III.
Verwandlung der Brüche.

§. 1.

Man trägt gemeiniglich die Brüche so vor, daß sowohl der Zähler als der Nenner ganze Zahlen sind, weil dieses die eigentliche Absicht der Brüche ist, daß man die Verhältniß des Theils zum Ganzen durch die Verhältniß zwoer ganzer Zahlen vorstelle. Der Nenner zeigt an, in wie viele Theile man das Ganze theilen müsse, und der Zähler drücket die Anzahl solcher Theile aus, die man zu nehmen hat. Indessen kann es auch Fälle geben, wo der Nenner oder der Zähler, oder beyde zugleich ebenfalls wiederum Brüche haben, und solche kann man sehr gut gebrauchen, weil sie zu besondern Absichten dienen, denen zu gefallen man auch öfters ganz reine Brüche in solche verwandelt, deren Nenner selbst wiederum mit Brüchen behaftet sind.

§. 2.

Nun kommen zwar die Regeln, so man bey solchen Verwandlungen zu beobachten hat, bereits in verschiedenen Schriften der Mathematicker vor. Da sie aber theils noch häufiger und selbst in den gemeinen Anweisungen zur Rechen-

Rechenkunst vorkommen solten, theils auch verschiedenes dabey nachzuholen ist; so werde ich den meisten Lesern einen Gefallen erweisen, wenn ich mich hier sowohl bey den Regeln als bey deren Gebrauch ein wenig aufhalte.

§. 3.

Man habe z. E. 3 durch $5\frac{1}{7}$ zu theilen, so kann dieses in Form eines Bruches geschrieben werden, welcher

$$\frac{3}{5\frac{1}{7}} \text{ oder } \frac{3}{5+\frac{1}{7}}$$

seyn wird. Dieser Bruch läßt sich nun leicht in einen reinen Bruch verwandeln, wenn man Nenner und Zähler mit 7 multiplicirt. Denn so ist $7.\,3 = 21$, und $7.\,5\frac{1}{7} = 36$, folglich

$$\frac{3}{5+\frac{1}{7}} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

§. 4.

Hinwiederum wenn man z. E. $\frac{7}{30}$ vor sich hat, so kann man Zähler und Nenner durch 7 theilen, und da erhält man

$$\frac{7}{30} = \frac{1}{4+\frac{2}{7}}.$$

welches anzeigt, daß $\frac{7}{30}$ etwas kleiner als $\frac{1}{4}$ sey. Nun läßt sich $\frac{2}{7}$, wenn Zähler und Nenner durch 2 getheilt werden, ebenfalls in

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{2+\frac{1}{2}}$$

verwandeln, und so erhält man

$$\frac{7}{30} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

welches anzeigt, daß $\frac{7}{30}$ etwas weniges grösser als $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ oder $\frac{2}{9}$ ist. (§. 3.)

§. 5.

Man habe nun z. E. $\frac{216}{1147}$, so theilt man erstlich Zähler und Nenner durch 216, und dieses giebt

$$\frac{216}{1174} = \frac{1}{5 + \frac{67}{216}}$$

auf eine ähnliche Art erhält man

$$\frac{67}{216} = \frac{1}{3 + \frac{15}{67}} = \frac{1}{3 + a}$$

$$a = \frac{15}{67} = \frac{1}{4 + \frac{7}{15}} = \frac{1}{4 + b}$$

$$b = \frac{7}{15} = \frac{1}{2 + \frac{1}{7}} = \frac{1}{2 + c}$$

Da man nun nach dieser vierten Theilung auf $\frac{1}{7}$ verfällt, so ist man mit der Auflösung des Bruchs fertig, und man findet, wenn man der Ordnung nach substituirt,

$$\frac{216}{1147} = \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{7}}}}}$$

Dieses will nun sagen, der Bruch $\frac{216}{1147}$ sey etwas kleiner als $\frac{1}{5}$, etwas weniges grösser als $\frac{1}{5\frac{1}{3}} = \frac{3}{16}$, etwas noch wenigeres kleiner als

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{5+\frac{4}{13}} = \frac{13}{69}$$

etwas noch wenigeres grösser als

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\frac{1}{2}}}} = \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\frac{2}{9}}} = \frac{1}{5+\frac{9}{29}} = \frac{29}{154}$$

und genaue gleich $\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{7}}}}}$.

§. 6.

Hiebey kommen nun zwo Fragen vor: Einmal, wie man die ganze Rechnung nach einer gewissen Ordnung einrichten, und die Brüche $\frac{1}{5}, \frac{3}{16}, \frac{13}{69}, \frac{29}{154}$, als welche dem fürgegebenen Bruche $\frac{216}{1147}$ immer näher kommen, leichte finden könne? Sodann wie man eben so leichte finden könne, um wie viel sie von dem fürgegebenen Bruche $\frac{216}{1147}$ verschieden sind, damit man allenfalls des Unterschiedes Rechnung tragen könne?

§. 7.

Man setze erstlich

$$\frac{216}{1147} = \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+a}}$$

wobey $a = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{7}}}$

ist, so darf man nur Zähler und Nenner mit $3+a$ multipliciren, und so erhält man

$$\frac{216}{1147} = \frac{3+a}{16+5a}.$$

Ferner

Ferner setze man $a = \frac{1}{4+b}$

wobey folglich $b = \frac{1}{2+\frac{1}{7}}$ ist, so erhält man

$$\frac{216}{1147} = \frac{3+\frac{1}{4+b}}{16+\frac{5}{4+b}}$$

und folglich, wenn Nenner und Zähler mit $4+b$ multiplicirt wird

$$\frac{216}{1147} = \frac{13+3b}{69+16b}.$$

Setzt man nun wiederum $b = \frac{1}{2+c}$

so ist $c = \frac{1}{7}$, und man erhält

$$\frac{216}{1147} = \frac{13+\frac{3}{2+c}}{69+\frac{16}{2+c}} = \frac{29+13c}{154+69c}.$$

Endlich da $c = \frac{1}{7}$ ist, so wird

$$\frac{216}{1147} = \frac{29+\frac{13}{7}}{154+\frac{69}{7}} = \frac{216}{1147}$$

welches wiederum den fürgegebenen Bruch giebt.

§. 8.

§. 8.

Dieses Verfahren zeiget nun an, wie die Brüche $\frac{1}{5}, \frac{3}{16}, \frac{13}{69}, \frac{29}{154}$ aus den Theilern 5, 3, 4, 2, 7 entspringen. Denn so ist

$1.\ 3 = 3$	$5 \cdot 3 + 1 = 16$
$3 \cdot 4 + 1 = 13$	$16 \cdot 4 + 3 = 69$
$13 \cdot 2 + 3 = 29$	$69 \cdot 2 + 16 = 154$
$29 \cdot 7 + 13 = 216$	$154 \cdot 7 + 69 = 1147.$

Man darf nemlich in den gefundenen Brüchen

$$\frac{3+a}{16+5a}, \frac{13+3b}{69+16b}, \frac{29+13c}{154+69c}$$

nur $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{7}$ setzen, um die absolute Zahlen des folgenden Bruches zu erhalten. Denn so ist

$$\frac{3+\frac{1}{4}}{16+\frac{5}{4}} = \frac{13}{69}, \text{ und } \frac{13+\frac{2}{3}}{69+\frac{16}{2}} = \frac{29}{154}$$

$$\text{und } \frac{29+\frac{13}{7}}{154+\frac{69}{7}} = \frac{216}{1147}.$$

§. 9.

Wenn wir nun die ganze Rechnung in ihre einfachste Ordnung bringen, so läßt sie sich folgender gestalt vorstellen. Erstlich dividiret man jeden Theiler durch seinen Ueberrest. Demnach nun bey eben dem Beyspiele zu bleiben

216

216	1147	5			
	1080				
	67	216	3		
		201			
		15	67	4	
			60		
			7	15	2
				14	
				1	7 | 7.
					7
					0

Mit diesen Theilern, Ueberresten und Quotienten macht man sodann folgende Figur

1147		1	0
216	5	0	1
67	3	1	5
15	4	3	16
7	2	13	69
1	7	29	154
		216	1147

Man schreibt nemlich in der ersten Columne die Theiler und Ueberreste, in der zweyten die Quotienten, in der dritten zeichnet man 1, 0, und in der vierten 0, 1. Die übrigen Zahlen dieser beyden Columnen ergeben sich sodann, indem man

5. $0 + 1 = 1$	und	5. $1 + 0 = 5$
3. $1 + 0 = 3$		3. $5 + 1 = 16$
4. $3 + 1 = 13$		4. $16 + 5 = 69$
2. $13 + 3 = 29$		2. $69 + 16 = 154$
7. $29 + 13 = 216$		7. $154 + 69 = 1147$

macht,

macht, das will sagen, jede Zahl der dritten und vierten Columne mit dem nebenstehenden Quotienten der zweyten Columne multiplicirt, und zu dem Producte die nächst über derselben stehenden Zahl addirt. Nun geben die Zahlen der beyden letzten Columnen die Brüche

$$\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{3}{16}, \frac{13}{69}, \frac{29}{154}, \frac{216}{1147},$$

welche wechselsweise grösser und kleiner sind als der letzte, wovon aber je der folgende weniger verschieden ist.

§ 10.

Das bisher gesagte, kömmt bereits in mehreren Schriften der Mathematicker vor, und dient überhaupt dahin, daß man einen durch grössere Zahlen ausgedrückten Bruch, der sich nicht genau auf kleinere Zahlen bringen läßt, dergestalt auf kleinere Zahlen bringe, daß er durch keine kleinere genauer getroffen wird. Da man auf diese Art mehrentheils eine ganze Reyhe von Brüchen findet, wovon je der folgende genauer, dabey aber durch grössere Zahlen ausgedrückt ist; so behält man dabey die Wahl, zu bestimmen, ob man sich mit einem kleinern begnügen könne, oder einen durch grössere Zahlen ausgedruckten dafür nehmen wolte. In physischen und practischen Dingen fällt dieses desto bequemer, weil man da ohnehin an keine geometrische Schärfe gedencken kann.

§. 11.

§. 11.

Man ist aber, so viel ich weiß, bey der Erfindung solcher Brüche stehen geblieben, ohne zu sehen, ob nicht durch eben das Verfahren, die Genauigkeit eines jeden bestimmt werden könnte? Die natürlichste Probe, die sich hierüber anstellen läßt, und die uns zugleich auf die Spuhr führen wird, ist, daß man nach der gewöhnlichen Art die Brüche zu subtrahiren, diese Subtraction vornehme. Denn so findet man

$$\frac{1}{5} - \frac{216}{1147} = \frac{1147-1080}{5.1147} = \frac{67}{5.1147}$$

$$\frac{216}{1147} - \frac{3}{16} = \frac{15}{16.1147}$$

$$\frac{13}{69} - \frac{216}{1147} = \frac{7}{69.1147}$$

$$\frac{216}{1147} - \frac{29}{154} = \frac{1}{154.1147}.$$

Und hieraus sieht man, daß die Zähler dieser Brüche 67, 15, 7, 1 der Ordnung nach die Ueberreste der ersten Columne, die Nenner aber das Product aus dem Nenner eines jeden Bruches und dem Nenner 1147 des fürgegebenen Bruches sind. Auf diese Art wird demnach der fürgegebene Bruch in zween aufgelöst, und es ist

$$\frac{216}{1147} = \frac{1}{5} - \frac{76}{5.1147} = \frac{3}{16} + \frac{15}{16.1147} = \frac{13}{69} - \frac{7}{69.1147}$$

$$= \frac{29}{153} + \frac{1}{154.1147} = \frac{216}{1147} + 0.$$

§. 12.

§. 12.

Um nun überhaupt einzusehen, wie diese Ueberreste der ersten Columne hier zum Vorschein kommen, dörfen wir nur anstatt die Brüche $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{13}{69}$, $\frac{29}{154}$ von dem Bruche $\frac{216}{1147}$ abzuziehen, dieselben von den vorhin (§. 7.) gefundenen Brüchen

$$\frac{3+a}{16+5a},\quad \frac{13+3b}{69+16b},\quad \frac{29+13c}{154+69c}$$

abziehen. Denn diese stellen sämtlich den Bruch $\frac{216}{1147}$ vor, und es ist aus dem (§. 5.) zu sehen, daß die Buchstaben a, b, c durch die Ueberreste 67, 15, 7 bestimmt werden. Auf diese Art haben wir demnach

$$+\frac{3+a}{16+5a}-\frac{3}{16}=\frac{a}{16(16+5a)}=\frac{15:67}{16(16+5\cdot\frac{15}{67})}$$

$$=\frac{15}{16.\,1147}$$

$$-\frac{13+3b}{69+16b}+\frac{13}{69}=\frac{b}{69(69+16b)}=\frac{7:16}{69(69+16\cdot\frac{7}{16})}$$

$$=\frac{7}{69.\,1147}$$

$$\frac{29+13c}{154+69c}-\frac{29}{154}=\frac{c}{154\,(154+69c)}$$

$$=\frac{1:7}{154\,(154+\frac{69}{7})}=\frac{1}{154\cdot 1147.}$$

Und hieraus sieht man, wie die Ueberreste der ersten Columne zu Nennern werden.

§. 13.

§. 13.

