AVERTISSEMENT de M. JEAN BERNOULLI sur le Mémoire suivant.

Je cede encore ici avec plaisir ma place à feu M. LAMBERT. N'attachant aucune importance à ce que je pourrois donner de moi, je préfere pour l'honneur de nos Mémoires d'y faire paroître les restes précieux des travaux d'un de ses plus dignes Membres.

Je vois par le Journal de cet illustre Académicien que pendant le mois de Décembre de l'année 1776. il s'est occupé presqu'uniquement d'un *Mémoire sur l'élasticité & la ténacité de l'eau*, & je n'ai aucun doute que ce ne soit celui que je vais publier, dont j'ai fait la lecture à l'Académie le 16 Oct. 1783. Je conserve à ce Mémoire le titre que l'Auteur lui a donné, quoique peut-être en le mettant au net, il lui eût substitué celui que son Journal indique.

J'ai trouvé parmi les Manuscrits de feu M. Lambert, deux Mémoires qui portent le même titre: *sur les Fluides considérés relativement à l'Hydrodynamique;* les comparant soigneusement ensemble, j'ai vu que celui que je fais imprimer est postérieur à l'autre, & que celui-ci doit être supprimé. Ce premier Mémoire contient pour le fond les mêmes choses à peu près que l'autre, jusqu'au §. XLIX. (dans le second, XLVI.) où il finit. La principale raison qui paroît avoir engagé l'Auteur à refondre ce travail est que dans la somme des produits ou des forces vives (§. XXXIX. du second Mémoire) il avoit oublié la quantité $hmm . v$, en sorte que le terme hmm manquoit dans le dénominateur de la formule du §. XLIII. Il a fait encore d'autres changemens, que je ne pourrois pas indiquer assez brievement, tantôt en étendant, tantôt en resserrant ses remarques: par ex. dans l'application des Lemmes du §. XXII., où les Figures 6 & 7 auroient été

FGHI. Car dans ce cas les triangles NeO'; $N'eO$ sont isoscèles & égaux. Mais l'angle $NO'e$ est égal à son alterne $O'eL$: l'angle $N'Oe$ est aussi égal à son alterne OeL: les angles $NO'e$, $N'Oe$ sont égaux; donc les angles $Oe'L$, OeL sont égaux.

§. 78.

C'est pourquoi si l'on veut que la section $N'eO'$, antiparallèle à l'équateur, soit horizontale, il faut que l'axe du cylindre, ou l'*index* du cadran, coupe en deux parties égales l'angle que font le diamètre de l'équateur & celui du cercle horizontal; ce qui ramène au cadran de Lambert, comme on le voit dans la Fig. 25, où NO est parallèle à l'équateur, $N'O'$ parallèle à l'horizon, & l'angle NeO' coupé en deux également par la droite EL. Fig. 25.

On voit aisément que l'angle PEL est la moitié de la hauteur de l'équateur. Car du point E élevez sur l'horizontale QR la perpendiculaire EV. L'angle droit PEC est égal à l'angle droit VER; donc, ôtant de commun l'angle VEC, l'angle PEV est égal à l'angle CER, qui est la hauteur de l'équateur. L'angle NeE est égal à l'angle $O'eE$; donc l'angle PEL est égal à l'angle VEL.

§. 79.

En suivant les démonstrations des §. 69. & 72., on verra que dans ce cadran l'*index* change de place à mesure que le soleil change de déclinaison, & qu'en supposant EL, la position de cet *index* quand le soleil est dans l'équateur ou aux équinoxes, il doit s'écarter de la quatrième proportionnelle après le quarré du rayon des Tables, le produit de la tangente de la déclinaison par la tangente de la moitié de la hauteur de l'équateur, & du rayon du cadran, ou de la quantité $\frac{CE \times \text{tang. déclin.} \times \text{tang. } \frac{1}{2} \text{ haut. équat.}}{r^2}$.

Mais il faut se souvenir que tous les triangles faits par deux droites parallèles, l'une à l'équateur, l'autre à l'horizontale, & terminés par l'axe, ou par un des côtés du cylindre, sont isoscèles.

§. 80.

Ce cadran n'est pas privé de l'avantage que nous avons trouvé aux cadrans horizontaux. Mais il faut élever ou baisser le cadran autour du point de midi, de la moitié de la différence qui se trouve entre la latitude pour laquelle il est fait, & de la latitude pour laquelle il doit servir. Il est superflu d'avertir qu'il faut élever le cadran, s'il doit servir pour une latitude moindre, & le baisser, s'il doit servir pour une latitude plus grande.

§. 81.

Le cadran de Lambert se fonde sur la déclinaison du soleil, & cette déclinaison n'entre pour rien dans le cadran horizontal ordinaire. Donc ces deux cadrans s'orientent mutuellement, quand ils sont décrits sur la même plaque & que leurs méridiennes sont en ligne droite, ou parallèles. Dès que la plaque est placée en sorte que les deux cadrans montrent une fois la même heure, ils s'accorderont toujours. Ainsi le cadran de Lambert a l'avantage du cadran analemmatique, & de plus, celui d'être beaucoup plus facile à décrire. Ce cadran est donc manifestement utile, & si utile, qu'avec le temps, il fera certainement tomber le cadran analemmatique, & le réduira au nombre des articles de pure curiosité.

§. 82.

Ainsi l'on peut joindre au cadran horizontal celui de Lambert, ou le cadran analemmatique. Mais si l'on place ce double cadran de bon matin, on trouvera qu'il faut un peu changer sa place, afin que l'un des deux cadrans qu'il porte, montre avec exactitude la même heure que l'autre. Cela vient de la réfraction qui change, & qui devient moindre à mesure que le soleil s'approche du méridien.

Ceux qui voudront faire usage du cadran de Lambert avec l'*index* fixe & plusieurs cercles, pourroient être tentés, comme je l'ai été, de tailler sur la même plaque l'axe du cadran horizontal, & l'*index* du cadran de Lambert. Mais l'inflexion ou diffraction de la lumière empêchera toujours les deux cadrans de s'accorder, quelque bien orientés qu'ils soient.

