambda \cos\eta$, und daraus erhält man $\lambda = \frac{\mu - \alpha}{\cos\eta} = (\beta - \alpha) \sec\eta$. Die Länge eines ganzen Schraubenganges ist $= 2\pi\nu \sec\eta$; wird also diese $= l$ gesetzt, so hat man $\lambda = \frac{\beta - \alpha}{2\pi\nu} l$.

Aus dem 6. §. weis man, daß $tang\,\eta\; tang\,\vartheta$ nicht grösser, als 1. seyn könne. Der Werth $tang\,\eta\; tang\,\vartheta = 1$ giebt $\frac{\beta}{r} = \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2}\pi$. Wird $tang\,\eta\; tang\,\vartheta < 1$ angenommen, also $\frac{\alpha}{r} < \frac{1}{2}\pi$, so muß $\frac{\beta}{r} < \frac{1}{2}\pi$ werden. Denn es ist $AP = r\,(\pi - \frac{\alpha}{r})$, wird also $\frac{\alpha}{r} < \frac{1}{2}\pi$, so wird $\frac{AP}{r} > \frac{1}{2}\pi$. Aber es ist allemal $APBq > AP$, also $\frac{\beta}{r} > \frac{AP}{r}$, folglich auch $\frac{\beta}{r} > \frac{1}{2}\pi$, daß demnach $\cos\frac{\beta}{r}$ das entgegen gesetzte Zeichen bekommt. Je kleiner $tang\,\eta\; tang\,\vartheta$, also auch $\frac{\alpha}{r}$ wird, desto grösser muß $\frac{\beta}{r}$ werden. Wird $tang\,\eta\; tang\,\vartheta = 0$, also $\frac{\alpha}{r} = 0$, so wird $1 - \cos\frac{\beta}{r} = 0$, und $\cos\frac{\beta}{r} = 1$, folglich $\frac{\beta}{r} = 2\pi$.

13. §.

Weil die völlige Auflösung der Aufgabe des vorigen §. darauf beruhet, daß man den Werth von x aus der Gleichung

$z + T. A \cos z = \surd(1 + TT) + T. A \sin T$ finden könne, so müßte man $A \cos z$ durch z ausdrücken, und sodann z auf eine Seite des Gleichheits-Zeichens bringen. Allein es ist bekannt, daß sich $A \cos z$ nicht anders, als vermittelst einer unendlichen Reihe durch z ausdrücken lasse: deswegen bedient man sich hier einer oder der andern bekannten Näherungs-Methoden. Man nimmt den Werth von z muthmaßlich an, und sucht ihn nach und nach dem wahren Werth von z so nahe zu bringen, als der jedesmal erforderlichen Schärfe gemäß ist. Wenn man die Gleichung so ausdrückt $z + T. A \cos z - \surd(1 - TT) - T. A \sin T = o$, und den Ausdruck vor dem Gleichheitszeichen $= Y$ setzt, so wird Y eine Function von z; und man weis, wenn der Werth $z = f$ den Werth $Y = F$ giebt, und beynahe $F = o$ ist; daß alsdenn schon beynahe $z = f$ sey, und noch näher $z = f - \frac{F dz}{dy}$, also hier $z = f - \frac{F \surd(1 - ff)}{\surd(1 - ff) - T}$ gefunden werde. Dieser Methode zu schliessen haben sich schon andere Schriftsteller bedienet, die ich unten nahmhaft machen werde.

14. §.

Wenn b der Abstand der Schraubengänge ist; so hat man $\tan g\,\eta = \frac{b}{2\pi r}$. Demnach wird im 11. §. $\mu = r p \tan g\,\eta \sin \vartheta = \frac{b}{2\pi} p \sin \vartheta$, und dies wäre das Moment der Kraft, welches erfordert wird, die Schraube im Gleichgewicht zu erhalten, wenn nur ein wasserhaltender Bogen angefüllet ist. Wenn demnach die Anzahl der Schraubengänge $= n$ ist, so wird dies Moment $= \frac{nb}{2\pi} p \sin \vartheta$, wenn alle Bogen gefüllt sind. Wird nun in einer

Ebene,

Ebene, die auf der Axe Oo senkrecht ist, in der Entfernung f von der Axe eine Kraft P angebracht, so ist ihr Moment $= Pf$; und wenn diese Kraft mit der gesammten Masse Wasser, womit die Schraube beschwert ist, im Gleichgewicht seyn soll, so erhält man $P = \frac{b \sin \vartheta}{2\pi f} n p$, da dann $n p$ das Gewicht der ganzen in der Schraube befindlichen Masse Wasser ist. Wenn diese $= Q$ gesetzt und die Kraft P durch eine Menge Wasser ausgedrückt wird, deren Gewicht dieser Kraft gleich ist; so hat man $P = \frac{b \sin \vartheta}{2\pi f} Q$. Indem aber die Schnecke einmal herum geht, durchläuft die Kraft den Weg $2\pi f$, und die Last Q wird um die Höhe $b \sin \vartheta$ gehoben.

Ist M der niedrigste Punct des wasserhaltenden Bogens, so ist seine Höhe über eine durch B horizontal gelegte Ebene $=$ $(AP + r\phi) \tan\eta \sin\vartheta + r(1 + \cos \frac{AQ}{r}) \cos\vartheta$, wenn ϕ den Winkel AOa bedeutet, um welchen sich die Spindel gegen $AqBP$ zu gedrehet hat. (7. §.) Der veränderliche Theil $r\phi \sin\eta \tan\vartheta$ dieses Ausdrucks ist dem Winkel ϕ proportional. Wenn also die Spindel gleichförmig umläuft, so steigt auch die Last mit gleichförmiger Bewegung, und weil das Moment der Last gar nicht von dem Winkel ϕ abhängt, so ist dasselbe von gleicher Grösse, was auch die Spindel durch die Umdrehung um ihre Axe für eine Lage bekommt.

15. §.

Die Wasserschraube wird durch eine Maschine umgetrieben, und an derselben ist eine veränderliche Kraft angebracht, die von der Geschwindigkeit der Maschine abhängt:

hängt: man sucht die Menge Wasser, welche diese Maschine bey der vortheilhaftesten Anordnung auf eine gegebene Höhe $= a$ in gegebener Zeit T haben kann.

Aufl. Man muß diejenige Geschwindigkeit des angegriffenen Theils der Maschine kennen, wobey das mechanische Moment der Kraft am größten wird. Diese Geschwindigkeit sey $= \alpha$, und die davon abhängende Kraft $=$ F. Die Umlaufszeit der Spindel sey $= t$, so steigt das Wasser binnen der Zeit t auf die Höhe $b \sin \vartheta$, und die Geschwindigkeit desselben nach der verticalen Richtung ist $= \frac{b \sin \vartheta}{t}$, folglich das mechanische Moment der Last $= \frac{Q b \sin \vartheta}{t}$. Für den Beharrungsstand der Maschine hat man also $F\alpha = \frac{Q b \sin \vartheta}{t}$. Wenn nun n die Anzahl der Schraubengänge ist, so hebt die Maschine in der Zeit t die Menge Wasser $\frac{1}{n} Q$ auf die Höhe $n b \sin \vartheta = a$, folglich in der Zeit T die Menge $\frac{T.Q}{n.t}$. Wenn man diese Wassermenge $=$ M setzt, und den Werth $\frac{Q}{t} = \frac{F\alpha}{b \sin \vartheta}$ substituirt, so findet man $M = \frac{F\alpha T}{n b \sin \vartheta} = \frac{F\alpha T}{a}$.

16. §.

Eine vortheilhafte Anordnung einer Maschine, welche die Wasserschraube umtreiben soll, anzugeben.

Aufl.

Aufl. Man hat einmal die Gleichung $M = \frac{F\alpha T}{a}$, und hiernächst ist die in der Zeit t gehobene Menge Wasser $= \frac{1}{n} Q = \frac{Mt}{T}$; und weil eben dies diejenige Menge ist, die einen wasserhaltenden Bogen füllet; so muß $k^2 \lambda = \frac{Mt}{T}$ seyn, wenn λ die Länge des wasserhaltenden Bogens, und k^2 den flächen Innhalt seiner Querschnitte bedeutet. Aus dieser Gleichung hat man $t = \frac{K^2 \lambda T}{M}$. Die Umlaufszeit des Hauptrades sey $= \vartheta$, und der Halbmesser desselben $= \varrho$, so ist $\vartheta = \frac{2\pi\varrho}{\alpha}$, da dann das Verhältniß $\frac{\vartheta}{t}$ die Einrichtung der Maschine bestimmt.

Gewöhnlich wird die Höhe a gegeben seyn, auf welche die Maschine das Wasser bringen soll, und daraus ergiebt sich $M = \frac{F\alpha T}{a}$, wenn das mechanische Moment der Kraft, $F\alpha$ bekannt ist. Die Wahl der Kraft, welche die Maschine treiben soll, wird von der Beschaffenheit des Orts, wo die Maschine angelegt werden soll, und andern eintretenden Umständen abhängen. Uebrigens sind nun in der Gleichung $t = \frac{k^2 \lambda T}{M}$ drey Grössen t, k^2 und λ vorhanden, wovon man zwey willkührlich bestimmen kann: jedoch ist man dabey an folgende Einschränkungen gebunden. Man bestimmt λ, wenn man die Winkel η, ϑ, und den Halbmesser r der Spindel bestimmt, von der Axe der Spindel bis an die centrische Linie der um die Spindel geführten Röhre genommen. Es sey

nun

nun die Länge der Spindel $Oo = b$, so ist $\sin\vartheta = \frac{a}{b}$. Je kleiner demnach b genommen wird, desto grösser wird $\sin\vartheta$. Man sieht leicht, daß es vortheilhaft sey, b so klein zu nehmen, als die Umstände zulassen, weil dadurch nicht allein ein Theil der Kösten erspart, sondern auch das Gewicht der Schnecke, folglich zugleich die Friction an ihren Zapfen vermindert wird. Aber man darf auch b nicht zu klein nehmen, damit $\sin\vartheta$ nicht zu groß werde, und dies aus zweyen Ursachen. Einmal muß $\tan\vartheta \tan\eta < 1$ seyn, damit die Schnecke wirklich Wasser schöpfen könne, und fürs zweyte wird der wasserhaltende Bogen desto grösser, je kleiner $\tan\vartheta \tan\eta$ bleibt. Wenn also ϑ diesen Einschränkungen gemäß angenommen ist, so muß $\eta < 90° - \vartheta$ seyn, da dann beyde Winkel η und ϑ zusammen die Bogen $\frac{\alpha}{r}$ und $\frac{\beta}{r}$ bestimmen, (12. §.) wofür ich ε und ζ schreiben will, da dann $\lambda = (\zeta - \varepsilon)\, r \sec\eta$ wird, und r noch unbestimmt bleibt.

Man brauche nun diesen Werth statt λ in der Gleichung $k^2\lambda T = M.t$, so hat man $k^2(\zeta - \varepsilon)\, T r \sec\eta = Mt$, und es können nun zwey von den dreyen Grössen k^2, r, und t willkührlich genommen werden. Weil es aber nicht rathsam ist, daß die Schnecke sehr schnell umlaufe, weil sonst der unterste Schraubengang sich nicht gehörig füllen würde, so ist es am besten, die Einrichtung so zu machen, daß t nicht unter 4. Secunden ausfalle. Man kann also in Rücksicht auf diesen Umstand t willkührlich annehmen, und man erhält $k^2 r = \frac{Mt}{(\zeta - \varepsilon)\, T \sec\eta}$, da dann k^2 oder r willkührlich angenommen werden kann. Hiebey bleibt alsdenn noch zu erwegen, daß k^2 nicht zu klein ausfallen müsse, damit das Was-

ser

ser einen völlig freyen Durchgang behalte, und sich keine Unreinigkeiten in der Röhre ansetzen.

17. §.

So wie ich bisher die Theorie von der Wasserschraube vorgetragen habe, eben so ist sie von den meisten mir bekannten Schriftstellern betrachtet worden. Es gehört dahin ein Aufsatz des Herrn Pitot in den Memoires de l' Academie de Paris A. 1736. p. 238. ed. Bat. und des Herrn Daniel Bernoulli Commentationes speciales de cochlea Archimedis in der Hydrodynamica Sect. IX. p. 183. sqq. Der Verfasser der Dissertation sur ces questions: comment l' eau s' éléve t — elle dans la vis d' Archimede, & quels seroient les moyens de porter cette machine a sa perfection, welcher die berlinische Academie der Wissenschaften nächst der Hennertschen Preisschrift das accessit zuerkannt hat, bleibt bey demselben Vortrag dieser Theorie. Ich habe in den beyden letzten §§. eben diese Theorie mit der Ausübung in Verbindung zu bringen gesucht, und ich glaube, daß man sich in der Ausübung an die hieselbst gegebenen Vorschriften noch immer am sichersten halten könne. Von demjenigen, was die oben schon erwehnten Aufsätze der Herrn Euler und Hennert enthalten, werde ich bald mehr Nachricht ertheilen, und damit ich das neueste hieher gehörige Werk: Theoria cochleæ Archimedis ab observationibus, experimentis & analyticis rationibus ducta, auctore Jacobo Bellogrado Soc. Jesu. Parmæ 1767. nicht ganz mit Stillschweigen übergehe, so muß ich sagen, daß ich es nur aus Recensionen kenne, und das Buch selbst bisher noch nicht habe erhalten können.

18. §.

Man nimmt nach der bisher vorgetragenen Theorie an, es trete bey jedem Umlauf der Spindel soviel Wasser in die Schnecke hinein, als der wasserhaltende Bogen fassen kann, voraus gesetzt, daß die Schnecke grade so tief unter Wasser stehe, als die im 9. §. vorgetragene Rechnung erfordert. Diesen Umstand, vermöge dessen die Grundfläche der Schnecke nicht ganz unter Wasser stehen muß, schreibt Bernoulli ausdrücklich vor, und ihm folgt darin der Verfasser des Aufsatzes, welchem die Academie zu Berlin das accessit zuerkannt hat. Andere Schriftsteller, dahin Pfitet gehört, schreiben es zwar nicht ausdrücklich vor, daß die Grundfläche nicht ganz unter Wasser stehen müsse, sie berechnen aber doch die Würkung so, daß sie keinen ununterbrochenen Guß des Wassers aus der obern Mündung der Schraube annehmen, sondern nur bey jedem Umlauf soviel, als der wasserhaltende Bogen fasset. Man wird demnach nun natürlich auf die Frage kommen: ob denn die Wasserschraube ihre Dienste nicht leiste, wenn ihre Grundfläche ganz unter Wasser stehet, und ob nicht vielmehr alsdenn das Wasser ununterbrochen durch die Röhre fliessen, folglich diese Einrichtung noch vortheilhafter als die vorige seyn werde? Auf die Beantwortung dieser Frage zielen Herrn Eulers Untersuchungen ab in der Abhandlung: De cochlea Archimedis in den Comment. Nov. Petrop. T. V. pag. 259. sqq. Dieselbe Theorie legt Herr Hennert zum Grunde in der Dissertation sur la vis d' Archimede, qui a remporté le prix de Mathematique adjugé par l' Académie Royale des sciences & belles lettres de Prusse en 1766. Ich werde demnach nun die Resultate, welche beyde Schriftsteller heraus bringen, mit einander vergleichen.

19. §.

Die Umlaufs-Geschwindigkeit der Spindel (2. Fig.) nebst der relativen Geschwindigkeit des Wassers in der umwundenen Röhre sind gegeben: man sucht die Beschleunigung des Elements *M* nach der Richtung der relativen Bewegung *Mv*.

Aufl. Es sey die relative Geschwindigkeit des Wassers nach der Richtung $Mv = \sqrt{v}$, so ist wegen dieser Bewegung die Beschleunigung des Elements M nach dieser Richtung $= \frac{dv}{dt\sqrt{v}}$. Dieser Ausdruck gilt unbestimmt für jedes Element, weil alle Querschnitte gleich groß angenommen werden. Ferner sey die Geschwindigkeit eines jeden Elements, womit es in seinem Kreise nach der Richtung Mu herum läuft, $= \sqrt{u}$, so entsteht daraus nach der Richtung Mv die Geschwindigkeit $\cos\eta\sqrt{u}$, die aber der vorigen $\sqrt{v}$ entgegen gesetzt ist. Setzt man also die gesamte Beschleunigung des Elements M nach der Richtung $Mv = V$, so hat man $V = \frac{dv}{dt\sqrt{v}} - \frac{du}{dt\sqrt{u}} \cos\eta$, wenn angenommen wird, daß die Spindel nach der Richtung BPA umläuft. Liefe sie gegen APB zu, so müßte $\sqrt{u}$ das entgegen gesetzte Zeichen haben, und es wäre $V = \frac{dv}{dt\sqrt{v}} + \frac{du}{dt\sqrt{u}} \cos\eta$. M. s. Herrn Eulers Aufsatz a. a. O. im 9. §. woselbst eben diese Formul aus Herrn Eulers Rechnungen fließt.

Nun setze man die Kreisbogen $Ba = \alpha$, $aP = A$, also $BP = \alpha - A$, so ist $aM = \frac{A}{\cos\eta}$: und wenn eben dies Stück der Schraubenlinie $= s$ gesetzt wird, so ist $\sqrt{v} = \frac{ds}{dt} = \frac{dA}{dt\ cos\ \eta}$, folglich $\frac{2}{dt}\ d.\ \sqrt{v} = \frac{2}{dt\ cos\ \eta}\ d.\ \frac{dA}{dt}$. Ferner wird $\sqrt{u} = \frac{d\alpha}{dt}$, also $\frac{2\ cos\ \eta}{dt}\ d.\ \sqrt{u} = \frac{2\ cos\ \eta}{dt}\ d.\ \frac{d\alpha}{dt}$, und man erhält $V = \frac{2}{dt\ cos\ \eta}\ d.\ \frac{dA}{dt} - \frac{2\ cos\ \eta}{dt}\ d.\ \frac{d\alpha}{dt}$. Das positive Glied in diesem Ausdruck kann man noch mit $sin\ \eta^2 + cos\ \eta^2 = 1$ multipliciren; so erhält man Herrn Hennerts Formul $V = -\frac{2\ cos\ \eta}{dt}\ d.\ (\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}) + \frac{2\ sin\ \eta\ tang\ \eta}{dt}\ d.\ \frac{dA}{dt}$. M. s. die Preisschrift §. 10. pag. 71.

20. §.

Die von der Schwere abhängende Beschleunigung des Elements *M* nach der Richtung der relativen Bewegung *Mv* zu finden.

Aufl. Wenn dM das Gewicht des Elements bezeichnet; so entsteht daher der Druck nach der Richtung $MX = dM\ cos\ \vartheta$. Diese Richtung schließt mit (1. Fig.) der Tangente des Kreises ZMz, die durch M gehet, einen Winkel $= 90° - ZYM = 90° - BOP$ ein, und es ist $BOP = \frac{\alpha - A}{a}$, wenn a den Halbmesser der Spindel bezeichnet. Zerlegt man also die Kraft MX nach der Richtung der Tangente, und auf ihr senkrecht, so wird jene $= dM\ cos\ \vartheta\ cos(90° - BOP) = dM\ cos\ \vartheta\ sin\ \frac{\alpha - A}{a}$. Mit der Richtung dieser Tangente schließt Mv den Winkel η ein; also entspringt

entspringt hieraus nach der Richtung Mv die Kraft $d\,M \cos\vartheta \sin \frac{\alpha - A}{a} \cos\eta$. Ferner entspringt aus dem Gewicht dM nach der Richtung MP der Druck $d\,M \cos MTP = d\,M \sin\vartheta$, und dieser giebt nach der Richtung Mv den Druck $- d\,M \sin\vartheta \sin\eta$. Daher ist der gesammte Druck nach der Richtung $Mv = dM$ $(\cos\vartheta \sin \frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - \sin\vartheta \sin\eta)$, und dieser Druck durch die Masse dM dividirt giebt die gesuchte Beschleunigung.

21. §.

Den Druck zu finden, welchen jedes Element *M* wegen der Zusammenpressung des Wassers leidet.

Aufl. Wenn h^2 jeden Querschnitt der Röhre bezeichnet, und $h^2\,p$ der Druck ist, den das Element M nach der Richtung Mv leidet, so wird eben dasselbe Element nach entgegen gesetzter Richtung den Druck $h^2\,(p + dp)$ leiden, und daraus entsteht nach der Richtung Mv die Beschleunigung $- \frac{h^2\,dp}{dM} = - \frac{dp \cos\eta}{dA}$, weil $dM = \frac{h^2\ dA}{\cos\eta}$ ist. Hiezu addire man die im vorigen §. gefundene vom Gewicht des Elements herrührende Beschleunigung, und setze die Summe dem im 19. §. gefundenen Ausdruck gleich, so erhält man folgende Gleichung $\cos\vartheta \sin \frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - \sin\vartheta \sin\eta - \frac{dp \cos\eta}{d\,A} = - \frac{2 \cos\eta}{dt}\, d.\, \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\,A}{d\,t}\right) + \frac{2 \sin\eta\ \tang\eta}{d\,t}\, d.\, \frac{d\,A}{d\,t}$. Wofern man diese Gleichung integriren kann, so ist p gefunden. Weil man aber nur für einen gegebenen

Augenblick der Zeit t den Druck p sucht, so muß t, also auch der davon abhängende Bogen α als eine beständige Grösse betrachtet werden. Man siehet sogleich, wie das Integral gefunden werde, wenn man den Ausdruck $\frac{dv}{dt\surd v} - \frac{du}{dt\surd u} \cos\eta$ aus dem 19. §. für V gebraucht. Dies giebt $\cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - \sin\vartheta \sin\eta - \frac{dp\cos\eta}{dA} = \frac{dv}{dt\surd v} - \frac{du}{dt\surd u} \cos\eta$ woraus $dp\cos\eta = dA \sin\frac{\alpha - A}{a} \cos\vartheta \cos\eta - dA \sin\vartheta \sin\eta + \frac{du\cos\eta}{dt\surd u} dA - \frac{dv}{dt\surd v} dA$ folgt, und die Integration giebt $p\cos\eta = C + a\cos\frac{\alpha - A}{a} \cos\vartheta \cos\eta - A \sin\vartheta \sin\eta + \frac{A\,du\cos\eta}{dt\surd u} - \frac{A\,dv}{dt\surd v}$. Eben die Gleichung findet Herr Euler a. a. O. 12. §. 271. S. Bey ihm das q, was hier p heißt, $\surd u$ hat das entgegengesetzte Zeichen, weil er die Spindel nach APB umlaufen läßt, und s ist bey ihm, was hier A heißt. Ueberdem ist bey ihm der Bogen $Aa = p$, also $AP = p + s$; hier aber ist $BP = \alpha - A$, und man hat $\sin\frac{\alpha - A}{a} = \sin\frac{p + s}{a}$, $\cos\frac{\alpha - A}{a} = -\cos\frac{p + s}{a}$.

Herr Hennert a. a. O. 14. §. 74. S. schreibt statt $\frac{dv}{dt\surd v} - \frac{du\cos\eta}{dt\surd u}$ den Ausdruck durch α und A aus dem 19. §. und dies giebt

$$p\cos\eta = C + a\cos\frac{\alpha - A}{a}\cos\vartheta\cos\eta - A\sin\vartheta\sin\eta$$

$$+ \frac{2A\cos\eta}{dt} d\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) - \frac{2A\sin\eta\tan\eta}{dt} d.\frac{d.A}{dt}.$$

Man darf nämlich die erwähnte Formul nur in der schon gefundenen Integralgleichung substituiren, und so müßte nun diese Gleichung auch mit der Hennertschen Integralgleichung a. a. O. einerley seyn. Aber Herrn Hennerts Gleichung ist hievon gänzlich verschieden. Er multiplicirt seine Differentialgleichung, die mit der obenstehenden nach völlig einerley ist, mit $d\alpha - dA$ und erhält

$$(d\alpha - dA)\cos\vartheta\sin\frac{\alpha - A}{a}\cos\eta - (d\alpha - dA)\sin\vartheta\sin\eta -$$

$$\frac{dp\,d\alpha\cos\eta}{dA} + dp\cos\eta = -\frac{2(d\alpha - dA)\cos\eta}{dt} d.$$

$$\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) + \frac{2(d\alpha - dA)\sin\eta\tan\eta}{dt} d.\frac{dA}{dt}.$$

Nun integrirt er so, daß nicht allein A sondern auch α, ja $\frac{d\alpha}{dt}$ sowohl als auch $\frac{dA}{dt}$ veränderlich angenommen werden, und dies giebt $- a\cos\frac{\alpha - A}{a}\cos\vartheta\cos\eta - (\alpha - A)\sin\vartheta\sin\eta - \int$

$$\frac{dp\,d\alpha\cos\eta}{dA} + p\cos\eta + C = -\cos\eta.\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)^2 +$$

$$2\sin\eta\tan\eta\left\{\int\frac{1}{dt}d\alpha\, d.\frac{dA}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{dA}{dt}\right)^2\right\}.$$ Dies Verfahren ist der richtigen Theorie ganz entgegen, und es verleiten den Herrn Hennert zu einer ganz falschen Auflösung seiner Hauptaufgabe. Man muß nicht mit $d\alpha - dA$, sondern mit dA multipliciren, so erhält man

$$dA \cos\vartheta \sin\frac{\alpha - A}{a} \cos\eta - dA \sin\vartheta \sin\eta - dp \cos\eta =$$

$$-2dA\cos\eta \times \frac{1}{dt} d.\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) + 2dA\sin\eta\tan\eta \times \frac{1}{dt}$$

$d.\frac{dA}{dt}$. Was von t abhängt, also auch α, muß nun bey der Integration unveränderlich bleiben, es muß sich nur A und p ändern, und dies vorausgesetzt, erhält man

$$a\cos\vartheta\cos\frac{\alpha - A}{a}\cos\eta - A\sin\vartheta\sin\eta - p\cos\eta + C =$$

$$-\frac{2A\cos\eta}{dt} d.\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right) + \frac{2A\sin\eta\tan\eta}{dt} d.\frac{dA}{dt},$$ welches völlig die vorhin herausgebrachte richtige Gleichung ist, so wie sie mit Herrn Eulers Gleichung überein kömmt.

22. §.

Ich werde demnach berechtiget seyn, diese richtige Gleichung in der Folge zu gebrauchen, da dann vor allen Dingen nun erfordert wird, die beständige Grösse C zu bestimmen. Wenn dies geschehen soll, so muß man zuforderst festsetzen, ob die Wasserschnecke während des ganzen Umlaufs beständig mit Wasser angefüllt angenommen werden soll, oder ob man annehmen will, daß von jedem Schraubengange nur ein Theil angefüllt sey. Herr Hennert setzt das erste voraus, und Herr Euler berechnet beyde Fälle besonders. Nimmt man die erste Voraussetzung an, daß die Schnecke beständig ganz mit Wasser angefüllet sey, welches in die untere Oefnung ununterbrochen hinein, und aus der obern wieder herausfließt; so muß man auch zum Grunde setzen, daß die ganze Grundfläche sich beständig unter Wasser befinde, damit die untere Oefnung nie über dem Wasser herauf steige. Dies widerspricht

der

der Vorschrift des 9. §. nicht, denn dort ward vorausgesetzt, daß sich bey jedem Umlauf nur der wasserhaltende Bogen füllen, und die Schnecke nicht ununterbrochen fliessen sollte. Ist nun $PM = Y$, so hat man $Y = A \times tang\, \eta$, und $A = Y \cot \eta$. Wenn demnach die ganze Länge der Spindel $O\, o = b$ ist, so gehört der obern Oefnung bey C die Ordinate $Y = b$, und der Bogen $A = b \cot \eta$ zu. Weil nun oben das Wasser ausfließt, so muß $p = o$ seyn, wenn $A = b \cot \eta$ ist. (Der Druck der Atmosphäre wird beyseit gesetzt.) Setzt man diese Werthe in die für p gefundene Gleichung, so erhält man $C = -a \cos \frac{\alpha - b \cot \eta}{a} \cos \vartheta \cos \eta +$

$$b \sin \vartheta \cos \eta - \frac{b\, du \cot \eta \cos \eta}{dt \sqrt{u}} + \frac{b\, dv \cot \eta}{dt \sqrt{v}}.$$

Wenn man hiemit noch die Voraussetzung verbindet, daß die Umlaufs-Geschwindigkeit der Spindel einmal gleichförmig werde, und man sucht die Bewegung des Wassers in der Schnecke für diesen Zustand der Maschine; so kann man das, was in du multiplicirt ist, weglassen; weil für diesen Zustand $du = o$ wird.

23. §.

Die Geschwindigkeit des Wassers in der Schnecke zu finden, vorausgesetzt, daß die untere Oefnung beständig unter Wasser bleibe, und die Umlaufsgeschwindigkeit schon unveränderlich sey.

Aufl. Für die untere Oefnung bey a, wo das Wasser hineintritt, sey $p = \pi$, so ist zugleich $A = o$, und dies in die Gleichung des vorigen §. gesetzt giebt

$$\pi \cos \eta = C + a \cos \frac{\alpha}{a} \cos \vartheta \cos \eta.$$

Setzt

Setzt man hier statt C den vorhin gefundenen Werth, und dividirt durch $cos\,\eta$, so wird

$$\pi = a\,cos\,\frac{\alpha}{a}\,cos\,\vartheta - a\,cos\,\frac{\alpha - b\,cot\,\eta}{a}\,cos\,\vartheta + b\,sin\,\vartheta + \frac{b\,d\,v}{sin\,\eta\,d\,t\,\sqrt{v}}.$$

Um π zu finden, muß man zuerst einen Ausdruck für die Tiefe der untern Oefnung unter Wasser suchen, der sich aus den Formuln des §. ergiebt. Es ist nämlich die Höhe eines jeden Puncts M über eine durch B horizontal gelegte Ebene $= (AP - Aa)\,tang\,\eta\,sin\,\vartheta + a\,(1 + cos\,\frac{AP}{a})\,cos\,\vartheta$, weil das dortige r hier a heißt. Für den Punct a, oder die untere Oefnung ist $AP = Aa = a.\pi - \alpha$, also wird des Puncts a Höhe über die durch B horizontal gelegte Ebene $= a\,(1 + cos\,\frac{a.\pi - \alpha}{a})\,cos\,\vartheta$. Ist nun die Höhe des Wassers über den Mittelpunct der Grundfläche $= c$, so ist die Höhe des Wassers über B $= c + a\,cos\,\vartheta$, folglich die Tiefe des Puncts a unter Wasser $= c - a\,cos\,\frac{a\pi - \alpha}{a}\,cos\,\vartheta$, oder $= c + a\,cos\,\frac{\alpha}{a}\,cos\,\vartheta$. Weil nun das Wasser mit der Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ in a hinein fließt, so gehört der Druck für diese Stelle der Höhe $c + a\,cos\,\frac{\alpha}{a}\,cos\,\vartheta - v$. zu, und dies statt π gesetzt, giebt die Gleichung

$$c = -\,a\,cos\,\frac{\alpha - b\,cot\,\eta}{a}\,cos\,\vartheta + b\,sin\,\vartheta + \frac{b\,d\,v}{sin\,\eta\,d\,t\,\sqrt{v}} + v.$$

Eben diese Gleichung findet Herr Euler a. a. O. §. 40. p. 295. Um die Vergleichung anzustellen, muß man sich aus dem §. erinnern, daß das hiesige α beym Herrn Euler $a\pi - p$, also

$\alpha - b\,cot\,\eta$

$\alpha - b\cot\eta = a\pi - p - b\cot\eta$, folglich $\cos\frac{\alpha - b\cot\eta}{a} = -$ $\cos\frac{p + b\cot\eta}{a}$ sey. Dies giebt Herrn Eulers Ausdruck $s = a\cos$ $\frac{p + b\cot\eta}{a}\cos\vartheta + b\sin\vartheta + \frac{b\,dv}{\sin\eta\,dt\sqrt{v}} + v$. Hiebey möchte nun nachfolgendes zu erinnern seyn. Der Werth von π scheinet wegen der Umlaufsbewegung noch einer Verbesserung zu bedürfen. Wenigstens alsdenn, wenn die Schraube nach BPA zu umläuft, scheint der Druck gegen die untere Oefnung größer zu seyn. Wenn die Umlaufsbewegung schon gleichförmig geworden ist, und man setzt alsdenn die Geschwindigkeit der Oefnung a, womit sie jetzt im Kreise umläuft $= \sqrt{k}$; so scheint es, daß man $\pi = c + a\cos$ $\frac{\alpha}{a}\cos\vartheta + k - v$ setzen müße. Dies würde indessen auf die folgenden Rechnungen weiter keinen Einfluß haben, als daß man allenthalben $c + k$ statt c schreiben müßte. Ich will mich hierüber bald noch etwas näher erklären.

24. §.

Setzt man den Winkel $AOa = \phi$, also $Aa = a\pi - \alpha$ $= p = a\,\phi$; so wird $d\alpha = -\,a d\phi$: und weil nun $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{k}$ ist, so erhält man $dt = -\frac{a\,d\phi}{\sqrt{k}}$. Setzt man ferner $\frac{b\cot\eta}{a} = \gamma$, oder $b\cot\eta = a\gamma$, und $b = a\gamma\,\mathrm{tang}\,\eta$; so erhält man $\frac{b}{\sin\eta\,dt}$ $= -\frac{\gamma\sqrt{k}}{\cos\eta\,d\phi}$, folglich $s = a\cos(\phi + \gamma)\cos\vartheta + a\gamma\,\mathrm{tang}\,\eta$ $\sin\vartheta - \frac{\gamma\,dv\sqrt{k}}{\cos\eta\,d\phi\sqrt{v}} + v$. Noch setze man $2\sqrt{kv} = z$, also v

$= \frac{zz}{4k}$, und $dv = \frac{zdz}{2k}$, $dv\sqrt{k} = \frac{zdz}{2\sqrt{k}}$ folglich $\frac{dv\sqrt{k}}{\sqrt{v}} = dz$.
Diese Werthe in die gefundene Gleichung gesetzt geben $c\, cos\, \eta\, d\phi = a\, cos(\phi + \gamma)\, cos\, \vartheta\, cos\, \eta\, d\phi + a\gamma\, sin\, \eta\, sin\, \vartheta\, d\phi$

$$-\gamma dz + \frac{zz}{4k} d\phi\, cos\, \eta,$$ oder

$$-\gamma dz + \frac{zz}{4k} d\phi\, cos\, \eta + a\, d\phi\, cos(\phi + \gamma)\, cos\, \vartheta\, cos\, \eta$$
$$= (c.\ cos\, \eta - a\gamma\, sin\, \eta\, sin\, \vartheta)\, d\phi.$$

Die bisher bekannten Kunstgriffe der Integralrechnung reichen nicht hin, das Integral dieser Gleichung zu finden, ohne nur in dem besondern Fall, wenn die Spindel vertical steht, also $sin\, \vartheta = 1$, und $cos\, \vartheta = 0$ ist. Alsdenn hat man

$-\gamma dz + \frac{zz}{4k} d\phi\, cos\, \eta = (c.\ cos\, \eta - a\gamma\, sin\, \eta)\, \vartheta\phi$; oder wenn $\frac{b\, cot\, \eta}{a}$ statt γ wieder gesetzt wird

$$-\frac{b}{a\, sin\, \eta} dz + \frac{zz}{4k} d\phi = (c - b)\, d\phi,$$

woraus $\frac{a\, sin\, \eta}{b} d\phi = -\frac{4k\, dz}{4k(c-b) - zz}$ folgt, oder auch

$$\frac{a\, sin\, \eta\sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}} d\phi = -\frac{dz : \sqrt{4k(c-b)}}{1 - zz : (4k(c-b))}.$$

Das Integral hievon ist

$\frac{a\, sin\, \eta\sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}} \phi = C - \frac{1}{2} l \frac{1 + z : \sqrt{4k(c-b)}}{1 - z : \sqrt{4k(c-b)}}$; und weil $\frac{z}{\sqrt{4k}} = \sqrt{v}$ war, so erhält man $\frac{a\, sin\, \eta\sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}} \phi = C - \frac{1}{2} l \frac{\sqrt{(c-b)} + \sqrt{v}}{\sqrt{(c-b)} - \sqrt{v}}$. Die beständige Größe C muß aus dem anfänglichen Zustande der Bewegung bestimmt werden. Nimmt man an, daß $\sqrt{v} = 0$ sey, wenn $\phi = 0$ ist, so wird $C = 0$, und

$\frac{2a \sin \eta \sqrt{(c-l.)}}{b\sqrt{4k}} \Phi = -l\frac{\sqrt{(c-b)} + \sqrt{v}.}{\sqrt{(c-b)} - \sqrt{v}}$. Beym Fortgang der Bewegung, wenn die untere Oefnung von A durch α, b, β, u. s. f. umläuft, wird nun Φ negativ, und dies giebt

$\frac{\sqrt{(c-b)} + \sqrt{v}}{\sqrt{(c-b)} - \sqrt{v}} = \rho^{\frac{2a \sin \eta \sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}}\Phi}$, woraus $\sqrt{v} =$

$\frac{\rho\psi - 1}{\rho\psi + 1}\sqrt{(c-b)}$ folgt, wenn der Kürze wegen ψ statt

$\frac{2a \sin \eta \sqrt{(c-b)}}{b\sqrt{4k}}\Phi$ geschrieben wird.

25. §.

Wenn man nun aus dieser Gleichung Schlüße ziehen wollte, so wäre vornehmlich zu erwägen, in wie weit die angenommenen Bestimmungen für den anfänglichen Zustand der Bewegung bestehen können. Es ist angenommen worden, daß dem Werth $\Phi = o$ der Werth $v = o$ zugehöre, und diese Voraussetzung würde ihre Anwendung finden, wenn man annähme, die Schnecke sey anfangs ganz mit Wasser angefüllt und die untere Oefnung verschlossen gewesen, hierauf aber, nachdem die Schnecke beym Umlauf um ihre Axe, und mit ihr das Wasser in der Röhre, schon die Geschwindigkeit $\sqrt{k}$ erreicht hatte, die untere Mündung plötzlich eröfnet worden. In solchen Fällen also, wo es mit der Bewegung der Wasserschraube diese Bewandniß hätte, würde die Gleichung $\sqrt{v} = \frac{\varrho\psi - 1}{\varrho\psi + 1}\sqrt{(c-b)}$ ihre Anwendung finden, und weil der Werth von $\varrho\psi$ mit Φ sehr schnell wächst, so würde die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre sehr bald unveränderlich und $\sqrt{v} = \sqrt{(c-b)}$ werden. Diese beständige Geschwindigkeit würde man auch aus der Differential-Gleichung finden, wenn man $d\Phi = o$ setzte. Ueberhaupt aber ergeben diese Schlüsse, daß das Wasser nur unter der Bedingung in der Röhre würde hinauf steigen können, wenn $c > b$ wäre, oder vielmehr der am Ende des

23. §. beygefügten Erinnerung gemäß, wenn $c+k>b$ wäre. Eigentlich wird allemal $b>c$ seyn, wenn es also mit der eben erwehnten Erinnerung seine Richtigkeit hat, so kann das Wasser nur alsdenn in der Röhre steigen, wenn $k>c-b$ ist. Wenn $b>c$ ist, (man kann $c+k$ statt c verstehen) und man setzt nun

$\rho\ \frac{2a \sin\eta \sqrt{(b-c)}}{b\sqrt{4k}}\varphi=\psi$, so hat man $\sqrt{v}=\frac{\rho\psi\sqrt{-1}-1}{\rho\psi\sqrt{-1}+1}$ $\sqrt{(b-c)}\sqrt{-1}$, also $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{(b-c)}}=-\frac{\rho\psi\sqrt{-1}-1}{(\rho\psi\sqrt{-1}+1)\sqrt{-1}}$

$=-\tang\frac{1}{2}\psi$. Dieser Ausdruck giebt die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre, falls die Spindel nach BPA zu umläuft, gleich vom ersten Augenblick der Bewegung negativ, und daraus erhellet, daß das Wasser gar nicht steigen könne, sondern sogleich anfangen müße, zurück nach unten zu fließen. Uebrigens aber kann die Gleichung nicht dienen, beym Fortgang der Bewegung die Geschwindigkeit des zurückfließenden Wassers daraus zu berechnen, weil die Rechnung im 22. §. voraussetzt, daß die Röhre beständig voll Wasser bleibe.

26. §.

Es ließ sich voraus sehen, daß die Rechnung dies Resultat geben müße, wofern aus dem beständigen Anstoß der untern Mündung an die im Wege liegenden Wassertheilchen nicht ein solcher Druck entsteht, der das Wasser hinauf zu treiben im Stande ist. Aus der Schwungbewegung um die Axe der Spindel können hier gar keine Kräfte entstehen, die das Wasser hinauf treiben, weil die Richtung aller Schwungkräfte hier auf der centrischen Linie der Röhre senkrecht ist, und die gesammte Wirkung der Schwungkräfte hier von der Röhre selbst völlig aufgehalten wird. Mit der Maschine des Herrn de Mour, worüber Herr Euler in der Histoire de l'Academie de Berlin A. 1751. pag. 303. seqq.

seqq. eine umständliche Untersuchung angestellet hat, wird das Wasser deswegen zum Steigen gebracht, weil die Richtung der Schwungkräfte auf der centrischen Linie der Röhre nicht senkrecht ist, und daher ihre Wirkung von der Röhre nicht ganz aufgehoben werden kann. Was übrigens den Druck gegen die untere Mündung der um die Spindel gewundenen Röhre betrift, so müßte man bey einer genauern Rechnung noch erwegen, daß dieser Druck beym Fortgang der Bewegung nicht unveränderlich bleiben würde. Durch den Umlauf der Spindel wird auch dem Wasser an der Stelle, wo die Schraube steht, eine wirbelförmige Bewegung ebenfalls nach BPA zu mitgetheilt. Wegen dieser eigenen Bewegung der Wassertheilchen, welche der untern Mündung unterweges aufstossen, hängt die Wirkung des Stosses nur von der respectiven Geschwindigkeit der untern Mündung in Ansehung der Geschwindigkeit des Wassers selbst ab, die also so lange veränderlich bleiben würde, als sich noch die Geschwindigkeit des Wassers ändert. Wenn alles so weit in den Beharrungsstand gekommen wäre, daß das Wasser in demselben Kreise, den die untere Mündung durchläuft, ebenfalls mit der Geschwindigkeit $\sqrt{k}$ umliefe, so würde weiter kein Druck gegen die Mündung wegen des Anstosses entstehen, weil nun eigentlich gar kein Anstoß weiter erfolgen könnte. Demnach könnte das Wasser in der Schnecke gar nicht steigen.

27. §.

Ob nun gleich der bisher betrachtete Fall, wenn die Spindel der Wasserschraube vertical stehet, in der Ausübung nicht vorkömmt, weil sie allemal gegen den Horizont schief gelegt wird; so dienen doch die bisherigen Schlüße dazu, auch ohne weitere Rechnung zu übersehen, was bey der geneigten Lage der Spindel erfolgen müsse. Auch in diesem Falle können die Schwungkräfte dazu nichts beytragen, daß das Wasser in der Röhre zu steigen genöthiget werde. Wenn dies erfolgen sollte, so müßte der von dem Anstoß der untern Mündung an die im Wege liegenden Wassertheilchen herrührende Druck dies zuwege bringen, der jedoch veränderlich seyn, mit dem Fortgang der Bewegung abnehmen, und zuletzt gar aufhören würde. Es scheinet also, daß man hieraus mit ziemlicher Sicherheit schließen könne, die Wasserschraube könne das Wasser nie ununterbrochen heben, was man ihr auch für eine Lage gegen den Horizont geben wollte. Herr Euler entscheidet hierüber nichts, er bricht hier seine Untersuchungen ab, erklärt die Theorie der Wasserschraube für höchst schwer, und fodert andere Geometer auf, ihre Kräfte bey dieser Aufgabe gleichfalls zu versuchen. Eben dies hat auch wohl veranlasset, daß von der Berlinischen Academie der Wissenschaften im Jahre 1765. diese Aufgabe ist zur Preisfrage aufgegeben worden, und ich werde nun näher prüfen, wie weit H. Hennert die Preisaufgabe aufgelöst habe.

28. §.

Er nimmt an, die Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ des Wassers in der Röhre werde beym Fortgang der Bewegung unveränderlich: eine Voraussetzung, die, wie man leicht siehet, bewiesen werden muß, bevor sie als ausgemacht angenommen werden kann. Ist sie wahr, so muß aus der Differentialgleichung, wenn in derselben $dz = o$ gesetzt wird, eine Gleichung folgen, die $z = 2\sqrt{kv}$ allein durch beständige Grössen bestimmt. Aber die Differentialgleichung (24. §.) giebt $\frac{zz}{4k} \cos\eta + a\cos(\phi+\gamma)\cos\vartheta\cos\eta = c.(\cos\eta - a\gamma\sin\eta\sin\vartheta)$, wenn $dz = o$ gesetzt wird, woraus $\frac{zz}{4k} = v = c - a\gamma\,\mathrm{tang}\,\eta\sin\vartheta - a\cos(\phi+\gamma)\cos\vartheta$ folgen würde. Weil dieser

ser Ausdruck offenbar von der veränderlichen Größe ϕ abhängt, so widerspricht die Folge der Voraussetzung, und es ergiebt sich, daß die Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ nie unveränderlich werden könne. Diese Gleichung würde also nur nach Beschaffenheit der Umstände einen größten oder kleinsten Werth geben. Ja wenn c nichts weiter als die Tiefe bedeutet, um welche der Mittelpunct der Grundfläche unter Wasser steht, so würde sogar $\sqrt{v}$ unmöglich werden. Es war nämlich $a\gamma = b \cot \eta$ (24. §.) also würde $v = c - b \sin \vartheta - a \cos(\phi + \gamma) \cos \vartheta$ negativ werdeu, weil $b \sin \vartheta > c$ ist.

29. §.

Man wird sich aber aus dem 21. §. erinnern, daß H. Hennert wegen eines Versehens bey der Integration eine unrichtige Differentialgleichung herausgebracht habe, und deswegen wird man vermuthen, daß aus seiner Differentialgleichung eine solche unveränderliche Geschwindigkeit folge. Ich will versuchen, ob ich ihm in seinen Schlüssen folgen kann. In der Gleichung für p, (21. §.) so wie sie H. Hennert heraus bringt, setze man $A = b \cot \eta$, und $p = 0$, dem 22. §. gemäß, das Integral $\int \frac{dp\, d\alpha \cos \eta}{dA}$ nehme man so, daß es mit p zugleich verschwindet, und bey eben dieser Voraussetzung $A = b \cot \eta$, sey $- \cos \eta . \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)^2 = M$, so wie $2 \sin \eta \tang \eta \left(\int \frac{1}{dt} d\alpha\, d. \frac{dA}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{dA}{dt}\right)^2\right) = N$. (Ich muß so nachrechnen, wie H. Hennert mir vorrechnet, sonst müßte hier alles, was von t abhängt, unveränderlich bleiben.) Dies giebt $- a \cos \frac{\alpha - b \cot \eta}{a} \cos \vartheta \cos \eta - (\alpha - b \cot \eta) \sin \vartheta \sin \eta + C = M + N$, und es wird die beständige Größe $C = M + N +$

$a \cos$

$a \cos \frac{\alpha - b \cot \eta}{a} \cos \vartheta \cos \eta + (\alpha - b \cot \eta) \sin \vartheta \sin \eta$. Setzt man diesen Werth statt C in die Hennertsche Integralgleichung im 21. §. so müßte nun eine Gleichung kommen, woraus sich p finden ließe, wenn $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{u}$, und $\frac{dA}{dt} = \cos \eta \sqrt{v}$ (19. §.) als bekannt angesehen werden. Nach H. Hennerts Rechnung würde das nun noch nicht angehen, weil in seiner Gleichung noch das Integral $\int \frac{dp\, d\alpha \cos \eta}{dA}$ vorkömmt, und bey ihm α sowohl als A veränderlich ist. Mit diesem Integral aber wird H. Hennert so fertig. Er nimmt gleich an, nach Verlauf einiger Zeit werde nicht allein die Umlaufs-Geschwindigkeit der Spindel, sondern auch die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre $\sqrt{v}$ unveränderlich, also sey alsdenn $\frac{d\alpha}{dA} = \frac{\sqrt{u}}{\cos \eta \sqrt{v}}$ unveränderlich, und findet dieser Voraussetzung gemäß $\int \frac{dp\, d\alpha \cos \eta}{dA} = \frac{p \sqrt{u}}{\sqrt{v}}$, da er denn k statt des hiesigen u schreibt, so wie auch oben im 23. statt u der Buchstab k gebraucht ist, für den Fall, wenn die Umlaufsbewegung gleichförmig wird. Nach H. Hennert ist aber von nun an auch $\sqrt{v}$ unveränderlich. Hiernächst nimmt er nun dem 23. §. gemäß in so weit ganz richtig an, für die untere Mündung der Röhre gehöre der Druck der Höhe $c + a \cos \frac{\alpha}{a} \cos \vartheta - v$ zu; setzt in seiner Gleichung für p den eben erwehnten Werth statt p, und zugleich $A = o$. So müßte nun freylich eine Gleichung heraus kommen, woraus v gefunden werden könnte: weil aber nach seiner Voraussetzung nun $\sqrt{v}$ schon unveränderlich seyn soll; so muß man auch $d. \sqrt{v} = o$, also $d. \frac{dA}{dt} = o$, oder $ddA = o$ setzen, und dies

müßte

müßte eine Gleichung zwischen v oder $\sqrt{v}$ und lauter beständigen Größen geben. Es wird mir in der That schwer, dem H. Hennert in seinen Schlüssen weiter nachzufolgen. Entweder ich verstehe den 15. §. der Preisschrift gar nicht, oder H. Hennert versieht sich hier nochmal, wenn er schließt: für die untere Mündung ist $A = o$, also auch $dA = o$ und $ddA = o$. Soviel ist wahr, daß nach seiner Voraussetzung $ddA = o$ sey, weil er $\sqrt{v} = \frac{dA}{dt\, cos\, \eta}$ unveränderlich annimmt: aber $dA = o$ setzen, heißt das hier nicht eben soviel, als $\sqrt{v} = o$ setzen? Gesetzt auch, H. Hennert wollte antworten, man müße bey dieser Rechnung A nicht als eine Function von t betrachten, sondern nur als eine veränderliche Größe, wovon die Gestalt der Röhre abhängt; so ist es ja doch falsch geschlossen: wenn eine **veränderliche Größe** in einem bestimmten Fall $= o$ wird, so wird auch ihr Differential $= o$. Herrn Hennerts Schluß wäre richtig, wenn A den **unveränderlichen** Werth $= o$ haben müßte, und das ist hier der Fall gar nicht. Ich muß indessen mit H. Hennert weiter rechnen, und seinen Schlüssen gemäß $cos\, \eta. \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt}\right)^2 = \frac{cos\, \eta.\, d\alpha^2}{dt^2} = cos\, \eta. k$, und überdem $2\, sin\, \eta\, tang\, \eta \left(\int \frac{1}{dt}\, d\alpha\, d. \frac{dA}{dt} - \frac{1}{2}. \frac{dA^2}{dt^2}\right) = o$ setzen. Wenn ich alsdenn Kürze halber π statt $c + a\, cos\, \frac{\alpha}{a}\, cos\, \vartheta - v$ schreibe, so verwandelt sich H. Hennerts Gleichung (21. §.) in folgende:

$$- a\, cos\, \frac{\alpha}{a}\, cos\, \vartheta\, cos\, \eta - \alpha\, sin\, \vartheta\, sin\, \eta - \frac{\pi \sqrt{k}}{\sqrt{v}} + \pi\, cos\, \eta$$

$$+ M + N + a\, cos\, \frac{\alpha - b\, cot\, \eta}{a}\, cos\, \vartheta\, cos\, \eta + (\alpha - b\, cot\, \eta)\, sin\, \vartheta$$

$$sin\, \eta = - k\, cos\, \eta.$$

Nun sollte $M = -\cos\eta\,(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{dA}{dt})^2$, und $N = 2\sin\eta$ $\tan\eta\,(\int \frac{1}{dt}\, d\alpha\, d.\, \frac{dA}{dt} - \frac{1}{2}.\, \frac{dA^2}{dt^2})$ seyn, in der Voraussetzung, daß $A = b\cot\eta$ genommen werde. Ich wüßte nicht, wie ich das machen sollte, diese Werthe herauszubringen: mit H. Hennert aber setzt man $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{k}$, $\frac{dA}{dt} = \cos\eta\sqrt{v}$, $= \int d.\, \frac{dA}{dt}$, und man findet $M = -\cos\eta\,(\sqrt{k} - \cos\eta\sqrt{v})^2$, $N = 2\sin\eta\,\tan\eta$ $\times (\cos\eta\sqrt{kv} - \frac{1}{2} v \cos\eta^2) = 2\sin\eta^2\sqrt{kv} - \sin\eta^2\cos\eta\, v$. Man wird leicht sehen, wenn diese Werthe statt M und N gesetzt werden, was die Gleichung für eine Gestalt annimmt, es wird völlig diejenige, die H. Hennert selbst herausbringt auf der 76. S. der Preisschrift. Um die Vergleichung desto besser anzustellen, bemerke ich nur, daß das hiesige η, ϑ, b, beym H. Hennert ϕ, $90° - \vartheta$, und c heiße, und was hier c heißt, ist bey ihm $h - a\sin\vartheta$. Die gefundene Gleichung müßte nun außer v keine andre als beständige Größen enthalten, $\sqrt{k}$ auch für eine beständige Größe genommen. Aber ein einziger Blick auf die Gleichung ergiebt ja, daß noch außerdeme der Bogen α darinn vorkomme. Wenn man z statt $\sqrt{v}$ schreibt und die Gleichung nach den Potenzen von z ordnet, so wird sie cubisch. H. Hennert rechnet weiter, und bringt heraus, daß diese cubische Gleichung zwey unmögliche Wurzeln, und eine negative Wurzel habe, also $z = \sqrt{v}$ allemal negativ sey. Uebrigens hängt doch seine Formul für diese negative Wurzel noch immer von dem veränderlichen Bogen α ab, und ich begreife nicht, wie dies mit der Voraussetzung bestehen könne, daß nun $\sqrt{v}$ unveränderlich sey. Ferner würde ja der negative Werth von $\sqrt{v}$ anzeigen, daß das Wasser in der Röhre nicht gegen die obere Oefnung zu, wie während der Rechnung vorausgesetzt ist, sondern gegen die untere Oefnung zu laufe, und das hieße: die Schnecke kann gar kein Was-

ser

ser heben. H. Hennert erklärt sich über seinen negativen Werth von $\surd v$ ganz anders. Er sagt, dies komme daher, weil das Wasser steigend in die Schnecke hineindringe, und fallend heraus trete, Steigen und Fallen aber entgegengesetzte Bewegungen seyn. Wie doch ein Irrthum immer mehrere nach sich zieht! Bezeichnet denn nicht $\surd v$ unbestimmt die Geschwindigkeit des durch einen jeden Querschnitt der Röhre laufenden Wassers, sowohl dessen, was oben ausläuft, als auch dessen, was unten eintritt?

30. §.

Am meisten wundre ich mich darüber, daß dasjenige, was H. Hennert im 16. §. 78. S. der Preisschrift vorträgt, ihn nicht auf das fehlsame seiner Theorie aufmerksam gemacht hat. Hier soll die Menge Wasser bestimmt werden, welche die Schnecke in gegebener Zeit t heben wird. Diese müßte $= f^2 t \surd v$ seyn, wenn f^2 den Querschnitt der Röhre bedeutet. Aber, heißt es hier, man muß bemerken, daß **das Wasser nicht ununterbrochen durch die Schnecke fließe.** Dies lehrt die Erfahrung nach H. Hennerts Bericht bey den in Holland jetzt üblichen Wasserschnecken, deren Grundflächen ganz unter Wasser stehen. Das Wasser hört auf zu fließen, noch ehe die Spindel den halben Umlauf vollendet hat: während des übrigen Theils eines Umlaufs fließt nichts heraus. Fließt es denn nicht etwa während dieser Zeit erstlich um eine gute Strecke zurück, und kehrt nachher wieder um? oder bleibt es während dieser Zeit in der Röhre ruhig? darüber erklärt sich H. Hennert nicht. Aber dem sey, wie ihm wolle, wenn das Wasser während eines jeden Umlaufs zu fließen aufhört, und eine zeitlang nachher wieder anfängt zu fließen, wie läßt sich denn in aller Welt die Voraussetzung rechtfertigen, daß $\surd v$ unveränderlich werde? Hier muß H. Hennert doch wirklich die Schwäche seiner Theorie gefühlt haben. Denn gegen das Ende des 16. §. wo er die Wassermenge bloß aus einigen Beobachtungen bestimmt, und ohngefehr ein Mittel genommen, auf $\frac{2}{3} f^2 t \sqrt{v}$ schätzt, setzt er hinzu: les remarques, que nous venons de faire, sont tres importantes pour la theorie de cette machine. Elles ont echappé aux Mechaniciens (das denke ich eben nicht, denn die meisten, welche ich habe nachschlagen können, sagen, daß das Wasser aus der Schnecke nicht ununterbrochen fließe.) Cependant elles ne laissent pas que de rendre la theorie un peu incertaine.

31. §.

Weil Erfahrungen, die man mit der Theorie vergleichen kann, vorzüglich interessant sind, so will ich noch diejenigen hersetzen, welche H. Hennert im 17 bis 20 §. vom Effect einiger Wasserschrauben erzählt. Die in Holland ehedem üblich gewesenen Wasser-Schrauben, welche Waater-Mooler hießen, und zur Austrockung der Wiesen gebraucht wurden, lagen fast horizontal, und hoben das Wasser auf eine sehr geringe Höhe. Wenn sie das Wasser 4 Fuß hoch heben, so heißen sie Sheprad-Moolen, und in der Herrschaft Hazerswoude nahe bey Leiden hat man vier dergleichen Schrauben über einander gestellt, um das Wasser 16 Fuß hoch zu heben. Ohngefehr um das Jahr 1754. ward von einigen Kunstverständigen in Vorschlag gebracht, den Neigungswinkel gegen den Horizont 60° groß zu machen, um das Wasser auf größere Höhen zu bringen. Vieleicht verfiel man daher darauf, weil Daniel Bernoulli diesen Winkel angegeben hat. Man zog H. Lulofs zu Rath, und auf dessen Empfehlung wurden dergleichen Maschinen mit Wasserschrauben unter dem Winkel von 60° erbauet, die den Namen Vyzel-Moolen erhalten haben. Alle werden durch Windflügel getrieben.

Mit

Mit dreyen Vyzel-Moolen, die, wie es scheint, nicht weit von einander angelegt sind, und welche H. Hennert durch die Namen der nordlichen, der mittlern und der südlichen nach ihrer Lage unterscheidet, hat man Erfahrungen angestellet. Um jede Spindel sind drey Röhren gewunden, deren viereckte Oefnungen um gleiche Bogen von einander abstehen. Die Oefnung der Gänge an der nordlichen Schraube beträgt 1, 36 Quadr. Fuß, an der mittlere 1, 46 Q. F. und an der südlichen 1, 41 Q. F. die Halbmesser ihrer Spindeln sind 35, 37, 36 Zoll, die Winkel η sind 11° 55', 14° 42', 11° 54', diese findet man aus den Entfernungen der Schraubengänge, welche 23, 29, 24 Zoll betragen. Der Winkel ϑ ist für alle = 60 Grad, die ganze Länge der Spindel $14\frac{1}{2}$ Fuß, und sie stehen ohngefehr 4 Fuß tief unter Wasser. (Ich setze diese Zahlen alle so her, wie sie auf der 81. S. der Preisschrift stehen, werde aber unten verschiedenes dabey erinnern müßen.) Man hat jede dieser Mühlen eine Zeitlang arbeiten lassen, und die in dieser Zeit gehobene Menge Wasser gemessen; auch hat man die Anzahl der Umläufe der Windflügel bemerkt, und daraus die Zahl der Umläufe der Schrauben geschlossen, wovon vermöge der Einrichtung der Maschine beynahe anderthalb auf einen Umlauf der Windflügel kammen.

32. §.

Der Erfahrungen selbst sind an der Zahl 17, die alle auf der 82 Seite der oft erwehnten Preisschrift stehen. H. Hennert verwirft aber die erste, vierte, zehnte, dreyzehnte, vierzehnte, und sechszehnte, als solche, die zu weit von seiner Theorie abweichen. Die übrigen stehen auf der 84 S. nochmal, aber die dortigen Zahlen kommen mit den auf der 82 S. befindlichen nicht alle überein. H. Hennert hat aus der Anzahl der Umläufe die Winkelgeschwindigkeit der Spindel, und daraus die Geschwindigkeit der in der centrischen Linie der Röhre liegenden Puncte geschlossen, welches hier $2\sqrt{gk}$ wäre. Diese letztern Geschwindigkeiten sind größtentheils auf der 84 S. anders als auf der 82 S. angegeben. Ich setze sie so her, wie sie auf der 84 Seite stehen.

Erfahrungen.	Winkelgeschwindigkeit der Spindel.	Werth von $2\sqrt{gk}$.	Wassermenge in Cub. Fußen für 1. Minute	Namen der Schrauben.
2 3 5	81° 98°30′ 117°	4, 10 4, 95 5, 93	181 227 273	nordliche Schraube.
7 8 9 11	79° 85° 30′ 108° 130°	4, 50 4, 60 6, 94 7, 00	217 228 294 356	mittlere Schraube.
12	124°	6, 59	367	südliche Schraube.
15	121°30′	6, 52 6, 35	beyde zus. 648	die mittlere u. südliche.
17	187° 15′	9, 46 10, 00 9, 77	alle drey Schrauben zusammen 1140.	

Diese Erfahrungen vergleicht nun H. Hennert mit seiner Theorie, aber ich weis in der That selbst nicht recht auf welche Art. Seine Gleichung für $\sqrt{v}$ hängt von α ab, und weil $\frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{k}$ ist, so ist $\alpha = t\sqrt{k}$. Dies ist nämlich der Weg, den die untere Mündung der Röhre in der Zeit t durchläuft. Setzte nun H. Hennert $t\sqrt{k}$ statt α in die Gleichung, so würde $\sqrt{v}$ von t abhängen, und sich folglich mit t ändern. Aber es soll $\sqrt{v}$ unveränderlich seyn, und diese einmal zum Grunde gesetzte Voraus-

setzung

setzung bringt H. Hennert dahin, daß er den Bogen α für das ansieht, was sonst Geschwindigkeit heißt. Daher setzt er auf der 81. S. $\alpha = \sqrt{60\,k}$, und nimmt also α für die Geschwindigkeit, die der Höhe k zugehört. Dies ist ein neuer Irrthum, der zu den vorigen noch hinzu kömmt, also ist es wohl nicht zu verwundern, daß die von ihm angeführten Erfahrungen so wenig mit seiner Theorie zusammen treffen wollen. Alle Wasserschrauben haben sehr viel weniger Wasser in einer Minute gegeben, als sie nach Herrn Hennerts Rechnung thun sollten, und der Fehler hat bald ein Drittel bald die Hälfte der ganzen berechneten Wassermenge betragen: gewöhnlich ist er zwischen diese Gränzen gefallen. Das meint nun zwar H. Hennert nicht: nach ihm beträgt die gröste Abweichung der beobachteten Wassermengen etwa nur den 9ten oder 10ten Theil der nach seiner vermeintlichen Theorie berechneten, und zwey Beobachtungen geben fast gerade eben das, was er nach der Theorie gefunden zu haben angiebt. Allein H. Hennert verbirgt hier die grössere Abweichung seiner Theorie von der Erfahrung auf eine ganz künstliche Art. Er reducirt erstlich das eigentliche Resultat seiner Theorie auf denjenigen Theil, worauf er ihn nach einer andern *aus der Erfahrung geschlossenen Regel* reducirt wissen will, die auf der 78. und 79. S. der Preisschrift stehet, und hier schon im §. angeführt ist. Diese reducirte Wassermenge vergleicht er nun wieder mit derjenigen, welche die im Anfang dieses §. angeführten Erfahrungen gegeben haben. Die Zahlen, welche er angiebt, sind folgende.

Erfah-

Erfahrungen.	berechnete Wassermenge.	reducirte Wassermenge.	beobachtete Wassermenge.	Diff.
2	273 C. Fuß	182	181	1
3	386	258	227	31
5	529	252	273	80
7	406	271	217	54
8	365	243	228	25
9	487	325	294	31
19	659	430	356	74
12	557	371	367	4
15	1068	712	648	64
17	2183	1453	1140	313

Ob nun gleich bey der ersten Erfahrung die beobachtete Wassermenge von der berechneten um ein Drittel der letztern abweicht, so sagt H. Hennert doch, sie weiche gar nicht ab, weil die beobachtete Wassermenge mit der reducirten übereinkömmt, und obgleich bey der letzten Erfahrung die beobachtete Wassermenge wenig mehr als die Hälfte der berechneten ausmacht, und selbst die Differenz von der reducirten Wassermenge nicht viel weniger als $\frac{1}{4}$ der letztern ausmacht; so will H. Hennert doch nicht, daß der Fehler mehr als ohngefehr $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{9}$ betrage, denn, sagt er, man muß hier nur $\frac{7}{12}$ der berechneten Wassermenge bey der Reduction nehmen, und alsdenn beträgt der Fehler nur $\frac{1}{9}$ oder $\frac{1}{10}$. So künstlich vergleicht man sonst keine Erfahrungen mit der Theorie, und H. Hennert legt seiner Theorie doch wohl zuviel Lob bey. Die Differenzen der beobachteten, von seiner sogenannten reducirten Wassermenge sind ja keine Differenzen von der nach seiner Theorie berechneten Menge: also sind die von ihm angegebenen Abweichungen nicht **Abweichungen von der Theorie**, sondern Abweichungen von seinen aus Beobachtungen geschlossenen Regeln.

33. §.

33. §.

Wenn es nun mit den bisherigen Erinnerungen gegen des H. Hennerts Vortrag seine Richtigkeit hat, so werde ich auch berechtiget seyn, zu behaupten, daß H. Hennerts Regeln, die Wassermenge zu berechnen, welche die Wasserschraube in gegebener Zeit heben soll, für die Ausübung ganz unbrauchbar sind. Es fehlet sehr viel, daß H. Hennert das Haupt-Problem von der Wasserschraube sollte aufgelöst haben, dessen Auflösung H. Euler unvollständig lassen mußte. Wollte man auf dem richtigen Wege, den H. Euler betreten hat, weiter gehen; so müßte man bey der Differentialgleichung des 24. §. die Methode durch Reihen zu integriren anwenden: man würde auf solche Art eine Reihe finden, welche z durch Φ ausdrückte. Ich denke, man hat nicht nöthig, die Mühe dieser Rechnung zu übernehmen; man kann sich ohnehin überzeugen, daß das Wasser bey der geneigten Lage der Schnecke so wenig, als bey ihrem senkrechten Stande (§.) durch die obere Mündung **ununterbrochen** durchfließen könne. Wenn in jedem Schraubengange nur die wasserhaltenden Bogen voll Wasser sind, so läßt sich begreifen, daß das Wasser beym Umlauf der Spindel höher steigen könne. Wenn aber die ganze Röhre von unten bis oben voll Wasser ist; so ist offenbar, daß alles unten auslaufen würde, wenn die Schraube nicht umliefe, und man die untere Mündung öfnete. Beym Umlauf der Spindel entstehen keine Kräfte, die das Wasser nach der Richtung der Röhre gegen die obere Mündung zu treiben können, es wäre denn, daß aus dem Anstoß der untern Mündung gegen die im Wege liegenden Wassertheilchen ein so starker Druck entstünde, der dies ausrichten könnte. Im 26. §. sind aber die Ursachen schon angegeben, weswegen dieser Druck beym Fortgang der Bewegung schwächer werden müßte, wenn er gleich beym Anfang der Umlaufsbewegung noch beträchtlich genug wäre. Man begreift auch leicht, daß die Umlaufslaufsbewegung schon ziemlich schnell seyn müßte, wenn der Druck gegen die untere Mündung stark genug werden sollte, das Wasser hinauf zu treiben.

34. §.

Gesetzt aber, daß das Wasser bey hinlänglicher Schnelligkeit der Umlaufsbewegung, wenigstens auf eine Zeitlang zum ununterbrochenen Durchfließen gebracht werden könnte; gesetzt die Integration der Differentialgleichung, welche die Geschwindigkeit des Wassers zu finden diente, hätte keine große Schwierigkeit, und führte auch nicht auf sehr verwickelte Formuln: so dünkt mich doch, daß hiebey noch wichtige Mängel übrig bleiben würden, die keine sonderliche Uebereinstimmung der Resultate der Theorie mit dem wirklichen Erfolg würden erwarten lassen. Die Differentialgleichung gründet sich auf die Voraussetzung, daß alle Wassertheilchen, die in einerley auf der centrischen Linie senkrechten Querschnitt liegen, von einerley Kräften beschleuniget werden, und daß die Schwungkräfte insgesammt von der Röhre aufgehalten werden, ohne auf die Bewegung des Wassers Einfluß zu haben. Eigentlich aber würde dies alles, so wie überhaupt diejenigen Grundsätze von der Bewegung des Wassers in Röhren, worauf die Rechnung gebauet ist, nur in völliger Schärfe gelten, wenn die Querschnitte der Röhre unendlich klein wären. Also würde eine völlige Entwickelung der aus diesen Grundsätzen geschlossenen Gleichungen alsdenn nur für die Ausübung einen erheblichen Nutzen versprechen, wenn die um die Spindel gewundene Röhre eine sehr geringe Weite hätte. Wenn man aber weis, daß es eine gewöhnliche Maxime sey, diesen Röhren eine beträchtliche Weite zu geben, damit desto mehr Wasser zur Zeit durchfließen könne, so wird man alle Hofnung aufgeben, daß die auf sehr enge Röhren eingeschränkte Theorie hier mit erheblichem Nutzen angewandt werden könne.

Wenn

Wenn die Wasserschraube inwendig nach Art einer Wendeltreppe eingerichtet ist, so etwa, wie man beym Leupold Zeichnungen davon antrift; so weicht ihre ganze inwendige Gestalt von derjenigen, welche die obige Rechnung voraussetzt, so sehr ab, daß ich gar keine Uebereinstimmung der auf sehr enge Röhren eingeschränkten Theorie erwarten würde, wenn auch alle Schwierigkeiten der Rechnung überwunden wären.

35. §.

Eben diese gewöhnliche Gestalt der Wasserschrauben, die von derjenigen, welche die obige Rechnung voraussetzt, so sehr abweicht, macht es mir begreiflich, woher er kömmt, daß eine solche Wasserschraube das Wasser zum Steigen bringen kann, wenn gleich die untere Mündung beym Umlauf beständig unter dem Wasser bleibt. Wenn eine enge Röhre schraubenförmig um die Spindel gewunden wäre, so würde nimmermehr das Wasser darinn in die Höhe steigen, weil Luft und Wasser in der engen Röhre einander nicht würden ausweichen können. Dies geschieht in weiten Röhren. Wenn das Wasser in der Röhre schon soweit gestiegen ist, daß es sich beym fernern Umlauf der Spindel über dem Wasserpaß desjenigen, woraus die Schraube schöpft, schon heben muß; so läuft es zwar weiter gegen die obere Mündung zu, aber nicht so, daß es bis an seine äußere Gränze den ganzen innern Raum der Röhre ausfüllt. Die vorderste Fläche desselben ist nicht auf der centrischen Röhre senkrecht, sondern horizontal, oder doch wenigstens beynahe horizontal. Es fließt so vorwärts, wie es in einer Rinne vorwärts fließen würde, und macht über sich der Luft Platz in die Röhre hineinzudringen. Auf solche Art söndert sich von dem beym ersten Umlauf hineingetretenen Wasser beym zweyten Umlauf soviel ab, als ohngefehr den wasserhaltenden Bogen im zweyten Schraubengang füllet. Eine solche Absönderung erfolgt bey jedem Umlauf, bis endlich das Wasser zur obern Mündung ausläuft. Demnach ist nie die ganze Schnecke voll Wasser, sondern von jedem Schraubengange nur soviel, als ohngefehr den wasserhaltenden Bogen ausmacht, und die Zwischenräume sind mit Luft angefüllt.

36. §.