Wenn man die Brüche

$$\frac{1}{5},\ \frac{3}{16},\ \frac{13}{69},\ \frac{29}{154},\ \frac{216}{1147}$$

umkehrt, und statt derselben

$$\frac{5}{1},\ \frac{16}{3},\ \frac{69}{13},\ \frac{154}{29},\ \frac{1147}{216}$$

nimmt, so findet man auf eine ganz ähnliche Art

$$\frac{1147}{216} = \frac{5}{1} + \frac{67}{1.\,216} = \frac{16}{3} - \frac{15}{3.\,216} = \frac{69}{13} + \frac{7}{13.\,260}$$

$$= \frac{154}{29} - \frac{1}{29.\,216} = \frac{1147}{216} + 0,$$ wo ebenfalls die Ueberreste 67, 15, 7, 1 als Zähler erscheinen.

§. 14.

Wir haben bisher das ganze Verfahren, in Form eines Beyspieles vorgetragen, doch so, daß sich der Grund desselben zugleich mit einsehen läßt. Berechnet man auf diese Art noch mehrere Beyspiele, so wird man leicht finden, daß man bald mehr, bald minder Divisionen vorzunehmen hat, bis der Bruch ganz aufgelöst ist. Wir wollen, um den Unterschied zu zeigen, die Figur von zwey andern Beyspielen herstellen, welche die Brüche

$$\frac{61}{97} \text{ und } \frac{231}{257}$$

betreffen. Es ist folglich

97		1	0
61	1 —	0	1
36	1 —	1	1
25	1 —	1	2
11	2 —	2	3
3	3 —	5	8
2	1 —	17	27
1	2	22	35
—		61	97

257		1	0
231	1 —	0	1
26	8 —	1	1
23	1 —	8	9
3	7 —	9	10
2	1 —	71	79
1	2 —	80	89
—		231	257

und daher für das erste Beyspiel

$$\frac{61}{97}=\frac{1}{1}-\frac{36}{1\cdot 97}=\frac{1}{2}+\frac{25}{2\cdot 97}=\frac{2}{3}-\frac{11}{3\cdot 97}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8\cdot 97}=\frac{17}{27}-\frac{2}{27\cdot 97}=\frac{22}{35}+\frac{1}{35\cdot 97}$$

$$=\frac{61}{97}-0,$$

oder umgekehrt

$$\frac{97}{61}=\frac{1}{1}+\frac{36}{1.61}=\frac{2}{1}-\frac{25}{1.61}=\frac{3}{2}+\frac{11}{2.61}$$

$$=\frac{8}{5}-\frac{3}{5\cdot 61}=\frac{27}{17}+\frac{2}{17.61}=\frac{35}{22}-\frac{1}{22.61}$$

$$=\frac{97}{61}+0.$$

Für das andere Beyspiel

$$\frac{231}{257}=\frac{1}{1}-\frac{26}{1\cdot 257}=\frac{8}{9}+\frac{23}{9\cdot 257}=\frac{9}{10}-\frac{3}{10.257}$$

$$=\frac{71}{79}+\frac{2}{79\cdot 257}=\frac{80}{89}-\frac{1}{89\cdot 259}=\frac{231}{257}+0,$$

oder umgekehrt

$\frac{257}{231}$

$$\frac{257}{231} = \frac{1}{1} + \frac{26}{1.231} = \frac{9}{8} - \frac{23}{8.231} = \frac{10}{9} + \frac{3}{9.231}$$
$$= \frac{79}{71} - \frac{2}{71.257} = \frac{89}{80} + \frac{1}{80.231} = \frac{257}{231} - 0.$$

§. 15.

Es ist aber eben diese immer verschiedene Anzahl der vorzunehmenden Divisionen, welche den algemeinen Beweis schwerer macht, weil man dabey genöthiget wird, Glied für Glied zu beweisen, und die Anzahl der Divisionen unbestimmt lassen muß. Wir werden diesen Beweis folgendergestalt vortragen: Es sey die allgemeine Figur

A		1	0
B	a ———	0	1
C	b ———	1	a
D	c ———	b	ab + 1
E	d ———	bc + 1	abc + c + a
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.
- -	- - - -	- -	- - - - -
O	———	x	v
P	q	y	w
Q		qy + x	qw + v

so ist überhaupt $Pq + Q = O$, weil O durch P dividirt q giebt, und Q übrig läßt. Nun ist zu beweisen, daß, was von den Brüchen $\frac{x}{v}$, $\frac{y}{w}$ gilt, auch von dem folgenden und daraus formirten Bruche $\frac{qy + x}{qw + v}$ gelte, oder, daß wenn erstere beyde die Gleichungen

$$+\frac{x}{v}-\frac{B}{A}=\frac{\pm O}{Av}$$

$$-\frac{y}{w}+\frac{B}{A}=\frac{\pm P}{Aw}$$

geben, der dritte auf eben die Art die Gleichung

$$+\frac{qy+x}{qw+v}-\frac{B}{A}=\frac{\pm Q}{A(qw+v)}$$

geben werden. Um dieses zu beweisen, haben wir weiter nichts zu thun, als die in diesen Gleichungen angezeigte Subtractionen vorzunehmen. Denn so verwandeln sich die beyden erstern in

$$\frac{Ax-Bv}{vA}=\frac{\pm O}{Av}$$

$$-\frac{Ay+Bw}{wA}=\frac{\pm P}{Aw}$$

Und hieraus folgt, daß

$$\pm O=+Ax-Bv$$

$$\mp P=-Ay+Bw$$

ist. Nun aber ist

$$\pm Q=O-Pq$$

demnach, wenn man die für O und P gefundene Werthe setzt,

$$\pm Q=Ax-Bv+Ayq-Bwq.$$

Eben dieses folgt aber auch aus der dritten Gleichung

$$\frac{qy+x}{qw+v}-\frac{B}{A}=\frac{\pm Q}{A(qw+v)}.$$

Denn

Denn wird die Subtraction vorgenommen, so erhält man

$$\frac{qyA+Ax-qwB-vB}{A(qw+v)}=\frac{\pm Q}{A(qw+v)}$$

demnach, mit Weglassung der Nenner

$$\pm Q = Ax - Bv + qyA - qwB,$$

welches eben die Gleichung ist, die aus denen beyden erstern folgte, und demnach das, was wir zu beweisen hatten, an Tag legt. Wir haben demnach nur noch zu zeigen, daß diese beyden Gleichungen von den 2 ersten Gliedern der Figur

$$\begin{array}{c|lr|c} A & \overline{\qquad\qquad} & \overline{\quad} & \overline{\quad} \\ \overline{B} & a \text{———} & 0 & 1 \\ C & b \text{———} & 1 & a \end{array}$$

gelten, denn so werden sie auch von dem dritten, demnach von dem vierten, und jeden folgenden wahr seyn. Zu diesem Ende haben wir nur

$$\begin{array}{l|l|l|l} P=B & q=a & x=0 & v=1 \\ Q=C & & y=1 & w=a \end{array}$$

zu setzen, so werden die Gleichungen

$$\pm O = +Ax - Bv$$
$$\pm P = -Ay + Bw$$

in folgende

$$\pm B = +A.0 - B.1 = -B$$
$$\pm C = -A.1 + B.a$$

verwandelt. Erstere ist für sich klar, letztere wird dadurch als richtig erkannt, weil A durch

B dividiret, a giebt, und C übrig läßt, demnach

$$C = A - Ba$$

ist. Wir haben demnach

$$\frac{B}{A} = \frac{0}{1} + \frac{B}{A}$$
$$= \frac{1}{a} - \frac{C}{A(a)}$$
$$= \frac{b}{ab+1} + \frac{D}{A(ab+1)}$$
$$= \frac{bc+1}{abc+c+a} - \frac{E}{A(abc+c+a)}$$
$$= \text{\&c.}$$
$$= \frac{x}{v} \mp \frac{O}{Av}$$
$$= \frac{y}{w} \pm \frac{P}{Aw}$$
$$= \frac{qy+x}{qw+v} \mp \frac{Q}{A(qw+v)}$$

&c.

Nun sind die Zähler B, C, D, E &c. O, P, Q der Ordnung nach kleiner, weil der letzte $= O$ wird; hingegen aber die Nenner A, Aa, A(ab+1) &c. der Ordnung nach grösser, weil a, b, c &c. positiv und ganze Zahlen, demnach entweder $= 1$, und mehrentheils grösser als 1 sind. Da folglich die Brüche $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{Aa}$, $\frac{D}{A(ab+1)}$ &c. sehr merklich kleiner, und zuletzt $= 0$ werden, so sind auch die

Brü-

Brüche $\frac{1}{a}$, $\frac{b}{ab+1}$, $\frac{bc+1}{abc+c+a}$ &c. von dem fürgegebenen $\frac{B}{A}$ der Ordnung nach weniger, und der letzte gar nicht davon verschieden.

§. 16.

Wenn ein Bruch sich in der That durch kleinere Zahlen ausdrücken läßt, so erhält man nach diesem Verfahren nicht nur den verkleinerten Bruch genau, sondern auch noch alle noch kleinere, die von demselben am wenigsten verschieden sind. Man habe z. E. $\frac{189}{301}$, so ist

301		1	0
189	1	0	1
112	1	1	1
77	1	1	2
35	2	2	3
7	5	5	8
		27	43

Demnach ist

$$\frac{189}{301} = \frac{27}{43} = \frac{1}{2} + \frac{77}{2.301} = \frac{2}{3} - \frac{35}{3.301} = \frac{5}{8} + \frac{7}{8.301}$$

$$\text{oder} = \frac{1}{2} + \frac{11}{2.43} = \frac{2}{3} - \frac{5}{3.43} = \frac{5}{8} + \frac{1}{8.43}.$$

§. 17.

Man sieht ferners auch leicht, daß besonders Decimalreyhen auf diese Art in Brüche verwandelt werden können, die sie so genau, als man es verlangt, vorstellen. Doch da man solche Reyhen nicht so unendlich, wie sie sind, in die Rechnung ziehen kann, so nimmt man auch nur so viele Ziffern, als es nöthig ist. Indessen kann man derer, so man wegläßt, dennoch in Rechnung tragen, damit man das Dividiren eben nicht weiter verfolge als es nöthig ist. Und dabey hat man auf zweyerley Umstände zu merken: Einmal findet man früher den Bruch, welcher die Decimalreihe, so weit man sie verlangt, vorstellt. Sodann häuft sich bey dem fortgesetzten Dividiren der Fehler, der aus dem weggelassenen Theile der Decimalreihe entsteht, und dieses kann machen, daß man zuletzt ganz andere Zahlen heraus bringt, als die, so man heraus bringen würde, wenn man die Reihe ganz in die Rechnung ziehen würde. Wir wollen beydes durch ein Beyspiel erläutern. Es sey das Verhältniß der Seite eines Quadrates zu der Diagonale desselben durch Brüche auszudrücken, welche dasselbe sehr genaue, oder beynahe ganz richtig ausdrücken. Nun weiß man, daß, wenn die Seite $= 1$ ist, die Diagonale $= \sqrt{2} = 1,41421355530202722\ldots$ ist. Wir wollen uns hier mit den 7 ersten Decimalzahlen $1,4142135$ begnügen, und den Ueberrest $= a$ setzen; demnach ist

1, 4142135 + a		1	0
1, 0000000	1 ——	0	1
4142135 + a	2 ——	1	1
1715730 — 2 a	2 ——	2	3
710675 + 5 a	2 ——	5	7
294380 — 12 a	2 ——	12	17
121915 + 29 a	2 ——	29	41
50550 — 70 a	2 ——	70	99
20815 + 169 a	2 ——	169	239
8920 — 408 a	2 ——	408	577
2975 + 985 a	2 ——	985	1393
2970 — 2378 a			

Man sieht hieraus, daß der von dem Ueberrest a herrührende Unterschied anfängt beträchtlich groß zu werden, und daß man folglich, ohne mehrere Ziffern mitzunehmen, die Division nicht weiter fortsetzen müsse. Da nun

$$\frac{17}{12} = 1,4166\ldots.$$

$$\frac{41}{29} = 1,41379\ldots.$$

$$\frac{99}{70} = 1,41428\ldots.$$

$$\frac{239}{169} = 1,414207\ldots.$$

$$\frac{577}{408} = 1,414215$$

$$\frac{1393}{985} = 1,4142132$$

ist, so sieht man hieraus, daß, wenn man bey den 7 angenommenen Decimalziffern bleiben will, der letzte Bruch eben so weit reicht, und daher auch aus diesem Grunde das fernere Dividiren überflüßig wird.

§. 18.

Um noch ein Beyspiel anzuführen, welches nicht so regulär ist, wie das erst angebrachte; so setzen wir, der Mond durchlaufe den Thierkreis in 27 T. 7 St. 43 M. 5'', 2''', $58\frac{1}{2}^{\text{IV}}$. Dieses giebt in Decimaltheilen 27, 32158601 Tage. Um nun zu sehen, wie sich diese Zahl zu ganzen Tagen verhalte, so ist

27, 32158601 + a		1	0
1, 00000000	27	— 0	1
32158601 + a	3	— 1	27
3524197 — 3 a	9	— 3	82
440828 + 28 a	7	— 28	765
438401 — 199 a	1	— 199	5437
12427 + 227 a	35	— 227	6202.
3456			

Weiter ist nun die Division nicht fortzusetzen, weil sich der von a herrührende Unterschied zu sehr aufhäufen, und die Quotienten unrichtig machen würde. Nehmen wir demnach den letzten Bruch $\frac{6202}{227}$, so will dieser sagen, daß in 6202 Tagen der Mond 227 mal den Thierkreis durchlaufe, und dieses ist nun sehr genaue. Denn wird 6202 durch 227 getheilt, so findet

man

man 27 T. 7 St. 43 M. 5″. 1‴. 19⁗, welches von der wahren Zeit kaum um $1\frac{2}{5}$ Tertien verschieden ist, und folglich für die 6202 Tage kaum $6\frac{1}{2}$ Secunden Unterschied giebt. Hingegen giebt der Bruch $\frac{765}{28}$ die Zeit von 27 T. 7 St. 42 M. $51\frac{1}{2}$ Sec. welche um $13\frac{2}{5}$ Secunden zu klein ist. Dieser Unterschied ist beträchtlicher als der vorhergehende; indessen ist er für einen Uhrmacher, der den Mondlauf durch Räderwerke vorstellen wolte, unerheblich genug, um so mehr, da der Bruch $\frac{765}{28}$, welcher $= \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17}{4 \cdot 7}$ ist, durch diese schickliche Zerfällung der Zahlen, zu der Eintheilung der Räder sehr bequem ist, und weil man die Uhr erst nach etwann 5 Umlaufszeiten des Mondes um 1 Minute zu verrücken hat.