AVER-

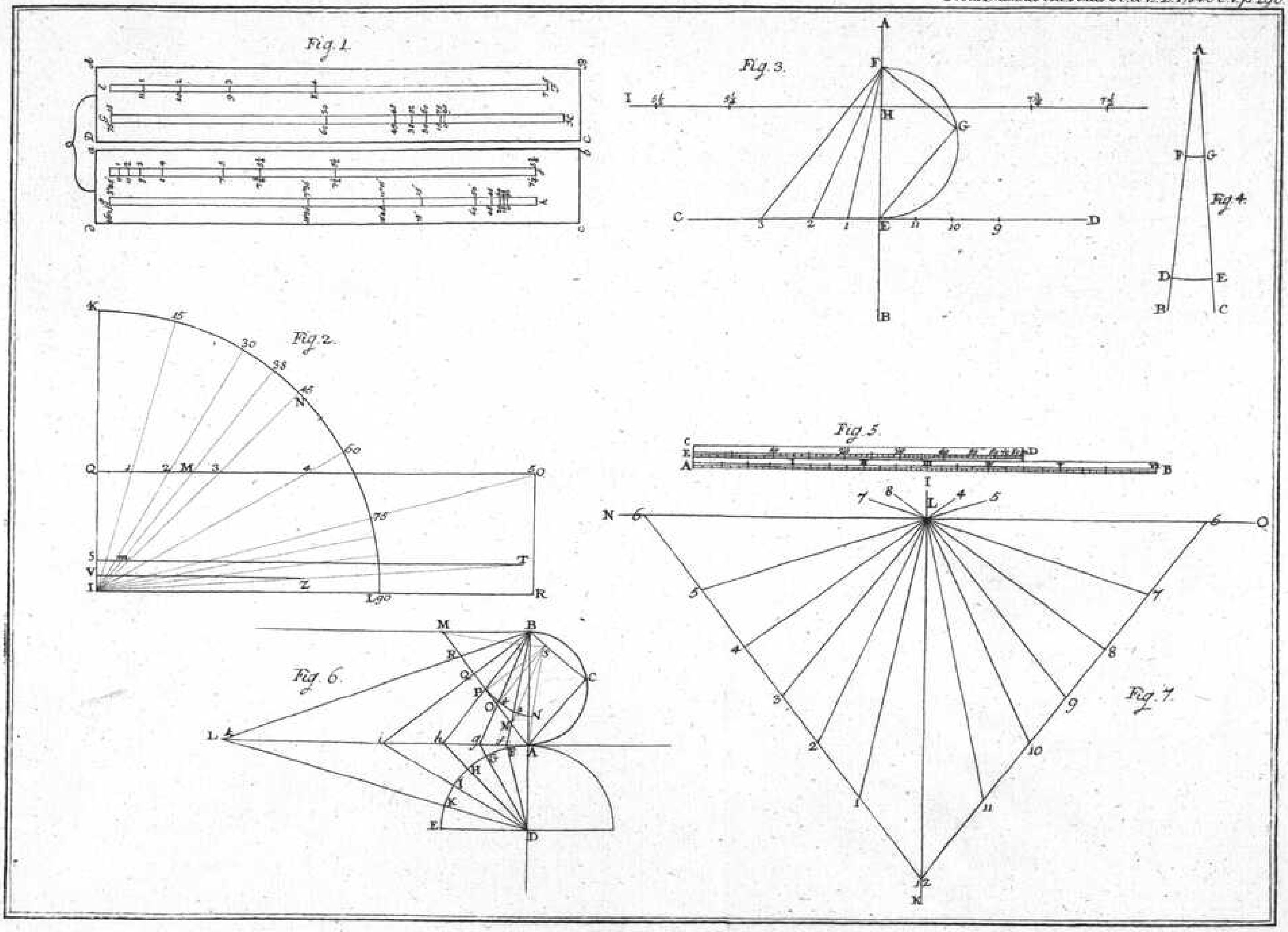


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.

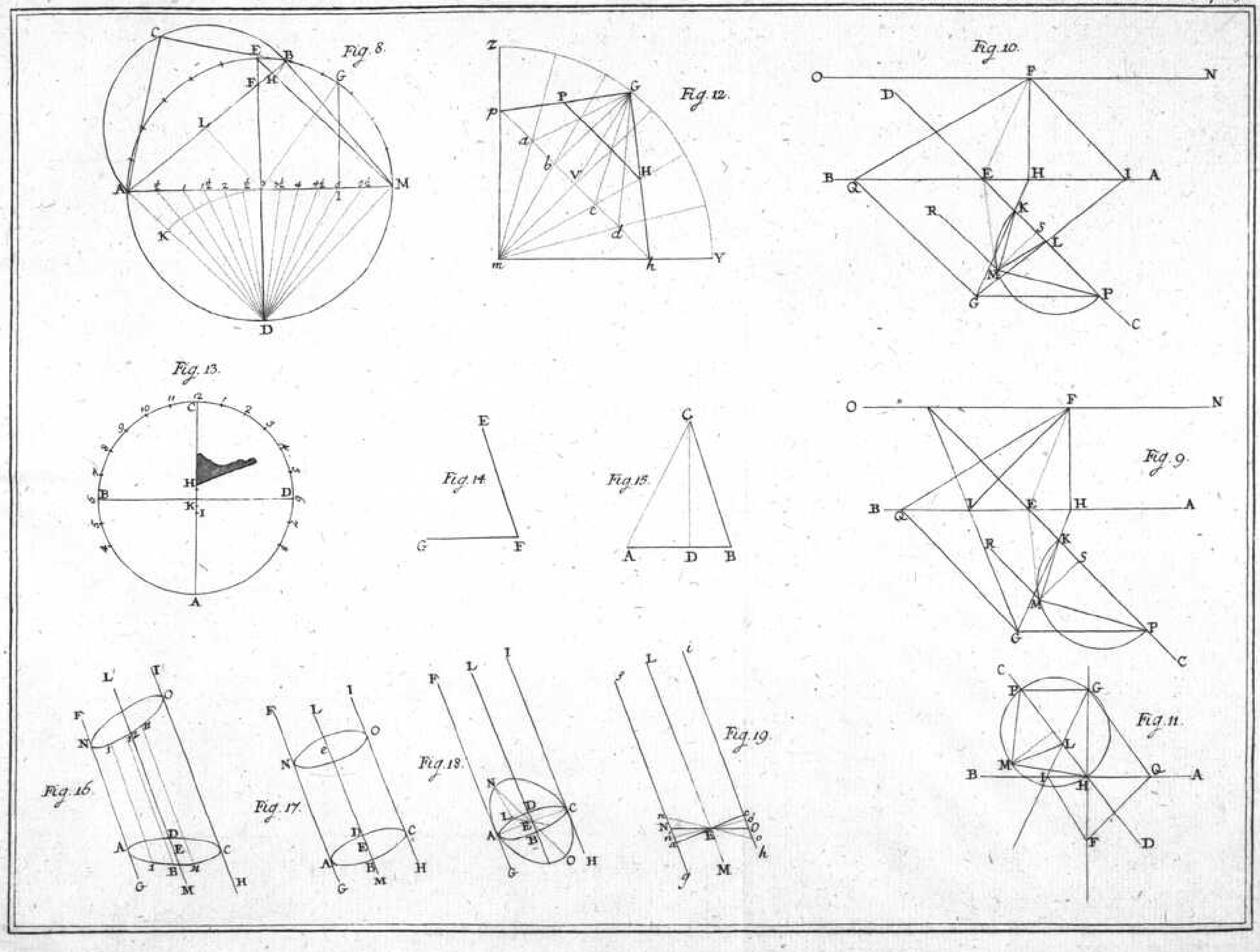


Fig. 8.
Fig. 12.
Fig. 10.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 9.
Fig. 11.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.