Wenn ich nun dies alles erwäge, so dünkt mich, daß man immer mit der im Anfang dieses Aufsatzes vorgetragenen auf die Gesetze des Gleichgewichts gebaueten Pitotschen und bernoullischen Theorie von der Wasserschraube in der Ausübung zufrieden seyn könne. Wenn die Wasserschraube nur langsam umläuft, (und eine solche Einrichtung kann man der Maschine nach Vorschrift des 16. §. allemal geben) so denke ich, daß der Erfolg von dem Resultat, was die erwehnte Theorie giebt, so sehr nicht abweichen werde. Hierüber wären nun allerdings noch Versuche zu wünschen. Wenn ich Gelegenheit hätte, sie anzustellen, so würde ich es auf beyde Arten versuchen, sowohl bey einer gänzlichen Tiefe dec Grundfläche unter Wasser, wobey die untere Mündung beständig unter Wasser bleibt, als auch bey einer solchen Tiefe der Grundfläche unter Wasser, welche des H. Bernoulli Regel gemäß ist. Ich würde hauptsächlich auf den Umstand aufmerksam seyn, ob nicht bey sonst unveränderter Anordnung der Schraube, und einerley Umlaufsgeschwindigkeit, eine größere Wassermenge bey Beobachtung der bernoullischen Regel gehoben würde. Es scheint sehr natürlich zu seyn, daß nicht so viel Wasser bey jedem Umlauf in einerley Zeit aus einem Schraubengange in den andern hinüber treten kann, wenn Luft und Wasser einander ausweichen müssen, als in dem Fall, wenn die Luft durch die untere Mündung eintreten kann. Die Erfahrungen, welche ich aus des Herrn Hennerts Preisschrift. oben im 31 und 32 §. schon angeführet

führet habe, sind, wie es scheint, bey einer gänzlichen Tiefe der Grundfläche unter dem Wasser angestellt. Ich würde indessen zur Probe einige dieser Erfahrungen mit des H. Bernoulli Theorie vergleichen, wenn mir nicht verschiedene Zweifel entgegen stünden, ob auch wohl die im 31 §. angegebenen Zahlen für die Abmessungen der Schrauben alle richtig sind. Es kann vieleicht ein unrichtiger Abdruck meine Zweifel veranlassen: es können auch andre Ursachen hie und da ein Versehen bey der Angabe dieser Abmessungen zuwege gebracht haben. Einmal scheinen die Zahlen 35, 37, 36 Zoll, wofern sie wirklich die Halbmesser des Umfangs der Schraube bedeuten sollen, sehr groß zu seyn. Die Durchmesser hätten also auf 6 Fuß betragen, da doch Leupold im Theatro Machin. Hydraul. I Th. 72 §. 40 S. berichtet, daß man den größten Wasserschrauben in Holland nur 3 bis $3\frac{1}{2}$ Fuß im Durchmesser gebe. Das statische Moment des Widerstandes wird bey einem so grossen Durchmesser ungemein groß, zumal da die hennertischen Schrauben drey Schraubengänge von sehr beträchtlicher Weite gehabt haben. Ueberdem stimmen die erwähnten Zahlen auch nicht mit denjenigen überein, die Herr Hennert für die Winkel η, und die Entfernungen der Schraubengänge voneinander angiebt. Jene Winkel sollen 11° 55′, 14° 42′, und 11° 54′, diese Entfernungen aber 23, 29, 24 Zoll betragen haben. Wenn aber a den Halbmesser, und e die Weite der Schraubengänge voneinander bedeutet, so wird $tang\ \eta = \frac{e}{2\pi a}$, also wäre für die erste Schraube $tang\ \eta = \frac{23}{220} = 0,1045$, und $\eta =$ 5° 58′. Nehme ich dagegen $2a = 35$ Zoll an, so wird $tang\ \eta = 0,2091$, und $\eta = 11° 49'$, welches doch mit Herrn Hennerts Zahl beynahe übereinkömmt. Ich würde also dafür halten, daß nur aus einem Versehen rayons statt diametres geschrieben wäre:

 allein

allein alsdenn stimmen in der Tafel des 32 §. die ich dort aus der hennertischen Schrift mitgetheilet habe, die Winkelgeschwindigkeiten, und die Werthe von $2\sqrt{gk}$, oder α, welche H. Hennert für gleichgültig annimmt, nicht überein: also scheint es, daß man durch die Zahlen 23, 29, 24 Zoll nicht die ganze, sondern die halbe Entfernung der Schraubengänge voneinander verstehen müsse. Dies letztere scheint auch mit der Weite der Schraubengänge mehr überein zu kommen, deren drey um jede Schraube befindlich gewesen sind, und deren viereckte Oefnungen 1, 36; 1, 46; und 1, 41 Quadrat-Fuß weit angegeben werden. Für so weite Gänge wäre kein Platz gewesen, wenn die ganze Höhe eines Schraubenganges ohngefehr 2 Fuß bis $2\frac{1}{2}$ Fuß betragen hätte: oder man müßte die angegebenen Zahlen für die Summe aller dreyer Oefnungen an jeder Schraube verstehen. Wofern wirklich die Halbmesser der Schrauben 35, 37, 36 Zoll betragen haben, so muß ich voraussetzen, daß H. Hennert von der Axe der Spindel bis an die Mitte der Oefnungen der viereckten Gänge gemessen habe, wenn die Zahlen zur Rechnung brauchbar seyn sollen. Wäre dieses geschehen, so hätten die Schrauben bis an ihre äußere Gränze gemessen, mehr denn 7 Fuß im Durchmesser betragen, und dies ist doch wirklich eine sehr ungewöhnliche Weite. Bey dieser Ungewißheit scheint mir eine nähere Vergleichung der angegebenen Effecte mit der bernoullischen Theorie ohne Nutzen zu seyn. Der eigentliche Bau der bey diesen Erfahrungen gebrauchten Wasserschrauben müßte auch noch genauer beschrieben seyn, wenn man die Rechnung mit einiger Zuverläßigkeit darauf anwenden wollte. Vorjetzt schließe ich diese Abhandlung mit dem Vorsatz, die Untersuchung künftig wieder vorzunehmen, wenn ich andre meinem Wunsch gemässere Erfahrungen werde gesammelt haben.

Ab-

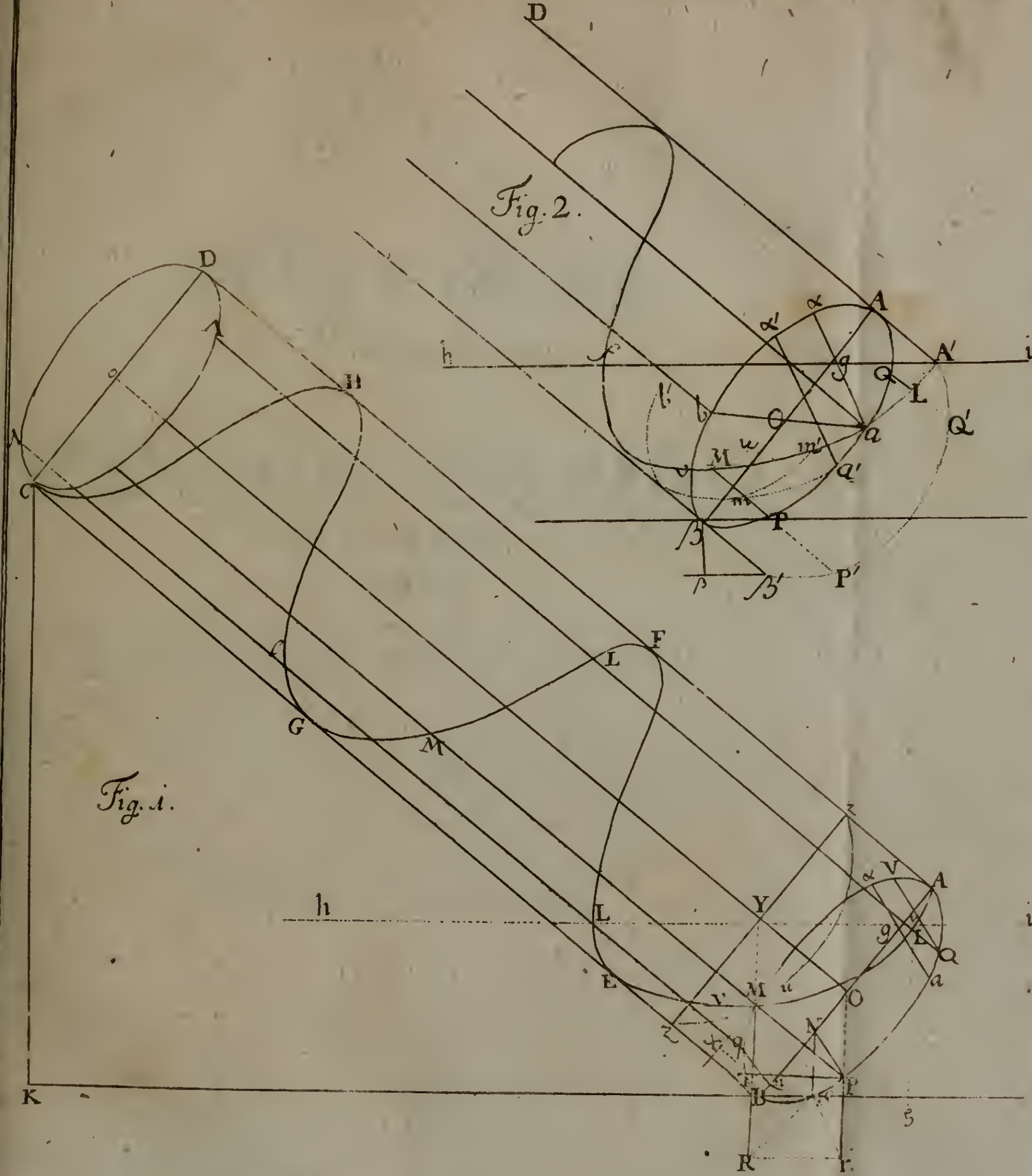

D
A
α
α'
A'
h
i
f
g
Q
L
b'
b
O
a
Q'
u
M
m'
o
Q'
m
β
P
β
β'
P'
D
I
H
C
F
L
G
M
z
V
A
h
L
Y
i
g
E
Q
a
E
M
u
O
z
N
B
P
K
R
r

Fig. 2.

Fig. 1.

Abhandlung
die Verbesserung
des
Spießglas-Schwefels
betreffend,

entworfen

von

Wilhelm Heinrich Sebastian Buchholz,

der Arzneywissenschaft Doctor, ordentlichem Arzte zu Weimar, Mitglied der kaiserlichen Akademie der Naturforscher, ingleichen der churfürstlichen baierischen Akademie der Wissenschaften, wie auch der königlich preußischen Gesellschaft zum Nutzen der Wissenschaften zu Frankfurt an der Oder Beysitzer.

Daß reines und rohes Spießglas aus vielem Schwefel, und einer beträchtlich größern Quantität regulinischer metallischer Theile bestehe, und daß, so überflüßig nun auch die schwefelichten Grundtheile in dem Spießglase sind, die regulinischen jene doch sehr übertreffen, wird hoffentlich jedem Scheidekünstler zur Genüge bekannt seyn.

Da nun bekannt ist, daß der Spießglasschwefel von den ersten Niederschlägen mehreres Brechen verursacht, als der von den letztern Niederschlägen, folglich sehr selten oder gar nicht von vernünftigen Aerzten verschrieben wird, auch von den Apothekern entweder weggeworfen, oder als etwas unnützes hingestellt, oder auch unter die Spießglasleber gemischt wird; so habe ich mir vorgenommen, diesen groben Schwefel entweder zu verbessern, oder eine Art anzuzeigen, den Spießglasschwefel vom erstern Niederschlage gleich so gut zu erhalten, als wenn er vom 4ten oder 5ten Niederschlage wäre.

Will man den groben Spießglasschwefel dem von den letztern Niederschlägen in seinem Wesen und Wirkung gleich machen, so ist zu untersuchen nothwendig, worinnen diese beyden Sorten von einander abgehen. Auf den Unterschied der Farbe will

M ich

ich jetzo keinen Betracht nehmen, sondern nur bey ihrer unterschiedenen Wirkung stehen bleiben. Hier findet sich nun, daß der erstere die Eigenschaft brechen zu erregen, am stärksten, der mittlere dieselbe in einem geringern, und der letzte, diese Eigenschaft in einem noch geringern Grade besitze, und dagegen mehr schweistreibend und resolvirend sey. Um welcher Beschaffenheit willen auch eben dieser letztere von den Aerzten verlangt wird.

Nun ist es eine ausgemachte Wahrheit, daß alle brechenmachende Eigenschaft des Spießglaskönigs, blos in der Verbindung des phlogistons mit der antimonialischen Grunderde, und so lange diese Verbindung nicht zerstöret wird, lediglich und allein bestehe. Was hierbey pars arsenicalis sey, den so viele und besonders Neumann in seinen prælection. chemic. p. 11. pag. m. 287. der Kesselischen Ausgabe Züllichau 1749. anklagen, habe ich noch niemals mit aller meiner angewandten Aufmerksamkeit begreifen können, denn reines Spießglas ist vom Arsenik darinn unterschieden, daß es

1) nicht den geringsten Geruch von Knoblauch hat, welcher dem Arsenik, wenn er verbrannt wird, eigen ist.

2) Läßt sich der Spießglaskönig ganz und gar nicht im Wasser, wie Arsenik, noch in oleo tartari per deliquium auflösen, worinne doch der weisse Arsenik fast ganz aufgelöst wird.

3) Haben die Bestandtheile des Arseniks und Spießglases ganz unterschiedene Figuren, denn die erstern sind piramidalisch, und die letztern sind den Nadeln gleich, und dieses besonders in den allerkleinsten Theilchen.

Ja sogar wenn man das Spießglas aus den verschiedenen Bereitungen des Spießglases wieder reducirt, so nimmt es die spitzige oder nadelförmige Gestalt wieder an.

Ferner ist unläugbar, daß das Spießglas in sehr verschiedenen, und besonders nach denjenigen Graden, wornach man ihm etwas von seinem Schwefel entziehet, und wodurch das übergebliebene immer mehr metallartig wird, in seiner brechenmachenden Wirkung gestärket werden kann. Daraus also sehr deulich sich ergiebt, daß diese Wirkung den regulinischen Theilen eigen ist.

Zu diesen vorgetragenen Grundsätzen gehört auch noch dieser, daß der wahre Schwefel im Spießglase an und vor sich betrachtet, von dem gemeinen Schwefel in keinem Stück unterschieden sey.

Wenn man nun also an dem Spießglasschwefel nach den verschiedenen Niederschlägen, verschiedene Wirkungen wahrnimmt, so fließt meiner Meinung nach daraus, daß ein Spießglasschwefel von dem ersten Niederschlage, von einem andern des letztern Niederschlags nur durch die Proportion des mit verbundenen wahren Schwefels mit den regulinischen Theilen unterschieden sey, von welchem Schwefel also nach der Wirkung, und nach obigen Sätzen der erste Niederschlag weniger als der letzte besitze; daher ist ja die Folge sonnenklar, daß wenn ich dem Spießglasschwefel vom erstern Niederschlage so viel Schwefel zusetze, daß zwischen diesem und den regulinischen Theilen eben die Verhältniß herauskömmt, wie bey dem Spießglasschwefel vom letztern Niederschlage, daß dieser eben die helle Farbe, und die weit gelindere Wirkung bekommen müßte: und dieser Satz bestättigt sich auch durch die Erfahrung. Denn da jener Theil wahrer Schwefel ist, so beym letztern Niederschlage stecket, und vor dem gemeinen nichts voraus hat, so kann es auch keinen Unterschied machen, wenn ich dem erstern, um ihn mit jenem in gleiche Proportion seiner Theile zu setzen, nur gemeinen Schwefel beysetze. Daß der Schwefel sowohl merkurialische als antimonialische Substanzen verbessert, beweiset auch dasjenige, was die Verfasser des New Dispensatory London 1763. pag. 86. sagen: Sulphur, which restrains the power of mercury and the antimonial Semimetal, remarkably abates the virulence of this poisonous mineral also. Such of these substances as participate more largely of Sulphur, Seem to be almost innocent.

Ehe ich auf diese Grundsätze fiel, so glaubte ich durch den nassen Weg eine Scheidung der groben regulinischen Theile von den schwefelichten vermittels der alcalisch-caustischen Salze zu bewerkstelligen. Ich nahm derowegen eine Unze groben Spießglasschwefels d. i. vom ersten und zweyten Niederschlage, kochte solchen in einem irrdenen Gefäße mit einem Maas oder zwey Pfund Kalchwasser, welches mit 2. Quintel vom geflossenen Weinsteinöle geschärft war, bis über die Hälfte ein. Der Schwefel schien fast aufgelöset, die Auflösung war citronenfärbig. Nach dem Durchseigen durch Fließpapier, schlug ich den Schwefel durch destillirten Essig nieder, und erhielt nicht mehr als anderthalb Quintel eines schönen verbesserten Schwefels.

Dieser Versuch war nicht der vortheilhafteste, er führte mich aber auf den Gedanken, ob nicht ein stärker caustisches Salz noch mehr vom Schwefel auflösen würde.

Ich

Ich nahm daher ungelöschten Kalch und gute Pottasche zu gleichen Theilen, vermischte beydes, und ließ das Mengsel in starkem Feuer wohl fließen, schüttete es aus, und, nachdem es gepulvert, kalt Wasser darüber, woraus eine sehr gesättigte caustische Lauge entstund. Eine Unze vom groben Spießglasschwefel kochte ich ohngefehr 2. Stunden in dieser caustischen Lauge, die Auflösung verlohr ihre röthlichbraune Farbe, und wurde, nachdem es durchgeseigt, milchfarbe. Dem Ansehen nach war hierinnen wenig Schwefel enthalten; allein da es mit destillirtem Essig niedergeschlagen wurde, so zeigte sich eine schöne Pomeranzenfarbe, und ich erhielt 2. Quintel eines lockern Schwefels, welcher ungleich feiner ausfiel, als der im Filtro zurück gebliebene.

Ferner nahm ich eine Unze groben Spießglasschwefel, kochte solchen mit ziemlich gesättigter Seiffensiederlauge, wozu ich währendem Kochen öfters frische schüttete, um dadurch das caustische dieser Lauge zu concentriren. Ich verfuhr damit wie im vorigen Versuche, und erhielt einen Schwefel, der die erstern alle an Feinheit und heller Pomeranzenfarbe übertraf. Nur war dieser schöne Schwefel zu kostbar, denn ich erhielt nicht mehr durch den Niederschlag als Fiv.

Da nun bey diesen jetzt erzählten Versuchen die Quantität des erhaltenen feinen Schwefels zu gering war, so nahm ich nach obigen erzählten Grundsätzen verschiedene Versuche vor, welche meiner Muthmassung, wie der Erfolg gewiesen, nicht widersprachen.

Eine Unze groben Spießglasschwefel, und ein Loth gemeinen Schwefel vermischte ich miteinander, setzte einen Schmelztiegel in das Feuer, und ließ darinn zwey Unzen Pottasche fliessen, trug das Gemische vom Schwefel löffelweise dazu, welches im Schmelzen stark nach Schwefel roch. Nachdem alles eingetragen, und die Mischung eine Viertelstunde geflossen, goß ich es aus, und verfuhr damit, wie bey der Bereitung eines jeden andern Spießglasschwefels. Im Filtro blieb ein dunkles schwarzbraunes Magma zurück. Die Lauge wurde mit destillirtem Essig niedergeschlagen, da denn ein lockerer Schwefel zu Boden fiel. Aber auch mit dieser erhaltenen Quantität Schwefel war ich nicht zufrieden.

Der Versuch wurde wiederhollt, weil ich glaubte, daß, da ich das Gemische zu lange nämlich $\frac{1}{4}$ Stuude lang im Feuer gehalten, zu viel vom Schwefel verbrannt seyn würde. Nachdem die Maße alle eingetragen, und einige Minuten zusammen im Flusse gestanden, nahm ich solche mit einem Spatel aus dem Schmelztiegel, pulverisirte es, und verfuhr wie bey nur gedachtem Proceß. Ich erhielt dadurch zwar eine etwas beträchtlichere Menge lockern Schwefel, aber an hellgelber Farbe, Leichtigkeit und dergleichen kam er dem erstern bey weitem nicht gleich.

Die Ursache, warum in nur gedachtem Versuche der Schwefel nicht recht gerathen war, lag meiner Meinung nach darinn, daß die Wirkung der Pottasche auf den gemeinen zugesetzten Schwefel nicht hinlänglich gewesen, folglich nur etwas vom groben Spießglasschwefel angegriffen und aufgelöset habe. Derowegen nahm ich von allen 3. Cörpern, wie ich im ersten Versuche von dieser Art beschrieben, eben das Gericht, trug es in einen Schmelztiegel, und ließ es etwas länger fließen. Unglücklicher Weise aber durchbohrte die Maße den Tiegel, und war eine beträchtliche Menge durchgedrungen, ehe ich es gewahr wurde.

Da mir aus der Erfahrung bekannt war, daß die Bestandtheile einer ordentlichen Schwefelleber, nämlich reine Pottasche und Schwefel, in einen glühenden Tiegel getragen, sehr geschwind fliessen, ohne daß vieles vom Phlogisto des Schwefels verbrenn; so

nahm

nahm ich derohalben 4 Unzen vom groben Spießglasschwefel, 2 Unzen vom gemeinen Schwefel, und $\frac{1}{2}$ tt. Pottasche, mischte alles gepulvert unter einander, und trug es in einen glühenden Schmelztiegel unter beständigen Umrühren. Nachdem es alles hineingetragen war, und recht roth glühete, so goß ich es aus. Nach dem Erkalten hatte ich eine rothbraune Maße, welche gepulvert ich in 5 Maas Wasser gelinde in einem eisernen Topfe so lange kochte, bis ein Maas verkocht war, dann durch ein Filtrum seigte. Die durchgeseigte Flüßigkeit war wie Molken anzusehen. Nach dem Erkalten tröpfelte ich destillirten Eßig dazu, und wurde mit Vergnügen gewahr, daß eine unglaubliche Menge des schönsten blaß pomeranzenfarbigten Schwefels niederfiel. Wieviel ich eigentlich in diesem Versuche feinen Schwefel erhalten, kann ich nicht bestimmen, weil etwas vom Filtro verschüttet worden.

Mit diesem Versuche nun war ich vollkommen zufrieden, da derselbe mit meiner Theorie und Wünschen vollkommen übereinkam. Nunmehr können diejenigen Apotheker, welche eine große Menge vom groben Spießglasschwefel vorräthig haben, getrost ihren Schwefel auf nur beschriebene Art verbessern.

Nun kam es darauf an, wie die zeitherige in den Apotheken übliche Methode, den Spießglasschwefel aus rohem Spießglas, Weinstein und Salpeter durch das Verpuffen zu verfertigen, verbessert werden könnte, welche als unvollkommen mit Recht genennet werden kann, weil dadurch eine Menge grober Schwefel erhalten wird, welchen niemand gebrauchen kann.

Vier Unzen Pottasche ließ ich im Feuer fließen, und trug sodann 2 Unzen rohes gepulvertes Spießglas dazu, welches mit einer Unze Schwefel vermischt war, da alles hinlänglich floß, wurde es ausgegossen, mit Wasser gekocht, durchgeseigt, welches durchgeseigte

geseigte ein sehr dunkelbraunes Ansehen hatte. Das Ueberbleibsel im Filtro war sehr wenig, woraus ich schon im voraus muthmassete, es würde bey dieser Operation vieler grober Schwefel niederfallen. Zu der durchgeseigten Flüßigkeit tröpfelte ich die gehörige Quantität destillirten Weinessig, und wie ich vermuthet hatte, fiel der Schwefel sehr dunkelbraun nieder. Auch die Menge war der Quantität des Spießglases nicht gemäß, weshalben ich alles zusammen wegschüttete.

Der Versuch wurde also wie bey dem letzten mit dem Spießglasschwefel angestellten mit dem rohen Spießglase wiederholt.

Ich nahm 1 tt. rohes Spießglas ½ tt. gemeinen Schwefel und 2 tt. reine Pottasche, mischete diese Dinge gepulvert unter einander, und ließ es in einen Tiegel fließen. Goß es denn aus, und kochte es mit Wasser gehöriger massen, dann wurde es nach dem Durchseigen mit destillirtem Weinessig niedergeschlagen. Hier bekam ich nun vom groben braunen Schwefel nicht das mindeste zu sehen, sondern es schlug sich das erste wie das letzte mit einer hellgelben Pomeranzenfarbe nieder, und zwar zu meinem größten Vergnügen.

Dieser letztere Schwefel war demjenigen von der 4ten Niederschlagung auf dem gewöhnlichen Weg bereitet, in seinen Wirkungen auf den menschlichen Körper vollkommen gleich.

Ap=

Abhandlung

über die

Theorie

der

Saugwerke.

von

Wencesl. Joh. Gustav Karsten.

1768.

Theorie der Saugwerke.

1. §.

Es sind zweyerley Umstände in Betrachtung zu ziehen, wenn ein Saugwerk so vortheilhaft eingerichtet werden soll, als es in seiner Art seyn kann. Einmal wird erfordert, daß das Wasser in der Saugröhre nicht etwa in einer gewissen Höhe, der fernern Bewegung des Kolbens ungeachtet, hängen bleibe, sondern wirklich nach einigen Kolbenzügen bis in den Stiefel, und endlich bis zur größten Höhe des Kolbens hinauf steige. Fürs zweyte muß das Saugwerk hiernächst ohne Zeitverlust bey jedem Kolbenhub soviel Wasser geben, als der ganze Raum des Kolbenzuges im Stiefel fassen kann. Um diese beyden Stücke mit der gehörigen Deutlichkeit zu unterscheiden, muß man sich vorstellen, daß anfangs noch die ganze Saugröhre ledig sey, und das Wasser in derselben nur so hoch stehe, als in demjenigen Behälter, aus welchem es das Saugwerk herauf ziehen soll. Beym ersten Kolbenzuge wird nun das Wasser in der Saugröhre auf eine gewisse Höhe steigen: beym zweyten Kolbenzuge etwas höher: beym dritten Kolbenzuge wiederum etwas höher, und so ferner. Wenn sich die Einrichtung so machen ließe, daß der Kolben in seinem niedrigsten Stande an den Boden des Stiefels, und das daselbst befindliche Ventil genau anschlösse; so würde das Wasser allemal bis in den Stiefel treten, und bis zur höchsten Stelle des Kolbens gehoben werden, dafern anders die größte Kolbenhöhe über die Oberfläche des Wassers, welches das Saugwerk heraufziehen soll, nicht über 32. rheinische Fuß beträgt. In allen andern Fällen, wo zwischen dem Kolben in seinem niedrigsten Stande, und dem Boden des Stiefels ein Zwischenraum bleibt, wird die in demselben zurück bleibende Luft dem in der Saugröhre hinauf steigenden Wasser desto mehr hinderlich seyn, je grösser dieser Zwischenraum ist. Er heißt deswegen der **schädliche Raum**, und das Saugwerk ist desto vollkommener, je kleiner dieser schädliche Raum ist. Wenn man das Pumpenventil nicht im Boden des Stiefels, sondern irgendwo in der Saugröhre anbringen wollte, so würde man hiedurch den schädlichen Raum vergrössern, und dies destomehr, je niedriger das Ventil in der Saugröhre angebracht würde. Die allerunvollkommenste Pumpe würde also diejenige seyn, welche ihr Ventil nicht am obersten, sondern am untersten Ende der Saugröhre hätte. Man kann demnach alle Arten von Saugwerken in folgende drey Classen bringen. Eine **Pumpe der vollkommensten Art** hat ihr Ventil oben an der Saugröhre, und gar keinen schädlichen Raum. Eine **Pumpe der unvollkommensten Art** hat ihr Ventil unten an der Saugröhre. Eine **Pumpe von mittlerer Art** hat zwar ihr Ventil oben an der Saugröhre, aber zwischen dem Kolben und dem unten im Stiefel befindlichen Ventil einen schädlichen Raum. **Belidor** hat in der Architect. Hydraul. III. Buch III. Cap. 913. §. ebenfalls diese drey Arten der Saugwerke von einander unterschieden.

2. §.

2. §.

Diese Betrachtungen betreffen inzwischen nur noch die nöthige Vollkommenheit des Saugwerks in Ansehung des ersten vorhin erwähnten Umstandes, nämlich in Ansehung der anfänglichen Bewegung des Wassers in der Saugröhre, bevor es den Kolben im Stiefel erreicht. Sobald es bis an denselben gelangt ist, wird es ihm hiernächst beständig folgen, und die Atmosphäre kann es bis zur größten Kolbenhöhe hinauf treiben, wenn diese nicht über 32 rheinische Fuß beträgt. Geschieht dies wirklich bey jedem Kolbenzuge, so wird die Pumpe bey jedem Hub soviel Wasser geben, als den körperlichen Raum des Kolbenzuges ausfüllen kann. Allein man siehet wohl, daß eine gewisse Zeit nöthig sey, bevor das Wasser vom niedrigsten bis zum höchsten Kolbenstande hinauf steigen kann. Wofern der Kolben von seiner niedrigsten Stelle bis zur höchsten in jedem Augenblick mit eben derselben Geschwindigkeit stiege, womit das Wasser im Stiefel hinauf steigt; so würde das Wasser demselben beständig unmittelbar nachfolgen, ohne daß zwischen beyden ein leerer Zwischenraum bliebe. Falls aber der Kolben schneller stiege, als das Wasser folgen kann, so würde zwischen beyden ein leerer Raum bleiben, und in dem Augenblick, da der Kolben in seiner höchsten Stelle schon wieder umkehret, würde der Raum des Kolbenzuges noch nicht mit Wasser angefüllet seyn: also würde auch nicht auf jeden Kolbenzug soviel Wasser gehoben werden, als die Vollkommenheit des Saugwerks erfordert. Stiege der Kolben nicht so geschwinde, als das Wasser für sich steigen kann; so würde zwar jeder Kolbenhub soviel Wasser geben, als der Raum des Kolbenzuges fassen kann: allein es würde mehr Zeit darüber hingehen, als nöthig wäre, wenn der Pumpenkolben mit dem Wasser gleich schnell stiege. Nun ist leicht abzusehen, daß das Wasser nicht beständig mit gleicher

Geschwindigkeit steigen werde, und die folgenden Untersuchungen werden ergeben, daß es mit beschleunigter Bewegung bis zum höchsten Kolbenstande steige, dafern der Kolben es nicht aufhält. Vermittels der gewöhnlichen mechanischen Einrichtungen aber, welche den Kolben zu bewegen dienen, läßt sich demselben nicht wohl eine andre, als gleichförmige Bewegung mittheilen. Deßwegen muß die Einrichtung so gemacht werden, daß der Kolben in eben der Zeit die Höhe des Kolbenzuges durchlaufe, worinn das Wasser im Stiefel um eben diese Höhe steigt. Zwar wird alsdenn beym ersten Anfang der Bewegung des Kolbens zwischen demselben und dem Wasser ein leerer Raum entstehen, weil nun der Kolben anfangs schneller, als das Wasser steigt. Allein in dem Augenblick, da der Kolben seine höchste Stelle erreicht, wird das Wasser den Kolben eingeholet haben, und der ganze Raum des Kolbenzuges mit Wasser angefüllet seyn. Diese Betrachtungen ergeben, daß es bey gegenwärtiger Untersuchung über die Geschwindigkeit, womit der Kolben bewegt werden muß, vornehmlich darauf ankommen werde, zu wissen, mit welcher Geschwindigkeit das Wasser in jedem Augenblick in dem Stiefel hinauf steigen würde, wenn es sich selbst frey überlassen in dem luftleeren Raum des Stiefels hinauf stiege, ohne durch den Kolben im geringsten gehindert zu werden. Die Untersuchung sowohl hierüber, als auch die im 1 §. erwähnte sollen nun nacheinander folgen.

Unter-

Untersuchung

über die anfängliche Bewegung des Wassers in der Saugröhre, und dem Stiefel, bevor es den Kolben erreicht.

---

3. §.

Die Abmessungen des Stiefels (1. Fig.) und der Saugröhre einer Pumpe der vollkommensten Art (1 §.) sind gegeben, nebst der Höhe des Stiefel Ventils B über den Wasserpaß YZ, und der Höhe AB des Kolbenhubs: man fragt, wie hoch das Wasser nach dem ersten Kolbenhub in die Saugröhre hinein treten wird.

Aufl. Es sey die Höhe BZ des Stiefelventils über den Wasserpaß $= b$, so ist hier zugleich b die kleinste Höhe des Kolbens, oder die Höhe der Saugröhre, so weit sie über dem Wasserpaß YZ hervorraget. Ferner sey die Höhe des Kolbenhubs $AB = c$, die größte Höhe des Kolbens $AZ = a$, so ist $a = b + c$. Jeder Querschnitt des Stiefels sey $= m$, und jeder Querschnitt der Saugröhre $= n$; so ist der Innhalt der Saugröhre $= nb$ (so weit sie nämlich über dem Wasser YZ hervorragt, welches hier allemal verstanden wird) und diesen Raum füllt die natürliche Luft aus, bevor der Kolben das erstemal zu steigen anfängt. Der Innhalt des Stiefels bis an die höchste Stelle A, so die Grundfläche des Kolbens erreicht, ist $= mc$. Wenn also das Wasser in der Saugröhre während des ersten Kolbenzuges um die Höhe $ZX = x$ steigt; so füllt die nach dem ersten Zug noch übrige innere Luft den Raum $AB + BZ - ZX = mc + n(b - x)$ aus. Die Federkraft der in diesem Raum nunmehr ausgebreiteten Luft sey $= h'$, und die natürliche Federkraft der Atmosphäre $= h$, so daß durch jeden dieser Buchstaben die Höhe einer Wassersäule verstanden wird, der die Federkraft der Luft das Gleichgewicht hält: so hat man $h' = \frac{n\,b\,h}{m\,c + n\,(b - x)}$, und $h = h' + x$, also $x = h - \frac{n\,b\,h}{m\,c + n\,(b - x)}$. Hieraus folgt $n\,x - (m\,e + n\,b + n\,h)\,x = - m\,c\,h$, und $X = \frac{1}{2}.\,(\frac{m}{n}\,c + b + h) \pm \sqrt{}.(\frac{1}{4}\,(\frac{mc}{n} + b + h^2) - \frac{m\,c\,h}{n})$.

Dafern Stiefel und Saugröhre gleich weit sind, also $m = n$ ist, so hat man $x = \frac{1}{2}\,(a + h) \pm \sqrt{}\,(\frac{1}{4}\,(a + h^2 - c\,h)$, weil $b + c = a$ ist. Man kann diese Gleichung als eine allgemeine Formul betrachten, die sich auf alle Fälle, auch wenn Stiefel und Saugröhre ungleich weit sind, anwenden läßt, wenn man durch C nicht die wirkliche Höhe des Kolbenzuges versteht, sondern die sogenannte auf die Mündung der Saugröhre **reducirte Höhe** desselben. Wenn nämlich statt des Stiefels, dessen Querschnitt $= m$ ist, ein andrer gebraucht würde, der eben so weit als die Saugröhre wäre, so müßte der Kolben um die Höhe $\frac{mc}{n}$ gehoben werden, wenn bey jedem Zuge eben soviel Luft aus der Saugröhre in den Stiefel treten sollte, als in dem vorigen Fall. Man ist gewohnt, statt des gegebenen Saugwerks das reducirte zu betrachten, und man nimmt alsdenn an, wenn beyde Saugröhren gleich hoch sind, daß das Wasser in dem reducirten Saugwerk eben so steige, wie in dem natürlichen, und wendet deßwegen die Rechnungen bloß auf das reducirte Saugwerk an. Diese Voraussetzung hat, wie man leicht siehet, ihre Richtigkeit, so lange das Wasser die Höhe der Saugröhre noch nicht überstiegen hat. Sobald dies letztere erfolgt ist, leidet sie ihre Einschränkungen, wie die folgenden Untersuchungen ergeben werden.

4. §.

4. §.

Dafern während des zweyten Kolbenzuges das Wasser von Z bis W steigt, so läßt sich auf eben die Art XW = Y finden. Was vorhin $b - x$ war, sey jetzt $= \beta$, und die Federkraft der innern Luft nach dem zweyten Zuge $= h''$; so ist $mc + n\,(\beta - y) : n\beta = h' : h''$, und $h'' = h' - y$, folglich wird $y = \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{n} + \beta + h' \right) \pm \sqrt{ \left(\frac{1}{4} \left(\frac{mc}{n} + \beta + h'^2 \right) - \frac{mch'}{n} \right)}$. Man wird leicht abnehmen, daß bey der wirklichen Berechnung der Werthe von X und Y vor der Wurzelgröße das Zeichen (—) genommen werden müsse, weil das Wasser stehen bleiben wird, wenn es die niedrigste von den beyden Höhen erreicht hat, die der Gleichung ein Genüge thun. Setzt man ZW $= x + y = z$, so wird $\beta - y = b - z$, und $h'' = h - z$, also $mc + n\,(b - z) : n\beta = h' : h - z$, woraus $(mc + n\,(b - z)\,(h - z) = n\beta h'$ folgt, also $z = \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{n} + b + h \right) - \sqrt{ \left(\frac{1}{4} \left(\frac{mc}{n} + b + h^2 \right) - \frac{mch}{n} - (6h - \beta h) \right)}$ oder $z = \frac{1}{2}\,(a + h) - \sqrt{ \left(\frac{1}{4}\,(a + h^2) - ch - (bh - \beta h') \right)}$, wenn $m = n$ ist.

Es sey $a = 16$ Fuß und $b = 12$ Fuß, also $c = 4$ Fuß, und $h = 32$ Fuß, $m = n$; so wird $x = 2,834$, und $z = 5,798$. Muschenbroeck hat dies Exempel in der Introd. ad Phil. Nat. T. II. §. 2124. und er bringt für den ersten Kolbenzug eben die Höhe x heraus: allein die folgenden Kolbenzüge findet er nicht so, wie sie nach gegenwärtiger Rechnung heraus kommen. Die für x gefundene Gleichung läßt sich, wenn $m = n$ ist, so ausdrücken: $\frac{b}{a - x} + \frac{x}{h} = 1$, und eben den Ausdruck hat Muschenbroeck. Hieraus schließt er, man finde die Gleichung für z, wenn in jener z statt x, und β statt b gesetzt werde. Dies giebt $\frac{\beta}{a-z} + \frac{z}{h} = 1$. Allein hiebey hat Muschenbroeck ohne Zweifel eine Pumpe der unvollkommensten Art in Gedanken gehabt, ob es gleich scheint, daß er die Pumpe der vollkommensten Art verstehe, auch seine Zeichnung grade diese letztere, oder doch wenigstens die mittlere Art vorstellig macht. Es wäre dies sonst keineswegs eine richtige Anwendung der für x gefundenen Gleichung. Wenn man diese Gleichung so ausdrückt, $\frac{b\,h}{a-x} = h - x$: so siehet man deutlicher, wie sie verändert werden muß, wenn z statt x gesetzt wird. Es ist nämlich $\frac{bh}{a-x}$ die Federkraft der in dem Raum $a-x$ ausgebreiteten Luft, deren Federkraft, da sie noch den Raum b füllte, $= h$ war; überdem ist $h-x$ der Druck, womit die äußere Atmosphäre die Wassersäule x aufwärts preßt, und beyde müssen gleich seyn. Nun aber ist beym Anfang des zweyten Kolbenzuges die in dem Raum β eingeschlossene Luft nicht $= h$, sondern $= h'$, und der Druck, womit die Atmosphäre die Wassersäule z aufwärts preßt, ist $= h - z$. Daher wird $\frac{\beta\, h'}{a-z} = h - z$, welches die vorhin für z gefundene Gleichung ist, wenn man $m = n$ setzt. Uebrigens ist die Gleichung $Y = \frac{1}{2}(\frac{mc}{n} + \beta + h') - \sqrt{(\frac{1}{4}(\frac{mc}{n} + \beta + h'^2) - \frac{mch'}{n})}$ am bequemsten, wenn man berechnen will, um wieviel das Wasser bey jedem folgenden Kolbenzug steige. Wenn nämlich jedesmal durch β die Höhe des in der Saugröhre noch mit Luft gefüllten Raums, und durch h' die Dichtigkeit dieser Luft verstanden wird, so ist y dasjenige Stück, um welches

beym

beym folgenden Kolbenzuge die Höhe des Wassers in der Saugröhre zunimmt. Das vorige Exempel giebt folgende Resultate.

Anzahl der Kolbenzüge.	Der Werth von y	Höhe des Wassers in der Saugröhre.
1	2, 838	2, 834
2	2, 964	5, 798
3	3, 152	8, 950
4	3, 462	12, 412

Daraus ergiebt sich, daß das Wasser nach dem vierten Kolbenzuge schon in den Stiefel hinein trete. Also wird es der fünfte Kolbenzug schon bis an die höchste Stelle heben können, die der Kolben erreicht: und wenn die Gußröhre nahe über diese Stelle angebracht ist; so wird es beym sechsten Kolbenzuge schon zur Gußröhre heraus laufen.

5. §.

Diese Rechnung setzte voraus, daß Stiefel und Saugröhre von gleicher Weite sind. Allein die gebrauchte Gleichung findet, wie schon erinnert worden, nur so lange ihre Anwendung, als die Höhe des heraufsteigenden Wassers die Höhe der Saugröhre nicht übertrift, wenn Stiefel und Saugröhre ungleich weit sind. Dies ergiebt sich sogleich, wenn man auf die zum Grunde liegende Proportion $mc + n(b - x) : nb = h : h - x$ zurück gehet. Das erste Glied drückt den Raum aus, den die Luft ausfüllt, in dem Augenblick, da der Kolben das erstemal seine höchste Stelle erreicht hat: aber in der Voraussetzung, daß das Wasser nur bis an X (1. Fig.) in der Saugröhre gestiegen sey. Wäre es, wie in der zweyten Figur bis an X in den Stiefel gestiegen, so wäre der Raum, den die verdünnte Luft einnimmt, $= mc - m.\,BX$. Wenn demnach nun $BX = u$ gesetzt wird, so erhält man $m(c - u) : nb = h : h - b - u$, also wird $m(c - u)(h - b - u) = nbh$. Weil nun $b + u$ das ist, was vorhin x

 hieß,

hieß, so hat man auch $(a-x)(h-x)=\frac{nbh}{m}$, und dies giebt $x^2-(a+h)x=\frac{nbh}{m}-ah$, woraus nun $x=\frac{1}{2}(a+h)-\sqrt{(\frac{1}{4}(a+h^2)-(a-\frac{nb}{m})h)}$ folgt. Wenn $m=n$ ist, so kömmt diese Gleichung mit der vorigen überein, wie erfordert wird. Man wendet diese Rechnung leicht auf den Fall an, wenn dies nicht der erste Kolbenzug, sondern einer der folgenden ist, wobey das Wasser in den Stiefel tritt. War die Höhe des Wassers in der Saugröhre $=x$, die Höhe ihres noch ledigen Theils $b-x=\beta$, die Dichtigkeit oder Federkraft der darinn eingeschlossenen Luft $=h'$; so hat man $m(c-u):n\beta=h':h-b-u$, oder $(a-x)(h-x)=\frac{n\beta h'}{m}$, woraus $x=\frac{1}{2}(a+h)-\sqrt{(\frac{1}{4}(a+h^2)-ah-\frac{nb}{m}h')}$ folgt.

6. §.

Die Abmessungen des Stiefels und der Saugröhre einer Pumpe der unvollkommensten Art sind gegeben, nebst der Höhe des Kolbenzuges: man fragt, wie hoch das Wasser nach dem ersten sowohl, als den folgenden Kolbenzügen in die Saugröhre hinein treten werde.

Aufl. Beym ersten Kolbenzuge tritt das Wasser auf einerley Höhe, es mag das Ventil oben oder unten an der Saugröhre angebracht seyn, und die Pumpe zur vollkommensten oder unvollkommensten Art gehören, dafern anders alle Abmessungen beyder Arten einerley sind. Es ist nämlich in beyden Fällen anfangs die ganze Saugröhre mit Luft von natürlicher Dichtigkeit ange-

angefüllet, die also den Raum nb einnimmt. Steigt nun beym ersten Kolbenzuge das Wasser auf die Höhe (1. Fig.) $ZX = x$, so wird die Luft in den Raum $mc + n(b-x)$ ausgebreitet, so daß ihre Federkraft $= \frac{nb}{mc+n(b-x)}.h$ wird, und diese muß $= h - x$ seyn, wie im 3 §. Beym zweyten und den folgenden Kolbenzügen aber sind beyde erwähnte Fälle gar sehr verschieden. Indem nämlich der Kolben wieder bis zur niedrigsten Stelle herab steigt, drückt er die Luft bis auf ihre natürliche Dichtigkeit zusammen, und soviel, als vorhin den Raum nx ausfüllte, tritt nur durch das Kolbenventil hinaus. Die übrige bleibt in dem Raum $BX = n(b-x) = n\beta$ eingeschlossen, und diese behält ihre natürliche Dichtigkeit, statt dessen, daß bey der Pumpe der vollkommensten Art die in diesem Raum zurück bleibende Luft nur die Federkraft $\frac{nb}{mc+n(b-x)}, h = h'$ behält. Wenn nun beym zweyten Kolbenzuge das Wasser bis W steigt, und $ZW = z$ ist; so breitet sich die in dem Raum $n\beta$ vorhin zurück gebliebene natürliche Luft in den Raum $mc + n(b-z)$ aus, und ihre Federkraft wird $= \frac{n\beta h}{mc+n(b-z)}$, die nun $= h - z$ seyn muß, so daß man die Gleichung $\frac{n\beta h}{mc+n(b-z)} = h - z$ erhält. Bey der vollkommensten Art der Pumpe hätte man $\frac{n\beta h'}{mc+n(b-z)} = h - z$; wie im 4. §. Im gegenwärtigen Falle also wird $z = \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{n} + b + h\right) - \surd\left(\frac{1}{4}\left(\frac{mc}{n} + b + h^2\right) - \left(\frac{mc}{n} + b - \beta\right)h\right)$, und man darf in der für den ersten Kolbenzug gefundenen Gleichung nur z statt x und β statt b schreiben, wenn man $\frac{mc}{n} + b = a$ setzt.

Wenn man hiemit dasjenige verbindet, was im 4 §. in Absicht der Muschenbroeckischen Rechnung für die Höhen, worauf das Wasser bey wiederholten Kolbenzügen steigt, ist erinnert worden, so ergiebt sich augenscheinlich, daß die gedachten Erinnerungen ihre Richtigkeit haben, und Muschenbroecks Rechnung nur für die Pumpe der unvollkommensten Art gelte. Bey dieser Art Pumpen wird also das Wasser nicht ehe bis in den Stiefel steigen können, bevor alle Luft aus der Saugröhre heraus getreten ist. Falls die Luft nicht insgesammt heraus treten kann, so wird das Wasser nur bis zu einer bestimmten Höhe in der Saugröhre gelangen, und hiernächst unbeweglich stehen bleiben, es mag die Bewegung des Kolbens, so lange man will, fortgesetzet werden.

7. §.

Die Umstände zu finden, unter welchen das Wasser entweder wirklich bis in den Stiefel treten wird, oder nur bis zu einer bestimmten Höhe in der Saugröhre gebracht werden kann, wenn die Pumpe zur unvollkommensten Art gehört.

Aufl. Es sey (1. Fig.) $ZV = x$ die größte Höhe, auf welche das Wasser gebracht werden kann, so ist beym niedrigsten Stande des Kolbens die zurückgebliebene Luft in dem Raum BV $= n\ (b - x)$ eingeschlossen, und ihre Federkraft ist so groß, als die natürliche Federkraft der Atmosphäre. Beym höchsten Kolbenstande ist eben diese Menge Luft in den Raum $mc + n\ (b - x)$ ausgebreitet, also ist in diesem Zustande ihre Federkraft $= \frac{n\,(b - x)\ h}{mc + n\ (b - x)}$. Wenn nun diese $= h - x$ ist, so kann das Wasser nicht mehr steigen, und dies erfordert die Voraussetzung, vermöge welcher x die größte Höhe seyn soll, die das Wasser erreichen kann. Diese wird demnach durch die Glei-

chung

chung $\frac{n(b-x)h}{mc+n(b-x)} = h - x$ bestimmt, und diese Gleichung giebt $x^2 - (\frac{mc}{n} + b)x = -\frac{mch}{n}$, also $x = \frac{1}{2}(\frac{mc}{n} + b) - \sqrt{(\frac{1}{4}(\frac{mc}{n} + b)^2 - \frac{mch}{n})}$, da dann vor dem Wurzelzeichen das Zeichen (—) gebraucht werden muß, weil das Wasser in der kleinsten von den beyden Höhen stehen bleiben wird, die der Gleichung ein Genüge thun.

Es ist demnach diese größte Höhe allemal kleiner als $\frac{1}{2}$ $(\frac{mc}{n} + b)$, also kleiner als die halbe Summe der Höhe der Saugröhre, und der auf die Mündung der Saugröhre reducirten Höhe des Kolbenzuges. Nur in dem Fall, wenn $\frac{1}{4}\ \frac{mc}{n} + b)^2 = \frac{mch}{n}$ ist, erreicht das Wasser völlig die Höhe $= \frac{1}{2}(\frac{mc}{n} + b)$, welches also die halbe größte Höhe des Kolbens in dem Fall ist, wenn Stiefel und Saugröhre gleich weit sind. Setzt man Kürze halber $\frac{mc}{n} + b = a$, und $\frac{nc}{m} = C$, so hat man $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - Ch)}$.

Wenn $Ch > \frac{1}{4}a^2$ ist, so giebt es für x keinen möglichen Werth, also giebt es auch gar keine Stelle in der Saugröhre, wo das Wasser stehen bleiben könnte. Dies ist folglich der Fall, wo das Wasser bis in den Stiefel treten wird, und der Ausdruck $2\sqrt{Ch} > a$, oder $2\sqrt{Ch} > C + b$ bestimmt die Umstände, unter welcher dies erfolgen muß. Wenn demnach von den beyden Stücken b und C des Saugwerks eins gegeben ist, so ergiebt der gefundene Ausdruck, wie groß das andre genommen werden müsse, damit

damit das Wasser bis in den Stiefel steige; und hiernächst vermittels des Kolbens bis zur Gußröhre gehoben werden könne. Man erhält nämlich $b < 2\sqrt{Ch} - C$, und $C > \frac{aa}{4h}$. Wenn also b gegeben ist, so muß C so genommen werden, daß $\varrho' > (\frac{\varrho' + b}{4h})^2$ bleibt. Falls dieser Bedingung kein Genüge geschehen kann, so muß b kleiner genommen werden.

Man findet beym Muschenbroek a. a. O. im 2131 — 2134. §. auf der 870 und 871 S. eben diese Sätze: sie sind aber bey ihm zu allgemein ausgedrückt, so daß es scheint, er wolle sie auch auf Pumpen der mittlern Art angewandt wissen, welches aber keinesweges geschehen darf, wie die folgenden Untersuchungen ergeben werden.

8. §.

Die Grösse des schädlichen Raums, nebst den übrigen Abmessungen einer Pumpe der mittlern Art sind gegeben; man sucht, wie hoch das Wasser sowohl nach dem ersten, als auch den folgenden Kolbenzügen in die Saugröhre hinein treten werde.

Aufl. Es sey (1. Fig.) A die höchste, und C die niedrigste Stelle des Kolbens. Die größte Höhe des Kolbens über die Fläche des Wassers YZ sey $= a$, die Höhe der Saugröhre $= b$, die Höhe des schädlichen Raums $BC = f$, und sein körperlicher Innhalt $= k^3$, so ist $b + f + c = a$. Die Querschnitte des Stiefels und der Saugröhre bleiben m und n. Nun erhellet, daß beym ersten Kolbenzuge die in dem schädlichen Raum befindliche Luft sich ausbreiten, also auch der in der Saugröhre befindlichen Luft, die anfangs noch die natürliche Federkraft h besitzt, gestatten werde,

de, die Klappe B aufzustoßen, und zum Theil in den Stiefel zu treten. Es sey $ZX = x$ die Höhe, worauf das Wasser bey diesem ersten Kolbenzuge steigt, so breitet sich diejenige Luft, welche vorhin den Raum $nb + k^3$ füllte, nun in den Raum $mc + k^3 + n(b - x)$ aus, also wird ihre Federkraft $= \frac{nb + k^3}{mc + k^3 + n(b - x)} . h$, und diese muß $= h - x$ seyn. Hieraus folgt $x^2 - \left(\frac{mc + k^3}{n} + b + h\right) x = -\frac{mch}{n}$, und man erhält $x = \frac{1}{2}$
$$\left(\frac{mc + k^3}{n} + b + h\right) - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}.\left(\frac{mc + k^3}{n} + b + h\right)^2 - \frac{mch}{n}\right)}.$$
Wird nun der Kolben niedergedrückt, und dadurch die im Stiefel befindliche Luft verdichtet, so drückt diese Luft zwar sogleich das Stiefel-Ventil zu: sie kann aber das Kolben-Ventil nicht aufstoßen, bevor ihre Federkraft anfängt, die Federkraft der äußern Luft zu übertreffen. Gesetzt dies erfolgt allererst, wenn der Kolben bis in M zurück getreten ist; so wird derjenige Theil Luft, der zwischen C und M enthalten ist, und mit der äußern gleiche Dichtigkeit hat, bey der noch übrigen Bewegung des Kolbens durch das Kolben-Ventil hinaus treten: Der schädliche Raum wird mit Luft von natürlicher Dichtigkeit angefüllet bleiben, da im Gegentheil die Federkraft der in der Saugröhre zurückgebliebenen und in den Raum $n(b - x)$ ausgebreiteten Luft $= h - x = h'$ ist. Demnach wird sich beym zweyten Kolbenzuge das Ventil B nicht sogleich öfnen, sondern alsdann allererst, wenn die Federkraft der im Raum BC zurückgebliebenen, und sich nun wieder ausdehnenden Luft anfängt, kleiner als h' zu werden. Gesetzt dies erfolgt, wenn der Kolben bis L gestiegen ist, so wird der Raum zwischen B und $L = \frac{h}{h'} k^3$ seyn. Um also $XW = Y$ zu finden, d. i. die Höhe, um welche das Wasser in der Saugröhre beym zweyten Kolbenzuge

steigt, muß man die Proportion zum Grunde legen: $mc + k^3 + n(\beta = Y) : n\beta + \frac{h}{h'} k^3 = h' : h' - Y$, da dann wie im §. $\beta = b - x$ ist. Es folgt hieraus die Gleichung

$Y^2 - (\frac{mc + k^3}{n} + \beta + h')Y = \frac{(h - h')k^3}{n} - \frac{mch'}{n}$. Daraus wird der Werth von Y leicht gefunden, und man kann hiernächst auf ähnliche Art suchen, um wieviel das Wasser beym dritten, und den folgenden Kolbenzügen steigt.

9. §.

Wenn die Grösse des schädlichen Raums k^3, nebst den übrigen Abmessungen der Pumpe gegeben ist; die größte Höhe zu finden, worauf das Wasser in der Saugröhre steigen kann.

Aufl. Wäre gar kein schädlicher Raum vorhanden, so müßte das Wasser so hoch steigen können, als die Atmosphäre es zu tragen vermag, also ohngefehr 32. rheinische Fuß hoch. Diese Höhe aber wird das Wasser nicht erreichen können, wenn ein schädlicher Raum vorhanden ist. Das Wasser wird nur so lange zu steigen fortfahren, bis die in der Saugröhre darüber stehende Luft so weit verdünnet ist, daß der Kolben bis zu seiner größten Höhe hinauf gezogen werden müßte, wenn die im schädlichen Raum befindliche Luft auf eben den Grad verdünnet werden sollte. Sobald nämlich die Luft in diesen Zustand gekommen ist, kann aus der Saugröhre keine Luft mehr in den Stiefel, auch aus dem Stiefel nichts mehr durch das Kolbenventil in die freye Luft treten. In diesem Zustande ist also die Federkraft der innern Luft $= \frac{k^3}{mc + k^3} h$. Wenn demnach x die größte Höhe ist, die das

Wasser erreichen kann, so muß $\frac{k^3}{mc+k^3}.h = h - x$ seyn, folglich ist $x = \frac{mc}{mc+k^3}.h$. Eben die Gleichung läßt sich auch so ausdrücken $x = \frac{mc:n}{mc;n+k^3:n}.h$, da dann $mc:n$, und $k^3:n$ die auf die Weite der Saugröhre reducirten Höhen des Kolbenzuges und des schädlichen Raums sind. Verstehet man also durch C und F diese reducirten Höhen, so hat man $x = \frac{C}{C+F}.h$. Dieser Ausdruck kömmt alsdenn völlig mit Belidors Auflösung überein. Architect. Hydraul. III. Buch III. Cap. 928. §.

Ich muß hiebey eine ähnliche Erinnerung, wie im 3. §. machen. Belidor und andre Schriftsteller reduciren auch hier allemal die Höhen des schädlichen Raums und des Kolbenzuges auf die Weite der Saugröhre, und betrachten statt des eigentlich gegebenen Saugwerks das auf solche Art reducirte. So lange die Höhe des Wassers die Höhe der Saugröhre selbst nicht übertrift, steigt das Wasser in dem einen Saugwerk so hoch als in dem andern, und was für das reducirte Saugwerk gefunden ist, läßt sich ohne Einschränkung auf das andre anwenden. Allein, sobald das Wasser über die Saugröhre weg in den Stiefel getreten ist, leidet dies seine Ausnahmen.

Dafern die Saugröhre grade die Höhe hätte, welche die Gleichung $x = \frac{C}{C+F}h$ bestimmt, so würde das Wasser zwar bis an das Stiefel-Ventil gehoben werden, keineswegs aber bis in den Stiefel hineintreten können. Weil aus der erwähnten Gleichung jede von den dreyen Größen x, C, F, gefunden werden kann, wenn zwey davon gegeben sind, so läßt sich die Einrichtung allemal so machen, daß der erwähnten Bedingung ein Genüge geschehe, daß nämlich das Wasser endlich bis an das Stiefel-Ventil gehoben werde.

Nimmt man die Höhe der Saugröhre kleiner als $x = \frac{mc}{mc+k^3} \cdot h$, so wird das Wasser endlich in den Stiefel treten, und sobald dies erfolgt ist, wird bey fortwährendem Spielen des Kolbens wenigstens ein Theil der in dem schädlichen Raum bisher zurückgebliebenen Luft durch das Kolben-Ventil heraus treten. Indessen kann doch das Wasser nicht bis an die niedrigste Stelle des Kolbens steigen, also auch nicht durchs Kolben-Ventil treten, uud bis zur Guß-Röhre gehoben werden, bevor alle Luft aus dem schädlichen Raum herausgetreten ist. Dafern dies nicht endlich erfolgen kann, so wird das Wasser nur bis zu einer bestimmten Höhe im Stiefel gelangen, und in dieser Höhe unbeweglich stehen bleiben, es mag hiernächst die Bewegung des Kolbens, so lange man will, fortgesetzt werden.

10. §.

Die größte Höhe zu finden, auf welche das Wasser in dem Stiefel steigen kann, falls nicht endlich alle Luft aus dem schädlichen Raum heraustritt.

Aufl. Es sey (1. Fig.) ZN die größte Höhe, die das Wasser erreichen kann, von der untern Wasserfläche ZY angerechnet, und $BN = s$ die Höhe desselben über das Stiefel-Ventil. Wenn nun der schädliche Raum die Gestalt eines Cylinders hat, dessen Höhe $= f$, und jeder Querschnitt $= r$ ist; so wird $k^3 = rf$, und beym niedrigsten Stande des Kolbens ist der Raum $CN = r(f - s)$ mit Luft von natürlicher Dichtigkeit ausgefüllt. Diese breitet

breitet sich, indem der Kolben bis A steigt, in den Raum $AN = mc + r(f - s)$ aus, folglich wird in diesem verdünnten Zustande ihre Federkraft $= \frac{r(f - s)}{mc + r(f - s)} h$. Diese muß nun $= h - b - s$ seyn. Beyde Werthe gleich gesetzt geben die Gleichung

$s^2 + (b - f - (\frac{mc}{r}) s = (\frac{mc}{r} + f) b - \frac{mc}{r} h$, also $s = \frac{1}{2}$

$(\frac{mc}{r} + f - b) \pm \surd (\frac{1}{4} \frac{mc}{r} + f - b)^2 + (\frac{mc}{r} + f) b - \frac{mch}{r})$,

oder $s = \frac{1}{2} (\frac{mc}{r} + f - b) \pm \surd \frac{1}{4} (\frac{mc}{r} + f + b)^2 - \frac{mch}{n}$.

Vermöge der Voraussetzung ist das Wasser schon bis in den Stiefel getreten, deswegen ist nothwendig $b < \frac{mch}{mc + k^3}$ (9. §.) oder $b < \frac{mch : r}{mc : r + f}$, weil hier $k^3 : r = f$ ist. Demnach ist auch $(\frac{mc}{r} + f) b < \frac{mch : r}{r}$, folglich $\surd (\frac{1}{4} (\frac{mc}{r} + f - b)^2 + (\frac{mc}{r} + f) b - \frac{mch}{r}) < (\frac{1}{2} \frac{mc}{r} + f - b)$. Wenn also $\frac{mc}{r} + f > b$ ist, so sind beyde Werthe von s positiv, und der kleinste von beyden muß hier gebraucht werden, wie leicht in die Augen fällt. Dafern aber $\frac{mc}{r} + f < b$ ist, so werden alle beyde Werthe von s negativ, und davon kann keiner statt haben. Denn das Wasser ist nun über alle beyde Stellen, wo es hängen bleiben könnte, schon hinüber.

11. §.

Hieraus lassen sich zugleich die Umstände schließen, unter welchen das Wasser entweder einmal über das Kolbenventil hinauf treten, oder nur bis zu einer bestimmten Höhe im schädlichen Raum gehoben werden kann, wenn das Saugwerk zur mittlern Art gehört. Unter den beyden Bedingungen, daß $b < \frac{mch}{r} : (\frac{mc}{r} + f)$ und zugleich $\frac{mc}{r} + f < b$ sey, wird die Pumpe, falls sonst kein Fehler vorhanden ist, das Wasser sicher bis zur Gußröhre heben. Hicher gehört auch noch der Fall, wenn $\frac{mc}{r} + f = b$ ist, und zugleich $b < \frac{mch}{r} : (\frac{mc}{r} + f)$, weil alsdenn beyde Werthe von s unmöglich werden. Demnach kann nur in dem einzigen Fall das Wasser im schädlichen Raum auf einer bestimmten Höhe stehen bleiben, wenn $\frac{mc}{r} + f > b$ ist, wenn gleich die andre Bedingung $b < \frac{mch}{r} : (\frac{mc}{r} + f)$ statt hätte. Sollten aber auch in diesem Fall beyde Werthe von s möglich bleiben, so muß nicht $\frac{1}{4}(\frac{mc}{r} + f + b)^2 < \frac{mch}{r}$ seyn. Sind diese beyden Ausdrücke einander gleich, so bleibt das Wasser in der Höhe $\frac{1}{2}(\frac{mc}{r} + f - b)$ hängen. In allen Fällen aber, wenn $\frac{mc}{n} + f > b$, und $\frac{1}{4}(\frac{mc}{r} + f + b)^2 < \frac{mch}{r}$, also $\frac{mc}{r} + f + b < 2\sqrt{\frac{mch}{r}}$ ist, wird das Wasser nirgend stehen bleiben, sondern das Saugwerk seine gehörige Vollkommenheit haben.

12. §.

12. §.

Herr **Parent** hat in seinen Recherches de Physique & de Mathematique 1702 acht Aufgaben vorgetragen, welche die Theorie der Saugwerke betreffen, und sie damals als neue Lehren bekannt gemacht, ohne die Beweise seiner Auflösungen beyzufügen, mit einer Aufforderung an die damaligen Kunstverständige, die Beweise zu suchen. Herr **Belidor** trägt diese Aufgaben des Herrn **Parent** mit desselben eigenen Worten vor in der Architect. Hydraul. III Buch III Cap. 919 — 926 §. und entwickelt hiernächst die Theorie, worauf die Auflösungen dieser Aufgaben beruhen. Sein Vortrag beruhet mit dem gegenwärtigen auf einerley Gründen: allein seine Regeln weichen von den hier vorgetragenen, was die Pumpen der mittlern Art betrift, in einigen Stücken ab, und überhaupt hat er die ganze Theorie nicht in ihr völliges Licht gesetzet. Es kömmt nämlich das Resultat der ganzen bisherigen Untersuchung über die Saugwerke der mittlern Art, auf folgende Sätze an.

Wenn $b < \frac{mc}{mc+rf} h$, also die Höhe der Saugröhre kleiner ist, als die vierte Proportionallinie zur Summe des Raums, worinn der Kolben spielt, und des schädlichen Raums, zum Raum worinn der Kolben spielt, und zur Höhe einer Wasser-Säule, deren Gewicht dem Druck der Atmosphäre gleich ist; so hat das Saugwerk seine gehörige Vollkommenheit, falls auch überdem $\frac{mc}{r} + f$ nicht grösser, als b ist. Wenn die erwähnte vierte Proportionallinie x heißt, so hat man $mc + rf : mc = h : x$, und da ließe sich das erste Verhältniß auch so ausdrücken $\frac{mc+rf}{n} : \frac{mc}{n}$, so daß statt des schädlichen Raums, und desje-

nigen

nigen Raums, worinn der Kolben spielt, auch ihre auf die Weite der Saugröhre reducirten Höhen gebraucht werden können, vorhin im 10. §. ward eben dies Verhältniß so ausgedrückt $\frac{mc}{r}+f$: $\frac{mc}{r}$, also ward die Höhe des schädlichen Raums selbst, und die auf die Weite des schädlichen Raums reducirte Höhe des Kolbenzuges gebraucht. In Ansehung dieser ersten Bedingung ist es also einerley, ob man beyde Räume auf die Weite der Saugröhre oder des schädlichen Raums reducirt. In Ansehung der zweyten Bedingung aber ist es nicht einerley. Zwar kann man diese zweyte Bedingung auch so ausdrücken $\frac{mc}{r}+\frac{rf}{n}<\frac{rb}{n}$, aber man siehet wohl, daß die Saugröhre alsdenn so betrachtet werden müßte, als ob sie mit dem schädlichen Raum einerley Weite hätte.

Dafern außer der ersten Bedingung überdem $\frac{mc}{r}+f>b$ ist; so hat das Saugwerk nur alsdenn seine Vollkommenheit, wenn auch $\frac{mc}{r}+b+f<2\sqrt{\frac{mch}{r}}$ ist. Diese letzte Bedingung liesse sich nun auch so ausdrücken $\frac{mc}{n}+\frac{rb}{n}+\frac{rf}{n}<2\sqrt{\frac{mc}{n}:\frac{rh}{n}}$, so daß wiederum die auf die Mündung der Saugröhre reducirten Höhen des Kolbenzuges und des schädlichen Raums in Rechnung gebracht würden: allein alsdenn erhält man nicht allein $\frac{rb}{n}$ statt b, wie vorhin, sondern überdem auch $\frac{rh}{n}$ statt h. Also ist es bey diesen Untersuchungen nicht allgemein verstattet, statt eines Saugwerks ein andres zu betrachten, das aus dem vorigen entstehet, wenn man die Höhen des Kolbenzuges und schädlichen Raums

auf

auf die Mündung der Saugröhre reducirt. Dies hat **Parent** allemal gethan, und **Belidor** thut es auch: allein eben deßwegen bedarf ihr Vortrag einiger Verbesserung. Wenn der schädliche Raum mit der Saugröhre allemal einerley Weite hätte; so hätte es seine Richtigkeit, daß die Höhe des Kolbenzuges auf die Weite der Saugröhre reducirt werden müßte: allein dieser Fall kömmt in der Anwendung gar nicht vor. Gewöhnlich ist die Weite des schädlichen Raums und des Kolbenzuges einerley, und alsdenn bedarf es gar keiner Reduction, weil beyde Räume sich nun wie ihre Höhen verhalten. Der körperliche Raum der Saugröhre kömmt bey dieser Rechnung gar nicht, sondern allein ihre Höhe in Betrachtung, weil bey gleicher Federkraft der im schädlichen Raum und im Raum des Kolbenzuges ausgebreiteten Luft das Wasser auf einerley Höhe stehen bleibt, die Saugröhre mag weit oder eng seyn. Die Federkraft dieser Luft aber hängt bloß von dem Verhältniß des noch leeren Theils im schädlichen Raum gegen den Raum des Kolbenzuges ab, und gar nicht von der Größe des körperlichen Raums der Saugröhre.

13. §.

Es scheint, daß beyde angeführte Schriftsteller, **Parent** sowohl, als **Belidor**, diesen Umstand übersehen haben: sie könnten sonst nicht die allgemeine Regel geben, daß die Höhen des Kolbenzuges und schädlichen Raums *allemal* auf die Mündung der Saugröhre reducirt werden müßten. Statt dessen, daß hier im 10. §. die Höhe BN gesucht ist, berechnet **Belidor** a. a. O. 933 §. die Höhe ZN, da denn, wenn die Rechnung richtig ist, beyde Wege auf einerley Resultat führen müssen. Er setzt die Proportion an $z + c - x : z - x = a : a - x$, und bey ihm ist a das, was hier h heißt, z ist die Summe der Höhen der Saugröhre und des schädlichen Raums, $x = ZN$. Allein eigentlich verhält sich der körperliche Raum AN zum körperlichen Raum CN $= a : a - x$, und nach der bisherigen Bezeichnung wäre der körperliche Raum AN $= nb + fr + mc - nb - r\,(x - b) = mc + rf - r\,(x - b)$, und der Raum CN $= rf - r\,(x - b)$, also $mc + rf - r\,(x - b) : rf - r\,(x - b) = h : h - x$, oder $\frac{mc}{r} + f + b - x : f + b - x = h \cdot h - x$. Vergleicht man diese Proportion mit der belidorischen, so siehet man wohl, daß beyde überein kommen, wenn man z statt $f + b$, c statt $\frac{mc}{r}$, und a statt h schreibt: allein auf solche Art muß z die Summe der Höhe der Saugröhre, und der wahren nicht der reducirten Höhe des schädlichen Raums, und c die auf die Weite des schädlichen Raums nicht der Saugröhre reducirte Höhe des Kolbenzuges bedeuten, also die wahre Höhe desselben, wenn der Raum des Kolbenzuges und der schädliche Raum gleich weit sind, die Saugröhre mag eben so weit, oder enger seyn. Die erwähnte Proportion giebt die Gleichung $(mc + r\,(b + f - x)\,(h - x) = r\,(b + f - x)\,h$, woraus $x^2 - (\frac{mc}{r} + b + f)\,x = -\frac{mch}{r}$, also $x = \frac{1}{2}(\frac{mc}{r} + b + f) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\frac{mc}{r} + b + f^2) - \frac{mch}{r}}$ folgt. Im 10. §. war BN $= s$, also ist nun $x = b + s$, und $s = x - b$. Setzt man aber $x - b$ statt s in der für s gefundenen Gleichung des 10. §., so kömmt die jetzt gefundene Gleichung heraus, daß also beyde Rechnungen richtig überein treffen. Wird z statt $b + f$, c statt $\frac{mc}{r}$, und a statt h gesetzt, so hat man $x = \frac{1}{2}(z + c) \pm \sqrt{(\frac{1}{4}(z + c^2) - ac)}$, eben so wie Belidor a. a. O. den Werth für x findet, obgleich der-

derselbe vermöge der eben vorgetragenen Erinnerungen davon eine unrichtige Anwendung macht. Weil allemal $x > b$ seyn muß vermöge der Voraussetzung, so muß vor der Wurzelgröße das Zeichen (+) gebraucht werden, wenn $\frac{1}{2}(z + c) < b$ ist, obgleich Belidor sagt, man müsse allemal das Zeichen (—) brauchen, so lange die Wurzelgröße möglich ist. Diese und die übrigen schon erwähnten Unrichtigkeiten haben daher ihren Ursprung, weil **Belidor** sich durch die Aehnlichkeit dieser Pumpe der mittlern Art, mit der Pumpe der unvollkommensten Art hat verführen lassen, was von der letztern gilt, ohne die nöthige Einschränkung auf die erste anzuwenden, und weil er nicht bedacht hat, daß hier bey gegenwärtiger Untersuchung der schädliche Raum eigentlich das werde, was bey der Untersuchung über die Pumpe der unvollkommensten Art die Saugröhre war. **Parent** und **Belidor** unterscheiden übrigens ganz richtig die beyden Fälle voneinander, wenn $c + f > b$ ist, oder nicht, und geben für den letztern Fall die Vorschrift, daß wenn von diesen dreyen Stücken c, f, b, zwey gegeben seyn, und das dritte gesucht werde, die Rechnung nach den Regeln des 9. §. angestellt werden müsse. Belidor sagt a. a. O. 927. §. daß in der Verschiedenheit dieser Fälle eben der Knoten der parentischen Theorie stecke: allein er selbst erkläret sich nicht mit der nöthigen Deutlichkeit über den Grund der Verschiedenheit dieser Fälle, der hier im 10. §. deutlich vor Augen gelegt ist. Beyde geben indessen auch für den Fall, wenn $c + f > b$ ist, die an sich richtige Regel, daß das Saugwerk alsdenn nur seine Vollkommenheit habe, wenn die Wurzelgröße in der zuletzt gefundenen Gleichung unmöglich, also $c + f + b > 2\sqrt{cb}$ sey.

14. §.

Die Höhen des schädlichen Raums f und des Kolbenzuges c sind gegeben, beyde sollen gleich weit seyn, und man sucht die Höhe der Saugröhre b.

Aufl. Man suche den Quotienten $\frac{ch}{c+f}$, und vergleiche denselben mit der Summe $c+f$. Wenn der erwähnte Quotient nicht kleiner als $c+f$ ist, so wird erfordert, daß $b < \frac{ch}{c+f}$ sey. (9. §.) Dafern aber der gedachte Quotient kleiner als $c+f$ ist, so muß $c+f+b < 2\sqrt{ch}$, seyn, also muß man $b < 2\sqrt{ch} - c - f$ nehmen.

Parent giebt folgendes Exempel. Es sey die Höhe des reducirten Kolbenzuges 8 Fuß, des schädlichen Raums 12 Fuß. Das Verhältniß zwischen der Weite des Stiefels und der Saugröhre ist nicht angegeben. Nimmt man an, es sey wie 2 : 1, so sind die wahren Höhen des Kolbenzuges und schädlichen Raums 4 Fuß und 6 Fuß. Nun wird der Quotient $\frac{ch}{c+f} = 12\frac{4}{5}$, und diese Zahl ist größer als $c+f = 10$. Daher genügt es, die Höhe der Saugröhre etwas kürzer als $12\frac{4}{5}$ Fuß zu nehmen. **Parent** und **Belidor** sehen dies Exempel so an, als wenn es zum zweyten Fall gehöre, weil die Summe beyder reducirten Höhen des Kolbenzuges und schädlichen Raums 20 ist, und diese Zahl den Quotienten $12\frac{4}{5}$ übertrift. Deßwegen suchen sie b aus der Formul $b < 2\sqrt{ch} - c - f$, welcher Ausdruck = 12 wird. Dies Resultat ist nun zwar von dem vorigen nicht sonderlich verschieden, indessen war die fernere Rechnung nicht nöthig. In dem reducirducirten Saugwerk muß die Saugröhre kleiner als 12 Fuß seyn. Denn wenn sie 12 Fuß wäre, so würde das Wasser in der Höhe von $\frac{1}{2}(c+f+b) = 16$ Fuß, also vier Fuß hoch über dem Ventil hängen bleiben. In dem natürlichen Saugwerk kann die Saugröhre volle 12 Fuß hoch seyn, weil $\frac{1}{2}(c+f+b) = 11$ ist, und im 10. §. das dortige $s = \frac{1}{2}(c+f-b) = -1$ negativ seyn würde.

15. §.

Die Höhen der Saugröhre *b*, und des Kolbenzuges *c* sind gegeben, man sucht die Höhe des schädlichen Raums, wenn derselbe eben soweit als der Stiefel seyn soll.

Aufl. Man suche den Quotienten $\frac{c(h-b)}{b}$, addire dazu die Höhe des Kolbenzuges c, und vergleiche die Summe mit der Höhe der Saugröhre b. Dafern diese Summe nicht größer als b ist; so ist der gefundene Quotient $\frac{c(h-b)}{b}$ die Gränze, welche f nicht übertreffen darf: widrigenfalls muß $c+f+b < 2\sqrt{ch}$, also $f < 2\sqrt{ch} - b - c$ seyn.

Es sey z. E. $c = 4$ Fuß, $b = 12\frac{4}{5}$ Fuß, so wird $\frac{c(h-b)}{b} = 6$. Hiezu $C = 4$ addirt kömmt 10 und dies ist weniger, als $12\frac{4}{5} = b$. Also muß $f < 6$ seyn, und weiter bedarf es keiner Rechnung. Wenn aber $\frac{m}{n} = 2$ wäre, und man wollte nach Belidors Vorschrift rechnen, so müßte man $c = 8$ Fuß nehmen, und dies würde den Quotienten $\frac{c(h-b)}{b} = 12$ Fuß geben, da dann $12 + 8 > 12\frac{4}{5}$ ist. Also würde die Aufgabe zum zweyten

Fall gehören, und man fände $f < 11\frac{1}{5}$. Dies wäre denn die Gränze, welche die reducirte Höhe des schädlichen Raums nicht übertreffen müßte. Die wahre Höhe müßte kleiner als $5\frac{6}{10}$ seyn.

16. §.

Die Höhe der Saugröhre b und des schädlichen Raums f sind gegeben: man sucht die Höhe des Kolbenzuges c, noch in der Voraussetzung, daß Stiefel und schädlicher Raum gleich weit sind.