§. 19.

Man kann auf eine ganz ähnliche Art algebraische Ausdrücke, und besonders unendliche Reihen in Brüche verwandeln, ungeachtet sich dabey nicht immer die Schicklichkeit einfindet, daß solche Brüche dem wahren Werthe geschwinde näher kämen. Ich werde indessen die zwey Beyspiele hersetzen, mit denen ich hierüber eine Probe angestellt habe. Das erste betrift die Logarithmen. Denn da ist $\log.(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \text{rc.}$

Wird

Wird diese Reihe in 1 getheilt, so ist der Quotient $= \frac{1}{z}$, der Ueberrest $= + \frac{1}{2}z - \frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{4}z^3 -$ ꝛc. Theilt man durch diesen die Reihe $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 -$ ꝛc. so ist der Quotient $= 2$, der Ueberrest $= \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{6}z^3 + \frac{3}{20}z^4$ ꝛc. Wird durch diesen zweyten Ueberrest der erste $\frac{1}{2}z - \frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{4}z^3 -$ ꝛc. getheilt, so ist der Quotient $= \frac{3}{z}$, der Ueberrest $= \frac{1}{6}z^2 - \frac{1}{5}z^3 +$ ꝛc. Theilt man durch diesen dritten Ueberrest den zweyten, so ist der Quotient $= 1$, der vierte Ueberrest $= \frac{1}{30}z^3 -$ ꝛc. wodurch man wiederum den dritten theilt, und dadurch $\frac{5}{z}$ zum Quotienten erhält. Fährt man auf diese Art fort, so wird man der Ordnung nach die Quotienten $\frac{1}{z}, 2, \frac{3}{z}, 1, \frac{5}{z}, \frac{2}{3}, \frac{7}{z}$ ꝛc. erhalten, und diese geben sodann

$$\log.(1+z) = \cfrac{1}{1:z + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3:z + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5:z + \cfrac{1}{2:3 + \cfrac{1}{7:z + \cfrac{1}{\text{ꝛc.}}}}}}}}}$$

Es sey z. E. $z = \frac{1}{5}$, so ist

log.

$$\log.\tfrac{6}{5} = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{25 + \cfrac{1}{2:3 + \cfrac{1}{35 + \text{rc.}}}}}}}}$$

Dieses giebt demnach

	1	0
5	0	1
2	1	5
15	2	11
1	31	170
25	33	181
2:3	856	4695
35	$603\frac{2}{3}$	3311
rc.	$21984\frac{1}{3}$	120580

Nun ist

$$1:5 = 0,20\ldots\ldots$$
$$2:11 = 0,1818\ldots\ldots$$
$$31:170 = 0,18235\ldots\ldots$$
$$33:181 = 0,1823204\ldots$$
$$856:4695 = 0,18232161\ldots$$
$$603\tfrac{2}{3}:3311 = 0,1823215544\ldots$$
$$21984\tfrac{1}{3}:120580 = 0,1823215569\ldots$$

Es ist aber $\log.\frac{6}{5} = 0,18232155679395\ldots$ woraus man sieht, daß diese Brüche noch ziemlich geschwinde den wahren Werthe näher kommen. Wenn wir die Theilung mit der

Zahl

Zahl selbst vornehmen, so fällt die Rechnung folgendermassen aus

1 0000000000		1	0
1823215568	5	0	1
883922160	2	1	5
55371248	15	2	11
53353440	1	31	170
2017808	25	33	181
2908240			
2c.			

woraus man sieht, daß der letzte Quotient 25 hätte um 1 grösser seyn können. Läßt man denselben aber so wie er ist, so wird der folgende $= \frac{2}{3}$, und so kommen alle Quotienten heraus, die wir vermittelst der unendlichen Reihe gefunden haben.

§. 20.

Setzt man $z = 1$, in welchem Fall die Reihe selbst sehr wenig convergirt, so erhält man

$$\log. 2 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2:3 + \cfrac{1}{7 + \text{2c.}}}}}}}}$$

und

und dieses giebt

	1	0
1 —	0	1
2 —	1	1
3 —	2	3
1 —	7	10
5 —	9	13
2:3 —	52	75
7 —	$43\frac{2}{3}$	63
2c. —	$357\frac{2}{3}$	516

Nun ist

$$\tfrac{7}{10} = 0,700\ldots\ldots$$
$$\tfrac{9}{13} = 0,6923\ldots\ldots$$
$$\tfrac{52}{75} = 0,6933\ldots\ldots$$
$$\tfrac{131}{189} = 0,69312\ldots\ldots$$
$$\tfrac{1073}{1548} = 0,693152\ldots$$
2c.
$$\log. 2 = 0,693147\ldots$$

Man sieht hieraus, daß auch in diesem Fall die Brüche sich dem wahren Werthe noch merklich geschwinde nähern.

§. 21.

Wenn $z > 1$ ist, so wird die Reihe

$$\log.(1+z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \text{2c.}$$

divergent, und giebt gar keinen Werth, der sich bestimmen liesse. Laßt uns demnach sehen, ob es mit unsern Brüchen besser geht. Es sey

z. E.

z. E. 2 = 2, so haben wir

$$\log.3 = \cfrac{1}{1:2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3:2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5:2 + \cfrac{1}{2:3 + \cfrac{1}{7:2 + \text{rc.}}}}}}}}$$

um hiebey die Brüche zu vermeiden, werden wir die Figur so vorstellen

	12	0		
1:2	0	12	=	0:1
2	12	6	=	2:1
3:2	24	24	=	1:1
1	48	42	=	8:7
5:2	72	66	=	12:11
2:3	228	207	=	76:69
7:2	224	204	=	56:51
rc.	1012	921	=	1012:921

Nun ist

$$8:7 = 1,14\ldots\ldots$$
$$12:11 = 1,0909\ldots$$
$$76:69 = 1,1014\ldots$$
$$56:51 = 1,0980\ldots$$
$$1012:921 = 1,0988\ldots$$

rc.

$$\log.3 = 1,098612\ldots$$

Man

Man sieht demnach, daß die Brüche nicht divergiren, sondern in der That dem wahren Werthe näher kommen, so, daß der letzte kaum um 0, 0002 davon verschieden ist.

§. 22.

Nimmt man für z eine grössere Zahl, so muß man zwar die Rechnung weiter fortsetzen, bis man auf Brüche kömmt, die dem wahren Werthe sehr nahe kommen. Es wird aber immer angehen. Denn die Quotienten, so man wenn die Theilung der Reihe fortgesetzt wird, findet, haben in der Art, wie sie aufeinander folgen, ein sehr einfaches Gesetz. Sie sind nemlich

$$\frac{1}{z}, \frac{2}{1}, \frac{3}{z}, \frac{2}{2}, \frac{5}{z}, \frac{2}{3}, \frac{7}{z}, \frac{2}{4}, \frac{9}{z}, \frac{2}{5}, \frac{11}{z}, \frac{2}{6}, \frac{13}{z} \text{ ꝛc.}$$

wobey folglich die Glieder, so durch z dividirt sind, nach der Ordnung der ungeraden Zahlen fortgehen, und folglich ihr Zähler endlich grösser wird als jede fürgegebene Zahl. Hingegen nehmen zwar die nicht durch z getheilte Glieder $\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}$ ꝛc. immer ab, es hindert dieses aber nicht, daß die dadurch herfürgebrachte Brüche nicht solten dem wahren Werthe näher kommen, als die nächstvorhergehenden; und wie wir aus dem letzten Beyspiele sehen, so vermindern sie das Anwachsen der Zahlen, so die Zähler und Nenner der Brüche sind. Wir haben demnach hiedurch ein Mittel den Werth unendlicher Reihen auch für diejenigen Fälle zu finden, wo die Reihen selbst divergirend werden.

§. 23.

Für die Reihe

$$v = z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 - \tfrac{1}{7}z^7 + \tfrac{1}{9}z^9 - \text{etc.}$$

welche den Bogen eines Circuls durch seine Tangente ausdrücket, findet man nach angestellter Theilung auf eine ganz ähnliche Art

$$v = \cfrac{1}{1:z + \cfrac{1}{3:z + \cfrac{1}{5:4z + \cfrac{1}{28:9z + \cfrac{1}{81:64z + \cfrac{1}{704:225\,z + \text{etc.}}}}}}}$$

Es sey z. E. $z = 1$, in welchem Fall die Reihe fast gar nicht convergirt, so haben wir

$$\text{arc.}\,45^\circ = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5:4 + \cfrac{1}{28:9 + \cfrac{1}{81:64 + \cfrac{1}{704:225 + \text{etc.}}}}}}}$$

folglich, um die Brüche zu vermeiden

	36	0				
1 ———	0	36				
3 ———	36	36				
5:4 ——	108	144	=	3:4	=	0, 75 ……
28:9 —	171	216	=	19:24	=	0, 7917 …
81:64 —	640	816	=	40:51	=	0, 7843 …
	981	4995:4	=	436:555	=	0, 7856 …

Es ist aber der Bogen von 45 Gr. … = 0, 7854

woraus

woraus man wiederum sieht, daß diese Brüche dem wahren Werthe noch merklich geschwinde näher kommen.

§. 24.

Die Quotienten, so man bey der Division dieser Reihe findet, haben ebenfalls ein sehr ordentliches Gesetz, nach welchem sie auf einander folgen. Es sind nemlich dieselben der Ordnung nach

$$\frac{1}{z},\ \frac{3}{1.z},\ \frac{5}{4.z},\ \frac{7.4}{9.z},\ \frac{9.\ 9}{4.16.z},\ \frac{11.\ 4.16}{9.25.z},$$
$$\frac{13.\ 9.25}{4.16.36.z},\ \frac{15.4.16.36}{9.25.49.z},\ \frac{17.\ 9.25.49}{4.16.36.64.z},$$
$$\frac{19.\ 4.16.36.64}{9.25.49.81.z}\ \text{rc.}$$

In den Zählern kommen nemlich der Ordnung nach die ungeraden Zahlen vor. Die übrigen Factores sind lauter Quadratzahlen, welche wechselsweise Nenner und Zähler werden. In jede Nenner kömmt eine neue, oder die nächst grössere Quadratzahl als ein Factor hinzu, und diese bestimmt, wie die vorhergehende vertheilt werden, weil die geraden und ungeraden nicht zugleich im Nenner oder im Zähler vorkommen. Alle diese Brüche sind durch z dividirt. Hingegen werden sie nicht wechselsweise immer grösser und kleiner, sondern sie nähern sich zwoen bestimmten Grössen, nemlich die Brüche

$\frac{3}{1}, \frac{7.4}{9}, \frac{11.4.16}{9.25}, \frac{15.4.16.36}{9.25.49}$ ꝛc.

nähern sich der Zahl 3, 1415926.... welche den halben Umkreiß des Circuls vorstellt. Ihr allgemeiner Ausdruck ist

$$\frac{(4x+3)(2^2.4^2.6^2.8^2....(2x)^2)}{3^2.5^2.7^2.9^2....(2x+1)^2}$$

Hingegen nähern sich die Brüche

$\frac{1}{1}, \frac{5}{4}, \frac{9.9}{4.16}, \frac{13.9.25}{4.16.36}, \frac{17.9.25.49}{4.16.36.64}$ ꝛc.

der Zahl, welche herauskömmt, wenn man 4 durch den halben Umkreis des Circuls 3, 1415926.... dividirt, und welche demnach $= 1,27323954473$....ꝛc. ist. Dieses macht nun, daß, wenn man $z > 1$ annimmt, die Brüche sich dem wahren Werthe sehr langsam nähern. Da sie sich aber dennoch nähern, so haben sie vor der Reihe ein vieles voraus, weil diese in allen den Fällen, wo $z > 1$ ist, divergirt, und daher gar keinen Werth giebt.

§. 25.