Fig. 20.

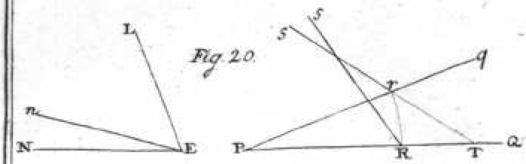


Fig. 21.

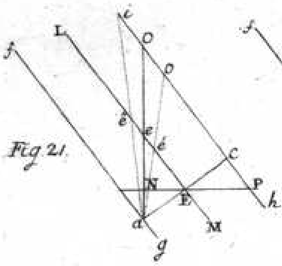


Fig. 22.

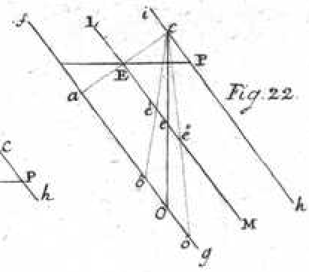


Fig. 23.

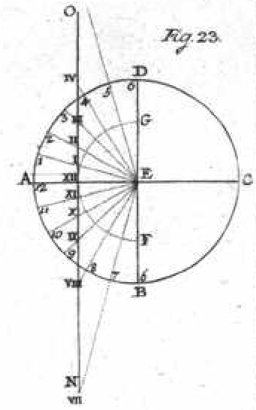


Fig. 24.

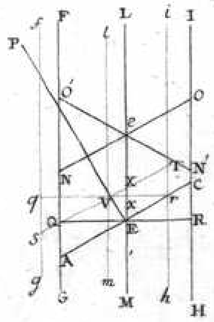
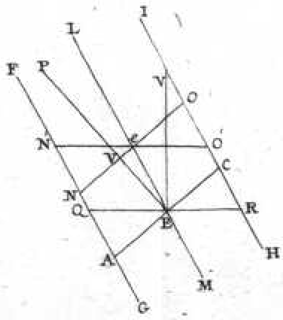


Fig. 25.



AVERTISSEMENT de M. JEAN BERNOULLI ſur le Mémoire ſuivant.

Je cede encore ici avec plaiſir ma place à feu M. LAMBERT. N'attachant aucune importance à ce que je pourrois donner de moi, je préfere pour l'honneur de nos Mémoires d'y faire paroître les reſtes précieux des travaux d'un de ſes plus dignes Membres.

Je vois par le Journal de cet illuſtre Académicien que pendant le mois de Décembre de l'année 1776. il s'eſt occupé presqu'uniquement d'un *Mémoire ſur l'élaſticité & la ténacité de l'eau*, & je n'ai aucun doute que ce ne ſoit celui que je vais publier, dont j'ai fait la lecture à l'Académie le 16 Oct. 1783. Je conſerve à ce Mémoire le titre que l'Auteur lui a donné, quoique peut-être en le mettant au net, il lui eût ſubſtitué celui que ſon Journal indique.

J'ai trouvé parmi les Manuſcrits de feu M. Lambert, deux Mémoires qui portent le même titre: *ſur les Fluides conſidérés relativement à l'Hydrodynamique;* les comparant ſoigneuſement enſemble, j'ai vu que celui que je fais imprimer eſt poſtérieur à l'autre, & que celui-ci doit être ſupprimé. Ce premier Mémoire contient pour le fond les mêmes choſes à peu près que l'autre, jusqu'au §. XLIX. (dans le ſecond, XLVI.) où il finit. La principale raiſon qui paroît avoir engagé l'Auteur à refondre ce travail eſt que dans la ſomme des produits ou des forces vives (§. XXXIX. du ſecond Mémoire) il avoit oublié la quantité $hmm.v$, en ſorte que le terme hmm manquoit dans le dénominateur de la formule du §. XLIII. Il a fait encore d'autres changemens, que je ne pourrois pas indiquer aſſez brievement, tantôt en étendant, tantôt en reſſerrant ſes remarques: par ex. dans l'application des Lemmes du §. XXII., où les Figures 6 & 7 auroient été ſuperflues dans le premier Mémoire, en ſorte que la 8me du ſecond auroit été la *6me* & derniere du premier. Enfin tout ce qui ſuit le §. XLVI. du Mémoire imprimé eſt entierement neuf & contient des expériences intéreſſantes, qui augmentent l'utilité de ces recherches.

La quantité de ratures dans l'un & l'autre Manuſcrit & dans les Figures communes aux deux, donne à connoître que ce travail a coûté beaucoup de peine à l'Auteur, qui ſouffroit, & approchoit de la fin de ſa glorieuſe carriere. Cependant, quoiqu'il n'ait pas eu le tems de le mettre au jour lui-même, je me flatte qu'il ſera jugé ſuffiſamment achevé, & qu'il ſatisfera les Géometres Phyſiciens.

SUR
les Fluides considérés relativement à l'Hydrodynamique.

PAR M. LAMBERT.

I.

Je reviens ici à un ſujet que j'ai traité autrepart ſans entrer dans le détail néceſſaire pour en donner une théorie bien établie. Il s'agit des *premiers principes de l'Hydrodynamique.* Je me propoſe *de les fonder ſur l'élaſticité des particules de l'eau & d'y joindre ce qui regarde la ténacité & le frottement.* Voilà en deux mots le but de ce Mémoire.

II.

La fameuſe expérience des Académiciens de Florence paroît s'oppoſer à ce but, & elle s'y oppoſeroit en effet, s'il en réſultoit que l'eau n'eſt pas élaſtique. Cependant ces Académiciens avouent eux-mêmes que cela n'en ſuit pas dans le ſens ſtrict du terme. Tout ce qu'ils en concluent c'eſt que ſi l'eau peut être comprimée, la compreſſion ne ſauroit être que fort petite. Et c'eſt de quoi on pouvoit d'autant moins douter, que l'eau du fond de la mer, ſi elle avoit beaucoup plus de denſité que celle de la ſurface, feroit remonter des corps qui ſeroient trop peſans pour s'arrêter près de la ſurface. Outre cela ces Académiciens n'ont pas démontré que les vaſes dans lesquels ils eſſayoient de comprimer l'eau, ne ſe ſont pas dilatés. Ces vaſes creverent par la forte tenſion qu'ils ſouffroient. Or on ſait que lorsque la tenſion augmente jusqu'au point de rupture, les corps tendus s'étendent & s'allongent. Les cordes des inſtrumens de muſique en fourniſſent journellement des exemples. Diſons donc que l'expérience de Florence ne prouve rien. Auſſi commence-t-on peu à peu à revenir de l'impreſſion qu'elle avoit d'abord faite. M. *Canton* en Angleterre, de même que l'Exjéſuite

Herbert en Allemagne, viennent de produire des expériences par lesquelles ils prétendent non ſeulement *prouver la compreſſion de l'eau*, mais même en *évaluer la quantité*. Cependant il faut obſerver que la compreſſion toute ſeule ne prouve pas l'élaſticité, à moins qu'on ne faſſe voir qu'après que la compreſſion a ceſſé, l'eau reprend ſon premier volume.