Aufl. Man suche den Quotienten $\frac{fb}{h-b}$, addire dazu f und vergleiche die Summe mit b, falls diese Summe nicht größer als b ist, so muß $c > \frac{fb}{h-b}$ genommen werden. Dafern aber das Gegentheil statt hat, so muß $c+f+b < 2\sqrt{ch}$ seyn, also $c^2 + 2(f+b)c + (f+b^2) < 4hc$, und $c^2 - (4h - 2f - 2b)c < -(f+b^2)$. Dies giebt $c < 2h - f - b \pm \sqrt{((2h-f-b^2) - (f+b^2))}$, oder $c < 2h - f - b \pm \sqrt{2h} . \sqrt{2(h-f-b)}$. Weil nun allemal $f+b < h$ ist, so ist die Wurzelgröße allemal möglich: und weil eben diese Wurzelgröße kleiner ist, als $2h - f - b$; so sind beyde gefundene Gränzen von c positiv. Mit diesen beyden Gränzen hat es nun eigentlich folgende Bewandniß. Es muß

$$c - (2h - f - b) < \pm \sqrt{((2h - f - b^2) - (f + b^2))}$$

seyn. Das sind zwey Sätze, und der eine ist dieser

$$c - (2h - f - b) < -\sqrt{((2h - f - b^2) - (f + b^2))}.$$

Da nun allemal $c < h$ ist, und $f + b < h$, so sind diese beyden Werthe negativ, wie erfordert wird, aber eben deßwegen ist wirklich

$$(2h-f-b)-c > \surd((2h-f-b^2)-(f+b^2)),$$

Also $c > 2h-f-b-\surd((2h-f-b^2)-(f+b^2))$.

Der andre von den obgedachten Sätzen ist

$$c-(2h-f-b) < +\surd((2h-f-b^2)-(f+b^2)).$$

Hier mag die voranstehende Größe positiv, oder negativ seyn, so folgt allemal daraus, es sey

$$c < 2h-f-b+\surd((2h-f-b^2)-(f+b^2)).$$

Demnach giebt diese Rechnung zwo Gränzen, zwischen welchen c genommen werden muß, und **Parent** hat ganz recht, wenn er sagt, daß jede Zahl, die zwischen diesen Gränzen fällt, der Frage ein Genüge leiste, obgleich **Belidor** a. a. O. 938. §. das Gegentheil sagt, und nur den kleinsten von beyden Werthen, als den eigentlich gesuchten gelten lassen will. Es hat zwar seine Richtigkeit, daß wegen andrer Ursachen, die von der übrigen mechanischen Einrichtung der Pumpe abhängen, gewöhnlich ein Werth genommen wird, welcher der kleinsten Gränze am nächsten kömmt: allein davon ist hier die Frage nicht, und beyde Gränzen geben eigentlich die vollständige Auflösung der gegenwärtigen Aufgabe: ja man darf schlechterdings nicht die Höhe des Kolbenzuges der kleinsten Gränze gleich setzen, dafern das Saugwerk nicht stecken soll, und **Belidor** hätte nicht sagen sollen, daß man **wohl thue**, wenn man c etwas größer nehme, sondern vielmehr, daß man c etwas größer nehmen müsse. Uebrigens aber behält es hier ebenfalls bey den gegen alle beyde schon verschiedenemal gemachten Erinnerungen sein Bewenden. Durch c und f müssen nicht auf die Weite der Saugröhre reducirte Höhen, sondern die wahren Höhen des Kolbenzuges und schädlichen Raums verstanden werden, wenn beyde gleich weit sind. Wären beyde ungleich weit, so müßte man durch c die auf die Weite des schädlichen Raums, nicht der Saugröhre reducirte Höhe des Kolbenzuges verstehen.

Es

Es sey z. E. die Höhe des schädlichen Raums 6 Fuß, die Höhe der Saugröhre $12\frac{4}{5}$ Fuß, so findet man den Quotienten $\frac{fb}{h-b} = 4$. Da nun $b + 4 < 12\frac{4}{5}$, so bedarf es keiner weitern Rechnung, und man weis, daß $c > 4$ Fuß seyn müsse. Wäre $\frac{m}{n} = 2$, so müßte man nach Parents und Belidors Regel $f = 12$ Fuß nehmen, also $\frac{fb}{h-b} = 8f$. Da nun $12 + 8 > 12\frac{4}{5}$ ist, so müßte man mit Parent so rechnen

$$2(h-f-b) = 14,4$$
$$\sqrt{2(h-f-b)} = 3.8$$
$$\sqrt{2h} = 8.$$
$$\sqrt{2h}\sqrt{2(h-f-b)} = 30,4.$$

$$h-f-b = 7,2$$
$$h = 32$$
$$2h-f-b = 39,2$$
$$+\ 30$$

die eine Gränze 8, 8
die andre Gränze 69, 6.

Die Gränzen der wahren Höhe des Kolbenzuges wären also 4, 4, und 34, 8 Fuß. Daß übrigens jede zwischen den Gränzen 8, 8, und 69, 6 fallende Zahl der Bedingung $c + f + b < 2\sqrt{ch}$ ein Genüge thue, davon kann man sich durch Versuche überzeugen, wenn man eine willkührliche Zahl, die zwischen diesen Gränzen fällt, statt c setzt, z. E. $c = 40$. Dies giebt $c + f + b = 64\frac{4}{5}$, und $2\sqrt{ch} = 75,3$, also $c + f + b < 2\sqrt{ch}$. Jede andre Zahl aber, die außerhalb dieser Gränzen fällt, giebt, wenn man sie statt c setzt, $c + f + b > 2\sqrt{ch}$. Setzt man z. E. $c = 70$, so wird $c + f + b = 94,8$, und $2\sqrt{ch} = 94,6$. Setzt man $c = 8$, so findet man $c + f + b = 32,8$, und $2\sqrt{ch} = 31,9$.

Un⸗

Untersuchung

Ueber die Bewegung des Wassers im Stiefel, nachdem schon alle Luft aus dem schädlichen Raum ausgetreten ist.

17. §.

Die bisherigen Untersuchungen betrafen die Vollkommenheit eines Saugwerks in Ansehung der anfänglichen Bewegung des Wassers in der Saugröhre und dem Stiefel, bevor es den Kolben erreicht: und nunmehr soll die im 2. §. vorläufig überhaupt erwähnte Untersuchung darüber angestellet werden, mit welcher Geschwindigkeit der Kolben bewegt werden müsse, damit die Pumpe bey jedem Hub ohne Zeitverlust soviel Wasser gebe, als der Raum des Kolbenzuges fassen kann. Um diese Untersuchung zu erleichtern, stelle man sich vorläufig eine gerade vertical stehende cylindrische Röhre vor, die mit ihrem untern offenen Ende x im Wasser steht. Sie kann übrigens entweder durchgängig von gleicher Weite, oder auch aus mehrern Stücken von verschiedener Weite zusammengesetzet seyn. Diese sey etwa 32 Fuß hoch, oben bey Q verschlossen, und in derselben keine Luft befindlich; so erhellet, daß der Druck der Atmosphäre das Wasser in diese Röhre hinauf treiben werde. Es sey in der Röhre irgendwo bey C eine Klappe, oder sonst ein Hindernis befindlich, welches das Wasser über C hinauf zu steigen verhindert, und solchergestalt nunmehr in Ruhe erhält. Wird nun in einem gewissen Augenblick die Klappe C geöfnet, so fängt das Wasser sogleich an, höher zu steigen, und man kann nun fragen: mit welcher Geschwindigkeit es in dem Augenblick steige, da es eine gegebene Höhe ZM erreicht. Wenn OB und BQ Stiefel und Saugröhre eines Saugwerks sind, so befindet sich das Wasser in dem Stiefel bey jedem neuen Kolbenzuge unter eben den Umständen. Indem der Kolben herab steigt, und sich das Stiefel-Ventil schließet, wird alles Wasser unter dem Kolben zur Ruhe gebracht, und bis in den Augenblick, da er seine niedrigste Stelle C erreicht, ist er das, was eine Klappe bey C wäre, die das Wasser weiter hinauf zu steigen hinderte. So wie der Kolben aber wieder hinauf zu steigen anfängt, gestattet er auch dem unter ihm befindlichen Wasser nachzufolgen.

18. §.

Lehnsatz. Das Gefäß (3. Fig.) $ABEO$ ist bis auf eine gewisse Höhe mit Wasser gefüllt, und hängt mit einer Röhre $OpqR$ zusammen, so daß das Wasser aus dem Gefäß in die Röhre treten kann. Außer der Schwere drückt noch auf die Oberfläche desselben AB eine gegebene Kraft, und treibt es aus dem Gefäß in die Röhre hinein, die hier von unbestimmter Länge angenommen wird. Man setze, im Gefäß habe anfangs das Wasser bis an AB, in der Röhre aber bis an den Querschnitt ab gestanden, und es habe um im Gefäß den Weg $G\gamma$, in der Röhre aber den Weg cg durchlaufen: man sucht die Geschwindigkeit der vordern Fläche PQ.

Aufl. Wenn G S K c g die centrische Linie derjenigen Querschnitte CD, HI, MN, u. s. f. des Wassers ist, welche die Eigenschaft haben, daß alle in denselben liegende Wassertheilchen mit gleicher Geschwindigkeit fortgehen nach Richtungen, die mit der jedesmaligen Lage der centrischen Linie übereinkommen, und die centrische Linie selbst sowohl auf diesen Querschnitten, als auch auf den äußern Flächen CD, PQ, senkrecht ist, so sey $CD = Y$, $PQ = w$, ein unbestimmter Querschnitt $MN = x$, das zugehörige

Stück

Stück der centrischen Linie $cKS = s$, und $cg = w$. Wenn ferner K der niedrigste Punct der centrischen Linie, und HI durch diesen Punct horizontal gezogen ist, $\gamma\delta$ und $g\,d$ aber vertical sind; so sey $\gamma\delta = x$, $g\,d = u$. Wenn überdem der Druck auf CD so groß ist, als das Gewicht einer Wasser-Säule auf eben dieser Grundfläche in der Höhe p, und der gesuchten Geschwindigkeit die Höhe q zugehört, so hat man nach den Grundsätzen der Hydraulik $\frac{y^2 - w^2}{y^2}\, q + \frac{w\,dq + 2\,q\,dw}{dw} \int \frac{ds}{z} = p + x - u.$

Das Integral $\int \frac{ds}{z}$ muß so genommen werden, daß es für $s = -w$ verschwindet, und man muß nach der Integration statt s die Länge der ganzen centrischen Linie CKSγ setzen.

19. §.

Es sey das Gefäß (4. Fig.) $ABEO$ ein grades vertical stehendes Prisma oder ein grader Cylinder, und jeder Querschnitt desselben $= k$. Die Röhre $Opq\,R$ sey aus zweenen graden Cylindern $OmnR$ und $opqr$ zusammengesetzt, deren Axen Kk und kg in grader Linie liegen, und deren Querschnitte n und m sind: man sucht die Geschwindigkeit der Fläche pq, wenn alles übrige so bleibt, wie es im vorigen §. angenommen worden.

Aufl. Bey diesen Voraussetzungen hat man $Y = k$, $w = m$, $dw = dm = 0$, weil m constant ist. Ferner sey $Kk = \beta$, $k\,c = f$, der Winkel $gkd = \eta$, so ist $gd = u = (\beta + f + w)\,\sin\eta$. Um nun das Integral $\int \frac{ds}{z}$ zu finden, suche man es zuerst für die Röhre $opqr$, so hat man $\int \frac{ds}{z} = \frac{s + w}{m}$. Man setze $s = ck = f$, so ist dies Integral $= \frac{f + w}{m}$ für die Röhre $opqr$. Für beyde

Röhren zusammen wird es $= \frac{f+w}{m} + \frac{\beta}{n}$, und weil hier $\delta\gamma = x$ ist, so wird es für die ganze Masse des Wassers $= \frac{f+w}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{x}{k}$. Es sey $\delta G = a$, so ist $x = a - G\gamma = a - \frac{mw}{k}$, also $\int \frac{ds}{z} = \frac{f+w}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{a}{k} - \frac{mw}{k^2}$. Alle diese Werthe setze man in die Gleichung des vorigen §. so wird $\frac{k^2 - m^2}{k^2} q + \frac{m\,dq}{dw}$ $(\frac{f+w}{m} + \frac{\beta}{n} + \frac{a}{k} - \frac{mw}{k^2} = p + a - \frac{mw}{k} - (\beta + f + w) \sin \eta$.

20. §.

Alle übrige Stücke bleiben so wie im vorigen §. angenommen ist, nur ist das Gefäß *ABEO* in Vergleichung mit der Röhre *O p q R*. sehr weit, und der Druck auf *CD* beständig von einerley Größe: man soll die Gleichung zwischen *q* und *w* finden.

Aufl. Vermöge der Voraussetzung kann man $\frac{m}{k} = o$ setzen. Weil überdem p eine beständige Größe ist; so setze man $p + a = A$, und man erhält die Gleichung $q\,dw + (f + w + \frac{m\beta}{n})$ $dq = A\,dw - (\beta + f + w)\,dw \sin\eta = (A - (\beta+f) \sin\eta)$ $dw - w\,dw \sin\eta$. Um das Integral zu finden, setze man $f + w + \frac{m\beta}{n} = u$, also $w = u - f - \frac{m\beta}{n}$, und $dw = du$, so erhält man

$$q\,du + u\,dq = (A - (\beta + f)\sin\eta)\,du - (u - f - \frac{m\beta}{n})\,du \sin\eta.$$

oder

oder $q\,du + u\,dq = (A + (\frac{m\beta}{n} - \beta)\, \sin\eta)\, du - u\,du \sin\eta$.

Kürze halber sey $A + (\frac{m\beta}{n} - \beta)\,\sin\eta = B$, so giebt die Integration $uq = Bu - \frac{1}{2}\,uu\,\sin\eta + C$. Wenn nun $w = o$ ist, so wird $u = f + \frac{m\beta}{n}$, und zugleich $q = o$. Dies giebt die beständige Größe $C = \frac{1}{2}\,(f + \frac{m\beta}{n})^2\,\sin\eta - B\,(f + \frac{m\beta}{n})$, folglich ist $u.q = B\,(u - f - \frac{m\beta}{n} + \frac{1}{2}\,((f + \frac{m\beta}{n})^2 - uu)\,\sin\eta$. Da nun $u - f - \frac{m\beta}{n} = vv$ ist, so wird $B\,(u - f - \frac{m\beta}{n}) = (A + (\frac{m\beta}{n} - \beta)\,\sin\eta)\,vv$. Ferner wird $uu = (f + \frac{m\beta}{n})^2 + 2\,(f + \frac{m\beta}{n})\,vv + vvvv$, und wenn man diese Werthe gehörig substituirt, so ist die gesuchte Gleichung zwischen q und vv gefunden.

21. §.

Weil bey dieser Auflösung die Größe des Winkels $gkd = \eta$ noch unbestimmt geblieben ist, so siehet man wohl, daß auch der Fall darunter begriffen sey, wenn die Röhre OpqR vertical steht. Aber alsdenn ist es gleichviel, ob diese Röhre außerhalb des Gefäßes befindlich ist, und unmittelbar an demselben anliegt, so daß das Wasser unten bey O hinein treten kann, oder, ob die Röhre innerhalb des Gefäßes im Wasser steht, wie in der 5. Figur. Man hat nun $\sin\eta = 1$, und dieser Voraussetzung gemäß wird $u.\,q = (A + \frac{m\beta}{n} - \beta)\,vv - (f + \frac{m\beta}{n})\,vv - \frac{1}{2}\,vv\,vv = (A - \beta - f)\,vv - \frac{1}{2}\,vv\,vv$; also $q = \frac{(A - \beta - f)\,n\,vv - \frac{1}{2}\,n\,vv^2}{n\,(f + vv) + m\beta}$.

Man setze $\beta + f = b$, also $f = b - \beta$, so erhält man $q = \frac{(A-b)\,nvv - \frac{1}{2}n\,vv^2}{n(b-\beta+vv)+m\beta}$, oder $q = \frac{(A-b)\,vv - \frac{1}{2}vv^2}{b+\frac{m-n}{n}\beta+vv}$.

Dafern aber $b + vv = x$, also $vv = x - b$ gesetzt wird, so hat man $q = \frac{A(x-b) - \frac{1}{2}(xx-bb)}{x+(m-n)\beta : n}$, oder $q = \frac{nA(x-b) - \frac{1}{2}n(xx-bb)}{nx+(m-n)\beta}$.

Wenn beyde Stücke der Röhre $OpqR$ gleich weit sind, also zusammen nur eine einzige Röhre ausmachen, so hat man $m = n$, also $q = \frac{(A-b)\,vv - \frac{1}{2}vv^2}{b+vv}$, oder auch $q = \frac{nA(x-b) - \frac{1}{2}n(xx-bb)}{nx} = A - \frac{1}{2}x - \frac{(A-\frac{1}{2}b)b}{x}$.

22. §.

Die ganze Länge der Saugröhre, (5. Fig.) nebst den Höhen des schädlichen Raums, und des Kolbenzuges eines Saugwerks sind gegeben, nebst den Querschnitten des Stiefels und der Saugröhre: man sucht die Geschwindigkeit des Wassers im Stiefel, nachdem es um eine gegebene Höhe CM über den niedrigsten Kolbenstand gestiegen ist. Vorausgesetzt; daß der Kolben der Bewegung des Wassers gar nicht hinderlich sey.

Aufl. Diese Aufgabe ist nur ein besonderer Fall der vorigen. Gewöhnlich steht die Saugröhre in einem Wasserbehälter, der in Vergleichung mit der Röhre sehr weit ist. Die Atmosphäre drückt auf die Oberfläche des Wassers in diesem Behälter, und treibt das Wasser über die niedrigste Stelle des Kolbens im Stiefel hinauf, sobald der Kolben hinauf gezogen wird. Man setze also die Länge der ganzen Saugröhre $= \beta$, die Höhe des schädlichen Raums $= f$, die Tiefe, um welche die Saugröhre im Wasser steht, $OZ = a$, die Federkraft der Atmosphäre $= h$, die Höhe, um welche das Wasser im Stiefel gestiegen ist, $CM = w$, die Querschnitte des Stiefels $= m$, und der Saugröhre $= n$, die gesuchte Geschwindigkeit $= \sqrt{q}$, so ist $q = \frac{(a+h-\beta-f)w - \frac{1}{2}vv^2}{f+w+\frac{m}{n}\beta}$; oder auch $q = \frac{(A-b)\,w - \frac{1}{2}w^2}{b+\frac{m-n}{n}\beta+w}$, wenn man A statt $a+h$, und b statt $\beta+f$ schreibt: oder $q = \frac{A(x-b) - \frac{1}{2}(xx-bb)}{\frac{m-n}{n}\beta + x}$, wenn man $b+w = x$ setzt. In dem Fall, wenn Stiefel und Saugröhre gleiche Weite hätten, also $m = n$ wäre, erhielte man $q = \frac{(A-b)\,w - \frac{1}{2}w^2}{b+w}$, oder $q = A - \frac{1}{2}x - \frac{(A-\frac{1}{2}b)\,b}{x}$.

23. §.

Belidor stellt in der Architectura Hydraul. im III Kap. des III Buchs 906. u. f. §. §. eben diese Untersuchung an: allein er bringt ein ganz andres Resultat heraus. Man hatte sonst gewöhnlich $q = \frac{n^2}{m^2}(h-x)$ angenommen, wenn durch x die Höhe ZM des Wassers über die untere Wasserfläche YZ verstanden wird, und Belidor meldet a. a. O. im 907. §., daß er selbst diese Bestimmung der Geschwindigkeit des Wassers im Stiefel für die richtige gehalten habe, bis er endlich bey Berechnung einer von ihm erfundenen Maschine den Fehler eingesehen, und verbessert hätte. Allein ihm sind bey Verfertigung seines vortreflichen Werks, welches im Jahr 1737. zu Paris herausgegeben ist,

ist, die von den beyden Herrn Bernoulli um eben die Zeit gemachten neuen Entdeckungen in der Hydraulik noch nicht bekannt gewesen, und seine Auflösung dieser Aufgabe ist eben so wenig richtig, als die alte von ihm getadelte Auflösung. Er findet $\sqrt{q} = \frac{n}{m}(\sqrt{h} - \sqrt{x})$, also $q = \frac{n^2}{m^2}(h - 2\sqrt{hx} + x)$, und Muschenbroeck trägt in der Introd. ad Phil. Nat. T. II. §. 2148 - 2152. p. 878 - 880. ebenfalls diese belidorische Theorie vor. Beyde verstehen alsdenn durch h die Höhe einer Wassersäule, deren Gewicht dem Druck der Atmosphäre gleich ist, und durch x die Höhe ZM des Wassers über den Wasserpaß YZ. Aber diese Bestimmung hat mit der vom Herrn **Belidor** getadelten ältern Bestimmung verschiedene Hauptfehler gemein. Einmal hängt keine derselben vom niedrigsten Kolbenstande ab, da es doch gewiß nicht einerley ist, in welcher Höhe das Wasser seine Bewegung von der Ruhe anfängt. Fürs zweyte müßte nach beyden Bestimmungen $q = 0$ seyn, wenn $x = h$ ist, oder das Wasser müßte nur etwa 32 Fuß hoch steigen können, welches wiederum falsch ist. Endlich müßte noch fürs dritte die Geschwindigkeit des steigenden Wassers im ersten Anfang des Kolbenhubs am größten seyn, und hiernächst beständig abnehmen. Daß auch dies fehlerhaft sey, werden die folgenden Untersuchungen mit mehrern ergeben. Ich habe beym Nachschlagen niemand gefunden, der diese Theorie von den Pumpen aus den nunmehr richtig erwiesenen Gesetzen der Hydraulik hergeleitet hätte. Die Herrn **Johann** und **Daniel Bernoulli** haben die Gründe davon erfunden. Beyde aber haben davon keine weitere Anwendung auf die Saugwerke gemacht. Ihre Untersuchungen über die Geschwindigkeit, womit das Wasser in einer verticalen durchaus gleich weiten cylindrischen Röhre aufwärts steigt, wenn die Röhre in einem sehr weiten Wasserbehälter steht, und anfangs die Höhe des Wassers

in

in der Röhre kleiner ist, als die Höhe des Wassers im Behälter, haben mit der gegenwärtigen Theorie die nächste Verwandschaft. M. s. Jo. Bernoulli Hydraul. P. I. §. 24. Oper. T. IV. pag. 419. Dan. Bernoulli Hydrod. Sect. VII. §. 16. p. 136. Wenn man die Vergleichung anstellen will, so wird man finden, daß die Resultate ihrer Rechnungen mit den hieselbst im 21. §. heraus gebrachten Gleichungen überein kommen, in wie weit die beyderseitigen Voraussetzungen einerley sind.

24. §.

Die Höhe zu finden, worauf das Wasser im Stiefel steigen könnte, wenn der Stiefel von unbestimmter Höhe wäre, und der Kolben so schnell stiege, daß derselbe die Bewegung des Wassers nicht hinderte.

Aufl. Das Wasser wird so lange steigen, bis $q = o$ wird. Man setze demnach $q = \frac{(A - b)\, w - \frac{1}{2} w^2}{b + \frac{n - n}{n} \beta + w} = o$, so erhält man $w^2 - 2\,(A - b)\, w = o$, und beyde Wurzeln dieser Gleichung sind $w = o$, und $w = 2\,(A - b)$. Es mußte aber vermöge der Voraussetzung im Anfang der Bewegung $q = o$ seyn, und daher kömmt der eine Werth $q = o$. Der andre $w = 2\,(A - b)$ ergiebt, daß das Wasser bis auf die Höhe $2\,(A - b)$ über die niedrigste Stelle des Kolbens hinauf steigen würde, wenn es der Kolben nicht hinderte.

So lange w zwischen diesen beyden Gränzen o und $2\,(A - b)$ bleibt, so lange ist q positiv, und q wächst anfangs mit w, nimmt aber hiernächst wieder ab. Dies ergiebt sich am deutlichsten aus der Differentialgleichung $dq = \frac{A - (b + w) - q}{f + w + \frac{m\beta}{n}}$, (20. §.) wo nun $\mathit{fin}\, \eta = 1$ ist. Dieser Ausdruck ist positiv, so lange

$A - (b + w) > q$ ist, folglich wächst q so lange, als diese Voraussetzung statt hat, und nimmt wieder ab, wenn $q > A - (b + w)$ wird. Die Geschwindigkeit des Wassers muß also am größten seyn, wenn $A - (b + w) = q$ ist, denn nun ist $dq = o$.

25. §.

Die größte Geschwindigkeit zu finden, die das im Stiefel hinauf steigende Wasser erreichen kann, nebst der Höhe, auf welche es steigen muß, bevor die Geschwindigkeit am größten wird.

Aufl. Es ist die der größten Geschwindigkeit zugehörige Höhe $q = A - (b + w)$, und der unbestimmte Werth von q ist $= \frac{(A - b) w - \frac{1}{2} w^2}{b + \lambda\beta + vv}$, wenn man Kürze halber $\frac{m - n}{n} = \lambda$ setzt. Beyde Werthe einander gleich gesetzt geben die Gleichung $A (b + vv) - (b + vv^2) + A\lambda\beta - \lambda\beta (b + vv) = (A - b) vv - \frac{1}{2} vv^2$, und daraus folgt

$$vv^2 + (b + \lambda\beta) vv = 2 (A - b) \lambda\beta + 2 (A - b) b,$$

folglich $vv = -(b + \lambda\beta) \pm \surd (\lambda^2 \beta^2 + 2A\lambda\beta + 2 (A - b) b)$.

Der negative Werth kann hier nicht gebraucht werden, sondern der positive ist der gesuchte. Und wenn derselbe statt vv in die Gleichung $\surd q = \surd (A - b - vv)$ gesetzt wird, so ergiebt sich die gesuchte größte Geschwindigkeit.

Weil sich der gefundene Werth von vv auch so ausdrücken läßt: $vv = \surd ((b + \lambda\beta^2) + 2 (A - b)(b + \lambda\beta)) - b + \lambda\beta$, so erhellet, daß allemal $vv < A - b$ sey, weil die Wurzelgröße kleiner als $b + \lambda\beta + (A - b)$ ist. Je kleiner indessen $A - b$ selbst in Vergleichung mit $b + \lambda\beta$ ist, desto näher kömmt die Wurzelgröße diesem Werth $b + \lambda\beta + (A - b)$ folglich kömmt zugleich

vv dem Werth $A - b$ desto näher. Bey der gewöhnlichen Einrichtung der Saugwerke findet diese Voraussetzung allemal statt, daß $b + \lambda\beta$ in Vergleichung mit $A - b$ ziemlich groß ist. Daher wird das in dem Stiefel hinauf steigende Wasser auch gewöhnlich so lange mit zunehmender Geschwindigkeit steigen, bis es mehrentheils 31 bis 32 Fuß hoch über die Oberfläche desjenigen Wassers erhaben ist, worinn die Saugröhre steht.

26. §.

Hiedurch wird also dasjenige bestättiget, was am Ende des 23. §. behauptet worden. Es ist falsch, daß das Wasser gleich vom Anfange mit abnehmender Geschwindigkeit steige: vielmehr erfolgt grade das Gegentheil, es steigt mit zunehmender Geschwindigkeit. Nur in dem einzigen Fall, wenn der Stiefel und die ganze Saugröhre gleich anfangs von Luft und Wasser leer wären, so würde die Geschwindigkeit des hinein tretenden Wassers aufs schnelleste, und fast augenblicklich bis zur größten anwachsen, und hiernächst wieder beständig abnehmen. Die größte Geschwindigkeit selbst wäre alsdenn $= \sqrt{A}$. Man müßte nämlich für diesen Fall $b = 0$ und $\beta = 0$ setzen. Dies giebt den Werth von $vv = 0$, welcher der größten Geschwindigkeit zugehört, und die größte Geschwindigkeit selbst $\sqrt{q} = \sqrt{A}$. Dies scheint den vorigen Voraussetzungen entgegen zu seyn, vermöge welcher $q = 0$ seyn mußte, wenn $vv = 0$ ist. Allein man muß sich hiebey erinnern, daß die bisherigen Rechnungen in der That nur Näherungen sind, und daß im 20. §. $\frac{m}{k} = 0$ gesetzt sey. Dafern man in der dortigen Differentialgleichung nur die in $\frac{m^2}{k^2}$ multiplicirten Glieder wegläßt, und $fn\,\eta = 1$ setzt, wie hier erfordert wird, so hat man $q\,dvv + (f + vv + \frac{m\beta}{n} + \frac{ma}{k})\,dq = (A - \beta - f)\,dvv - (\frac{m}{k} + 1)\,vvdvv$. Man setze überdem der jetzigen Voraussetzung gemäß $\beta = 0$, $f = 0$, $m = n$, so wird $qdvv + (\frac{na}{k} + vv)\,dq = Advv - (\frac{n}{k} + 1)\,vv\,dvv$. Ferner sey $\frac{na}{k} + vv = u$, also $vv = u - \frac{na}{k}$, und $dvv = du$, so erhält $qdu + udq = (A + \frac{na}{k})\,du - (\frac{n}{k} + 1)\,udu$, und dies giebt $uq = (A + \frac{na}{k})\,u - \frac{1}{2}(\frac{n}{k} + 1)\,u^2 + C$. Für $vv = 0$ ist $u = \frac{na}{k}$, und $q = 0$, also $C = -\frac{na.A}{k}$. Wenn man nun den Werth $u = \frac{na}{k} + vv$ wieder herstellt, und die höhern Potenzen von $\frac{n}{k}$ wegläßt, so erhält man $q\,(\frac{na}{k} + vv) = A\,vv - \frac{1}{2}\,(n + k)\,vv^2$, folglich $q = \frac{A\,k\,vv - \frac{1}{2}\,(n + k)\,vv^2}{n\,a + k\,vv}$. Diese Gleichung giebt $q = 0$ für $vv = 0$, wie erfordert wird: so bald aber nur ein sehr kleiner Werth statt vv gesetzt wird, ist sehr nahe $q = A$.

Wenn nun ferner, um die größte Geschwindigkeit zu finden, $dq = 0$ gesetzt wird, so hat man $q = A - (\frac{n}{k} + 1)\,vv$, und dieser Werth dem vorigen gleich gesetzt giebt $(\frac{na}{k} + vv)\,(A - (\frac{n}{k} + 1)\,vv) = A\,vv - \frac{1}{2}(\frac{n}{k} + 1)\,vv^2$, also $\frac{1}{2}\,(n + k)\,vv^2 +$

$n\,a\,vv$

$n\,a\,vv = n\,a\,A$, woraus $vv^2 + \frac{2\,n\,a}{n+k}\,vv = \frac{2\,n\,a\,A}{n+k}$, also $vv = \frac{\surd\,(n^2\,a^2\,(n+k) + 2\,n\,a\,A) - n\,a}{n+k}$ folgt. Demnach ist vv ungemein klein, wenn k sehr groß ist, und für $k = \infty$, würde $vv = 0$ seyn. Eigentlich ist also in dem jetzt betrachteten Fall die der größten Geschwindigkeit zugehörige Höhe $= A - \frac{1}{k}\,(\surd\,(n^2\,a^2\,(n+k) + 2\,n\,a\,A) - n\,a)$.

27. §.

Es bleiben alle gegebene Stücke, (5. Fig.) wie im 22. §. man sucht die Zeit, worinn das Wasser im Stiefel um eine gegebene Höhe CM = vv steigt.

Aufl. Es ist $d\,t = \frac{dvv}{\surd q}$, wenn also der Werth von q aus dem 22. §. gebraucht wird, so erhält man $dt = \frac{dvv\,\surd\,(b + \lambda\beta + vv)}{\surd\,(A - b)\,vv - \frac{1}{2}\,vv^2)}$. Um das Integral hievon ohne weitläuftige Rechnung so genau zu finden, als bey dergleichen practischen Untersuchungen genügen kann, darf man nur erwägen, daß in der Anwendung auf das Saugwerk allemal $b + \lambda\beta$ beträchtlich größer sey, als vv, weil vv nicht leicht über 4 Fuß seyn wird, b und β aber gewöhnlich einige 20 Fuß groß sind, auch meistentheils $\lambda > 1$ ist. Setzt man nun Kürze halber $b + \lambda\beta = B$, so ist beynahe $\surd\,(B + vv) = \surd B$. Eigentlich ist $\surd\,(B + vv) > \surd B$, und $\surd\,(B + vv) < \surd B + \frac{vv}{2\surd B}$, da denn diese letztere Betrachtung dazu dienet, ein paar Gränzen zu finden, zwischen welchen t fällt, die sehr wenig voneinander werden unterschieden seyn.

Man nehme also zuerst $\sqrt{(B+vv)} = \sqrt{B}$ an, und setze $dt = \frac{d\,vv\sqrt{2B}}{\sqrt{(2cvv - vv^2)}}$, wo $c = a - b$ ist; so giebt die Integration $t = A\,\mathit{sin}\,v.\,\frac{vv}{c} \times \sqrt{2B}$, wo keine Constans nöthig ist, weil t und vv zugleich verschwinden müssen. Ist also g die Höhe, wovon ein schwerer Körper in der ersten Secunde frey herab fällt, so hat man $t = \frac{\sqrt{2B}}{2\sqrt{g}}\,A\,\mathit{sin}\,v.\,\frac{vv}{A - b}$, und dieser Ausdruck giebt die gesuchte Zeit in Secunden, jedoch nicht ganz genau, sondern etwas sehr weniges zu klein. Will man finden, wieviel der Fehler höchstens betragen kann, so setze man $dt = \frac{d\,vv\sqrt{2B}}{\sqrt{(2cvv - vv^2)}} + \frac{vv\,d\,vv}{\sqrt{2B}\sqrt{(2cvv - vv^2)}}$, und man erhält durch die Integration $\int \frac{vv\,d\,vv}{\sqrt{(2cvv - vv^2)}} = c.\,A\int v\,\frac{vv}{c} - \sqrt{(2cvv - vv^2)}$. Weil nun $\sqrt{(2cvv - vv^2)} = c\,\mathit{sin}\,A\,\mathit{sin}\,v.\,\frac{vv}{c}$, so wird dies Integral $= c\,(A\,\mathit{sin}\,v\,\frac{vv}{c} - \mathit{sin}\,A\,\mathit{sin}\,v.\,\frac{vv}{c})$, folglich $t = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{2}g}\,A\,\mathit{sin}\,v\,\frac{vv}{c} + \frac{c}{2\sqrt{2gB}}\,(A\int v.\,\frac{vv}{c} - \mathit{sin}\,A\int v\,\frac{vv}{c})$. Da nun dieser Werth von t schon etwas weniges zu groß ist, so hat man zwo Gränzen, zwischen welchen der eigentliche Werth von t enthalten ist.

28. §.

Bey eben den gegebenen Stücken, wie im vorigen §. die Geschwindigkeit zu finden, womit der Kolben bewegt wer-

werden muß, damit das Saugwerk ohne Zeitverlust bey jedem Kolben-Hub soviel Wasser gebe, als der Raum des Kolbenzuges fassen kann.

Aufl. Die Geschwindigkeit des Kolbens muß so groß seyn, daß derselbe in eben der Zeit um die Höhe des Kolbenzuges steigt, binnen der das Wasser im Stiefel eben diese Höhe erreicht. Man suche also nach dem vorigen §. die Zeit, binnen der das Wasser vom niedrigsten bis zum höchsten Kolbenstande steigt, und setze diese $= t$. Ist nun die Höhe des Kolbenzuges $= vv$, die Geschwindigkeit des Kolbens $= v$, so ist die Zeit, binnen der derselbe den Weg $= vv$ zurück legt, $= \frac{vv}{v}$, weil er mit gleichförmiger Bewegung steigt. Diese Zeit muß $= t$ seyn; also hat man $v = \frac{vv}{t}$.

Es sey z. E. $\beta = 21\frac{1}{2}$ Fuß, $f = \frac{1}{2}$ Fuß, also $b = 22$ Fuß $vv = 2$ Fuß, der Durchmesser der Mündung des Stiefels $= 6$ Zoll, der Mündung der Saugröhre $= 2\frac{1}{6}$ Zoll, also $m : n = 36 : \frac{169}{36} = 1296 : 169$, und $\frac{m-n}{n} = \frac{1127}{169} = 6,668639$; so wird $b + \frac{m-n}{n}\beta = 165,375738 = B$, und $\sqrt{2B} = 18,1865$. Wenn man nun $h = 31$ Fuß setzt, und $a = 6$ Fuß ist, so wird $A = a + h = 37$ Fuß, also $A - b = c = 15$ Fuß, und $\frac{vv}{c} = \frac{2}{15} = 0,1333333$. Dieser Quersinus gehört zum Winkel von $29°56'$; und man erhält $A.\ 29°56' = 0,522427$. Setzt man nun voraus, daß das gebrauchte Maaß das französische sey, so ist $g = 15,1$ Fuß, und $2\sqrt{g} = 7,7716$. Demnach wird $t = \frac{\sqrt{2B}}{2\sqrt{g}} A\,\mathit{fv}\,\frac{vv}{c} = 1,223$ Secunden, so daß diese Zeit noch nicht völlig $1\frac{1}{4}$ Se-

cun-

cunde beträgt. Wollte man sich davon versichern, daß die Zeit genau genug gefunden sey, so müßte man noch den Ausdruck $\frac{c}{2\sqrt{g}\sqrt{2B}}(A\,\int v\frac{vv}{c} - \mathit{fin}\,A\,\mathit{fin}\,v\,\frac{vv}{c})$ berechnen. Man findet aber

$$A\,\mathit{fin}\,v\frac{vv}{c} = 0,522427$$

$$\mathit{fin}\,A\,\mathit{fin}\,v\,\frac{vv}{c} = 0.498992$$

die Differenz $= 0.023435$

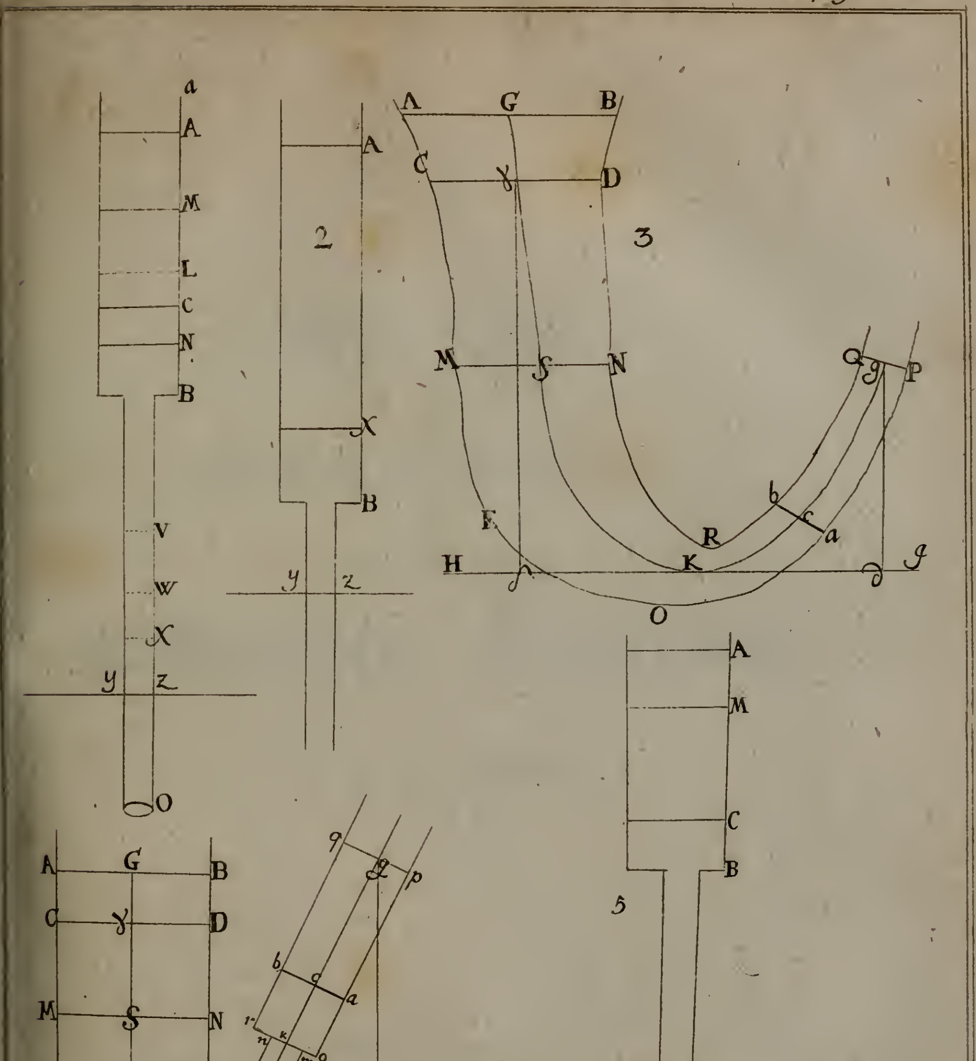
und die übrige Rechnung ergiebt für den erwähnten Ausdruck 0, 00248 Sec. Da nun der Fehler in Bestimmung der Zeit nach der ersten Formul nicht so groß ist, als diese Zahl; so ist jene Rechnung so weit es hier erfordert wird, zulänglich richtig. Man muß indessen wegen der Friction und andrer Hindernisse der Bewegung diese Zeit etwas weniges größer annehmen, als die Rechnung giebt, und man kann sie im gegenwärtigen Exempel auf $\frac{1}{4}$ Secunden schätzen. Dies würde also für die Geschwindigkeit des Kolbens $1\frac{3}{5}$ Fuß oder 1 Fuß $7\frac{1}{5}$ Zoll in einer Secunde geben.

29. §.

Dies Exempel ist aus Belidors Architectura Hydraulica III Buch, III Cap. 911. §. genommen, woselbst aber außer den Querschnitten des Stiefels, und der Saugröhre keine andre data angegeben sind, als die größte Kolbenhöhe von der Oberfläche des Wassers, welches das Saugwerk herauf ziehen soll = 18 Fuß, und die Höhe des Kolbenzuges = 2 Fuß. Die Tiefe, um welche die Saugröhre unter Wasser steht, ist hier 6 Fuß groß angenommen, daher kommen die Höhen über dem Wasser mit den Belidorschen überein. Belidor braucht nach seiner Theorie nicht mehr

data,

data, und nach derselben wäre die Geschwindigkeit des Wassers in der Saugröhre in dem Augenblick, da es die Höhe von 18 Fuß erreicht = 10, 2979 Fuß in einer Secunde, und die Geschwindigkeit des Wassers im Stiefel = $\frac{10,\ 2979 \times 169}{1296}$ = 1, 34 Fuß, also 1 Fuß 4 Zoll. Nach der alten von H. Belidor getadelten Regel würden auf 28 Fuß für diese Geschwindigkeit heraus kommen, welches also eine ungemein fehlerhafte Regel ist. Wollte man aber nach der richtigen Formul des 22. §. $q = \frac{(A - b)vv - \frac{1}{2}vv^2}{b + \frac{m-n}{n}\beta + vv}$ die Geschwindigkeit berechnen, womit das Wasser den höchsten Kolbenstand erreicht; so würde man 3, 18 Fuß finden. Hieraus ergiebt sich, daß Belidor jene sonst gebräuchlich gewesene Regel für die Bestimmung der Geschwindigkeit des Kolbens mit Recht tadle, weil sich wirklich bey einer so grossen Geschwindigkeit des Kolbens der Raum des Kolbenzuges nicht ganz mit Wasser würde anfüllen können. Seine eigene Regel giebt zwar auch eine unrichtige Bestimmung der Geschwindigkeit des Wassers im Stiefel. In Absicht der andern Anwendung aber, welche er davon macht, um die Geschwindigkeit des Kolbens zu finden, kömmt sie der Sache ungemein viel näher. Sie giebt gewöhnlich die Geschwindigkeit des Kolbens noch etwas kleiner als nöthig ist, da sie im Gegentheil nach der andern Regel sehr viel zu groß würde gefunden werden. Wie sehr übrigens beyde Regeln von der richtigen Bestimmung der Geschwindigkeit des Wassers abweichen, fällt am meisten in die Augen, wenn man nach dem 25. §. die größte Geschwindigkeit desselben berechnet, und die Höhe vv, um welche es steigen müßte, wenn es bis zu dieser Geschwindigkeit gelangen sollte. Man findet diese größte Geschwindigkeit im gegenwärtigen Exempel von 6, 14 Fuß in einer Secunde, und das Wasser müßte 14,375 Fuß hoch über den niedrigsten Kolbenstand steigen, wenn es zu dieser Geschwindigkeit gelangen sollte. Für diesen einzigen Fall giebt die vormalige Regel die Geschwindigkeit des Wassers richtig, Belidors Regel aber giebt sie viel zu klein.


2
3
5

Versuch
eines
evidenten Beweises
der
allgemeinen
mechanischen Grundsätze.

von
W. J. G. Karsten.
1768.

Versuch

eines

evidenten Beweises der allgemeinen

mechanischen Grundsätze.

Es scheinet fast, daß es leichter sey, die Gränzen solcher Wissenschaften, dergleichen die physisch-mathematischen in ihrem gegenwärtigen Zustande sind, zu erweitern, als den Vortrag ihrer ersten Grundlehren recht evident zu machen. Man hat in der Mechanik seit Galiläi Zeiten ungemein grosse Progressen gemacht, und dies ist vornehmlich durch Hülfe der Differential- und Integralrechnung geschehen. Indessen weis man, daß die Fundamental-Gleichung der ganzen Mechanik $dc = pdt$ dem H. Dan. Bernoulli noch nicht so erwiesen zu seyn schien, daß sie verdiene in die Klasse nothwendiger Wahrheiten aufgenommen zu

werden.

werden. Ich weis, daß dies grosse Mathematiker veranlasset hat, Beweise zu suchen, wodurch die Nothwendigkeit dieser Gleichung außer Zweifel gesetzt werden möchte, und ich gestehe einem jeden der bisher bekannten Beweise sein Gewicht zu. Mich hat unter allen, die ich gelesen habe, des H. Karstners Beweis in seinen Anfangsgründen der höhern Mechanik am meisten befriediget. Eben dieser Karstnerische Vortrag einer Theorie, worüber ich schon damals, wie sich das angeführte Buch erhielt, verschiedentliche Untersuchungen angestellet hatte, hat mich veranlasset, dieselbe Untersuchung aufs neue vorzunehmen.

2. §.

Es ist so lange noch nicht, daß man angefangen hat, die Statik und Mechanik als besondere Wissenschaften abzuhandeln, und einer jeden derselben ihre bestimmten Gränzen zu setzen. Soviel mir bekannt ist, haben die Herrn de la Hire, Maclaurin, und Karstner die Gesetze des Gleichgewichts fester Körper allererst zur überzeugenden Richtigkeit gebracht, und das giebt der Statik ihre vorzüglichste Schönheit, wenn man wie diese Männer alle Gesetze des Gleichgewichts aus dem Begrif der Pressungen herleitet, ohne die Betrachtung von Zeit, Raum und Geschwindigkeit im geringsten zu Hülfe zu nehmen. Ich habe den Versuch gemacht, beym Vortrag der Theorie von den beschleunigenden Kräften ein Verfahren anzubringen, das demjenigen ähnlich ist, dessen sich obgedachte Geometer mit so glücklichem Erfolg bedienet haben, die Theorie vom Hebel zu beweisen, und ich werde es in der folgenden Abhandlung der churfürstlichen Akademie zur Prüfung vorlegen. Ich setze hiebey die Galiläische Theorie von dem freyen Fall schwerer Körper als bekannt voraus. Durch Betrachtung des Falles schwerer Körper lernt man am besten alle diejenigen

gen Umstände kennen, welche bey bewegenden Kräften und ihren Wirkungen erwogen werden müßen. Das Wort Kraft ist so sehr zweydeutig und wird von vielen Schriftstellern so sehr unbestimmt gebraucht, daß es nicht zu verwundern ist, wenn dies zu allerhand Verwirrungen Anlaß gegeben hat.

Gleichförmig beschleunigende Kräfte.

3. §.

Es sey AB die Verticallinie, worinn eine schwere Masse, die hier als ein Punct betrachtet wird, frey herab fällt, und dieser Punct falle in der ersten Secunde von A bis C. Setzt man nun $AC = g$, so ist am Ende der ersten Secunde des Puncts Geschwindigkeit $= 2g$. Man ist gewohnt so zu reden, die Schwere habe den Punct C während der ersten Secunde die Geschwindigkeit $2g$ mitgetheilt, und diese Redensart ist der Sache sehr wohl angemessen. Wenn nämlich die Schwere am Ende der ersten Secunde zu wirken aufhörte, so würde der Punct in der zweyten Secunde den Weg $= 2g$ vermöge seiner Trägheit gleichförmig zurück legen. Die Schwere hat den Punct in diesen Zustand der Bewegung versetzt, denn wenn sie gar nicht gewirkt hätte; so wäre der Punct in dem Zustand der Ruhe geblieben.

4. §.

Von eben dieser Wirkung der Schwere rührt es her, daß die bewegte Masse in der ersten Secunde um den Weg $AC = g$ fortrückt. Zwar hat die Schwere diese Masse eigentlich nicht durch den ganzen Weg AC unmittelbar fortgeschoben, sondern ein Theil dieses Weges ist von dieser Masse, wegen ihrer Trägheit zurück

gelegt

gelegt worden. Hätte die Schwere zu wirken aufgehört, nachdem die erste Helfte der Secunde verflossen war, so hätte die Masse schon die Geschwindigkeit g gehabt, sie hätte in der ersten Helfte den Weg $\frac{1}{4}$ g und in der zweyten Helfte den Weg $\frac{1}{2}$ g zurückgelegt. Daher würde eine besondre Rechnung nöthig seyn, wenn man das, was von der Schwere unmittelbar herrührt, von demjenigen unterscheiden wollte, was der Trägheit zukömmt. Allein es ist bey dieser Untersuchung nicht nöthig soweit zu gehen. Die Masse würde gar nicht von der Stelle gekommen seyn, wenn die Schwere gar nicht gewirkt hätte, und eben die Masse würde auch in der ersten Secunde nicht den ganzen Weg AC zurück gelegt haben, wenn die Schwere nicht während dieser ganzen Secunde ununterbrochen gewirkt hätte. Demnach rührt es doch von der Schwere her, nicht allein, daß die Masse in Bewegung kömmt, sondern auch grade diesen und nicht einen kleinern Weg in der ersten Secunde zurück legt. Und in dieser Bedeutung ist es nicht unrichtig geredet, wenn man sagt, die Schwere treibe die Masse in der ersten Secunde um den Weg AC fort. In eben der Bedeutung soll demnach diese Redensart in der Folge gebraucht werden.

5. §.

Die Masse falle ferner in zwo Secunden bis D, so ist $AD = 4g$, und $CD = 3g$; wenn man also $CE = 2g$ nimmt, so ist dies der Weg, um welchen die Masse allein wegen der Trägheit fortgerückt wäre, wenn die Schwere während der zweyten Secunde nicht gewirkt hätte. Aber wegen fortdaurender Wirkung der Schwere rückt die Masse in der zweyten Secunde um das Stück $ED = g = AC$ weiter. Fällt eben die Masse in drey Secunden bis F, so ist $F = 9g$ und $DF = 5g$. Ohne Zuthun der Schwere wäre die Masse in der dritten Secunde um das Stück

DG

DG = 4 g weiter gerückt, wegen der Schwere aber geht die Masse außerdem noch um das Stück GF = ED = AC weiter. Eben so geht es in jeder folgenden Secunde. Das Stück, um welches die Masse wegen fortdaurender Wirkung der Schwere jedesmal weiter rückt, als sie allein wegen der Trägheit gerückt wäre, ist immer von einerley Größe, allemal so groß, als der Weg, durch welchen die Masse in der ersten Secunde fällt.

6. §.

Man muß demnach zweyerley Wirkung der Schwere unterscheiden. Sie bewegt einen Körper entweder wirklich, oder sie drückt ihn gegen einen Widerstand, der die Bewegung hemmet. Beyde Wirkungen sind nur wegen der äußern Umstände unterschieden, unter welchen sich der Körper befindet. Denn eigentlich ist dasjenige, was den Körper bewegt, völlig einerley mit dem, was ihn gegen den Widerstand preßt, der die Bewegung aufhält: und wenn der Körper wirklich sinkt, so wirkt die Schwere in jedem Punkt seines Weges eben so auf ihn, wie sie alsdenn thut, wenn der Körper auf einer horizontalen Tafel ruhig liegt. Eben das, was wir im letzten Fall den Druck nennen, theilt der Masse, nachdem der Widerstand gehoben ist, in einer gewissen Zeit eine gewisse Geschwindigkeit mit, indem sie die Masse von einer gewissen Höhe herab treibt. Diese letztere Wirkung der Schwere heißt ihre **Beschleunigung**, so wie jene Wirkung am füglichsten ihre Pressung, oder ihr Druck heißt. Will man **beschleunigende Kraft** der Schwere, **drückende Kraft** der Schwere sagen, so hat man seine Freyheit, nur muß man nicht vergessen, daß beydes völlig einerley Kraft sey, die nur deswegen verschiedene Nämen führt, weil ihre Wirkungen auf diese beyden verschiedenen Arten in die Summe fallen.

7. §.

Die Schwere theilt jeder frey herab fallenden Masse in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten mit, und das Stück des Weges, durch welchen die Masse im folgenden Zeittheilchen weiter rückt, als allein wegen der Trägheit geschehen wäre, ist allemal eben so groß, als es im vorhergehenden eben so grossen Zeittheilchen war. In diesem Stück ist nicht jede andre bewegende Kraft der Schwere ähnlich. Es giebt Kräfte, die der bewegten Masse im zweyten Zeittheilchen mehr oder weniger Geschwindigkeit als im ersten eben so grossen Zeittheilchen mittheilen. Diese heißen **ungleichförmig wirkende** oder **veränderliche Kräfte**, so wie im Gegentheil die Schwere nach der galiläischen Hypothese eine **beständige**, oder **gleichförmig beschleunigende Kraft** ist.

8. §.

Wenn nun eine andre Kraft V, wie die Schwere eine Masse gleichförmig beschleuniget, so wird die Bewegung dieser Masse nach völlig ähnlichen Gesetzen, wie die Bewegung frey fallender schwerer Körper erfolgen; nur mit dem Unterschied, daß die Kraft V ihrer Masse in einer gewissen Zeit, z. E. einer Secunde eine größere oder kleinere Geschwindigkeit mittheilt, als ihr die natürliche Schwere in eben der Zeit mittheilen würde. Man nehme für diese Zeit eine Secunde an, eine schwere Masse falle in der ersten Secunde von der Höhe g, und erlange die Geschwindigkeit k, in der Zeit t aber die Geschwindigkeit c. Eine eben so grosse Masse aber gehe von der Kraft V getrieben durch den Weg G in der ersten Secunde fort, und erlange die Geschwindigkeit K, in der Zeit t aber die Geschwindigkeit C; so ist $c = kt = 2gt$, und $C = Kt = 2Gt$. **Nun verhalten sich die**

Be-

Beschleunigungen zwoer Kräfte ohne Zweifel wie die Geschwindigkeiten, die sie gleichen Massen in gleichen Zeiten mittheilen. Wenn demnach die Beschleunigung der Schwere $= \alpha$, die Beschleunigung der Kraft V aber $= A$ ist, so hat man $\alpha : A = 2gt : 2Gt = g : G$, weil t einerley ist. Sind nun s und S die Wege, welche die Masse entweder von der Schwere oder der Kraft V getrieben in der Zeit t durchläuft; so ist $s = gtt$, $S = Gtt$, also auch $s : S = g : G$. Daher verhalten sich die Beschleunigungen der Schwere und der Kraft V, wie die Wege, durch welche einerley Masse entweder von der Schwere, oder der Kraft V getrieben, in einerley Zeit fortrücken würde.

9. §.

Diese Vergleichung der Beschleunigungen zwoer Kräfte hat sehr viele Aehnlichkeit mit der Vergleichung der Geschwindigkeiten zwoer Massen, die sich gleichförmig bewegen. Man hat von der Beschleunigung einer bewegenden Kraft einen bestimmten Begrif, wenn man weis, wie weit eine gegebene Masse wegen der Wirkung dieser Kraft in einer bestimmten Zeit, z. E. einer Secunde fortrückt. Dieser zurückgelegte Weg ist eigentlich die Beschleunigung selbst nicht. Allein wenn die Acceleration einer solchen Kraft = 1 gesetzt wird, vermöge welcher eine Masse in der ersten Secunde einen Fuß fortgetrieben wird; so wird die Acceleration einer andern Kraft 2mal, 3mal größer seyn, u. s. f. welche dieselbe Masse in einer Secunde 2 Fuß, 3 Fuß weit forttreibt. Deswegen werde ich hier durch die Beschleunigung einer Kraft V, die eine gegebene Masse wie die Schwere gleichförmig beschleuniget, den Weg verstehen, durch welchen diese Masse, wegen Wirkung der Kraft V in einer Secunde fortrückt.

Wenn also G die Beschleunigung ist, und s der in der Zeit t von der Masse zurück gelegte Weg, so hat man $G = \frac{s}{tt}$.

10. §.

Dafern die Bewegung einer Masse A, worauf die Kraft V wirkt, von einem Widerstande gehemmet wird, so wird die Kraft V diese Masse gegen den Widerstand auf eine ähnliche Art pressen, wie die Schwere diese Masse gegen einen solchen Widerstand pressen würde. Dieser Druck sey nun so stark als er wolle, so wird man ihn doch allemal mit einem gewissen Gewicht vergleichen können, d. i. mit dem Druck einer gewissen schweren Masse, die auf einer horizontalen Tafel ruhig liegt. Es wird sich ein Gewicht angeben lassen, das die Tafel eben so stark preßt.

11. §.

Eine Kraft V treibt die Masse A nach der Richtung A α, und eine andre Kraft W treibt eben die Masse A zugleich nach der grade entgegen gesetzten Richtung A $\dot{\alpha}$. **Wenn nun die Beschleunigungen beyder Kräfte gleich sind, so bleibt die Masse A in Ruhe.** Denn beyde Kräfte würden der Masse A in gleichen Zeiten gleiche und entgegen gesetzte Geschwindigkeiten mittheilen, also kann A gar nicht in Bewegung kommen.

Dafern also zwo Kräfte gleiche Massen gleich stark beschleunigen, so werden sie diese Massen gegen einen Widerstand, der die Bewegung gleich im Anfang hemmet, gleich stark pressen. Der Widerstand thut dasselbe, was jede dieser Kräfte thun würde, wenn sie der andern entgegen gesetzt wäre. Es ist aber offenbar, daß diese Kräfte gegen einander gleich stark drücken.

12. §.

Ungleiche Massen werden von der Schwere gegen einen Widerstand ungleich stark gepreßt, und zwar so, daß der Druck den Massen proportional ist, ob sie gleich bey wirklich erfolgter Bewegung in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten erlangen. Auch dies gilt allgemeiner von jeder Kraft, die gleiche Massen gleich stark beschleuniget. **Wenn auf ungleiche Massen solche Kräfte wirken, und die Bewegung durch einen Widerstand gehemmet wird, so verhalten sich die Pressungen, wie die Massen.** Diese ungleichen Massen aber, wenn sie nicht gehindert werden, erlangen in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten.

13. §.

Wenn die Beschleunigungen der Kräfte V und W nach den Richtungen A *a* und A *α* im 11. §. nicht gleich sind, wenn V der Masse A in einer Secunde oder jeder andern Zeit eine größere Geschwindigkeit mittheilt, als W eben der Masse in eben der Zeit mitzutheilen vermögend ist, **so kann A nicht in Ruhe bleiben.** Die Kraft W vermindert nur die von V gewirkte Geschwindigkeit, und die Masse A erlangt in jedem Augenblick eine Geschwindigkeit, die so groß ist, als der Ueberschuß der größern Geschwindigkeit über die kleinere.

Diese Kräfte also werden die Masse A ungleich stark pressen. Und hieraus folgt, wie im 11 §., **wenn zwo Kräfte gleiche Massen ungleich stark beschleunigen, so pressen sie diese Massen gegen einen Widerstand, der die Bewegung hemmet, ungleich stark, und zwar diejenige stärker, welche stärker beschleuniget.**

14. §.

Wenn demnach die Masse A von zwoen Kräften nach entgegen gesetzten Richtungen getrieben wird, und die Masse bleibt in Ruhe; oder welches einerley ist: wenn zwo Kräfte die Masse A nach entgegen gesetzten Richtungen gleich stark drücken, so sind die Accelerationen beyder Kräfte gleich groß, d. i. die Geschwindigkeiten würden gleich seyn, die jede Kraft für sich dieser Masse in einerley Zeit mittheilen würde: auch würden die Räume gleich seyn, durch welche die Masse A in einerley Zeit entweder nach der einen oder der andern Richtung fortgehen würde.

Es fließt hieraus die fernere Folge: wenn zwo Kräfte gleiche Massen gleich stark gegen einen Widerstand pressen, so theilen sie diesen Massen gleiche Accelerationen mit, wenn der Widerstand gehoben wird.

Wenn aber zwo Kräfte gleiche Massen ungleich stark drücken, so wird der stärkere Druck stärker, der schwächere weniger beschleunigen.

15. §.

Der Satz des 12. §. ist auch umgekehrt wahr. Wenn zwo Massen ungleich sind, auf beyde aber solche Kräfte drücken, die den Massen proportional sind, so daß gleiche Theilchen dieser Massen gleiche Pressungen leiden, so erlangen diese Massen, wenn sie nicht gehindert werden, in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten.

16. §.

Es sey DE eine ebene horizontale Tafel, auf derselben liegt die Masse A, und ihr Gewicht ist = P. Würde die Tafel plötz-

lich

lich weggenommen, so würde A in der ersten Secunde um die Tiefe $Aa = g = 15, 625$ Rh. Fuß sinken, und in a die Geschwindigkeit $k = 2g$ erlangt haben. Es sey B eine andre Masse ohne Schwere, die der Masse A gleich ist. Eine Kraft V drücke diese Masse ebenfalls senkrecht gegen DE, so muß B gleichfalls vertical herunter sinken, wenn DE weggenommen wird. Wenn nun V die Masse B gleichförmig beschleuniget, B aber am Ende der ersten Secunde bis b kömmt, und daselbst die Geschwindigkeit $c = 2k$ erlangt, so ist $Bb = 2Aa$ (8. §.) $= 2g$. Aber in eben diesem Fall ist auch $V = 2P$. Dies leztere will so viel sagen: **So lange die horizontale Tafel** *DE* **die Bewegung hemmet, wird** *V* **die Masse** *B* **gegen** *DE* **doppelt so stark drücken, als die natürliche Schwere eine eben so grosse Masse A gegen gegen** *DE* **drückt.**

Beweis. Ein Druck, der = P wäre, aber A nach entgegen gesetzter Richtung $A\alpha$ preßte, würde A in Ruhe erhalten. Aber ein Druck = P, der B nach entgegen gesetzter Richtung $B\beta$ preßt, hält B nicht in Ruhe. Er würde der Masse B in der Zeit t die Geschwindigkeit $c - k$ (13. §.) $= k$ mittheilen. Nun wird B gegen DE mit einer Kraft $= V - P$ gepreßt, und es ist soviel, als wenn B das Gewicht $V - P$ hätte. Weil dieser Druck der Masse B in der Zeit t nach gehobenem Widerstande die Geschwindigkeit k, und P einer eben so grossen Masse A in eben der Zeit eben die Geschwindigkeit mittheilt; so ist $V - P = P$, (11. §.) folglich $V = 2P$.

17. §.

Wenn die übrigen Voraussetzungen bleiben, aber *B* **am Ende der ersten Secunde die Geschwindigkeit** $3k$ **erlangte, so ist** $V = 3P$.

Be-

Beweis. Ein Druck $= P$, der die Masse B nach entgegen gesetzter Richtung $B\beta$ treibt, vermindert wie vorhin den Druck V, so daß B nach Bb nur mit der Gewalt $V - P$ gepreßt wird. Eben die Masse B aber erlangt in der Zeit t die Geschwindigkeit $3k - k$ (13. §.) $= 2k$, also ist $V - P = 2P$ (16. §.) und $V = 3P$.

18. §.

Man siehet leicht, daß aus diesem Satz wieder folge, wenn B am Ende der ersten Secunde die Geschwindigkeit $4k$ erlangte, daß $V = 4P$ seyn müßte. Ueberhaupt aber erhellet daraus die Richtigkeit dieses Satzes: **Dafern $V = nP$ seyn muß, wenn B von V getrieben die Geschwindigkeit nk erlangte; so muß $V = (n+1)P$ seyn, wenn B die Geschwindigkeit $(n+1)k$ in einer Secunde erlangen würde.**

Es ist also allgemein wahr: wenn V der Masse B in der ersten Secunde die Geschwindigkeit nk mittheilt; so ist $V = nP$, oder, wenn der Kraft V Beschleunigung $= ng$ ist, so ist $V = nP$.

19. §.

Wenn eine Kraft V die Masse B gleichförmig beschleuniget, und das Gewicht einer schweren eben so grossen Masse A ist $= P$; so verhält sich $V : P$ wie die Beschleunigung der Kraft V zur Beschleunigung der Schwere.

Beweis. Die Beschleunigung der Schwere sey, wie bisher, $= g$ und die Beschleunigung der Kraft V sey $= G$. Verhält sich nun $G : g = m : n$, so daß m und n ein paar ganze Zahlen sind, so ist $mg = nG$. Wenn aber eine Kraft X eine Masse $=$ A bewegt, und ihre Beschleunigung $= mg$ ist, so ist $X = mP$ (18. §.)

18. §.) Und wenn eine Kraft Y eine eben so grosse Masse B bewegt, ihre Beschleunigung aber $= n$ G ist; so ist $Y = n V$. (18. §.) Da nun $mg = n G$ war, so wird $X = Y$ (11. §.) folglich $mP = nV$, und $V : P = m : n$, oder $V : P = G : g$. So erhellet die Richtigkeit des Satzes, wenn das Verhältniß $G : g$ ein Rationalverhältniß ist. Daraus läßt sich aber leicht schließen, daß eben dasselbe noch wahr seyn müsse, wenn gleich $G : g$ ein Irrationalverhältniß wäre.

Es sey $G : g > m : n$ und $G : g < m + 1 : n$, so werden sich diese Gränzen, zwischen welchen das Verhältniß $G : g$ fällt, nach Gefallen verengern lassen. Nun mag man diese Gränzen einander so nahe rücken, als man will, so wird allemal das Verhältniß $V : P$ zwischen eben den Gränzen enthalten seyn. Ist nämlich $G > \frac{m}{n} g$ und $G < \frac{m+1}{n} g$, so ist zugleich $V > \frac{m}{n} P$ und $V < \frac{m+1}{n} P$, wie groß auch m und n genommen werden. Denn vermöge des geführten Beweises sind $\frac{m}{n} g$ und $\frac{m+1}{n} g$ die Beschleunigungen der Kräfte $\frac{m}{n} P$ und $\frac{m+1}{n} P$. Wäre aber einmal $V < \frac{m}{n} P$, so wäre $G < \frac{m}{n} g$, und wenn einmal $V > \frac{m+1}{n} P$ wäre, so müßte $G > \frac{m+1}{n} g$ seyn (14. §.) beydes gegen die Voraussetzung. Also ist auch in diesem Fall $G : g = V : P$.

20. §.

Die Proportion $V : P = G : g$ läßt sich auch so ausdrücken $\frac{V}{P} : 1 = G : g$. Wenn man demnach die Beschleunigung der Schwere als die Einheit betrachtet, und mit derselben die Beschleunigung einer jeden andern Kraft vergleicht, so kann man $G = \frac{V}{P}$ setzen, und dies giebt die gewöhnliche Regel.

Man findet die Beschleunigung einer Kraft V, welche die Masse B bewegt, wenn man diese Kraft durch das Gewicht einer Masse, die eben so groß als B ist, dividirt.

Dieser Quotient giebt also nicht eigentlich die Beschleunigung der Kraft V in dem Verstande des 9. §, er drückt vielmehr nur aus, wieviel mal die Beschleunigung der Kraft V größer oder kleiner als die Beschleunigung der Schwere sey.

Weil die Massen verschiedener Körper sich wie ihre Gewichte verhalten, und man die Größe der Masse eines Körpers nicht anders als dadurch ausdrücken kann, daß man anzeigt, wie groß sein Gewicht nahe an der Erdfläche seyn würde; so drückt man die erwiesene Regel auch auf die Art aus: *man müße die Stärke des Drucks V durch die Masse B dividiren.* Man kann der Kürze wegen diese Sprache beybehalten, in der That aber muß nothwendig das Gewicht der Masse B verstanden werden; und wenn man die Größe der Masse B auf andre Art als durch ihr Gewicht ausdrücken könnte, und wirklich ausdrückte, so würde $\frac{V}{B}$ die Beschleunigung der Kraft V nicht ausdrücken, es wäre denn, daß man statt V ebenfalls eine Masse setzte, die das natürliche Gewicht V hätte. Wenn V durch ein eben so grosses Gewicht P ausgedrückt ist, und M das Gewicht der Masse B an der Oberfläche der Erde seyn würde, so ist bekannt, daß P die absolute Größe der bewegenden Kraft V, und $\frac{P}{M}$ ihre Beschleunigungsgröße genannt werde.

21. §.

21. §.

Die absolute Größe der beständigen Kraft *P* ist gegeben, welche die Masse *M* treibt, man sucht die Größe des Weges *s*, welchen *M* in der Zeit *t* zurück leget, nebst ihrer Geschwindigkeit *c* nach verflossener Zeit *t*.

Aufl. Wenn G die Beschleunigung der Kraft P ist, so hat man $s = G\,t\,t$, (9. §.) und $G = \frac{g\,P}{M}$ (20. §.) also $s = \frac{g\,P}{M}\,tt$. Ferner ist $c = 2\,G\,t = \frac{2\,g\,P}{M}\,t$.

Ungleichförmig beschleunigende Kräfte.

22. §.

Es sey die Masse M, welche die veränderliche Kraft P treibt, in der Zeit *t* durch den Weg AP fortgegangen, und rücke in dem folgenden Zeittheilchen T um das Stück Pπ weiter. Dafern nun die Kraft P in dem Augenblick, da die Masse M in P ankömmt, überall aufhörte zu wirken, so würde dennoch die Masse M einen Theil PQ dieses Weges mit der in P schon erlangten Geschwindigkeit gleichförmig durchlaufen haben, und es ist Qπ eigentlich der Weg, den die Masse wegen fortdaurender Wirkung der Kraft in der Zeit T noch zurück leget. Wäre die Kraft P während der ganzen Zeit T von eben der Größe geblieben, die sie im Anfang der Zeit T, oder am Ende der Zeit *t* hatte, so wäre die Masse M in dieser Zeit zwar weiter als Q bis *p* vorgerückt, und dann wäre $\frac{Qp}{TT}$ ihre Beschleunigung in dem Verstande des 9. §. Allein es ist nun Q p nicht mit Q π einerley, weil sich P während der Zeit T verändert hat. Dafern die Kraft P in der Zeit T größer geworden ist, so ist Q $\pi >$ Q p, widrigenfalls aber Q $\pi <$ Q p. So wie nun bey der ungleichförmigen Bewegung durch die Geschwindigkeit des bewegten Körpers für einen gegebenen Zeitpunct derjenige Weg verstanden wird, den die Masse in der folgenden Secunde durchlaufen würde, wenn die Bewegung von jetzt an sich nicht weiter änderte, und von diesem Augenblick an der Körper bloß vermöge seiner Trägheit fortgienge; so soll hier durch die **Beschleunigung einer veränderlichen Kraft** P für einen gegebenen Zeitpunct derjenige Weg verstanden werden, durch welchen die Masse in der folgenden Secunde weiter als wegen der Trägheit allein fortrücken würde, wenn während dieser Zeitsecunde die Kraft P eben so groß bliebe, als sie im Anfang derselben war. In diesem Verstande wäre also $\frac{Qp}{TT}$ die Beschleunigung der veränderlichen Kraft P für den letzten Augenblick der Zeit t.

23. §.

Es ist eine Gleichung zwischen t und s gegeben, wenn s den Weg bedeutet, den die Masse M, die von der veränderlichen Kraft P getrieben wird, in der Zeit t zurück leget: man sucht die Geschwindigkeit der Masse M nebst der Beschleunigung der Kraft P für jede gegebene Zeit t.

Aufl. Es sey AP $= s$ der in der Zeit t zurück gelegte Weg, und in dem folgenden Zeittheilchen $\triangle t$ sey M von P nach π gerückt, so ist s um das Stück P$\pi = \triangle s$ angewachsen, indem die Zeit t um $\triangle t$ größer geworden ist. Die in P erlangte Geschwindigkeit sey $= c$, und die in π erlangte Geschwindigkeit $= c'$ so ist $c' > c$. Wenn nun PQ der Weg ist, den die Masse M in der

Zeit

Zeit $\triangle t$ mit der Geschwindigkeit c gleichförmig zurück legen würde, so ist $c = \frac{PQ}{\triangle t}$. Aber $PQ < P\pi$ also ist $c < \frac{\triangle s}{\triangle t}$. Hätte die Masse M in P schon die Geschwindigkeit c' und wäre in der Zeit t von P nach q gleichförmig fortgegangen, so müßte $Pq > P\pi$ seyn, und es wäre $c' = \frac{Pq}{\triangle t}$, also $c' > \frac{\triangle s}{\triangle t}$. Zwischen diesen Gränzen c und c' ist also $\frac{\triangle s}{\triangle t}$ allemal enthalten, wie klein auch $\triangle t$ genommen wird. Beyde Gränzen nähern sich einander desto mehr, je mehr $\triangle t$ abnimmt, und werden gleich groß, wenn $\triangle t$ verschwindet. Folglich wird $c = \frac{ds}{dt}$.

In dem Augenblick, da die Masse M in P ankömmt, sey die Kraft, welche diese Masse beschleuniget, $= P$, und weil sich diese Kraft, während der Zeit $\triangle t$ ändert, so sey sie $= P$ am Ende der Zeit $\triangle t$, in dem Augenblick, da M in π ankömmt. Wenn nun diese Kraft während der Zeit $\triangle t$ keine Aenderung litte, so würde die Geschwindigkeit c in der Zeit $\triangle t$ um das Stück $\frac{2gP}{M}\triangle t$ wachsen (21. §.). Nimmt man aber an, daß P während der Zeit $\triangle t$ wächst, also $P' > P$ ist, so erhellet, daß $\frac{2gP}{M}\triangle t$ kleiner sey, als dasjenige Stück, um welches c in der Zeit $\triangle t$ wächst. Wird nun c' aus c, indem $t + \triangle t$ aus t wird, so ist $c' - c = \triangle c$ eigentlich dasjenige, um welches c während der Zeit $\triangle t$ grösser wird, und es ist $\triangle c > \frac{2gP}{M}\triangle t$, oder $\frac{\triangle c}{\triangle t} > \frac{2gP}{M}$. Wäre die bewegende Kraft im Anfange der Zeit $\triangle t$ schon $= P'$ gewesen, und hätte sich während dieser Zeit $\triangle t$ nicht geändert, so wäre c um das Stück $\frac{2gP'}{M}\triangle t$ gewachsen, und es erhellet, wie vorhin, daß $\triangle c < \frac{2gP'}{M}\triangle t$ oder $\frac{\triangle c}{\triangle t} < \frac{2gP'}{M}$ sey. Beyde Gränzen, zwischen welchen das Verhältniß $\frac{\triangle c}{\triangle t}$ fällt, nähern sich einander, wenn $\triangle t$ abnimmt, und gehen zusammen, wenn $\triangle t$ verschwindet. Daher ist des Verhältnisses $\frac{\triangle c}{\triangle t}$ Gränze $\frac{dc}{dt}$ $= \frac{2gP}{M}$, und die gesuchte Beschleunigung $\frac{P}{M} = \frac{dc}{2g\,dt}$.