Es giebt überdies noch andere Arten, wie man, ohne eben eine Theilung vorzunehmen, zu den Quotienten gelangen kann, die man, um solche Brüche heraus zu bringen, nöthig hat. So z. E. wenn aus jeder Zahl $AA + BB$ die Quadratwurzel solle ausgezogen werden,

so

so könnte man nach Anleitung der Newtonschen Binomialformel diese Wurzel durch eine unendliche Reihe ausdrücken, und vermittelst dieser Reihe die Quotienten suchen, und so würde man der Ordnung nach und wechselsweise $A, \frac{2A}{BB}, 2A, \frac{2A}{BB}, 2A$ &c. finden, welches den Bruch

$$1 : \sqrt{(A^2+B^2)} = \cfrac{1}{A+\cfrac{1}{2A:BB+\cfrac{1}{2A+\cfrac{1}{2A:BB+\&c.}}}}$$

und daher die Wurzel

$$\sqrt{(AA+BB)} = A+\cfrac{1}{2A:BB+\cfrac{1}{2A+\cfrac{1}{2A:BB+\&c.}}}$$

geben würde. Man kann aber diese Formel unmittelbar folgendergestalten finden. Man setze $\sqrt{(AA+BB)} = A+y$, so ist

$$AA+BB = AA+2Ay+yy,$$

folglich $y(y+2A) = BB$

und daher

$$y = \frac{BB}{2A+y}.$$

Nun kann man für das y, so in dem Nenner des Bruches ist, den Bruch selbst wiederum setzen, so hat man

$$y = \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + y}}$$

fährt man auf gleiche Art fort, so wird

$$y = \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \&c.}}}}$$

Und hiebey darf man nur jeden Bruch durch BB theilen, um sodann die vorige Formel

$$y + A = \sqrt{(AA + BB)} = A + \cfrac{1}{2A:BB + \cfrac{1}{2A + \cfrac{1}{2A:BB + \&c.}}}$$

zu erhalten.

§. 26.

Es sey nun z. E. die Quadratwurzel aus 38 zu ziehen; so setzt man $38 = 36 + 2$, demnach $36 = AA$, $2 = BB$, $A = 6$, $2A:BB = 6$, und so hat man

$$\sqrt{38} = 6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{12 + \&c.}}}}$$

Dieses giebt nun folgende Figur

	1	0
6	0	1
12	1	6
6	12	73
12	73	444
6	888	5401
ꝛc.	5401	32850

demnach ist $\sqrt{38} < 1\frac{1}{6}$
$> 1\frac{12}{73}$
$< 1\frac{73}{444}$
ꝛc.

Man kann sich aber auch der ersten Formel

$$\sqrt{(AA+BB)} = A + \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \&c.}}}$$

bedienen, und die Quadratwurzel durch eine Reihe von Regeln de tri finden, welche man so lange fortsetzen kann, als man es der Genauigkeit halber nöthig erachtet. Und dieses findet statt, so oft die fürgegebene Zahl eine Summe von zwoen Quadratzahlen ist, von welchen man die Wurzeln hat. Denn da macht man der Ordnung nach

$$2A : B = B : a$$
$$(2A + a) : B = B : b$$
$$(2A + b) : B = B : c$$
&c.

und die Zahlen $A + a$, $A + b$, $A + c$ &c. werden der wahren Wurzel desto näher kommen, je weiter man diese Analogien fortgesetzt hat, und je grösser A als B ist.

§. 27.

Um aber genauer zu sehen, wie sich diese gefundenen Werthe dem wahren nähern, so werden wir für A, B solche Ausdrücke nehmen, die ein Quadrat geben. Man setze demnach

$$A = a - b$$
$$BB = 4ab,$$

so ist

$$AA + BB = a^2 + 2ab + bb$$

und

$$\sqrt{(AA + BB)} = a + b = A + y$$

demnach $\quad y = 2b$

und

$$\sqrt{(AA+BB)} = (a-b) + \cfrac{4ab}{2(a-b) + \cfrac{4ab}{2(a-b) + \&c.}}$$

Wird nun dieser Bruch stuffenweise um ein Glied weiter abgebrochen und die Reduction vorgenommen, so erhält man der Ordnung nach

$$\sqrt{(AA-BB)} = a-b+2ab\,(a+b) :(a^2-b^2)$$
$$= a-b+2ab(a^2-b^2) :(a^3+b^3)$$
$$= a-b+2ab(a^3+b^3) :(a^4-b^4)$$
&c.
$$= a-b+2ab\,(a^{2n}-b^{2n}) :(a^{2n+1}+b^{2n+1})$$
$$= a-b+2ab(a^{2n+1}+b^{2n+1}): (a^{2n+2}+b^{2n+2})$$

Um dieses überhaupt zu beweisen, darf man nur setzen, daß man mit Beybehaltung von

2n

2n Gliedern des Bruches auf den Ausdrucke

$$\frac{2ab(a^{2n}-b^{2n})}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}$$

gekommen. Denn so wird man, wenn man um eine Stuffe tiefer anfängt den Ausdruck

$$\frac{4ab}{2(a-b)+\frac{2ab(a^{2n}-b^{2n})}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}}$$

erlangen. Nimmt man bey diesem die Reduction vor, so verwandelt derselbe sich in

$$\frac{2ab(a^{2n+1}+b^{2n+1})}{a^{2n+2}-b^{2n+2}}$$

Und dieser kommt ebenfalls heraus, wenn man in den erst angenommenen

$$\frac{2ab(a^{2n}-b^{2n})}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}$$

für n, $n+1$ setzt, und die Zeichen verwechselt, welche vor b stehen. Ist demnach $a > b$, so läßt sich n so groß annehmen, daß die Formel sich in

$$\surd(A^2+B^2) = a-b+\frac{2ab.a^{2n}}{a^{2n+1}}$$

$$= a-b+2b = a+b$$

verwandelt, welches sodann in der That die Wurzel ist. Man sieht zugleich hieraus, daß, weil

$$a - b + \frac{2ab(a^{2n} - b^{2n})}{a^{2n+1} + b^{2n+1}} = a + b - \frac{2(a-b)b^{2n}}{a^{2n+1} + b^{2n+1}}$$

und

$$a - b + \frac{2ab(a^{2n+1} + b^{2n+1})}{a^{2n+2} - b^{2n+2}} = a + b + \frac{2(a+b).b^{2n+1}}{a^{2n+2} - b^{2n+2}}$$

ist, die Brüche sich dem wahren Werthe der Wurzel in einer Progreßion nähern, welche einer geometrischen desto näher kommen, je grösser n ist, und daß die Brüche, welche zu groß sind, immer um mehr zu groß sind, als die, so zu klein sind, zu klein sind. Denn die Unterschiede der erstern sind mit $(a+b)$, die Unterschiede der andern mit $(a-b)$ multiplicirt. Die Näherung ist am langsamsten, wenn $A = B$ ist. Nun ist aber überhaupt

$$2a = +A + \sqrt{(A^2 + B^2)}$$
$$2b = -A + \sqrt{(A^2 + B^2)}$$

demnach für den Fall, wo $A = B$ ist, findet sich

$$2a = A(+1 + \sqrt{2}) = 2,4142136 \ldots$$
$$2b = A(-1 + \sqrt{2}) = 0,4142136 \ldots$$

demnach

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = 3 + 2\sqrt{2} = 5,8284272 \ldots$$

Da nun die Brüche entweder um

$$\frac{2(a-b)b^{2n}}{a^{2n+1} + b^{2n+1}} = \frac{2\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}}{1 + (b:a)^{2n+1}}$$

zu klein, oder um

$$\frac{2(a+b)b^{2n+1}}{a^{2n+2} - b^{2n+2}} = \frac{2(1 + b:a).(b:a)^{2n+1}}{1 - (b:a)^{2n+2}}$$

anbringen. Nimmt man aber die Reihe

$$\sqrt[3]{(a^3+b)}=a+\frac{b}{3a^2}-\frac{1.2b^2}{3.6a^5}+\frac{1.2.5b^3}{3.6.9a^8}-\frac{1.2.5.8b^4}{3.6.9.12a^{11}}+\text{ꝛc.}$$

vor, und theilt sie anfangs durch 1, so, daß der erste Quotient $=a$ sey, und sodann jeden Theiler durch den Ueberrest, so sind die Quotienten der Ordnung nach

$$a,\ \frac{3a^2}{b},\ a,\ \frac{9a^2}{2b},\ \frac{4a}{5},\ \frac{75a^2}{14b},\ \frac{7a}{10},\ \frac{6a^2}{b},\ \&c.$$

demnach

$$1:\sqrt[3]{(a^3+b)}=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{3a^2:b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{9a^2:2b+\text{ꝛc.}}}}}$$

und

$$\sqrt[3]{(a^3+b)}=a+\cfrac{1}{3a^2:b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{9a^2:2b+\cfrac{1}{4a:5+\cfrac{1}{75a^2:14b+\text{ꝛc.}}}}}}$$

diese Quotienten geben nun Brüche, die sehr geschwinde sich dem wahren Werthe der Wurzel nähern. Wir wollen es für den Fall zeigen, wo es noch am langsamsten zugeht, weil wir $a=b=1$ setzen wollen. Denn es ist klar, daß, wenn $a>1$ und $b<a$ ist, die Quo-

Quotienten merklich grösser werden. Setzen wir demnach $a = b = 1$, so ist $\sqrt[3]{(a^3 + b)} = \sqrt[3]{2}$ folglich die Cubicwurzel von 2 zu suchen, welche $= 1,259921 \ldots$ ist. Wir haben demnach

	140	0		
3 ———	0	140	$= 0 : 1$	
1 ———	140	420	$= 1 : 3$	$= 0,333 \ldots$
9:2 ——	140	560	$= 1 : 4$	$= 0,25$
4:5 ——	770	2940	$= 11 : 41$	$= 0,268 \ldots$
75:14 —	756	2912	$= 27 : 104$	$= 0,2596 \ldots$
7:10 —	4820	18540	$= 241 : 927$	$= 0,259976 \ldots$
6 ———	4130	15890	$= 59 : 227$	$= 0,259912 \ldots$
ꝛc.	29600	113880	$= 740 : 2847$	$= 0,2599227 \ldots$

Demnach, wenn wir $a = 1$ addiren, die gesuchten Werthe

1, 333 ...
1, 25
1, 268 ...
1, 2596 ...
1, 259976 ...
1, 259912 ...
1, 2599227 ... ꝛc.

Die Quotienten, oder besser zu sagen, deren Coefficienten 3, 1, $\frac{9}{2}$, $\frac{4}{5}$, ꝛc. folgen nach einem gewissen Gesetze auf einander. Es sind nemlich die Glieder folgender Reihe

$$\frac{1.3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3.3.2}{1.4}, \frac{2.4}{2.5}, \frac{5.3.2.5}{1.4.7}, \frac{2.4.7}{2.5.8}, \frac{7.3.2.5\,8}{1.4.7.10} \text{ ꝛc.}$$

oder

$$\frac{3}{1}, \frac{1}{1}, \frac{9.2}{4}, \frac{4}{5}, \frac{15.2.5}{4.7}, \frac{4.7}{5.8}, \frac{21.2.5.8}{4.7.10} \text{ ꝛc.}$$

§. 30.

§. 30.

Man kann dieses Gesetz allgemeiner vorstellen, wenn man überhaupt die Wurzel

$$\sqrt[m]{(a^m+b)}$$

in eine Reihe auflöset, und vermittelst dieser Reihe durch die Division die Quotienten sucht. Denn da findet man sie in folgender Ordnung

$$\frac{m a^{m-1}}{b}, \frac{2}{m-1}a, 3.m.\frac{m-1}{m+1}\frac{a^{m-1}}{b}, \frac{2.}{m-1}, \frac{\overline{m+1}.a}{2m-1},$$

$$5m.\frac{\overline{m-1}.\overline{2m-1}.a^{m-1}}{\overline{m+1}\;\overline{2m+1}\;b}, \frac{2.\overline{m+1}.\overline{2m+1}.a}{\overline{m-1}\;\overline{2m-1}\;\overline{3m-1}}, \text{ꝛc.}$$

diese geben demnach überhaupt

$$\sqrt[m]{(a^m+b)} = a + \cfrac{1}{m a^{m-1}:b + \cfrac{1}{2a:\overline{m-1} + \cfrac{1}{3.m.(m-1)a^{m-1}:(m+1)b + \&c.}}}$$

Man sieht zugleich hieraus, daß diese Quotienten bey jeder Wurzel wechselsweise zu- und abnehmen, und daß ihre Coefficienten nur bey der Quadratwurzel beständig $= 2$ sind. Setzt man für m, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ꝛc. so erhält man Dignitäten von (a^m+b), und da irgend einer der Quotienten anfängt unendlich zu werden, so wird die Reihe daselbst abgebrochen, und man erhält die Dignität ganz rein. Es sey z. E. $m = 2$, und $a = b = 1$, so sind die Coefficienten

$$+\tfrac{1}{2}, -4, -\tfrac{1}{2}, \infty.$$

Folg-

Folglich die Figur

$$
\begin{array}{|r|l}
\overline{4} & \overline{0} \\
+1:2 - - - 0 & 4 \\
-4 - - + 4 & +2 = 2 \\
-1:2 - -16 & -4 = 4 \\
+12 & +4 = 3
\end{array}
$$

demnach $(1+1)^2 = 1+3 = 4$.

§. 31.