III.

La compreſſion de l'eau n'eſt pas la ſeule ſource dont on puiſſe déduire ſon élaſticité. Il y en a d'autres, & c'eſt un avantage. Car ſi en effet la compreſſibilité de l'eau étoit petite au point d'être inſenſible, les expériences qu'on feroit à cet égard ne ſerviroient de rien, & au défaut d'autres reſſources, la queſtion de l'élaſticité de l'eau reſteroit indéciſe. Ces autres reſſources n'ayant point encore été employées, il ne ſera pas inutile de le faire.

IV.

D'abord donc il me paroît évident que le choc de l'eau, ſi elle eſt élaſtique, doit faire voir des phénomenes extrêmement différens de ceux qu'elle doit produire quand elle n'eſt pas élaſtique. Les lois du choc ſont trop connues, pour que je les rapporte ici. Qu'on jette deux maſſes d'eau l'une contre l'autre, & qu'on en faſſe autant de deux maſſes d'argile molle, la différence des effets répondra à la différence du choc des corps élaſtiques & non-élaſtiques; & ſi cela n'eſt pas abſolument, la ténacité de l'eau & la portion d'élaſticité qui reſte encore active dans l'argile molle, ſuffira abondamment pour rendre raiſon de ce qui pourra y manquer.

V.

Outre les phénomenes du choc, il y en a encore un autre tout particulier qui mérite d'être rapporté. On ſait que les boules de ſavon à la fin crevent par en haut, où la croûte d'eau ſavonnée s'exténue le plus. On ſait encore qu'en crevant, l'eau ſe diſperſe en petites gouttes, qui ſautent de tout côté avec beaucoup de vîteſſe. C'eſt ce qu'il n'y a pas moyen d'expliquer autrement que par l'élaſticité des particules d'eau. Une *larme de verre*, caſſée au bout mince, creve en une infinité de petites pieces, qui ſautent de tout côté. Voilà un cas entierement ſemblable, & qu'on ne s'eſt jamais aviſé d'expliquer autrement que par l'élaſticité du verre & de ſes plus petites particules.

VI.

Il y a dans l'eau, & plus encore dans l'huile, une certaine *ténacité* qui empêche ſon élaſticité d'être beaucoup plus ſenſible qu'elle ne l'eſt. Dans l'huile cette ténacité eſt ſi conſidérable, qu'il eſt douteux ſi ſes particules ſont élaſtiques ou non. Un verre ou une bouteille remplie d'huile ne donne qu'un ſon émouſſé quand on la frappe, tandis que ſi elle eſt remplie d'eau ou de quelque liqueur aqueuſe, elle donne un ſon clair & reſonnant. Ainſi l'huile eſt ſi peu élaſtique, qu'elle émouſſe même l'effet de l'élaſticité du verre, tandis que l'eau ſeconde cette élaſticité. Le ſon reſte bien clair, quoiqu'il devienne plus grave. Cette ténacité paroît différente de ce qu'on appelle force de cohéſion, quoique celle-ci puiſſe en être la cauſe. L'une & l'autre fait plus ou moins équilibre à l'élaſticité, en ſorte que quand les particules d'eau ſe touchent ou qu'elles ſont au moins auſſi près l'une de l'autre qu'elles le ſont dans l'eau, la ténacité prévaut, tandis que quand cette diſtance eſt ou plus grande ou peut-être auſſi plus petite, c'eſt l'élaſticité qui l'emporte. La très grande élaſticité des vapeurs ſemble exiger ce rapport entre la ténacité & l'élaſticité. Car les vapeurs ſont des particules, des gouttes ou des véſicules d'eau, ſoutenues à des diſtances les unes des autres par l'action du feu, & fortement agitées. Dès que la chaleur ceſſe, elles ſe rapprochent & la ténacité recommence à avoir le deſſus. Dans les boules de ſavon la ténacité décroît là où la croûte par l'exténuation commence à s'ouvrir. Par-là la compreſſion qu'elle cauſoit ceſſe, & l'élaſticité n'étant plus contrebalancée, fait que la boule ſe diſſipe en petites gouttes, qui ſautent de tout côté.

VII.

S'il étoit queſtion de rapporter encore d'autres phénomenes pour démontrer l'élaſticité de l'eau, nous les trouverions dans ſon état d'équilibre, & même dans ſa fluidité. Une matiere non-élaſtique n'eſt mobile qu'autant qu'on la meut. Elle peut avoir une ſurface raboteuſe & s'accumuler en monceaux, tandis que si les particules sont élastiques elles s'échappent du côté où elles sont moins comprimées, le monceau s'abaisse avec effort, & s'enfonce même, & l'état de repos ou d'équilibre n'a lieu qu'après que la surface est plane & entierement de niveau.

VIII.

Mais, sans m'arrêter à ces sortes de considérations, je me bornerai au fameux paradoxe hydrostatique, lequel, pour être très vrai & pour avoir toujours été très mal démontré, a été mis pour base par quelques-uns des grands Géometres, qui dans ce siecle ont jeté les fondemens de l'Hydrodynamique, comme étant le *caractere distinctif* des fluides & la *source* dont tous les phénomenes hydrodynamiques se déduisent. Ce paradoxe consiste

1°. *en ce que les particules d'eau soutiennent & exercent une pression égale en tout sens;*

2°. *en ce que cette pression est partout en raison constante de la profondeur verticale au dessous du niveau de la surface, sans que le lieu de la surface, ou son plus ou moins d'étendue, y influe pour quoi que ce soit.*

IX.

Pl. VIII. Fig. 1. Voici maintenant la considération d'un cas très simple, qui répandra du jour sur ce paradoxe. Soit un tuyau vertical recourbé horizontalement par en bas, *hbe*. Que dans ce tuyau il y ait des boules *A*, *B*, *C*, *M* &c., égales & de même poids, qui se touchent entr'elles & qui encore touchent le tuyau & son fond en *e*. Je supposerai ces boules tant élastiques que non-élastiques, afin de mettre en parallele les résultats.

Les boules n'étant point élastiques, mais dures.	*Les boules étant élastiques.*
1. Les boules *A*, *B*, *C* reposeront l'une sur l'autre sans aucune compression, & les côtés du tuyau n'ont aucune pression à soutenir.	1. Chacune des boules comprimera celles qui sont au dessous. Les diametres verticaux se raccourcissent: par-là les diametres horizontaux devroient s'étendre, si le cylindre ne les en empêchoit. Le cylindre soutient donc une pression horizontale égale à la pression verticale de la boule.