Wenn $P' < P$ wäre, also P während der Zeit $\triangle t$ abnehme, so würde sich in diesen Schlüssen nichts weiter als der Umstand ändern, daß $\triangle c < \frac{2gP}{M}\triangle t$ und $\triangle c > \frac{2gP'}{M}\triangle t$ seyn müßte. Uebrigens würde daraus eben so wie vorhin $\frac{dc}{dt} = \frac{2gP}{M}$ folgen.

Vom Maas der Kräfte.

24. §.

Wenn es wahr ist, daß auf die Gleichungen des 21 und 23 §. die ganze Mechanik beruhet, so muß auch die Frage, **wie ein paar bewegende Kräfte sich gegen einander verhalten?** aus den bisher vorgetragenen Gründen zulänglich beantwortet werden können. Sind die Kräfte veränderlich, so kann man nur fragen, wie sie sich für einen gegebenen Zeitpunct gegen einander verhalten, und denn ist es eben soviel, als wenn man ein paar beständige Kräfte mit einander vergleicht, so daß die ganze

Vergleichung aus dem 21. §. folgt. Es ist soviel, als ob man fragt, wie stark die Kräfte in diesem Augenblick die bewegte Masse gegen einen Widerstand, der von jetzt an die Bewegung hemmete, pressen würden, wenn der Masse in eben dem Augenblick alle schon erlangte Geschwindigkeit genommen wäre. Diese Pressungen verhalten sich, wie die Bewegungen, so die Kräfte ihren Massen in gleichen Zeiten mittheilen würden. Weil nämlich $Mc = 2gPt$, so verhält sich P wie Mc, wenn t einerley ist, und ich sehe nicht ab, daß man einer weitern Vergleichung bewegender Kräfte in der Mechanik bedürfe. Der bekannte ehedem über das Maas der Kräfte so hitzig geführte Streit hat auf die Wissenschaft selbst nach ihrem gegenwärtigen Zustande so wenig Einfluß, daß ich kein Wort davon erwähnen würde, wenn nicht bisher noch fast in allen Handbüchern der Mechanik und Physik die Sache berührt würde. Eben daher werde ich mich auch in keine weitläuftige Prüfung der gegenseitigen Gründe einlassen, sondern nur einige allgemeine Erinnerungen beyfügen, die der Sache vieleicht mehr Licht geben werden, als ich bey den meisten hieher gehörigen Schriftstellern finde.

25. §.

Weil ein jeder bewegter Körper eine Ursache neuer Bewegungen andrer Körper werden, und ihre Bewegungen auf mancherley Art verändern kann; so hat man fast beständig diese Sache so betrachtet, als wenn demselben eine besondere **Kraft** eigen wäre. Man hielt davor, diese Kraft des Körpers sey desto größer, je größer seine Masse und Geschwindigkeit ist, und setzte daher fest, daß die Kräfte solcher Körper sich wie die Producte der Massen in ihre Geschwindigkeiten verhalten müssen. Man verglich also die sogenannten Kräfte zweener Körper deren Massen

M,

M, *m*, und Geschwindigkeiten C, *c*, sind so, wie nach aller Geständniß ihre Bewegungen verglichen werden müssen, und setzte das Verhältniß dieser Kräfte = MC : *mc*.

26. §.

Hiebey ist nun gleich anfangs zu bemerken, daß man schwerlich deutlich werde anzugeben wissen, was das Wort **Kraft** hier recht heißen solle. Sieht man die Geschwindigkeiten C, *c*, womit die Massen M, *m*, jetzt fortgehen, als solche an, die von bewegenden Kräften in gleichen Zeiten den Massen mitgetheilt sind, so hat es seine Richtigkeit, daß diese bewegenden Kräfte sich wie MC : *mc* verhalten. Allein dies sind alsdenn nicht **Kräfte der bewegten Massen**, sie müssen wenigstens in Gedanken davon unterschieden, und die Massen als der leidende Theil betrachtet werden. Man wird antworten: eben dadurch, daß die Masse in Bewegung gesetzt worden, sey ihr auch eine Kraft mitgetheilt, und diese in der Masse nun hervorgebrachte Kraft sey dem MC proportional. In der That aber gründet sich diese Vorstellung auf einen ganz verwirrten Begrif dessen, was in der Mechanik eigentlich Kraft heissen soll. Sie ist von Redensarten des gemeinen Lebens hergenommen, die nicht allemal der Sache selbst genau angemessen sind. Vermöge der sonst allgemein angenommenen **ersten** Grundsätze der Mechanik kann man einer Masse, die mit der Geschwindigkeit C gleichförmig fortgehet, so wenig eine eigentlich sogenannte bewegende Kraft zuschreiben, so wenig man sie der ruhenden Masse beylegt. Will man aber der bewegten Masse deßwegen eine Kraft zuschreiben, die noch in etwas anders, als in der blossen Trägheit bestehen soll, weil sie den Zustand der Bewegung andrer Körper ändern kann, so muß man aus eben der Ursache der ruhenden Masse gleichfalls eine Kraft beylegen.

Denn

Denn die ruhende Masse kann so gut den Zustand der Bewegung andrer Massen ändern, als es die bewegte thun kann. Zwar redet man im gemeinen Leben so, die bewegte Masse M stosse die ruhende N fort, oder M setze N in Bewegung: allein wenn man die Sache nach richtigen Begriffen beurtheilen will, so muß man wegen dieser Redensarten nicht in der Masse M allein die Ursache der in N hervorgebrachten Bewegung suchen, sondern vielmehr in beyden zugleich, weil beyde undurchdringlich sind. Und warum soll denn die ruhende Masse N nicht auch eine Kraft haben, da sie doch die Bewegung der Masse M verändert, und eben das, was die Schwere thut, wenn ein Körper aufwärts geworfen wird. Wäre N, wie der geometrische Raum durchdringlich, so wäre N nicht in Bewegung gekommen, und M hätte seine Bewegung ungeändert behalten. H. Euler macht in den Memoires de Berlin. A. 1745. p. 21. u. f. eben diese Erinnerungen.

27. §.

Wer inzwischen MC bewegende Kraft nennen will, der hat seine Freyheit, er nennt das bewegende Kraft, was eigentlich Bewegung heißen sollte. Man hätte vieleicht diese Redensart, wie manche andre ebenfalls nicht so ganz genau richtige, in der Mechanik beybehalten, wenn nicht der H. v. Leibniz darauf verfallen wäre, diese sogenannten bewegende Kräfte auf eine andre Art zu vergleichen, die sich aber doch noch immer auf die Vorstellung gründet, als ob man einem bewegten Körper vorzüglich eine bewegende Kraft zuschreiben müsse, die ein ruhender nicht hat. Man weis, daß nach seiner Lehre das Verhältniß der Kräfte zweener bewegter Körper $= MC^2 : mc^2$ seyn soll, und sein Beweis, womit er in den A. E. des Jahrs 1686. dies zu bestättigen suchte, ist bekannt. Er sieht die Höhen, auf welche vertical aufwärts geworfene Körper steigen, als die Wirkungen, und die bewegten Körper als die Ursachen dieses Steigens auf eine gewisse Höhe an. Bey gleichen Massen sollen sich die Kräfte der Körper wie diese Höhen, und bey gleichen Höhen, wie die Massen verhalten, da es denn seine Richtigkeit hat, daß die Höhen, auf welche die Massen steigen, den Quadraten der Geschwindigkeiten proportional sind, womit sie zu steigen anfangen. Allein es ist nicht abzusehen, warum der Körper deßwegen, weil er diese oder jene Höhe erreicht, eine ihm eigene Kraft besitzen soll. Der Körper steigt vermöge seiner Trägheit, so wie ein ruhender Körper vermöge seiner Trägheit ruhet, und außerdem ist so wenig in dem bewegten, als in dem ruhenden Körper etwas, daß den Namen einer Kraft verdiente.

28. §.

Wenn diese Erinnerungen ihre Richtigkeit haben, so ist die leibnitzische Eintheilung der Kräfte in **todte** und **lebendige** A. E. Apr. 1695. p. 149. ganz unverständlich. Körper, die bloß drücken, wie Gewichte, die unterstützt sind, gespannte Federn, u. s. w. sollen eine todte Kraft, bewegte Körper eine lebendige Kraft besitzen, da denn seine Vergleichung von den letztern eigentlich gelten soll. Allein ein bloß drückender schwerer Körper drückt ja nach den sonst allgemein angenommenen Begriffen nicht selbst, sondern das was drückt, muß wenigstens in Gedanken von dem Körper unterschieden werden. Es ist wenigstens etwas anders, als was man sonst **Trägheit** nennt. Fällt das Hinderniß weg, was den Druck aufhält, so ist wiederum der Körper nicht selbst dasjenige, was ihn bewegt. Eben das, was vorhin drückte, ist zugleich dasjenige, was den Körper nun bewegt. Hört dies einmal auf, den Körper weiter zu beschleunigen, so behält zwar der Körper die letzte Geschwindigkeit, und geht damit vermöge seiner Trägheit gleichförmig fort. Allein man muß nun billig weiter fragen, was denn überdem in den Körper hinein gekommen sey, das den Namen einer lebendigen Kraft verdiene? Soll es das Vermögen seyn, den Zustand eines andern Körpers zu ändern, so hat dies der ruhende Körper auch, und es ist dem bewegten nicht allein eigen.

29. §.

Soll die Eintheilung der Kräfte in todte und lebendige noch einigermassen verständlich seyn, so wäre am natürlichsten zu glauben, daß Leibniz durch die **lebendige Kraft** eine wirksame und thätige Kraft, etwas, das wirklich Bewegungen verursacht, verstanden wissen wolle; oder recht metaphysisch zu reden: eine vim agentem, in actu secundo constitutam, und daß **todte Kraft** soviel heißen solle, als vis non agens, vis in actu primo constituta. Fast alle Schriftsteller, sie mögen für oder wider Leibnitzen geschrieben haben, erklären sich auch über diese Eintheilung so, und ich muß gestehen, daß, wie mir deucht, die eigene Leibnitzische Erklärung im Specim. Dyn. a. a. O. p. 149. nicht wohl anders verstanden werden könne. Indessen erklärt sich doch Joh. Bernoulli, der eifrigste Vertheidiger des H. v. Leibniz, darüber ganz anders. Er verstehet durch lebendige Kraft ein blosses **Vermögen** zu handeln, folglich eine vim non agentem, in actu primo constitutam. Dies sagt Bernoulli, selbst in der Diss. de vera notione virium vivarum §. III. Oper. T. III. p. 240. wenn er sich so ausdrückt: Hinc patet, vim *vivam* (quæ aptius vocaretur *facultas agendi*, Gallice *le pouvoir*) esse aliquid reale &c. und eben daselbst im 1. §. vis viva non consistit in actuali exercitio, sed in *facultate agendi*. Diese Erklärung giebt der Streitfrage einen ganz andern Sinn, als die meisten Schriftsteller zum Grunde setzen. Hat Bernoulli die eigentliche Meinung des H. v. Leibniz getroffen, so hätte Leibniz nicht sagen sollen: vis mortua *est* sollicitatio ad motum, sondern vielmehr so, sollicitatio ad motum gignit vim mortuam, und von der vi viva hätte es heißen müssen: est vis cum motu actuali genita. Die **todte Kraft** ist nun eigentlich **gar keine**, oder vielleicht besser mit Leibniz und Bernoulli zu reden, ein **unendlich kleines Vermögen** den Zustand andrer Körper zu ändern. Es ist nicht mit dem **Druck** einerley, sondern es ist etwas, das der Druck als einen Effect hervorbringt. Wenn nun Leibniz ferner sagt: vis est viva ex infinitis vis mortuæ impressionibus nata, so muß man diese Worte so verstehen: wenn nach gehobenem Hinderniß das, was vorhin drückte, z. E. die Schwere, eine Masse wirklich bewegt, so setzt die Schwere in jedem folgenden Augenblick in die Masse ein neues unendlich kleines Vermögen hinein, welches denn in endlicher Zeit ein endliches Vermögen, d. i. die vim vivam erzeuget. **Druck** und vis mortua sind hier also wie Ursache und Effect unterschieden. Daher hätte Leibniz, seinem eigenen Sinn gemässer seine Worte so fassen müssen: vis est viva ex infinitis viribus mortuis impressis nata. Ich glaube, daß diese Vorstellung wenigstens den Begriffen völlig gemäß sey, die Joh. Bernoulli von der Sache hatte. Er sagt im Discours sur le mouvement Chap. III. Def. II. la *forçe morte* est celle, que reçoit un corps sans mouvement, lorqu' il est sollicité & pressé de se mouvoir &c. Oper. T. III. p. 23. Also ist die pression die Ursache, und die forçe morte die Wirkung. Das schlimste ist, daß Bernoulli so wenig als andre bey einerley Art sich zu erklären geblieben sind. In der Abhandlung de vera notione vir. viv. §. IV. redet er wieder so, als wenn vis mortua und pressio völlig einerley seyn soll. Doch die Schriftsteller, welche auf diesen Unterscheid so sehr dringen, mögen es selbst ausmachen, was die vis mortua eigentlich seyn solle. So viel ist gewiß; nach der Bernoullischen Erklärung der vis vivæ heißt die Frage, wie verhält sich die lebendige Kraft einer Masse M zur Kraft der Masse N? eigentlich soviel: Wieviel kann M mehr oder weniger als N ausrichten? Wenn man nun die Höhen, worauf vertical aufwärts geworfene Körper steigen können, die Tiefe der Löcher, welche frey herabfallende Körper in weichen Thon schlagen können, die Anzahl elastischer Federn, welche sie zusammen pressen können, u. s. w. für dasjenige annimmt, was diese den Massen zugeschriebene Facultates ausrichten können; so muß freylich das Verhältniß $MC^2 : mc^2$: daraus folgen. Aber denn ist nicht abzusehen, warum ruhende, ja völlig unbewegliche Körper nicht eben so eine lebendige Kraft besitzen sollen. Man verwechsle die Umstände mit den fallenden harten Kugeln in weichen Thon. Man lasse eine weiche Kugel gegen einen vertical stehenden harten cylindrischen oder prismatischen Pflock fallen, der in Vergleichung mit der Größe der Kugel eine geringe Dicke hat, so wird die Kugel auf demselben, wie auf einem Spieß stecken bleiben. Hat dieser Pflock nicht auch das Vermögen in die anschlagende Kugel ein Loch von bestimmter Tiefe zu bohren, oder ist die Kugel allein die Ursache dieses Erfolges, ohne daß der Widerstand des Pflocks Antheil daran hat? Ich finde bey den harten in weichen Thon schlagenden Kugeln nichts, was in dem Verstande **Kraft** heißen kann, in welchem dies Wort in der Mechanik sonst gebraucht wird, wenn ich ihnen in dem Augenblick der ersten Berührung die Schwere nehme, (wie hier geschehen muß, da die vermeinte Kraft nun in dem Körper wegen der letzten Geschwindigkeit schon befindlich seyn, und die Schwere nicht mehr in Betracht kommen soll). Sie dringen vermöge ihrer Trägheit in den Thon hinein, und der **Druck**, welcher in jedem Augenblick durch die Berührung der folgenden Theile entstehet, vermindert die Bewegung der Kugeln so, wie die Schwere die Bewegung steigender Körper.

30. §.

Wenn nun dies alles, wie ich glaube, seine Richtigkeit hat, so weis ich nicht, ob ich irre, wenn ich behaupte, daß die statische Theorie von Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte überall bey dieser Streitigkeit sehr übel angebracht sey. Diese Lehre läßt sich nur da anwenden, wo von Pressungen die Rede ist, und das sollen die lebendigen Kräfte wenigstens nach der Bernoullischen Erklärung nicht seyn. Es ist gewiß sehr sonderbar, wenn die Diagonale und Seitenlinien eines Parallelograms facultates agendi vorstellen, und die letztern so verglichen werden sollen, wie man Pressungen vergleicht. Daher fällt alles von selbst weg, was aus dieser Theorie sowohl für als wider das leibnitz-bernoullische Kräftenmaas ist geschlossen worden. Ich kenne in der ganzen Statik und Mechanik keine andre Kräfte, als Pressungen, die entweder durch Hindernisse aufgehalten werden, oder die Massen, welche sie pressen, wirklich bewegen, und deren Natur in beyden Fällen einerley ist und bleibt. Aus diesen Begrifen, und dem, was **Trägheit** heißt, läßt sich die ganze Mechanik unvergleichlich herleiten, und so viel ich einsehen kann, kömmt die ganze hier herrschende Verwirrung darauf an. Von einer **mechanischen Kraft** haben wir einen bloß sinnlichen Begrif, so wie z. E. von einer graden Linie. Daher können wir aus diesem Begrif eigentlich nichts schließen, wir müssen vielmehr die ersten Grundsätze der gesammten Mechanik, so gut wie die ersten geometrischen Grundsätze aus sinnlichen Empfindungen hernehmen. **Druck**, **Zug**, **Stoß**, sind die Wörter, die wir im gemeinen Leben da gebrauchen, wo eigentlich von einer bewegenden Kraft die Rede ist, und dies ist allemal etwas **thätiges**. Wir brauchen aber das Wort Kraft auch in unzähligen andern Fällen, wo es ein blosses **Vermögen** bezeichnet. Wir schreiben Geistern

Kräfte

Kräfte zu, dem einen eine größere, dem andern eine kleinere, wenn der eine mehr thun kann als der andre. Diese Kräfte kennen wir noch weniger, als die mechanischen, wir haben eigentlich, wenn wir es aufrichtig heraus sagen wollen, gar keinen Begrif davon. Diese Art Kräfte hat man mit den mechanischen unter ein genus bringen, und auf ähnliche Art, wie die mechanischen Kräfte vergleichen wollen. So etwas, das in diesem so sehr allgemeinen Verstande **Kraft** heißen soll, hat man einem bewegten Körper auch zugeschrieben. Dies heißt aber, den metaphysischen Begrif einer Kraft mit dem mechanischen verwirren, und die Mechanik in eine eben so dunkle Wissenschaft verwandeln, als viele metaphysische Systeme sind.

Frage,

wo so viele

Ausgüßungen der Flüße in Baiern herrühren?

und wie denselben abzuhelfen?

beantwortet

von

Herrn Eusebius Amorth,
Kanonikus Regularis zu Polling.

Die Ursache der so vielfältigen, und verderblichen Ausgüßungen der Flüße in Baiern, die wir seit vielen Jahren wahrnehmen, ist nicht einem bey unsern Zeiten in grösserer Menge, als sonst, herabfallenden; Regen oder Schnee zuzuschreiben: denn die ältesten Leute in hiesigen Landen versichern uns, daß, obwohl es ehemals eben so viel geregnet, und geschneyet hat, dennoch so grosse Ueberschwemmungen aller an die Flüße angränzenden Ortschaften nicht beobachtet worden. Die Ursache dieser Ueberschwemmungen ist also vielmehr von der Häufung des Sandes, und der daraus entspringenden Erhöhung des Grundes in den Flüßen herzuholen.

Es ist sehr wahrscheinlich, daß ein solcher Grund in hundert Jahren nach Unterschied der Geschwindigkeit des Flußes, und seiner eigenen Steinartigkeit um 1. 2. 3. Schuhe in seiner Höhe anwachse. Die Erfahrung selbst zeiget, daß diese Flüße nach merklicher Ansandung ihres Rinnsaales ihren Lauf verändern, und selben bald zur rechten, bald zur linken Seite richten, je nachdem sie hier oder dort einen niedrigern, und leichter sandichten Grund antreffen.

Wie viel Schaden durch dieses landverderbliche Uebel verursachet werde, ist aus den Klagen jener Unglücklichen bekannt, deren Wiesen, Felder, oder Häuser an dergleichen Flüße stossen. Die Erbarmung gegen diese armen Leute, und das höchste landesherrliche Interesse selbst erfordert es, daß man auf hinlängliche Wehrmittel bedacht sey, diesen gewaltsamen Austritten, und Abänderungen des Rinnsaales der Flüße vorzubeugen.

Mir deuchte das füglichste unter allen zu seyn, wenn man in grossen Flüßen eine Art von solchen Maschinen errichtete, dergleichen eine in Venedig zu Säuberung des Meergrundes errichtet worden, und noch immer in baulichem Stande erhalten wird, damit die Stadt nicht unschifbar, oder wohl gar mit der Zeit an das feste Land angehängt werde.

Freylich könnte man einwenden, daß, wenn man schon auf diese Art die Flüße von dem in Zeit von hundert Jahren zween bis drey Schuhe hoch angewachsenen Sande reinigen, und die Gründe in ihre alte Tiefe setzen könnte, dennoch eben hieraus andere unüberwindliche Beschwernisse erfolgen würden. Denn wenn schon die Iser, der Inn, und der Lech in ihre gehörige Grundtiefe gesenkt würden, so könnte doch eine grosse Anschwellung besagter

Flüße

Flüße nicht verhindert werden, sobald sie sich in einen andern Fluß eines höhern Grunds z. B. die Iser und der Inn in die Donau ergießen. Allein ich antworte hierauf, daß sich diese Anschwellung in ihrer Länge nicht viel über 200 bis 300 Schuhe, und in ihrer geneigten Höhe nur etwann auf 3 Schuhe erstrecken, folglich durch den Fleiß der Ruderknechte leichtlich würde überwunden werden. Vielmehr wäre zu befürchten, daß die Donau grossentheils in den niedrigern Rinnsaal der Iser, oder des Inns herunterzufallen trachten, und mit vereinigten Gewässern eine neue Bahn suchen, folglich aus zweyen Uebeln drey Uebel erfolgen würden. Allein diese Forcht ist weitschichtig, und ein so eitler Schrecken eines nur möglichen Uebels muß uns von einer vernünftigen Abwendung wirklicher Unglücke nicht hindern.

Man könnte auch diesen schädlichen Ueberschwemmungen durch holländische Dämme bis auf Passau vorbeugen, deren Unkosten sich in so kurzer Länge kaum über 50000. Gulden erstrecken würden.

Ich erinnere mich hier einer frommen Stiftung, welche von dem Hofmaler Amorth schon vor beyläufig hundert Jahren gemacht worden, und noch heut zu Tage genau beobachtet wird, um in einem gewissen District, **Ober Lengeries**, die Iser von grossen Steinen zu reinigen, und dadurch vieles Fluchen der Floßknechte zu verhindern. Welch einen unsterblichen Nachruhm, welch ein Verdienst um das Vaterland würde sich ein Menschenfreund, ein Patriot, den der Himmel mit Reichthum und Glücksgütern gesegnet hat, machen, wenn er entweder bey seinen Lebzeiten, oder durch eine letztwillige Vermächtniß eine solche Stiftung zu Säuberung der Flüße in Baiern von dem anwachsenden Sande und zu Verhütung der Ueberschwemmungen verordnete! Es würde diese

Verordnung vor andern Schankungen zum frommen Gebrauche auch diesen Vorzug haben, daß dadurch nicht einzelne Personen, sondern ganze und viele Familien, ja ganze Generationen vor Schaden und Armuth gesicheret würden. Welch ein süßer Gedanke, wäre er doch Reichen fühlbar! auch noch in seiner Asche von ganzen Nachkommenschaften gesegnet zu werden!

Leonard

Leonard Grubers
Benediktiners
einige

analytische Beyspiele
und

Anwendungen

der verschiedenen

Wendungen der krummen Linien,

an die churfürstliche Akademie der Wissenschaften
in München eingesendet.
1770.

Erinnerung.

Die Werke eines Krammers, dieses so grossen Meisters in der Mathematik, sind gewiß für sich wichtig und nützlich genug einen Liebhaber der mathematischen Wissenschaften und sonderlich des höhern Kalkulus zu beschäftigen. Man wird mir es also zu gut halten, wenn ich in Durchlesung dieses so vortreflichen Buches etwas mehrers gewagt habe, als selbes bloß zu durchgehen. Ich habe nämlich seine erhabenen Grundsätze besser einzusehen, und mich nach der Vorschrift dieses vollkommenen Mathematikers zu üben, einige Beyspiele gewählet, welche in sich zwar willkührlich herausgesucht sind, zu den nachgesetzten

An=

Anwendungen aber, welche meine Hauptabsicht sind, mir sehr dienlich seyn werden. — In den vorausgeschickten Begrifen zu Anfange des ersten Abschnittes wird man sich wohl einiger Klarheit halber auf des H. Krammers Werke beziehen müssen; denn ich wollte und könnte selbe weder gänzlich weglassen, noch auch ausführlich anrücken. Die angesetzten Beyspiele habe ich nach der einfachsten und willkürlichen Methode berechnet. Man wird aus einer angestellten Vergleichung sehen können, ob ich darinn glücklich war; und ein wiederhollter Versuch mag selbe bestättigen. — Die in zweenen Abschnitten gemachten Anwendungen, ob sie schon etwa der gehabten Absicht des vom Verfasser geschriebenen Werkes nicht am nächsten kommen, *) so werden sie doch derselben in dem Stücke genug thun, daß ich damit ein obschon geringes Probstück liefere, wie die analytischen Grundsätze dieses gelehrten Mannes nicht nur in ihrer Theorie erhaben sind, sondern auch auf andere Wissenschaften, als hauptsächlich auf die Mechanik und Astronomie, einen starken Einfluß haben, und mit einem ungemein grossen Vortheile mögen angewendet werden. **) Hier ist

---

*) Der Verfasser erkläret selbe in ihrem Umfange also: Par cette art infiniment utile de deduire d'un seul principe universel un grand nombre de verités, de les soumettre à des Regles generales, de les developper par des consequences uniformes, & de les lier les unes aux autres, de la maniere la plus propre, à faire naitre de nouvelles decouvertes &c.

Preface de l'Anal.

**) On sauroit s'en passer dans les Sciences, dont la Perfection depend de la geometrie, telles, que la Mechanique, l'Astronomie, la Physique. Les Systemes modernes supposent necessairement cette connoissance.

Pref. de la même.

ist also der zureichende Grund dieser meiner Beschäftigung aufgedecket. Habe ich in der Zukunft genugsame Zeitmusse und hinreichende Kräften, so werde ich davon mehrere und etwa sehr nützliche Anwendungen nach eben diesen Gründen zu machen, mir angelegen seyn lassen. Indessen wird es mir genug seyn, wenn eine Churfürstl. Akademie dieses geringe Piece als eine mittelmäßige Nachahmung, und als ein Zeugniß meines Fleißes und Genie zur Mathematik aufzunehmen, gnädigstes Belieben trägt. Vielleicht werde ich mit der Zeit in wichtigern Gegenständen Ihren Beyfall zu erhalten im Stande seyn, wenn man mir doch für die weitere Beförderung meiner Lehrbegierde an die Hand geben wird. Ich wünsche gewiß nichts so sehr als einer Churfürstl. Akademie meine obschon geringen Dienste ächt thätig wiedmen zu können.

Analytische Beyspiele und Anwendungen der verschiedenen Wendungen der krummen Linien.

Erster Abschnitt.

Einige Beyspiele derselben.

1. §.

Von den verschiedenen Wendungen der krummen Linien sich einen ächten Begrif zu machen, so darf man nur eine krumme Linie betrachten, wie selbe von einer geraden durchschnitten wird, also zwar, daß ein Theil davon auf dieser, der zweyte aber auf einer andern Seite zum Vorschein kömmt: wo es sich dann fügen kann, daß eine solche gerade Linie, welche man deßwegen die

Secans nennet, die krumme in mehrern Puncten durchschneide. Wenn nun zween solche Puncte des Durchschnittes sich einander unendlich nahe sind, daß selbe in einen einzelen Punct zusammenfließen, und man sie gar nicht mehr unterscheiden kann, so machen sie einen einzelen Berührungspunct aus. Hiemit wird die gerade Linie die krumme nicht mehr durchschneiden, sondern selbe nur in einem einzelen Puncte berühren: oder, wie man sagt, die Secans wird zur Tangente.

2. §.

Der nämliche Punct einer Linie bekömmt eine gegenseitige Wendung, wenn drey Durchschnittspuncte in einem einzelen zusammen fließen. Hiemit wird die gerade Linie, welche man durch diese 3 unendlich nahen Puncte ziehet, die krumme zugleich durchschneiden und berühren (1. §.). Es mag sich dieses aber nur fügen in jenen Gattungen der krummen Linien, welche über die zwote sogenannte Ordnung oder Klasse hinaus sind; zum Beyspiele in einer Parabole, wo man die Gleichung $y = ax^3$ annimmt. Nun in einem solchen Falle kann man wohl annehmen, daß die Tangente in dem Puncte einer entgegengesetzten Wendung drey Puncte von der krummen Linie berühre: da doch in den krummen Linien der zwoten Gattung diese Berührung nur in einem einzelen Puncte geschehen kann; in den gemeinern aber in zween Puncten, welche sich nämlich einander unendlich nahe seyn müssen: deßwegen wird man auch in diesen letztern niemals einen Punct von einer entgegengesetzten Wendung antreffen, wovon wir im analytischen Kalkulus genugsame Beyspiele haben, und welche hier anzurücken, der enge Raum nicht zuläßt.

3. §.

3. §.

Ein Punct der Linie nimmt an sich eine schlangenförmige Wendung, wenn zum Beyspiele eine gerade Linie eine krumme von der 4ten oder noch höheren Klasse in dem Puncte der entgegengesetzten Wendung berührt. Deßwegen, wenn wir setzen, daß was immer für eine Secans unendlich klein werde, so wird sie die krumme Linie nicht mehr durchschneiden, sondern selbe nur berühren, allein diese Berührung geschieht in zween Punkten, welche man für 4. Durchschnittspuncte halten kann (§. 1.). Indessen, weil diese Puncte sich einander unendlich nahe sind, so wird man wohl die gegenseitige Wendung nimmermehr durch die Sinne wahrnehmen können, den der Raum, welchen sie einnehmen, ist unendlich klein. Um uns also diese schlangenförmige Wendung vorzubilden, müssen wir die Theorie des Analysis zu Hülfe nehmen, durch welche allein wir uns einen, obschon abstracten Begrif machen können.

4. §.

Es ist aber aus den gemeinern Beyspielen der Gleichungen einer Parabole schon ausgemacht, daß, wenn in selber $y=x^2$, oder $y=x^3$, oder $y=x^4$, oder $x=x^5$ und s. w. ist, die Tangente allzeit die krumme Linie in dem Puncte der gegenseitigen Wendung öfters als in zween Puncten berühre, als der Grad der entgegengesetzten Wendung anzeiget; also zwar, daß, wenn man für eine Parabole eine allgemeine Gleichung z. B. $y=x^m$ annim̃t, so ist es durchaus richtig, daß die Parabole in ihrem Ursprunge einen Punct der gegenseitigen Wendung hat, dessen Grad durch $m-2$ kann ansgedrücket werden. Es wird auch dieser Punct der entgegengesetzten Wendung oder Krümmung scheinbar werden, wenn m eine ungleiche Zahl bedeutet: ist selbe aber nicht ungleich, so ist die Krümmung dieses Punctes unwahrnehmlich: und in diesem Falle, wird es eigentlich ein Punct von einer schlangenförmigen Wendung seyn.

5. §.

Dieses sind nun die Hauptbegrife, welche vorauszusetzen es nöthig war, um die nachfolgenden Beyspiele und Anwendungen in das Klare zu bringen. Will man aber von diesen Begrifen eine mehrere Erklärung oder auch Beyspiele davon haben, so kann man selbe in den analytischen Werken des Herrn Krammers und des Mr. de Gua *) finden. Uebrigens war bisher nur die Rede von den einfachen Puncten in ihren verschiedenen Wendungen; denn es giebt auch noch andere, welche sich in Rücksicht auf die nämliche krumme Linie vervielfältigen können. Also z. B. ist es ein zweyfacher Punct, wenn selber zween Bögen oder sogenannten Aesten der krummen Linie gemein ist, oder auch durch welchen man die krumme Linie zweymal ziehet. Auf gleiche Weise nennt man einen dreyfachen Punct, welcher dreyen Puncten der krummen Linie gemein ist, oder durch welchen die krumme Linie dreymal sich wälzet, und so weiters zu reden von den vier, fünffachen Puncten, von welchen gleichfalls in benennten Werken Beyspiele anzutreffen sind. Ich will also bey andern Beyspielen den Anfang machen.

6. §.

Es ist in der Theorie der verschiedenen Wendungen eines Punctes in einer krummen Linie ein Hauptgrund, daß man wisse, ob ein solcher Punct, dessen Lage wir indessen außer den Ursprung

*) Usage d'Anal.

sprung der krummen Linie annehmen wollen, einfach oder vielfältig sey. Man kann solches nach der folgenden Methode ausforschen. Man übersetze vor allen den Ursprung der krummen Linie auf den gegebenen Punct; und man ziehe daselbst eine Abscisse m und eine Ordinate n. In der Gleichung selbst setze man statt x ein $m + z$ und statt y ein $n + u$. Wenn man nun diese Werthe in der gegebenen Gleichung einrücket, so kann man selbst aus der Zahl der mangelhaften Reihen, welche in der Gleichung zum Vorschein kommen, von der Natur des gegebenen Puncts ein Urtheil fählen. Doch in der Umänderung der gegebenen Gleichung richtig und bequem zu gehen, wird es gut seyn, wenn man die gegebene Gleichung in einer Reihe schreibt, und unter einem jeden Absatz derselben die Exponenten des x und y hinsetzt, welche man zwar durch einen Punct unterscheidet, ohne aber hiedurch eine Multiplication anzuzeigen, sondern nur zu erinnern, daß der erste Exponent von dem y, der zweyte von dem x geborget sey. Man ziehe sodann unter diese beyden Reihen eine Linie, und multiplicire durch den Exponenten des y alle Absätze der gegebenen Reihe ins besondere. Man soll aber das y einmal weglassen, und statt selben ein u einrücken. Auf gleiche Weise verfährt man mit dem Exponenten des x, welches man gleichfalls einmal wegläßt, und dafür ein z ansetzt. Diese Berechnungsart setzt man durch jede Absätze der gegebenen Gleichung fort; und, weil man die neu erhaltene allzeit unter die gezogene Linie herabsetzt, so bekömmt man wiederum eine neue Reihe. Den Absätzen dieser neuen Reihe setze man ein $\frac{1}{2}$ des Exponenten hinzu, welcher von dem y ist übrig geblieben, wie auch ein $\frac{1}{2}$ des Exponenten von x. Alsdenn fahre man mit der nämlichen Berechnungsart so lange fort, bis in keinem Absatze der gegebenen Gleichung das y oder x mehr zum Vorschein kömmt. Endlich sammle man die Absätze, welche von dem u und z in der nämlichen Potenze stehen, zusammen, und, da man statt des y ein n, und für das x ein m ansetzet, so bekömmt man eine ganz neue Gleichung, so wie wir es klärer im folgenden Beyspiele sehen werden.

7. §.

Erstes Beyspiel.

$$y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0.^{*)}$$

$$4.0. \quad 3.0. \quad 2.\ 1. \quad 2.\ 0. \quad 1.1. \quad 0.2. \quad 0.1. = 0.$$

$$+ 4y^3u - 24y^2u - (24xyu - 12y^2z) + 32yu +$$

$$\tfrac{3}{2}.0. \quad \tfrac{2}{2}.0 \quad \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2}. \quad \tfrac{2}{2}.0. \quad \tfrac{1}{2}.0.$$

$$(48xu + 48yz) + 8xz - 64z$$

$$0.\tfrac{1}{2}. \quad \tfrac{1}{2}.0. \quad 0.\tfrac{1}{2}. \quad 0.0.$$

$$+ 6y^2u^2 - 24yu^2 - (12xu^2 - 12yuz) - 12yuz].$$

$$\tfrac{3}{3}.\ 0. \quad \tfrac{1}{3}.0. \quad 0.\tfrac{1}{3}. \quad \tfrac{1}{3}.0. \quad \tfrac{1}{3}.0.$$

$$+ 16u^2 + 24zu + 24zu + uz^2$$

$$0.0. \quad 0.0. \quad 0.0. \quad 0.0$$

$$+ 2yu^3 - 8u^3 - 4u^2z - 4u^2z - 4^2z.$$

$$\tfrac{1}{4}.0. \quad 0.0. \quad 0.0. \quad 0.0. \quad 0\ 0$$

Die Abänderung der gegebenen Gleichung wird also folgende seyn

$$n^4 - 8n^3 - 12mn^2 + 48mn + 4m^2 - 64m + (4n^3 - 24n^2 - 24mn + 32n + 40m)u + (-12n^2 + 48n + 8m - 64)z + (22n^2 - 24n - 12m)u^2 + 4z^2 + (24n + 24)zu + (2n - 8)u^3 - 12u^2z - \frac{u^4}{2} = 0.$$

8. §.

*) Diese Gleichung, welche ich zur Ausführung dieses Beyspieles angenommen, ist wirklich die Gleichung einer krummen Linie, (siehe weiter zurück 14. §.) und man kann selbe auch in des Krammers analytischem Werke angesetzt finden: allein er beziehet sich in diesem Stücke auf des Saurins Abhandlungen, welche in den memoires de l'Academie 1716. Pag. 61. nachzusuchen sind.

8. §.

Wenn man auf die ganze Abänderung der gegebenen Gleichung und auf ihre nacheinander angesetzten Reihen aufmerksam ist, so wird man leicht wahrnehmen, daß, weil m und n als bestimmte Quantitäten angenommen werden, die ganze erste Reihe der abgeänderten Gleichung bestimmt sey, und wenn man selbe auf ein analytisches Dreyeck beziehet, so wird sie in dessen Gipfel zu stehen kommen. Deßwegen, wenn diese erste Reihe nach eingerücktem Werthe des x und y, dem m nämlich und den n (6. §.) nicht gänzlich getilget wird, so gehört der zum Ursprunge einer Linie angenommene Punct nicht zu einer krummen Linie: löset sich aber diese Reihe in ein O auf, so ist es ein Zeichen, daß dieser Punct zur krummen Linie gehöre.

9. §.

Wenn man nun einmal diesen Punct bestimmt hat, daß selber zur krummen Linie gehöre, so kann man untersuchen, ob selber einfach oder vielfältig sey (5. §.) Man muß also die zwote abgeänderte Reihe der gegebenen Gleichung hernehmen, und in selber die Werthe von m und n einrücken. Es ist aber klar, daß in dieser Reihe das u und z als die einfachsten Potenzen enthalten sind; hiemit alle diese Absätze in einem analytischen Dreyecke die erste Horizontalreihe von dem Gipfel an einnähmen. Wenn nun besagte abgeänderte Reihe sich selbst nicht gänzlich tilget, sondern ein oder andrer Absatz übrig bleibt, in welchem ein u oder z enthalten sind, so ist es gewiß, daß auch in einem Dreyecke die erste Horizontalreihe von der Spitze desselben schon eingenommen sey: hingegen tilget sich diese Reihe, das ist, ist die Spitze des analytischen Dreyeckes noch leer, so kann man schließen, daß daß der angenommene Punct nur einfach sey. Tilget sich nun

ferners

ferners auch die zwote abgeänderte Reihe, so hat man sich an die dritte zu halten, und in selber die Werthe des m und n einzurücken. Wenn diese sich nicht tilget, so wird in einem analytischen Dreyecke die zwote Horizontalreihe von der Spitze an eingenommen seyn, weil nämlich in selber Absätze enthalten sind, in welchen man das u^2, uz, und z^2 antrift (7. §.). Und also wird der Punct zweyfach seyn. Gehet man noch weiters, und tilget sich gleichfalls die dritte Reihe, so wird man in der vierten die nämlichen Werthe des m und n einrücken müssen, und dieses so lang, bis man weis, ob der Punct dreyfach, vierfach ꝛc. sey. Ich setze hievon Beyspiele an.

10. §.

Zweytes Beyspiel.

Man nehme die vorige Gleichung, welche schon §. 7. in eine andere ist abgeändert worden. Man kann also davon zum ersten untersuchen, ob der Punct, dessen ordinate wir n die Abscisse aber m geheißen haben (§. 8.) und davon ich eine jede $=2$ annehme, zur krummen Linie gehöre. Dieses auszuforschen, so darf man nur in der gegebenen Gleichung: $y^4 = 8y^3 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0$ sowohl für y als x den 2 einrücken, und man wird folgende Gleichung überkommen; nämlich: $16 - 64 - 96 + 64 + 192 + 16 - 128 = 0$. Weil nun diese erste Reihe sich selbst tilget, so gehört nach dem erst gesagten (§. 8.) der angenommene Punct zur krummen Linie.

11. §.

Nachdem man nun weis, daß dieser Punct zur krummen Linie gehöre, so läßt weiters die Frage, ob selber unter die einfachen

chen oder vielfältigen zu zählen sey (§. 5.). Man nehme also von der gegebenen und schon abgeänderten Gleichung die zwote Reihe für sich, nämlich

$$\begin{array}{l} y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x \text{ (§. 7.)} \\ \underline{4.0. \quad 3.0. \quad 2.0. \qquad 2.0. \qquad 1.1. \quad 0.2. \quad 0.1} \end{array}$$

$$4y^3u - 24y^2u - 24xyu - 12y^2z + 32yu + 48xu$$
$$+ 48yz + 8xz - 64z$$

Setzt man nun für das x und y den bestimmten Werth von m und n, nämlich $= 2$ und 2 an (§. 10.), so überkömmt man folgende Reihe:

$$(4y^3 - 24y^2 - 24xy + 32y + 48x)\,u +$$
$$(32 - 96 - 96 + 64 + 96)\,u +$$
$$(-12y^2 + 48y + 8x - 64)\,z.$$
$$(-48 + 96 + 16 - 64)\,z.$$

Weil nun auch die buchstäbliche Quantitäten nämlich u und z einander aufgehoben werden, so verbleibt die andere Horizontalreihe eines analytischen Dreyeckes leer, und hiemit ist der angenommene Punct wenigst zweyfach (§. 9.)

12. §.

Nach dem erstgesagten tilget sich also auch die zwote Reihe, und daher kann man mit der dritten Reihe einen ferneren Versuch machen, um nämlich zu sehen, ob der angenommene Punct etwa nicht dreyfach sey (§. 9.). Man nehme also von der gegebenen und schon abgeänderten Gleichung die dritte Reihe (§. 7.), und, wenn man damit nach der vorigen Methode (§. 9.) verfährt, so überkömmt man folgendes.

$$4y^3 - 24y^2u - 24xyu - 12y^2z + 32yu + 48xu$$
$$\tfrac{3}{3}.\,0. \quad \tfrac{3}{2}.\,0. \quad \tfrac{1}{2}. \quad \tfrac{1}{2}. \quad \tfrac{2}{2}.\,0 \quad \tfrac{1}{2}.\,0. \quad 0.\,\tfrac{1}{2}.$$
$$+ 48yz + 8xz - 64z.$$
$$\tfrac{1}{2}.\,0. \quad 0.\,\tfrac{1}{2}. \quad 0.\,0$$

$$6y^2u^2 - 24yu^2 - 12xu^2 - 12yuz - 12yuz + 16u^2 + 24uz + 24uz + 4z^2.$$

oder: $(6y^2 - 24y - 12x + 16)u^2 + (-12y - 12y + 48)uz + 4z^2.$

13. §.

In der zwoten vorher angesetzten Reihe (§. 11.) haben wir statt des x und y ihren Werth m und $n = 2$ und 2 angesetzt, wodurch dann die letzte Reihe sich selbst aufgehoben hat. Doch dieses wurde niemals in der dritten Reihe (§. 12.) angehen, wenn man es versuchen sollte; denn dadurch würde doch niemals der Absatz der letzten Reihe, nämlich $4z^2$, in welchem nämlich kein x oder y zum Vorschein kömmt, können getilget werden. Aus der Aufhebung also einer ferneren Operation ist es klar, daß der untersuchte Punct nur zweyfach sey (§. 9.).

14. §.

So unnütz es nun seyn würde wegen der fernern Untersuchung des angenommenen Puncts weiter zu gehen, und eine fernere Abänderung der letzt erhaltenen Reihe vorzunehmen (12. §.), so würde man doch ein solches thun können um die Natur der krummen Linie, für welche diese Gleichung gegeben wurde (7. §. *) vollkommen auszuforschen. Wenn man also in der ganzen abgeänderten Finalgleichung, welche wir oben (§. cit.) angesetzt haben, für das m und n ihren Werth nämlich 2 einrücken (§. 10.), so wird die angeführte Finalgleichung sich in folgende verwandeln:

$u^4 - 12 u^2 x - 32 u^2 + u x^2 = 0$. Diese Gleichung hat nun 4 Wurzel davon I. $u = \sqrt{(8x + 16 + 4\sqrt{(2x^2 + 12x + 6)})}$ II. $u = -\sqrt{(6x + 16 + 4\sqrt{(2x^2 + 12x + 6)})}$. III. $u = +\sqrt{(6x + 16 - 4\sqrt{(2x^2 + 12x + 6)})}$. IV. $u = -\sqrt{(6x + 16 - 4\sqrt{(2x + 1 + 16)})}$. Oder aber, wenn wir sie abkürzen, bekommen wir folgende Ausdrücke: I. $+\sqrt{(4x+8)} + \sqrt{(2x+8)}$. II. $-\sqrt{(4x+8)} - \sqrt{(2x+8)}$. III. $+\sqrt{(4x+8)} - \sqrt{(2x+8.)}$ IV. $-\sqrt{(4x+8)} + \sqrt{(2x+8)}$. Wollen wir nun nach des Krammers Beyspiele * diese Ausdrücke wirklich auf eine krumme Linie beziehen, und für die Figur, welche auf die gegebene Gleichung paßt (§. 7.) einige Anwendung machen, so werden wir sehen, daß jeder Ausdruck einen parabolischen Ast in der beygesetzten Figur anzeige. Also beziehet sich der erste Ausdruck $u = \sqrt{(4x + 8)} + \sqrt{(2x + 8)}$ auf dem Ast f D; der zweyte, $u = -\sqrt{(4x + 8)} - \sqrt{(2x + 8)}$ auf F d; der dritte $u = +\sqrt{(4x + 8)} - \sqrt{(2x + 8)}$ auf F A E; der vierte $u = -\sqrt{(4x + 8)} + \sqrt{(2x + 8)}$ auf f A e. Die letztern zween haben zum Asymptote die Parabole e A E, wovon die Gleichung ist $u^2 = (6 - 4\sqrt{2})\,x$; die ersteren aber die Parabole d A D, unter der Gleichung $u^2 = (6 + 4\sqrt{2})\,x$. Endlich wird die gegebene Gleichung: $y^4 - 8y^3 - 12xy^2 + 16xy^2 + 16y^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0$ (§. 7.) durch eben diese Figur vorgestellt, nämlich durch die krumme Linie, welche man auf den Punct F als ihren Ursprung beziehet, und deßwegen der Punct A für einen zweyfachen (§. 5.) muß angesehen werden, dessen Abscisse nämlich F G, und die Ordinate G A ist, deren eine jede $= 2$ (§. 11.).

15. §.

Die ganze Berechnung und Ausführung dieses gegebenen Beyspieles (§. 10.) hat für sich vorausgesetzt, daß der ange-

*) Siehe desselben Analyse auf der 419. Seite.

nommene Punct zur krummen Linie gehöre, so wie wir dieses schon vorher (§. 11.) bestimmet haben. Setze man nun, daß der angenommene Punct außer dem Ursprunge der krummen Linie in einer deren zwoen Axen anzutreffen sey, so wird die ganze Abänderung der gegebenen Gleichung viel leichter ausfallen; denn ist der gegebene Punct in der Axe der Abscissen, so muß man eben darum das $y = o$ und das $x = n$ (welches in diesem Falle eine unabänderliche Quantität anzeiget) annehmen: hiemit werden sich alle Absätze der gegebenen Gleichung, welche nämlich mit dem y multipliciret sind, von selbst aufheben; und also die Abänderung nur mit jenen vorzunehmen seyn, in welchen das x zum Vorschein kömmt. Auf gleiche Weise, wenn man den angenommenen Punct in die Axe der Ordinaten übersetzet, so wird das x getilget, das y aber einer unabänderlichen Quantität müssen gleich gehalten werden.

Drittes Beyspiel.

16. §.

Ich nehme hier wiederum eine Gleichung: $y^3 - 2\,ay^2 + a^2\,y + x^2y - 2\,a\,x^2 = o$, welche sich auf die beygesetzte Figur beziehet, und die krumme Linie P A M zum Gegenstand hat, wovon der Ursprungspunct in P gesetzet wird. * Es ist also der gegebene Punct außer der krummen Linie, so wie wir es vorher verlangt haben (§. 15.). Nun untersuche man, ob der Punct A einfach oder vielfach sey. Weil man hier P A $= a$, und $x = o$ annehmen muß, so kann man in der gegebenen Gleichung die Absätze $x^2\,y - 2\,a\,x^2$ weglassen. In den übrigen aber statt des y das a ein-

*) Die Construction dieser krummen Linie, wie auch den Beweis ihrer Gleichung kann man in dem angezogenen analytischen Werke des Krammers pag. 411. finden.

einrücken. Hiemit bekömmt man statt der gegebenen folgende Gleichung: $a^3 - 2a^3 + a^3 = 0$. Der Punct A gehört also zur krummen Linie (§. 8.). Nun mache man einmal mit der gegebenen Gleichung eine Abänderung nämlich:

$$\begin{array}{ccc} y^3 - & 2ay^2 + & a^2 y \\ 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$(3y^2 - 4ay + a^2)u$ (§. 6.); und wenn man für das a ein y einrückt, so ist $(3a^2 - 4a^2 + a^2)u = 0$. Es tilget sich also die erste Horizontalreihe, und der Punct ist wenigst dreyfach (§. 9.). Nehmen wir aber von der gegebenen abgeänderten Gleichung die dritte Reihe, nämlich:

$$\begin{array}{ccc} 3y^2 u - & 4ayu + & a^2 u \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline \end{array}$$

$3u^2 y - 2au^2$, so sehen wir sogleich, daß, wenn wir auch statt des y das a einrücken, dennoch diese Reihe nicht getilget werde. Deßwegen kann man schließen, daß der untersuchte Punct A nur allein zweyfach sey. (§. cit.)

17. §.

Alles, was bisher ist angeführt worden, zielet ab, theils die ganze Abänderung einer gegebenen Gleichung zu finden (§. 8.), theils die Vielfältigkeit des gegebenen Puncts zu bestimmen (§§. 9. 12.) theils selben auf die krumme Linie zu beziehen (§. 10.), und endlich die Natur der krummen Linie für die gegebene Gleichung auszuforschen (§. 14.): dieses aber sind nur sonderliche Fälle. Man kann aber auch allgemeine setzen, wo dann sowohl die Beyspiele als die Methode selbst sich unter einem anderen Gesichtspuncte darstellen wird. Ein solcher allgemeiner Fall ist es, wenn man insgemein fraget, ob die gegebene Gleichung, welche sich auf eine krumme Linie beziehet, einen Punct habe, welcher vielfältig sey. Item: was für eine Lage ein solcher Punct in der krummen Linie der gegebenen Gleichung habe. Der ersten allgemeinen Aufgabe kann man zwar durch die obenangeführte Methode der Abänderung der gegebenen Gleichung genug thun (§. 6.). Man setzt nämlich die erste Reihe, in welcher ein u und x zum Vorschein kömmt, mit einer o in eine Gleichung, und also wird man drey Gleichungen überkommen; nämlich eine, welche für die krumme Linie ist gegeben worden; wiederum eine andere, in welcher die Conficienten von u; und endlich eine dritte, wo die Conficienten von x enthalten sind. Aus diesen 3 Gleichungen kann man nun eine heraus nehmen, welche zur Bestimmung des Werthes des x, oder auch des y die geschickteste zu seyn scheint. Den überkommenen Werth hat man hernach in die übrigen zwo Gleichungen einzurücken, damit man hernach auch von der anderen unbekannten Quantität, z. E. von dem y seinen Werth überkomme, welcher, wenn er nicht negative und überall der nämliche ist, so wird auch der Werth des x der ächte und bestimmte seyn. Kömmt man aber in der Untersuchung dieses Werthes auf eine falsche Folge, so hat man selben aus anderen Gleichungen zu untersuchen.

18. §.

In dem Falle, daß der Punct dreyfach ist, so hat man noch die zwote Reihe, in welcher nämlich; das u^2, ux, x^2 sich einfinden (§. 7.), hinzuzusetzen, wo man dann wiederum ihre conficienten mit einer o zu vergleichen hat, und also hat man den Werth der unbestimmten Größen durch 6 Gleichungen auszurechnen. Auf gleiche Weise wird man in der Untersuchung eines Punctes, welcher vierfach ist, mehrmal eine neue Reihe hinzufügen müssen, in welcher nämlich u^3, u^2x, ux^2, x^3 würden enthalten

ten seyn; zugleich wurden auch zu den vorigen 6 Gleichungen 4 neue hinzukommen ꝛc. Die Aufgabe wird also mehr als bestimmt, und öfters auch nicht einmal auflößlich seyn. Ich will davon wiederum ein Beyspiel geben.

19. §.

Viertes Beyspiel.

Ich nehme die schon einmal angesetzte Gleichung; nämlich

$$y^3 - 2ay^2 + a^2y + x^2y - 2ax^2 = 0 \quad (16. \text{ §.})$$

$$\begin{array}{l} \;\; 3.0. \quad 2.0. \qquad 1.0. \quad 1.2. \qquad 0.2. \\ \hline (3y^2 - 4ay + a^2 + x^2)\,u + (2xy - 4ax)\,x. \end{array}$$

Man erhält also folgende 3 Gleichungen (17. §.) I. $y^3 - 2ay^2 + ay^2 + x^2y - 2ax^2 = 0$. II. $3y^2 - 4ay + a^2 + x^2 = 0$. III. $2xy - 4ax = 0$. Diese letzte Gleichung wird nun die bequemste seyn, hiedurch den Werth des x zu bestimmen. Doch, weil selbe sich nicht aufhebt, als in dem Falle, daß man das $y = 2a$ oder das $x = 0$ annehme, so setzen wir einmal, weil man doch den Werth des x untersuchen soll, daß $y = 2a$: hiemit verwandelt sich die gegebene Gleichung (16. §.) in folgende: $12a^2 - 8a^2 + a^2 + x^2 = 5a^2 + x^2 = 0$; und also wird $x = \pm a\sqrt{-5}$, welche Auflösung denn wegen der negativen Wurzel unter die Reihe der unmöglichen gehört. Man muß sich also zu einer andern wenden, und nach dem gesagten das $x = 0$ annehmen. In diesem Falle wird die vorgesetzte zwote Gleichung nämlich $3y^2 - 4ay + a^2 + x^2 = 0$ in $3y^2 - 4ay + a^2 = 0$ abgeändert werden, wo denn $y^2 - \frac{4}{3}ay = -\frac{1}{3}a^2$ und nach vollkommen ersetzten Quadrate und ausgezogener Wurzel bekömmt man endlich das $y = \frac{2a}{3} \pm \frac{a}{3}$; das ist: $y = a$, $y = \frac{a}{3}$. Rücke

man

man nun in der ersten Gleichung statt des y die erste Wurzel a ein, und nehme man zugleich $x = 0$ an, so wird seyn $a^3 - 2a^3 + a^3 = 0$. Es hat also die krumme Linie, welche zu dieser Gleichung gehört (16. §.), einen vielfachen und zwar einen zweyfachen Punct (9. §.), wovon die Absciſſe $= 0$, die Ordinate $= a$ ist. Die andere Wurzel nämlich $\frac{a}{3}$ ist, wie man sieht, zur weitern Berechnung unbrauchbar. Allein man könnte weiters fragen, ob dieser Punct etwa nicht dreyfach sey. Man untersuche also die zwote Reihe der abgeänderten Gleichung (16. §.).

$$3y^2u - 4ayu + a^2u + 2xyz + 4axz + x^2u$$
$$\tfrac{2}{2}.\,0. \quad \tfrac{1}{2}.\,0. \quad 0.\,0. \quad \tfrac{1}{2}.\,\tfrac{1}{2}. \quad 0.\,\tfrac{1}{2}. \quad \tfrac{2}{2}$$
$$3yu^2 - 2au^2 + xuz + yz^2 - 2az^2 + xuz.$$
$$(3y - 2a)\,u^2 + 2xuz + (y - 2a)\,z^2.$$

Man überkömmt also folgende Gleichungen: I. $y^3 - 2ay^2 + a^2y + x^2y - 2ax^2 = 0$. II. $3y^2 - 4ay + a^2 + x^2 = 0$. III. $2xy - 4ax = 0$. IV. $3y - 2a = 0$. V. $2x = 0$. VI. $y - 2a = 0$. Wir haben aber erst gezeigt, daß, wenn wir $y = 2a$ annehmen, die Auflösung unter die unmöglichen müsse gezählet werden. Nimmt man aber aus der 5ten angesetzten Gleichung des $x = 0$, so wird die erste Gleichung in $y^3 - 2a^2y + a^2y = 0$; oder in $y^2 - 2ay + a^2 = 0$ verwandelt, wo man denn zwo gleiche Wurzel überkömmt; nämlich $y = a$ und $y = a$. Die sechste Gleichung gilt endlich $y = 2a$. Weil es aber unmöglich ist, daß auf einem einzelen Punct eine zweyfache Absciſſe ruhe, so ist der untersuchte Punct der krummen Linie keineswegs dreyfach.

20. §.

Fünftes Beyspiel.

Nach den angeführten Regeln (17. 18. §§.) werde ich nun auch für den nämlichen Fall als es im letzt berechneten Beyspiele geschehen (19. §.) auch die oben angesetzte Gleichung (7. §.) untersuchen, wo es denn nicht mehr nöthig seyn wird, sich auf die schon bekannte Methode (17. 18. 19. §§.) zu beziehen.

$y^4 - 8\,y^3 - 12\,xy^2 + 16\,y^2 + 48\,xy + 4\,x^2 - 64\,x = 0$

4. 3. 2.1. 2. 1.1. 2. 1.

$4\,y^3u - 24\,y^2u - 24\,xyu - 12\,y^2z + 32\,yu + 48\,xu +$

$\frac{3}{2}$. $\frac{2}{2}$. $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}$. $\frac{2}{2}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$.

$48\,yz + 8\,xz - 64\,z$

$\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$

$6\,y^2u - 24\,yu^2 - 12\,xu^2 - 12\,yuz - 12\,yuz + 16\,u^2 + 24\,uz + 24\,uz + 4\,z^2$.

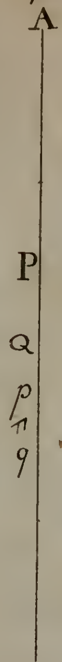
Hieraus lassen sich folgende 6. Gleichungen ansetzen: I. $y^4 - 8\,y^3 - 12\,xy^2 + 16\,y^2 + 48\,xy + 4\,x^2 - 64\,x = 0$. II. $4\,y^3 - 24\,y^2 - 24\,y^2 - 24\,xy + 32\,y + 48\,x = 0$. III. $-12\,y^2 + 48\,y + 8\,x - 64 = 0$. IV. $6\,y^2 - 24\,y^2 - 12\,x + 16 = 0$. V. $-24\,y + 48 = 0$. VI. $4 = 0$. Mittels der fünften Gleichung ist $48 = 24\,y$, und also $y = 2$. Rückt man diesen Werth in die vierte Gleichung ein, so wird $24 - 48 - 12\,x + 16 = 6 - 12 - 3\,x + 4 = 0$; hiemit $x = -\frac{2}{3}$. Ist $y = 2$, und übersetzt man davon den Werth in die dritte Gleichung, so wird $-48 + 96 - 64 + 8\,x = -6 + 12 - 8 + x = -2 + x = 0$, hiemit $x = 2$. Setzt man nun diesen Werth des x, wie auch den erfundenen von y in die vorigen 6. Gleichungen I. $16 - 64 - 96 + 64 + 192 + 16 - 121 = 0$. II. $32 - 96 - 96 + 64$

$+ 96 = 0$. III. $- 48 + 96 + 16 - 64 = 0$. IV. $24 - 48 - 24 + 16 = 0$. V. $- 48 + 48 = 0$. VI. Ist eine nicht mögliche Gleichung. Unterschiebt man nun die Werthe $x = 2$ und $y = 2$, so werden sich nur die ersten drey Gleichungen tilgen; die andern drey aber kommen nicht einmal übereins, hiemit ist der Punct nur zweyfach (9. §.).

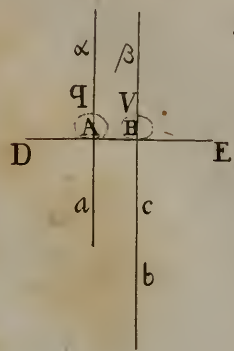
pag. 151

p. 152

p. 163

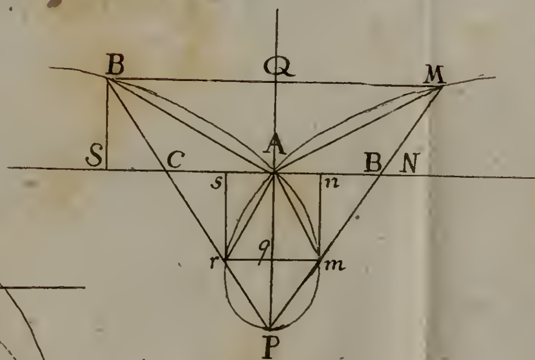


p. 158

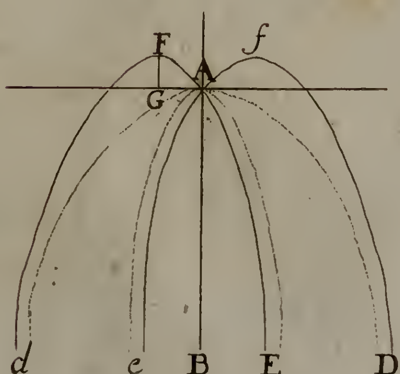


p. 156

p. 196



p. 194



Leonard Grubers
Benediktiners vom Kloster Metten,
einige

Grundsätze

der

Theorie der Centralkräfte,

in Rücksicht
auf die

Astronomie.

Vorbericht.

Man kann wohl sagen, daß die Vollkommenheit der Astronomie meistens von der mehreren Aufklärung, Ausbreitung und Auszierung der Theorie der Centralkräfte abhängt. Newton; dieser grosse Newton hat uns davon die ersten Grundsätze, welche sich in den allgemeinen Gesetzen der Natur selbst gründen, aufgedecket. Er hat uns in seiner so erhabenen als einfachen Theorie der anziehenden Kraft das ächte Bildniß der wirkenden Natur anschauen gelehret. Von diesen Zeiten mag man wohl die glücklichen Epochen einer gegründeten, einer aufgeklärten Astronomie herzählen. * Man läßt sich auch jetzt noch sehr angelegen seyn, die Theorie dieser anziehenden Kraft mehr und mehr aufzuklären, mit noch mehr dringenden Beweisen zu unterstützen, und selbe nach ihrem ganzen Umpfange auszubreiten. Die geschicktesten Mittel sind hiezu ohne Zweyfel eine richtige Mechanik-Lehre und höhere Geometrie. Ich will davon in dieser Abhandlung ein Beyspiel geben, und einige vornehmere Grundsätze von der Theorie der anziehenden Kraft, welche eben in sich nicht so bekannt und aufgeklärt, als nutzbar selbe in Rücksicht auf die Astronomie sind, aus den Grundsätzen einer neueren und verbesserten Mechanik und höheren Geometrie herzuleiten, mir angelegen seyn lassen; indem ich zeigen

*) La Decouverte de l'Attraction ouvrit, pour ainsi dire, aux Philosophes un nouveau ciel. Mr. de la Lande en Astron. Livr. XIX. §. 2420.

gen werde, was man daraus für nützliche und vortheilhafte Theoremes sowohl für verschiedene Gegenstände der Anziehungskraft selbst als der davon abhangenden Anwendungen auf die verschiedene Kreutzungen des Planetenlaufes wird machen können. Eines muß ich noch anmerken, daß ich nach dem Beyspiele anderer Mathematiker die in dieser Theorie durch gewisse Buchstaben festgesetzten Ausdrücke, und deßwegen auch einige Figuren für meine Beweise beybehalten habe; und obschon ich einige sonderliche Lehrsätze aus der Lehre von den Kegelschnitten angesetzet habe; so nehme ich davon einige leichtere Sätze aus der gemeinern Mechanik und Geometrie als bekannt an; um in Anführung der Beweise dieser überall schon festgestellten Sätze nicht gar zu sehr ausschweifen zu dürfen, weil ohne das diese Abhandlung nicht den Ruhm eines gelehrten Werkes, sondern nur das Zeugniß eines geringen Kenntnisses und weniger Uebung in der astronomischen Haupttheorie von den Centralkräften zu ihrem Gegenstand hat.

Einige

Einige Grundsätze der Theorie der Centralkräfte in Rücksicht auf die Astronomie.

---

1. §.

Der Satz, daß man eine jede Centralkraft, welche in sehr kleinen Zeitpuncten sich äußert, als eine einförmige Zunehmungs- oder Beschleunigungskraft annehmen könne, ist in der Theorie der Centralkräfte schon allgemein geworden. Wir wollen wegen eines vollkommnern Zusammenhangs und leichtern Begrifs des Nachfolgenden den Beweis dieses bekannten Theorems hier einrücken. Es sey (1. Fig.) APD eine Umkreislinie; Pp soll davon einen unendlich kleinen Bogen vorstellen. PVNP sey endlich der küßende Zirkel. Weil man nun den unendlich kleinen Bogen eben aus der Ursache, daß er unendlich klein ist, als eine gerade Linie annehmen kann, so bekömmt man folgende Gleichung der Verhältniße: $PE : PQ = PQ : PN$; und hernach $PH : Pp = Pp : PN$. Hiemit ist $PQ^2 = PE . PN$; und $Pp^2 =$

PH.

PH. PN. Deßwegen ist auch $PQ^2 : Pp^2 = PE : PH$. Aus der nämlichen Ursache, daß man Pp als unendlich klein annimmt, so kann man $QI = PE$ und $pi = PH$ betrachten; hiemit wird $PQ^2 : Pp^2 = QI : pi$. Man kann auch das QI zu pi und das QR zu pF als parallel annehmen: folglich würden die Dreyecke QIR und piF einander ähnlich seyn, und also ist $QR : pF = QI : pi$, aus welchem auch endlich die Analogie $QR : pF = PQ^2 : Pp^2$ fließt. Nun aber werden durch PQ und Pp die Zeitpuncte; durch QR aber und pF die Centralkräfte angezeiget. Weil also die Centralkraft in diesem Falle mit der Beschleunigungskraft die nämliche Analogie beybehält, so mag man diese für jene annehmen.

2. §.

Wenn wir durch f, durch S den Raum; durch t die Zeit anzeigen, so ist $f = \frac{S}{tt}$. Es ist aber der Raum oder $S = pF$; denn durch dieses wird die Bewegung durch die Centralkraft bis in p ausgedrückt; es ist also $f = \frac{pF}{tt}$; und, weil in der einförmigen Beschleunigungskraft $t = 1$, so wird $f = pF$.

3. §.

Die Zeiten sind wie die Summe der Sectorn oder der Dreyecke; hiemit ist auch t oder die Zeit für Pp = dem Dreyecke SpP oder SFP. Der Innhalt aber des ersten Dreyeckes ist $= SP X pM$, des zweyten $= ST X PF$; das ist = dem Factum der Grundlinien und ihrer Höhen. Wenn man nun in der vorher angesetzten Formel (2. §.) statt des t seinen Werth beybehält,

so

so bekömmt man $f = \frac{pF}{SP^2 . pM^2}$; oder auch $f = \frac{pF}{ST^2 . PF^2}$.

4. §.

Aus den Eigenschaften des Zirkels wissen wir, daß das Quadrat einer Tangente gleich sey dem Factum aus den Secanten. Es wird also $PF^2 = pF . pB$, und weil wir pP als unendlich klein angenommen haben (1. §.), so ist $pB = PV$; hiemit $pF = \frac{PF^2}{PV}$; dessen Werth, wenn wir selben in vorher gesetzter Formel (3. §.) einrücken, so wird $f = \frac{PF^2}{ST^2 . PV . PF^2} = \frac{1}{ST^2 . PV}$.

5. §.

Die zwey Dreyecke STP und PVN sind einander ähnlich; und also ist $SP : ST = 2PG : PV$; hiemit $PV = \frac{ST . 2PG}{SP}$; und $PV . ST^2 = \frac{ST^3 . 2PG}{SP}$, welchen Werth wir in die vorige Formel $f = \frac{1}{ST^2 . PV}$ (4. §.) übersetzen können, daß wir also $f = \frac{SP}{ST^3 . 2PG}$ überkommen.

6. §.

In der zwoten Figur kann man wegen der Aehnlichkeit der zweyen Dreyecke SPT und QPV folgende Proportion ansetzen;

$SP : ST = PQ : QV$, und also werden wir diese nämliche Analogie in $SP + PQ : ST + QV = SP : ST$; das ist in $2CA : 2CK$ (weil diese die mittere arithmetische Proportionallinie ist) $= SP : ST$ abändern können. Nun wissen wir aber aus der Lehre von den Kögelschnitten, daß in einer Ellipse $SP : ST = CA : CK$ (PD), wo denn wiederum das Factum bey den Durchmessern = dem Vierecke aus den halben Axen: und also $CA : PD = CN : CB$; deßwegen auch seyn wird $SP : ST = CN : CB$; folglich $ST = \frac{CB.\ SP}{CN}$. Wenn man ferner den halben Durchmesser des küssenden Zirkels in Betracht ziehet; so wird $PG = \frac{CN^2}{PD}$. Es ist aber aus der angesetzten Proportion das $PD = \frac{CA.\ CB}{CN}$: hiemit $PG = \frac{CN^3}{CA.\ CB}$. Setzen wir nun in der vorigen Formel (5. §.) statt des ST und PG ihren Werth, so bekommen wir das $f = \frac{CA}{SP^2.\ C^2 B^2}$: es sind aber CA und CB unveränderliche Größen; hiemit wird $f = \frac{1}{SP^2}$. In einer Hyperbole also kann man die nach dem Brennpuncte gerichtete Centralkraft durch die Gleichung $f = \frac{1}{SP^2}$; das ist, durch das verkehrte Verhältniß des quadrirten Radius Vector am sichersten ausdrücken.

7. §.

Eben diese Gleichung nämlich $f = \frac{1}{SP^2}$ kann man auch in der Parabole ansetzen. Denn, wenn man in dem Dreyecke STH (3. Fig.) aus dem ersten Winkel eine senkrechte Linie AT herab-

herabfallen läßt, so ist $ST^2 = SA.SH$. Es ist aber $SH = SP$; hiemit $ST^2 = SA.SP$; und also auch $ST^6 = SA^3.SP^3$. So ist nun der Radius des küssenden PG in einer Parabole $= \frac{DP^3}{4AS^2}$. Weiters ist $DP = 2ST$ (denn es ist die Analogie $HP : PD = HT : TS$; überdas $HP = 2HT$; folglich ist $PG = \frac{8ST^3}{4AS^2}$; und $2PG = \frac{4ST^3}{AS^2}$. Deßwegen, wenn wir in der oben angeführten Formel $\frac{SP}{ST^3.2PG}$ (5. §.) den Werth von $2PG$, nachmals den Werth von $4ST^6$ ansetzen, so wird $f = \frac{1}{4SP^2.AS}$, und nach weggelassenen unveränderlichen Größen ist $f = \frac{1}{SP^2}$; das ist, in der Parabole bekömmt man die nämliche Formel, welche wir vorher für die in einer Ellipse oder Hyperbole nach dem Brennpuncte gerichtete Centralkraft angeführt und bewiesen haben (6. §.).

8. §.

Wenn mehrere Körper mit ihren Centralkräften, welche nach einem gemeinen Brennpunct gerichtet sind; und durch die Formel $\frac{1}{SP^2}$ mögen ausgedrücket werden, (6. 7. §§.) in der Laufbahne Kögelschnitte beschreiben, so sind die Räume im Quadrat wurzlichten Verhältnisse der Parameter. Denn, weil nach dem bekannten Ausdrucke π oder der Parameter $= \frac{2CB^2}{CA}$; und wir vorher $f = \frac{AC}{SP^2.CB^2}$ bekommen haben (6. §.), so wird $f =$

$\frac{1}{SP^2 . \pi}$. Wir haben aber schon oben bewiesen, daß $f = \frac{pF}{SP^2 . PM^2}$ (3. §.); hiemit $\frac{1}{SP^2 . \pi} = \frac{pF}{SP^2 \, PM^2}$. Nun ist weiters pF, durch welches die Centralkraft ausgedrücket wird (2. §.), dem $\frac{1}{SP^2}$ gleich (6. 7. §§.), folglich, wenn man diesen Werth dafür annimmt, so wird $\frac{PF}{\pi} = \frac{pF}{SP^2 . PM^2}$ und also $\pi = SP^2 . PM^2$; hernach $\sqrt{\pi} = SP . PM$. Es ist aber $SP . PM$ mit dem Raume oder Sector in einem Verhältnisse (3. §.): also auch $\sqrt{\pi}$ oder der quadratwurzlichte Parameter wie die Räume ꝛc.

9. §.

Die Geschwindigkeit läßt sich in einem unendlich kleinen Zeitraum durch Pp ausdrücken (1. §.). Weil nun die Dreyecke SPT und pMB einander ähnlich sind, so überkömmt man eine Analogie, nämlich $ST : SP = pM : pD$, wo $pP = \frac{SP . PM}{ST}$. Es ist aber $SP . PM = \sqrt{\pi}$: (§. 8.) folglich $pP = \frac{\sqrt{\pi}}{ST}$. Das ist: die Geschwindigkeit ist in einem geraden quadratwurzlichten Verhältniße des Parameter, und umgekehrten Verhältnisse des Perpendikels.

10. §.

Je weitläuftiger der Raum einer Ellipse, welchen wir a heißen wollen, ist; oder je kleinere Theile der bewegte Körper in seiner Laufbahne beschreibet, um so größer ist die Zeit des Umlaufes; das ist $t = \frac{a}{s}$. Nun sind aber die Räume oder S mit $\sqrt{\pi}$

in

in einem Verhältnisse (§. 8.), so ist also auch $t = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$ und $a = t\sqrt{\pi}$. Es stehet also a oder die Größe des Raums einer Ellipse in einem Verhältnisse, welches aus dem quadratwurzlichten Verhältnisse des Parameters der größern Axe und der einfachen Zeit von dem ganzen Umlaufe zusammengesetzet ist.

11. §.