Wir werden nun zu andern Reductionen der Brüche, und besonders der Decimalreihen fortschreiten. Wenn man mit einer Decimalreihe, wie z. E. mit 3, 1415926 .... oft zu multipliciren hat, und besonders wenn entweder große Zahlen, oder andere Decimalreihen damit solten multiplicirt werden, so ist ein solches Multipliciren, wegen der Weitläuftigkeit, beschwerlich. Ich habe demnach auf Mittel gedacht, demselben abzuhelfen. So z. E. um bey eben dieser Reihe 3, 1415926 .... zu bleiben, welche dem Umkreis des Circuls ausdrückt, fand ich

$$3{,}1415926 \text{ rc.} = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{800} - \frac{1}{70000} - \frac{1}{5000000} - \frac{1}{3000000000} - \frac{1}{5000000000} - \frac{1}{500000000000} + \frac{1}{400000000000000} - \frac{1}{20000000000000000} - \text{ rc.}$$

Weiter

Weiter habe ich diese Reihe nicht verfolgt, weil man ohnehin selten bis auf 14 Decimalziffern rechnet. Man sieht sogleich und auf eine sehr klare Art daraus, um wie viel die archimedische Proportion, welche die ersten zwey Glieder dieser Reihe vorstellen, zu groß ist, um wie viel man noch fehlt, wenn man sie um $\frac{1}{800}$ des Diameters vermindert rc. Es ist beynahe ganz unnöthig, daß ich die Methode hersetze, nach welcher ich diese Reihe gefunden. Denn da ich mir dabey vorgesetzt hatte, solche Brüche zu finden, deren Zähler $= 1$, die Nenner aber eine ganz einfache Zahl mit angehenkten o seyn solten, damit man ohne Mühe dividiren könne, so war leicht voraus zu sehen, daß diese Nenner ohne alle Ordnung würden grösser werden, weil der Umstand, daß wir nur bis auf 9 zählen, ganz willkührlich ist, und mit der Quadratur des Circuls nichts zu thun hat. Das einige Mittel, so demnach übrig bliebe, war, daß ich die Ludolphischen Zahlen

3, 141592653589, 793238, rc.

vor mich nahme, sodann erstlich 3 abzoge, und von dem Ueberreste, welcher beynahe $\frac{1}{7}$ war, zog ich $\frac{1}{7}$ ab. Da aber $\frac{1}{7}$ grösser ware als der Ueberrest, so sahe ich, daß dieser sodann von $3\frac{1}{7}$ muste abgezogen werden. Nun war dieser Ueberrest etwas grösser als $\frac{1}{800}$. Ich zoge demnach $\frac{1}{800}$ ab, und fand das Uebrigbleibende noch etwas grösser als $\frac{1}{70000}$. Dieses zoge ich demnach wiederum ab, und was übrig bliebe,

bliebe, war noch etwas grösser als $\frac{1}{5000000}$. Auf diese Art fuhr ich fort, bis der Ueberrest grösser als $\frac{1}{600000000000}$, und nur ein wenig kleiner als $\frac{1}{5000000000 0}$ war. Ich zoge denselben demnach von diesem letztern Bruche ab, und damit muste das Zeichen — in + verwandelt werden, weil mit $\frac{1}{5000000000 0}$ zu viel war weggenommen worden ꝛc.

§ 32.

Man sieht ohne mein Erinnern, daß es bey Ausfindung solcher Brüche eigentlich darum zu thun ist, daß die Anzahl der 0 in den Nennern geschwinde zunehme, damit man mit wenigern Theilungen weiter reiche. Hiezu kann man nun keine allgemeine Regel geben, theils weil man die Ueberreste bey solchen Brüchen nicht vorher sehen kann, theils weil es mehrere Anordnungen der Brüche giebt, die zuletzt dennoch auf eines hinaus laufen. So z. E. findet man

$$\frac{1}{3,1415926\text{ꝛc.}} = 0,318309886183790657153 \text{ ꝛc.}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{60} + \frac{1}{600} - \frac{1}{40000} + \frac{1}{600000}$$

$$- \frac{1}{9000000} - \frac{1}{4000000000} - \text{ꝛc.}$$

oder auch

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{50} + \frac{1}{200} - \frac{1}{40000} + \frac{1}{600000}$$
$$- \frac{1}{9000000} - \frac{1}{400000000} - \text{ꝛc.}$$

Denn es ist

$$\frac{1}{60} - \frac{1}{600} = \frac{1}{50} - \frac{1}{200}.$$

Man wird eben so auch die Reihe

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{70} - \frac{1}{1000} + \frac{1}{4000} + \frac{1}{80000}$$
$$- \frac{1}{5000000} - \frac{1}{30000000} + \frac{1}{2000000000}$$
$$- \frac{1}{300000000000} + \text{ꝛc.}$$

finden, welche eben den Werth giebt, und von den beyden vorhergehenden, von dem zweyten Gliede an, ganz verschieden ist.

§. 33.

Diese Reihen sind nun in dem Gebrauche sehr vortheilhaft. Man sieht mit einem male, bis auf die wievielste Decimalstelle jeder Bruch reicht, und wie viele Theilungen man folglich vorzunehmen hat, um zu einem fürgegebenen Grade der Genauigkeit zu gelangen. Wer überdies leicht im Rechnen geübt ist, dem fällt es nicht schwerer mit einer Ziffer zu dividiren, als zu multipliciren, und er gebraucht kein besonder

sonder Blatt dazu, um jeden Quotienten zu finden.

§. 34.

Indessen ist eben diese Leichtigkeit Schuld daran, daß diese Reihen weniger convergiren, als es an sich geschehen könnte. Ich habe demnach auf Mittel gedacht, jede Decimalreihe, oder auch andere Brüche, in solche Brüche aufzulösen, deren Zähler $= 1$, die Nenner aber in der grösten möglichen Verhältniß der Ordnung nach grösser seyn. Diese Auflösung geht nun stuffenweise von statten, und die Bedingung, daß alle Zähler sollen $= 1$ seyn, giebt die Methode von selbst an. Es sey z. E. der Bruch $\frac{94}{127}$. Da dieser nun näher bey 1 als bey $\frac{1}{2}$ ist, so wird er von 1 abgezogen, demnach

$$\frac{94}{127} - \frac{127}{127} = - \frac{33}{127}.$$

Nun ist $\frac{33}{127}$ näher bey $\frac{1}{4}$ als bey $\frac{1}{3}$. Man zieht demnach $\frac{1}{4}$ davon ab, und so ist

$$\frac{33}{127} - \frac{1}{4} = \frac{132 - 127}{4.127} = \frac{5}{508}.$$

Eben so ist dieser neue Ueberrest $\frac{5}{508}$ näher bey $\frac{1}{102}$ als bey $\frac{1}{101}$, man zieht demnach $\frac{1}{102}$ davon ab, und so ist

$$\frac{5}{508} - \frac{1}{102} = \frac{510 - 508}{508.102} = \frac{1}{508.51} = \frac{1}{4.127.51}$$

demnach wenn man nun den Rückweg nimmt

$$\frac{5}{508} = \frac{1}{102} + \frac{1}{4.127.51}$$

$$\frac{33}{127} = \frac{1}{4} + \frac{1}{102} + \frac{1}{4.127.51}$$

$$\frac{94}{127} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{102} - \frac{1}{4.127.51}.$$

§. 35.

Wiederum, es sey $\frac{355}{113}$ in eine solche Reihe von Brüchen aufzulösen, so macht man erstlich

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113}$$

sodann, weil $\frac{16}{113}$ dem $\frac{1}{7}$ am nächsten kömmt

$$\frac{16}{113} = \frac{1}{7} - \frac{1}{791} = \frac{1}{7} - \frac{1}{7.113}.$$

Da nun der Ueberrest $\frac{1}{791}$ schon 1 zum Zähler hat, so gebraucht es keiner weitern Auflösung, und es ist ganz kurz

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7.113}$$

Man sieht hieraus, um wie viel die Metianische Proportion des Umkreises zum Diameter von der Archimedischen verschieden ist. Kehrt man den Bruch $\frac{355}{113}$ um, so findet man auf eine ganz ähnliche Art

$$\frac{113}{355} - \frac{1}{3} = -\frac{16}{3.355} = -\frac{16}{1065}$$

$$\frac{16}{1065} - \frac{1}{67} = +\frac{7}{67.1065} = +\frac{7}{71355}$$

$$\frac{7}{71355} - \frac{1}{10194} = +\frac{3}{10194.71355} = \frac{1}{242464290}$$

folglich

$$\frac{113}{355} = \frac{1}{3} - \frac{1}{67} - \frac{1}{10194} - \frac{1}{242464290}.$$

Man sagt nemlich: 113 in 355 geht 3 mal, und es bleiben 16 übrig. 16 in 3 mal 355, oder 1065 geht 67 mal, und es fehlen 7. Endlich 7 in 67 mal 1065, oder 71355 geht 10194 mal, und es fehlen 3. Dieses 3 in 10194 mal 71355 geht genau 242464290 male. Und damit sind die Nenner 3, 67, 10194 und 242464290 gefunden.

§. 36.

Bey den Decimalreihen verfährt man auf eine ganz ähnliche Art, nur daß man die Brüche, so man herausbringt, in Decimalreihen verwandelt, um zu finden, wie nahe sie dem wahren Werthe der Reihe kommen, und was noch entweder hinzu zu setzen oder weg zu nehmen ist. So z. E. ist für die Ludolphische Zahlen

	π	=	3,14159265358979323 8 rc.
A	$3\frac{1}{7}$	=	3,142857142857142857 rc.
a			— 0,001264489267349618 rc.
B — $\frac{1}{791}$		=	1264222503151706 rc.
b			— 266764197911 rc.
C — $\frac{1}{3748629}$		=	266764195656 rc.
c			2255 rc.
D — $\frac{1}{443384023362059}$		=	2255 rc.

Hier müssen nemlich die Brüche B, C, D aus den Ueberresten a, b, c gefunden werden, indem man 1 durch dieselben dividirt. Man hat nicht nöthig hiezu die ganze Reihen a, b, c zu nehmen, sondern es ist genug, wenn man von den ersten Zahlen derselben so viel nimmt als nöthig ist, die Quotienten, soweit diese ganze Zahlen sind, zu bestimmen. Sind auf diese Art die Brüche A, B, C, D gefunden, so verwandelt man sie in Decimalreihen, um sie sodann abzuziehen. Ich habe, um diese Brüche zu finden, von der Reyhe π in allem 30 Decimalstellen zur Rechnung genommen, und fand demnach, daß die Formel

$$3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{791} - \frac{1}{3748629} - \frac{1}{443384023362059} \text{ rc.}$$

die Ludolphische Zahlen bis auf die 28te Decimalstelle richtig giebt. Die zwey ersten Glieder geben die Archimedische Proportion $\frac{22}{7}$, die drey ersten aber

$$3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{791} = 3 + \frac{113 - 1}{791} = 3\frac{16}{113} = \frac{355}{113}$$

geben die Metianische $\frac{355}{113}$. Man sieht also hieraus, daß unter den kleinern Verhältnissen diese beyden die genauesten sind, und daß von der Metianischen bis zur nächst grösseren ein merklicher Sprung ist.

§. 37.

Die Reihen von Brüchen, in welche man auf diese Art jede Decimalreihe verwandeln kann, sind nun diejenigen, die unter allen am geschwindesten convergiren. Es haben aber diese Brüche in der Art, wie sie auf einander folgen, kein Gesetz unter sich. Die Nenner haben zuweilen Theiler, zuweilen sind es Primzahlen, und jede Reihe hat, in Ansehung des Convergirens, etwas besonders. Es kommt viel darauf an, daß schon der erste Bruch dem wahren Werthe der Reihe sehr nahe komme. Denn man sieht leicht, daß wenn man in unserm Beyspiele anstatt der Reihe A, welche $\frac{22}{7}$ ist, gleich anfangs $\frac{355}{113}$ als die Summe beyder Reihen A, B genommen hätte, der folgende Bruch unmittelbar würde C gewesen seyn. Die Anzahl der Ziffern in dem Nenner eines jeden folgenden Bruches wird immer doppelt, und mehrentheils um eine Ziffer mehr als doppelt grösser. Es kann auch in einigen Fällen geschehen, wo ein Nenner weit über doppelt mehr Ziffern bekömmt, als der nächst vorhergehende. Dieses geschieht aber gleichsam nur zufälliger Weise, wenn man nemlich eine solche Reihe vor sich hat, welche einem gewissen Bruche beynahe gleich ist.

§. 38.

Wenn man nicht so genau darauf sieht, daß solche Reihen unter allen am geschwindesten convergiren, so lassen sich solche finden, die nach gewissen Gesetzen fortgehen. So z. E. es sey die Frage jede Decimalreihen in eine Reihe von Brüchen von folgender Form

$$A + \frac{1}{a} + \frac{1}{a.\,b} + \frac{1}{a.\,b.\,c} + \frac{1}{a.\,b.\,c.\,d} + \text{rc.}$$

zu verwandeln, und zwar mit der gedoppelten Bedingung, daß a, b, c, d &c. ganze Zahlen seyn, und die Reihe unter allen von dieser Art am geschwindesten convergire. Die Auflösung dieser Aufgabe hat nun ebenfalls gar keine Schwürigkeit, und wir können sogleich anfangen, sie in einem Beyspiele zu zeigen, wozu wir ebenfalls wiederum die Ludolphischen Zahlen nehmen werden. Die Rechnung ist demnach folgende

$\pi =$

$\pi = 3,141592,653589,793238,462643,38$ ꝛc.

$3 + \frac{1}{7} = 3,142857,142857,142857,142857,14$ ꝛc.

$M = - 1264,489267,349618,680213,76$ ꝛc.

$A = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{113} = 1264,222503,151706,700379,27$ ꝛc.

$N = - 266764,197911,979834,49$ ꝛc.

$B = \frac{A}{4739} = 266769,867725,618632,49$ ꝛc.

$O = + 5,669813,638798,00$ ꝛc.

$C = \frac{B}{47051} = 5,669802,293800,74$ ꝛc.