2. Le fond en *c* soutient une pression égale au poids des boules *A*, *B*, *C*.

3. Le fond en *g* soutient une pression égale au poids de la boule *M* toute seule.

4. Le cylindre en *f* ne soutient aucune pression.

5. Il est indifférent que le tuyau en *f* soit ouvert ou non.

6. Il est encore indifférent que le tuyau soit ouvert en *e*, *b* ou non.

7. Ouvrant le tuyau en *g* ou *c*, les boules *M*, *A* tomberont par leur simple gravité.

8. Si le canal est allongé du côté *M*, en sorte qu'il renferme encore un nombre quelconque de boules tant en long qu'en large, les boules de toute cette couche présenteront les mêmes phénomenes que la boule *M*.

2. Tout de même.

3. Le fond en *g* soutient une pression égale au poids des boules *A*, *B*, *C*. Car la pression horizontale que souffre la boule *A* se communique à la boule *M*, & y produit une pression verticale qui lui est égale. Cette pression est due au poids des boules *B*, *C*. Ajoutant le poids de la boule *M* elle-même, la somme sera $M + B + C = A + B + C$.

4. Le cylindre en *f* soutient une pression égale à celle en *a*, & par conséquent égale au poids des boules *B*, *C*.

5. En ouvrant le tuyau en *f*, la boule *M* montera avec une vîtesse due à sa compression, c'est à dire au poids des boules *B*, *C*.

6. Ouvrant le tuyau en *e* ou en *b*, les boules *M*, *A* sortiront avec la vîtesse due à leur compression.

7. Ouvrant le tuyau en *g* ou *c*, les boules *M*, *A* sortiront avec la vîtesse due à leur compression, c'est à dire au poids des boules *A*, *B*, *C*, & cette vîtesse sera augmentée par l'action de la gravité.

8. Tout de même, à condition que le canal élargi serre les boules en sorte que la compression puisse être également répandue par toutes les boules de la couche.

X.

Otant les boules & remplissant le vase d'eau à la hauteur *h*, voici les phénomenes qui se présentent. Je leur assigne les mêmes numéros, afin de faciliter la comparaison.

3. Le fond en *g*, & même dans toute sa longueur, soutient une pression égale au poids d'une colonne de la hauteur *ch* & d'une même base.

4. Le vase en *f* soutient une pression égale à une colonne d'eau de la hauteur *ah* & d'une même base.

5. Ouvrant le tuyau en *f*, l'eau jaillira en haut avec une vîteſſe que je laiſſe indéterminée, mais qui va en augmentant lorſque la hauteur *ah* eſt plus grande.

6. 7. Tout de même, lorſque le vaſe eſt ouvert en *e*, *b*, *g*, *c*, ou quelque part que ce ſoit au deſſous de la ſurface de l'eau.

8. Il eſt indifférent quelle que ſoit l'étendue des couches au deſſous de la ſurface & quelque part qu'on l'ouvre. La vîteſſe à la même profondeur verticale au deſſous du niveau de la ſurface eſt la même, abſtraction faite des circonſtances acceſſoires qui peuvent l'altérer &c.

XI.

Il eſt évident que la comparaiſon de ces phénomenes avec les phénomenes des boules non-élaſtiques eſt nulle. Et ſurtout les n^{os}. 4. 5. 6. ſuffiſent pour ſe déſiſter de toute comparaiſon ultérieure. Mais en revanche ces numéros répondent presque mot à mot aux mêmes numéros des boules élaſtiques. Je n'ai rien dit des n^{os}. 1. 2., parce que ce ſont préciſément ceux qui ſont en queſtion, & parce que pour prouver ce qu'il en eſt de l'eau à l'égard de ces deux numéros & ſurtout du numéro 2, il faudroit que la compreſſibilité de l'eau fût prouvée par des expériences immédiates. Au défaut de cela nous arrangerons notre raiſonnement d'une autre maniere. Les n^{os}. 3. 4-8. à l'égard des boules élaſtiques ſont des conſéquences de leur élaſticité, & en particulier du n°. 1. Cela fait que ces conſéquences different ſi conſidérablement de celles qui ont lieu à l'égard des boules non-élaſtiques, que ſi les unes ont lieu les autres ne ſauroient être admiſes. Or l'eau fait voir les phénomenes des boules élaſtiques. Donc elle ne fait pas voir les phénomenes des boules non-élaſtiques. C'eſt auſſi ce qui ſe prouve par la comparaiſon immédiate. Donc l'eau ne ſauroit être non-élaſtique. Et réciproquement, en la poſant élaſtique, les phénomenes des boules élaſtiques s'enſuivent.

XII.

A ces conſéquences il s'en joint un grand nombre d'autres. Une des plus remarquables eſt qu'en ouvrant un petit trou au fond d'un vaſe rempli d'eau, d'eau, la vîteſſe initiale eſt due beaucoup plus à l'élaſticité & à la compreſſion de l'eau qu'à l'accélération de la gravité. Cet effet ſe fait ſentir le mieux aux premieres gouttes, ſurtout lorsqu'elles ſont iſolées & petites, le quarré de la vîteſſe étant en raiſon réciproque des maſſes. On voit dans les fontaines ſaillantes que quelquefois les premieres gouttes montent à une hauteur beaucoup plus grande que celle du réſervoir. (*Mém. de l'Acad. R. des Sc. de Paris 1702.*) M. *D. Bernoulli*, dans ſon *Hydrodynamique*, dit avoir obſervé la même choſe à l'égard d'une quantité d'eau qu'on laiſſe tomber dans l'eau ſtagnante. Quelques gouttes ſautent au deſſus du niveau de la hauteur dont l'eau eſt tombée. La compreſſion qui naît du choc pourra bien ſe meſurer par cette hauteur, mais la vîteſſe qui en réſulte ſe regle ſur la maſſe des gouttes qui s'élancent. M. *D. Bernoulli* allegue à l'égard des fontaines quelque autre raiſon, mais qui étant mieux détaillée revient à celle-ci. Il emploie la conſidération du choc. Mais dès-lors la queſtion du choc élaſtique ou non-élaſtique revient. Diſons encore que l'élaſticité des particules d'eau eſt *très parfaite*, en ce que le plus ou moins de durée de la compreſſion ne l'affoiblit pas. On a obſervé la même choſe à l'égard de l'élaſticité de l'air, qui conſerve ſon degré d'intenſité pendant pluſieurs années.

XIII.