Es sey in einer Ellipse die kleinere Axe $= b$, die größere oder Hauptaxe $= d$; der Parameter von dieser sey $= \pi$. Aus der Theorie der Kegelschnitte wissen wir, daß $d\pi = b^2$, hiemit die ganze Gleichung durch d^2 multipliciret giebt $d^3\pi = b^2 d^2$. Es ist nun die Größe des Raums in einer Ellipse wie ein anderes Viereck; das ist: $a = b\,d$. Wir haben aber erst gleich oben (§. 10.) gesehen, daß $a = t\sqrt{\pi}$: so ist nun auch $bd = t\sqrt{\pi}$ und $b^2 d^2 = t^2\pi$: und, wie wir jetzt gesagt haben, so ist $b^2 d^2 = d^3\pi$; deßwegen ist nach geschehener Einschaltung des Werths von $b^2 d$ klar, daß $d^3\pi = t^2\pi$, und also $d^3 = t^2$, oder $t = \sqrt{d^3}$. In einer Ellipse verhält sich also die periodische Zeit, wie die Quadratwurzel des Cubus von der größeren Axe.

12. §.

Aus diesem nun lassen sich die Verhältnisse für die wahren Durchmesser, für die Fläche und körperlichen Innhalt der Planeten bestimmen, welche wir, weil sie ohnedem sehr bekannt sind, weglassen wollen.

13. §.

Damit ein Körper bey abwachsender Centralkraft die nämliche Ellipse beschreibe, so muß die Linie der beyden Apsiden nach demjenigen Theil, in welchem der Körper sich beweget, gewendet werden. Hingegen, wenn die Centralkraft anwächst, so richtet sich die Apsiden Linie nach dem gegenseitigen Theile.

14. §.

Man wird auch ganz leicht begreifen, daß in einem Zirkel, in dessen Mittelpuncte die Centralkraft überall die nämliche ist, und also ein solcher Zirkel keinen anderen Küssenden als sich selbst hat, alle SP, ST seyn = 1, und also auch $f = 1$.

15. §.

Wenn man hingegen den Mittelpunct der Kräfte außer den Mittelpunct eines Zirkels z. E. in S ansetzet (Fig. IV.), und annimmt, daß der Körper in P sey, und einen unendlich kleinen Bogen PQ beschreibe, so werden wir aus der vorigen Formel $f = \frac{p\,F}{ST^2 .\, PM^2}$ (§. 3.) für diesen Fall $f = \frac{PR}{ST^2 .\, PQ^2}$ überkomen. Nun wird aus der Theorie für die Eigenschaften des Zirkels bewiesen, daß $PQ^2 = PO \times PB$; Es ist aber auch wegen der Achnlichkeit der Dreyecke POR und PVB ausgemacht, daß $PO : PR = PV : PB$, und also $PO = \frac{PR .\, PV}{PB}$: Deßwegen rücke man diesen Werth in der vorhergehenden Gleichung ein, so erhält man $PQ^2 = \frac{PR .\, PV .\, PB}{PB} = PR .\, PV$. Diesen Werth des PQ^2, wenn man ihn in der allgemeinen Formel ansetzet, so bekömmt man $f = \frac{PR}{ST^2 .\, PR .\, PV} = \frac{1}{ST^2 .\, PV}$. Ferner sieht man, daß die Dreyecke PBV und STP sich ähnlich sind (denn den Winkel VPT mißt der halbe Bogen PV, welcher gleichfalls

das

das Maaß des Winkels VBP ist; wie auch sind die Winkel bey T und V $= 90'$): hiemit ist PB : PV $=$ SP : ST; und also $ST^2 = \frac{PV^2 . SP^2}{PB^2}$, welcher Werth die vorige Formel in $f = \frac{PB^2}{PV^2 . PV . SP^2}$ verwandelt: und weil PB eine unveränderliche Größe anzeiget, so wird $f = \frac{1}{PV^3 . SP^2}$; oder diese Formel mit Worten auszudrücken, so ist die Centralkraft, wenn selbe außer den Mittelpunct eines Zirkels angesetzet wird, allzeit in dem umgekehrten Verhältnisse, welches aus dem Cubus der Sehne, so durch den Mittelpunct der Kraft und die Lage des Körpers gezogen wird, und aus dem Quadrat des Radius Vector zusammengesetzet ist.

16. §.

Will man nun wissen, was für eine Größe oder wie viel Theile des Durchmessers ein Körper, welcher aus A (Fig. V.) vermög seiner natürlichen Schwere herabfällt, beschreibe, auf daß er jene Geschwindigkeit überkomme, welche ihm nöthig ist, einen halben Umkreis des Zirkels zu durchlaufen, so setze man vor allem den Bogen AM als unendlich klein, und also als eine gerade Linie an. Wenn man nun die Abscisse AP annimmt, daß sie der Centralkraft gleichkömmt, und daß AP in dem nämlichen Zeitraum beschrieben wird, in welchem der Körper den Bogen AM durchläuft, so ist AP : AM $=$ AM : AB: und also $AP = \frac{AM^2}{AB}$. Man setze nun ferner, daß der Körper in einer einförmig zunehmenden Bewegung weiters in L herabfalle, hiemit auch indessen mit einer gleichförmigen Bewegung in dem Zirkel bis in Q fortrücke, so wird man (wenn AM und AQ die Zeit ausdrücken) eine neue

Ana-

Analogie $AP : AL = \frac{AM^2}{AB} : \frac{AQ^2}{AB}$ bekommen. Man kann nun diese in $AP : \frac{AM^2}{AB} = AL : \frac{AQ^2}{AB}$ verändern. Wir haben aber allererst bewiesen, daß $AP = \frac{AM^2}{AB}$; es ist also auch $AL = \frac{AQ^2}{AB}$. Weil aber AQ im Ende seiner Geschwindigkeit mit einer gleichförmigen Bewegung, AL mit einer beständig zunehmenden ist beschrieben worden, so ist $AQ = 2\,AL$, und $AQ^2 = 4\,AL^2$. Deßwegen, wenn man diesen Werth in der Gleichung $AL = \frac{AQ^2}{AB}$ für AQ^2 ansetzt, so bekömmt man endlich $AL = \frac{4\,AL^2}{AB}$, und $AL.\,AB = 4\,AL^2$; nachmals $AB = 4\,AL$, und endlich $AB = 4\,AL$, wie auch $AL = \frac{1}{4}\,AB$. Das Maaß der Geschwindigkeit also ist in diesem Falle ein halber Radius oder der vierte Theil von einem Durchmesser.

17. §.

Suchen wir einen allgemeinen Ausdruck oder Formel für die Centralkraft, wenn der Mittelpunct der Kräfte in den Mittelpunct einer Ellipse, nämlich in S (VI. Fig.) gesetzt wird, so müssen wir wiederum die Formel $f = \frac{SP}{ST^3.\,2PG}$ (5. §.) für uns nehmen, und weil $2PG$ oder das zweyfältige des halben Durchmessers des küssenden Zirkels ist $= \frac{2SD^2}{ST}$, so bekommen wir $f = \frac{SP.\,ST}{ST^3.\,2SD^2} = \frac{SP}{ST^2.\,2SD^2}$. Aus der Theorie der Kögelschnitte kann man ferner in einer Ellipse die Analogie $SD.\,ST = SB.\,SA$

ge-

gebrauchen, wo $SD^2 = \frac{SB^2 . SA^2}{ST^2}$: deßwegen wird $f = \frac{SP . ST^2}{ST^2 . 2SB^2 . SA^2} = \frac{SP}{2SB^2 . SA^2}$: es sind aber SB und SA unveränderliche Größen, deßwegen bleibt $f = SP$.

18. §.

Das Verhältniß der periodischen Zeit in einer Ellipse zu einem Zirkel zu finden, so wollen wir (7. Fig.) für den Zirkel die Größe des Raumes = A, für die Ellipse aber = a; den Sector AMS = S, den andern Sector ANS = s; die Zeit für den Zirkel = T; für die Ellipse = t annehmen. Nun sind die Perioden der Zeit in dem geraden Verhältnisse der Räume und in dem umgekehrten der Zeiten; hiemit $T : t = \frac{A}{S} : \frac{a}{s}$. Weiters hält der Raum eines Zirkels zu der Größe eines elliptischen Raumes eben das Verhältniß, welches die grosse oder Hauptaxe zu der kleinern Axe beybehält; das ist: $A : a = SD : SG$. Deßwegen wird die vorige Proportion durch Unterschiebung des Werthes in $T : t = \frac{SD}{S} : \frac{SG}{s}$ verwandelt. Es sind aber auch die Sectores wie die Größen der Räume; und diese wie die Axen: so ist denn auch $S : s = SD : SG$; oder nach dafür angesetztem Werthe wird $T : t = \frac{SD}{SD} : \frac{SG}{SG}$ das ist $T : t = 1 : 1$, hiemit $T = t$.

19. §.

Wenn ein Körper aus dem obersten Puncte der Apsidenlinie in die b gesetzt wird, so ist die Geschwindigkeit in einer Ellipse, wo der Mittelpunct der Kräfte in S ist, nicht so groß, als selbe ist in einem Zirkel, welchen man aus dem Mittelpuncte S durch den Radius AS (8. Fig.) beschreibet. Dieses zu beweisen, so nehmen wir AP zur Abscisse an, und ziehen wir zur selben die Ordinaten PN, PM. Es ist nun richtig, daß AN und AM zur nämlichen Zeit beschrieben werden, in welcher der Körper durch AP sich beweget. Gleichwie nun AP = AP, so ist auch AN = AM, wenn sie sich nämlich auf die Zeit beziehen. Allein, obschon AP oder die Centralkraft beständig die nämliche ist, so ist doch in sich selbst AM > AN: die Ungleichheit also der Geschwindigkeit muß sich auf die Tangentialkraft gründen. Daß aber M über das N hinaus fallen muß, ist die Ursache, weil der halbe Durchmesser des küssenden Zirkels dem Quadrate des conjugirten Diameters, welcher in diesem Falle die halbe kleinere Axe ist, gleichet, welches Quadrat man hernach mit der senkrechten Linie, dessen Stelle die halbe größere Axe vertritt, muß getheilet werden. Es ist also $2PG = \frac{b^2}{a}$: aber auch $\frac{1}{2}\pi$ ist $= \frac{b^2}{a}$ (11 §.): folglich ist der halbe Durchmesser des küssenden Zirkels im Scheitelpuncte dem halben Parameter gleich: es ist aber $\frac{1}{2}\pi < AS$, denn $\frac{1}{2}\pi = PN$, welches ja kleiner ist als die halbe kleinere Axe, und folglich noch viel kleiner als die halbe größere Axe, hiemit auch $PN < AS$; der ganze Zirkel also fällt für die Ellipse hinaus.

20. §.

Wird ein Körper aus dem untersten Puncte der Apsidenlinie zur Bewegung hingerissen, so ist die Geschwindigkeit in einer Ellipse, wo der Mittelpunct der Kräfte in S gesetzet wird, größer als die Geschwindigkeit in einem Zirkel, welcher aus dem Mittelpuncte S durch den Radius AS beschrieben wird (9. Fig.). Denn, wenn man wiederum AP für die Abscisse nimmt, so werden

den die Bögen A M und A N in der nämlichen Zeit durchgelaufen: weil aber A N > A M, so muß in der Ellipse eine größere Geschwindigkeit seyn. Die Centralkraft bleibt aber die nämliche, also ist davon der Unterschied von der Tangentialkraft herzuleiten. Hiemit ist in einer Ellipse die Tangentialkraft größer als in einem Zirkel. Weiters fällt der ganze Zirkel in den Raum der Ellipse; denn, wie wir erst oben (§. 19.) gesagt haben, so ist $\frac{1}{2}\pi$ = dem halben Durchmesser des küssenden Zirkels; hernach ist $\frac{1}{2}\pi$ in diesem Falle grösser als A S, und eine halbe Axe ist auch größer als der halbe Durchmesser des küssenden Zirkels: deßwegen wird der küssende Zirkel niemals die Ellipse berühren, viel minder über selbe hinaus fallen können.

21. §.

In dem Falle, daß die Centralkraft die nämliche sey, und der Körper aus dem untersten Punct der Apsidenlinie zur Bewegung hingerissen werde, so läßt sich fragen, in welchem Kegelschnitte die Geschwindigkeit größer sey. Diese Frage zu erörtern sey (Fig. 10.) A der unterste Punct in der Apsidenlinie und zugleich der Scheitelpunct für die Kegelschnitte, welche sollen beschrieben werden; S sey der Mittelpunct der Kräfte. Man nehme nun den Punct P, wo A P die Centralkraft ausdrücket, und richte daselbst die Ordinate P L auf. In A ziehe man eine Tangente A Q = A S. Aus der Beschreibung der Kegelschnitte, und aus ihren Eigenschaften wissen wir, daß in der Parabole A S gleich sey dem Abstande der Leiterin (Linea directrix) von dem conischen Scheitelpuncte. In der Ellipse ist aber dieser Abstand der Leiterin größer, und in der Hyperbole kleiner als A S. Deßwegen, wenn ich außer dem A eine Linie A R nehme, und noch vorher A S in A *b* übersetze; nachmals zwischen A und *b* den Punct B;

 und

und endlich außer dem *b* den Punct *β* anmerke, so ist es richtig, daß in B die Leiterin der Hyperbole, in *b* die Leiterin der Parabole, in *β* die Leiterin der Ellipse anzutreffen sey. Ziehe man nun aus diesen Puncten durch Q die Tangenten, so wird die Tangens der Ellipse in der Ordinate PL den kleinsten Theil, die Tangens der Parabole einen größeren, die Tangens der Hyperbole den größten Theil abschneiden. Die Ordinaten aber drücken die Tangentialkraft aus; deßwegen, weil man angenommen hat, daß die Centralkraft die nämliche sey, so wird in der Hyperbole die größte, in der Parabole eine mindere, in der Ellipse endlich die kleinste Geschwindigkeit oder Tangentialkraft seyn.

22. §.

Eben dieses kann man aus der Beschreibungsforme der Kegelschnitte herleiten. Es sey (Fig. XI.) z. B. M. N. eine unbestimmte Linie. In S setze man den Brennpunct der Kegelschnitte, also zwar, daß selbe die Linie M N in P berühren. Nun wird SP den Radius vector oder die Centralkraft für alle als gleich ausdrücken. Man lasse weiters aus S in MN eine senkrechte Linie ST herab fallen, und man ziehe eine ihr gleiche T K, wie auch aus K durch P eine andere unbestimmte. Nun wird man in dieser alle Brennpuncte der Kegelschnitte antreffen, welche nämlich also beschrieben werden, daß sie ihren Brennpunct in *S* haben und die Linie M N in P berühren. Denn nehme man in selber einmal einen Punct F, so wird K F die Axe; S F der Abstand der zween Brennpuncte. Theilen wir S F in C in gleiche Größen, so bekommen wir in C den Mittelpunct der Ellipse. Schneide man hernach K F entzwey und übersetze man sie aus C über das S und F hinaus, so bekömmt man die Axe A B, und die Ellipse APF. Nimmt man ferner F in einem unendlich grossen Abstande an, oder zieht man durch S eine

Parallele zu K F, welche nämlich in einem unendlich entfernten Abstande sich mit K F vereiniget, so bekömmt man durch G S die Lage einer Parabole; und, wenn man aus K auf dieselbe eine senkrechte Linie K G herabfallen läßt, so wird diese die Leiterin seyn; da hingegen die Linie G S, wenn man sie entzwey schneidet, den Scheitelpunct a bestimmet, und die Parabole in P berühret wird. Wenn man endlich in der nämlichen Linie ausser K einen Punct ϕ annimmt, und diesen mit S vereiniget, so wird ϕ S die Lage der Axe und ϕ K die Axe, welche, wenn sie in S ϕ, so vorher schon in C entzwey geschnitten wird, auf beyde Seiten in a und a übersetzt ist worden, so wird a den Scheitelpunct anmerken; und die Hyperbole in P berühret werden. Wir haben nun schon vorher das Verhältniß der Geschwindigkeit, welche wir jetzt V heißen wollen, durch eine Formel angezeigt (§. 9.); nämlich $V = \frac{\surd \pi}{ST}$, und weil S T in diesem Falle unveränderlich ist, so wird $V = \surd \pi$ oder $V^2 \pi$. Es ist aber nach den bekannten Gleichungen der Kegelschnitte in einer Ellipse der $\frac{1}{2}\pi = \frac{2ac - c^2}{a}$; in der Parabole $\frac{1}{2}\pi = 2c'$; in der Hyperbole $\frac{1}{2}\pi = 2ac + c^2$, deßwegen, wenn wir diese Gleichungen in Analogien auflöseu, so bekommen wir I. $a : 2a - c = c : \frac{1}{2}\pi$, wo $2a - c < 2a$, hiemit auch $\frac{1}{2}\pi < 2c$. II. $\frac{1}{2}\pi = 20$. III. $a : 2a + c = c : \frac{1}{2}\pi$, wo $2a + c > 2a$, und also auch $\frac{1}{2}\pi > 2c$. Folglich ist $\frac{1}{2}\pi$ in der Hyperbole am größten, in der Parabole nicht so groß, in der Ellipse aber kleiner: Wir haben aber gleich jetzt gesagt, daß die Geschwindigkeit oder $V^2 = \pi$; hiemit ist auch diese oder die Tangentialkraft in einer Hyperbole die größte, in einer Parabole minder groß, und in der Ellipse am kleinsten.

23. §.

Erster Lehnsatz.

Wenn man in einer Ellipse oder Hyperbole (12. und 13. Fig.) durch den Mittelpunct C eine Linie ziehet, also zwar, daß selbe zu der Tangente T M X parallel sey, so wird sie zwischen E π und M einen Theil der geraden Linie F M (12. Fig.) oder fM (13. Fig.) einschliessen, welcher der halben Hauptaxe gleich kömmt. Es sey also in der Ellipse (12. Fig.) die Linie K C D zu der Tangente X T parallel. Man vereinige das M mit f und F, und ziehe überdas eine senkrechte Linie MN, welcher in O eine andere fQ zu K D und T X parallel entgegen läuft. Weil nun $fMT = XMQ$, und $MfO = MQO$, wie auch $QMO = OMf$, so sind die Dreyecke QOM, fOM einander ähnlich und gleich: und deßwegen wird auch $Mf = MQ$. Es ist aber $FM + Mf = Ss$ oder der Hauptaxe gleich; weiters, weil $FC = Cf$ und CE zu fQ parallel ist, so folget, daß $FE = EQ$. Deßwegen ist EQ die Semidifferenz zwischen Mf oder MQ und MF, welche also, wenn man sie zur QM hinzusetzet, die halbe Summe der geraden Linien F M und Mf ausmachen.

In der 13. Fig. sey C Q zu X T parallel. Ziehe man nun durch F und M eine unbestimmte Linie, welche in Q und H den geraden und zu X T parallelen Linien C Q und F H entgegen kömmt. Die unter sich gleiche Winkel T M H, XMf sind auch ihren abwechselnden gleich, nämlich $= MHf$, MfH; so ist denn auch $fM = MH$. Hernach, weil $fC = CF$, so ist auch $HQ = QF$. Es ist aber $fM - FM = sS$ und $\frac{1}{2}fM$ (oder $\frac{1}{2}HM$) $- \frac{1}{2}FM = CS$; das ist $\frac{1}{2}HM - \frac{1}{2}FM = \frac{1}{2}HQ + \frac{1}{2}QM - \frac{1}{2}FM =$

$\frac{1}{2}$ F

$\frac{1}{2}FQ + \frac{1}{2}QM - \frac{1}{2}FM = \frac{1}{2}QM + \frac{1}{2}MF + \frac{1}{2}QM - \frac{1}{2}FM = QM = CS$. Weil aber EQ zu fH parallel ist, und $Mf = MH$, so ist auch $QM = EM$.

24. §.

Wenn man die vorige Construction der zwölften und dreyzehenden Figur beybehält, (23. §.) so kann man gleichfalls zeigen, daß $MN \times MR$ dem CL^2 gleiche. Denn sowohl in der Ellipse als Hyperbole ist $CV \times CX = CL^2$. Ziehet man nun aus dem Mittelpuncte C zur Tangente XF eine senkrechte Linie CI, so sind die Dreyecke CIX und MPN einander ähnlich. Deßwegen bekömmt man $CI : CX = MP : MN$. Es ist aber $CI = MR$, und $MP = CV$: wenn man also diese dafür ansetzet, so wird $MR : CX = CV : MN$, und also $MR \times MN = CX \times CV = CL^2$.

25. §.

Zweyter Lehnsatz.

Wenn aus dem Intersectionspuncte N, wo die Normallinie und die Axe des Kögelschnittes zusammen stoßen, die zu FM senkrechte Linie NB gezogen wird, so ist MB dem halben Parameter gleich. Denn in der Ellipse (12. Fig.) sind die Dreyecke NBM, EMR, welche bey B und R einen rechten Winkel haben, wegen den bey M gemeinschaftlichen Winkel einander ähn-

lich.

---

*) Es verstehet sich von selbst, daß die Parallele zur Tangente, welche durch den Mittelpunct gezogen ist, ein conjugirter Durchmesser derjenigen Linie sey, welche man durch den Berührungspunct gezogen hat.

lich. Deßwegen ist $MB : MN = MR : ME$ oder CS (23. §.); folglich $CS \times MB = MN \times MR = CL^2$ (25. §.). Wenn man nun den halben Parameter, als die zu CS und CL beständige dritte Proportionallinie, L heißt, so ist auch $CS \times L = CL^2$, hiemit $CS \times MB = CS \times L$ oder $MB = L$.

In der Hyperbole (13. Fig.) sind sich die Dreyecke MRQ und MBN wegen gleichen Winkeln bey der Spitze M, und den rechten Winkeln bey R und B ähnlich. Deßwegen ist $RM : MQ$ (oder CS 23. §.) $= MB : MN$, wo wir denn wiederum bekommen $RM \times MN = CL^2$ (25. §.) $= BM \times CS$; und, wenn der halbe Parameter L genennet wird, so wird wie vorher $L = BM$.

Für die Parabole (14. Fig.) ist dieses wohl sehr leicht zu beweisen. Denn daselbst ist allzeit $FM = FN$: und, weil bey F der gemeinschaftliche Winkel ist, wie auch bey P und B rechte Winkeln anzutreffen, so sind auch die Dreyecke FMP und FNB einander ähnlich und gleich; folglich $FP = FB$. Deßwegen, wenn man gleiche Größen von gleichen wegnimmt, so verbleibt $PN = BM$. Es ist aber aus der Lehre von Kögelschnitten sehr bekannt, daß in einer Parabole PN oder die Subnormal dem halben Parameter gleiche: so ist denn auch demselben die Linie BM gleich.

26. §.

Aus dem gesagten kann man wohl ganz leicht eine Methode finden, den halben Durchmesser des küssenden Zirkels zu bestimmen, wenn die Normale und der Brennpunct in einem Kegelschnitte gegeben sind; oder auch die Normale zu finden, wenn man den halben Durchmesser des küssenden Zirkels, und die Sehne, welche durch den Brennpunct geht, vorher weis. Denn die Normale

fällt

fällt nothwendig auf den halben Durchmesser des küssenden Winkels, weil alle beyde in dem nämlichen Punct M (Fig. XV.) zur Tangente MQ senkrechte Linien sind, und der halbe Durchmesser des küssenden Zirkels in allen Kegelschnitten um den Cubus der Normallinie, welcher mit dem Quadrate des halben Parameters dividirt wird, gleich ist. Es sey also nach dem gegebenen Beweise MB der halbe Parameter (§. 24.), so wird auch $MC = \frac{MN^3}{MB^2}$: hiemit $MB^2 : MN^2 = MN : MC$; oder, wenn man aus N zu MC eine senkrechte Linie aufrichtet, welche in L der geraden Linie FM entgegen kömmt, so ist die Analogie $BM : MN = MN : ML$, und also auch $MB^2 : MN^2 = MB : ML$ oder $MB : ML = MN : MC$. Weil nun bey B und deßwegen auch bey L ein rechter Winkel ist, so ist es nicht möglich, daß MC ein halber Durchmesser des Zirkels sey, außer es ist $ML = \frac{1}{2} MV$. Man findet also aus dieser Proportion und Construction sowohl den halben Durchmesser des küssenden Winkels, als auch die halbe Sehne ML, welche durch den Brennpunct F gezogen ist.

27. §.

Im Gegentheil giebt man den halben Durchmesser des küssenden Zirkels, und den Brennpunct des Kegelschnittes so findet man die Normale MN. Denn, wenn MC und der Punct F bekannt sind, so weis man auch das MV und ML. Es sind aber die Dreyecke MBN und MLC einander ähnlich: deßwegen, weil $BM^2 : MN^2 = MN : MC$, so ist auch $ML^2 : MC^2 = MN : MC$; und also $MN = \frac{ML^2}{MC}$. Man darf jetzt nichts anders thun, als daß man aus L zu MC eine senkrechte Linie LN herabfallen läßt, welche sodann die gesuchte Normallinie MN bestimmen wird.

28. §.

Dritter Lehnsatz.

Wenn man eine Sehne MV (Fig. XV. XVI. XVII. XVIII.) in D also theilet, daß $MD = \frac{1}{4} MV = \frac{1}{2} ML$, hernach das D mit N vereiniget, so wird die Linie DN zu Mf, welche durch den andern Brennpunct gezogen ist, parallele seyn. Denn den Winkel FMf schneidet die Normale MN in jedem Kegelschnitte in zween gleiche Theile, wenn nämlich in der Hyperbole auch der äußere Winkel oder $DM\phi$ (Fig. XVII.) in Betracht gezogen wird. Es ist also $DMN = NMf$, oder in der Hyperbole $= NM\phi$. Hernach, weil LN zu MN senkrecht ist, und $LD = DM$, so ist auch $DN = DM$ und $DMN = DMN = NMf$; das ist, DN, Mf (oder $M\phi$) sind gleichlaufende Linien.

29. §.

Wir bekommen also in einer Ellipse (Fig. XV. XVI.) die Analogie $FD : DN = FM : Mf$; das ist, $FD : DM = FM : Mf$; und, wenn wir zusammen setzen, so ist $FD : FD + DM (= FM) = FM : FM + Mf (= sS)$. Deßwegen, im Falle wir das FM (Fig. XVI.) weiter hinausziehen, oder verlängern, daß nämlich sey $FD : FM = FM : FE$, und, wenn man hernach aus E die senkrechte Linie EQ, welche auf die Tangente herabfällt, verlängeret, bis nämlich $EQ = Qf$, so wird f der andere Brennpunct, durch welchen die verlängerte fN gehet, denn aus eben der Ursache wird $ME = Mf$ und $FE = Ss$.

30. §.

In einer Hyperbole (Fig. XVII.) liegt F, wenn man selbes auf das M beziehet, ober den D. Doch bekömmt man wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke DFN und FMf die Analogie DF: DN (oder DM) = FM: Mf: und abgetheilter ist DF: DM — DF (FM) = FM: Mf — FM (Ss). Wenn man also in der geraden Linie MV auf der Seite, wo das D ist, das FE nimmt, daß nämlich DF: FM = FM: FE; wenn man hernach die aus E in MQ herabgelassene senkrechte Linie EQ hinausziehet, bis EQ = Qf, so bekömmt man das f, und also die transverse Axe FE = Ss.

31. §.

In der Parabole ist Mf = ∞. Wenn man nun annimmt, daß FD: FM = FM: ∞ (Fig. XVIII.), so folgt nothwendig, daß sich FD verliehren muß, weil ∞ : FM = FM: o: deßwegen fließen die zween Puncte F und D zusammen; doch kann man den Scheitelpunct einer Parabole leicht bestimmen, wenn man aus M eine senkrechte Linie MP auf die hinaus gezogene Linie FN herabfallen läßt, und die Subtangens PT in S in zween Theile schneidet.

32. §.

Hier läßt sich zugleich eine allgemeine Folgerung machen, daß, wenn F unter dem D liegt, der Kegelschnitt eine Ellipse sey (Fig. XV. XVI.); fließt aber F mit D zusammen, so ist selber eine Parabole (Fig. XVIII.). Liegt endlich das F ober dem D, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbole (Fig. XVII.). Denn im ersten Falle ist MFN < MDN; folglich müssen FN und Mf zusammenstoßen, und zwar auf der Seite N, welche sich gegen die Tangente MQ wendet. Im zweyten Falle ist es klar, daß sie nirgends einander begegnen. Aber im dritten Falle (Fig. VII.) ist MFN > MDN, hiemit stossen die zwo Linien NF und Mf auf der Seite F zusammen, welche die Gegenseite der Tangente MQ ist. Nun dann im ersten Falle sind die Brennpuncte auf der nämlichen Seite der Tangente, welches sich bey einer Ellipse äußert. Im zweyten Falle hat der eine von den Brennpuncten einen unendlich entfernten Abstand, welches der Parabole eigen ist. In dem dritten Falle sind die Brennpuncte auf den verschiedenen Theilen der Tangente anzutreffen, welches aber nur von der Hyperbole kann verstanden werden.

33. §.

Dieses alles, was wir vom 23. §. bis auf den gegenwärtigen Absatz gesagt haben, mußten wir voraus setzen, um die nachfolgenden Sätze von der Theorie der Centralkräfte ächt aufgeklärt einzusehen, und gründlich zu beweisen. Es gehören aber selbe meistens zur richtigen Bestimmung der Laufbahne eines Planeten; wie auch die Geschwindigkeit eines Körpers zu bestimmen, mit welcher derselbe nach der gegebenen Richtung muß hingerissen werden, damit er um den gegebenen Mittelpunct der Kräfte einen Kegelschnitt beschreibe, welchen man nämlich aus dem halben Durchmesser des küssenden Winkels und aus der Sehne, welche man durch den Mittelpunct der Kräfte ziehet, finden kann; oder auch daß man die Lage und die Größe des zu beschreibenden Kegelschnittes bestimmen kann, wenn die Geschwindigkeit und die Richtung eines durch die Bewegung hingerissenen Körpers gegeben sind. Man setzt aber hier allzeit im voraus als bekannt, daß die Centralkräfte in einem gezweyfältigten umgekehrten Verhältnisse, Ratio duplicata reciproca, der Abstände wirken.

34. §.

Es sey (XV. Fig.) ein küssender Zirkel, welcher seinen Durchschnitt in M hat. Der Mittelpunct der Kräfte sey F; die Richtung der mitgetheilten Kraft sey MP. Endlich die Sehne MV solle durch F gehen. Setze man nun, daß der Körper in M schon jene Geschwindigkeit inne hätte, welche er doch erst bekommen würde, wenn er durch MD herab fiele. Nun wird selber zu der nämlichen Zeit, wo er mit einer einförmigen Kraft die Linie MD beschreibet, das zweyfache davon, nämlich ML beschreiben, im Falle seine Bewegung eine einförmig zunehmende oder beschleunigende wäre. Gleichfalls, da der Körper, im Falle er durch die nämliche Geschwindigkeit dahin gerissen würde, mit einer gleichförmigen Bewegung die Linie MP beschreibt, so würde er mit einer gleichförmig zunehmenden Bewegung die Linie PR durchlaufen; es haben aber die Räume, welche bey der Wirkung der nämlichen Anziehungskraft durch eine einförmig zunehmende Kraft durchlaufen werden, das nämliche Verhältniß unter sich, welches die Quadrate der Zeiten beobachten; und diese sind wie die Quadraten der Räume, welche zu der nämlichen Zeit mit einer einförmigen und durch den Fall überkommenen Geschwindigkeit beschrieben würden; wie dieses alles aus der Lehre der Mechanik bekannt ist. Es ist also $PR : MD = MP^2 : ML^2$. Und, wenn man das erste Verhältniß mit PA, welche zu MV parallel ist, multiplicirt, so ist $PR \times PA : MD \times PA = MP^2 : ML^2$. Es ist aber bekannt, daß in einem Zirkel $PR \times PA = MP^2$: so ist denn auch $MD \times PA = ML^2$. Deßwegen ist $PA : ML = ML : MD$. Wenn nun die Linie PA der andern Linie MV unendlich nahe kömmt; oder wenn die Puncte M R zusammenfließen, so ist $PA = MV$; deßwegen auch $MV : ML = ML : MD$. Nehme man nun, daß $ML = 2MD$, so ist $MV = 2ML$, mithin

hin $MD = \frac{1}{4} MV$. Das ist: die Sehne eines küssenden Zirkels in einem Kögelschnitte, wenn sie durch den Brennpunct gehet, in welchem der Mittelpunct der im umgekehrten gezweyfältigten Verhältnisse wirkenden Kräfte ist; eine solche Sehne ist die vierfache Höhe, durch welche ein Körper fallen muß mit einer unveränderlichen Anziehungskraft, welche er in einem solchen Abstande hat, daß er jene Geschwindigkeit überkomme, mit welcher er nach der gegebenen Richtung soll hingerissen werden, um den gegebenen Kögelschnitt zu beschreiben.

35. §.

Eben diesen Hauptsatz von der Theorie der Centralkraft kann man aus des Newtons oder de la Cailles Grundsätzen (welche wir indessen borgen wollen, um nicht gar zu sehr weitläuftig zu werden) auf folgende Art beweisen. Man nehme MD als die Höhe an, durch welche, wenn ein Körper fällt, in M die Geschwindigkeit erhalten wird. So ist nun vermöge der astronomischen Grundsätze *) die Geschwindigkeit in M wie $\frac{\sqrt{2MB}}{FT}$ (denn, wenn man die Linie NB zur FM perpendicular ziehet, so ist MP der halbe Parameter von der Hauptaxe, wie wir schon oben 24. §. bewiesen haben); es ist aber auch aus den mechanischen Grundsätzen **) $c = 2\sqrt{5}\, v$, oder auch $2\frac{\sqrt{MD}}{FM}$, und hiemit $\frac{\sqrt{2MB}}{FT} = \frac{2\sqrt{MD}}{FM}$, oder $\frac{2MB}{FT^2} = \frac{4MD}{FM^2}$. Deßwegen ist $FM^2 : FT^2 = 2MD : MB$; und wenn man aus T zu FM eine senkrechte Linie TX herabfallen läßt, so bekömmt man wegen

*) Siehe Newton. Lib. I. Princ. Propos. XVI. Theorem. VIII. Item de la Caille Leçons Astron. §. 166.

**) Siehe des de la Caille Mechanig. §. 113.

gen $FM^2 : FT^2 = FM : FX$ die Proportion $FM : FX = 2MD : MB$: ziehet man weiters die Linie NL zu MT parallel, so ist gleichfalls $ML : MB = FM : FX$; denn die Dreyecke FTM, FTX, MNL, MNB sind einander ähnlich. Deßwegen wird auch $MB : ML = MB : 2MD$; das ist, $2MD = ML$. Es ist aber aus der Lehre von den Kögelschnitten bekannt, daß $MC = \frac{MN^3}{MB^2}$; und also ist MLC ein rechter Winkel (26. §.) und $ML = \frac{1}{2}MV$; hiemit $MD = \frac{1}{2}ML = \frac{1}{4}MV$.

36. §.

Wir haben schon oben 32. §. gesagt, daß, wenn D ober dem F ist, so ist der Durchschnitt des gegebenen küssenden Winkels eine Ellipse; wenn aber D mit F zusammenfließt, ist selber eine Parabole; und endlich eine Hyperbole, wenn D unter dem F liegt. Nun ist es richtig, daß, wenn eine Ellipse beschrieben wird, die Projectionsgeschwindigkeit minder seyn müsse, als die Geschwindigkeit, welche der Körper überkommen würde, wenn er aus M bis in F fiele. Eben so gewiß ist es, daß selbe in Beschreibung einer Parabole gleich seyn müsse. Endlich zur Beschreibung einer Hyperbole ist nöthig, daß der Körper mit einer größern Geschwindigkeit muß hingerissen werden, als diejenige ist, welche man durch eine in M unveränderliche Anziehungskraft überkommen würde, wenn der Körper aus M in F fällt.

37. §.

Wenn wir im voraus setzen, daß der Mittelpunct der Kräfte einen unendlich grossen Abstand habe, so bekömmt man eine Parabole (XIX. Fig). Denn alsdenn wird die Linie TN zu

UM

UM parallel. Ferner in der oben bewiesenen Analogie DF : FM = FM : FE (30. §.) wird FM — FD (oder DM) : FE — FM (ME) = DF : FM. Weil nun nach dem gesetzten Heischesatz FD und FM unendlich groß sind, so sind sie einander gleich, wie auch DM = ME; deßwegen, wenn man aus E eine senkrechte Linie EQ ziehet, und das Qf demselben gleich nimmt, so bekömmt man den Brennpunct f; hernach ziehe man die Ordinate MP; die Subtangens PT, und bestimme den Scheitelpunct S, so wird man EM als den vierten Theil des zum Durchmesser MV gehörigen Parameters überkommen.

38. §.

Wenn M der Scheitelpunct von der Hauptaxe des Kögelschnittes ist, (XV. XVI. XVII. XVIII. Fig.) so gehet der Durchmesser des küssenden Zirkels durch den Mittelpunct der Kräfte, und die Sehne MV wird mit dem Diameter zusammen fließen; deßwegen auch die Puncte L, N, C zusammen kommen. Wir wissen aber, daß die Normale im Scheitelpuncte einem halben Parameter gleich sey (19. §.), und hiemit verwandelt sich die Formel $\frac{MN^3}{MB^2}$, welche die Gleichung des halben Durchmessers vom küssenden Zirkel ist (26. §.), in $\frac{MB^3}{MB^2} = MB$, welches einem halben Parameter gleich ist. Es ist also in diesem Falle MQ die Normale zu MF (Fig. XX.). Weyn nun MD < DF in der Analogie FD : FM = FM : FE, so wird FM < 2 FD, hiemit auch FE < 2 FM. Deßwegen läßt man die zu M Q in M senkrechte Linie EM herabfallen, und ziehet man sie hinaus bis in f, daß also Mf = ME, so wird f innerhalb M und F fallen. Es ist also in diesem Falle M der oberste Apsidenpunct von einer zu beschreibenden Ellipse. Und, wenn man die vorige Proportion zertheilet, so wird F E — F M (M E); F M = F M — F D (M D): F D, hiemit M E: M D = F M: F D und F M > F D, folglich auch E M > M D: deßwegen wird f zwischen den D und F hineinfallen.

39. §.

Wenn M D > F D (Fig. XXI.), so wird F M > 2 F D, und F E > 2 M F; deßwegen, wenn man den Punct f auf das M beziehet, so wird selber über das F hinausfallen, und M wird also der unterste Apsidenpunct in einer beschriebenen Ellipse seyn.

40. §.

Wenn M D = D F (Fig. XXII.), so wird F M = 2 F D, und F E = 2 F M, wo dann f in F fallen wird; das ist, es wird ein Zirkel beschrieben werden. Deßwegen ist klar, daß das Hugenische Theorem nur als ein sonderlicher Fall in Betrachtung des gesagten anzusehen sey, denn Hugenius beweiset, daß die Geschwindigkeit in einem Zirkel derjenigen Geschwindigkeit gleich kömmt, welche überkommen wird, wenn der Körper den vierten Theil des Durchmessers herabfällt.

41. §.

Wenn M D > M F (Fig. XXIII.), und F E auf der nämlichen Seite ist, wo D liegt, so wird E M allzeit größer seyn als F M: deßwegen fällt f allzeit außer die Tangente, und der Kegelschnitt wird eine Hyperbole seyn. Im Gegentheil ist M D = M F (Fig. XXIV.), oder F D = o, so wird M E = ∞, und der zu beschreibende Kegelschnitt eine Parabole seyn.

42. §.

Wenn MD unendlich groß ist, (Fig. XVII. und XXIII.) das ist, wenn ein Körper mit einer unendlich grossen Geschwindigkeit hingerissen wird, so verwandelt sich die Hyperbole in eine gerade Linie MQ; denn auf solche Weise wird $FD = \infty$, und die Analogie $FD : FM = FM : FE$ sich in $\infty : FM = FM : o$ verändern, wo denn, weil die Transverse oder Zwergaxe sich verliehret, die Hyperbole eine unendliche Breite überkömmt; das ist, selbe wird zu einer geraden Linie.

43. §.

Wenn MQ oder die Richtung der Projection mit FM (Fig. XXV.) in einer geraden Linie liegt, und der Körper mit derjenigen Geschwindigkeit hingerissen wird, welche er überkömmt, wenn selber durch MD fällt; so werden erstens MC und LC parallele; oder der halbe Durchmesser des küssenden Zirkels unendlich groß; hernach fällt LM in M, oder die Normale MN verliehret sich; endlich wird die krumme Linie sich in eine gerade verändern, welche durch den Mittelpunct der Kräfte gehet. Aus welchem sich dann weiters folgern läßt, daß, wenn ein Körper eine Ellipse SMs (Fig. XII.) beschreibet, wo der Hauptparameter $2MB$ sey, so wird dessen Geschwindigkeit in s als dem untersten Apsidenpuncte zur Geschwindigkeit in S, als dem obersten Apsidenpuncte, eben das Verhältniß beobachten, welches ist zwischen $\frac{\sqrt{2BM}}{Fs}$ und $\frac{\sqrt{2BM}}{FS}$ oder $FS\sqrt{2BM} : Fs\sqrt{2BM}$.

44. §.

Wenn in den meisten Figuren, auf welche wir uns bisher bezogen haben, das MD einem o gleich genommen wird, so bekömmt

kömmt die Analogie $FD : FM = FM : FE$ alle drey Glieder einander gleich; deßwegen $ME = o$ und f mit M zusammenfließt. Hiemit, wenn ein Körper mit einer unendlich kleinen Geschwindigkeit hingerissen wird, so wird er eine unendlich enge Ellipse, das ist, eine gerade Linie beschreiben, welche durch den Mittelpunct der Kräfte gezogen wird.

45. §.

Aus dem gesagten läßt sich ferner beweisen, daß die Geschwindigkeit eines Körpers, welcher einen Kegelschnitt beschreibet, und wo der Mittelpunct der Kräfte in dem Brennpuncte gesetzet wird, in einem jeden Puncte des Umkreises das gerade Quadratwurzlichte Verhältniß (Ratio directa subduplicata) des Hauptparameters, und das verkehrte einfache Verhältniß des Perpendikels, welches man aus dem Mittelpuncte der Kräfte herabläßt, beybehält. Denn aus den Formeln der Mechanik, wo man gemeiniglich die Geschwindigkeit durch c, die Zunehmungskraft durch v, und den Raum durch s ausdrücket, ist bekannt, daß $c = 2\sqrt{sv}$; wir nehmen aber in diesem Zusatze an, daß $v = \frac{1}{FM^2}$; und $s = \frac{1}{4} MV$ (Fig. XV.) Deßwegen ist nothwendig $c = \frac{2 \times 1}{FM} \times \frac{1}{2} \sqrt{MV} = \frac{\sqrt{MV}}{FM}$. Es ist aber $BM : MN = MN : ML = \frac{MN^2}{BM}$; und $2 ML = MV = \frac{2 MN^2}{BM}$. Wie auch wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke FTM und MBN bekömmt man $FT : FM = BM : MN = \frac{MF.\ BM}{FT}$; folglich $\frac{2 MN^2}{BM} =$

$\frac{2\,FM^2.\,BM^2}{FT^2.\,BM} = \frac{2\,FM^2 \times BM}{FT^2}$; und $\sqrt{MV} = \frac{\sqrt{2\,MN^2}}{\sqrt{BM}} = \frac{FM \times \sqrt{2\,BM}}{FT}$, welchen Werth, wenn man in $\frac{\sqrt{MV}}{FM}$ ansetzet, so wird $\frac{FM \times \sqrt{2\,BM}}{FT \times FM} = \frac{\sqrt{2\,BM}}{FT}$. Es ist aber B M aus dem obengesagten (§. 25.) dem halben Parameter der Hauptaxe gleich: deßwegen ist die Geschwindigkeit eines Körpers, welcher ꝛc. *

*) Hier könnten wir noch sehr vieles aus der Theorie der Centralkräfte beyrücken, welches in der Rücksicht auf die Astronomie ungemein nützlich und vortheilhaft ist; doch wird das meiste, was wir davon sagen können, in des de la Caille und de la Lande Astronomie auf die vollkommenste Weise angeführet. Deßwegen wollen wir hier nur noch was weniges hersetzen, wovon man in der Astronomie einen nützlichen Gebrauch machen kann.

46. §.

Erste Aufgabe.

Man soll das Verhältniß der Centralkräfte finden, in dem Falle, daß ein Körper einen Zirkel M O A beschreibe (Fig. XV.), und der Mittelpunct der Kräfte außer den Mittelpunct des Zirkels in F gesetzt sey. Die allgemeine Auflösungsformel ist für diese Aufgabe $f = \frac{Fp}{ST^2.PF^2}$, (*) oder, wenn wir diese Formel auf die XV. Figur anwenden wollen, und also statt des Theils der Tangente einen unendlich kleinen Bogen annehmen, so wird $f = \frac{PR}{FT^2 \times MR^2} = \frac{MY}{FT^2 \times MR^2}$. Nun ist $ME : MR = MR : MO$, hiemit $ME = \frac{MR^2}{MO}$. Weiters ist $ME : MY = ML : MC$

*) Siehe De la Caille Leçons Astron. §. 160.

$MC = MV : MO$; das ist: $\frac{MR^2}{MO} : MY = MV : MO$: hiemit $MY = \frac{MO \times MR^2}{MO \times MV} = \frac{MR^2}{MV}$. Wenn man also diesen Werth in der Formel ansetzt, so wird $f = \frac{MR^2}{FT^2 \times MR^2 \times MV} = \frac{1}{FT^2 . MV}$. Hernach ist $CM : LM = MO : MV = FM : FT$, hiemit $FT^2 = \frac{MV^2 . FM^2}{MO^2}$, wo dann endlich $f = \frac{MO^2}{FM^2 \times MV^3}$, und, wenn man die unveränderliche Größe MO wegläßt, so ist $f = \frac{1}{FM^2 \times MV^3}$.

47. §.

Es kann also durch die allgemeine Anziehungskraft kein Zirkel beschrieben werden, wenn nicht der Mittelpunct der Kräfte eben der Mittelpunct des Zirkels ist. Deßwegen können die Planeten um die Sonne keine Zirkelbögen beschreiben, wenn die Sonne außer den Mittelpunct gesetzt ist.

48. §.

Zwote Aufgabe.

Das Verhältniß der Centralkraft zu finden, wenn der Körper eine Ellipse beschreibt, und der Mittelpunct der Ellipse mit dem Mittelpuncte der Kräfte überein kömmt, oder eben derselbe ist. Die

Formel für diese Aufgabe ist $f = \frac{SP}{ST^3 \times^2 PG}$ *) wo ST (Fig. XXVI.) die senkrechte Linie ist, welche aus dem Mittelpuncte der Kräfte zur Tangente gezogen wird. 2 P Y ist der Durchmesser des küssenden Winkels, und SP der Radius Vector. Weil aber nach diesem Satze $2\,PY = \frac{2\,SD^2}{ST}$ so wird $f = \frac{SP \times ST}{ST^3 \times 2\,SD^2} = \frac{SP}{ST^2 \times 2\,SD^2}$. Es ist aber $SD^2 = \frac{AS^2 \times SB^2}{ST^2}$; deßwegen, wenn man dafür den Werth ansetzet, so ist $f = \frac{SP \times ST^2}{2\,ST^2 \times AS^2 \times BS^2} = \frac{SP}{2\,AS^2 \times BS^2}$, und wenn man endlich die unveränderlichen Größen wegläßt, so wird $f = SP$.

49. §.

Dritte Aufgabe.

Das Verhältniß der periodischen Zeiten zu finden, wenn ein Körper durch die Centralkraft, welche nach dem Mittelpunct der Ellipse gerichtet ist, eine Ellipse beschreibet. Man soll aber dieses Verhältniß sowohl für die Ellipse, als für einen Zirkel bestimmen, welcher über die größere Axe der Ellipse ist beschrieben worden. Es sollen also die Zeiten, in welchen der Zirkel und die Ellipse beschrieben worden, T und t heißen. Die Größe des Raumes von dem Zirkel sey = A; von der Ellipse aber = a. Setze man nun, daß der Körper aus A (Fig. XXVII.), wo die Centralkraft in einer Ellipse und in dem Zirkel die nämliche ist, hingerissen werde, so werden die Zeiträume A M S und A N S seyn, da indessen in der Zeit, wo der Körper durch A P fällt, in der Ellipse

*) Siehe De la Caille Leçons Astron. §. 162.

Ellipse A M und in dem Zirkel A N beschrieben würden. Nehme man nun den Sector A N S = S, und den Sector A M S = s, so ist aus den mechanischen Grundsätzen $T : t = \frac{A}{S} : \frac{a}{s}$ (18. §.). Es ist aber $A : a = SD : SY$ und $S : s = SD : SY$; deßwegen, wenn man diesen Werth dafür ansetzet, so ist $T : t = \frac{SD}{SD} : \frac{SY}{SY} = 1 : 1$, folglich $T = t$.

50. §.

Wenn man nun das Gesagte genugsam einsieht, so ist es klar, daß der geometrische Ort aller Brennpuncte f in den Kegelschnitten, welche durch eine jede Projectionsgeschwindigkeit nach einer gewissen Richtung Q M um den gegebenen Brennpunct F mögen beschrieben werden (Fig. XVII.) eine unendliche gerade Linie $f M \Phi$ sey, also zwar, daß davon der unbestimmte Theil $M \Phi$ für die Brennpuncte der Ellipsen gehöre, welche sich in eine Parabole verwandeln, sobald Φ unendlich von M abweicht: hingegen wird Φ dem M unendlich nahe kommen, so ziehen sich die Ellipsen in eine gerade Linie zusammen. Weiters gehört der andere Theil $M f$ für die Hyperbolen, also zwar, daß, wenn selbe um den Brennpunct F beschrieben werden, sie allzeit Q M in M berühren, so oft $M f > MF$. Wenn aber $FM = Mf$, so verwandeln sich beyde Hyperbolen in eine gerade Linie Q M. Ist endlich $FM > fM$, so berühren sie die gerade Linie Q M, welche den Brennpunct f haben. Wenn also die Anziehungskraft nach F abzielet, so ist es nicht möglich, daß eine Hyperbole um den Brennpunct f beschrieben werde, denn, weil in diesem Falle allzeit $EM > FM$ und $EM = fM$, so ist auch $fM > FM$. Nimmt man aber im Gegentheil die vom Punct F zurück prellende Kraft,

welche

welche in einem gezweyfältigten umgekehrten Verhältnisse der Abstände wirket, so werden zwar Hyperbolen, von welchen der Ort ihrer Brennpuncte f auf der andern Seite der Tangente QM in Mf ist, beschrieben werden, aber nur so lange, bis Mf dem MF gleich werde. Also wollen wir setzen, daß der Körper M (Fig XXVIII.) von F im besagten Verhältnisse zurück geprellet werde, so wird man MD über QM hinaus ziehen müssen, durch welche Linie, wenn der Körper mit einer unveränderlichen zurückprellenden Kraft in M zurück kehrte, selber diejenige Geschwindigkeit überkommen würde, mit welcher er aus M hingerissen wird. Man mache nun die Analogie FD : FM = FM : FE; läßt man nun die Perpendiculare EQ zu QM herabfallen, und nimmt man das EQ = Qf, so überkömmt man den Brennpunct der Hyperbole AMO, welche um den Brennpunct f beschrieben wird. Denn, weil MD dem vierten Theile der Sehne des küssenden Zirkels gleich ist, und, indem selbe durch den Mittelpunct der zurück prellenden Kraft F gezogen ist, sie über QM zu stehen kömmt, so ist der ganze Zirkel über QM hinaus. Deßwegen, wenn man, wie vorher, das DL dem MD gleich macht, und zu CM die Perpendiculare LN (es ist aber CM zu QM gleichfalls eine senkrechte Linie) ziehet, so wird MN die Normale der Hyperbole. Ferner bekömmt man in der Analogie FD : FM = FM : FE durch die Zertheilung FD — FM (DM) : FM — FE (ME) = FD : FM und wegen des rechten Winkels bey N ist ND = DM; wegen der zween rechten aber bey Q ist fM = ME; deßwegen ist auch ND : fM = FD : FM. Wenn man also Ff hinaus ziehet, so gehet selbe durch N.

51. §.

Man kann sich einen dreyfachen Fall vorbilden, in welchem eine Hyperbole, welche durch eine zurückprellende Kraft beschrieben wird, sich in eine gerade Linie verwandelt. Der erste Fall ist, wenn man die Projectionsgeschwindigkeit als unendlich groß oder $= \infty$ annimmt. Der zweyte Fall ist, wenn man eben diese Geschwindigkeit oder MD als $= o$ ansetzet; und in diesem Fall ist $FM = f\,F = EF$; das ist, der Abstand des Brennpuncts von dem Scheitelpunct verliehrt sich ganz und gar, und die Hyperbole, indem sie unendlich zusammen gedrückt wird, verwandelt sich in eine gerade Linie. Wenn man endlich für den dritten Fall setzet, daß MQ mit FM in einer geraden Linie liegt, so geschieht das nämliche. Ferner läßt sich folgern, daß, wenn F zu einem unendlich entfernten Abstande gelangt, oder wenn die zurückprellende Kraft nach den parallelen Richtungen wirket, so wird die Hyperbole, welche man um den Brennpunct f beschreibet, zu einer Parabole, welche nach der Methode, so wie oben 37. §. ist bewiesen worden, kann bestimmet werden; dieses einzige muß man beobachten, daß man F auf die Seite des E setze, und die in der XIX. und XXIV. Figur gemachte Entwerfung umzuwenden habe.

52. §.

Wenn ein Körper um F (Fig. XII.) einen Zirkel, dessen Radius Fs wäre, beschreiben sollte, so würde seine Geschwindigkeit durch $2\sqrt{vs}$ müssen ausgedrücket werden, wo denn v die Centralkraft, s aber den Raum, durch welchen ein Körper fallen würde, anzeigete, oder man würde dieselbe auch durch das Verhältniß zu $\frac{2 \times 1 \times \sqrt{\frac{1}{2}}\,Fs}{Fs} = \frac{\sqrt{\frac{4}{2}}\,Fs}{Fs} = \frac{\sqrt{2}\,Fs}{Fs}$ ausdrücken können (43. §.).

(43. §.). Eben auf diese Weise, wenn ein Körper einen Zirkel beschreiben sollte, dessen Mittelpunct F und der halbe Durchmesser Fs wäre, so würde eine Geschwindigkeit erfordert, welche wäre wie $\frac{\sqrt{2Fs}}{FS}$; deßwegen würde die Geschwindigkeit eines solchen Körpers, welcher nämlich einen Zirkel von einem halben Durchmesser FS beschriebe, durch das Verhältniß $FS\sqrt{2Fs} : Fs\sqrt{2FS}$ müssen ausgedrücket werden. Es ist aber klar, daß $Fs < BM$ und $FS > BM$; deßwegen ist auch $FS\sqrt{2BM} > FS\sqrt{2Fs}$ und $Fs\sqrt{2BM} < Fs\sqrt{2FS}$; hiemit ist $FS\sqrt{2BM}$ die Geschwindigkeit in dem unteren; $Fs\sqrt{2BM}$ aber die Geschwindigkeit in dem obersten Apsidenpuncte von einer Ellipse. Wenn also ein Körper in einer Ellipse zu dem untersten Apsidenpuncte kömmt, so hat er eine größere Geschwindigkeit, als daß er mit solcher einen Zirkel, dessen halber Durchmesser der Abstand dieses Apsidenpuncts von dem Mittelpunct der Kräfte wäre, beschreiben könnte. Ist er aber im obersten Apsidenpunct, so ist seine Geschwindigkeit minder, als sie erfordert wird einen Zirkel zu beschreiben, wo der halbe Durchmesser dem Abstande des obersten Apsidenpuncts von dem Mittelpuncte der Kräfte gleich kömmt. Uebrigens verstehet man leicht, daß die Geschwindigkeiten der Körper, welche für ihren Umkreis concentrische Zirkeln hätten, ein umgekehrtes quadratwurzlichtes Verhältniß ihrer halben Durchmesser beobachten müßten; denn, wenn die halben Durchmesser FS und Fs sind, so sind aus dem Gesagten die Geschwindigkeiten wie $Fs\sqrt{2FS} : FS\sqrt{2Fs}$; oder, wenn man diese zwey Glieder mit $\sqrt{2Fs \times FS}$ dividirt, so verhalten sie sich wie $\sqrt{Fs} : \sqrt{FS}$.

53. §.

Wir haben schon gesagt, daß LNM (Fig. XV.) ein rechter Winkel sey (§. 26.): Es gehet also der Zirkel, welchen man über den Diameter LM aus dem Mittelpuncte D beschreibet, durch N. Deßwegen wird $DN = DM$, und $DNM = DMN = MNf$. Folglich sind D N und Mf einander parallel, und $FD : DN$ (oder DM) $= FM : Mf$; wiederum $FD : FD + DM$ (FM) $= FM : FM + Mf$ (Ss), welche Analogie wir schon anderswo bewiesen haben (§. 30.).

54. §.

Man kann die Aufgabe von den Centralkräften auch umkehren, und alsdann folgende Auflösung anwenden, durch welche man zugleich beweisen kann, daß die Centralkräfte, wenn sie im umgekehrten verzweyfältigten Verhältnisse wirken, einen Kegelschnitt beschreiben. Es sey (Fig. XXVIII.) F T das Perpendikel, welches man aus F dem Mittelpuncte der Kräfte auf die Tangente M Q herabgelassen. M V A sey der in M küssende Zirkel von einer krummen Linie, welche man beschreiben soll; und F M sey der Radius Vector. In diesem Falle ist f die Centralkraft $= \frac{FM}{FT^3 \times MA} = \frac{1}{FM^2}$; * oder $FM^3 = FT^3 \times MA$. Deßwegen ist $FM^3 : FT^3 = MA : R\ (1)$: oder auch, weil die Dreyecke FTM, MVA sich ähnlich sind, so werden MP und MO zu MAMV proportional: hiemit ist $FM^3 : FT^3 = MA^3 : MV^3 = MA : MO = MA : 1$. Deßwegen ist $MO = 1$; das ist, MO ist eine unveränderliche Größe. Nun aber nehmen wir von diesen die halben Theile MC, MB, so wird MO als der Parameter $= MB$; denn MB ist der halbe Parameter der Axe von dem Kegelschnitte,

*) Siehe de la Caille Leçons Astronom. §. 161.

weil MC, ML, MN, MB beständig proportional sind, wie wir schon oben §. 26. bewiesen haben. Weil nun in den Kegelschnitten allzeit *MA* zu *MO*, als der unveränderlichen Größe das nämliche Verhältniß haben, welches zwischen FM^3 und FT^3 ist, und weil dieses Verhältniß allezeit in den krummen Linien, welche durch die nach diesem Gesetze wirkenden Kräften beschrieben werden, beobachtet wird, so ist es mehr als überzeugend, daß alle Puncten einer krummen zu beschreibenden Linie solche sind, durch welche der nämliche Kegelschnitt gehen muß, und hiemit ein Kegelschnitt beschrieben wird. Was aber für eine Gattung der Kegelschnitte eine solche krumme Linie an sich nehme, das hängt eigentlich von der Projectionsgeschwindigkeit ab, welche, wenn sie gegeben wird, so kann man durch die Höhe *MD* und durch den Abstand *MF* alle Gattungen der Kegelschnitte bestimmen, so wie wir genugsam bisher bewiesen haben.

Ein

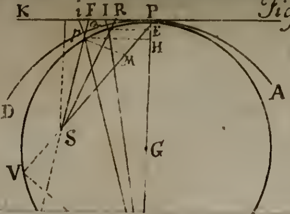


Fig. 1

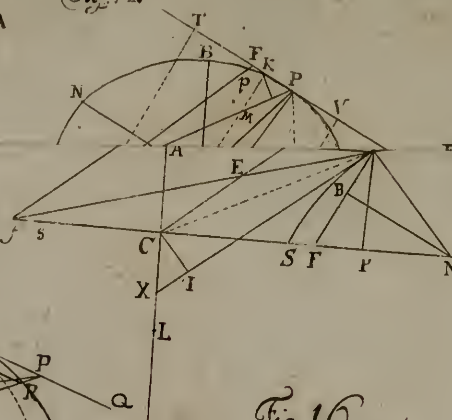


Fig. 2

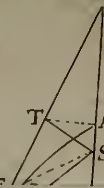


Fig. 3

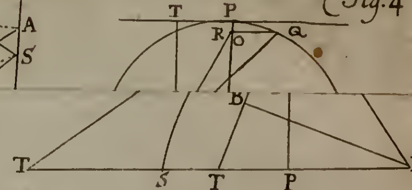


Fig. 4

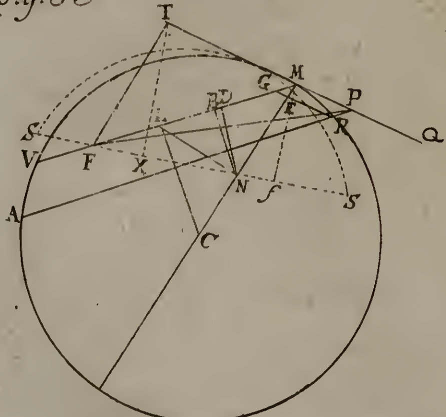


Fig. 15

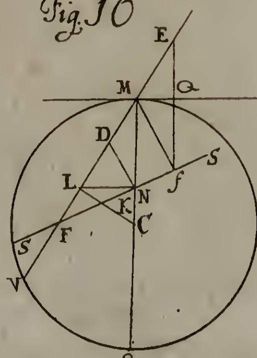


Fig. 16

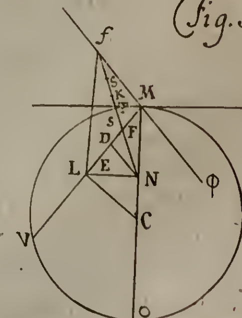


Fig. 17

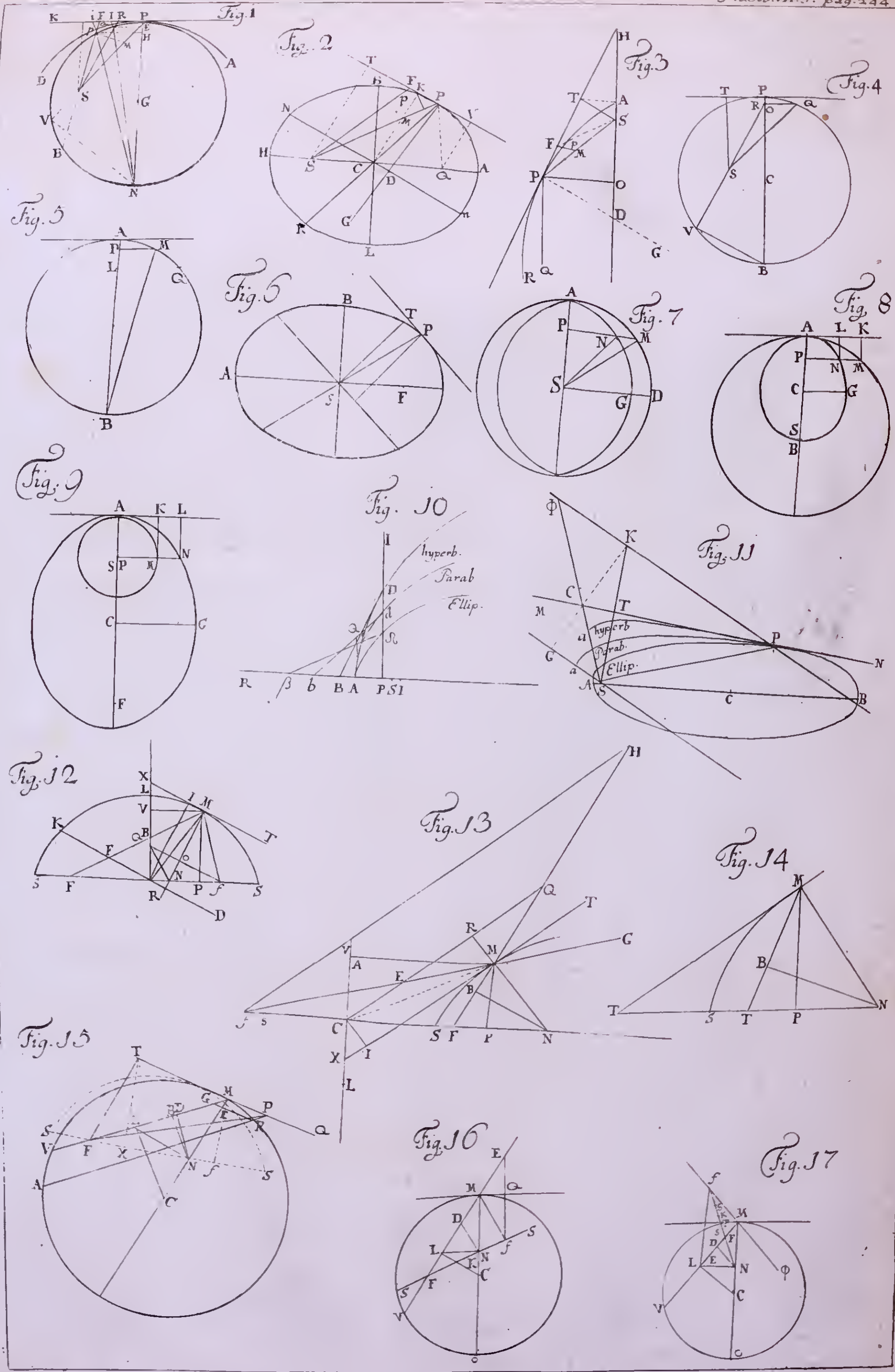


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
hyperb.
Parab
Ellip.
Fig. 11
hyperb
Parab.
Ellip.
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17

Fig 18

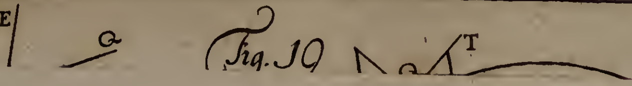


Fig. 19

Fig. 20

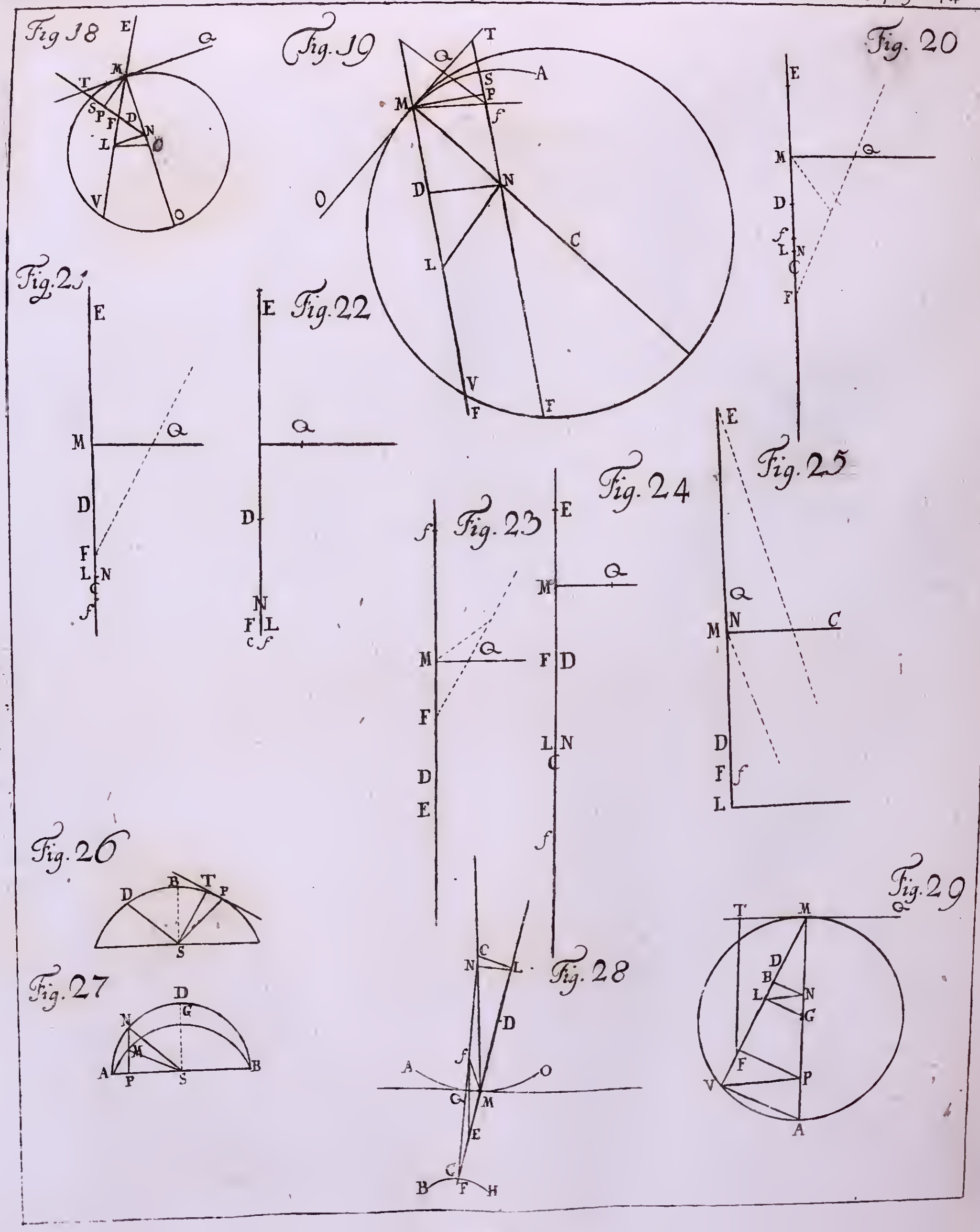


Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20
Fig. 21
Fig. 22
Fig. 23
Fig. 24
Fig. 25
Fig. 26
Fig. 27
Fig. 28
Fig. 29

Ein Brief
von der
Berechnung
des
im Jahre 1769.
erschienenen
Kometen.

Mein Freund!

1. §.

Ich bedaure Sie von Herzen. „So viel Arbeit, schreiben „Sie, und dennoch nichts richtiges; gewiß das läßt etwas „verdrüßlich" —. Sie haben Recht, mein Freund! Ich ärgere mich selbst über den mißlichen Fortgang Ihrer gewiß ungemein mühsamen Arbeit. Würde ich nicht von Ihrer geübten Geschicklichkeit, und gründlichen Kenntniß in astronomischen Gegenständen überzeuget seyn, so würde ich mich wohl über Ihre fruchtlose Arbeit ein wenig lustig machen: Aber so haben Sie nichts gewagt, was Ihre Kräfte überstieg. Doch, wenn Sie sich schon mit diesem astronomischen Kalkulus was längers herumbalgen müssen, ohne bisher Ihre Arbeit durch einen richtigen genauen Auswurf des Berechneten belohnt zu sehen, so müssen Sie deßwegen den Muth nicht verliehren. Ich habe es aus eigener Erfahrung, daß man am Ende allzeit ein größeres Vergnügen findet, je schwerer einem die Entdeckung des Gesuchten geworden ist. Glauben Sie mir, daß man in der Astronomie vieles auch durch Fehlen lerne. Wir wollen es dem einzigen Halley glauben, daß

er

er nach seinem Zeugnisse niemals in seinen Berechnungen sich soll geirret haben. Die übrigen, und unter diesen die berühmtesten und vollkommensten Meister der Mathematik und Astronomie rechnen es sich nicht zur Schande, wenn man Sie in Ihren sonst vortreflichsten Werken eines eingeschlichenen Fehlers überzeuget. Noch allzeit, sagen sie, hat man die astronomischen Werke von ihren eingeschlichenen Fehlern verbessert, und man wird es auch wohl noch für die Zukunft thun müssen.

2. §.

Sie haben sich über die Berechnung des lezt erschienenen Kometen gewagt, und dieses Ihr gewiß mühsames Unternehmen rechtfertiget auch den unglücklichen Ausfall Ihrer Arbeit, wie Sie selben nennen, schon ziemlichermassen: denn die Berechnung eines Kometen ist gewiß in sich selbst einer der wichtigsten und schwersten Gegenstände der Astronomie. Diese giebt auch den geübtesten Meistern viel zu schaffen; aber eben darum macht Ihnen diese Arbeit schon viele Ehre, wenn Sie doch nicht auf den Nutzen einer auch am Ende nicht gar zu richtig gerathenen Arbeit sehen wollen. Sie beschweren sich über die Methode, welche man gemeiniglich für diese Berechnung ansetzet. Sie wünschen eine andere, und begehren von mir wenigst eine Anleitung, diese Methode mit mehrerem Vortheile ohne so vielen Zeitverlust und ungemein grosse Mühe anwenden zu können. Allein ich weis bisher noch keine andere, welche mit grösserem Vortheile und Genauigkeit für die Berechnung eines Kometen, als die jetzige allgemeine und bekannte Methode möchte angegeben werden. Sie wissen es selbst. Helvelius hat die Parabole der Kometen erfunden; Newton war der erste, welcher eine Methode angegeben, dieselben zu berechnen; und Halley hat diese Methode ziemlich verbesseret. Die jetzigen Astro-

nomen

nomen gehen noch den nämlichen Weg, und, nachdem Herr de la Caille *, und nach Ihm Herr de la Lande in seinem vortreflichen astronomischen Werke ** und anderswo *** die Theorie der Kometen und ihre Berechnung durch neue Zusätze und allgemeine Tabellen für die wahre Anomalie derselben aufgekläret, und vollkommener gemacht hat, so würde ich wohl unbescheiden seyn, wenn ich Sie anderswohin als auf diese vollkommensten Meister anwiese.

3. §.

„ Aber, schreiben Sie, schon dreymal habe ich umsonst gearbeitet" —. Ich glaube es Ihnen, mein Freund, wenn Sie auch geschrieben hätten, daß Sie es dreyßigmal umsonst versucht haben. Wir haben Beyspiele von den geschicktesten Meistern, daß es Ihnen nicht besser ergangen ist. Ich würde gar zu ausschweifend werden, wenn ich Ihnen davon alle Ursachen eines für diese Berechnung übel gerathenen Versuches angeben wollte; genug! daß Sie selbst wissen, daß sich diese bekannte Methode der Berechnung der Kometen theils auf die Genauigkeit der Bestimmung der geraden Ascension und Abweichung des Kometen; theils auf die Annehmung eines ungewissen Verhältnisses zweener Abstände gründet, oder daß selbe durch die sogenannte Positio Falsi müsse ausgearbeitet werden. Sie irren sich also, wenn Sie anderswo als in der willkürlichen Annehmung dieser zwoen Distanzen, welche in Ihrem Kalkulus den wahren Abständen des Kometen von der Erde noch nicht gar zu nahe gekommen sind, die Ursache des Beschwernisses dieser Methode und Ihrer bisher noch unrichtigen Berechnung aufsuchen. Und wie gemein ist nicht dieser Fehler in un-

*) Siehe de la Caille Leçons Aſtron. §. 177. &c. & §. 527. &c.