$P = + 11,344997,26$ ꝛc.

$D = \frac{C}{499762} = 11,345004,81$ ꝛc.

$Q = - 7,55$ ꝛc.

ꝛc.

folglich

$$\pi = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7 \cdot 113} - \frac{1}{7 \cdot 113 \cdot 4739} + \frac{1}{7 \cdot 113 \cdot 4739 \cdot 47051} + \frac{1}{7 \cdot 113 \cdot 4739 \cdot 47051 \cdot 499762} - \text{ꝛc.}$$

Man dividirt nemlich $\frac{1}{7}$ durch den ersten Ueberrest M, um den Nenner 113 zu finden. Sodann theilt man $\frac{1}{7}$ durch 113, um die Reihe A zu finden. Diese wird von M abgezogen, und so erhält man den zweyten Ueberrest N. Sodann giebt die Theilung $\frac{A}{N}$ den Nenner 4739, und $\frac{A}{4739}$ die Reihe B, welche von N abgezogen, den 3ten Ueberrest O giebt, mit welchem man auf eine ganz ähnliche Art verfährt ꝛc.

§. 39.

Die Reihen, die man nach dieser Methode findet, haben den Vortheil, daß man sogleich sieht, wie vielmal jeder Bruch kleiner ist, als der nächst vorhergehende, und daß man bey ihrem Gebrauche nicht mit so grossen Zahlen zu dividiren hat, weil jedes Glied durch das nächst vorhergehende gefunden werden kann. Jeder neue Factor hat wenigstens so viel, mehrentheils aber mehr Ziffern, als der nächst vorhergehende. Lezters hängt von der besondern Art der Reihe ab, die man in solche Brüche aufzulösen vornimmt. Daher findet sich in Ansehung des Convergirens ein merklicher Unterschied. So z. E. findet man

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.22} + \frac{1}{3.22.118} - \frac{1}{3.22.118.384} - \text{rc.}$$

Diese Reihe convergirt demnach merklich langsamer als die, so wir erst für π gefunden.

§. 40.

Will man Brüche in solche Reihen auflösen, so kann es nach einer gewissen mechanischen Methode geschehen, welche wir durch das Beyspiel des Bruches $\frac{5341}{7837}$ erläutern wollen. Die Figur ist folgende

5341

5341	7837	1
	5341	
− 2496	7837	3
	7488	
+ 349	7837	22
	7678	
− 159	7837	49
	7791	
+ 46	7837	170
	7820	
− 17	7837	461
	7837	
	0	

Dieses giebt nun

$$\frac{5341}{7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{1}{3.22.49} + \frac{1}{3.22.49.170} - \frac{1}{3.22.49.170.461}.$$

Man dividirt nemlich den Nenner durch den Zähler, und sodann durch jeden Ueberrest, um die Quotienten 1, 3, 22, 49, 170, 461 zu finden. Nun ist

$$1 - \frac{2496}{7837} = \frac{5341}{7837}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{349}{3.7837} = \frac{2496}{7837}$$

$$\frac{1}{22} - \frac{159}{22.7837} = \frac{349}{7837}$$

$$\frac{1}{49} - \frac{46}{49.7837} = \frac{159}{7837}$$

$$\frac{1}{170} - \frac{17}{170.7837} = \frac{46}{7837}$$

$$\frac{1}{461} - \frac{0}{461.7837} = \frac{17}{7837}$$

Denn

Denn es sey der Nenner $= B$, ein jeder Ueberest $= Q$, B durch Q getheilt gehe m mal, und lasse R übrig, so ist

$$mQ = B - R$$

demnach

$$\frac{mQ}{B} = 1 - \frac{R}{B}$$

$$\frac{Q}{B} = \frac{1}{m} - \frac{R}{m.B}$$

Es ist daher, wenn man nach und nach substituirt,

$$\frac{5341}{7837} = 1 - \frac{2496}{7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{349}{3.7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{159}{3.22.7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{1}{3.22.49} + \frac{46}{3.22.49.7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{1}{3.22.49} + \frac{1}{3.22.49.170} - \frac{17}{3.22.49.170.7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{1}{3.22.49} + \frac{1}{3.22.49.170} - \frac{1}{3.22.49.170.461}.$$

§. 34.

In diesem Beyspiele hat es sich schicklich ereugnet, daß jeder Ueberrest kleiner als die Hälfte desjenigen war, welcher zum Dividiren genommen worden, und dieses machte, daß in der herausgebrachten Reihe die Zeichen — + einförmig abwechselten. Es giebt aber ungleich mehr Brüche, wo die Ueberreste bald größ-

grösser, bald kleiner sind, als die Hälfte der Theiler. Will man nun eine Reihe haben, die am geschwindesten convergirt; so muß man in allen den Fällen, wo ein Ueberrest grösser seyn würde, als die Hälfte des Theilers, den Quotienten um 1 grösser nehmen. Dadurch wird der Ueberrest negativ, und zugleich kleiner als die Hälfte des Theilers, und damit muß das Zeichen verwechselt werden. Es sey z. E. der Bruch $\frac{4142136}{10000000}$, so haben wir folgende Figur

$$
\begin{array}{r|r|r|r|r|l}
4142136 & 10000000 & 2 & & & \\
 & 8284272 & & & & \\
\hline
 & -1715728 & 10000000 & 6 & & \\
 & & 10294368 & & & \\
\hline
 & & -294368 & 10000000 & 34 & \\
 & & & 10008512 & & \\
\hline
 & & & -8512 & 10000000 & 1175 \\
 & & & & 10001600 & \\
\hline
 & & & & -1600 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|r|l}
1600 & 10000000 & 6250 \\
 & 10000000 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

folglich

$$\frac{4142136}{10000000} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.6} - \frac{1}{2.6.34} - \frac{1}{2.6.34.1175} - \frac{1}{2.6.34.1175.6250}$$

Es ist demnach

√2

$$\sqrt{2} = 1{,}4142136 = 1 + \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2.\,6} - \frac{1}{2.\,6.\,34}$$

$$- \frac{1}{2.\,6.\,34.\,1175} - \text{rc.}$$

Da hier von den zweyten an, alle Quotienten um 1 grösser genommen worden, so sind auch alle Zeichen von dem zweyten an — geblieben.

§. 42.

Wiederum es sey 0,8660254 der Tabellarsinus von 60 Gr. in solche Brüche zu verwandeln, so ist

$$\begin{array}{rrrrrl}
8660254 & 10000000 & 1 & & & \\
 & 8660254 & & & & \\
 & -1339746 & 10000000 & 7 & & \\
 & & 9378222 & & & \\
 & & +621778 & 10000000 & 16 & \\
 & & & 9948608 & & \\
 & & & -51392 & 10000000 & 195 \\
 & & & & 10021440 & \\
 & & & & -21440 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrl}
-21440 & 10000000 & 466 & & \\
 & 9991040 & & & \\
 & +8960 & 10000000 & 1116 & \\
 & & 9999360 & & \\
 & & -640 & 10000000 & 15625 \\
 & & & 10000000 & \\
 & & & 0 &
\end{array}$$

Hier

Hier ist der einige Quotient 195 um 1 grösser genommen worden, demnach ist auch nur bey dessen Ueberrest keine Verwechselung des Zeichens vorgegangen. Es ist demnach

$$\sqrt{\tfrac{3}{4}} = 1 - \tfrac{1}{7} + \frac{1}{7.16} - \frac{1}{7.16.195} - \frac{1}{7.16.195.466}$$

$$+ \frac{1}{7.16.195.466.1116} - \frac{1}{7.16.195.466.1116.15625}$$

hiebey kann man die drey letzten Glieder, als welche kleiner als 0, 0000001 sind, weglassen, weil wir den Sinus von 60 Gr. selbst nicht genauer genommen haben.

§. 43.

Auf diese Art verfährt man demnach, wenn Brüche oder Decimalreihen in solche Reihen

$$A + \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} + \&c.$$

aufzulösen sind, die am geschwindesten convergiren. Will man aber von dieser Bedingung abgehen, so kann jeder Bruch und jede Decimalreihe in unzählige Reihen verwandelt werden, die nach andern Absichten eingerichtet werden können. Man setze z. E. jeder von den Factoren a, b, c, d &c. sollen eine Zahl aus der Reihe

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50 etc.

seyn, so wird diese Absicht auf eine ganz ähnliche Art erhalten werden können. Wir wollen

len in Ansehung des hyperbolischen Logarithmus von 10, welcher = 2,302585092994045 68 rc. ist, ein Beyspiel geben. Es ist demnach

$$
\begin{array}{rl}
\log. 10 = & 2,302585092994 \text{ rc.} \\
 & -2,000\,000\,000\,000 \text{ rc.} \\ \hline
A = & +0,302585092994 \text{ rc.} \\
a = \tfrac{1}{3} = & 0,333333333333 \text{ rc.} \\ \hline
B = & -30748240339 \text{ rc.} \\
b = \tfrac{1}{10}a = & 33333333333 \text{ rc.} \\ \hline
C = & +2585092994 \text{ rc.} \\
c = \tfrac{1}{10}b = & 3333333333 \text{ rc.} \\ \hline
D = & -748240339 \text{ rc.} \\
d = \tfrac{1}{4}c = & 833333333 \text{ rc.} \\ \hline
E = & +85092994 \text{ rc.} \\
e = \tfrac{1}{10}d = & 83333333 \text{ rc.} \\ \hline
F = & +1759660 \text{ rc.} \\
f = \tfrac{1}{5}e = & 1666666 \text{ rc.} \\ \hline
G = & +92994 \text{ rc.} \\
g = \tfrac{1}{20}f = & 83333 \text{ rc.} \\ \hline
H = & +9660 \text{ rc.} \\
h = \tfrac{1}{9}g = & 9259 \text{ rc.} \\ \hline
I = & +401 \text{ rc.} \\
i = \tfrac{1}{20}h = & 462 \text{ rc.} \\ \hline
K = & -61 \text{ rc.} \\
 & \text{rc.}
\end{array}
$$

folglich

folglich

$$\log. 10 = 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.10} + \frac{1}{3.10.10} - \frac{1}{3.10.10.4} +$$
$$\frac{1}{3.10.10.4.10} + \frac{1}{3.10.10.4.10.5} +$$
$$\frac{1}{3.10.10.4.10.5.20} + \frac{1}{3.10.10.4.10.5.20.9}$$
$$+ \frac{1}{3.10.10.4.10.5.20.9.20} - \text{ꝛc.}$$

§. 44.

Man kann auf eine ähnliche Art die Auflösung einer Decimalreihe so anstellen, daß die Nenner oder Factores lauter Quadrat, Cubic ꝛc. Trigonal ꝛc. oder Zahlen aus einer fürgegebenen Reihe sind. Man wird aber, ungeachtet es an sich nicht unmöglich ist, nicht leicht auf eine solche Auflösung verfallen, da die Factores nach einem einförmigen Gesetze auf einander folgen, daferne man dieses nicht voraus weiß. Denn so z. E. giebt es allerdings eine Reyhe, deren Factores der Ordnung nach 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. sind; man muß aber voraus wissen, daß es die Zahl ist, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$ ist. Denn so hat man

$$\begin{array}{rr}
 & 2,718281828459 \\
 & 2 \\
\hline
 & 0,718281828459 \\
a = \frac{1}{2} = & 0.500000000000 \\
\hline
 & 0,218281828459 \\
b = \frac{1}{3}a = & 0,166666666666 \\
\hline
 & 0,051615151793 \\
c = \frac{1}{4}b = & 41666666666 \\
\hline
 & 0,009948485126 \\
d = \frac{1}{5}c = & 0,008333333333 \\
\hline
 & 0,001615151793 \\
 & \text{rc.}
\end{array}$$

§. 45.

Bey diesen so gar vielen Möglichkeiten die Decimalreihen und Brüche in Reihen zu verwandeln, welche entweder unter allen am geschwindesten, oder doch nach beliebigen Gesetzen, sehr geschwinde convergiren, wäre es sehr zu wünschen, daß die dabey gebrauchte Methode auch bey den algebraischen unendlichen Reihen mit eben so gutem Fortgange angebracht werden könnte. Man weiß, daß wenn man mit dem Integriren einer Differentialformel nicht fortkommen kann, das letzte Mittel dieses ist, daß man sie in eine unendliche Reihe auflöset, und sodann jede Glieder derselben besonders integrirt. Es geschieht aber selten, daß solche Reihen in allen Fällen sehr convergent wären, und um destomehr wäre es gut, sie in solche

ver-

verwandeln zu können, die unter allen am geschwindesten convergirten. Will man aber mit solchen Reihen Divisionen vornehmen, wie wir es vorhin (§. 40.) mit den Brüchen gethan haben, so kann man sich dabey weder von dem größten Quotienten, noch von dem kleinsten Ueberreste versichern, weil sich die Glieder, die verschiedene Exponenten haben, nicht so unbedingt addiren und subtrahiren lassen. Man kann dabey nur die Glieder, so gleiche Exponenten haben, mit einander vergleichen, und man hat bey dem Dividiren nur diese Wahl, ob die Quotienten aus 1, 2, 3 ꝛc. Gliedern bestehen sollen. Die Probe, so ich hierüber angestellt, hat mich gelehrt, daß, wenn man sich mit eingliedrigen Quotienten begnügen will, man nichts ausrichtet, weil man statt einer mehr convergirenden Reihe gerade diejenige wieder bekömmt, die man hatte verwandeln wollen. Es sey z. E. die Reihe

$$y = \frac{ax + bx^2 + cx^3 + \&c.}{1}$$

in Form eines Bruches vorgestellt dessen Nenner $= 1$ ist. Dividirt man nun 1 durch $ax + bx^2 + cx^3 + \&c.$ so ist der Quotient $= \frac{1}{ax}$ der Ueberrest $= -\left(\frac{bx}{a} + \frac{cx^2}{a} + \frac{dx^3}{a} + \&c.\right)$ Wird durch diesen Ueberrest wiederum 1 dividirt, so ist der Quotient $= -\frac{a}{bx}$, der Ueberrest $= -\left(\frac{cx}{b} + \frac{dx^2}{b} + \&c.\right)$ Fährt man auf gleiche Art fort, so werden der Ordnung nach die Quotienten $\frac{1}{ax}, -\frac{a}{bx}, -\frac{b}{cx}, -\frac{c}{dx}$ &c. erhalten. Und diese geben demnach die Reihe

$$y = ax + ax.\frac{bx}{a} + ax.\frac{bx}{a}.\frac{cx}{b} + ax.\frac{bx}{a}.\frac{cx}{b}.\frac{dx}{c} + \text{rc.}$$

welcher sich offenbar in die fürgegebene

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + \&c.$$

verwandelt. Es sind demnach die auf diese Art gefundene eingliedrige Quotienten nicht nur nicht die Grösten, sondern weder grösser noch kleiner als diejenigen, welche die Anfangs fürgegebene Reihe wieder herfür bringen.