Une autre conſéquence très générale & fort intéreſſante pour l'Hydrodynamique, c'eſt la *conſervation des forces vives*. Je ne déſigne par ces mots de *force vive* que le produit des *maſſes par le quarré de leurs vîteſſes*, ou ce qui revient au même, *par ce qu'on appelle les hauteurs dues à ces vîteſſes*. Et de plus je n'étens encore cette *conſervation* qu'autant qu'elle a lieu dans le *choc des corps élaſtiques*. Et dans l'application qu'on peut en faire au mouvement des particules d'eau, je ne l'admets qu'autant qu'on peut faire abſtraction de ſa *ténacité* & d'*autres obſtacles acceſſoires*. Sous cette condition la conſervation des forces vives peut être d'un grand ſecours dans la conſidération des cas où l'eau coule par des canaux horizontaux. M. *D. Bernoulli* en a donné de beaux exemples dans ſon Hydrodynamique. Je n'en rapporterai qu'un ſeul, à cauſe des réflexions que j'ai à y ajouter.

XIV.

Fig. 2. Soit ABC un tuyau cylindrique horizontal en BC & communiquant en C avec un autre CE d'un moindre diametre & d'une longueur indéfinie. Je le ſuppoſe également horizontal. Qu'une maſſe d'eau tombant par la partie AB parvienne à occuper l'eſpace DC, en ſorte qu'elle ſoit ſur le point d'entrer dans le petit canal CE. Ce qui étant établi on ſuppoſe

1°. Que cette maſſe en DC a un degré donné de vîteſſe, & que ſi ce n'eſt pas la vîteſſe de chaque particule, c'eſt du moins la vîteſſe qu'on peut conſidérer comme *moyenne*.

2°. Que ſi après quelque tems une partie de cette maſſe eſt entrée dans le petit canal, en ſorte que par ex. la maſſe totale occupe l'eſpace PM, la vîteſſe de la partie réſidue ſera changée.

3°. Qu'aux vîteſſes de chacune de ſes parties on peut ſubſtituer une vîteſſe *moyenne*, qu'on ſuppoſera être celle de toute la maſſe réſidue.

4°. Que l'eau qui dans chaque inſtant paſſe dans le petit canal, augmente ſa vîteſſe *moyenne* en raiſon réciproque des amplitudes.

5°. Que cette vîteſſe *moyenne* eſt toujours celle de toute l'eau qui eſt dans le petit canal, n'y ayant que le rétréciſſement en C qui faſſe changer de vîteſſe. On ſuppoſe encore que l'eau ne ſe ſépare point, & c'eſt à quoi la preſſion de l'air contribue de ſon côté.

XV.

Faiſons là-deſſus le calcul. Pour cet effet ſoit l'amplitude du grand canal $= m$, tandis que celle du petit eſt $= 1$. Soit de plus $DC = a$, & V la hauteur due à la vîteſſe que l'eau a dans cet état; amV ſera ce qu'on appelle la *ſomme des forces vives* de toutes les particules au tems que l'eau commence à entrer dans le petit canal. Cette ſomme doit être la même pour un tems ſuivant quelconque. Soit pour ce tems la maſſe d'eau en PM. Qu'on faſſe $DP = x$, on aura $PC = a - x$. Donc $(a - x)\,m$ ſera la maſſe réſidue, xm celle qui a paſſé dans le petit canal. Soit v la hauteur due à la vîteſſe *moyenne* de la maſſe réſidue, vmm ſera celle qui eſt due à la vîteſſe *moyenne* de l'autre partie. Donc $(a - x)mv$

$+ xm . mmv$ sera la somme des forces vives, lorsque l'eau est en PM. Cette somme étant égale à la précédente, on a

$$(a - x) mv + xm . mmv = amV,$$

d'où l'on déduit

$$v = \frac{aV}{x(mm - 1) + a}.$$

XVI.

On voit par-là que, moyennant la conservation des forces vives & sous les conditions rapportées, le calcul s'abrege considérablement, & fait même que dans ce cas, comme dans beaucoup d'autres, on n'a pas besoin de recourir au calcul intégral. La vîtesse *moyenne* est surtout ce qui fournit ces abrégés. Mais c'est aussi précisément cette vîtesse *moyenne* qui me donne occasion de faire quelque remarque, *à cause de la double maniere dont on peut l'évaluer.*

XVII.

Pour cet effet divisions toute la masse en autant de parties égales qu'il sera requis pour qu'aux particules de chaque partie on puisse supposer une même vîtesse, quelque différence qu'il y ait entre les vîtesses des différentes parties. Ce qui étant supposé, la vîtesse moyenne de toutes ces parties sera égale à la somme de leurs vîtesses divisée par leur nombre. Ainsi les vîtesses étant c', c'', c''' &c. la vîtesse moyenne sera

$$c = \frac{c' + c'' + c''' + \&c.}{1 + 1 + 1 + \&c.}.$$

XVIII.

Or quoique cette vîtesse soit *moyenne* dans le sens strict du terme, je dis néanmoins *que ce n'est pas celle que le calcul exige.* La conservation des *forces vives* demande la somme des quarrés des vîtesses multipliés chacun par la masse répondante. Or ici les masses étant rendues égales, on peut en faire abstraction. Ainsi le quarré de la véritable vîtesse moyenne, telle que le calcul l'exige, sera

$$\gamma^2 = \frac{c' . c' + c'' . c'' + c''' . c''' + \&c.}{1 + 1 + 1 + \&c.}.$$

Ce quarré differe assez du quarré de c & le *surpasse* toujours. Car on a

$$c^2 = \frac{[c' + c'' + c''' + \&c.]^2}{[1 + 1 + 1 + \&c.]^2}$$

donc

$$c^2 [1 + 1 + 1 + \&c.]^2 = [c' + c'' + c''' + \&c.]^2.$$

Ce polynome, que je supposerai de n termes, étant élevé à la seconde puissance, donne

1°. la somme de tous les quarrés $c' . c' + c'' . c'' + \&c.$ & par conséquent la valeur $n\gamma^2$;

2°. la double somme des produits des vîtesses prises deux à deux. Le nombre de ces produits est $n . \frac{n-1}{2}$.

Soit p la somme de ces produits divisée par leur nombre, & nous aurons la premiere équation

$$nncc = n\gamma^2 + n . (n - 1) . p.$$

Formons maintenant des valeurs c', c'', c''' &c. autant de binomes $c' - c''$, $c' - c'''$, &c. $c'' - c'''$, &c. qu'elles peuvent être prises deux à deux. Leur nombre sera également $= n . \frac{n-1}{2}$. Élevons chacun de ces binomes à la seconde puissance & prenons la somme de ces puissances. Cette somme sera composée

1°. de la somme $(n - 1)$tuple des quarrés $c' . c'$, $c'' . c''$ &c. Cette partie sera donc $= (n - 1)\gamma^2 n$;

2°. de la double somme des mêmes produits. Cette partie est soustractive & égale à $n . (n - 1) p$.