**) Siehe de la Lande Aſtron. Tom. II. Liv. XIX.

***) Théorie des Cometes (en Tables Aſtron. de Halley pag. 70. & ſuiv. 1859.)

serem Falle? Man muß wohl ziemlich glücklich oder doch der erfahrenste und geübteste Meister in der Astronomie seyn, wenn man schon auf das erste oder zweytemal für zwo Beobachtungen solche zween Abstände anzunehmen weis, welche einer dritten Beobachtung, als dem ächten Gesichtspuncte der ganzen Berechnung genug thun. Hernach setze man, daß eine solche dritte Beobachtung, welche die Leiterinn des ganzen Kalkulus ist, nicht vollkommen genau sey, so ist es wohl um die Richtigkeit der ganzen Berechnung auf das neue geschehen. Das schlimmste dabey ist, daß man zur genauen Bestimmung der zween willkürlichen Abständen keine gewisse Erleichterungsmittel an die Hand geben kann. Nur allein gewisse Umstände der Erscheinung des Kometen; als nämlich seine Lage, sein Ab- oder Zunahm in der beobachteten Länge, Breite und Abweichung, die Wendung seiner Dunstsäule, die Größe seines Durchschnittes, die Blasse oder Helle seines Lichtes können einen geschickten Astronomus auf die Spur der ächten Abstände des Kometen von der Erde führen, durch welche er hernach eine dritte Distanz und also alle seine Elementen bestimmen kann. Sie müssen es sich also, mein Freund, gar nicht verdrüssen lassen, daß Sie zu dreymal umsonst gearbeitet haben, besonders, wenn Sie die graphische Entwerfung der verschiedenen Parabolen, welche man zur Erleichterung der Berechnung der wirklichen Parabole eines Kometen ausgedacht hat, * nicht zu Hilfe genommen haben.

4. §.

Nun sehen Sie selbst, mein Freund, daß es sich nicht wohl thun läßt, die so lang beybehaltene Methode, welche Ihnen so sehr mühsam vorkömmt (wie sie denn in sich gewiß nicht die bequemste ist), auf eine vortheilhaftere Art, als es schon geschehen

hen

* Siehe Mr. de la Lande Astron. Liv. XIX. §. 2445.

hen ist, zu erleichtern. Man müßte nur etwa eine ganz neue Methode für die Berechnung der Kometen erfinden, wo man nicht so viele Umschweife nöthig hätte, und wo man sonderlich die willkührliche Annehmung der zwoen Distanzen, welche diese Berechnung wohl etwas langweilig und verdrüßlich machen, vom Halse brächte. Aber nicht wahr, das wollen wir wohl bleiben lassen? Es ist doch noch leichter, sich in eine schon erfundene obwohl etwas harte Methode zu schicken, als eine ganz neue zu erfinden. — Doch Sie erinnern sich vieleicht nicht, daß schon Newton für die Berechnung der Parabole eines Kometen nebst der bekannten und jetzt gebräuchlichen Methode noch eine andere ausgedacht habe *), wo er nämlich einen von dem Kometen binnen enger Zeitfrist beschriebenen Laufbogen als unendlich klein annimmt, und deßwegen selben als eine gerade Linie vermög der einzelen Grundsätzen einer ebenen Trigonometrie berechnet, und nachmals die ganze Parabole bestimmet. Nun wie gefällt Ihnen diese Methode der Berechnung eines Kometen? Selbe wäre doch, als die einfachste und aufgeklärteste der allgemeinen und schon bekannten Berechnungsform vorzuziehen? „O! sagen Sie, selbe „muß gewiß nicht viel taugen, sonst würden sie die jetzigen Astro„nomen schon längst hervorgesucht haben." — Ihre Ahndung ist gründlich, mein Freund! man weis schon, daß diese Methode von keinem Gebrauche sey; denn man hat es bewiesen, daß diese vom Newton angegebene zweyte Methode von einer unbestimmten Auflösung sey; wie dieses auch leicht zu begreifen ist, weil Newton nur das einfache, nicht aber das zusammen gesetzte Verhältniß der Zeit und der Bewegung des Kometen in seiner Länge ansetzet, hiemit die Größe des zu berechnenden Bogens allzeit unbestimmt bleibt. Nun ist also Ihre Hofnung auf eine neue und

*) Siehe Newton. Lib. I. Princip. Mathem. & opuscul. XVII. de Mundi Systemate.

leichtere Methode für die Berechnung der Kometen wieder zu Wasser geworden? aber haben Sie Geduld, mein Freund! ich muß noch vorher ein paar Worte sagen, bis ich Sie etwa wiederum aufzumuntern vermöge.

5. §.

Wissen Sie also, daß man sich bey Entdeckung der Unrichtigkeit dieser Methode sehr bemühet hat, selbe zu verbesseren, und brauchbar zu machen. Zu dem Ende hat man den gemachten Einwurf wegen dem Unbestimmten dieser Auflösung gehoben, und durch eine gehörige Proportion, welche aus dem Verhältnisse der Zeit und der Geschwindigkeit des Kometen zusammen gesetzt ist, und sich auf das Verhältniß des Abstandes des Kometen von der Erde in der mittleren Beobachtung zu dem Abstande der ersten und dritten Beobachtung beziehet, und wovon ich gleich unten (§§.10. 11.) reden werde, die unbestimmte Auflösung der newtonischen Methode in eine bestimmte verwandelt. Man hat noch vieles daran zu verbesseren gesucht; also z. B. hat man den Bogen der Parabole des Kometen, dessen Beschreibung sich nach der Methode des Newtons auf eine Zeitfrist von etlichen Stunden einschränkte, um eine größere Genauigkeit der Beobachtungen beyzubehalten, mehr ausgedehnet, und einen Bogen der Laufbahne des Kometen, welcher in etlichen Tagen beschrieben wurde, und in welchem man mehrere Beobachtungen machen könnte, angenommen. Es ist aber klar, daß man hierdurch der Genauigkeit für die Berechnung der Parabole eines Kometen einen ziemlichen Abbruch gethan; denn Sie werden ganz leicht einsehen, daß man einen solchen Bogen der Parabole, welcher binnen etlichen obschon nicht gar zu sehr auseinander gesetzten Tagen von dem Kometen beschrieben wird, und welchen man doch als eine gerade Linie annimmt (§. 4.), nimmer

mit

mit der engsten Genauigkeit wird berechnen können. Es werden also diejenige, welche diese Methode, für die genaueste und richtigste angeben, mit ihren Gründen nicht hinaussehen. Ich will gar nicht sagen, wie sehr sich der Werth einer vollkommenen Genauigkeit in dieser Methode wegen der verschiedenen Zeit der Erscheinung der Kometen, wegen ihrer Lage, wegen ihres nahen Abstandes vom Perihelium, wegen ihrer verschiedenen Geschwindigkeit, und anderen Nebenursachen vermindern könne. Man wird also mit Wahrheit schließen können, daß diese Methode für die Berechnung der Kometen zwar nicht die genaueste ist, doch aber derselben ziemlich nahe kömmt.

6. §.

Aber wozu dann dieses alles? werden Sie mit Ungeduld ausrufen. Ich will es Ihnen sagen, mein Freund, daß man aus dieser beschriebenen, obschon nicht gar zu genauen Methode einen grossen Vortheil für die allergenaueste und richtigste Berechnung der Kometen ziehen kann; einen solchen Vortheil, welchen Sie immer zur Erleichterung des so beschwerlichen Kometen Kalkulus wünschen können, und an welchen ich nicht eher gedacht habe, als ich eine Antwort auf Ihren letzten Brief schicken wollte. Ich dächte, Sie würden damit zufrieden seyn, wenn ich Sie versichere, daß Sie bey Anwendung dieser Methode nimmer einen Kometen dreymal umsonst berechnen dürfen, so wie Sie sich deßwegen in Ihrem Briefe beklagten, und welches Ihnen wegen angeführten Ursachen (§. 3.) noch wohl öfters begegnen könnte. Ich will Sie aber noch überdas gewiß versicheren, daß Sie allzeit schon auf das erstemal die genauesten Verhältnisse der zween Abstände, welche zur genauen und richtigen Berechnung der Kometen nöthig sind, werden ansetzen können, wenn sie diese Methode zuvor anwenden werden. Freylich bekommen Sie durch selbe nicht die genauesten Elementen des Kometen (§. 5.): aber schon Vortheil genug, daß Sie hernach ohne mehreren Zeitverlust, ohne die ungewisse doch so mühsame weitschichtige Berechnung zu versuchen, ohne die Furcht noch öfters mit so vielem Aufwande der Zeit und unnütz angewandter Mühe sogleich zu der bekannten Methode, welche wir also als die genaueste und richtigste aus allen gar nicht abzuschaffen haben, sondern nur ungemein erleichteret wird, schreiten können. Ich werde weiter unten noch von mehreren Vortheilen dieser Methode zu reden kommen. Es freut mich also selbst, daß ich Ihrem Ansuchen wider meine anfangs gehabte Hoffnung Genügen leisten kann. Ich werde zu diesem Ende diese erleichterende Methode, wovon Sie sich aus dem gesagten (§. 5.) noch keinen aufgeklärten Begrif werden machen können, hier was ausführlicher beysetzen, und zwar zum überzeugenden Beweise zugleich zeigen, wie Sie selbe auf die Berechnung des letztgesehenen Kometen anwenden, und Ihren so oft wiederhollten Kalkulus glücklicher werden schliessen können. Glauben Sie mir, daß, wenn es Ihnen doch noch einmal beliebt, für die Berechnung dieses Kometen einen Versuch anzustellen, Sie damit werden zufrieden seyn. Sie fragen etwa: ob die Erfindung möge ganz meine seyn? Nein! dieses nicht. Ich habe es Ihnen schon gesagt, daß Newton diese Methode ausgedacht, und daß sie hernach von anderen verbesseret worden (§§.4.5.); aber nicht zu dieser Absicht, welche ich selber bestimme; daß nämlich diese Methode zur sicheren Erleichterung der andern schon bekannten und genaueren Methode kann gebraucht werden. Ueberdas, wenn Sie mit einer nicht gar zu genauen Richtigkeit für die Berechnung der Parabole eines Kometen wollen zufrieden seyn, so mögen Sie auch damit die Elementen des Komets und seine ganze Parabole bestimmen (§. 5.). Doch Sie werden die folgende Ausführung

führung und die sonderliche Anwendung dieser Methode selbst prüfen können. Lassen Sie uns zur Sache gehen.

7. §.

Die Ankündung der Erscheinung des letzt gesehenen Kometen, wie Sie wissen, haben wir dem Herrn Meßier in Frankreich, welcher schon so viele Kometen durch seine wachtbaren Beobachtungen entdecket hat, zu danken. Er beobachtete selben im jüngst verflossenen Jahre 1769. den 14ten Tag des Augustmonats um 12. Uhr 30', und setzte seine gerade Ascension auf $38^c\ 35'\ 2''$; seine nordliche Abweichung $11^c\ 49'\ 32''$. An der Genauigkeit dieser Beobachtung ist alles gelegen, denn nach selber müssen die angenommenen Abstände geprüfet werden; und wenn die nach andern gemachten Beobachtungen und den willkührlichen Abständen berechneten Abweichungen, und gerade Ascension nicht mit dieser überein kommen, so muß man wiederum andere annehmen, und die Berechnung auf das neue wiederhohlen, so, wie es Ihnen ergangen ist.

8. §.

Wir haben aber zur Ausführung und Anwendung der besagten Methode noch andere Beobachtungen nöthig, wovon ich drey aus den in Wien gemachten Beobachtungen, welche in ihrer Zeitfrist, wo selbe auf den hiesigen Observatorien sind angestellt worden, nicht zu sehr entfernet sind. Es sind folgende: I. den 3ten September beobachtete man den Kometen um $14^h\ 47'\ 49''$, wo er dann in seiner Länge $2^s\ 16^c\ 48'\ 40''$, in der südlichen Breite aber $16^c\ 41'\ 33''$ zählte. II. Den 6ten September um $15^h\ 54'\ 13''$ hatte der Komet in seiner Länge $3^s\ 0^c\ 35'\ 20''$; in der Breite $19^c\ 23'\ 27''$. III. Den 9ten September um $16^h\ 12'\ 16''$ war

die

die Länge des Kometen $3^s\ 17^c\ 0'\ 41''$; seine Breite $23^c\ 32'\ 58''$. Weiters war die Länge der Sonne in der ersten Beobachtung $161^c\ 43'\ 26''$; in der zweyten aber $164^c\ 40'\ 59''$; in der dritten $167^c\ 36'\ 45''$; da indessen der Abstand der Erde von der Sonne nach Ausweisung der Ephemeriden den 3ten September 10. 003237; den 6ten 10. 002897; den 9ten 10. 002575 war. Hier will ich noch die beobachtete Länge seiner Dunstsäule, oder des sogenannten Kometenschweifes, welche bey 40^c, wie auch die Größe seines scheinenden Durchmessers, welcher, wenn wir den wahren Durchmesser des Kometen mit dem englischen Astronomus, dem Hrn. Dunn, dem Durchmesser des Mondes gleich annehmen, bey 17″ ausmachte, beyrücken; selbe können uns etwa noch zum Gebrauche seyn.

9. §.

Nun aber unserm Vorhaben näher zu kommen, so setzen wir, daß T, B, *t* (I. Fig.) drey verschiedene Orte der Erde sind, aus welchen man an verschiedenen Tagen; nämlich nach den angesetzten Beobachtungen den 3ten, 6ten und 9ten September den Kometen in seiner Laufbahne beobachtet hat. Auf daß man nun den Laufbogen des Kometen, welchen er während dieser drey Beobachtungen beschrieben hat, und welchen man in D, G, *d* zur Ecliptik bezogen hat, nach angeführter Methode (4. §.) berechnen könne, so ziehe man aus T die zwo Linien TO und TN, welche zu BG und *td*, der zwoten und dritten Beobachtungslinie parallel und gleich sind, indem selbe wiederum von andern zwoen parallelen und gleichen Linien nämlich $Tt = Od$ und $TB = NG$ unterstützet werden. Sie sehen klar, daß diese Veränderung der Figur der vorigen nach den wirklichen Beobachtungen gemachten Entwerfung ganz und gar nicht entgegen sey; weil die Winkel DTN und DEG einander gleich verbleiben.

10. §.

10. §.

Nun kömmt es darauf an, daß man zeige. was für Verhältnisse, zwischen den Abständen des Kometen von der Erde und seiner Geschwindigkeit man geschickt anzusetzen habe. Wo Sie dann auf dasjenige zu sehen haben, was ich oben (5. §.) gesagt habe. Es ist also $TN : TD = Gd. sin OTD : Dd. sin NTO$; denn in dem Dreyecke TNO ist $TN : NO = sin TOD : sin NTO$; wiederum in dem Dreyecke ODd ist $NO ; OD = Gd : Dd$; und endlich die Analogie des dritten Dreyeckes ist $OD : TD = sin OTD : sin TOD$. Wenn wir nun diese drey sonderlichen Proportionen in eine einzele zusammen setzen, so wird $TN. NO. OD : NO. OD. TD = sin TOD. Gd. sin OTD : sin NTO. Dd. sin TOD$; und hernach $TN : TD = Gd. sin OTD : Dd. sin NTO$. Das ist: der Abstand des Kometen $BG = TN$ von der Erde T in der zweyten oder mittlern Beobachtung verhält sich zu dem Abstande TD der ersten Beobachtung; wie sich das Factum der verflossenen Zeit binnen der zweyten und dritten Beobachtung Gd und des Sinus der Bewegung in der Länge OTD von der ersten zur dritten Beobachtung verhält zu dem Factum der ganzen Zeit zwischen der ersten und dritten Beobachtung Dd und des Sinus der Bewegung in der Länge NTO von der zweyten zur dritten Beobachtung.

11. §.

Auf eine gleiche Weise bekömmt man durch das Verhältniß des mittlern Abstandes des Kometen von der Erde, nämlich TN zu dem dritten Abstande desselben TO, oder td (9. §.), welches ist wie das Verhältniß des Factum der Zeit zwischen der ersten und zweyten Beobachtung DG, und des Sinus der Bewegung in der Länge DTO von der ersten zur dritten Beobachtung zu dem Factum aus der Zeit zwischen der ersten und dritten Beobachtung Dd und des Sinus NTD der Bewegung in der Länge zwischen der ersten und zweyten Beobachtung. Hiemit ist in dem buchstablichen Ausdrucke die Analogie $TN : TO = DG. \sin DTO : Dd. \sin NTD$. Denn in den dreyen Dreyecken TND, ODd, ODT bekömmt man folgende Proportionen I. $TN : ND = \sin TDN : \sin NTD$. II. $ND : OD = DG : Dd$. III. $OD : TO = \sin DTO : \sin TDO$. Nach geschehener Zusammensetzung dieser drey Analogien, und Auslöschung der gleichen Glieder (worunter auch $TDN = TDO$ enthalten sind) überkömmt man wiederum die vorhergesetzte Proportion $TN : TO = DG. \sin DTO : Dd. \sin NTD$.

12. §.

Wenn wir also in den angesetzten Proportionen (10. 11. §§.) das Verhältniß des mittlern Abstandes NT zu den andern zween Abständen aus den gegebenen Beobachtungen berechnen, so werden wir in den Zahlen folgende Ausdrücke überkommen; nämlich I. $NT : TD = 1 : 1,130336$. II. $NT : td\,(TO) = 1 : 0,941495$; denn es ist $GD = 263184$; $Gd = 260283$; $Dd = 523467$; $NTD = 13^c\ 46'\ 40''$; $NTO = 16^c\ 25'\ 21''$; $DTO = 30^c\ 12'\ 1''$. Sie sehen aber, daß uns in diesen Verhältnissen die Ausdrücke der Zahlen für die künftige Berechnung ziemlich beschwerlich seyn würden: deßwegen wollen wir selbe durch Buchstaben, welche ihren Werth ausdrücken sollen, abkürzen. Es soll also die erste Proportion (10. §.) durch $NT : TD = 1 : m$; die zweyte (11. §.) durch $NT : td = 1 : n$ ausgedrücket werden. Weil wir aber nicht noch den wirklichen Werth, sondern nur davon das Verhältniß wissen, so nehmen wir indessen $TN = x$.

13. §.

13. §.

Doch ehe wir weiter gehen, so ist es vor allen nothwendig, daß ich Ihnen eine Figur zeichne, in welcher die Lage des Kometen und der Erde entworfen wird, und welche, so viel es sich in Zeichnung einer Figur thun läßt, mit den gemachten Beobachtungen (8. §.) übereins kömmt. Es soll also der Zirkel (II. Fig.) indessen eine Ellipse, als die Laufbahne der Erde vorstellen. Die Sonne sey in S, T soll der Ort der Erde heißen, wo man die erste Beobachtung des Kometen in C; und *t* der Ort der Erde, wo man die dritte Beobachtung des Kometen in *c* gemacht hat. D sey der Ort des Kometen, so, wie selber schon zur Ecliptik bezogen ist. Man ziehe nun DT, also zwar, daß DT einen Winkel mache, welcher gleich sey dem Winkel der Differenz von der Länge des Kometen und der Sonne. Die Linie CT stelle den wahren Abstand des Kometen von der Erde vor, und alsdenn ziehe man die Linie CD. Unter eben diesen Bedingnissen ziehe man die Linien *dt*, *ct*, *dc* und vereinige das D*d*, zu welcher aus C eine parallele und gleiche Linie C*i* soll gezogen werden. Weiters vereinige man das C*c*, als den kleinen Bogen des Laufkreises, welchen der Komet binnen der Zeitfrist dieser drey Beobachtungen beschrieben hat. Endlich ziehe man das DT bis in A hinaus, und mit T*t* schließe man das Dreyeck A*t*T. Ich habe gesagt, daß diese Figur den gemachten Beobachtungen gleich kommen soll; denn, obschon keine vollkommene Genauigkeit zur Entwerfung erforderlich, so läßt es sich doch ganz und gar nicht thun, daß man in diesem Stücke bloß seiner Phantasie folge, ohne auf die Aehnlichkeit der Figur mit den gemachten Beobachtungen zurücke zu sehen; denn, wenn man nicht die Winkel DTS, *dt*S, TS*t* den wirklich beobachteten wenigst obenhin gleich macht, so kann es sich fügen, daß die Linien TD, und

td außer oder innerhalb den AT zusammen stossen, nach welchen denn AT und At entweder alle zwo oder die eine aus diesen Linien als eine positive oder negative Größe muß angesetzet werden.

14. §.

Jetzt müssen wir noch überdas einige buchstabliche Benennungen voraus setzen, welche uns zur Abkürzung des Kalkulus dienen können. Wir heißen also die Tangente der ersten aus der Erde beobachteten Breite des Kometen b; die Tangente aber seiner dritten geocentrischen Breite nennen wir c. Hernach nehmen wir in dem Dreyecke TAt den $cos\,A = f$; die Seite AT $= g$, und A$t = h$. Sie dürfen sich aber durch dieses, daß ich AT und At als bekannt annehme, nicht irre machen lassen; denn, weil die Länge der Sonne für die erste Beobachtung $= 161^{\circ}\ 43'\ 26''$; für die dritte aber $= 167^{\circ}\ 36'\ 45''$ (8. §.), so folget, daß der Winkel TSt, welcher die Fortrückung der Sonne in ihrer Länge mißt, sey $= 5^{\circ}\ 53'\ 19''$. Weiters sind aus den Ephemeriden die Abstände der Sonne von der Erde für jeden Tag der gemachten Beobachtungen bekannt (§. cit.): deßwegen kann man in dem Dreyecke STt die zween Winkel StT und STt sammt der Seite tT finden. Setzt man nun die Winkel TtS und dtS zusammen, so wird der Winkel AtT davon das Komplement seyn: zieht man aber von dem Winkel DTS den Winkel tTS ab, so bleibt der Winkel ATt übrig. Folglich sind in dem Dreyecke AtT zween Winkel und die Seite Tt bekannt, man kann also die zwo Seiten At und AT finden. Es ist nämlich A$t = 0,\ 0119062$; und dessen Logarithmus $= 8,\ 0757717$. Hernach ist AT $= 0,\ 0936543$, und der Logarith. davon ist $= 8,\ 9715280$. Ich will hier noch den Werth von einigen von mir berechneten Winkeln und Linien dieser Figur beysetzen, welche zu

dem

dem fernern Kalkulus dieses Kometen nützen werden. Also ist I. $DTS = 84^c\ 54'\ 46''$. II. $ATt = 3^c\ 17'\ 50''$. III. $dtS = 60^c\ 36'\ 4''$. IV. $AtT = 26^c\ 53'\ 11''$. V. $DAd = 30^c\ 12'\ 1''$. VI. $TSt = 5^c\ 53'\ 19''$. VII. $STt = 81^c\ 36'\ 56''$. VIII. $StT = 92^c\ 30'\ 45''$. IX. Logarith. von $Tt = 9,\ 0171417$: der Werth aber des $Tt = 0,\ 1040259$.

15. §.

Nun kömmt es darauf an, daß wir uns bemühen, den Werth von Cc als den Laufbogen des Umkreises, welchen der Komet binnen den 3 Beobachtungen (8. §.) beschrieben hat, und, welchen wir indessen als eine gerade Linie annehmen (5. §.) zu untersuchen. Ich habe es schon gesagt (4. §.), und Sie sehen es selbst klar, daß sich die ganze Auflösung bloß auf die trigonometrischen Grundsätze gründe; doch wird es ungemein vortheilhafter seyn, wenn wir hier einen Lehnsatz zu Hilfe nehmen, und dadurch der trigonometrischen Aufgabe: nach zwo gegebenen Seiten und dem enthaltenen Zwischenwinkel die dritte Seite des Dreyeckes zu finden, auf eine andere Weise, als die gewöhnliche Auflösungsform ist, genug thun; denn sonst würden wir mit den Differenzen und Semidifferenzen, mit Nachsuchung der Logarithmen für die Sinus und Tangenten noch vieles zu thun bekommen. Es wird also gut seyn, wenn wir einen kürzern Weg gehen, und beweisen, daß in einem jeden Dreyecke z. B. in ABC (III. Fig.), in welchem die zwo Seiten BC und AC, welche wir indessen M und N nennen, und der Zwischenwinkel C (dessen Cosinus wir $= a$ setzen) gegeben werden, die dritte Seite AB allzeit sey $= M^2 + N^2 - 2MNa$; denn, wenn man auf die Grundlinie AC eine senkrechte Linie BE herabfallen läßt, so bekömmt man aus der Analogie $R : M\,(CB) = a\,(cos\beta) : CE$

das $CE = \frac{Ma}{R}$; und weil $R = 1$, so wird $CE = Ma$. Deßwegen ist auch $EA = N(CA) - Ma$; weiters ist $BE^2 = M^2 (CB^2) - M^2 a^2 (\beta E^2)$ und $EA^2 = N^2 - 2MNa + M^2 a^2$. Hiemit wird $AB^2 = BE^2 + EA^2 = M^2 - M^2 a^2 + N^2 - 2MNa + M^2 a^2$; oder $AB^2 = M^2 + N^2 - 2MNa$.

16. §.

Nun wird es wohl nicht mehr so schwer seyn, in dem Dreyecke $C i c^c$ (Fig. II.) aus diesem Lehnsatze (§. 15.) und aus dem vorherangesetzten (§§. 12. 14.) den Werth von $C c^c$ zu bestimmen; denn es wird $C c^2 = ci^2 + i C^2$ (dD^2, weil $iC = dD$ §. 9.) Es ist aber aus dem erstgesagten (§. 15.) $D d^2 = A d^2 + A D^2 - 2 f \times AD \times A d$ (denn f ist der Cos A Fig. I. §. 14. oder der Cos C Fig. II.). Weil nun $A d = nz + h$; und $A D = mz - g$ (§§. 12. 14.), so ist auch $A D^2 = m^2 z^2 - 2 m y z + g^2$; und $A d^2 = n^2 z^2 + 2 h n z + h^2$; und $-2 f \times AD \times A d = -2 f mnz^2 + 2 f g n z - 2 f h m z + 2 f g h$. Hernach ist $i\ c = c d - i d$ (CD §. 13.), wo man dann in dem Dreyecke $t\ d\ c$ den Werth von $c\ d$ findet; nämlich $R : c^c = n z\ (td) : d c = c\ n\ z$ (§. 14.); und in dem Dreyecke T D C ist $R : b = m z$ (TD); $D C = b\ m\ z = i\ d$: hiemit $c\ i = c\ n\ z - b\ m\ z = (cn - b m)\ z$. Wenn wir nun $c n - b m$ durch t anzeigen wollen, so ist $i o^2 = t^2 z^2$. Deßwegen, wenn wir für $i\ c^2 + i\ C^2$ den herausgebrachten Werth ansetzen, so bekommen wir $C^c\ c^2 = t^2 z^2 + n^2 z^2 + 2 h n z + h^2 + m^2 z^2 - 2 m g z + g^2 - 2 f m n z^2 + 2 f g n z - 2 f h m z + 2 f g h$. Machen wir nun alle Coefficienten von z^2, nämlich $t^2 + n^2 + m^2 - 2 f m n = A$; die von z aber, nämlich $2 h n - 2 m g + 2 f g n - 2 f h m = B$; endlich $h^2 + g^2 + 2 f g h = C$, so haben wir zur Erleichterung der Berechnung die

die vorige Gleichung ziemlich abgekürzet, und es ist also $C c^2 = A z^2 + B z + C$.

17. §.

Man sieht klar, daß man jetzt vor allen den wirklichen Werth von z, durch welches wir N T, als den mittleren Abstand des Kometen von der Erde angezeiget haben (§. 12.) untersuchen müssen; denn alsdann werden wir durch die obenangesetzten Verhältnisse (§§. 10. 11.) auch den Werth von den Abständen der ersten und dritten Beobachtung; das ist, vom td (T O) und TD (§. 9.) finden, und nach diesen drey bekannten Abständen des Kometen von der Erde seine ganze Parabole berechnen können; so wie ich weiter unten mit mehrerem sagen werde. Dieses zu bewerkstelligen sey (Fig. IV.) in S die Sonne; in T die Erde. C sey der Ort des Kometen in seiner Laufbahne. N sey der Ort des Kometen, in so weit selber schon zur Ecliptik bezogen ist. $TN = z$ (§. 12.) sey der sogenannte abgekürzte Abstand des Kometen (Distantia curtata). Wir werden nun aus der einfachen trigonometrischen Rechnungsform in dem sphärischen Dreyecke N′ C′ S′, welches bey N′ einen rechten Winkel hat, den Bogen C′ S′ oder den Winkel C′ T S′, welcher zwischen der Sonne und dem wahren Orte des Kometen ist, finden können. Denn nehmen wir einmal den Cosinus dieses gefundenen Winkels $= a$, und den Radius $= 1$, so ist aus dem gesagten $CS^2 = ST^2 + TC^2 - 2a \times ST \times TC$. (§. 15.). Weil uns nun der Abstand der Erde von der Sonne oder das S T bekannt ist (§. 8.), so sey $ST = d$. Man findet also das T C aus dem Dreyecke N C T, wo $TN = z$ (§. 12.) und der Winkel N T C die beobachtete geocentrische Breite ist (§. 14.), wovon wir also die Secans, welche wir indessen S nennen wollen, wissen. Hiemit ist $R : S = NT\,(z) : CT = Sz$; und also

$CS^2 = d^2 + S^2 z^2 - 2\,adSz$ (§. 15.), welches ist das Quadrat des Abstandes des Kometen von der Sonne in der mittleren Beobachtung. Nun gleichet nach den newtonischen Grundsätzen* das Quadrat des von einem Kometen beschriebenen Raumes, wenn man selbes mit seinem Abstande multiplicieret, dem Factum des Quadrats des Raumes, welcher von einem jeden anderen Kometen binnen der nämlichen Zeit beschrieben wird, und dessen Abstandes. Deßwegen, wenn man was immer für eines Kometen Raum (a) und Abstand (b) weis, so ist $a^2 b = Cc^2 \times CS$, und also bekömmt man eine Gleichung, aus welcher man das z finden kann. Nun ist aber der Raum und der Abstand eines Kometen, welcher einen mitteren Abstand der Erde von der Sonne haben würde, schon berechnet und bekannt; denn nach des Newtons seinem Kalkulus**) würde ein solcher Komet jeden Tag 2432747 solche Theile in seiner Laufbahne beschreiben, von welchen der mittere Abstand der Erde von der Sonne 100000000 enthält. Deßwegen kann man folgende Gleichung der Verhältnisse ansetzen: In einem Tage durchläuft ein Komet 2432747 Theile, wieviel durchläuft ein Komet in einer Zeit, wo selber in unserem Falle den Bogen Cc durchlaufen hat. Das Quadrat des gefundenen Raumes multiplicire man nun mit dem Abstande von 100000000, und das Product davon heiße man Q, so ist $(Az^2 + Bz + C) \times \sqrt{(d^2 + S^2 z^2 - 2\,adSz)} = Q$. Und, weil man in dieser Gleichung die Radikalzeichen weglassen muß, so wird $(Az^2 + Bz + C)^2 \times (d^2 + S^2 z - 2\,adSz) = Q^2$, wo man dann die folgende Gleichung der sechsten Potenz überkömmt.

A²

*) Siehe Lib. I. Princip. Newton. Propos. 16. Coroll. 6.

**) Siehe Lib. III. Princip. Newton. Coroll. Propos. 40.

$$\left.\begin{array}{l} A^2 S^2 z^6 \\ +2ABS^2z^5-2A^2adSz^5 \\ +A^2d^2z^4+2ACS^2z^4+B^2S^2z^4-4ABadSz^4 \\ +2ABd^2z^3+2BCS^2z^3-4ACadSz^3-2B^2adSz^3 \\ +2ACd^2z^2+B^2d^2z^2+C^2S^2z^2-4BCadSz^2 \\ +2BCd^2z^2-2C^2adz \\ +C^2d^2-Q^2 \end{array}\right\} = 0.$$

18. §.

Wenn ich nun aus dieser Gleichung der 6ten Potenze mit Hilfe der zu diesem Ende vom Newton erfundenen bekannten Formel die Wurzel herausziehe, so bekomme ich den bisher gesuchten Werth des NT = z (§. 12.), als des mittleren Abstandes, welchen der Komet in der Ecliptik von der Erde vermög der zweyten Beobachtung (§. 8.) gehabt hat. Ist nun dieser mittlere Abstand oder TN bekannt, so kann durch die oben angesetzten Analogien (§§. 10. 11.) auch der Werth von den anderen zween Abständen (§. 9.) bestimmet werden, welche Sie dann, wenn Sie auf die andere bekannte Methode der Berechnung eines Kometen übergehen wollen, ganz sicher zur ferneren Berechnung annehmen, und versichert seyn können, daß diese überkommenen Abstände den wahren Abständen sehr nahe kommen (§. 5.), und Sie sich also in Ihrem ferneren Kalkulus, welchen Sie durch die bekannte Methode ausführen können, nimmer irren werden; noch minder selbe wiederhohlen dürfen; so wie ich Sie schon oben versicheret habe (§. 6.), und welchen Vortheil ich zu dem Hauptgegenstande dieser Methode gemacht habe (§. cit.). Es ist wahr, diese Methode, obschon sie zur richtigen Ausführung der bekannten Methode, welche doch allzeit, wie ich schon oft gesagt habe, wegen ihrer Genauigkeit keiner anderen weicht, nach unsrer Hauptabsicht nur eine vorläufige vortheilhafte Anwendung ist, kann Ihnen etwa wegen Ausziehung der Wurzel der sechsten Poteuze (§. 17.) etwas mühsam vorkommen; doch, weil wir dazu die Formel an der Hand haben, so ist es eben keine so mühsame Arbeit. Hernach werden Sie es mir ungebethen eingestehen müssen, daß es doch noch ungemein bequemer und vortheilhafter sey, durch eine vorläufige Berechnung die zween Abstände, deren sonst so ungewisse Annehmung die bekannte Methode so beschwerlich macht (§. 3.), schon vorher in einer genugsamen Genauigkeit zu überkommen, als die ganze Berechnung in der andern bekannten Methode, wenn die Annehmung der zween willkührlichen Abständen nicht geglücket hat, mit so vielem Zeitverlust und umsonst angewandter Mühe zu grossem Verdrusse zu wiederhohlen, wie ich schon oben angemerket habe (§. 6.). Setzen Sie hinzu, daß diese Methode nicht nur allein nach dem Gesagten für die an dere bekannte Methode sehr vortheilhaft sey; sondern selbe auch in einem gewissen Falle zur Berechnung eines Kometen von einem genugsamen Gebrauche sey, wenn nämlich ein Komet nur durch etliche Tage (welches sich nach Ausweisüng der Theorie der Kometen öfters fügen kann) kann beobachtet werden, und also diese Methode, weil der Laufbogen des Kometen binnen so enger Zeitfrist ziemlich klein seyn wird, mehr Genauigkeit verspricht (§. 5.). Ja selbe mag in diesem Falle, wo man nicht so viele auseinandergesetzte Beobachtungen machen kann, wohl gar der anderen bekannten Methode vorgezogen werden; denn es ist gewiß, daß die Genauigkeit und Richtigkeit der Letzteren meistens von den vielen und auseinander gesetzten Beobachtungen abhängt. Ich dächte also, es werde Ihnen angenehm seyn, wenn ich Ihnen diese vortheilhafte Methode in ihrem ganzem Umfange zeige. Dieses zu bewerkstelligen, darf ich nur die angefangene Berechnung des lezt erschienenen Kometen in eben dieser

Methode zu Ende bringen. Damit Sie aber erkennen, daß diese Methode allgemein sey, und auf einen jeden Kometen möge angewandt werden, so will ich Ihnen die weitere Berechnungsart durch allgemeine Ausdrücke zeigen. Ich werde hernach zum Schlusse die von mir berechneten Elementen dieses letztgesehenen Kometen, welcher, wie Sie ganz leicht aus dem Gesagten begriefen werden, sich durch die beyden Methoden berechnen läßt, beyrücken.

19. §.

Nachdem ich also den Werth von $NT = z$ als den mitleren Abstand des Kometen (12. §.) durch Ausziehung der Wurzel der sechsten Potenze (17. §.), und also auch den Werth von den andern zween Abständen gefunden habe (10. 11. §§.), so wird es ein leichtes seyn, alle noch übrigen unbekannten Größen welche zur endlichen Berechnung der Parabole noch nöthig sind, in der zweyten Figur zu bestimmen. Also finde ich z. B. I. den Werth von DC; denn es ist $R : b$ (der Tangente der ersten geocentrischen Breite 14. §.) $= TD : DC$. II. den Werth von dc; denn es ist $R : c$ (der Tangente der dritten geocentrischen Breite) $= td : dc$. III. den Werth von Dd^2; denn es ist $dD^2 = Ci^2$ (9. §.) $= AD^2 + Ad^2 - 2\,cos\,A \times AD \times Ad$ (16. §.). IV. den Werth von Co; denn es ist $Cc^2 = iC^2 + ic^2$ (16. §.), und $ic = cd - CD$ (13. §.). V. den Werth von SD und Sd als den zween abgekürzten Abständen des Kometen von der Sonne (17. §.); denn es ist $SD^2 = ST^2 + TD^2 - 2\,cos\,STD \times ST \times TD$; und $Sd^2 = St^2 + td^2 - 2\,cos\,Std \times St \times td$ (15. §.). VI. den Werth des Winkels dSD, welcher die Bewegung des Kometen in seiner heliocentrischen Länge mißt; denn in dem Dreyecke SdD sind aus dem erstgesagten alle drey Seiten schon bekannt. VII. den Werth des Winkels der ersten, welche wir M, und der dritten heliocentrischen Breite, welche wir *m* heißen wollen; denn es ist SD : DC = R : *tang* M. Hernach S*d* : *dc* = R : *tang m*. VIII. den Werth vom SC, als den Radius Vector der ersten, und vom S*c* als dem Radius Vector der dritten Beobachtung; denn es ist R : *sec* M = SD : SC, und wiederum R : *sec m* = S*d* : S*c*. IX. den Werth des Winkels *c*SC, welcher die Differenz der zwoen Anomalien ist; denn in dem Dreyecke S *c* C sind alle drey Seiten bekannt.

20. §.

Weil nun die zween Radii Vectores und die Differenz zwoer Anomalien bekannt sind (§. 19. VIII. IX.), so kann man den Werth der beyden wahren **Anomalien** finden; und dieses durch die bekannte Formel, durch welche wir folgende Gleichung der Verhältnisse überkommen, daß nämlich die Summe der zwoen Wurzeln von den zween Abständen des Kometen, oder den zween Radiis Vectoribus zur Differenz eben derselben Wurzeln sich verhält, wie sich verhält die Cotangente des vierten Theiles der Summe der zwoen Anomalien zur Tangente des vierten Theils der Differenz derselben. Ist die Anomalie bekannt, so überkömmt man auch den Abstand des Perihelium, welcher dem Quadrate des Cosinus der halben wahren Anomalie gleichet, wenn selbes Quadrat mit dem Radius Vector multiplicieret, und durch das Quadrat des ganzen Sinus dividieret wird. Hernach verhält sich die Quadratwurzel des Cubus vom Abstande des Perihelium zur Einheit, wie sich der Zwischenraum des Perihelium und der Zeit, wo der Komet die gegebene Anomalie gehabt hat, zur Zeit verhält, in welcher ein anderer schon berechneter oder sogenannter Tafelkomet (Cometa tabularis) die nämliche Anomalie hat, wo man dann die Zeit findet, an welcher der Komet seinen nächsten Abstand hat. Nun weiters die Länge des Kno-

ten

ten und die Neigung der Laufbahne des Kometen zu finden, will ich Ihnen zu einem leichteren Begrife eine sonderliche Figur zeichnen, welche sich aber auf die vorige zweyte Figur beziehet. Es sey also E H (Fig. V.) ein Bogen von der Ecliptik, D und *d* sollen die zween Orte des Kometen vorstellen, so wie selbe zur Ecliptik bezogen sind; hiemit wird der Bogen D *d* die heliocentrische Bewegung des Kometen in seiner Länge anzeigen. D C und *d c* sollen die zwo heliocentrischen Breiten des Kometen seyn: wo man dann diese zween Bögen so weit hinaus ziehen soll, bis selbe in P als dem Polus der Ecliptik zusammenstossen. Man ziehe ferner C *c* bis zur Ecliptik, und in dem Puncte ☊, wo dieser Bogen die Ecliptik berührt, wird der Knoten der Laufbahne des Kometen anzutreffen seyn. Weil nun in dem Dreyecke C D ☊ nur zwo Größen bekannt sind, nämlich die Seite D C (§. 19. VII.) und der rechte Winkel bey D, so nehme man das Dreyeck P C *c* zu Hilfe, in welchem die Bögen P C und P *c* als die Complemente der zwoen Breiten des Kometen bekannt sind (§. cit.), wie auch der Winkel *c* P C, als welcher die Bewegung des Kometen in der Länge mißt. (§. 19. VI.) Man kann also in diesem Dreyecke *c* P C den Winkel P C *c* finden, und hiemit bekömmt man auch in dem Dreyecke C ☊ D dem Winkel D C ☊, welcher dem vorigen als seinem Verticalwinkel gleich ist, wo man dann den Bogen D ☊ berechnen kann. Deßwegen, wenn man die **Länge des Knoten** finden will, so darf man nur den gefundenen Bogen zu der Länge des D hinzuthun, oder von selbem wegziehen, nachdem nämlich ein Komet ehender oder später den Knoten als den Punct D berühret. Die Länge aber des Puncts D ist bekannt; denn in dem Dreyecke T D S (Fig. II.) ist der Werth des Winkels D S T, wie auch die Länge des Puncts T oder der Erde in der ersten Beobachtung bekannt, zu welcher, wenn wir den Winkel bey S[c] hinzu-setzen, bekommen wir die Länge des Punets D. Endlich ist es aus dem, was wir jetzt gesagt haben, klar, daß man in eben diesem Dreyecke D C ☊ (Fig. V.) den Winkel C ☊ D also auch die **Neigung der Laufbahne** des Kometen finden könne. Nun ist nichts mehr übrig, als das wir die Länge des Perihelium bestimmen, wofür ich wiederum eine besondere Figur zeichne. Es sey also *d* π (Fig. VI.) ein Bogen der Ecliptik, ☊ P sey ein Bogen, welcher die Laufbahne des Kometen vorstellt. Weil für den Punct C die Anomalie oder der Winkel C S P aus dem Gesagten dieses Absatzes bekannt ist, so werden wir den Werth des Bogen P ☊ finden, wenn wir nämlich diesem Winkel den Bogen C ☊, welchen wir schon oben aus dem vorigen Dreyecke C D ☊ (Fig. V.) überkommen haben, hinzufügen. Hernach wissen wir aus dem erstgesagten den Winkel π ☊ P als die Neigung der Laufbahne des Kometen, wie auch den Winkel ☊ π P, welcher ein rechter Winkel ist. Man kann also den Bogen π ☊ finden, welchen, wenn wir selben zur Länge des Knoten hinzuthun, uns die **Länge des Perihelium** giebt.

21. §.

Weil nun alles, was bisher von dieser Methode gesagt worden, auf den letztgesehenen Kometen nach den gemachten Beobachtungen (§§. 7. 8.) ist angewandt worden, so darf man nur statt der vorgesetzten allgemeinen Ausdrücken (§§. 19.) den wirklichen Werth in Zahlen einrücken, und man wird alsdann desselben Elemente bestimmen können, welche nach unserer Berechnung folgende sind. I. Die Zeit des Perihelium hatte man auf den 7ten Octobers, die Zurückkunft des Kometen auf den 28ten desselben anzusetzen. II. ☊ oder der aufsteigende Knoten des Kometen ist in ♍ oder im Gestirne der Jungfrau bey dem 23ᶜ anzutreffen. III. Die

Nei-

Neigung seiner Laufbahne wird bey 42° 56′ ausmachen. IV. Der Abstand des Perihelium ist 20109, worunter man solche Theile verstehet, dergleichen der Abstand der Sonne von der Erde 100000 enthält. V. Die Länge des Perihelium ist bey dem Löwe oder in ♌ 15° 52′. VI. Den Anstand des Kometen in der ersten Beobachtung am 3ten Septembers (§. 8.) setzen wir an als 31997; in der dritten Beobachtung am 9ten Septembers als 29831. Aus diesen Elementen wird nun die Parabole dieses Kometen bestimmet, wovon wir in der siebenden Figur einen rohen Entwurf geben, wo wir weiter nichts anzumerken haben, als daß die Buchstaben C, S, T, die nämlichen Benennungen beybehalten, welche wir selben anderswo (§. 13.) für die zweyte Figur eingeräumt haben. Uebrigens wenn diese Elementen etwa nicht die genauesten sind, so werden Sie es mir zu gut halten; denn die berühmtesten Astronomen waren schon in Bestimmung des Perihelium und der Zurückkunft dieses Kometen nicht gar zn einig gewesen; wie Sie etwa selbst in den gelehrten Nachrichten werden gelesen haben. Doch Sie dürfen sich deßwegen gar nicht zu sehr aufhalten; denn richtig ist es, daß, im Falle die gemachten Beobachtungen, besonders der geraden Ascension und der nordlichen Abweichung dieses Kometen in seinem absteigenden Knoten (§. 7.) nicht recht genau sey, sich gar leicht ein merklicher Fehler in die Berechnung einschleichen könne. Ueberdas war auch der Kern dieses Kometen ziemlich groß (§. 8.) und sein Rand nicht gar zu bestimmt; man könnte sich also in dem gemachten Beobachtungen leicht um etliche Secunden zum Nachtheil der geschehenen Berechnung irren. Deßwegen ist es für die Genauigkeit der gemachten Beobachtung allzeit vortheilhafter, wenn die Kometen in ihrer Erscheinung weit von uns entfernet sind.

22. §.

22. §.

Nun, mein Freund, was sagen Sie, das war gewiß ein sehr langer Brief? Sollten selben die Richter der Briefkunst zu sehen bekommen, was für einen weitaussehenden Stoff zur Kritik würde er ihnen nicht an die Hand geben. Aber diese Herren werden ihn nicht zu sehen bekommen; noch minder würden sie selben lesen; denn was sollte ihnen wohl ein astronomischer Brief? Sie selbst, mein Freund, werden wohl darüber müde geworden seyn. Aber Sie begehrten ja von mir über die Berechnung dieses Kometen etwas vollständiges, etwas vortheilhaftes. Wie wünschte ich nur, Ihrem Verlangen genug gethan zu haben. Doch ich weis es, daß Sie auch eine geringe zu Ihrem Dienste geschehene Bemühung gütig aufnehmen. Sie wissen es, was ich mir für ein Vergnügen mache, mich mit Ihnen über mathematische Gegenstände, sonderlich wenn selbe die Astronomie, als die erhabenste und edelste Wissenschaft betreffen, zu unterhalten, wenn es schon meinem Genie selbst nicht so reizend und meinem Fortgange in der Astronomie nicht so vortheilhaft wäre, von mathematischen Gegenständen mit Ihnen in Briefen zu schwätzen. Sie sollen allein über diesen Brief in Ihrer Antwort den Ausspruch geben; nicht, ob selber gelehrt, sondern ob Sie damit zufrieden seyn; denn Sie wissen, daß nicht ein eitle Ruhmsucht, sondern die Lehrbegierde für ein vollkommneres Kenntniß und geübte Fertigkeit in der Astronomie die Hauptabsicht unsers Briefwechsels ist. Leben Sie wohl, und halten Sie mich noch ferner Ihrer Freundschaft werth; Ich bin

Ihr ergebenster und

aufrichtiger Freund

L. G.

Nach-

Nachschrift.

23. §.

In dem Anhange Ihres Briefes verlangen Sie von mir eine Nachricht von den sonderlichen Eigenschaften dieses Kometen. Ich rechne es mir zur Ehre, Ihrem Verlangen genug zu thun, und ich will also von der Länge und Dünne der Dunstsäule oder des sogenannten Schweifes dieses Kometen ganz kurz einige Anmerkung diesem Briefe beyfügen. Ich habe in den offentlichen Zeitungsblättern gelesen, daß Herr Dunn Astronomus in London die Länge der Dunstsäule dieses Kometen in seinen Berechnungen auf 40 Millionen Meilen angesetzet habe.* Doch, wenn wir die gemachte Beobachtung für die Länge der Dunstsäule, welche wir bey 40° (§. 8.) angesetzt haben, beybehalten, und selbe nach unseren Elementen berechnen (§. 21.), so werden wir für die Länge der Dunstsäule dieses Kometen 4270760 deutsche Meilen herausbringen. Denn die Länge der Dunstsäule eines Kometen, hat man aus der Gleichung der zwey Verhältniße des Radius zur Tangente des Winkels der Länge der Dunstsäule, und des Abstandes des Kometen von der Erde zur Länge der Dunstsäule zu berechnen. Es ist aber der mittere Abstand der Sonne von der Erde = 22918 halben Durchmeßern der Erde, wovon ein jeder = 860 deutschen Meilen gemeiniglich angenommen wird; hiemit, weil der Abstand des Kometen den 9ten Sept. = 29831 (§. 20. VI.), so ist selber, wenn wir ihn auf die deutschen Meilen beziehen, = 5878960 deutsche Meilen, hiemit, wenn man

Mm nach

*) Siehe wienerisches Diarium Nro. 78 in vermischten Neuigkeiten.

nach dem Gesagten folgende Analogie ansetzet, so ist R. tang. 40: $= 5878960 : x = 4270760$, und also x oder die gesuchte Länge der Dunstsäule dieses Kometen = 4270760 deutschen Meilen.

24. §.

Die **Dünne der Dunstsäule** dieses Kometen zu bestimmen, so wollen wir indessen annehmen, daß die Kometen mit Atmosphären, wie unsere Erde, umgeben sind. Nach angenommenen diesen Heischesatz beweiset Newton, * daß, wenn man ein Sphärchen, welches in seinem Durchmesser nur einen Zoll faßte, in die Entfernung eines halben Durchmessers der Erde, das ist 860 deutscher Meilen (§. 23.), über den Kern des Kometen übertrüge, selbes sich so sehr ausdehnen würde, daß es sich über die Sphäre des Saturnus als des entferntesten Planeten ausbreiten würde. Ueberdas würde dieses Sphärchen, wenn man die Ausdehnungskräfte in dem umgekehrten Verhältnisse der drückenden Massen oder Schweren annimmt, einen Raum von 1830252000000 cubischen deutschen Meilen einnehmen. Wir wollen also untersuchen, was für einen Theil von dieser übergrossen Sphäre des Saturnus die Dunstsäule des Kometen, welche in ihrer äußersten Breite etwa $1\frac{1}{2}$. Grad hatte, ausmache. Weil man diese Dunstsäule des Kometen als einen gestumpften Kögel betrachten kann, welcher in seiner Länge 427060 deutsche Meilen mißt (§. 23.) so bekömmt man nach der gemeinen Rechnungsform des körperlichen Inhalts eines Kögels selbe $= \frac{1}{600000000}$ Theile der ganzen Sphäre des Saturnus. Weil aber nach der newtonianischen Berechnung die Dünne der Atmosphäre eines Kometen in dem äußersten Theile der Dunstsäule sich zur Dünne in dem Abstande eines halben Durchmessers der Erde verhält, wie die Zahl 7 mit hun-

*) Siehe *Newton*. Tom. II. Opusc. XVII. pag. 54 et sequ. Edit. Lausannae et Geneu.

hundert und neun Nullen zur Einheit: so muß dann im Gegentheile um so weniger Masse in dem äußersten Theile der Dunstsäule eines Kometen sich befinden, als in dem Abstande eines halben Durchmessers der Erde ist. Nun, wenn man die Grundlinie mit der Höhe des Kögels, welche in Rücksicht auf diesen Kometen 4270760, multiplicieret, so bekömmt man die ganze Masse dieses Kögels. Es ist aber der körperliche Inhalt dieser Dunstsäule als eines Kögels = $\frac{1}{60000000}$ Theile der ganzen Sphäre, in welche ein Sphärchen eines Durchmessers von einem Zolle ist ausgedehnet worden: hiemit bekömmt man für den Ausdruck der Masse von der Dunstsäule dieses Kometen eine Fraction, dessen Zähler eine Einheit ist, der Nenner aber 42 mit hundert und sechszehen Nullen. Sie sehen also, daß die Dünne der Dunstsäule dieses Kometen sehr ungemein ist. Die gemachten Beobachtungen bekräftigen das Gesagte; denn man sah die Fixsterne durch die Dunstsäule dieses Kometen ohne die mindeste Refraction durchscheinen. Wollen wir von der Dünne dieser Dunstsäule auf die Dünne der Dunstsäulen von anderen Kometen schließen; so könnten wir wohl einen Whiston fragen, wie er einen solchen Gewalt der Gewässer aus der so ungemein dünnen Atmosphäre eines Kometen habe beyschaffen können; oder wie dann seine Vorsage bestehen könne, daß beym Untergang unserer Erde eine so sehr dünne Atmosphäre unsere Erde in Brand stecken würd. Doch davon, wie auch von seiner Berechnung des Kometen, welcher zur Zeit der Sündfluth soll erschienen seyn, hätte ich Ihnen vieles noch zu sagen.*

*) Ich mache indessen die einzige Anmerkung, daß die Berechnung des Whistons für seinen Kometen, wovon er in seiner Theorie der Erde redet, ganz und gar unrichtig sey; denn, obschon selbe

25. §.

Eben fällt es mir bey, Sie zu befragen, ob Sie nicht in den offentlichen Zeitungsblättern gelesen haben, wie man sich bemühete, die grossen Ueberschwemmungen des Meeres, welche sich im Augustmonathe in Amerika geäußert haben, der wirkenden Anziehungs-Kraft des letzt erschienenen Kometen zuzuschreiben. Aber nicht wahr, dieses mag wohl der Einfall eines Halbgelehrten oder etwan eines gar zu philosophischen Zeitungsschreibers gewesen seyn; denn ein verständiger Astronomus kann sich gewiß des Gegentheils versichern. Wir wollen davon einen Beweis geben. Herrn Dunn Astronomus in London, welchen wir schon vorher angezogen haben (§§. 8. 23.) setzet den körperlichen Inhalt des Kometen so groß als des Monds seinen an. * Weil nun die anziehenden Kräfte in dem geraden Verhältnisse der Massen sind, so können wir von den gleichen Massen des Mondes und des Kometen auf gleiche Wirkungen ihrer anziehenden Kräften schließen.

Neh-

---

be mit der bekannten periodischen Laufbahne und den Epochen, wie man selbe auf die Zeit der Sündfluth beziehet, ziemlich eintrift; und dieser Komet auch um diese Zeit der Erde sehr nahe gekommen wäre; so wissen wir doch aus der Theorie aller bisher noch bekannten periodischen Laufkreisen der Kometen, daß selbe allzeit später erscheinen, als ihr Daseyn vermög des genauesten Kalkulus erfordert wird. Weil nun Whiston seinen Kometen ohne den Abzug der gewöhnlichen Verspätung ihrer Rückkunft berechnet hat; so wird wohl seine Berechnung nimmer genau seyn, noch auch seine daraus gezogene Folge Stand halten.

*) Siehe wienerisches Diarium Nro. 78.

Nehmen wir nun einmal die Wirkung der anziehenden Kraft des Mondes in Rücksicht auf die Fluthe des Meeres, und setzen wir selbe in ein Verhältniß mit der wirkenden Anziehungskraft des Kometen. Weil aber das Verhältniß des Abstandes des Mondes von der Erde zu dem Abstande des Kometen von der Erde durch 1 : 114 mag ausgedrücket werden; denn der Mond ist von uns 60 halbe Durchmesser der Erde oder 51600 deutsche Meilen, der Komet aber vermög des vorhergesetzten Abstandes 5878960 deutsche Meilen entfernet (§§. 21. 23.), welche beyde Abstände unter sich also das nämliche Verhältniß haben, wie 1 : 114. Nun sind aber die Wirkungen der anziehenden Kräften in einem umgekehrten gezweyfältigten (ratione dupplicata) Verhältniße der Abstände: hiemit bekommen wir für das Verhältniß der Wirkungen der anziehenden Kraft des Kometen auf die Erde, und der nämlichen Kraft des Mondes auf die Erde in Zahlen, wie 1 : 12996. Es ist also die Wirkung der anziehenden Kraft des Kometen der $\frac{1}{12996}$ Theil von der anziehenden Kraft des Mondes. Da nun der Mond in seinem nächsten Abstande nur eine gemäßigte Fluthe des Meeres durch seine Anziehungskraft bewirket, wie sollte man wohl auch nur wahrscheinlicher Weise der Anziehungskraft des erschienenen Kometen, welche nach dem Bewiesenen gleichsam als ein unmerklicher Theil der Anziehungskraft des Monds kann angesehen werden, die thätige Ursache so heftiger Ueberschwemmungen zumuthen können? Hernach, weil wir für die Anziehungskraft des Kometen die Analogie der Anziehungskraft des Mondes, wegen Gleichheit ihrer Massen beybehalten können, so würden wir in beyden wohl auch auf die Gleichheit noch anderer Nebenumstände schließen können. Also z. B. der Mond verursachet durch seine anziehende Kraft die Fluthe des Meeres nur in seinem nächsten Abstande; und zwar erst ein oder zween Tage nach selbem. Wiederum die Fluthe, welche von dem Mond verursachet wird, ist ziemlich mittelmäßig, aber doch allgemein in allen Meeren: da hingegen nach dem Zeugnisse der in Zeitungen gegebenen Berichten diese stürmenden Ueberschwemmungen nur in dem einzigen Amerika am Ende des Augustmonaths sich äußerten; da doch der Komet, wenn wir auch nicht auf die so ungemein verschiedenen Abstände des Kometen und des Mondes von der Erde sehen wollten, seinen nächsten Abstand erst bey dem 10ten Sept. hatte rc. rc. Wir wollen es also immer glauben, daß diese gemachte Muthmassung niemals der Gedanke eines geschickten Astronomus gewesen sey.

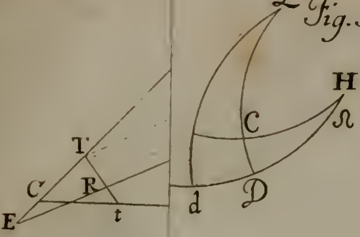


Fig. 5

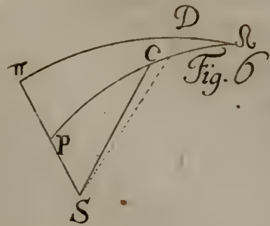
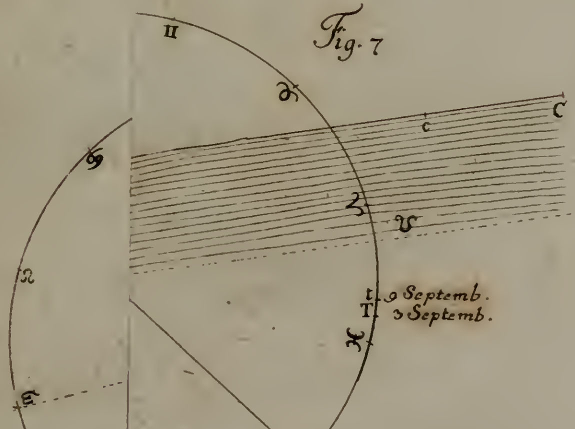


Fig. 6

Fig. 7



…tobr

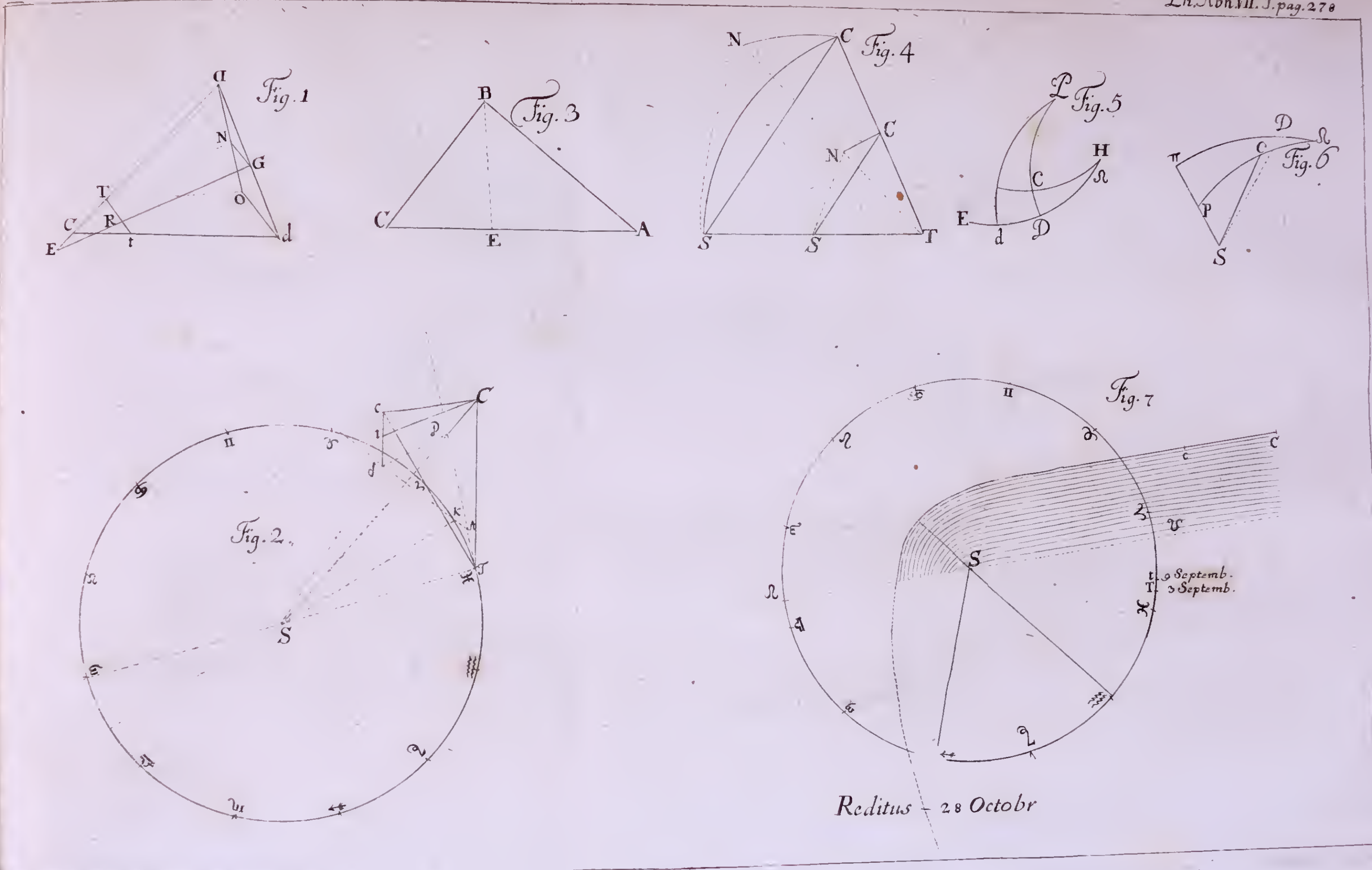


Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
t. 9 Septemb.
T. 3 Septemb.
Reditus 28 Octobr

Versuch
einer kurzen
Abhandlung
von dem unterirdischen Baue
bey
Bergwerken,
entworfen
von
Carl August Scheidt.

1768.

Von dem unterirdischen Baue bey Bergwerken überhaupt.

Ich muß zum voraus erinnern, daß hier nicht lauter Neues gesagt werden wird; denn um des Neuen willen muß verschiedenes, was in den alten Bergbüchern stehet, mit berühret werden; es soll aber in möglichster Kürze geschehen, weil in jenen Büchern weiter darüber nachgeschlagen werden kann. Was ich zu sagen willens bin, ist nur in Absicht auf die Art der Anwendung bey dem unterirdischen Baue bey Bergwerken neu, und soll unter dem Alten in gewissen wenigen Abschnitten dieser Schrift erscheinen. Ich werde einige bekannte Sätze anführen, die bey dem unterirdischen Baue bey Bergwerken mit Nutzen angewandt werden können, in den alten Bergbüchern aber nicht erwähnet sind. Endlich will ich eine Schachtzimmerung und Mauerung vorschlagen, die ihrer Festigkeit und Dauer wegen bauver-

 stän-

ständigen Bergleuten vieleicht nicht mißfallen dürfte. Glauben sie, daß diese Bauart noch einige Verbesserung nöthig habe, so bin ich wohl zu frieden, wenn es mit Grunde geschiehet und ich nur die Gelegenheit dazu gegeben habe. Ich wende mich nunmehr zu dem, was ich von dem unterirdischen Baue bey Bergwerken zu sagen habe:

Die Bergleute brauchen das Wort Bauen in mancherley Bedeutung. Wenn sie Bergwerk überhaupt betreiben, so heißet es bey ihnen, Bergwerk bauen; dahin rechnen sie also alle Bergwerksgeschäfte, die sowohl über, als unter der Erde zum Bergwerk gehören; besonders aber bauen sie über der Erde, oder am Tage, wenn sie Huth- oder Zechenhäuser, Kauen, Göpel, Wasserkünste, Pochwerke, Erztwäschen, Schmelzhütten, Schmelzöfen, Wasserläufe, Reiche und dergleichen aufrichten und anlegen. Ferner bauen sie unter der Erde, dieses geschiehet auf zweyerley Weise:

Erstlich, wenn sie die Erd- und Steinlagen eines Gebürges nach ihrer Absicht mit Röschen, Schürfen, Stollen, Schächten, Strecken, Gesenken, Schlöthen oder Uebersichbrechen, Hornstädten, Querschlägen, Flügel Oertern vermittelst ihrer Bergwerkzeuge, als Schlägel, Eisen, Bohrer, Keilhauen, Kratzen, Keilen, &c. durchbrechen.

Zweytens, wenn sie das lockere, lose Gestein, so klüftig ist, oder Erde, Sand, Kieß, Gerölle unter der Erde mit Zimmer- oder Mauerwerk verwahren und vor dem Einsturz sicher stellen, Wasserkünste daselbst errichten, Fahrten in die Schächte, Gesenke und Schlöthhengen, Bühnen, Kasten und Spreitzen schlagen, Tragestempel, Einstriche und Stege legen, Thürstöcke setzen, die sich gezogenen und abgelöseten Steinfelsen und Wände mit Holz und Steinen unterschlagen, oder unterwölben, daß sie stehen bleiben, nicht stürzen, und dergleichen mehr.

Diese letztern Geschäfte gehören zwar alle zu dem unterirdischen Baue bey Bergwerken; allein ich würde zu weit von meinem Zwecke abkommen, wenn ich von allem handeln wollte. Ich habe mir vorgesetzt, nur das, was eigentlich den Bau durch die Erd- und Steinlagen, und die Verwahrung derselben vor dem Einsturz angehet, in Betrachtung zu ziehen, das übrige aber den Steigern und Zimmerlingen zu überlassen.

Ich setze voraus, daß das Gebürge, in welchem ein unterirdischer Bau angestellet werden soll, mit Erzgängen, oder Minerallagern gesegnet sey, so entweder schon entdeckt, oder vermittelst gewisser Anzeigen vermuthlich in demselben vorhanden sind.

In meiner bergmännischen Erdbeschreibung in dem 2ten Bande der churfürstlich-baierisch-akademischen Abhandlungen habe ich gezeiget, daß die ganze Erde ein Flötz sey, die Berge und Hügel aber nur als von unterirdischen Bewegungen, oder andern Ursachen verursachte Abweichungen zu betrachten wären, da verschiedene Flötzlagen von solchen Bewegungen entweder gehoben, und aus einer schwebenden fast wagerechten in eine steilere und bisweilen gar senkrechte Stellung gebracht, oder manche Hügel und Berge durch Wasserfluthen aufgesetzt worden. Der unterirdische Bau bey Bergwerken wird also entweder in fast wagerecht-liegenden, oder in erhobenen Erd- und Steinlagen angestellet werden können. Hieraus ergeben sich zween Gegenstände; der eine betrift den unterirdischen Bau bey Bergwerken in fast wagerecht liegenden, der andere in erhobenen Erd- und Steinlagen. Bey beyden muß darauf gedacht werden, wie der Bau nicht allein auf die kürzeste und vortheilhafteste Art anzustellen, sondern auch diesem Baue Festigkeit und Dauer, sowohl zum Fortbaue, als zur Sicherheit für das Leben der Aufseher und Arbeiter zu verschaffen sey.

Weil die fast wagerecht liegenden sowohl als die erhobenen Erd- und Steinlagen, indem sie sich mit ihren Erz- und Minerallagern oder Gängen insgemein gegen zwo Weltgegenden, die ersten weniger, die andern stärker heben, und diesen gegen über sich nach der Teuffe ziehen, daselbst erst recht edel zu werden anfangen, und der Bergmann im Gebürge jederzeit mit zween Hauptfeinden, nämlich mit Wassersnoth und bösen Wettern oder mit erstickender Luft zu kämpfen hat: so muß er mit dem anzustellenden unterirdischen Baue gleich im Anfange nach der Teuffe trachten, und darauf bedacht seyn, wie er die Erzteuffe erlange, und seinen Feinden, wenn sie sich einstellen sollten, entgegen gehen und sie aus dem Wege räumen möge, damit er ungehindert fortbauen könne.

Die besten Mittel hiezu sind Röschen, Stollen, Sümpfe, Wasserkünste, und Durchschläge, welche den Ablauf der Wässer befördern, und einen guten Luftwechsel verschaffen; die sogenannten Wasserseigen bey Röschen und Stollen, in Schächten und Gesenken in das Gesteine gleich mit einzuhauende und hernach zu verdeckende Schräme, über oder neben einander anzusetzende und in das Gebürge zu treibende Oerter und Strecken, da aus einer in die andere durchgeschlagen werden kann, gehören hauptsächlich hieher.

Wie vermittelst der Wasserkünste die Wässer aus den unterirdischen Bergwerksgebäuden, der Wettermaschinen und des Feuers

Feuers der Luftzug daselbst zubewirken sey, findet man in den Bergwerks- und Maschinenbüchern.

Der Anfang eines unterirdischen Bergbaues sowohl in flachliegenden- als gehobenen Erd- und Steinlagen eines Gebürges wird entweder mit wagerrechter, flacher, oder senkrechter Durchbrechung derselben gemacht; alle drey Arten der Durchbrechung haben ihren Grund, warum sie so geschehen.

Die wagerechte Durchbrechung der Erd- und Steinlagen hat sonderlich die Wasserlosung zum Grunde, und verschaffet, wenn man damit in ein ander Gebäude oder Oeffnung im Gebürge durchschlagen kann, frische Wetter; sie begegnet also den beyden Hauptfeinden der Bergleute, sie leistet bequeme Förderniß und vernützt weder Seil noch Kübel.

Die flache Durchbrechung hat sonderlich auf flachen in die Teuffe fallenden Erzminerallagern und Gängen statt, wenn sie ziemlich mächtig und im Hangenden und Liegenden ihre Ablösung oder Scheidung am Gesteine haben; es werden viele Arbeitsköſten damit erſparret, und nicht allzuflache Schächte sind den Bergleuten zum Ein- und Ausfahren bequem.

Die senkrechte, oder nach der Bergsprache, die saigere Durchbrechung gedachter Lagen geschiehet deßwegen, daß man desto eher auf ein edles Erzminerallager oder Gang in die Teuffe komme, auch kürzere Bergförderniß und leichtere Verzimmerung oder Verwahrung des Gesteines gegen den Einsturz habe.

Jede dieser Durchbrechungsarten hat aber auch ihre Ungemächlichkeiten:

Die wagrechte Durchbrechung gedachter Lagen, wenn sie weit in das Gebürge getrieben werden muß, verursachet, sowohl im rolligen, als festen Gebürge, langweilige, beschwerliche und kostbare Bergförderniß und Arbeit, sie erfordert öfters viel Holz, Bretterwerk und Zimmerung, der Wettermangel stellet sich endlich ein, und ist gleichwohl wegen der Wasserlosung eines Gebürges die allernöthigste.

Die flache Durchbrechung verursachet beschwerliche Förderniß, kostet, wenn das hangende Gestein nicht fest genug ist, viel Zimmerung oder Mauerung, und wird, wenn sie gar zu flach ist, im Ein- und Ausfahren zu beschwerlich, vernützet auch viel Seil, Kübel, Holz und Bretterwerk.

Die senkrechte Durchbrechung wird dem Bergmanne im Ein- und Ausfahren beschwerlich, bey der Arbeit in fast ebenliegenden Steinlagen oder sogenannten Flötzgesteine sauer, kostet viel Zeit und Geld, der Wettermangel stellet sich bald ein, die Berg- und Erzförderniß kostet viel Seil, Kübel und Schmiere, wie auch noch über dieß im rolligen und klüftigen Gesteine viel Zimmerung oder Mauerung.

Die wagrechten Durchbrechungen nennet man Röschen, Stollen, Strecken, Querschläge, Flügelörter, Schieferfahrten; sie werden auch söhlige Durchbrechungen genannt.

Die flachen donnlegigen Durchbrechungen heißet man flache, die senkrechten oder saigern aber saigere Schächte, Schürfe, Gesenke, Schlöthe oder Uebersichbrechen.

Bey Erwählung einer dieser Durchbrechungsarten zum vorzunehmenden unterirdischen Bergbaue ist es nicht gleichgültig, mit welcher der Bauende den Anfang machen will, sondern er muß erst auf die Lage des ganzen Gebürges, und denn auf die Lage seines Gesteines sehen, das er zu bearbeiten hat, so wird er urtheilen können, mit welcher Art der Durchbrechung desselben am füglichsten der Anfang zu machen sey.

Ist das Gebürge, worinn gebauet werden soll, sehr sänftig, und wenig erhoben, wie die fast wagerecht liegenden, oder sogenannten Flözgebürge sind, so ist es oft schwer, so viel Teuffe in der Nähe zu finden, wo man mit einem Stollen ankommen, und das Gebürge damit aufschließen, folglich von den Wässern befreyen kann.

In dergleichen Gebürgen behilft man sich im Anfange mit Such- und Tageröschen, theils nur die Tagewasser, so bey Regen- und Thauwetter einfallen, bald abzuführen, ehe sie sich in mehrere Teuffe senken, theils auch Erz- und Minerallager, Gänge, nur in einiger Teuffe auf- und zu untersuchen, zu sehen, ob sie weiter in die Teuffe setzen, und werth sind, daß man Schächte darauf absinke, und endlich bey sich zeigenden Grundwässern Wasserkünste, wenn Aufschlagewasser vorhanden, oder, weil man diese nicht allemal antrift, diese Wässer durch Menschen oder Thiere vermittelst sogenannter Göpel, oder Treibekünste aus der Teuffe ziehen und zu Tage aufbringen lasse.

Es kömmt, sonderlich in den sänftigen Gebürgen, sehr viel darauf an, wie die Richtung der Steinlagen nach der Teuffe gehet, die ich vor allen Dingen erforschen muß, wenn die Frage ist, wie dem Erz- oder Minerallager, Gange, am besten, kürzesten und doch in möglichster Teuffe bey zu kommen sey.

Lieget das Erz- oder Minerallager, als Vitriol-Kieß, Farben-Erden, Porcelain-Erden, Eisenstein, Alaun-Erde oder Alaun-Schiefer, Steinkohlen, braune Holzkohlen, Torf, Marmor, und andere zum bauen dienliche Steine bald unter der Dammerde, oder nicht allzutief darunter, so werden sie, nachdem sie weggenommen worden, gleich vom Tage hineingewonnen, oder man macht verschiedene runde und nicht allzuweite Gruben neben einander nieder, flechtet sie mit Knütel und Reißholze aus, wozu das junge Eichenholz das beste ist, und nimmt Erz, Mineral, Eisenstein rc. um sich herum, so lange es ohne Gefahr des Einsturzes des Gebürges geschehen kann, mit Behutsamkeit hinweg. Liegen aber diese Dinge sonderlich Erz- und Mineralien in ziemlicher Teuffe, so muß man beym Anfange des unterirdischen Bergbaues ganz anders zu Werke gehen, und sowohl bey flachliegenden, als erhobenen Gebürgen und ihren in sich habenden Erd- und Steinlagen auf Röschen, Stollen, und tiefere Schächte bedacht seyn, die Erz- und Minerallager zu entdecken, und das gewonnene durch sie an den Tag zu bringen.