§. 46.

Ich habe hierauf eine Probe mit Quotienten von zweyen Gliedern vorgenommen, weil es sich voraus sehen liesse, daß diese allerdings grösser als die eingliedrigen seyn, und sich nicht gegen einander wieder aufheben würden. Ich nahm zu diesem Ende die Leibnitzische Reihe

$$y = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \text{rc.}$$

diese in 1 dividirt, gieng $\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{3}\right)$ mal, und der Ueberrest wäre

$$-\frac{4}{45}x^4 + \frac{8}{105}x^6 - \frac{12}{189}x^8 + \frac{16}{297}x^{10} - \frac{20}{13.33}x^{12} + \text{rc.}$$

dieser

dieser wiederum in 1 dividirt gieng $\div \left(\frac{45}{4xxxx} + \frac{135}{14xx}\right)$ mal, und der Ueberrest war

$$+\frac{1}{49}x^4 - \frac{10}{33 \cdot 49}x^6 - \frac{5}{7 \cdot 11 \cdot 13}x^8 + \frac{12}{7 \cdot 11 \cdot 13}x^{10} \text{ \&c.}$$

dieser nochmals in 1 dividirt, gabe $\left(\frac{49}{x^4} + \frac{49 \cdot 10}{33x^2}\right)$, und der Ueberrest war

$$+\frac{953 \cdot 5}{11 \cdot 13 \cdot 99}x^4 - \frac{173}{11 \cdot 13 \cdot 33}x^6 \text{ \&c.}$$

Dadurch erhielte ich nun nach gehöriger Reduction der Quotienten

$$y = \frac{3x}{3+xx} + \frac{3x}{3+xx} \cdot \frac{56x^4}{630+540x^2} - \frac{3x}{3+xx} \cdot \frac{56x^4}{630+540xx} \cdot \frac{33x^4}{1617+490xx}$$

oder nach geschehener Verkleinerung der Brüche

$$y = \frac{3x}{3+xx} \cdot + \frac{1}{(3+xx)} \cdot \frac{28x^5}{(105+90xx)} - \frac{44x^9}{(3+xx) \cdot (35+30xx) \cdot (231+70xx)} \text{ ꝛc.}$$

Diese Reihe convergiret demnach schon merklicher, als die fürgegebene. Setzt man z. E. $x = 1$, so erhält man

$$y = \frac{3}{3} + \frac{7}{195} - \frac{11}{19505} - \text{ ꝛc.}$$

Setzt man $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$, so findet sichs

$$y = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(\frac{9}{10} + \frac{14}{2025} - \frac{22}{1545075} + \text{ ꝛc.}\right)$$

Setzt man $x = 2$, so ist

$$y = \frac{6}{7} + \frac{128}{465} - \frac{22528}{544435} + \text{ ꝛc.}$$

woraus man sieht, daß diese Reihe auch in denen Fällen noch convergirend bleibt, in welchen die Leibnitzische divergent wird.

§. 47.

Eben diese Probe mit Quotienten von drey Gliedern fiel so aus. Die Reihe $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7} + x^7 +$ 2c. in 1 dividirt, gieng $(1{:}x + \frac{1}{3}x - \frac{4}{45}x^3)$mal, und der Ueberrest war

$$+ \frac{44}{27 \cdot 35} + x^6 - \frac{8}{7 \cdot 25} x^8 + \frac{428}{9 \cdot 33 \cdot 35} x^{10} \text{ 2c.}$$

dieser Ueberrest wiederum in 1 getheilt, gieng

$$\frac{27 \cdot 35}{44 x^6} + \frac{27 \cdot 27 \cdot 7}{11.11.2.x^4} + \frac{241.3.7.9}{121.44.5 \cdot x^2}$$

mal 2c. Demnach wenn man diese Brüche unter einen gemeinen Nenner bringt; so war der erste Quotient $= \frac{45 + 15x^2 - 4x^4}{45x}$

der zweyte $= \frac{571725 + 561330x^2 + 45549x^4}{26620x^6}$
2c.

Demnach haben wir

$$y = \frac{45x}{45 + 15x^2 - 4x^4} - \frac{45x}{45 + 15x^2 - 4x^4.}$$
$$\frac{26620x^6}{571725 + 561330x^2 + 45549x^4.}$$

§. 48.

Um nun diese Reihe mit der vorhergehenden (§. 46.) zu vergleichen, so bemerke ich, daß mehr nicht als die sechs ersten Glieder der Leibnitzischen

nitzischen Reihe

$$z - \tfrac{1}{3}z^2 + \tfrac{1}{5}z^5 - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9}z^9 - \tfrac{1}{11}z^{11}$$

gebraucht worden, um bey der Reihe des §. 46. die drey ersten, bey der Reihe des §. 47. die zwey ersten Glieder heraus zu bringen. Denn weiter wolte ich die Rechnung ohnehin nicht verfolgen, weil dieses schon genug war, um zu sehen, wiefern die beyden heraus gebrachten Reihen convergiren würden. Ich setzte demnach $x = \tfrac{1}{2}$, und die drey ersten Glieder der Reihe des §. 46. gaben

$$\frac{6}{13} + \frac{7}{3315} + \frac{11}{4393480} = 0{,}4636475717\ldots$$

hingegen die zwey ersten Glieder der Reihe des §. 47. gaben

$$\frac{45}{97} - \frac{33275}{123281277} = 0{,}4636476I455\ldots$$

Nun aber ist die Länge des Bogens, dessen Tangente $= \tfrac{1}{2}$ ist,

$$y = 0{,}4636476056\ldots$$

demnach ist der erste Ausdruck um 0,000000 0339... zu klein, der andere aber um 0,000000 0089 zu groß. Man sieht hieraus, daß beyde Reihen beträchtlich convergiren; für $x = 1$, geben die drey ersten Glieder (§. 46)

$$\tfrac{3}{4} + \tfrac{7}{195} - \tfrac{11}{10565} = 0{,}7853352$$

die zwey ersten Glieder (§. 47.)

$$\tfrac{45}{56} - \tfrac{33275}{1833364} = 0{,}7854217$$

Nun ist der Bogen selbst $y = 0{,}7853982$ — demnach ist der erste Ausdruck um 0,0000629 zu klein, der andere aber um 0,0000235 zu groß. Man hätte von der Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{ꝛc.}$$

eine beträchtliche Anzahl von Gliedern addiren müssen, um den Bogen so weit zu finden, daß der Fehler kleiner als 0,0001 gewesen wäre.

§. 49.

Da übrigens der Unterschied zwischen beyden Methoden nicht sehr groß ist, so werden wir bey den zweygliedrigen Quotienten bleiben, und dafür eine allgemeine Formel suchen, woraus sich sodann die Bedingungen ergeben, unter welchen die dadurch herausgebrachte Reihe am meisten convergirt. Es sey demnach die Reihe

$$y = a x^m + b x^{m+n} + c x^{m+2n} + d x^{m+3n} + \text{ꝛc.}$$

Wird diese in 1 dividirt, so ist der Quotient

$$= \frac{1}{a x^m} - \frac{b x^n}{a a x^m} = \frac{a - b x^n}{a a x^m}$$

und der Ueberrest

$$= \frac{bb - ca}{aa} x^{2n} + \frac{bc - da}{aa} x^{3n} + \frac{bd - ea}{aa} x^{4n} + \frac{be - fa}{aa} x^{5n} + \&c.$$

für diesen setze man Kürze halber

$$A x^{2n} + B x^{3n} + C x^{4n} + D x^{5n} + \&c.$$

Dividirt man nun wiederum 1 durch diesen Ueberrest, so ist der zweyte Quotient

=

$$= \frac{1}{Ax^{2n}} - \frac{Bx^n}{AAx^{2n}} = \frac{A - Bx^n}{AAx^{2n}}$$

und der zweyte Ueberrest

$$= \frac{BB - CA}{AA} x^{2n} + \frac{BC - DA}{AA} x^{3n} + \frac{BD - EA}{AA} x^{4n} + \&c.$$

Setzt man diesen ebenfalls Kürze halber

$$= \alpha x^{2n} + \beta x^{3n} + \gamma x^{4n} + \delta x^{5n} + \&c.$$

und nimmt die dritte Division vor, so wird wiederum der Quotient

$$= \frac{1}{\alpha x^{2n}} - \frac{\beta x^n}{AAx^{2n}} = \frac{\alpha - \beta x^n}{\alpha\alpha x^{2n}}$$

und der Ueberrest

$$= \frac{\beta\beta - \gamma\alpha}{\alpha\alpha} x^{2n} + \frac{\beta\gamma - \delta\alpha}{\alpha\alpha} x^{3n} + \frac{\beta\delta - \varepsilon\alpha}{\alpha\alpha} x^{4n} + \text{rc.}$$

seyn rc. Da auf diese Art jede folgende Quotienten und Ueberreste einerley Form haben, so sieht man, wie sie, ohne in jeden besondern Fällen die Division vorzunehmen, vermittelst dieser Formeln aus einander hergeleitet und berechnet werden können. Wir haben demnach statt der fürgegebenen Reihe, folgende

$$y = \frac{aax^m}{a - bx^n} - \frac{aax^m}{a - bx^n} \cdot \frac{AAx^{2n}}{A - Bx^n} + \frac{aax^m}{a - bx^n} \cdot \frac{AAx^{2n}}{A - Bx^n} \cdot \frac{\alpha\alpha x^{2n}}{\alpha - \beta x^n} - \&c.$$

§. 50.

Diese Reihe wird nun offenbar abgebrochen, und in einem endlichen Ausdruck verwandelt, wenn einer von den Factoren A, α &c. $= 0$ wird. Man setze z. E. $A = 0$. Da nun

$$A = \frac{bb - ca}{aa}$$

ist, so ist $bb - ca = 0$,
folglich $a : b = b : c$.

Wenn demnach in der fürgegebenen Reihe

$$y = ax^m + bx^{m+n} + cx^{m+2n} + \&c.$$

die Coefficienten a, b, c, d &c. entweder gleich sind, oder überhaupt in einer geometrischen Progression fortgehen, so wird $A = 0$ &c. und man hat schlechthin

$$y = \frac{aax^m}{a - bx^n}$$

In der That giebt auch dieser Ausdruck, wenn man ihn in eine Reihe auflöst, eine geometrische Progression. Wir können hieraus die Folge ziehen, daß die herausgebrachte Reihe destomehr convergirt, jemehr die Coefficienten a, b, c, d &c. entweder der Gleichheit, oder einer jeden geometrischen Progression nahe kommen.

§. 51.

Setzt man ferner $\alpha = 0$, so erhellet auf eben diese Art, daß

$$A : B = B : C$$

sey; folglich wird die Formel bey dem zweyten

Gliede

Gliede abgebrochen, wenn die Coefficienten des ersten Ueberrestes entweder einander gleich sind, oder in einer geometrischen Progression fortgehen. Ein gleiches hat auch für jeden folgenden Ueberrest statt.

§. 52.

Nun sind die meisten von denen Reihen, die langsamer convergiren, von der Art, daß die Coefficienten a, b, c, d &c. immer weniger von einander unterschieden sind. Wenn man daher die ersten Glieder solcher Reihen für sich addirt, und die folgenden nach der erst angegebenen Methode behandelt, so wird man ungleich geschwinder dem wahren Werthe der Reihe näher kommen, als wenn man bey den ersten Gliedern angefangen hätte. Wir wollen dieses ebenfalls durch das Beyspiel der Leibnitzischen Reihe

$$y = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \text{ꝛc.}$$

erläutern. Nimmt man von dieser die fünf ersten Glieder besonders, so sind die folgenden

$$-\left(\tfrac{1}{11}x^{11} - \tfrac{1}{13}x^{13} + \tfrac{1}{15}x^{15} - \tfrac{1}{17}x^{17} + \tfrac{1}{19}x^{19} - \tfrac{1}{21}x^{21} + \text{ꝛc.}\right)$$

demnach

$$a = +\frac{1}{11} \qquad b = -\frac{1}{13} \qquad m = 11$$

$$c = +\frac{1}{15} \qquad d = -\frac{1}{17} \qquad n = 2$$

$$e = +\frac{1}{19} \qquad f = -\frac{1}{21}$$

&c.