Soit la différence de ces deux parties, ou, ce qui revient au même, la somme de ces secondes puissances $= \sigma$. Et nous aurons la seconde équation

$$\sigma = n(n - 1)\gamma^2 - n(n - 1)p.$$

Éliminant des deux équations que nous venons de trouver la partie qui leur est commune, nous aurons

$$\gamma\gamma = cc + \frac{\sigma}{nn}.$$

Par-là on voit non ſeulement que γ eſt toujours plus grande que c, mais auſſi quelle eſt la différence.

XIX.

Donc, en employant la vîteſſe moyenne c au lieu de γ, il en réſulte dans la ſomme des forces vives un *défaut*. On la trouve moins grande qu'elle ne doit être. Or il arrive à propos que la *ténacité* de l'eau & d'autres obſtacles acceſſoires *diminuent* les vîteſſes. Il y a donc là quelque *compenſation*, qui, du moins en certains cas, peut être exacte. On voit aſſez qu'il convenoit d'inſiſter ſur cette remarque. Revenons maintenant à notre exemple.

XX.

Si en ôtant le petit canal on laiſſe l'ouverture en C, on n'a plus beſoin de tenir compte de l'eau qui en eſt ſortie, au moins en tant qu'elle ne réagit plus. Tout ce qu'il faut faire, c'eſt de tenir compte de la force vive qui par-là ſe perd relativement à l'eau réſidue dans le grand canal. La ſomme de cette force vive perdue eſt $= m\int mmv\,dx$, parce qu'elle ſe perd ayant la vîteſſe due à la hauteur mmv. Ce qui étant obſervé, nous aurons comme auparavant

$$amV = (a-x)mv + m^3\int v\,dx.$$

Donc en différentiant & diviſant par m,

$$0 = (a-x)\,dv - v\,dx + m^2 v\,dx,$$

d'où l'on tire l'intégrale

$$\frac{v}{V} = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{mm-1}.$$

XXI.

Il eſt ſans contredit à ſouhaiter que la conſervation des forces vives puiſſe fournir des abrégés de calcul ſemblables encore dans les cas où la gravité agit. M. *Huyguens* a fourni des vues qui peuvent y conduire, & M. *D. Bernoulli* s'en eſt ſervi avec beaucoup de ſuccès. Il s'agit d'un théoreme très général, dont ſurtout M. *d'Alembert* s'eſt donné beaucoup de peine de fournir une démonſtration, laquelle, ſi elle n'eſt pas tout auſſi générale que le théoreme, peut du moins conduire ſur les voies de l'étendre à tous les cas qu'on voudra diſcuter. Le préſent Mémoire étant élémentaire, je n'examinerai ce théoreme qu'en tant qu'il eſt applicable au mouvement des eaux dans des tuyaux, tel qu'il ſe préſente dans la pratique. On aura toujours le choix d'aller au plus composé, dès que les cas plus ſimples seront éclaircis. C'eſt je crois ce que demande la *bonne méthode* & la *vraie ſynthèſe*. J'aurai ſoin encore de diſcerner ce qui dans le théoreme de Mrs. *Huyguens* & *Bernoulli* eſt 1°. de pure Géométrie, 2°. de pure Statique, 3°. de Dynamique.

XXII.

Lemme premier.

Fig. 3. Sur une droite ſoient trois points quelconques A, C, B. Prenant de plus ſur la même droite un point quelconque D, je dis qu'on aura

$$DA\,.\,CB + DB\,.\,CA = DC\,.\,AB.$$

Car on a

$$DC = DA + AC$$
$$AB = CB + AC$$

donc

$$DC\,.\,AB = DA\,.\,CB + AC\,.\,(DA + AC + CB)$$

donc

$$DC\,.\,AB = DA\,.\,CB + AC\,.\,DB.$$

Lemme ſecond.

Fig. 4. Deux droites DB, DC, qui ſe croiſent en D, coupant trois paralleles quelconques Aa, Bb, Cc, je dis que

$$Aa\,.\,CB + Bb\,.\,AC = Cc\,.\,AB.$$

Par le Lemme premier on a

$$DA\,.\,CB + DB\,.\,AC = DC\,.\,AB.$$

Or à cauſe du parallèliſme on a

$$n\,.\,Aa = DA$$
$$n\,.\,Cc = DC$$
$$n\,.\,Bb = DB.$$

Subſtituant donc ces valeurs on aura

$$n\, Aa \, . \, CB + n \, . \, Bb \, . \, AC = n \, . \, Cc \, . \, AB.$$

Donc en diviſant par n

$$Aa \, . \, CB + Bb \, . \, AC = Cc \, . \, AB.$$

Lemme troiſieme.

Trois parallèles quelconques αa, Cc, βb étant coupées par deux droites quelconques DB, Db, je dis qu'on aura Fi

$$\alpha a \, . \, CB + \beta b \, . \, AC = Cc \, . \, AB + \alpha A \, . \, BC + \beta B \, . \, AC.$$

Par le Lemme ſecond on a

$$Aa \, . \, CB + Bb \, . \, AC = Cc \, . \, AB.$$

Ajoutant de part & d'autre les produits

$$\alpha A \, . \, CB + \beta B \, . \, AC$$

on aura

$$(Aa + \alpha A) \, . \, CB + (Bb + \beta B) \, . \, AC$$
$$= Cc \, . \, AB + \alpha A \, . \, CB + \beta B \, . \, AC.$$

Donc

$$\alpha a \, . \, CB + \beta b \, . \, AC = Cc \, . \, AB + \alpha A \, . \, CB + \beta B \, . \, AC.$$

XXIII.

Application de ces Lemmes à la Statique.

Si dans les trois Figures auxquelles ces Lemmes ſe rapportent, on ſuppoſe dans les points A, B des corps dont les maſſes ſoient en raiſon réciproque de leurs diſtances au point C, ce point C ſera leur *centre commun de gravité*, & nommant ces maſſes A, B, on a

$$A : CB = B : AC = (A + B) : AB.$$

Donc dans les Lemmes précédens on peut ſubſtituer aux diſtances CB, AC, AB les maſſes A, B, $(A + B)$.

Réciproquement, ſi les maſſes A, B ſont données, on prendra le point C, en ſorte que $(A + B) : A = AB : CB$.

XXIV.

On aura donc en vertu des trois Lemmes

$$DA \,.\, A + DB \,.\, B = DC \,.\, (A + B)$$
$$Aa \,.\, A + Bb \,.\, B = Cc \,.\, (A + B)$$
$$\alpha a \,.\, A + \beta b \,.\, B = Cc \,.\, (A + B) + \alpha A \,.\, A + \beta B \,.\, B.$$

XXV.