Habe ich die Richtung der Steinlagen nach der Teuffe, sowohl bey flachliegenden, als erhobenen durch schürffen und einschlagen in die Damerde, oder in Wasserrissen, Schlüchten rc. entdeckt, so kömmt auch endlich das durch Fluthen und Wind aufgesetzte Tagegebürge in Betrachtung. In Gebürgen, deren Steinlagen unter der Erde flach liegen, kann man öfters schon aus ihrer Oberfläche diese Lage gewahr werden, und von dieser auf jene schließen, als: Ich sehe, die Oberfläche der aufgesetzten Damerde des Gebürges senket sich nach und nach gegen Mittag und Abend, so kann ich hieraus schließen, daß des Gebürges unterirdische Stein- Erz- und Minerallager in den allermeisten Fällen sich

eben

eben so senken, ob ich gleich nicht läugnen will, daß es auch einige Ausnahme geben könne, die aber bey einiger Aufmerksamkeit bald zu entdecken seyn werden. Habe ich hingegen da, wo die Stein-Erz- oder Minerallagen zu Tage ausstreichen, einen Hügel, Berg vor mir, und diese Lagen fallen oder strecken sich gegen denselben in die Teuffe, so habe ich zu betrachten, ob der Hügel, Berg entweder auf der anderen Seite jähe und bald abfällt, oder ob er auf eine sehr lange Strecke ganz sänftig, flach lieget und seine Oberfläche sich mit der daranstossenden eines andern sänftigen Hügels, Berges vereiniget. In dem ersten Falle ist es rathsam, sich mit dem Baue auf der jähe abfallenden Seite einzulegen, und einen Stollen in das Hangende des Hügels, Berges anzusetzen, weil da die Erd- und Steinlagen mit ihren Erzen und Mineralien der StollenArbeit zufallen, und die Wässer, so aus den Klüften zugehen, desto leichter abgeführet werden können. In dem andern Falle ist es schwer, dem Erz- oder Minerallager im Hangenden beyzukommen, weil nur mit Schächten, aber nicht leicht mit Stollen anzukommen ist, indem vor selbigen kein Thal, und daher keine genugsame Teuffe in der Nähe erlangt werden kann; die Schächte aber, da die Steinlagen einstürzen, sind meistentheils sehr tief abzusinken, wobey bald matte Wetter und Wassersnoth dem Baue die größte Hinderniß in den Weg legen, auch wohl gar das Niederbringen solcher Schächte bis auf das Erz- oder Minerallager unmöglich machen.

Es ereignet sich öfters, daß am Ausgegenden der Erd- und Steinlagen eines solchen Hügels, Berges, also in dessen liegenden ein Thal ist, wo allenfalls ein Stollen angesetzt werden kann, wenn die Steinlagen mit ihrem Erz- oder Minerallager jähe einstürzen, sonst ist der Weg mit einem Stollen oder Rösche durch das liegende Gestein gemeiniglich zu weit, weil die Steinlagen mit ihren zwischen sich habenden Erz- und Minerallagern der Stollenarbeit so lange entfallen, als dieselben mit ihrer Neigungslinie die innere wagerechte oder söhlige Linie des Stollens nicht sobald durchschneiden. Bisweilen ist das Lager der Erd und Steinlagen nach der Länge ihres Fallens durch eine Schlucht oder Thal zerrissen, welches die beste Gelegenheit giebt, das Erz- oder Minerallager zwischen ihnen bald zu entdecken, und wagerecht oder söhlig mit einer Rösche, Stollen daran aufzufahren. Liegen die Erd- und Steinlagen aber flach, so treibe man die Rösche, Stollen, Strecke dennoch aufrecht in das Gebürge, und lasse sich nicht verleiten, dieselben wegen guter Ablösung der Steinlagen, einer von der andern, nach ihrer flachen Lage ins Gebürge zu treiben; denn die Förderung der Erze, Mineralien und Berge würde nicht allein beschwerlich, sondern auch wegen der in diesem Falle nöthigen Verzimmerung des Hangenden, wenn es nicht ganz ist und vor sich selbst stehet, unmöglich, und der Bau sehr kostbar werden.

Eben dieses kann auch von einem sehr flachfallenden Gange, sowohl in fast wagerecht liegenden, als in erhobenen Gebürgen gelten, der aber die noch flächer liegenden Steinlagen derselben durchschneidet, wenn auf ihn ein unterirdischer Bau vorgerichtet werden soll. In hohen und steilen Gebürgen findet man ebenfalls Erz- und Minerallager, und man kann vielen derselben die Bauwürdigkeit nicht absprechen, ob es gleich allemal auch wahr bleibet, daß der unterirdische Bergbau in solchen Gebürgen schwer und kostbar wird, da vielmal den Erzgängen und Minerallagern nicht anders, als mit doppelten Stollen unter über, oder nebeneinander, welche des Wetterwechsels wegen oft mit einander durchschlägig gemacht werden müssen, beyzukommen ist, und man die

Ge-

Gedanken, Schächte auf selbige abzusenken, fahren lassen muß, auch nächst diesem die Ausfuhr der Erze sehr mühsam und gefährlich für den Fuhrmann und sein Geschirre ist.

Dieses bisher angeführte vorausgesetzt wende ich mich nunmehr zu den oben erwähnten Gegenständen des unterirdischen Baues bey Bergwerken.

Von dem unterirdischen Bergbaue in fast wagerecht, oder schwebend liegenden Erd- und Steinlagen.

In Gebürgen, deren Erd- und Steinlagen fast wagerecht, oder schwebend, liegen, trift man Erz- und Mineral sowohl in und zwischen diesen ihren Lagen, als auch in Gängen an, welche letztern durch die schwebenden Lagen senkrecht oder auch flach durchsetzen. Bey den schwebenden Steinlagen wird der unterirdische Bau wegen ihrer Lage etwas anders als an den Gängen geführet, so die schwebend liegenden Lagen durchschneiden.

Ich will den Bau zwischen den schwebend liegenden Lagen zuerst vornehmen, und hernach von den diese Lagen durchschneidenden Gängen einen Begriff zu machen suchen; den Bau auf diesen aber im folgenden Abschnitte zugleich mit angeben.

Da die Gebürge und ihre Erd- und Steinlagen, woraus sie bestehen, sie mögen schwebend oder erhoben liegen, sich jederzeit nach zwoen Gegenden vom Horizonte erheben und nach zwoen über liegenden sich neigen; so muß man gleich zu Anfange ihres unterirdischen Baues sich diese Beschaffenheit zu Nutze machen, und wegen Abführung der Wasser, welche sonderlich in den Gebürgen schwebend liegender Lagen reichlich vorhanden sind, das Gebürge und seine Lagen da angreifen, wo sie sich hinneigen, das ist, man muß sich in ihr Hangendes mit der Bergarbeit legen, und daselbst, wenn ein Thal vorhanden, mit einem Stollen oder wagerechter Durchbrechung den Anfang machen, von daraus aber die ganze Bergarbeit gegen das Liegende, oder nach der Gegend treiben, wohin sich das Gebürge mit seinen Erd- und Steinlagen hebet, so fallen die Wasserkösten, welche sonst bey dem Bergbaue eine der beträchtlichsten Ausgaben machen, hinweg; denn man kann sein Erzminerallager so zu sagen Staffelweise ohne Hinderniß abbauen, und die Wasser hinter sich weglaufen lassen.

Die Durchbrechungen der Erd- und Steinlagen müssen auf die kürzeste, bequemste und vortheilhafteste Weise vorgenommen werden; man muß sich daher allemal, so viel wegen Abführung der Wässer möglich ist, den kürzesten Weg nach dem Erz- oder Minerallager des Gebürges wählen, sie mögen zwischen den schwebenden Steinlagen, oder als ganze Stöcke im Gebürge liegen. Der allerkürzeste Weg aber gehet nach einer geraden Linie, und ist bey einerley Gesteine der wohlfeileste bey der Arbeit. Diese Linie muß man also, so viel nur immer möglich ist, bey allen Durchbrechungen des Gebürges oder dessen Gesteins, sie mögen wagerecht, flach, oder senkrecht geschehen, vor Augen haben; bey Bergwerken bestimmt die Markscheidekunst diese gerade Linie; die Durchbrechung harter Steinlagen und Felsen ist eine ohnehin sehr kostbare Arbeit, man muß sie durch krumme Wege nicht noch kostbarer machen.

Bey

Bey vielen Bergwerken scheuet man sich zwar nicht, bey fast jedem vorfallenden festen Gesteine auszuweichen, und die Arbeit in Gebrecheres zu treiben, unter dem Vorwande, Zeit und Kosten zu ersparen. Der Vorwand aber tauget nichts; man kömmt weder wohlfeiler noch hurtiger davon; denn die Zimmerung oder Mauerung, so bey dergleichen gebrechern Gebürge hernach zum öftern nöthig ist, vereitelt beyde Absichten, und man behält über kurz oder lang ein baufälliges Berggebäude. Ich behaupte im Gegentheil, daß es Fälle giebt, wo man gezwungen ist, sich aus dem gebrechen Gesteine in ein festes zu wenden, wenn das Gebäude dauerhaft seyn soll, wo hernach weder Zimmerung und Mauerung nöthig ist, noch Brüche entstehen können.

Der andere Fall, wo von der wagerechten und senkrechten geraden Linie während der Arbeit abgewichen werden kann, ist, wenn an einem edeln Erz- oder Minerallager, das nicht immer in einer geraden Linie fortstreicht, oder sich in die Teuffe senkt, entweder mit einem Stollen, oder Streckenorte aufgefahren, oder Schächte, Gesenke darauf abgesunken werden; denn da ist die Gewinnung des Erzes und Minerals das Hauptwerk, und der Bergmann gehet ihm nach, es mag streichen, oder sich senken, wie und wohin es will; man scheue keine tauben Mittel; denn es ist nicht leicht ein Erzminerallager durchgängig edel, sondern sie werden bisweilen von dem Gesteine auf verschiedene Weise verdrückt, durch andere Steinwände verschoben, abgeschnitten, sie richten sich aber auch wieder ein, und beweisen sich hernach eben so edel, wie zuvor, ob es gleich auch bisweilen Fälle giebt, daß sie von andern zufallenden Gesteine ganz und gar abgeschnitten oder verdrückt werden, und sich bey Verfolg der Arbeit nicht wieder zeigen.

Die Bequemlichkeit der Arbeiter, die Förderung der Berge Erze, Mineralien und die mögliche Ersparung der Kösten erfordern, daß die Durchbrechungen der Erd- und Steinlagen in gehöriger Höhe und Weite geschehen. Daher haben sie ihr Maaß; dieses richtet sich noch überdieß nach gewissen Absichten, die man bey diesem oder jenem anzustellenden unterirdischen Bergbaue hat.

Einer kurzen Tageröſche, wodurch nur die Tage- oder einfallenden obern Thau- und Regenwässer abgeleitet, der Arbeit bey abzusinkenden Schürffen und Schächten Wetter oder frischer Luftzug eingebracht, und das Erzminerllager aufgesucht werden soll, giebt man 5 bis 6 Fuß Höhe und 2 Fuß Weite, auch wohl etwas mehr; ist sie aber hundert und mehr Lachter zu treiben, so muß sie einzuführender frischer Wetter wegen höher werden, sie wird alsdenn einen Stollen im Maaße ähnlicher.

Ein Stollen der mit der Zeit mehr als ein unterirdisches Bergwerksgebäude lösen, ihre Wässer einnehmen und abführen soll, muß ordentlicher Weise 7 bis 8 Fuß hoch und bis 3 Fuß weit seyn; soll er aber die Wässer eines ganzen Zuges von Gebürgen und Zechen lösen, so muß er noch höher und weiter zu hauen angefangen werden.

Auf schwebend liegenden Erz- und Minerallagern, Kupfer- Alaun- Schiefern richtet man sogenannte Fahrten vor, welche Art der Durchbrechung vielmal kaum 18 bis 20 Zoll hoch, und 4 Fuß weit fort gehauen, und die Erze, Mineralien, edle Schiefer mühsam weggenommen und zu Tage aufgebracht werden. Sind die Erz- und Minerallager höher und mächtiger, so treibt man Strecken neben- und durcheinander, daß alle 1 oder 2 Lachter ein Pfei-

ler

ler oder sogenannte Bergfeste von 1 oder 2 Quadratlachtern stehen bleibet und das Dach unterstützet, daß es nicht einstürze; bey der Schieferarbeit wird das Dach, wo die Schiefer weggehauen werden, mit tauben Schieferwänden, die keinen Gehalt haben, unterschlagen. Wo aber vor dem sogenannten Strebe, oder ganzen Schiefergesteine, gearbeitet wird, und das Dach nicht allzu gut ist, setzen die Schieferhäuer kleine hölzerne Bolzen zu ihrer Sicherheit unter. Bey der Schieferarbeit wird insgemein eine Fahrt immer in gerader Linie, bequemer Förderung wegen, in das Feld fortgehauen, und neben dieser zur beyden Seiten andere Fahrten meist nach einer schrägen Linie angesetzt, und mit der ersten dergestalt fortgetrieben, damit man beständig ein fein breites auszuhendes Strebe vor sich habe, wie die I. Fig. anzeiget, in welcher *a*. die gerade fortgetriebene, und *b*. die Nebenfahrten, *c* aber das Strebe, oder noch nicht durchbrochene Schiefergestein ist.

Einen Schacht, der auf ein Erz- oder Minerallager abgesunken und nicht tiefer, als etliche 20 bis 30 Lachter nieder gebracht wird, macht man in der Länge 8 — 9. und in der Breite 3 Fuß, wenn zugleich ein Fahrschacht dabey seyn soll; sonst muß er je tiefer, je länger werden, damit der Rundbaum auch länger werde, und zur Aufwickelung des Schachtseils Platz genug darauf sey.

Wenn die schwebend aufeinander liegenden Erd- und Steinlagen flach, oder senkrecht nach der Teuffe zu von einander gerissen, und dieser Riß mit Quarten, Spath und Erz, oder mit sonst einer Gangart und Mineral ausgefüllet ist, so heißet dieser Riß ein Gang; sind aber auf der einen Seite die von einander gerissenen oder geborstenen Erd- und Steinlagen gesunken und auf der andern Seite stehen geblieben, so, daß nunmehr nicht Damerde

gegen

gegen Damerde, Sand gegen Sand, Kalkstein gegen Kalkstein, Zechstein gegen Zechstein, und Schiefer gegen Schiefer über liegen, sondern Damerde gegen Sand, dieser gegen Kalkstein, dieser gegen Zechstein und so fort, oder wohl gar Damerde dem Kalksteine und Sand dem Zechsteine gegen über liegen, so heißen diese Riße oder Gänge, Wechselrücken, weil da, bey dem Niedersinken, die Erd- und Steinlagen nicht einander gerade über stehen geblieben, sondern gewechselt haben; nach dem bergmännischen Sprachgebrauche sagt man, das Flöß sey auf der einen Seite in die Höhe, und auf der andern Seite in die Teuffe gesprungen, daher jenes das obere Flöß, dieses das untere genannt wird; das Wort Flöß aber deutet bey manchen Bergwerken entweder alle über einander schwebend liegenden Erd- und Steinlagen, oder auch wohl nur eine an, welche vorzüglich vor den andern das Flöß genannt wird.

Diese angegebenen Durchbrechungen geschehen auf die vortheilhafteste Weise, wenn sie von geschickten Aufsehern veranstaltet, und eben dergleichen Bergleuten mit tüchtigen Gehähe und Werkzeugen ordentlich verrichtet werden.

Von dem unterirdischen Bergbaue in erhobenen Erd- und Steinlagen.

Der Anfang des Baues wird in erhobenen Erd- und Steinlagen eben so, wie in den fast wagerecht oder schwebend liegenden mit Röschen, Stollen oder Schächten und Schürfen gemacht. Weil aber in den erhobenen Erd- und Steinlagen die Erze und Mineralien nicht wagerecht, schwebend oder zu breitem Blicke, wie der Bergmann spricht, liegen, sondern Gangweise bre-

brechen, das ist, so zwischen dem Gesteine enthalten sind, daß sie entweder in flachen, oder senkrechten durch das Gestein geschehenen Rissen liegen, so geschiehet die Durchbrechung der Gänge in diesen erhobenen Steinlagen etwas anders, als die Durchbrechung der Erz- und Minerallager in schwebenden Erd- und Steinlagen. Es wird nämlich, wenn der Gang in einem tiefen Thale zu Tage ausstreichet, am selbigen entweder gleich mit einem Stollen aufgefahren, oder man ist aus Mangel eines solchen Thales gezwungen, den Stollen auf einer andern Seite des Gebürges, wo genugsame Teuffe und gute Gelegenheit vorhanden, anzusetzen; wo aber auch dieses fehlet, werden auf der Oberfläche des Gebürges Schächte gleich auf dem Gange entweder senkrecht oder flach, nachdem die Lage oder Richtung des Ganges in die Teuffe beschaffen ist, abgesunken, oder dieselbe werden dem Gange zur Seite gesetzt; dieses kann sowohl im Hangenden als Liegenden des Ganges geschehen. Ist das Hangende feste und gut, so setzt man den Schacht in dasselbe in einer solchen Entfernung vom Gange, daß man mit saigerer Absinkung desselben in einer gewissen Teuffe auf ihn treffe; vermuthet man aber, das hangende Gestein möchte zu klüftig seyn, und viel Zimmerung oder Mauerung erfordern, so wird der Schacht im Liegenden senkrecht nieder getrieben, und der Gang in der Teuffe mit einem Querschlage, nach dem Hangenden zu, aufgesucht.

Ich will eine Durchbrechungsart nach der andern vornehmen. Kann man an einem in einem tiefen Thale ausgehenden Gange, welches aber ein seltener Fall ist, gleich Röschen- oder Stollenweise auffahren, so wird an Zeit und Kosten viel gewonnen; denn hier läßt sich gleich ein vortheilhafter Bau, bald Erz zu gewinnen, vorrichten. Man kann, so bald der Gang sich edel zu erweisen anfänget, entweder übersich brechen, sodann Firstenarbeit anlegen, und das im Gange befindliche, meist mit Bergen, Spath, Quarz vermischte Erz Strossenweise übersich weghauen, oder mit Sprengen gewinnen, die Erze von den Bergen aushalten, die Berge aber auch auf die unter sich zuschlagenden Kästen stürzen, und, die daselbst nicht Platz genug haben, mit den Erzen zu Tage ausfördern; oder man bricht übersich, länget ins Feld aus, hauet die Erze und Berge Strossenweise mit der Stollensohle fort, schlägt Kästen hinter sich zurück in gewissen Höhen über einander, bringt die Berge darauf, und benimmt dadurch dem ausgehauenen Gebäude die Gelegenheit einzustürzen; solchergestalt fährt man immer so lange mit dem Baue am Gange fort, als dieser das Feld einnimmt und edel ist.

Setzet der Gang mit Erzen unter den Stollen nieder, so wird aus diesen in etwas auf die Seite, und eine sogenannte Hornstadt gebrochen, den Haspel dahin zustellen, alsdann abgeteufft, bey dem Abteuffen aber der Bau wegen Zugänge der Wässer, so entweder mit Handpumpen oder andern Wasserkünsten müssen gewältiget werden, schwerköstiger; wird aber, wenn man so tief abgesunken, als man gekönnt, in der Teuffe eben so, wie über dem Stollen, wenn auf der Sohle des Gesenkes wieder an den Gang gebrochen wird, ins Feld, durch Auffahren oder Auslängen ins Feld, wie auch vorrichten der Firsten- oder Strossenarbeit fortgeführet, doch so, daß zwischen diesem Gebäude und der Stollensohle ein starkes Mittel vom Gange stehen bleibe, auf welchen die Stollen Wässer zu Tage auslaufen mögen; wollte man aber zuletzt auch dieses Mittel, wenn es edel ist, wegnehmen, so müßten zu Abführung der Stollen Wässer Schräme ins Liegende des Ganges zuvor gehauen werden.

Ist kein Thal vorhanden, wo man gleich auf dem Gange mit einem Stollen ansitzen kann, so wird andere Gelegenheit gesucht, wo am tiefesten mit einem Stollen anzukommen seyn möchte, einen oder mehrere Gänge damit zu überfahren und aufzusuchen.

Streichen die Gänge gleichlaufend oder meistentheils in einerley Richtung neben einander durch das Gebürge, so wird der Stollen vornehmlich ins Hangende, oder wenn da nicht, sondern besser im Liegenden anzukommen ist, in das Liegende getrieben, und hernach, wenn an den überfahrnen Gängen zu beyden Seiten des Stollens ausgelänget worden, wie ich bereits erwähnet habe, an jedem Gange gehörig abgebauet; halten die Gänge in einem Gebürge nicht einerley Streichen, sondern fallen durch einander her, so gilt es gleich, wo und auf welcher Seite man den Stollen ansetzen will; es ist nicht genug, wenn es in möglichster Teuffe geschiehet, und dabey, wo möglich, der kürzeste Weg gewählet wird; in diesem Falle geschiehet der Bau vom Stollen aus, wie in dem vorigen.

Wollte man aus verschiedenen durch einander hersetzenden Gängen sich den vermuthlich edelsten zu bauen erwählen, so ist natürlich, daß man diesem mit dem anzusetzenden Stollen auf dem kürzesten Wege und in möglichster Teuffe beyzukommen suchen müsse.

Wenn die Stollen weit in das Feld zu treiben sind, ehe sie auf die Gänge treffen, so ist es vielmal wegen kürzerer Förderniß, und zu verschaffender frischen Wetter nöthig, unterweges Schächte auf die Stollen abzusinken, so bey Bergwerken Lichtlöcher genannt werden.

Kann man, sonderlich in sehr sänftigen Gebürgen, nirgends mit einem Stollen ankommen, so werden Schächte, wenn Hangendes und Liegendes gut, gleich auf dem Gange abgesunken, oder sie werden in dessen Hangendes oder Liegendes gesetzt.

Feste Schächte zubekommen, die keinen so öftern Brüchen unterworfen sind, erwählet man lieber das Liegende, und bricht hernach von der Sohle des Schachtes mit einem Querschlage seitswärts an den Gang, anstatt, daß, wenn der Schacht in das Hangende gesetzt wird, er endlich in der Teuffe auf den Gang selbst treffen muß.

Werden die Schächte auf den Gängen selbst abgesunken, so geschiehet es nach dem Fallen derselben in die Teuffe, das ist, entweder senkrecht oder flach, sonst aber allemal senkrecht, weil dieses der kürzeste Weg ist, in die Teuffe zukommen; bey dieser Bauart müssen die Wässer gemeiniglich mit Wasserkünsten gehalten werden; der Bau selbst aber wird an den edeln Gängen eben so, wie schon gemeldet, geführet.

An den Gängen selbst, woran gebauet werden soll, wird, so viel möglich zu beyden Seiten ausgelänget, und die Arbeit in des Ganges Feld Strecken- Firsten- oder Strossenweise fortgebracht; das erstere geschiehet durch Ansetzung und Fortreibung der Oerter, das zweyte durch staffelweise Forthauung der Firsten, das dritte durch Anlegung und Nachreißung der Strossen.

Zu einer Ortshöhe werden insgemein 5 Fuß, und zur Breite 2 Fuß genommen, wenn der Gang schmal ist; ist er mächtig und sein Gebürge feste und gut; so werden die Erze und dar-

zwi-

zwischen liegenden Berge breiter und höher weggenommen, auch, wie ich oben bereits gemeldet, Strossen angelegt und nachgerissen, mit den Bergen aber das Hangende, an welchem mit dieser Durchbrechung der Anfang zu machen ist, unterbauet, damit es in Ruhe komme, und keine sich mit der Zeit losziehenden Wände hereinfallen, oder das Gebürge einen Bruch machen könne. Also treibet man an sehr mächtigen Gängen eine Strecke neben der andern gegen das Hangende auf einige Lachter, auch wohl, wenn es nöthig ist, mit darzwischen stehen gelassenen Bergfesten, dem Streichen des Ganges nach, in das Feld fort, so lange noch Erz am Gange vorhanden, oder hinter vorfallenden tauben Mitteln wieder zu vermuthen ist, indem immer die ausgehauenen Strecken seitwärts mit den Bergen der neu angefangenen versetzt werden, und durch die neue die Förderung geschiehet.

Querschläge, wenn sie nicht weit zu treiben sind, bekommen nur die Höhe und Weite der ordentlichen Strecken. Sie haben in solchen unterirdischen Bergwerksgebäuden statt, wo mehr als ein Gang neben dem andern liegt, sonderlich in den Gebürgen der fast wagerecht, oder schwebend liegenden Erd- und Steinlagen, da man sie auch Wechsel zu nennen pfleget; diese Querschläge werden rechtwinklicht aus dem einen Gange gegen den andern angesetzt, und wenn sie weit zu treiben sind, müssen sie höher ausgehauen werden.

Flügelörter weichen nur darinne von den Querschlägen ab, daß sie entweder aus einem Stollen nach einem seitwärts liegenden andern edeln Gebürge, oder Wasser nöthigen Zeche ꝛc. meist nach einer schrägen Linie mit Beybehaltung der Stollen-Höhe und Weite, oder aus den Gängen an den von ihnen ab und in das Gebürge setzenden starken edeln Trümmern, oder auch der

Wetter- und Wasserlosung wegen nach andern unterirdischen in der Nähe liegenden Bergwerksgebäuden getrieben werden, da ihnen denn die Streckenhöhe gegeben wird.

Alle sowohl wagerechte, als flache und senkrechte Durchbrechungen bey einem unterirdischen Bergbaue müssen überhaupt wegen Bequemlichkeit des Ein- und Ausfahrens der Bergleute, der Förderniß der Erze und Berge, Bringung guter Wetter in das Gebäude und Abführung der Wässer eine geschickte Verbindung und Lage mit- und gegeneinander bekommen, damit allzeit der vorgesetzte Zweck auf dem kürzesten und bequemsten Wege durch die Oeffnung dieser Durchbrechungen erhalten, und vermittelst derselben die Bergleute und Arbeiter bey aller vorfallenden Bergarbeit vortheilhaft und mit Nutzen angebracht werden können, das ist, es muß aus einer Durchbrechung in die andere in dem ganzen Berggebäude bequem zu kommen seyn, und Förderung geschehen können.

Die Röschen, Stollen und Wasserstrecken müssen ihre Lage gegen andere Strecken, Querschläge, Flügelörter, Schächte, Gesenke, Uebersichbrechen also bekommen und haben, daß sie ihnen gute Wetter bringen und Wasser benehmen mögen. Es müssen daher die Sohlen der Röschen, Stohlen, Wasserstrecken nicht tod gehauen, das ist, im Gebürge nicht tiefer, als an ihrem Anfange und erster Oeffnung, sondern fast wagerecht mit 1½. höchstens 2 Zoll Fall auf 100. Lachter lang fort gehauen werden, damit die Wässer nicht vor Ort, sondern vielmehr zu Tage auslaufen, und wenn durch eine Rösche, Stollen, Wasserstrecke zugleich gefördert werden soll, muß man in den ersten beyden zum Ablauf der Wässer Trägwerke, so in folgender Abtheilung vorkommen werden, schlagen, und in den letztern seitwärts Schräme auf der Sohle in dem Liegenden des Ganges 6. 8. 12. und mehr Zoll tief nach der abzuführenden Menge der Wässer aushauen lassen.

Wie das feste oder gebreche Gestein zu durchbrechen, den Hauern verdinget, und von ihnen durchbrochen wird, wie die Erze gewonnen, zersetzt und die Berge ausgehalten werden sollen, gehöret zu meinem jetzigen Zwecke nicht; es können aber hierüber die alten Bergbücher nachgeschlagen werden.

Ich sollte hier noch den unterirdischen Bau in ganzen Stockwerken von Erz abhandeln. Rößler aber, der ehemals bey dem grossen Zwitterstocke zu Altenberg, unweit Dreßden, in Diensten gestanden, hat in seinem Bergbauspiegel diesen unterirdischen Bau hinlänglich beschrieben, so, daß man sich aus seiner Nachricht und aus dem beygefügten Kupferstiche einen ziemlich deutlichen Begrif von diesem Baue machen kann, wenn man sich dabey vorstellet, daß dergleichen Durchbrechungen, wie der Kupferstich zeiget, mehr unter, über- und nebeneinander gemacht werden können, dergleichen ich in gedachtem altenburgischen Zwitterstocke, der Zeichnung gemäß, selbst wahrgenommen. Nur würde ich, wenn ich hier noch etwas beyfügen sollte, zu Anlegung eines solchen unterirdischen Baues auf einem mächtigen Stockwerke, einen geschickten Markscheider, fürsichtigen Baumeister, verständigen Bergmeister und wachsamen Steiger zu gebrauchen eifrigst empfehlen.

Hier ist noch überhaupt zu erinnern, daß eine genaue und ordentliche Hauerarbeit in einem unterirdischen Berggebäude viel Vortheil und Bequemlichkeit verschaffen könne, weswegen jederzeit ein scharfes Aug auf selbige zu haben, niemals vergeblich seyn dürfte; denn in reinlich und wohl ausgehauenen Durchbre-

chun-

chungen, ist allerdings beym Ein- und Ausfahren sowohl, als bey der Förderung der Erze und Berge besser fortzukommen, als wo hie und da noch die Felsenstücke hervorragen und über kurz oder lang durch ihr Hereinfallen Brüche verursachen.

Von der Festigkeit und Dauer der unterirdischen Berggebäude in fast wagerecht oder schwebend liegenden Erd- und Steinlagen.

Das Bauen unter der Erde ist eine Beschäftigung für die Bergleute. Wo sie sich aber beschäftigen sollen, da müssen sie genugsame Sicherheit vor dem Einsturz der Felsen und für ihr Leben haben. Die Festigkeit und Dauer ihrer unterirdischen Gebäude gewähret ihnen beydes. Es ist ihnen also nöthig zu wissen, wie einem unterirdischen Berggebäude in klüftigen und mürben Gesteine Festigkeit und Dauer gegeben werden, und wie es beschaffen seyn müsse, wenn es fest und dauerhaft heißen soll. Denn festes Gestein ohne Klüfte stehet vor sich selbst. Ein Gebäude ist fest, wenn die Last seiner Theile oder sein ganzer Körper gehörig unterstützt ist; das aber, was eine Last unterstützen soll, muß nich schwächer, als der Druck der Last seyn; es muß also die Stärke der Unterstützung zu der Schwere, oder dem Drucke der Last die gehörige Verhältniß haben. Zur Erläuterung dieses stelle man sich einen Körper vor, der, wenn er mit seiner ganzen Schwere senkrecht auf einem wagerechten Grunde stehet, ruhet; entfernet sich aber dessen Mittelpunct der Schwere, durch eine bewegende Kraft, als durch einen Zug, Druck, an seinem obern Theile, indem er dadurch auf die Seite geneiget wird, so drückt seine ganze Schwere nicht mehr auf den ganzen Grund, sondern nur auf einen Theil desselben. So lange dieses geschiehet, wird er nicht außer seinen Grund fallen, sondern wenn die Directionslinie des

Mittelpuncts seiner Schwere auch nur noch in dem letzten Puncte der Grundfläche, auf welcher er vorher ruhete, senkrecht auftrift, im Gleichgewichte stehen bleiben. Fällt aber die senkrechte Directionslinie des Mittelpuncts seiner Schwere vollends außerhalb seinen Grund, so muß der Körper fallen; denn soviel seine Schwere bey seiner Neigung auf die Seite innerhalb seinem bisherigen Grunde abnimmt, so viel nimmt sie außerhalb demselben zu. Je nachdem nun die Schwere des sich auf die Seite neigenden Körpers zunimmt, muß auch die Kraft, so die außer seinem vorigen Grunde zunehmende Schwere unterstützen soll, zu nehmen und vermehret werden. Es wird also aus den Graden des Neigungswinkels, den ein freystehender Körper mit der verlängerten wagerechten Linie seines vorhergehenden Grundes machet, und aus der zunehmenden Schwere des Körpers außer seinem vorigen Grunde, die Größe oder die Stärke der Kraft, so ihn unterstützen soll, bestimmet werden können. Im Anfange der Neigung des Körpers, und der Entfernung des Mittelpunctes seiner Schwere von seinem vorigen Grunde wird ihn eine geringe Kraft unterstützen, weil immer noch ein Theil seiner Schwere über seinem vorigen Grunde schwebet, und einen gleichen Theil derselben, so sich schon außer den Grund geneiget, im Gleichgewicht erhält. Je mehr aber der Körper, und also auch sein Schwerpunct sich außer seinen Grund neiget, je mehr fällt auch vom noch über dem vorigen Grunde befindlichen Theile der Schwere, der Helfte der ganzen Schwere so sich schon außerhalb dem vorigen Grund befindet, zu. Da nun die Schwere außerhalb dem Grunde dadurch vermehret wird, so muß auch die Stärke der Kraft zur Unterstützung zunehmen.

Gesetzt, ein Körper sey 100. tt. schwer, er liege überall auf seinem Grunde, der ihn unterstützt, auf, so wird er unter einem Winkel von 90. Graden, das ist, senkrecht seinen Grund drücken; man fange an, ihn seitwärts außer seinen Grund, worauf er stehet, zu bewegen, daß er mit der verlängerten Fläche dieses Grundes einen schiefen Winkel von 80. Graden mache, so wird er nicht mehr mit seiner ganzen Schwere auf seinem vorigen Grunde drücken, sondern es wird sich etwas davon außer denselben neigen; gesetzt, es wären 20. tt. je weiter der Körper auf diese Seite geneiget wird, je kleiner wird dieser Winkel, und je mehr Schwere des Körpers neiget sich mit auf die Seite; gesetzt, er mache nunmehr mit der verlängerten wagerechten Fläche seines vorigen Grundes einen Winkel von 45. Graden, so würde er vielleicht mit 50. tt. auf die Seite drücken. Im ersten Falle wird er keiner Unterstützung bedürfen, weil ihn schon sein ganzer Grund unterstützt, worauf er stehet oder lieget. Im zweyten Falle muß ihn bereits eine Kraft unterstützen, die 20. tt. Schwere tragen kann. Im dritten Falle muß ihn eine Kraft unterstützen, die 50. tt. zu tragen vermögend ist. Man siehet also hieraus, daß die Kraft zur Unterstützung der 20. tt. schwächer seyn kann, als die, so 50. tt. unterstützen soll, und daß, je kleiner der Neigungswinkel auf die Seite werde, je stärker die Kraft seyn müsse, die den Körper unterstützen soll, wie auch, daß, wenn der Körper endlich ganz auf die Seite wieder in eine wagerechte Linie zu liegen kömmt, die Kraft auch wieder so stark seyn müsse, daß sie 100. tt. die ganze Schwere des Körpers, wie sein voriger Grund, unterstützen könne. Weil nicht alle Bergofficianten eben Mathematikverständige sind, so wird man mir verzeihen, daß ich diese Sache in der Art vorgetragen, wie sie hier vor Augen ist.

Könnten wir allemal die Dicke, Höhe und Schwere der gegen den Horizont geneigten und sich von ihrem Ganzen durch sogenannte Schlechten oder Klüfte abgelöseten Steinwände und Felsenstücken, in so ferne sie selbst keine Schlechten oder Klüfte haben, wissen, so könnten wir auch den Mittelpunct ihrer Schwere entde-

entdecken, und mit Anhaltung eines Senkbleyes dessen Directions-linie erforschen, auch gewahr werden, ob diese Linie außer oder innerhalb den Grund des Felsenstückes, worauf es stehet, falle, ob dasselbe ruhe, oder den Fall drohe, und wie stark im letztern Falle die Unterstützung desselben seyn müsse. Da wir aber nicht durch die Steinwände und Felsen sehen, und ihre ganze Beschaffenheit allemal weder wissen, noch zu entdecken vermögen, so können wir auch nicht jederzeit, ihre Ruhe oder Fall beurtheilen, und gegen den letztern die Stärke drr Unterstützung bestimmen, ob es gleich bey denen, die bereits in die Quere durchbrochen sind, angehet, wo ich diese Art der Erforschung allemal anrathe, weil sie zur Sicherheit der Bergarbeiter und zu Ersparung vielmals unnöthiger Verzimmerung oder Mauerung und anderer unterstützender Befestigung des Gesteines ungemein viel beytragen kann. Wo die Bergleute es einer Steinwand, oder einem Felsenstück nicht sogleich ansehen können, ob es stehen bleiben, oder fallen werde, da beklopfen sie es mit ihren eisernen Schlägeln oder Fäusteln. Klingt der Schlag helle, so hängt das Felsenstück mit seinem Ganzen noch fest zusammen; klingt er hohl und taub, so sorgen sie vor dessen Unterstützung nach einem Ungefehr. Diese Gewohnheit ist zwar nicht zu verachten, doch muß alle Unterstützung nach einem rechten Winkel geschehen, denn sie wiederstehet dem Falle eines Körpers am stärksten. Ein fester Körper, dessen Mittelpunct der Schwere von einem andern Körper unterstützt wird, ruhet auf diesem; ruhet er auf ihm, so drückt auch seine Schwere auf ihn, also muß der unterstützende so feste und stark seyn, daß er jenes und der andern über ihn liegenden Körper Schweren zusammentrage, ohne zerdrückt zu werden. Hieraus folget, daß man die festesten Körper bey Unterstützung oder Errichtung eines Gebäudes zu unterst und die lockersten, leichtesten zu oberst legen müsse, wenn das Gebäude nicht einfallen soll. Dieser Satz hat seinen besondern Nutzen bey der

Mauerung in Schächten, Strecken, Gesenken und andern unterirdischen Gebäuden.

Alles dieses vorausgesetzt, will ich nach oben angenommener Ordnung zu erst von der Festigkeit und Dauer der unterirdischen Berggebäude in fast wagerecht oder schwebend liegenden Erd- und Steinlagen handeln. Wenn eine Rösche oder Stollen im Hangenden angesetzt, und durch dergleichen schwebend liegendes Gesteine getrieben wird, so ist, wenn die Steinlagen ganz und nicht zu klüftig sind, gleich aus ihrer Lage und der zutreibenden Arbeit klar, daß hier keine Unterstützung nöthig sey, denn die Steinlagen liegen unter und über einander, und unterstützen sich selbst.

Man handelt weislich, wenn man den Stollen in der Firft rund aushauen läßt, die Arbeit und Kosten der sonst an der Firft auszuhauenden Ecken *b. Fig.* 2. zu ersparen; man gewinnet noch überdies Zeit, giebt der Firft des Stollens Wölbung und Festigkeit gegen den Druck, und die Wetter wechseln freyer oben an der Firste hin. Fallen aber auch Sand- Letten- Mergel-Lagen zwischen den Steinlagen vor, durch welche die Rösche oder der Stollen getrieben wird, so sind diese Stellen mit Zimmerung oder Mauerung abzufangen und zu verwahren, damit sie nicht, wenn sie von den Wässern erweichet sind, mit selbigen in den Stollen, Rösche fallen, und das, was darüber liegt, nachstürze, und der Stollen, Rösche, zerbreche. Wie die Zimmerung aussiehet, und beschaffen seyn soll, findet man in den alten Bergbüchern. Nur wollte ich, daß man die Köpfe der Thürstöcke halb rund einschnitte, und die Kappen an beyden Enden dergestalt vorrichtete, daß sie da, wo sie auf die Thürstöcke zu liegen kommen, nicht zu sehr geschwächet, und mit einem kleinen Absatze, der die Köpfe der Thürstöcke von einander halten muß, wohl eingeleget würden.

Damit nun die Thürstöcke wegen ihrer Länge vom Drucke des Gebürges nicht so leicht gebogen, oder gar zerdrücket werden, so legt man insgemein 2. biß 3. Fuß, von der Stollen-Sohle in die Höhe, Stege, oder Hölzer quer über den Stollen zwischen die einander gegenüberstehenden Thürstöcke mit ihren Enden auf den eingeschnittenen Absatz jedes Thürstockes nicht allein zur Befestigung derselben, sondern auch, daß Bohlen darauf geleget werden, die Förderung über dieselben hin geschehen, und die Wässer unter denselben fort laufen können; man nennet diese Zimmerung das Träge- oder Tragewerk. Wenn die Bohlen genau neben einander der Länge nach auf die Stege geleget, und angenagelt werden, daß sie überall und sonderlich mit ihren Einschnitten an den Thürstöcken wohl schließen; so ziehet die frische Luft, wenn alles wohl mit Letten verschmieret worden, unter diesem Trägewerke hin, und bringet dem innern Gebäude gute Wetter; der Raum aber zwischen dem Trägewerke und der Stollensohle wird von den Bergleuten die Wasserseige genannt, worinn die Wässer ablaufen. Da aber alle Zimmerung mit Holze, sie mag so gut gemacht seyn, als sie will, öfters in kurzer Zeit in den unterirdischen feuchten Gebäuden bald zu stocken und zu faulen anfängt, auch das von der Fäulniß angegriffene Holz immer heraus gerissen, und wieder neues eingewechselt werden muß, welches allemal neue Arbeit und Kösten verursachet; so gebe ich den wohlgemeinten Rath, die Mauerung, soviel nur immer möglich, der Zimmerung zu Befestigung der unterirdischen Gebäuden vorzuziehen. An Mauersteinen fehlet es, sonderlich in Gebürgen, die aus schwebend liegenden Erd- und Steinlagen bestehen, niemals. Man findet daselbst die meisten Steinbrüche, nur muß man sich vor merglichten Sand- und andern Steinen, die der Verwitterung unterworfen sind, hüten. In Röschen, Stollen, Strecken wird mit hinlänglich dicken, breiten und langen, aus dem Gröbsten zugehauenen Steinen gemauert, wobey man sich nach dem starken, oder schwachen Drucke des Gebürges richtet, und die Steine neben und übereinander gewöhnlichermassen verbindet, auch hie und da einen längern und gegen des Gebürges Druck breitern Stein in das Mauerwerk mit einleget, daß endlich in der Firſt zu gewölbet wird, wenn es nöthig ist.

In Gebürgen schwebend liegender Steinlagen werden auch Schächte abgesunken, und, entweder ganz durchaus, oder nur bis auf die erste feste Steinlage unter der Damerde gewöhnlichermassen verzimmert, so aber gar selten lange dauert. Auch bey Schächten würde ich lieber die Mauerung anrathen.

Zur Verbesserung sowohl der Schachtzimmerung als Mauerung, in Ansehung der Festigkeit, will ich hier einen Vorschlag thun. Man findet in verschiedenen Berggegenden, wo auf Eisenstein gebauet wird, runde und bisweilen ziemlich tiefe Schächte, die nur mit Knütteln und Zaungärten ausgeflochten sind, und dennoch dem Drucke des Gebürges sehr gut widerstehen. In Engelland und Schottland findet man viel dergleichen Schächte bey den Kohlenbergwerken, sie werden auch theils wie die runden Brünnen ausgemauert, und widerstehen dem stärkesten Drucke des Gebürges besser, als das gerade Holzgezimmer, da sie die Eigenschaft der Gewölber haben. Weil sich aber die runde Gestalt nicht gut für tiefe Schächte schickt, und ihr Durchmesser wegen eines aufzustellenden langen Rundbaums, worauf sich viel Seil bey dem Heraufziehen und Hinablassen der beyden Bergkübel wickeln muß, folglich solche Schächte sehr weit gemacht werden müssen, welches mehr Arbeit, Zeit und Kosten verursachen würde, so hat man bisher die länglicht viereckigte Gestalt noch immer bey-

behal-

behalten, und zur Auszimmerung derselben gerades gleiches Holz gebraucht, wenige aber ausgemauert.

Wenn ich für mich Bergwerk bauen sollte, würde ich bey tiefen und untiefen Schächten mich einer länglicht runden Fraut bedienen, die Wölbung derselben gegen den stärkesten Druck des Gebürges richten, und die Jöcher, wenn mir die Ausmauerung gar zu kostbar wäre, von krummen Holze machen und damit auszimmern lassen; der Fahrschacht aber würde in der einen Spitze dieser Figur angebracht, und, wie gewöhnlich, gegen den Ziehe-Schacht mit Einstreichen und Brettern verschlagen werden.

Hier wird der Bergmann lächeln, die länglicht runde Figur zu Schächten für zu künstlich halten, ihre Stärke aber vielleicht nebst dem Thunlichen nicht gleich einsehen, und fragen, wo er das krumme Holz dazu hernehmen sollte. Ich will es ihm sagen: Alle Jahre wird in den Wäldern Holz gefället und ausgeästet; man gebe denen, so darüber zur Aufsicht bestellet sind, ein Model zur erforderlichen Krümme des Holzes, so zu den Jöchern dienen soll, und bezahle auf die Klafter solches Holzes etliche Kreuzer mehr an Forstgebühren, so wird sich krummes nach dem Model brauchbares, sonderlich Eichenes von Zeit zu Zeit genug sammeln lassen; denn es werden bey Bergwerken nicht alle Jahre so viel Schächte abgesunken, daß sich nicht genugsames krummes Holz zu ihrer Auszimmerung finden sollte. Gehet es in manchen Ländern an, daß Knieholz zum Schiffbau gesammelt wird, so wird es auch angehen, in den Bergwerken nahe gelegenen Wäldern krummes Holz zu Schächten, sonderlich von starken Aesten zu sammeln, welche mit der Säge getrennet und so stark geschnitten werden können, als sie zur Schachtzimmerung nöthig sind. Dergleichen krumme Hölzer werden über 5. 6. bis 8 Zoll zu Jöchern

nicht

nicht dicke seyn dürfen, weil sie einen viel größern Druck, als gleichgewachsenes Holz aushalten. Man mache den leichten Versuch, und suche beyde Gattungen Holz, das gleiche krumm, und das krumme gleich zu beugen, so wird man, wenn beyde Hölzer von einerley Dicke und Länge, auch einerley Art sind, den Unterschied der Kraft so gar mit Händen fühlen, so bey ihrer Beugung angewandt werden muß. Das krumme Holz wird mehr Widerstand als das gleiche leisten; will man die Ursache hievon wissen, so betrachte man beydes, und es wird sich zeigen, daß die Fasern des gleichen Stückes alle gleich und gerade nebeneinander hin liegen, bey dem krummen aber dieselben maßlich und knörzlich, vielmal ganz wellenförmig innerhalb seiner Krümmung fest in einander gewachsen, außerhalb derselben aber gespannet sind; sollte dieses nicht mehrere Stärke des krummen Holzes verursachen?

Die Stärke und Dauer eines solchen mit krummen Holze ausgezimmerten Schachtes fällt zu deutlich in die Augen, als daß sie eines weitern Beweises bedarf; und da das krumme knörzliche Holz auch der Feuchtigkeit, und Fäulniß mehr widerstehet, als das gleiche, so wird die Zimmerung mit krummen Holze auch deßwegen vor dem gleichen den Vorzug haben. Die Zimmerlinge bey Bergwerken verarbeiten zwar das gleiche Holz lieber, als krummes und knörzliches; man muß sich aber daran nicht kehren, sie müssen thun, was ihnen befohlen wird, oder es giebt andere an ihre Stelle. Der Nutzen der bauenden Gewerken muß das erste Gesetz seyn; denn sie geben das Geld dazu her. Die 3. Fig. zeiget dergleichen länglichte runde Schachtzimmerung, da *a* der Ziheschacht, *b* der Fahrschacht, *c* die Jöcher, *d* die Kappen, *e* die Fahrt, und *f* die Löcher zu den Haspelstützen andeuten.

Da

Da die Mauerung der Festigkeit wegen aller Holzzimmerung vorzuziehen ist, so sollte man lieber die Haupt- und Förderschächte ausmauern lassen, aber nicht auf die bisher gewöhnliche Weise, da alle halbe oder ganze Lachter auf gemeine senkrechte Mauer wieder ein oder zwey Bogen, sowohl an den beyden langen Seiten, als auch an den beyden kurzen Stössen des Schachtes von der Sohle bis zu Tage ausgemauert werden. Obgleich diese Bögen der Mauerung in ihrer senkrechten Linie Stärke gegen ihren eigenen Druck geben, so können sie doch dem Seitendrucke des Gebürges, welcher zugleich von dessen senkrechtem Drucke mit abhänget, nicht vielmehr als eine gemeine Mauer widerstehen; diesem Seitendrucke aber, auf welchen man hauptsächlich sein Augenmerk richten muß, will ich eine festere und standhaftere Mauerung in den Schächten entgegen setzen, welche aus Fig. 4. zu ersehen ist. Bauverständige werden ihre Stärke und Dauer gleich aus der Betrachtung ihrer Gestalt deutlich einsehen; *a* ist der Zieheschacht, *b* der Fahrschacht *cc* Löcher vor die Haspelstützen, so aber bey einem grossen Treibe Schachte nicht nöthig sind, *d* die Fahrt.

Wie die Steine bey dergleichen Mauerung in einander zu verbinden seyn, wird ein Mauermeister, der sein Handwerk verstehet, leicht finden; ich habe dabey weiter nichts zu erinnern, als daß, wo der Druck nicht allzustark ist, Lachter um Lachter gemeine Mauerung der Höhe nach zwischen die liegende Wölbung gesetzt werde; bey donnlegigen oder flachen Schächten könnte es bey der bisher gewöhnlichen Bogenmauerung bleiben, ob ich gleich, so viel nur immer möglich, flache Absinkung der Schächte vermeiden würde.

Wo zwischen schwebend liegenden Erd- und Steinlagen Kupfer- oder Alaunschiefer, Zinnerze, Kiese, Steinkohlen, Torff, Farben- oder andere Erden und brauchbare Steine liegen, wird, wenn man diese Dinge weghauen und gewinnen will, die darüber liegende Steinlage oder das sogenannte Tach entweder mit dem zugleich ausgehauenen Gesteine hie und da, wie bey der Schieferarbeit gewöhnlich ist, unterschlagen, oder man läßt ein Lachter um das andere Bergfesten davon stehen, die das Tach so lange unterstützen, bis das Feld gehörig mit Oertern und Strecken rechtwinklicht zwischen den Bergfesten durchfahren, und das Erz- oder Mineral aus selbigen gewonnen ist; da man denn zuletzt von der tiefsten Gegend herauf die aus Erz- oder Mineral bestehenden Bergfesten nach einander weghauet, Erz- und Mineralien davon zu Tage ausfördert, und das Tach alsdenn stürzen läßt. Es ist also hier weder Zimmerung noch Mauerung nöthig; wo aber das Tach nicht gut ist, oder gar rolliges Gebürge, Sand, Kieß, Mergel, Letten vorfällt, da muß auf Zimmerung und Mauerung gedacht werden.

Was die in manchen schwebend liegenden Erd- und Steinlagen durchsetzende Gänge oder Wechsel betrift, so wird bey Bearbeitung derselben in Ansehung der Unterstützung und Befestigung des flüchtigen und losen Gesteins eben das in Obacht genommen, was im folgenden Abschnitte bey den Erz- und Mineralgängen in erhobenen Erd- und Steinlagen kürzlich angeführet werden wird. Im übrigen stehet insgemein das schwebend liegende Gebürge an- und vor sich gut, und erfordert weniger Zimmerung, und Mauerung als das erhobene.

Von der Festigkeit und Dauer der unterirdischen Berggebäude in erhobenen Erd- und Steinlagen.

Eine Rösche, Stollen, so in dieser Art von Gebürgen durch ganzes festes Gesteine getrieben wird, hat wenig oder gar keine Mauerung oder Zimmerung außer dem Trägewerke nöthig, und wenn ihre Firft rund ausgehauen wird, so trägt, wie bereits oben gedacht worden, dieses zu ihrer Festigkeit und Dauer ungemein viel bey; in rolligen, klüftigen Gesteine aber müssen dergleichen unterirdische Gebäude mit Zimmerung oder Mauerung nach obigen Grundsätzen des vorhergehenden Abschnittes gegen den Einsturz versehen werden.

Wegen der Schachtzimmerung und Mauerung berufe ich ich mich hier wiederum auf das, was ich in dem vorigen Abschnitte beygebracht habe, weil es sich auch in erhobenen Erd- und Steinlagen anwenden läßt.

Die Zimmerung und Mauerung in den Gesenken ist, wie in den Schächten.

Von der Unterstützung des rolligen klüftigen und flüchtigen Gesteines und Gebürges in den Strecken, Ueberſichbrechen, Flügelörtern, Firsten, Hornstädten, und auf Stroffen läßt sich in einer so kurzen Schrift, wie die gegenwärtige ist, keine recht deutliche Beschreibung abfassen. Wer sich einen richtigen und deutlichen Begrif davon machen will, thut am besten, sie in den unterirdischen Berggebäuden selbst aufzusuchen und in Augenschein zu nehmen; weil es aber auch nicht jedes Gewerken oder Bergwerks Liebhabers Sache ist, sich schmutzige Hände zu machen, und mit einiger Ungemächlichkeit sich in die finstere Unterwelt zu begeben, so empfehle ich ihnen die gewöhnlichen Zimmerungs- und Befestigungsarten unterirdischer Berggebäude im Löhneis und Rößlers Bergbauspiegel auf den daselbst befindlichen Kupfern nachzusehen, wo sie noch am besten vorgestellet sind.

Die Bergleute haben im übrigen zu ihrer Zimmerarbeit nebst einem Zollstabe ein Maaß, das sie eine Lehre nennen; es bestehet aus zwey einzelnen Stäben, und mit diesen messen sie die Länge, Breite und Höhe desjenigen Ortes, wo Holz zur Unterstützung und Befestigung des Gesteines oder Gebürges hingebracht werden soll, indem sie dieselben bald kurz, bald lang aneinander halten, und das zur Unterstützung nöthige Holz damit ausmessen: diese Art ist ihnen ungemein bequem, weil sie dieselbe unter der Erde überall auch in den allerengsten Oertern zur Ausmessung gebrauchen können.

Ver=

Pl

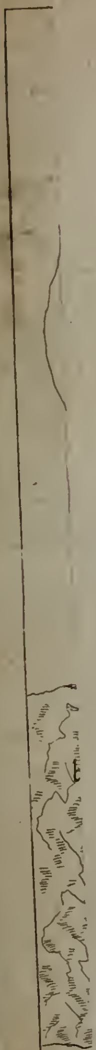


Fig. 1

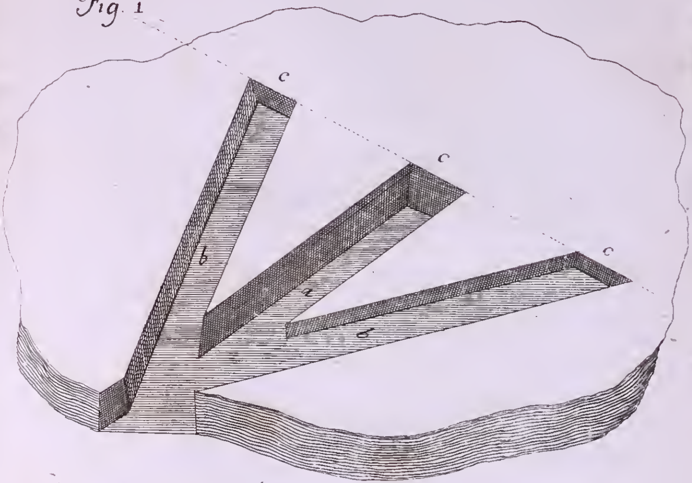


Fig. 2

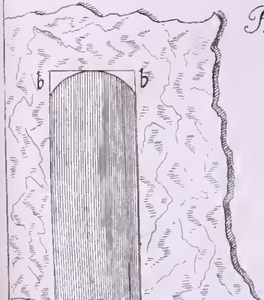
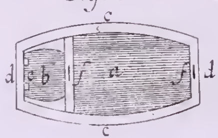


Fig. 3



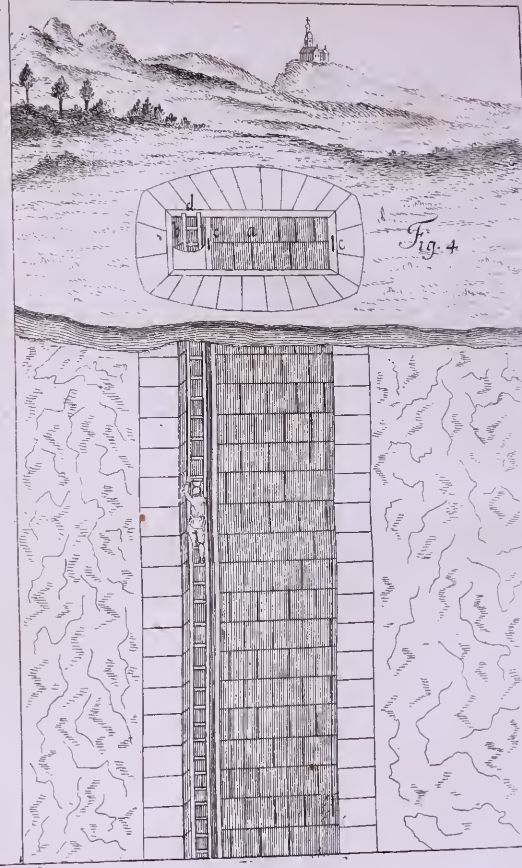


Fig. 4

Versuche

Mit mineralischen sauern Geistern aus den Hölzern Farben zu ziehen:

dann

zufällige Gedanken, wie aus diesen Farben die Röthe, Blaue, Grüne, und Gelbe der Blüthen, Blumen, Früchten, und Blätter der Vegetabilien zu erklären.

Von

Mathias Brunnwiser,

der Philosophie, und Arzneygelehrtheit Doctorn, dann Stadtphysikus zu Kehlheim, 1770.

Unter den merkwürdigen Begebenheiten, so die auf vielerley Art spielende Natur unsern Augen darstellet, verdienen gewiß die Farben der Blätter, Blüthen, Blumen, und Früchten, mit welchen die Bäume und Pflanzen gezieret sind, nicht einen geringen Platz.

Die grüne, blaue, rothe, gelbe, und von deren Vermischungen abhangende Farben sind Wirkungen, wo die Natur ihre Bearbeitung unsern Blicken zu entziehen alle Sorgfalt anzuwenden scheinet. Und daher sind meines Erachtens die Erklärungen der Pflanzenfarben entweder gar nicht berührt, oder auf hypothetische, und schwankende Gründe gestützet worden.

Ich gedenke keineswegs in gegenwärtiger Abhandlung Jemanden zu überreden, daß ich etwas ungezweifeltes, oder unverwerfliches beweisen werde. Ja ich will vielmehr im Gegentheil bekennen, daß ich die Schwierigkeiten dieser Sache selbst einsehe, und viele mir selbst gemachte Einwürfe gänzlich zu heben außer Stand mich befunden habe. Und daher wünsche ich, daß die aus meinen Erfahrungen gemachte Schlüsse nicht anders, als zu-

fällige

fällige Gedanken angesehen werden möchten. Habe ich in diesen meinen Gedanken gefehlet, so schmeichle ich mir um desto eher Vergebung zu erhalten, als ganz sicher Fehlen menschlicher ist, als gar nicht denken.

So oft ich die Verschiedenheit der Holzfarben in den frisch abgehauenen Stämmen, und die Veränderung derselben, nachdem solche eine lange oder kurze Zeit in freyer Luft gelegen, nicht minder die öfters in den Wäldern gefundene dunkle, oder lichtbraune von der Fäule angegriffene Hölzer, auch jene weiße Farbe, so einige fast verwesene, und im Finstern leuchtende angenommen, mit einer Aufmerksamkeit betrachtet habe; so ist meine Muthmassung jederzeit dahin gegangen, daß ein gewisses Farbewesen in den Hölzern versteckt seyn müsse.

Fichten, und andere Hölzer, wenn sie lange der Luft ausgesetzt sind, werden von Zeit zu Zeit auf der Oberfläche gelber. Diese Farbe aber bleibt nicht für beständig, sie wird nach und nach unsichtbar, und kömmt anstatt dieser eine blaulichte, oder blaulicht graue hervor.

Da in dem ersten Umstande das Holz noch in seinem Zusammenhang bleibet, so scheinet in dem andern, nämlich bey Entstehung der blaulichten Farbe der Zusammenhang auf der Oberfläche etwas getrennet, und das Holz einer Auflösung unterworfen zu werden, oder wenigstens ist das gelbe von dem Holze auf der Oberfläche losgemachte, und unserm Gesichte vorgestellte Farbewesen von dem Ganzen des Holzes durch die Witterung u. s. w. abgesöndert worden, weil sichtbare Fasen von dem Ganzen sich ablösen, und folglich zu vermuthen geben, daß jenes, so die gelbe Farbe gemacht, von dem Ganzen gekommen, und die Absönderung der Holzfasen verursachet habe.

Diese

Diese Fasen sind die Materie, womit Wespen, nnd dergleichen Insecten ihre Nester bauen, welche ebenfalls die Farbe haben, so das der Luft ausgesetzte Holz an sich genommen hat. Und sowohl dieses, als die Gelbe giebt Anlaß auf eine innerliche im Holze steckende Farbe zu schließen.

Diese Erscheinungen also überredeten mich, daß ein Farbewesen, welches unsichtbar im Holze gebunden versteckt lag, gegenwärtig seyn müsse. Es war aber guter Rath theuer, wie dieses von dem Holze abzusöndern wäre, oder wenigstens dem Auge erkenntlicher werden konnte. Wässer, und brennbare Geister, als die in diesen Umständen gewöhnlichen und gebräuchlichsten Auflösungsmittel, leisteten mir keine, oder in ein und anderm nur sehr geringe, und fast unmerkliche Dienste, gaben auch zugleich zu erkennen, daß diese aus mir noch unbekannten Ursachen keine Gewalt auf das im Holze steckende Farbewesen haben müßten. Andere aber, und bessere wollten mir nicht gleich beyfallen, obwohl mir die Natur den Schlüssel, den ich Anfangs nicht erkennen wollte, in die Hände lieferte. Denn alle oder doch, die mehresten Hölzer, wenn sie abgehauen worden, sind meistentheils weiß, z. B. Irlen. In einer kurzen Zeit aber leidet dieses Holz in der Luft eine starke Aenderung, und erscheinet gelb gefärbt. Diese in der Farbe hervorgebrachte Aenderung aber konnte keine andere Ursache zum Grunde haben, als die Luftsäure, so auf die Oberfläche des Holzes gewirket hat.

Da nun diese Erwägung sowohl als die Erfahrungen des Herrn Marggrafs, wovon ich hernach reden werde, meiner Einbildung sehr schmeichelten, so folgte ich der Natur, und zog mineralische saure Geister den Brennbaren, und Wässern, als ein Auflösungsmittel die Farben zu erhalten, vor, weil mineralische saure Geister, wo nicht alle, doch wenigst ein oder der andere eine mehrere Aehnlichkeit mit der Luftsäure haben müsse, oder konnte, als brennbare Geister, und Wässer.

Um nun in dieser Sache eine Probe zu machen, und meiner gefaßten Meinung ein Genüge zu thun, bestrich ich die gehobelte Oberfläche von verschiedenen Hölzern mit mineralischen sauren Geistern, und ersah zu meinem Vergnügen, daß diese nicht allein mehr Gewalt als Wässer, und brennbare Geister ausübten, sondern auch das Gesuchte willig reichten. Ich erblickte nach ein- oder mehrmaliger Bestreichung, und allzeit im Zimmer geschehener Trocknung auf den Hölzern eine gelbe, eine rothe, und eine blaue Farbe, nur mit dem Unterschied, daß die rothe, und blaue in der Gestalt der Violeten erschienen, zum Zeichen, daß die rothe mit der blauen, und die blaue mit der rothen vermischt sey. Es zeigen sich also die meisten Hölzer, nach Unterschied der angebrachten Geister, entweder ganz gelb, oder aber blau- und roth Violet. Daher will ich mich bey fernerer Benennung dieser zwoen letzten Farben allzeit des Worts Violet bedienen.

Zwetschgenholz mit Violetsäure giebt eine roth-dunkle violete Farbe, fast also, wie noch nicht vollkommen zeitige Zwetschgen, wenn der auf selben liegende blaue Reiff abgewischet worden, aussehen. Birn- und Aepfelbaumholz ist nicht so dunkel, sondern mehr roth, Schlehen fällt mehr ins Blaue, wie das Rossen- und Heckenrosenholz in das licht Violete. Arlsbeerholz ist angenehm roth Violet, die grosse Weide durchscheinend blau Violet. u. s. w.

Man muß sich aber nicht zu streng in die Beschreibung halten. Ich beschreibe die gefärbten Hölzer, wie ich solche bald nach genugsamer, aber auch nicht zu vieler Anstreichung bemerket habe; denn nach einer Zeit verschwindet in vielen Hölzern die

blaue

blaue Farbe ganz oder in etwas, und macht, daß die Gestalt von der Beschreibung abweiche. Auch kömmt es darauf an, wie man die Hölzer stark oder schwach mit den sauren Geistern überziehet. Kömmt man mit der Vitriolsäure zu stark, und bringt es zur Wärme, so werden viele Hölzer mit einer glänzenden Schwärze überzogen: glaublich darum, weil durch Beyhilfe der Wärme einige in dem Holze steckende Eisentheile aufgelöset werden, und zu dieser Erscheinung Gelegenheit geben.

Gleichwie aber die mineralischen sauren Geister jeder für sich bemeldte Farben in den mehresten Hölzern sichtbar machen, so scheinen sie doch sowohl nach dem Unterschied der Hölzer, als ihrer selbst einen Ausnahm zu machen.

Die Salzsäure kömmt in Hervorbringung gleicher Farbe mit Vitriolsäure am öftesten überein, jedoch nicht allzeit, und viel schwächer. Als etwas besonders habe ich bemerket, daß die Salzsäure aus dem wälschen Nußbaumholz, wenn es sehr oft überstrichen wird, eine Olivenfarbe auszíehet, welches andere Säure nicht thut. Auch weder dieser noch andere sauren Geister ziehen aus andern Hölzern, so vielfältig ich auch Versuche angestellt habe, eine in das Grüne fallende Farbe heraus.

Die Salpetersäure erzwinget zwar ebenfalls die violete Farbe anfänglich bald, aber es macht zugleich, daß nach öfterm Anstreichen das Holz gelb, und also die violete Farbe entweder verflüchtiget, oder in die Gelbe versenket wird. Daher kann man mit dieser Säure in verschiedenen Hölzern vom Lichtgelben bis zur Bräune die Farben hervorbringen.

Die gelbe Farbe ist allem Ansehen nach einer Verflüchtigung nicht unterworfen, wo hingegen die rothe, besonders aber die blaue alle

Merkmaale einer Flüchtigkeit zu haben scheinen; oder wenigstens hat die Salpetersäure die Kraft, die rothe, und blaue in die gelbe zu versenken.

Warum aber diese drey Säuren nicht auf gleiche Weise, und nicht in gleicher Geschwindigkeit die Farben ausziehen, und die Salpetersäure die violete verflüchtiget, oder auch verändert (ich getraue mir aus seinen Ursachen in diesem Puncte nichts gewisses zu bestimmen, obwohl ich für die Verflüchtigung eher stehen wollte) die Vitriol- und Salzsäure aber die violete, und nicht die gelbe sichtbar machet, kann ich, ungeachtet ich eine Menge Experimenten gemacht, doch nicht beantworten, finde es auch zu meinem gegenwärtigen Ziel und Ende zu beantworten eben nicht für nothwendig. Vieleicht ist in dem abgängigen, gegenwärtigen, oder durch die Mischung hinzukommenden Phlogiston oder andern in den mineralischen Geistern, oder Hölzern steckenden noch unbekannten Dingen die Ursache zu suchen. Denn da wir wissen, daß die Auflösungsmittel den aufzulösenden Sachen, und Niederschlagungsmittel den niederzuschlagenden angemessen seyn müssen, so wird ohne Zweifel in diesen die Ursache verborgen liegen.

Scheidewasser löset das Gold nicht auf, bis der Zusatz solches geschickt, und ein Goldscheidwasser macht, und nicht mit jeder Sache wird eine Præcipitation bewirket; und da es kein Geheimniß mehr ist, daß mineralische Körper nebst den resinosen, gumosen, und anderen Theilen in den Pflanzen befindlich sind, so kann es gar wohl seyn, daß gleichwie die Mineralien verschiedene Auflösungsmittel nach ihren inneren Bestandtheilen fordern, auch ein gleiches nach der verschiedenen Mischung der gumosen, harzichten, erd- und eisenhaltigen Bestandtheilen die Pflanzen zu zerlegen, oder ihre Farben zu gewinnen angewandt werden müsse. Mehrere, und genauere Versuche müssen dieses klärer machen,

chen, und in dieser dunkeln Sache zu gewissen Schlüssen Gelegenheit geben.

Da ich mich aber jetzt in diese Untersuchung nicht einlassen kann; so begnüge ich mich mit dem, daß ich eine gelbe, eine rothe, und eine blaue Farbe aus vorerzählten meinen Versuchen gewiesen, und deutlich vor Augen gelegt habe. Und eben diese drey Farben, nicht mehr oder weniger werden erfordert, uns jenes Reizende zu zeigen, was wir an den Blumen, Blüthen, und Früchten für so schön, und angenehm schätzen. Diese drey Farben, und ihre von der Natur geschehende Vermischung sind es, was unsere Augen in den Gärten, Wiesen, und Wäldern ergötzet, und besonders einen Naturforscher mit Verwunderung erfüllet.

Ehe ich aber dieses beweise, muß ich zuvor zeigen, warum die mineralischen sauren Geister, und nicht ebenfalls andere Feuchtigkeiten die Farben aus den Hölzern zu ziehen vermögend sind.

Der unter den Gelehrten so berühmte als einsichtvolle Naturforscher Herr Marggraf, Director der königl. preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin, hat in dem zweyten Theile 49sten Seite seiner chymischen Schriften das alcalische Salz ohne Einäscherung der Pflanzen zu gewinnen gelehret, und zugleich überzeugend bewiesen, daß in allen Pflanzen ein wesentliches alcalisches Salz enthalten sey.

Ich hatte zwar gegen die Untersuchungen, und Erfahrungen dieses gelehrten Manns nicht den mindesten Zweifel. Jedoch glaubte ich, daß ich in gegenwärtigen meinen Versuchen ebenfalls meine Augen überzeugen, und in dieser Sache fernere Proben machen müßte. Zu dem Ende habe ich die mehresten Versuche des Herrn Marggrafs nachgemacht, und zugleich viele andere mit den Hölzern, aus welchen ich das Farbewesen auszuziehen dachte, unter Hand genommen, und in allen meinen neuangestellten Versuchen jederzeit das alcalische Salz nach Wunsche erlanget.

Von diesem Salze also sowohl, als von den Farben, welche ich mit sauren mineralischen Geistern aus den Hölzern gezogen, überzeuget, machte ich den Schluß, daß dieses wesentliche alcalische Salz die Ursache, oder wenn noch andere zugegen seyn sollten, die Hauptursache seyn müsse, warum die Hölzer ihre Farben, so sie eben so gewiß, als das alcalische Salz in sich haben, unsern Augen verborgen halten.

Dieses alcalische Salz ist mit dem Farbewesen in einer genauen Verwandschaft, und sie schließen sich gemeinschaftlich so fest, und so lang in einander ein, daß weder eines noch das andere zu erlangen ist, bis die mineralischen sauren Geister (denn mit dem Acido vegetabili, und animali habe ich keine Versuche gemacht) angebracht werden, mit welchen sich das alcalische Salz vereiniget, die nähere Verwandschaft des Alcali mit der Säure dem Farbewesen die Fesseln abnimmt, solches in Freyheit setzet, und unsern Augen ganz sichtbar vorstellet.

Da also weder Wässer, noch brennbare Geister eine Gewalt in das alcalische Salz haben, und folglich die Bande, die solches mit dem Farbewesen vereinigen, zu trennen unvermögend sind; so folget von sich selbst, daß mit solchen das Farbewesen nicht erlanget werden kann, außer es hätte sich dergleichen mit gumosen, oder harzichten Theilen verbunden, wo ganz natürlich geschehen müßte, daß dieses mit jenen aufgelöst erhalten werden müßte.

Die-

Dieser mein gemachter Schluß gründet sich auf die oben gewiesenen Erfahrungen, nämlich, daß die sauren mineralischen Geister wirklich das Farbewesen auf den Hölzern zuwege gebracht haben. Ungeacht dessen aber dünkte es mich, daß diese Versuche, und Erfahrungen nur eine halbe Probe machten. Sollte also dieser Schluß seine ganze Richtigkeit erlangen, so müßte ein alcalisches Pflanzensalz, wenn solches auf das durch die sauren Geister gefärbte Holz angebracht würde, um eine ganze Probe zu machen, das losgemachte Farbewesen nothwendiger Weise wiederum binden, in sich nehmen, und dem Auge entziehen.

Dessen mich zu versichern, nahm ich verschiedene Hölzer, besonders aber Lindenholz, bestrich solches mit Vitriolsäure, und zwang nach und nach die violete Farbe heraus. Sobald sie getrocknet, und sichtbar geworden, überstrich ich solche mit einem reinen oleo tartari per deliquium ein oder mehrmal nach Gutbefinden. Auf welche Behandlung die violete Farbe nach und nach vollkommen wiederum sich zu verlieren anfieng, und das Holz, wie zuvor, weiß erschien, auch zugleich bekräftigte, daß das angebrachte alcalische Salz das Farbewesen wieder in sich genommen, und mit selbem sich verbunden habe. Es fielen auch die vielfältigen Versuche jederzeit gleich aus.

Mit dieser neuen Verbindung des Farbewesens mit dem alcalischen Salze, welche mir die Wahrheit meines Salzes bekräftigte, war ich noch nicht zufrieden, sondern ich wollte auch sehen, wenn das oleum tartari per deliquium mit Vitriolsäure wiederum gesättiget würde, ob das Farbewesen mehrmalen zum Vorschein komme. Nachdem also das Farbewesen wiederum künstlich verbunden gewesen, so bestrich ich das farbenlose Holz abermal mit Vitriolsäure, und es zeigte sich die Farbe wiederum, wie zu-

vor

vor, daß ich also keinen Zweifel mehr haben konnte, daß die Natur eben diese Mittel an die Hand nehme die Farben zu verbergen, oder in Vorschein zu bringen, die durch Kunst angewandt worden, solche zu erlangen.

Bey diesem Versuche ist zu merken, daß man mit der Vitriolsäure etwas sparsam umgehen müsse, wo im Gegentheil, wenn diese zu stark in das Holz eindringet, und in den Holzfasen eine gar zu grobe Wirkung machet, zwar das Gesuchte erlangt wird, aber gelblichte Flecken in dem Holze zurückbleiben, wie dann ohnedem das erzeugte Mittelsalz die Weiße des Holzes in etwas verunreiniget, aber dieser Ursache wegen doch keineswegs die Erfahrungen ungewiß machet.