Diese

Diese Werthe in den Formeln des §. 49. gesetzt, geben den ersten Quotienten

$$= + \frac{11(13+11x^2)}{13x^{11}}$$

und den ersten Ueberrest

$$-\frac{11.4}{13.13.15}x^4 + \frac{11.8}{13.15.17}x^6 - \frac{11.12}{13.17.19}x^8 + \frac{11.16}{13.19.21}x^{10} - \text{ꝛc.}$$

demnach

$$A = -\frac{11.4}{13.13.15} \qquad B = +\frac{11.8}{13.15.17}$$

$$C = -\frac{11.12}{13.17.19} \qquad D = +\frac{11.16}{13.19.21}$$

ꝛc.

Hieraus erhält man den zweyten Quotienten

$$= -\frac{15.13.13(17+2.13x^2)}{4.11.17.x^4}$$

und den zweyten Ueberrest

$$+\frac{13.223}{17.17.19}x^4 - \frac{13.15.482}{17.17.19.21}x^6 + \text{ꝛc.}$$

demnach

$$\alpha = \frac{13.223}{17.17.19} \qquad \beta = -\frac{13.15.482}{17.17.19.21}$$

ꝛc.

welches den dritten Quotienten

$$= + \frac{17.17.19.(1561+2410x^2)}{7.13.223.223.}$$

giebt ꝛc.

giebt ꝛc. Demnach haben wir

$$y = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \frac{13x^{11}}{143+121xx}$$
$$- \frac{13.x^{11}}{(143+121x^2)} \cdot \frac{4.11.17.x^4}{15.13.13(17+26xx)}$$
$$+ \frac{13.x^{11}}{143+121xx} \cdot \frac{4.11.17.x^4}{15.13.13(17+26x^2)} \cdot$$
$$\frac{7.13.223.223.x^4}{17.17.19.(1561+2410xx)} - \text{ꝛc.}$$

Diese Glieder geben, wenn man $x = 1$ setzt, für den halben Quadranten 0, 785399582 ꝛc. welches von dem wahren Werthe nur um 0, 0000014 verschieden ist.

§. 53.

Bey der Reihe

$$\sqrt{(1+x)} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4$$
$$+ \tfrac{7}{256}x^5 - \tfrac{21}{1024}x^6 + \tfrac{33}{2048}x^7 - \text{ꝛc.}$$

kann man bey dem zweyten Gliede anfangen, weil von diesem an die Zeichen ordentlich abwechseln. Und so wird man

$$\sqrt{(1+x)} = 1 + \frac{2x}{4+x} + \mathfrak{A}.\frac{xx}{16+12x} - \mathfrak{B}.\frac{xxx}{64+96x}$$
$$+ \mathfrak{C}.\frac{81.xx}{16(9+13x)} - \mathfrak{D}.\frac{625.625.xx}{16.81(625+807x)}$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

erhalten, wobey Kürze halber die Factores $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ꝛc. die nächst vorhergehenden Glieder

bedeu-

bedeuten, und B deswegen mit xxx multiplicirt ist, weil es sich hier zuträgt, daß bey der zweyten Division das erste Glied des Ueberrestes $= 0$ wird. Diese Reihe ist zur Ausziehung der Quadratwurzel sehr bequem. Es solle z. E. aus 2916 die Quadratwurzel ausgezogen werden, welche $= 54$ ist. Wir wollen dafür 53 nehmen, und so läßt das Quadrat von $53 = 2809$ von 2916 abgezogen, 107 übrig. Demnach haben wir

$$53\surd\left(1+\tfrac{107}{2890}\right) = 53\surd(1+x)$$

und damit die Reihe

$$\surd(2916) = 53\left(1+\frac{214}{11343}-\frac{214}{11343}\cdot\frac{11449}{2809.\ 36228}-\text{—}\ \text{etc.}\right)$$

Da nun hier schon das dritte Glied kleiner als $\frac{1}{600000}$, das vierte aber noch

$$1:\left(\frac{107}{2890}\right)^3\cdot\frac{1}{64+\frac{96.\ 107}{2890}}$$

mal, das ist über 1500000 mal kleiner ist, so sieht man leicht, daß man es mehrentheils bey den zwey ersten Gliedern der Reihe

$$\surd(1+x) = 1+\frac{2x}{4+x}$$

kann bewenden lassen.

§. 54.

Für die Cubicwurzel findet man auf eine ähnliche Art

$\sqrt[3]{(1}$

$$\sqrt[3]{(1+x)} = 1 + \frac{x}{3+x} + \mathfrak{A}.\frac{4xx}{9(6+5x)} - \mathfrak{B}.\frac{xx}{4(9+4x)} + \text{ꝛc.}$$

und für jede Wurzel überhaupt

$$(1+x)^n = 1 + \frac{2nx}{2-(n-1)x} - \frac{(n-1)(n+1)x^2.\mathfrak{A}}{12-6(n-2)x} + \frac{(2n-1)^2.(n-2)x^2.\mathfrak{B}}{60(2n-1)-(n-3).(5n-2).10.x} - \text{ꝛc.}$$

Setzt man in dieser allgemeinen Formel $n = \frac{1}{2}$, welches für die Quadratwurzel ist, so wird das dritte Glied $= 0$, und eben so auch die folgende Glieder. Wir haben aber schon in den vorhergehenden §. angezeigt, woher dieses komme, und wie das dritte und die folgende Glieder für die Quadratwurzel müssen gefunden werden.

§. 55.

Bey allen diesen Reihen werden die Binomialfactoren, durch deren Multiplication die Glieder derselben entstehen, einander mehrentheils ungleich, und zuweilen, wie in dem Beyspiele des §. 53. unähnlich. Ich habe daher eine andere Methode gesucht, bey welcher diese Ungleichheit wegbliebe, und die Reihe eben dadurch einförmiger würde. Diese werde ich so gleich hersetzen, und hier nur noch anmerken, daß, wenn bey der erst angeführten die fürgegebene

gebene Reihe endlich ist, auch diejenige endlich werde, in welche jene nach dieser Methode verwandelt wird.

§. 56.

Es sey nun die Reihe

$$y = x^m - a x^{m+n} + b x^{m+2n} - c x^{m+3n} + \text{ꝛc.}$$

bey welcher wir setzen, daß die Coefficienten a, b, c &c. immer langsamer abnehmen. Man setze

$$1 + x^n = z$$

so ist

$$yz = x^m - a x^{m+n} + b x^{m+2n} - c x^{m+3n} + \text{ꝛc.}$$
$$\qquad + 1 \ldots \quad - a \ldots \quad + b \ldots$$

demnach

$$yz - x^m = (1-a) x^{m+n} - (a-b) x^{m+2n} + (b-c) x^{m+3n} - \text{ꝛc.}$$

Da diese Reihe der fürgegebenen ähnlich ist, so leidet sie eben die Verwandlung, und damit ist

$$yz^2 - x^m z - (1-a) x^{m+n} = (1-2a+b) x^{m+2n} - (a-2b+c) x^{m+3n} + \text{ꝛc.}$$

Auf eben die Art wiederum

$$yz^3 - x^m z^2 - (1-a) x^{m+n} z - (1-2a+b) x^{m+2n} = (1-3a+3b-c) x^{m+3n} - \text{ꝛc.}$$

Fährt man auf diese Art immer fort, so erhält man nach λ Wiederholungen

yz^{λ}

$$yz^{\lambda} - x^{m} z^{\lambda-1} - (1-a)x^{m+n} z^{\lambda-2} - (1-2a+b)x^{m+2n} z^{\lambda-3} + \&c.$$

$$= (1 + \lambda a - \lambda.\frac{\lambda-1}{2}.b + \lambda.\frac{\lambda-1}{2}.\frac{\lambda-2}{3} c - \&c.)x^{m+\lambda n} - \&c.$$

Und demnach, wenn man alles durch z^{λ} dividirt

$$y - \frac{x^m}{z} - \frac{(1-a)x^{m+n}}{zz} - \frac{(1-2a+b)x^{m+2n}}{z^3} + \&c.$$

$$= (1 + \lambda a - \lambda.\frac{\lambda-1}{2}.b + \&c.)\frac{x^{m+\lambda n}}{z^{\lambda}} - \&c.$$

Ist nun x positiv, so ist

$$z = (1 + x^n) > x^n$$

demnach

$$z^{\lambda} > x^{n\lambda}$$

Daher wird der Bruch

$$\frac{x^m . x^{n\lambda}}{z^{\lambda}}$$

in geometrischer Progression kleiner, je grösser λ wird, und folglich $= 0$, wenn man $\lambda = \infty$ setzt. Wir setzen dieses und haben demnach

$$0 = y - x^m : z - (1-a)x^{m+n} : z^2 - (1-2a+b)x^{m+2n} : z^3 - (1-3a+3b-c)x^{m+3n} : z^4 - \&c.$$

eine unendliche Reihe, welche sich, wenn man für z dessen Werth $1+x^n$ setzt, in

$$y=\frac{x^m}{1+x^n}\left(1+(1-a)\frac{x^n}{1+x^n}+(1-2a+b).\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2+(1-3a+3b-c).\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^3+\text{rc.}\right)$$

verwandelt. Und dieses ist die Reihe, welche wir suchen wolten. Man sieht zugleich, daß sie sehr einförmig ist, und daß die Coefficienten

$$\begin{array}{l} 1-a \\ 1-2a+b \\ 1-3a+3b-c \\ 1-4a+6b-4c+d \\ \text{rc.} \end{array}$$

die ersten, zweyten, dritten und jede folgenden Differenzen der Coefficienten a, b, c, d &c. der fürgegebenen Reihe sind.

§. 57.

Um ein sehr allgemeines Beyspiel hievon zu geben, so sey die Reihe

$$y=\frac{c}{a}x^m-\frac{c+d}{a+b}x^{m+n}+\frac{c+2d}{a+2b}x^{m+2n}-\frac{c+3d}{a+3b}x^{n+3m}-\&c.$$

wobey sowohl die Zähler als Nenner in arithmetischer Progression fortgehen. Vergleicht man diese Reihe mit der Reihe (§. 56.)

$$y=ax^m-bx^{m+n}+cx^{m+2n}+\&c.$$

und

und nimmt die ersten, zweyten, dritten und jede folgenden Differenzen, so erhält man die Reihe

$$y = \frac{x^m}{1+x^n}\left(\frac{c}{a} + \frac{cb-ad}{a(a+b)} \cdot \frac{x^n}{1+x^n} + \frac{(cb-ad).\,2b}{a.(a+b).(a+2b)} \cdot \left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2 + \frac{(cb-ad).\,2b.\,3b}{a.(a+b).(a+2b).(a+3b)} \cdot \left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^3 + \text{rc.}\right)$$

welche nach einem sehr einfachen Gesetze fortgeht. Hier sind nun einige besondere Fälle.

§. 58.

Es sey

$$y = \frac{1}{a}x^m - \frac{1}{2a}x^{m+n} + \frac{1}{3a}x^{m+2n} - \&c.$$

so ist $c=1$, $d=0$, $a=b$, demnach

$$y = \frac{x^m}{1+x^n}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} \cdot \frac{x^n}{1+x^n} + \frac{1}{3a} \cdot \left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2 + \frac{1}{4a} \cdot \left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^3 + \&c.\right)$$

Setzt man hier $a=m=n=1$, so ist

$$y = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \text{rc.} = \log.(1+x)$$

und

$$y = \frac{x}{1+x} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \&c. = \log.(1+x).$$

§. 59.

Es sey

$$y = \frac{1}{a} x^m - \frac{1}{a+b} x^{m+n} + \frac{1}{a+2b} x^{m+2n} - \text{rc.}$$

so ist $c = 1$, $d = 0$, demnach

$$y = \frac{x^m}{1+x^n} \left(\frac{1}{a} + \frac{b}{a(a+b)} \cdot \frac{x^n}{1+x^n} + \frac{b.\,2b}{a(a+b).(a+2b)} \cdot \left(\frac{x^n}{1+x^n} \right)^2 + \text{rc.} \right)$$

Setzt man hier $n = 2$, $b = 2$, so ist

$$y = \frac{1}{a} x^m - \frac{1}{a+2} x^{m+2} + \frac{1}{a+4} x^{m+4} - \text{rc.}$$

und

$$y = \frac{x^m}{1+xx} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a(a+2)} \left(\frac{xx}{1+xx} \right) + \frac{2.\,4}{a(a+2).(a+4)} \left(\frac{xx}{1+xx} \right)^2 + \text{rc.} \right)$$

Von diesen beyden Reihen ist erstere ein Stück der Leibnitzischen, sobald man für a und m eine gleiche ungerade Zahl setzt. Man mache z. E. $a = m = 21$, und $x = 1$, so erhält man

$$y = \tfrac{1}{21} x^{21} - \tfrac{1}{23} x^{23} + \tfrac{1}{25} x^{25} - \tfrac{1}{27} x^{27} + \text{rc.}$$

und

$$y = \tfrac{1}{42} \left(1 + \tfrac{1}{23} + \frac{1.\,2}{23.\,25} + \frac{1.\,2.\,3}{23.\,25.\,27} + \frac{1.\,2.\,3.\,4}{23.\,25.\,27.\,29} + \text{rc.} \right)$$

IV.