Weiters ist zu merken, daß zu diesen Versuchen ein frisches Holz besser, als ein dürres ist, weil durch die Austrocknung schon einige gumose u. s. w. Theile stark verändert worden, welches ebenfalls zu den gelblichten Flecken Anlaß giebt.

Aus dem bisher angeführten wird man schon abnehmen, daß ich nicht gesinnet sey, den Pflanzen ihren Schmuck aus dem Sonnenfeuer anziehen zu lassen, noch die Ursache der Farben in einer Verdickung der Nahrungssäfte zu suchen, sondern daß selben die Natur ihre gefärbte Kleidung aus dem Schooße ihrer Stämme ohne weitschichtige Umstände ganz ungezwungen mittheile.

Ich gedenke auch nicht, mich in eine Abhandlung von Farben einzulassen, noch zu untersuchen, wessen Natur, und Eigenschaft dieses im Holze steckende Farbewesen sey, oder wie solches in die Stämme der Pflanzen von der Natur gesetzt worden, sondern ich will nur erklären, wie aus dem Stamme die Farbe, welche sich durch die mineralischen Geister im Holze gezeiget, in die Blüthen,

Früch-

Früchten und Blätter übergebracht, und sichtbar werden: welches ich mir auf folgende Weise vorstelle.

Das Farbewesen in dem Holze ist mit dem alcalischen Salze gebunden, dessen mich die mineralischen sauren Geister in den erzählten Versuchen überführet haben. Diese zwey innigst vereinigten Dinge werden mit andern Nahrungssäften in die Zweige, und von da in die äußersten Theile der Oberfläche der Blüthen, und Blumen getrieben. Die Luft, welche solche unmittelbar umgiebt, berühret solche, und wirket mit ihrem in sich haltenden Acido in die Blüthen und Blumen auf der Oberfläche, vertilget auch, oder sättiget vielmehr das alcalische Salz, und also entwickelt sich die Farbe, wie sie sich entwicklet, wenn ein Acidum auf ihrem Holze angebracht wird.

Es kömmt hernach nur darauf an, wie die Zuführungssaftadern in ihrem Baue beschaffen sind, ob viel, wenig oder gar nichts mit alcalischem Salze verbundenes Farbewesen durchgelassen, und auf die Oberfläche gebracht wird, oder ob nicht mit diesem ein gewisser Saft ebenfalls mit durchdringet, der der schwachen Luftsäure Hindernisse im Wege leget, wodurch die Entwicklung der Farben verhindert wird. Denn es giebt Blumen, und Blüthen, welche viel, wenig oder gar nicht gefärbet sind, so von bemeldten Ursachen herzukommen scheinet. Endlich wenn die Blüthe abgefallen, und die Früchten nach und nach in ihrem Wachsthume zunehmen, so wird den Frühling, und Sommer hindurch nach Art der Frucht soviel Farbewesen zugeführt, daß die Luftsäure auf der Oberfläche der Früchten soviel entwicklen kann, und muß, daß einige ganz blau, wie Zwetschgen, andere roth, wie Kirschen, einige aber gesprängt, wie Birn und Aepfel, aussehen, und ganz oder zum Theil jene Farben erhalten, die die Hölzer mit behandelten mineral Säuren gezeiget haben.

Die Luftsäure, auf welche ich mein System gründe, wird mir Niemand widersprechen. Das Anrosten einiger Metalle, und Halbmetalle in freyer Luft, ein der Luft ausgesetztes Laugensalz, und dadurch erhaltenes Mittelsalz, ja die allgemeine Meinung leisten mir genugsame Gewehrschaft, daß eine Säure in der Luft enthalten sey. Daher will ich mich mit Erprobung dieser nicht weiter aufhalten, sondern zu der Grüne der Blätter, und unreifen Früchten mich wenden.

Ein gelehrter Engelländer Eduard Delaval * glaubt, daß die Grüne der Pflanzen vom Eisen herrühre, so in den Pflanzen verbreitet, und durch die Luftsäure in einen Vitriol verwandelt worden.

„ Die Quantität des in den Pflanzen enthaltenen Eisens, „ sagt er, wird jenen zu Hervorbringung ihrer Farbe nicht zu klein „ dünken, welche wissen, daß ein Gran Vitriol 10000 Granen „ Wasser seine Farbe mittheilet, wovon nur ein kleiner Theil Ei„ sen, das mehreste aber ein Saures, und Wasser ist. „

Ich gedenke gar nicht die Meinung dieses gelehrten Engelländers zu bestreiten, aber ich muß sagen, daß die Mühe, die ich angewandt, aus sehr vielem grünen Saft der Pflanzen eine Spur eines Vitriols zu entdecken, ganz und gar umsonst gewesen ist.

Und

---

*) Philosophische Transactionen 55. Band für das Jahr 1765. art. 3. siehe auch neu Bremisches Magazin I. Band Fol. 615.

Und deßwegen glaube ich, daß, weil man versichert ist, daß wirklich ein alcalisches Salz in den Pflanzen enthalten ist, und auch ebenfalls eine violete Farbe in selben die mineralischen sauren Geister gezeiget, aus Vermischung dieser zweyen die grüne Farbe in den Pflanzen entstehen könne. Wenigstens sind die chymischen Versuche in diesem Stücke eben so gewiß als des Herrn Delavals Experiment, wo er mit einem Gran Eisenvitriol 10000 Granen Wasser die Farbe mittheilet.

Allein, beyde diese Erklärungen scheinen hypothetisch, und ohne hinreichenden Grund zu seyn, daß also meine wahre Meinung vorzutragen nicht überflüßig seyn wird.

Die Gefässe, wodurch die Nahrungs und Erhaltungssäfte in dem thierischen Körper zu den Gliedern geführt werden, sind von der Natur also geordnet, daß sie in einen Theil sehr reine, in die anderen aber dickere, und mehr vermischte Säfte nach Gestalt, und Größe ihres Baues bringen können, und müssen. Die Augenthränen sind hell, und weiß, wohingegen der Schweiß sich in einer ganz entgegengesetzten Qualität befindet. Also auch in den Pflanzen. Die Canäle, die zu den Blüthen, und Blumen gehen, müssen viel feinere Säfte zu denselben führen, als die sind, welche durch weitere Canäle zu den Blättern gebracht werden.

Zu den Blättern wird zwar auch die blaue, und rothe Farbe mit dem alcalischen Salze verbunden geführt, die in den Blüthen, Blumen, und Früchten enthalten sind, aber eine gelbe Farbe, welche an Feinheit der rothen und blauen der Blumen, und Blüthen nicht gleichkömmt, gehet in größerer Menge mit andern gröbern Theilen auf die Oberfläche, weil die größere Zuführungscanäle solche durchlassen. Folglich hat die Luftsäure zwar eben die Gewalt, wie bey den Blüthen, und Früchten, und befreyet das Farbewesen von dem alcalischen Bande. Weil aber die gelbe mit der blauen in einem gewissen Verhältnisse, und Mischung stehet, werden uns solche beyde Farben in Gestalt der Grünen vor Augen gelegt, und nachdem unter der gelben viel oder wenig von der blauen vermischt ist, so ist auch der Unterschied der dunkeln oder lichtgrünen Farbe der Pflanzenblätter zu suchen.

Es entstehet aber die grüne Farbe eben so wenig eher als bey den Blumen und Früchten, als bis die Luftsäure auf deren Oberfläche gewirket, und die Farben entwickelt hat. Alle Blätter der Bäume, und Pflanzen sind bey ihrer Geburt weiß, oder aufs höchste, wenn durch die Luftporen zu den eingeschlossenen Blättern eine Luftsäure gebracht wird, weißgelblicht. Vegetabilien, welche nicht an der Luft stehen, sind auch nicht grün. Graß unter Steinen, oder andern Körpern, welche es etwann bedecken, ist nicht grün, sondern weiß, und wird erst, nachdem die Luft auf sie wirken kann, anfänglich gelb, und nach einer Zeit, wenn auch die blaue vom alcalischen Salze entwickelt, und mit der gelben vermischet worden, stellet es uns die grüne Farbe vor.

Die Natur hält sich hier an die Gesetze in Hervorbringung der Farbe, wie man es bey den abgehauenen Hölzern bemerket. Ein frisch abgehauenes Holz ist weiß, liegt es länger in der Luft, wird es gelb: Die gelbe Farbe, wie vorhin gesagt worden, verschwindet, und nach einer Zeit kömmt eine blaulichte. Würde die gelbe von dem Holze durch die Witterung nicht geschieden worden seyn, so würde bey Entstehung der blaulichten ebenfalls das Holz bey dieser beyden Vermischung grün aussehen.

Wollen

Wollen wir der weitern Mühe uns nicht entziehen, und die Blätter bis in den spaten Herbst verfolgen, nämlich die Zeit abwarten, da der Zufluß aus dem Stamme zu Ende gegangen, und die flüchtige blaue Farbe aus dem Stamme nicht mehr ersetzet wird, so werden wir bald die grüne in den Blättern vergehen, und die gelbe, oder ins Gelbe einschlagende Farbe den Meister spielen sehen. Alle Blätter sind um diese Zeit gelb, oder kommen dem Gelben sehr nahe. Die blaue Farbe hat sich davon losgemacht, und ist von der Sonne entweders verflüchtiget, oder in die gelbe verschlossen worden. Und dieses gehet glaublich eben also zu, wie es zu geschehen pflegt, wenn man blaugefärbte Seide mit der von mir aus gewissen Hölzern gezogenen gelben Farbe, heiß behandelt, wo die Seide anfänglich grün, alsdann aber, wenn sie weiter in der gelben Farbe behandelt worden, eben so schön gelb wird, als wenn man es als weiß gefärbet hätte.

Doch ist uns die Spur einer gegenwärtig gewesenen Blaue in den Blättern noch gar nicht entwichen; denn da zwar der Zufluß aus dem Stamme mit Zuführung der blauen Farbe zu Erhaltung der Grünen aufgehört, und die Mischung zu Ende gegangen, so bleiben noch Merkmale in einigen Blättern, die ins Blaue oder Violette einschlagen. Man betrachte nur im spaten Herbste Kirschen, Aepfel, und andere Blätter, so wird man von dieser Wahrheit überzeuget seyn, und diese Farben nicht läugnen können.

Eben diese Beschaffenheit hat es auch mit der grünen Farbe der Früchten. Wenn die Blüthe abgefallen, wohin aus dem Stamme durch die kleinen Saftadern der feinste Saft mit dem proportionirten Farbewesen abgeschickt worden, und nach der Gattung viel oder wenig seine Farbe gewiesen, so wird gemächlich der

Stiel größer, und die Saftadern erweitern sich, wodurch nicht so feine Säfte, wie zu den Blüthen, aber auch nicht so grobe, wie zu den Blättern mit dem Farbewesen und alcalischen Salze kommen, und die Früchten so lange grün erhalten, bis bey Reifung die Farbe mit Beyhilfe der Luftsäure sich sichtbar entwickeln, und sich roth, blau, oder violet nach der Gattung der Früchten unsern Augen darstellen kann.

Die Wärme oder das Sonnenfeuer hat bey diesem Naturspiel in Färbung der Früchten in soweit ebenfalls seinen Einfluß, daß selbes die Poren eröffnen, und der Luftsäure ein tieferes Eindringen verschaffen kann. Und daher kömmt es, daß jene Früchten, so gegen Mittag, und frey der Sonne ausgesetzt sind, viel gefärbter, als jene aussehen, so in einem schattichten Orte unter Blättern, oder gegen Mitternacht hangen.

Ehe ich meiner Abhandlung ein Ende mache, muß ich noch einer Einwendung begegnen, die mir mit allem Rechte gemacht werden könnte, nämlich, wie es möglich sey, daß einige Hölzer in ihrem Innersten des Stammes z. B. Sevenbaum, Eiben, Zwetschgen, u. s. w. stark gefärbt angetroffen werden, und wie die Luftsäure in solche dringen, und das Farbewesen entwickeln können.

Ich könnte hier antworten, daß die Luft die Poren der Hölzer durchdringe, und die Luftsäure, welche mit ihrer Feinheit vieleicht zu dem alles durchdringenden philosophischen Mercurialgeist in einer genauen Sippschaft stehet, mit sich einnehmen, in dem Holze das alcalische Salz sättigen, und die Farben entwickeln könne.

Allein

Allein es scheinet mir in dieser Antwort ein gewisser Zwang zu herrschen, der der Natur und der Erfahrung widerspricht. Denn in diesen Umständen müßten nothwendiger Weise die äußeren Theile des Stammes unter der Rinde gefärbter, als die inneren gegen das Mark aussehen, weil die äußeren unter der Rinde am ersten von der Luftsäure müßten berühret und gefärbt werden, so aber just das Widerspiel ist; indem die gefärbten Hölzer nicht unter der Rinde, sondern allzeit bey dem Marke die stärkste Farbe haben. Ueberdas siehet man ganz deutlich, daß dem Eindringen der Luftsäure gewisse Schranken gesetzt sind, die sie nicht überschreiten kann, und sich nicht weiter als auf die Gegend der Rinde erstrecken. Also sehen wir, daß in den sehr jungen Zweigen der Bäume die äußere Rinde grün ist, und fast die Farbe der Blatter hat. Werden diese Zweige älter, so ist zwar die äußere Rinde nicht mehr grün, löset man aber diese ab, so wird man die nachkommende noch grün antreffen, als ein Zeichen, daß da eben sowohl, als bey den Blättern die gelbe, und blaue Farbe von der Luftsäure frey gemacht worden. Kömmt aber die Rinde an dem Stamme oder Aesten zu einer gewissen Dicke, so ist vergebens mehr eine grüne Farbe zu suchen, und zugleich hat die Wirkung der Luftsäure sein Ende erreichet.

Glaublicher also, und der Natur gemäßner ist es, daß die in den innern Theilen befindliche Farbe der Hölzer von dem Umlaufe der Säfte durch die Saftadern herrühre, und es mit solchen folgender massen zugehe.

Die Nahrungs- und Erhaltungssäfte führen das Farbewesen mit dem alcalischen Salze verbunden aus dem Stamme auf die Oberfläche der Blätter u. s. w. vermittelst der Saftadern. Allda macht die Luftsäure das Farbewesen von seinen alcalischen Banden frey und los, wie wir es in den Blumen, Blüthen, und Blättern ersehen. Die Zurückführungsgefässe nehmen das losgemachte Farbewesen, was nicht in die Luft verfliegt, zu sich, und führen es wieder zurück in den Stamme. Dieses ledig gemachte Farbewesen leget sich an die Holzfasen an, und bringt nach und nach die Färbung der Hölzer zuwege.

Diese Meinung scheinet um desto mehr gegründet zu seyn, als junge Bäume in ihrem Stamme nicht gefärbt aussehen, da hingegen alte, wo schon viele Jahre der Umlauf der Säfte das aufgelöste Farbewesen zurück geführt, und den inneren Holzfasen die Farbe mitgetheilet, recht dunkel gefärbt sind. Auch ist allzeit das Innere gegen das Mark zu in den alten Bäumen gefärbter, und wird stuffenweise, oder von Ring zu Ring, welche die Jahre und das Alter der Bäume anzeigen, an der Farbe gegen die Rinde zu schwächer, weil jenes gegen das Mark älter, und schon öfters von dem freyen zurückgeführten Farbewesen durchkreuzet worden, als jenes gegen die Rinde.

Eben durch den Umlauf der Säfte kann erkläret werden, warum man aus der Potasche einen vitriolisirten Weinstein (Tartarus vitriolatus) scheiden kann; denn da die Luftsäure mit dem alcalischen Salze sich auf der Oberfläche der Pflanzen verbindet, so wird dieses Mittelsalz durch die Venen zurück in den Stamme geführt. Wenigstens scheinet es mir die gewißeste Ursache zu seyn, daß auf solche Art der vitriolisirte Weinstein in die Potasche gekommen sey.

Da

Da ich nun mit den Farben der Pflanzen zu Ende bin, und von deren Entstehung meine Gedanken eröffnet habe, so fällt mir ein, ob nicht ebenfalls zu glauben, daß die Luftsäure den durch die Lunge gehenden Chylus berühre, und also durch dieses die Röthe des Geblüts verursache. Wo zu die Wärme in dem thierischen Körper vieles beytragen kann. Sollte es hiedurch nicht eben so gut als durch das Acidum pingue des Herrn Mayers erkläret werden können? Vid. Diſſert. de Calc. viv. Doct. Schaller Theſ. 15.

Allein dieses ist ein Abwege, den ich nicht berühren will, weil ich mir nur von den Farben der Pflanzen zu reden vorgenommen habe. Doch kann ich nicht ungemeldet lassen, daß ich stark vermuthe, daß, gleichwie die Farben von der Luftsäure in den Pflanzen entwickelt werden, auch ein gleiches mit jenem Wesen geschehe, welches wir das Riechende nennen, und daß dieses eben sowohl wie die Farben von dem alcalischen Salze gebunden sey. Eine Blume giebt den Geruch von sich, bis sie verwelket; aus welchem ich schließe, daß die Luftsäure allzeit neue Geruchtheile, welche von dem Stamme, anstatt deren, die verfliegen, zugeführt werden, entwickelt, und die Geruchsnerven reizet, wodurch jene Empfindung entstehet, die wir den Geruch nennen.

Wenigstens glaube ich bemerkt zu haben, daß sehr altes, dürres, und nicht mehr riechendes Wachholder- und Sevenbaumholz wieder einen Geruch gegeben, und die noch versteckten riechenden Theile in Bewegung gesetzt worden, da ich solches mit Vitriolgeist bestrichen habe. Und da riechende Hölzer und andere Körper, wenn sie gerieben werden, mehr Geruch von sich geben, so scheinet dessen keine andere Ursache zu seyn, als daß durch die Wärme, die die Bewegung verursachet, die Poren eröffnet, der Luftsäure der Eingang gestattet, und das riechende Wesen durch solches befreyet werde.

Da ich bisher mit Erzählung meiner Versuche, und aus solchen gezogenen Erklärungen der Pflanzenfarben umgegangen, so sollte ich auch den Nutzen bestimmen, der aus dieser meiner Arbeit zu erwarten seyn möchte.

Allein solcher scheinet mir sehr eingeschränkt zu seyn. Doch vermuthe ich, daß, wenn man die Kunst, Farben mit alcalischem Salze zu verbinden, wüßte, solche im Wasser auflösete, und mit diesen alsdenn blumentragende Pflanzen begöße, die Blumengärtner verschiedene Farben auf den Blumen erzeugen könnten. Und da von Lichtviolet bis zur Dunkelröthe, dann von Lichtgelb bis zur Bräune, ja wohl gar bis zur glänzenden Schwärze die Hölzer mit Farben überzogen werden können, so könnten die Tischler, und andere im Holze arbeitende Künstler, und Handwerker, wo sie mit Schattirungen ihrer Arbeit eine Zierde zu geben gedenken, daraus einen Vortheil ziehen, und solche Farben zu ihrem Gebrauche anwenden. Nur wäre dahin zu trachten, daß man ein Mittel erfände, die flüchtige rothe, und blaue Farben einiger Hölzer zu fixiren. Man kann nichts schöners von einer violeten Farbe sehen, als wenn Quittenholz gehörig mit Vitriolgeist bestrichen wird; aber es ist diese Farbe nicht beständig, weil die Blaue nach und nach verflieget, und nur eine Blaßröthe zurück läßt. Auch ist neben diesem zu merken, daß, wenn man die Hölzer mit mineralischen sauren Geistern zu färben gedenket, man junges Holz, oder wenigstens von alten Stämmen das Aeußere gegen der Rinde nehmen müsse, weil die inneren Theile des Stammes von dem Umlaufe der Säfte, wie vorhin gemeldet, in einigen also geändert werden, daß sie den Wirkungen den sauren Geister widerstehen.

Ob weiters in diesen Versuchen der Vortheil, solche Farben hervorzubringen, stecke, die jenen, welche man aus fremden Ländern zu uns bringet, gleich kommen, oder selbe etwann gar übertreffen, will ich eben nicht bestimmen: doch glaube ich für gewiß, daß fernere Versuche nicht umsonst seyn würden; wenigstens habe ich die Möglichkeit gesehen, und jene gefärbten Seiden- und Wollenzeuge, so hier beyliegen, und allen bekannten gelben Farben an Glanze, Schönheit, und Beständigkeit gewiß gleich kommen, wenn sie selbe nicht gar übertreffen, können davon Zeugniß geben.

Diese Farben werden ohne Zusatz, ohne Beize oder andere Weitläuftigkeit erhalten. Es ist nichts anders nöthig, als daß man die mit mineralischen sauren Geistern zugerichtete Farbe im Wasser siede, und die Zeuge darinne siedend, oder nach den Umständen auch nur warm behandle.

Es ist gar nicht schwer, all jene gelbe Farben, die uns verschiedene gelbe Blumen weisen, so schön sie auch immer seyn mögen, auf Wollen- oder Seidenzeuge so fest und beständig anzubringen, daß weder Sonne noch Luft an solchen die mindeste Aenderung mache.

Ist aber dieses, wie es ganz gewiß ist, so kann die göttingische Gesellschaft der Wissenschaften für die im 1765sten Jahre aufgegebene Preisfrage, wenn es noch nicht geschehen, Genugthuung erhalten, da selbe eine gelbe Farbe, so dem Weid und Krappe an Beständigkeit gleichkömmt, verlangte.

Weil die gelbe Farbe zu Hervorbringung der grünen unumgänglich nothwendig ist, und ohne selbe kein Grün gemacht werden kann, auch die von mir gefundenen gelbfärbenden Materialien in allem Ueberfluße zu erhalten sind, folglich in diesem Puncte alle fremde oder mühesam zuhabende Farbmaterialien entbehret werden können, so vermuthe ich, daß diese meine gemachten Versuche einen Nutzen schaffen werden.

Zum Beschluße muß ich noch anmerken, daß die Blumen, Blätter, Rinden, Früchten, und andere aus dem Vegetabilienreiche genommene Farbmaterialien nur darum den Stoff zur Färberey geben, weil in selben die Farbe von ihren alcalischen Fesseln durch die Luftsäure entbunden worden. Dieses entbundene Farbewesen trift man in einigen Blumen so locker, und freyhangend an, daß, wenn man auf Papier solche tröcknet, das Farbewesen von der Blume abgesöndert liegen bleibet.

Ent=

Entdeckung
verschiedener vegetabilischen
Farbmaterialien,
Seiden- und Wollenzeuge
schön und dauerhaft
gelb zu färben.

von

Mathias Brunnwiser,
der
Philosophie und Arzneykunst Doctorn, und Stadtphysikus
zu Kehlheim. 1771.

Die Farbmaterialien, die eine gelbe, besonders aber gute, schöne, beständige, in der Luft und Sonne unveränderliche Farbe liefern, sind meines Wissens eben nicht so zahlreich, als daß man nicht Ursache haben sollte, mehrere zu wünschen. Und daher glaube ich, daß gegenwärtige Entdeckung nicht gar ohne Nutzen seyn, und wo nicht vollkommen, doch reichlich die Zahl der gelben Farbstoffen vermehren, und den etwann obwaltenden Mangel ersetzen werde.

Eine physische Betrachtung der frisch abgehauenen Hölzer, welche anfänglich weiß, nachdem sie aber lange der Luft ausgesetzt worden, auf der Oberfläche gelb, und nach diesem blau- oder graulicht wurden, haben mich zur Entdeckung dieser vegetabilischen Farben, und auch zugleich zu einer Abhandlung geführt, in welcher ich die grüne, rothe, blaue, und gelbe Farben der Blätter, Blüthen, Blumen, und Früchten der Vegetabilien zu erklären mich bemühet habe.

Da

Da ich in dieser Arbeit keine mir anständigen Vorgänger hatte, oder wenigstens dergleichen mir nicht bekannt waren: und ich dennoch alle Hypothesen vermeiden wollte; so habe ich allen Irrungen, und aus diesen erfolgenden verdächtigen Schlüssen vorzubeugen, pur allein auf solche Versuche, und Erfahrungen mich geleget, welche zuverläßige gewisse Schlüsse zu machen mich berechtigten.

Aus diesen Versuchen, und Erfahrungen habe ich ersehen, daß alle jene Farben, welche uns die Natur an den Vegetabilien zeiget, in dem Stamme unsichtbar schon verborgen liegen, und in der Oberfläche der Blätter, Blüthen und Blumen erst entwickelt, und unsern Augen zur Bewunderung vorgestellet werden.

Durch diese Erfahrungen bin ich belehret worden, daß nur drey Farben, nämlich eine rothe, eine blaue, und eine gelbe all jenes Schönen Ursache sind, das wir an den Vegetabilien bewundern. Und eben diese Erfahrungen haben mich auch überzeuget, daß die drey mineralischen sauren Geister diese Farben, jedoch in einem solchen Unterschiede hervorbringen, daß die Salpetersäure mehr auf die gelbe, Vitriol, und Salzsäure aber mehr auf die blaue und rothe ihre wirkende Kräften beweisen.

Diese Erscheinungen also waren für mich genug, nicht allein meine Aufmerksamkeit zu erregen, sondern auch weitere Versuche vorzunehmen, und wo möglich, mit diesen einen ökonomischen Nutzen zu verschaffen.

Da ich aber in der Folge sah, daß die rothe und blaue Farben meinen Wünschen widerstunden, und ich solchen einen mir anständigen Grad der Fixität beyzubringen noch nicht genugsames Einsehen habe, folglich diese mit Vortheile in ihrer auf dem Holze erscheinenden Schönheit und Vollkommenheit auf Seden- oder

Wollen-

Wollenzeuge aufzutragen mich außer Stand befand: so habe ich solche wider meinen Willen verlassen, und in gegenwärtigen nur allein auf die Gelbe zu arbeiten mir angelegen seyn lassen müßen. Jedoch bin ich nicht ungeneigt, und fast entschlossen, bey ruhigeren Stunden, als gegenwärtige sind, und besserer Gelegenheit, auch auf die anderen zwo Farben meine weiteren Versuche um destomehr zu richten, als diese, wenn sie fixiert, und in solcher Quantität, wie die gelbe, erhalten werden können, eben so gut den bekannten rothen, und blauen an Schönheit beykommen werden, als die gelbe mit den bekannten gelben um den Rang streitet.

Es bestehet aber die ganze Kunst die gelbe Farbe zu erhalten nur in dem, daß man die Hölzer von verschiedenen Bäumen, und Stauden mit Salpetersäure behandle, und mit dieser aus selben die verborgene Farbe ausziehe, oder vielmehr von ihren Banden, mit welchen sie in dem Holze gefesselt ist, erledige.

Damit ich aber dieses alles klärer, und begreiflicher mache, so will ich die Behandlungen, und Versuche selbst, wie ich solche in meiner Arbeit vorgenommen habe, erzählen.

Ich sammelte mir fast alle Hölzer von Stauden, und Bäumen, die in unserer Gegend wachsen: schnitt oder hobelte auf solchen eine Fläche, und erkundigte mich, wie diese, wenn sie mit Scheidewasser öfters überstrichen wurden, ihre Farbe zeigeten. Da diese Versuche mich schon vorhin einsehen ließen, welche Hölzer die mehreste, und schönste Farbe lieferen würden, so bin ich in meinen Versuchen weiter gegangen, und habe diese Hölzer entweder klein schneiden, hobeln, oder wohl gar raspeln lassen. Diese also zugerichteten Hölzer befeuchtete ich mit Scheidewasser, ließ es so lange stehen, bis ich glaubte, daß die sehr dünnen Späne von dem Scheidewasser durchdrungen worden, und das in selben enthaltene wesentliche alcalische Salz, so nach den ungezweifelten Erfahrungen des Herrn Marggrafs im Holze stecket, (a) und nach meinen Erfahrungen das Farbewesen bindet, (b) gesättiget würde. Dünkte mich das Scheidewasser allzustark zu seyn, (so aber zu dieser Arbeit nicht leicht zu stark ist) diluirte ich solches mit gemeinem Wasser, wo ich aber Acht hatte, daß das Wasser rein, und mit keiner alcalischen Erde geschwängert sey, dergleichen in unserer Gegend wegen den Kalkgebürgen die meisten sind.

Es ist eben nicht nöthig, daß man von dem Scheidewasser gar zu viel, sondern nur in einer solchen Quantität nehme, daß das enthaltene wesentliche alcalische Salz, dessen Quantität nicht gar groß ist, gesättiget werde. Obwohl, wenn auch von dem Scheidewasser zu viel genommen wird, kein anderer Schade zu befürchten ist, als daß man dies vergebens verlieret.

Die Salpetersäure wird sich auf diese Art mit dem im Holze steckenden alcalischen Salze, welches nach meinen in bemeldter Abhandlung von den Farben der Pflanzen enthaltenen Grundsätzen, mit dem Farbewesen verbunden ist, wegen näherer Verwandschaft vereinigen, dem Farbewesen aber die Fesseln abnehmen, solches los machen, und der Willkühr des Künstlers überlassen, welches neben anderen aus dem klar erhellet, weil die angefeuchteten kleinen Späne entweder ganz gelb, oder auch in einigen Hölzern violet erscheinen: welche letztere Farbe aber in der Wärme bald verschwindet, und ebenfalls gelb wird.

An dieses auf solche Art gefärbte Holz, oder vielmehr an dieses in dem Holze losgemachte Farbewesen goß ich Wasser, und ließ es in einem irdenen Geschirre aufsieden.

So-

(a) Man sehe dessen chymische Schriften II Theil. 49 Seite.

(b) S. meine Abhandlung von den Farben der Pflanzen.

Sobald es angefangen zu sieden, oder auch noch eher, habe ich die Zeuge von Seide, Kameelhaar, und Wolle hineingelegt, und so lang sieden lassen, bis die Farbe sich an allen Orten gleich angeleget, und die Zeuge durchdrungen hat.

Waren die Zeuge nach meinem Gutgedunken schön, und durchgehends gleich gefärbt, so habe ich solche alsobald von der Farbe herausgenommen, in kaltes Wasser geworfen, stark und rein ausgewaschen, und getrocknet.

Ich habe bey dieser Färberey keine andere vor- oder nachgängige Zubereitungen, den gefärbten Zeugen einen Glanz, oder schönes Ansehen zu geben, anzuwenden nöthig gehabt: und doch habe ich an diesen meinen Farben wahrgenommen, daß sie den ostindianischen, französischen, und anderen gelben Seidenzeugen, welche mir in den Kaufläden für solche gezeiget worden, an Schönheit, Glanze und Ansehen nicht nachgaben: und überdas weder an der Sonne, noch Luft an ihrer Farbe, oder anderen Qualität Schaden litten, oder einer Veränderung unterworfen waren.

Zur Hervorbringung der gelben Farben sind alle Gattungen der Hölzer von Bäumen, und Stauden, jedoch eines mehr als das andere anständig. Nur wenn man Hölzer nehmen wollte, welche harzicht wären, müßte man ein oder anderen Vortheil, wegen des Harzes, in Acht nehmen, weil dieses die Zeuge verderben, fleckicht machen, und noch überdas die Salpetersäure an Kräften schwächen würde.

Es würde zu lange, und auch überflüßig seyn; wenn ich alle vegetabilische Gewächse, welche eine gelbe Farbe liefern, anzeigen wollte, indem dergleichen alle, und jede Gattungen ganz sicher, und ohnfehlbar ganz gewiß geben.

Ich will nur ein Dutzend verschiedener, in unterschiedenen Gegenden wachsenden Vegetabilien zum Beyspiele hersetzen: als das Holz vom

1 Felberbaum weiße Weide Salix vulg. alb. arboresc. C. B.

2 Birnbaum.

3 Taxbaum, Eiben, Taxus offic. C. B.

4 Eichbaum.

5 Erlenbaum Alnus vulg. I. B.

6 Cornelbaum Cornus sativ. I. B.

7 Maulbeerbaum.

8 Arlesbeerbaum Sorbus torminalis.

9 Erdartischocken Helianthemum indicum Tuberos. C. B. helianthus radice Tuberosa Lin. After peruan. tuberos. Battata Canadens. französisch Taupinampou.

10 Unnütze im Fruhjahre abgeschnittene Weinreben.

11 Schlehendorn Acacia vulg.

12 Ausgewachsene, und im Herbst abgeschnittene Spargelstauden, von welchen jeden ich drey Muster eines auf Seide, eines auf Wolle von hungarischen Ziegen, oder sogenannte Kameelhaare: und eines auf Schaafwolle, oder Tuch der churfürstl. Akademie hiebey habe einsenden wollen, um den Unterschied der färbenden Hölzer sowohl, als die Farben selbsten, welche nach den angezeigten Numeris auf jedem Muster bezeichnet sind, genauer einsehen zu können: jedoch mit der Anmerkung, daß eine dunklere, oder lichte Farbe auch viel von dem abhange, wenn man die Zeuge lange oder kurz in der Farbe sieden läßt. Diese Farben, ungeachtet sie schön, und dauerhaft sind, würden doch von der Achtung viel verlieren, wenn sie nur von raren, oder

auch

auch nützlichen Hölzern allein z. B. Quitten, Birn- und Äpfelbäumen genommen werden müßten. Da aber solche auch neben diesen von schlechten, und verwerflichen Sachen, als abgeschnittenen Wein- und Hopfenreben, Schlehendorn, ausgewachsenen Spargelstauden, und anderen sonst unbrauchbaren Dingen bereitet werden können; so glaube ich, daß sie jederzeit Aufmerksamkeit und Schätzung verdienen.

In dem bremischen Magazin III. B. 48. Seite, wird eine gelbe Farbe aus Acaciablumen, Seide zu färben, vorgeschlagen: und Herr Denso in seinen Vorschlägen von Erfindung neuer Farbstoffen, welche im 5ten Stücke seiner monatlichen Beyträge zur Naturkunde befindlich sind, hat die gelbe Sunftlilie zur gelben Farbe angewandt, welche vor der ostindianischen gelben Farbe an Dauerhaftigkeit einen Vorzug haben soll.

Allein so gut, schön, und beständig auch diese Farben seyn mögen; so sind jedoch diese Farbstoffe nicht in solcher Quantität zu haben, welche etwan zum allgemeinen Gebrauche, und an allen Orten gewünschet werden möchten. Im Gegentheile aber, da meine Farbmaterialien in allen Gegenden, ohne Kösten, ohne grosse Mühe, und zugleich ohne Schaden gesammelt werden können; so werde ich zu entschuldigen seyn, wenn ich diesen vor jenen den Vorzug einräume.

Was aber noch betrachtungswürdiger zu seyn scheinet, so werden eben jene Hölzer, die am häufigsten wachsen, und zum hauswirthschaftlichen Gebrauche mit schlechter Achtung angesehen werden, öfters für die tauglichsten befunden, wovon das Felber- oder weiße Weidenholz (Salix vulg.) und die Staude von Erdartischocken (helianth.) zeugen.

Das Weidenholz mit Scheidewasser auf bemeldte Art zugerichtet, giebt unter andern Hölzern, besonders auf die Seide die beste, und mit dem schönsten Glanze versehene Farbe: wie das Muster N. 1. zeiget. Und da dieser Baum an allen Flüssen, und feuchten Orten im Ueberfluße von selbsten wachset, und wenn er einmal in die Höhe gekommen, alle 3, oder 4 Jahre seiner Aeste ohne Schaden nicht allein beraubet, sondern auch mit leichter Mühe gepflanzet werden kann; so wäre dieses Farbmateriale allein hinlänglich, ganze Länder zu befriedigen, und den Abgang aller gelben Farbstoffen zu ersetzen.

Das Erdartischockenholz ist in dem ökonomischen Gebrauche noch weit unter der Weide: denn ungeachtet daß die Würzel in der Küche zu einer, zwar nicht jedermann anständigen, Speise, oder etwann zur Mästung des Viehes zugerichtet werden kann, so ist jedoch der sechs bis zwölf Schuhe hoch wachsende dicke Stengel wegen Weiche des Holzes weder zum brennen, noch zu einem andern Gebrauche anzuwenden. Hingegen scheinet solcher desto tauglicher von der Natur zu den gelben Farben erzeuget worden zu seyn, wie das Nro. 9. beyliegende Muster beweiset. Man kann dieses Gewächse, welches auch im schlechten Grunde fortkömmt, mit geringen Kösten, und Mühe allenthalben nach Gutbefinden bauen.

Nichts also, vermuthe ich, kann den Werth dieser neuen Farbstoffen geringschätzig machen, als etwann ein Vorurtheil, welches öfters ausländische Sachen nur darum höher schätzet, weil solche weit hergeholet werden müssen, und theurer sind, als jene, die uns die gütige Natur eben so gut in unserm Vaterlande darbietet.

Ich muß aber doch bekennen, daß diese auf solche Art gefärbten Zeuge mit einer alcalischen Lauge, wenn man solche darinnen waschen, oder auch nur darein legen wollte, würden verdorben werden.

Allein, wenn man betrachtet, daß Seide, und Wolle in Lauge zu waschen nicht gebräuchlich ist, indem sowohl Seide, als Wolle in der Lauge aufgelöst und auseinander gesetzet werden; so kann ich weiter nicht einsehen, warum aus dieser Ursache die angegebenen Farben nicht ihren Werth beybehalten sollten: besonders, da, wenn die Zeuge zu reinigen nothwendig befunden werden sollte, man mit Seife solches bewerkstelligen kann, wodurch die Farben keineswegs verdorben, wohl aber wegen einer gewissen dunklern Schattirung schöner, und nach dem verschiedenen Geschmacke oder Einbildung ein angenehmeres Ansehen erhalten werden.

Dieses also ist es, was ich einer erleuchten Akademie einzusenden für gut befunden habe. Sollte durch diese Entdeckung meinem Durchleuchtigsten, und gnädigsten Landesherrn, und der churfürstlichen Akademie der Wissenschaften ein höchstes, und hohes Wohlgefallen, meinem Vaterlande aber ein Nutze, und überhaupt meinem Nebenmenschen ein Vortheil zuwachsen, so werde ich mich glücklich schätzen, und mein Ziel erreicht haben. Sollte aber diese Entdeckung zum gemeinen Nutzen noch nicht hinlänglich, sondern einigen von mir nicht eingesehenen Beschwernissen etwann unterworfen seyn: so verlasse ich mich wenigstens auf das gemeine Sprüchwort: Inventis facile est addere.

Gedanken,

wie dem fast jährlichen,

von

Austrettung der Flüße

verursachten Schaden nach den Naturgesetzen des Wassers zu steuern sey.

Von

P. Clarus Mayr,

Benediktinern zu Vormbach.

Ich habe die Pflicht, der churfürstl. Akademie eine philosophische Abhandlung vorzulegen, zu welcher mich nicht nur meine Neigung zu physikalischen Gegenständen, sondern vielmehr eine wahre Menschenliebe veranlasset hat. Ich wage es, derselben meine Gedanken, wie dem fast jährlichen von Austrettung unsrer nahmhaften Flüße verursachten Schaden nach den Naturgesetzen des Wassers zu steuren sey, zur Prüfung zu überreichen, und zugleich unsre schifreichen Wässer, forderst den mir so geliebten Innstromm, nicht als unsere Feinde, sondern als unsere wahren Freunde vorzustellen: wenn wir nur selbe als solche zu gebrauchen, uns von keinem Vorurtheile hindern lassen.

I. §.

Man muß das Wasser, indem es unsern zeitlichen Gütern so empfindlichen Schaden zufüget, doch immer für unsern besten

Freund ansehen, der aber unverhoft in so grosse Wuth versetzet wird, daß er die schädliche Wirkung derselben auszuhalten, sich nicht mehr im Stande befindet, eine Ausschweifung, die auch im gesellschaftlichen Leben oft eben jene dahin reißt, die die beste Gemüthsart besitzen. Man muß aber eben darum dem Wasser auf die Art, wie einem vom gähen Zorne zu sehr bewegten Freunde begegnen. 1tens, daß man den nahen Schaden abzuwenden suche. 2tens, daß man sich, wenn selber nicht mehr zu mäßigen ist, doch hievor sicher setze. 3tens, daß man nach dem Schaden alles in den alten Stand zu setzen sich bemühe, oder, die Anwendung zu machen, 1. daß man vor der Ergüßung eines Stroms an den Ufern Anstalt mache, die gähling eindringende Gewalt zu brechen. 2. die wirkliche und nicht zu hindernde Ergüßung unschädlich zu machen. 3. nach der Ergüßung den gemachten Schaden wieder zuersetzen.

2. §.

Ich rede hier nicht von der traurigen Naturerscheinung eines gähen Wolkenbruches, der seine durch lange Thäler reißende Wuth kaum nach Verheerung des freyen Landes endet. Ich gedenke nur den schädlichen Wirkungen der so gewöhnlichen und jährlichen Ueberschwemmungen nahmhafter Flüße, und Bäche zu steuren; und diese wollen wir nun in ihrer Ruhe betrachten, in einem Stande, wo sie sich uns nicht nur zur Ergötzung unserer Sinne, sondern auch zu aller Hülfe unsrer Nothdurft mit so getreuen Diensten, als immer die Naturgesetze von ihnen verlangen, täglich darbieten. In dieser Ruhe wollen wir sie betrachten, um ihre Unruhe, oder die Art ihrer Ausschweifungen kennen zu lernen. Wir werden unsere Wässer nirgends ruhiger sehen, als, wo sie Raum finden, sich ohne Einschränkung nach der Breite ergießen zu können. Da fließen sie so ruhig, das man fast zweifeln sollte, ob sie sich wohl bewegen: und leiten uns zugleich auf den Schluß, den der berühmte Naturforscher Herr Buffon schon lange gemacht hat, daß je unmerklicher das Rinnsal des Wassers von der Horizontallage abnimmt: und je weniger die Masse des abfließenden Wassers eingeschränket wird, desto weniger wir von dessen Bewegung zu fürchten haben: Bedingungen, wovon die erste öfters, die letzte aber fast allezeit durch unsern Fleiß erfüllet werden kann, und so kömt es nur darauf an, daß wir untersuchen, was unsern Freund bey einer kleinen Bewegung zerstreuen, und bey einer größern Ausschweifung schwächen könne. Man mache also 1. einem Fluße, wo es sich thun läßt, ein Flußbett, das von der Horizontallage nur ganz unmerklich abnimmt. 2. mache man ihm forderst da, wo dessen zu gäher Abfall, Lauf oder Zug nicht zu verändern ist, oder, wo ihm das Ufer zu wenig Widerstand machen kann, einen Raum, daß er sich ausgießen könne. So werden wir wenigstens bey der Rücksicht auf vorige Zeiten, auch nach sehr grosser Ueberschwemmung uns nicht über viel gemachten Schaden zu beklagen haben.

3. §.

Da ich nicht zweifle, man werde den Vortheil des ersten Vorschlags, nämlich des unbemerklichen Abhangs des Rinnsaals ohne Aufenthalt, einsehen; so förchte ich auch nicht, daß man wider den mit Fleiße gemachten Raum zu Ergüßung des Flußes gründliche Einwürfe beybringen werde. Kann sich ein Wasser so ergießen, daß es in Verhältniß des Hauptstromms fast still stehe, so wird es auch, wenn es sich schon über unsere Felder, und Wiesen ausbreiten sollte, uns anders nicht schaden, als daß es 1. die Erde, die es bedeckt, aufweiche, und so flüßig mache, daß sie mit der abnehmenden Fluth fortgeschwemmt werde, oder 2. wo der Abflaß nicht ist, den Boden, und die Frucht unter neu angeschwemmte Erde begrabe. Die erste Wirkung ist zwar beträchtlich genug, weil sie die Ursache ist, warum wir erfahren, daß man erst, nachdem das Wasser abfließt, und sich mindert, zum meisten über den Raub der Feldfrüchte, und über den wirklich, oder doch nahen Einsturz der Gebäude und Häuser zu klagen hat, indem wenn das Wasser zu fließen anfängt, selbes nicht nur alles, was darauf schwimmen kann, sondern auch, was sich von selbem fast bis zur Vermischung bewegen läßt, nämlich die auf Feldern, oder an- und unter den Gebäuden aufgeweichte Erde mit sich fortzunehmen pfleget. Aber, nebst der Hülfe, die ich zur Versicherung der Gründe bald vorschlagen werde (§. 10. — 13.) da wir den Raum der Ergüßung selbst vorbereiten, können wir ihn nicht so zurichten, wie es uns selbst zum besten gedünkt, den nahen Schaden abzuwenden? Lasset uns also den Platz, den wir der Ergüßung des Stromms wiedmen, am Ufer so verschanzen, das selber nur bey gar grosser Ueberschwemmung mit der ganzen Gewalt der Fluth übergossen werden könne. Laßt uns 2. in diesem aufgeworfenen Ufer dem an- und ablaufenden Wasser nur eine, oder die andere enge Oeffnung machen, damit die Ausgüßung nicht mit Gewalt eindringe, sondern nur sanft einschleiche. Laßt uns 3. diese Oeffnungen also mit Gesträuchen verlegen, daß fast nichts, als das Wasser durchfließe, so wird uns auch bey dem Ablaufe von Frucht, und Erde das meiste zurückbleiben.

4. §.

Haben wir nun Mittel, die angeführte erste Wirkung, nämlich den Raub der Früchte, und Erde fast unschädlich zu machen, so därfen wir uns vor der zweyten, nämlich vor der Bedeckung mit Schlamm, oder neuen Erde soviel minder fürchten, als wir selbe vielmehr als höchst nützlich erfahren können. Es ist freylich ein trauriger Anblick, wenn wir ganze Felder, und Wiesen im Wasser, set, und nach dessen Ablauf im Schlamme stehen sehen. Aber es braucht nur eine wenige Ueberlegung, so werden wir uns vor einer so stillen Ueberschwemmung nicht mehr entsetzen, als die Egypter bey dem Austritte ihres Nilflußes, weil wir sicher sind, daß sie uns bey dem Ablauf nichts nehmen kann (§. 3.) wohl aber den fettesten Dung für unsere Felder, und Wiesen uns hinterlassen muß. Es wäre überflüßig, einem Landwirth den von einer stillen Ueberschwemmung hinterlassenen Schlamm als eine gute Kost der Felder, und Wiesen anzurühmen, weil ich ihm doch nichts neues erzählen würde: es wird aber nicht umsonst seyn, manchen zu erinnern, daß er sich eben darum mit solchem, ihm so bekannten nützlichen Abtrag seines benachbarten Stromms ab den seltnen Schaden einer sanften Ueberschwemmung fast jederzeit wird getrösten können, wenn er sich der vorgeschlagenen Vorsorge bedienet, einen wüthenden Fluß durch eine Ergüßung in die Ebne zu zerstreuen: diese Ergüßung aber so sanft, und still zu machen, daß er nur darum, weil er eine von uns nach unserm Gutgedünken gemachte Oeffnung findet, oder weil er wegen gar zu viel angehäuften Wasser übergeht, sich auf unsre Flächen ergießen muß (§. 3.)

5. §.

Und so haben wir dann das erste Mittel, uns vor den gewöhnlichen, bald mehr, bald mindern Ueberschwemmungen eines ordentlich fließenden Flußes, oder Bachs zu versichern; nämlich dessen Wuth zu zerstreuen, oder zu machen, daß ein angeschwemmter Fluß sich auf eine Ebne ergießen könne: ein Mittel, 1. das in seiner Wirkung gewiß ist, weil ein so zerstreuter Stromm niemals mit solcher Gewalt laufen, und reißen wird, als einer, der eine gäh angehäufte übergrosse Wassermenge durch nahe Ufer, und über ein zu sehr gesenktes Flußbett ausgießen muß. 2. ein

ein Mittel, das selbst, wo alles unter Wasser gesetzt wird, gar nicht, oder nur zufällig schaden wird, und endlich 3. ein Mittel, das mit dem angeschwemmten Dung ein anders Jahr den gemachten Schaden genug ersetzen wird.

6. §.

Wir haben aber so wenig Ursache, mit diesem Mittel allein uns zu begnügen, als man die Wuth der Flüße nicht nur zu zerstreuen hat, sondern auch, wo dieses nicht hilft, solche unkräftig, und unwirksam zu machen. Wir müssen uns erinnern, daß grosse Wässer, wo sie eingeschränkt schnell laufen, gewiß reißend werden, und allenthalben untergraben; so, daß ganze Striche des Ufers einstürzen, ehe die Fluth so hoch gestiegen, daß sie sich über selbe hätte ergießen, und zerstreuen sollen. Wir müssen die Vorsorge haben, ihn von dem Gegenstande seines Zorns so weit, und mit so starkem Widerstande zu entfernen, daß er sich daran die Hörner zerstossen, oder doch ohne Schaden wüthen muß. Nun hat man freylich schon vor tausend Jahren zu diesem Absehen kostbare Dämme erbauet, die lebendige Kraft des Wassers nach beliebigen Orten zu wenden: oder sogenannte Schlächten, die Ufer vor dem Reißen und Untergraben des Stromms zu versichern. Wie wenig aber so lange Zeit bey allen noch so grossen Kosten, Wissenschaft, und Erfahrung von dergleichen Bau was standhaftes geliefert worden, ist so traurig, als oft zu sehen. Was ist zu thun? Wir müssen der Ueberschwemmung Widerstände setzen, die sowohl das Reißen, als das Untergraben derselben verhindern. Zwar, was das Reißen anbelangt, kann, sich die Kunst mit ihren Werkzeugen, nämlich den Schlächten, oder Wehren auch den größten Wassergüßen so entgegen stellen, daß kein noch so grosser, und noch so wüthender Stromm eine Spur des Schadens nach sich lassen kann. Gewiß, so groß der Anfall des Wassers immer ist, wird er doch

keine

keine Schlächte oder Wehren, so man bey unsern Zeiten setzt, schadhaft machen. Aber, wie steht es mit dem Untergraben? ist nicht dieses die Ursache, daß man nach abnehmendem Wasser von den schönsten Wassergebäuden nichts, als die bis auf den Grund entblößten Bäume findet, die, wenn es noch nicht geschehen, alle Augenblicke den Einsturz der auf sie gelegten noch übrigen Holzmenge drohen? und, wie ist dieser schädlichen Wirkung des Untergrabens vorzubauen?

7. §.

Wir müssen die Wirkung kennen, ehe wir solche unkräftig machen wollen: wir müssen wissen, was Untergraben sey, und wie es geschehe? Hierzu müssen wir uns erinnern, daß die Haupteigenschaften des Wassers sind 1. die Schwere: 2. die Flüßigkeit: 3. die Feinheit seiner Theilchen. Durch die erste Kraft ist es in steter Bemühung, nach der Perpendikular fortzuschreiten: durch die zweyte wendet es diese Bemühung auf die Seite an: durch die dritte ist es zum meisten aufgelegt, nach den Gesetzen der Anziehung zu wirken, oder zu leiden: und hiemit durchdringet es den meisten Widerstand wenigstens einige Linien tief. Nichts widersteht ihm minder, als, was Erde heißet: sollte diese auch schon so fest zusammengebacken seyn, daß sie fast den Name eines Steins verdiente. Gewiß: ein noch so fest geschlagner Thon wird auch von dem stillesten Wasser angegriffen; man darf nur solches durch einen Ablauf in Bewegung bringen, so wird man diese natürliche Wahrheit bald mehr, als man verlangen sollte, bestättiget finden. Es ist also das Untergraben des Wassers anders nichts, als daß selbes durch was immer für Naturgesetze die Erdtheilchen von ihren Banden, die sie vereiniget halten, auflöse, mit sich vermische, und so mit sich vermischet fortführe, und diese allenthalben, wo es nur hinkömmt, aufweichen, und dann abfließen könne: so, daß es von einem Wasserbau, wenn es einmal eindringen kann, alles, was nur Erde heißt, untergräbt, oder mit sich fortschwemmt, folglich alles, was auf der Erde geruhet, dem gewissen Einsturze ausgesetzet, hinterläßt.

8. §.

Heißt nun dieses Untergraben, so giebt uns die Vernunft, daß wir dem Wasser, wo es sich außerordentlich bewegen muß, ja nur keine Erde entgegen setzen dürfen, ein Gesetz, so von denen, die dermalen einen Wasserbau führen, so wenig beobachtet, und so oft vernachläßiget wird, daß man fast zweifeln sollte, ob ihnen solches jemals sey bekannt worden. Man besehe nur den Bau unserer sogenannten Schlächten, die das Gestad vor der Gewalt des reißenden Wassers beschützen sollten. Wir machen solche darum, weil wir unsre Ufer wegen vieler Erde für zu schwach halten, dem Wasser zu widerstehen, und gebrauchen hierzu meistentheils eben das, was dem Wasser nicht widerstehen kann, nämlich Erde. Aus wem bestehen denn unsere Schlächte? 1. aus Bauhölzern, die nach Gutgedünken entweder nach einem rechten, oder nach einem schiefen Winkel tief in den Grund getrieben werden. 2. Aus Bauhölzern, die nach der Quere mit jenen verbunden werden. 3. meistentheils aus Büschen von kleinem Holzwerk, oder sogenannten Faschinen, die mit Erde allenthalben unterlegt, belegt, und ausgefüllt werden, so, daß noch die Erde recht fest eingestossen wird; in der Absicht zwar, daß solche dem eindringenden Wasser destomehr widerstehen sollte: mit der Folge aber, daß wir ihm eben hiemit desto mehr schwachen Widerstand entgegen setzen, weil wir ihm Erde entgegen setzen.

9. §.

9. §.

Selbst die Eckſteine unſers Gebäudes, sollen wir ſie mit Furcht, oder mit Hoffnung betrachten? wir treiben einen Stamm Holz, der, damit er ohne Widerſtand durchdringen könne, ſogar mit einer eiſernen Spitze, oder ſogenannten Schuhe bewaffnet iſt, in den Grund: und trennen hiemit die Erde mit einem Mittel, mit dem ſie ſich niemals ſo, als mit ſich ſelbſten, oder mit Steinen verbinden kann: nämlich mit einem Holz. Wir machen alſo dem Waſſer eine Stelle, da ſelbes nach ſeinen Naturgeſetzen eindringen, oder untergraben muß, wenn es ſich mit Bewegung aufhalten kann (§. 7.) und daß es ſich aufhalten, und mit Aufwallung bewegen müſſe, macht eben dieſes dem Lauf entgegengeſetzte Holz. Was folget? als, 1. daß ſich das Waſſer zwiſchen Holz, und Erde, weil hier keine Verbindung iſt, immer tiefer ſenke: daß es 2. immer tiefer die Erde auflöſe, und wegen ſteter Bewegung auf die Höhe treibe: daß es 3. die aufgelöſte und aufgetriebene Erde wegen der Bewegung mit ſich fortführe: und daß es hiemit 4. ſogar den Eckſtein unſers Gebäudes, den ſo tief getriebnen Baum, manchesmal bis unter die eiſerne Spitze entblöſſet hinterlaſſe. Trauriger Anblick, wenn wir nach der Ueberſchwemmung ſehen müſſen, daß uns die Güße mehr Land von dem Ufer fortgeriſſen, als wir mit groſſer Mühe, und Koſten erhalten wollten: aber auch traurige Erinnerung für einen Naturforſcher, und Menſchenfreund, wenn er ſiehet, daß man nur überlege, was das Waſſer gethan, und nicht, was es nach ſeinen Naturgeſetzen habe thun müſſen: und daß man folglich in Zukunft dem Schaden nicht beſſer, als bisher geſchehen iſt, vorbeugen werde!

10. §.

Wir dürfen also, die Erde unsers Ufers zu erhalten, den Ausschweifungen des Wassers keine Erde entgegensetzen: aber, was sonst? Wo man keine Kosten sparren darf, wird wohl mancher zuerst auf ein von gehauenen, und gut verbundenen Steinen aufgemauertes Werk denken. Allein, so gerne ich sehe, daß man mit gemauerten Dämmen ein stehendes Wasser, als etwann einen grossen Fischteuch einhalte, so ungern wollte ich solches an einem grossen Fluße anlegen, weil alles Mauerwerk, sobald Grund, oder Verbindung merklichen Schaden leidet, sich gewiß trennen muß, und ein fließendes Wasser, und noch mehr ein reissendes im Grund, und an der Verbindung gewiß eine Aenderung machen wird. Ich wollte also vielmehr die von starken Holzstämmen zusammengefügten, und in den Grund des Wassers nicht eingeschlagenen, sondern eingesenkten Wasserkästen empfehlen: die ich eben den Wasserbauverständigen um so weniger zu beschreiben habe, als sie selbe so oftmals gebrauchen, daß sie bey ungewissem Flußbette sogar ganze gemauerte Brücken-Jöcher auf dergleichen eingesenkten, und mit Steinen angefüllten Wasserkästen aufführen dürfen. Man gebrauche sich nun dergleichen Bauart so, daß man ganze Strecken des schwachen Ufers anstatt der Schlächte mit dergleichen so zusamengefügten hölzernen Wänden, als die Wände eines Wasserkastens sind, bedecke, und den Raum zwischen der Wand, und dem Ufer mit sogenannten Schotter, oder kleinen Steinen ohne Erde anfülle, so wird die Ausgüßung weder bey der wirklichen Ueberschwemmung, noch bey dem Abzuge, oder Fallen des Wassers mehr schaden, als ein Dieb, der nichts hat rauben können, und doch die Oeffnung hinterlassen hat, wo er eingeschlossen war, zugleich aber den Vortheil entdecket, daß man sich vor künftigem Anfalle destomehr versichern könne.

11. §.

11. §.

Ich muß von meinem Vorschlage mehrere Rechenschaft geben. Stellen wir uns ein Ufer vor, das anstatt der gewöhnlichen Schlächte, eine so hölzerne Mauer, als eines Wasserkastens, vor sich hat: was wird hier auch die größte Ueberschwemmung für eine Veränderung machen? Entweder muß sie uns schaden 1. mit Uebergüßung, oder 2. mit Gewalt des reißenden Stromms, oder 3. mit dem so schädlichen Untergraben. Die Uebergüßung kann uns, wenn wir wollen, wenig schaden, aber viel nutzen (§. 4. 5.) und muß sie uns auch zufälliger Weise schaden, weil sie zu ungelegener Zeit kömmt, so ist doch der Schaden nicht so groß, als wenn wir ganze Strecken von unsrer baubaren Erde verlieren. Die Gewalt, ich verstehe unter diesem Worte Stoß, oder Druck, diese Gewalt, wenn nur das Wasser allein stößt, oder drückt, wird einem solchen Widerstande in so kurzer Zeit, als unsere Ueberschwemmungen dauren, wohl wenig abgewinnen können. All anderer Druck und Stösse sind zufällig, und können mittels Vorsehung, wovon ich eine Weise noch in dieser Abhandlung vorschlagen werde, (§. 14.) meistentheils verhindert werden. Das Wasser allein kann an dieser Art von Schlächten nichts, als aufwallen, und vorbeyfliessen, ohne ein Stückchen davon abzustossen. Aber wird selbes nicht wenigst an den Ecken unsers Wasserkastens anstossen, aufwallen, und also untergraben? (§. 7. — 9.) es wird anstossen, es wird aufwallen, es wird auch untergraben; aber wie wenig, da selbes keine Erde, keinen getrennten Boden, wo es eingreiffen könnte, vor sich hat? (§. 9.) Das durch die Wände selbst eindringende Wasser findet keine Erde, die es mit sich fortschwemmen konnte, (§. 10.) und Steine können nicht folgen, weil die Ritzen zu enge sind. Das an dem Fuß dieses Kastens aufwallende Wasser wird nur so wenig heben, daß die nachsinkenden Steinschutte alles gleich wieder anfüllen kann, mit einer Leerung des Kastens, die oben mit neuer Anschütt leicht zuerseßen ist. Von der auf diese Art erbauten Wehre, kann nicht das mindeste getrennt werden: sie wird immer stehen bleiben, wenn auch die ganze Füllung nachsinken sollte. Was ist nun leichter, eine ganz neue Wehre zu erbauen, oder einen solchen Wasserkasten nach der Ueberschwemmung mit neuen Schotter auszufüllen? und zwar nur nach einem, oder dem anderen Wassergusse; weil endlich das Wasser selbst mit wiederhollter Anschüttung sein Flußbett an dergleichen Wände anlegen wird.

12. §.

Nun kann man freylich einen solchen Wasserkasten nicht wohlfeil erkaufen. Allein wie theuer kömmt uns wohl der Bau einer zwey, bis dreymal immer kostbarer aufgeführten Schlächte, ohne auch den Schaden der fortgerissenen Stücke unsers Ufers anzurechnen? Doch, lassen wir auch solche kostbare, aber niemals genug zubezahlende Vorsorge reichen Landwirthen, oder gar Landesherren über. Es giebt noch wohlfeilere Mittel zu unserer Versicherung, die nichts, als die Geduld in theuren Werth setzet; weil wir hier nicht selbst arbeiten, sondern nur Handlanger der Natur machen, die, wenn man ihr folget, sichere und schöne Werke darstellet, auf ihren Wegen aber ungemein langsam fortschreitet. Setzen wir vor das Ufer, an dem sich der überfließende Stromm mit dem ganzen Leben seiner Kraft reibet, einen Aufenthalt, der selbem immer soviel umsonst abnimmt, als uns zu einer ganz natürlichen Schlächte, oder Wehre vonnöthen ist. Es ist möglich; denn, so räuberisch, als das Wasser insgemein, forderst das Flußwasser ist, so hat es doch den Ruhm noch nicht verlohren, daß es zwar raube, von dem Geraubten aber nichts für sich behalte, sondern alles wieder gebe, was es genommen; nur daß es nicht an dem Ort geschieht, wo der der Raub geschehen ist: sondern da, wo es selben zwischen einer Lage grosser Steine muß liegen lassen; denn da wird es seinen Raub solange ablegen, bis es sich selbst ein neues Flußbett machet, welches selbes niemals aufheben, wohl aber immer bedecken wird. Man untersuche nur den Grund unserer Flüße: meistentheils wird er aus grossen, mit Sand, und Schotter ausgefüllten Steinlagen bestehen.

13. §.

Eine solche Steinlage nun vor unser Ufer zu setzen, kostet freylich viele Mühe, und Fleiß, aber wenig Geld. Ich will hierzu nur einen und den anderen Vorschlag machen: und ich zweifle nicht, es werden jene, die nach solchem ohne Vorurtheil arbeiten, und nachdenken wollen, noch weit tauglichere Mittel zu ihrer Absicht entdecken. Man nehme ein grosses, etwann wegen Alter sonst unbrauchbares Schiff, so wie man zu unseren Salz- und Getraidzügen gebraucht: man lege solches bey seichtem Wasser an das Ufer, das sich vor Ueberschwemmungen fürchten muß, nach einem zu unserm Vorhaben tauglichen Winkel: man beschwere solches Schiff mit irregularen grossen Steinen, so, daß das Wasser bey der Ergüßung Platz finde, seinen Raub abzusetzen: man lege dergleichen Steine, mit Stöcken von gefällten grossen Bäumen vermischt, um solch eingesenktes Schiff herum, und man wird auch schon nach einem Jahre sehen, was das Wasser selbst beytrage, eine natürlich dauerhafte Wehre vor das Ufer zu setzen. Die Kosten noch mehr zu erspa-ren, wird erklecklich seyn, vor das Ufer nur eine grosse Lage der mit vielen verwirrten Wurzeln versehenen Stöcken, von abgehauenen Eich- oder anderen grossen Bäumen anzulegen, und solche mit grossen, zum Theil mit eisernen Klammen zusammengehefteten Steinen zu versetzen, und endlich alles dem Wasser zu überlassen. Die Zeit wird die Mühe wohl belohnen, und diese wird theils selbst nicht so beschwerlich ausfallen, theils noch vortheilhaftere Unternehmungen an die Hand geben, wenn wir nur die Hand ohne Vorurtheile an das Werk legen. Ueberdas wird es auch nicht schaden, das noch übrige Ufer nebst dieser Vorsorge auch auf andere Art standhaft zu machen, und mit gesteckten Weiden, oder Felbern, und andern dergleichen die Erde anhaltenden Gewächsen zu versehen: die uns auch, wann wir sie so fleißig ziehen, daß wir sie zu lebendigen Zäunen einflechten können, vor einem schädlichen An- und Ablauf der Fluth desto sicherer, und bequemer dienen werden. (§. 3.)

14. §.

Mit solcher Vorsicht haben wir freylich grosse Hoffnung, den natürlichen Anfall unserer gewöhnlichen Ueberschwemmungen unschädlich, ja wohl gar mit der Zeit nützlich zu machen, (§. 12. 13.) aber es ist hiemit die Furcht vor dem zufälligen Schaden noch nicht gehoben; weil wir nicht wissen, was der in Wuth gesetzte Fluß für Gegenstände finden und zum größten Nachtheile auf uns zustossen könnte. Allein, laßt uns nachdenken, was für schadhafte Werkzeuge ein sich ergießender Fluß antreffen möchte, so werden wir solche bald kennen lernen, und erfahren, daß selbe nur grosse Raubstücke sind, die der Räuber nicht ins Kleine bringen kann: als etwann untergrabene, und nach dem Falle fortgerissene bejahrte Bäume oder hölzerne Häuser, und bey der Eisfluth schwere, und grosse Stücke des sogenannten Grundeises; denn diese sind es, die mit einer so grossen Schwere als die Geschwindigkeit eines grossen reißenden Flußes ist, an die Ecken der Dämme, und Jöcher der Brücken angetrieben werden, oder, wo sie sich setzen, selbst

ihren

ihren Führer trotzen, und dem Stromme anweisen, wohin er mit seiner Gewalt zum heftigsten stossen soll. Welch fürchterliche Waffen! aber wie leicht kann man diese unserm wüthenden Freunde aus den Händen reißen? arme Fischer, und dem Fluß nahe arme Landleute wagen sich auch mit Lebensgefahr dem Räuber die Beute abzujagen, oder das bey einer Ergüssung hergeschwemmte Bauholz aufzufangen: und weisen uns zugleich, daß man einem wüthenden Fluße seine zufälliger Weise in die Hände gespielten Waffen auf die leichteste Weise abnehmen könne.

15. §.

Es kömmt also darauf an, daß man 1. wo das Wasser nicht zu hoch ist, forderst bey den Brücken eine Vorkehrung mache, daß sich von dem hergeschwemmten nichts anlege, sondern alles, was man sonst nicht auffangen kann, ohne Schaden durch die Brücke durchfließe. 2. Daß man, wenn das Wasser selbst die Brücke übersteigt, jene fürchterlichen Mauerbrecher, die so erstaunliche grosse Lasten hergeschwemmter ganzer, oder gefällter Bäume, und dergleichen von der Brücke, oder wo sie sich immer an das Ufer schädlich anlegen, oder Schaden drohen, noch ehe sie stossen, oder sich setzen, weg und auf die Seite leite, und ganz, oder zerstückt an das Land ziehe. Mit solcher Vorsorge werden wir dann nichts als Wasser zu fürchten haben, dessen einzelne Gewalt wir so gut kennen, (§. 11.) und so leicht unkräftig zu machen wissen. (§. 10.—13.) Wer wird aber solche Vorsorge machen, betreiben, und ausführen? Wenn sie nicht eine landesherrliche Verordnung macht, betreibet und ausführt, wird wohl nichts, oder nur was weniges, und dieses nur zufälliger Weise geschehen.

16. §.

Nun hat dann unser Freund ausgewüthet: er blickt uns wiederum mit befriedigter Mine entgegen. Unser Fluß geht über

Aa a ein

ein schmales Flußbett in einer reizenden Stille. Aber ist uns hiemit geholfen? welch schmerzlichen Anblick bieten uns unsre abgerissenen oder überschlämmten Ufer, unsre untergrabenen und ausgeschwemmten Wehren, und Schlächte dar? Selbst das ganz veränderte Rinnsaal unsers Flußes macht es uns nicht wünschen, daß er seinen alten Lauf hätte behalten mögen? aber laßt uns nur auch an dem Ende nicht vergessen, daß wir mit einem wahren Freunde zu thun haben, der gewiß jederzeit fertig stehet, den Schaden zu ersetzen, wenn man ihm nur hierzu Hülfe, und Leitung giebet. Vor allem wird er (welches eben, alles in vorigen Stand zu setzen, das Vortreflichste und Vorzüglichste ist) das vorige Flußbett gar gern annehmen, wenn man ihm nur hülft, daß er solches suchen könne. Hier verlange ich freylich was grosses, was ungewöhnliches, und vieleicht gar was ungerechtes. Es ist wahr, einen grossen Fluß, nachdem er ausgetretten, wieder an das vorige Ufer zu bringen, ist was ungewöhnliches; aber, daß ein Bach, nachdem er ausgerissen, etwann von einem Müller gezwungen werde, das alte Rinnsaal zu nehmen, ist was gar gewöhnliches, weil nämlich dieser auf thätige Mittel denket, wo andere sich nur mit Klagen aufhalten, daß sie der Stromm verlassen, nicht aber gedenken, viel minder sich bemühen, ob, und wie sie solchen wieder zu sich leiten möchten.

17. §.

Man muthmasse hier nicht, als ob ich nicht einsehe, welch ein Verhältniß die Mühe, einen ellenbreiten Bach in seinen alten Graben zu schließen, zu jener habe, einen etlich Ruthen breiten schiffreichen Fluß an das verlassene Ufer zu legen. Ich weis also auch, daß die Besorgung dieses letztern nur von der Hand des Landsfürsten kann bestritten werden. Aber welch ein würdiges Unternehmen für einen Landesherrn, und Vater seines Volkes wäre re wohl dieses? Die Herren des Meeres werden in der Geschichte unsterblich, wenn sie einen Meerhafen von dem Schlamme räumen: und werden es die Herren der Flüße minder werden, wenn sie den Lauf ihrer Gewässer zum Nutzen ihrer Unterthanen in seiner alten Bequemlichkeit erhalten? das Volk wird die Gnade seines Fürsten anrühmen, wenn er ihm den erlittenen Schaden mit einem Nachlasse der Abgaben erleichtert; es wird ihn aber Vater nennen, wenn er jedem seinen von dem Wasser entzogenen Grund wieder giebet. Es wäre also mein Gedanken, daß man nach der Ueberschwemmung, zur Zeit, da keine neue Ergüßung zu befürchten ist, als etwann im späten Herbste, den Flüß, wo er ausgerissen, in das alte Flußbett zu bringen suchen soll. Solches in das Werk zu setzen, darf ich keinen Vorschlag machen, wo es an erfahrnen Feldmessern keinen Mangel giebt; ich darf aber ein Unternehmen empfehlen, das einem Kaufmannsschiffe nicht nur die alte, sondern immer mehrere Sicherheit, und Bequemlichkeit: einem an dem Ufer wohnenden Landmann den alten Grund (der, sey er auch noch so überschüttet, doch noch zum Nutzen gerichtet werden kann) und endlich dem Landsfürsten die gründlichste Ehre, und aufrichtigste Liebe zum Gewinnste darbieten wird.

18. §.

Ich schreibe vielleicht zu viel von dem Vortheile der Handelschaft; was liegt einem Kaufmanne daran, ob er auf dieser, oder auf jener Seite des Flußes hinab, oder hinauffahre, wenn er nur sicher fährt, und an dem bestimmten Ufer ausladen kann? Aber wie oft müssen auch die erfahrensten Schiffleute das Erkänntniß des von dem Fluße genommenen neuen Rinnsaals mit der Strandung, wo nicht gar mit der Scheiterung eines reich beladenen Schiffes bezahlen? Ich schreibe also nicht zuviel, weil ich überdas noch vorsehe, man werde zu diesem Unternehmen noch weit mehr Vortheile entdecken, wenn man sichs nicht verdrüssen lassen wird, meinem Gedanken ohne Vorurtheil, und nur nach Erfahrung, und Beobachtung nachzusinnen. Noch dazu hoffe ich, der Stromm selbsten werde, wenn er öfters in den alten Weg geleitet wird, sich ein so tiefes Flußbett bereiten, daß er selbes endlich nach keiner Ueberschwemmung mehr verlassen wird; und endlich zweifle ich nicht, es werden wenigst jene, die an dem Ufer wohnen, sich dieser so gemeinnützigen Arbeit mit fertigem Willen unterziehen.

19. §.

Wir haben also die Möglichkeit, einem ausgetrettenen Flusse seine vorige Bahne anzuweisen. Haben wir aber wohl auch das Recht dazu? Ist nicht das justinianische Jus Alluvionis so unvergleichlich, daß man es von dem Meerstrande sogar auf die Ufer der Flüße angewandt hat? Allein darf ich es sagen, daß meines Erachtens der Grund dieses Gesetzes bey unseren Flüßen nur in einem schädlichen Vorurtheile bestehe? Man nehme sich die Mühe, die Vortheile zu schätzen, die ein ausgetrettener Stromm jenen, deren Ufer er verläßt, zuspielen kann: so werden wir zwar einen entblößten etlich Ruthen langen Strich Landes sehen, der aber 1. nur eine Stein- oder Schotterlage zu nennen ist, der 2. zum Nutzen zu bringen die erfahrensten Ackersleute schrecket: forderst 3. da man immer befürchten muß, bey einer neuen Ueberschwemmung wieder unter Wasser gesetzt zu werden. Welch ein Vortheil! welch ein Recht! beyde, nämlich Vortheil und Recht, in Ueberlegung genommen, was ist zuträglicher, dem alten Besitzer seinen vorigen Grund (sey er auch noch so verderbt, oder dessen Lage an der Höhe oder Tiefe noch so verändert,) nachdem er ihn schon für verlohren hielt, wieder zuzustellen, oder einem andern dem Fluß nahen Ackersmanne einen Strich steinigten Sandbodens darzubieten, daß er

solchen

solchen zu einem baubaren Felde machen soll? Jener wird sein Kind, wenn es auch noch so ausgeartet ist, jederzeit zur Verbesserung gerne aufnehmen: dieser wird einen fremden, so unartigen Züchtling, wenn er ihm auch geschenkt wird, mit schielen Augen ansehen. Das Glück für unser Vaterland ist, daß unser Durchleuchtigste Maximilian bey seiner Vollmacht, nicht das Joch, sondern den Geist der Gesetze kennet.

20. §.

Ich schreibe im Eifer. Allein, wer sollte sich nicht über sich erheben, wenn seine patriotischen Gedanken den Vortreflichkeiten des besten Fürsten sich näheren därfen? Sie kennen nun hochansehnliche erlauchte Mitglieder meine **Gedanken, wie dem fast jährlichen, von Austrettung, und Ueberschwemmung unserer namhaften Flüße, verursachten Schaden nach den Naturgesetzen des Wassers zu steuern sey?** daß man nämlich 1. vor der Ergüßung Vorkehrung mache, daß der anschwellende Fluß nicht reiße, sondern sich ohne Schaden sanft ausgießen könne: daß man 2. dem wirklich reißenden Stromme keine Schlächten, oder Wehren entgegen stelle, die das Wasser mit Untergraben untauglich machen könnte: daß man 3. nach der Ueberschwemmung, um alles in den alten Stand zu setzen, vor allem trachte, den etwann ausgetrettenen Fluß in das alte Rinnsaal zu bringen: um so unsern besten, aber gähling aufgebrachten Freund vor der Wuth zu zerstreuen, bey selber unschädlich, und nach selber wiederum dienstbar zu machen. Dieses sind nun meine Gedanken, die ich als unvollkommen Ihnen zur Ueberlegung, zur Verbesserung, und zur Ausarbeitung vorlege: mich aber begnüge, daß ich meine Pflicht, wenigstens zum Theil, mehrmal erfüllet habe.

Register
der merkwürdigsten Sachen.

Brun=

Register.

klärung

357.