Confidérant les droites DA, DC, DB, de même que Aa, Cc, Bb, comme des parties d'un levier, il eft évident que les produits dans ces trois équations dénoteront des *momens ftatiques.* Cette maniere d'envifager ces droites eft d'autant plus naturelle, qu'en effet ces équations ne font vraies qu'autant que le point C eft le *centre commun de gravité* des maffes placées en A, B.

XXVI.

Application au mouvement uniforme.

Les droites Aa, Cc, Bb défignant les vîteffes des maffes A, B, il eft évident que ces mêmes produits défigneront ce qu'on appelle la *quantite de mouvement*, & qu'on aura

$$Aa \,.\, A + Bb \,.\, B = Cc \; (A + B),$$

de forte que Cc fera la vîteffe du centre commun de gravité.

Si les corps A, B n'ont pas la même direction, on peut toujours réfoudre ces directions en d'autres qui foient paralleles & perpendiculaires, p. ex. horizontales & verticales, & la *direction du mouvement du centre commun de gravité fe décompofera tout de même.*

XXVII.

Application au mouvement accéléré par la gravité.

Un corps tombant, à commencer du repos, foit verticalement, foit fur un plan incliné ou courbé quelconque, aura dans chaque point de fon chemin la même vîteffe, dès que ce point eft à la même profondeur au deffous du niveau du point d'où il a commencé à tomber, & cette profondeur eft en raifon du quarré de la vîteffe.

XXVIII.

XXVIII.

Cet énoncé eſt très connu. Il procure l'avantage *que dès qu'il n'eſt queſtion que de la vîteſſe, il ſuffit de tenir compte de la profondeur, c'eſt à dire de la dimenſion verticale*, qui non ſeulement eſt linéaire, mais conſtamment parallele. *Les droites* αa, γc, βb *étant regardées comme verticales, tiendront donc lieu d'échelle de la partie verticale de la chute, & par conſéquent auſſi des quarrés des vîteſſes.*

XXIX.

Si donc αa ſert d'échelle pour le corps A, Bb pour le corps B, & Cc pour le centre commun de gravité, il eſt clair que des parties quelconques de ces droites déſigneront les *parties verticales du chemin parcouru*, & qu'on aura

$$Aa\,.\,A + Bb\,.\,B = Cc\,.\,(A + B)$$
$$\alpha a\,.\,A + \beta b\,.\,B = Cc\,.\,(A + B) + \alpha A\,.\,A + \beta b\,.\,B.$$

Ces équations ſont vraies uniquement parce que les corps étant en A, B, leur centre commun de gravité eſt en C, & que ces mêmes corps étant en a, b, leur centre commun de gravité eſt en c. *Cela eſt de pure Statique.* (Art. XXV.).

XXX.

Suppoſons donc que les corps A, B ſoient aux profondeurs A, B, Fig. 5.
après être tombés par des hauteurs $= \alpha A$, βB. Si après quelque tems ils ſont aux profondeurs a, b, leur centre commun de gravité ſera parvenu de la profondeur C à la profondeur c, & on a

$$\alpha a\,.\,A + \beta b\,.\,B = Cc\,.\,(A + B) + \alpha A\,.\,A + \beta B\,.\,B.$$

Ici donc αA, βB, αa, Cc, βb déſignent les hauteurs verticales de la chute, & à cet égard cette équation eſt de *pure Statique*. Or la *Dynamique* prête aux droites αA, αa, βB, βb une *nouvelle ſignification.* Elles ſont en raiſon des quarrés des vîteſſes. Donc *elles peuvent dénoter ces quarrés* à l'aide d'un coëfficient qui rende les dimenſions *homogenes*. Mais cela ne regarde point la droite Cc, qui reſte de *pure Statique*. C'eſt auſſi la raiſon pourquoi, au lieu des *quarrés des vîteſſes*, on aime mieux ſubſtituer *les hauteurs verticales de la chute* que pour cette raiſon on nomme *hauteurs dues aux vîteſſes.* Car de cette maniere Cc conſerve ſon nom de *deſcente du centre commun de gravité.*

XXXI.

Nommons t *le tems où les corps ſont aux profondeurs* A, B, *&* τ *le tems où ils ſont aux profondeurs* a, b. *On trouvera pour le tems* τ *la ſomme des produits* $\alpha a . A + \beta b . B$, *ſoit en les cherchant directement, ſoit en ajoutant à la ſomme des produits* $\alpha A . A + \beta B . B$, *qui répondent au tems* τ, *le produit* $Cc . (A + B)$. Car

$$\alpha a . A + \beta b . B = \alpha A . A + \beta B . B + Cc . (A + B).$$

XXXII.

Voilà donc le théoreme de *Huyguens* pour deux corps. On l'étend ſans difficulté à un nombre quelconque de corps, dont chacun tombe ſur un

Fig. 6. plan quelconque incliné ou courbé. Soient p. ex. trois corps A, B, D de ſorte qu'en même tems ils ſe trouvent aux profondeurs A, B, D ayant des vîteſſes dues aux hauteurs αA, βB, δD. On joindra les points BD, bd par des droites; on déterminera le centre commun de gravité des deux corps B, D en E, & la verticale Ee paſſera par le même centre de gravité en e, lorſque ces corps feront en b, d. Enſuite joignant les points A, E ainſi que a, e, on aura tout de même le centre commun de gravité des trois corps en C, c ſur les droites Ae, ae, & Cc ſera également verticale. Ce qui étant fait, on aura

$$Bb . B + Dd . D = Ee . (B + D).$$

Et ajoutant de part & d'autre

$$Aa . A = Aa . A$$

on a

$$Aa . A + Bb . B + Dd . D = Aa . A + Ee . (B + D).$$

Or

$$Aa . A + Ee . (B + D) = Cc . (A + B + D)$$

parce que par la nature du centre de gravité on a

$$DA . A + DE . (B + D) = Cc . (A + B + D)$$

& que les droites Aa, Ee, Cc, sont en raison des droites DA, DE, DC. Donc en substituant on aura

$$Aa \, . \, A + Bb \, . \, B + Dd \, . \, D = Cc \, . \, (A + B + D)$$

& ajoutant de part & d'autre $\alpha A \, . \, A + \beta B \, . \, B + \delta D \, . \, D$ on aura

$$\alpha a \, . \, A + \beta b \, . \, B + \delta d \, . \, D = Cc \, . \, (A + B + D)$$
$$+ \alpha A \, . \, A + \beta B \, . \, B + \delta D \, . \, D.$$

XXXIII.

Si les trois corps A, B, C ne sont pas à des hauteurs A, B, D & a, b, d, qu'on puisse placer en ligne droite, comme dans la 7me Figure, on joindra d'abord les points B, D de même que b, d, & ayant déterminé le centre commun de gravité de ces deux corps en E, la verticale Ee déterminera ce même centre en e pour le tems où les corps sont aux profondeurs b, d. Tirant ensuite les droites EA, ea, on déterminera le centre commun de gravité des trois corps A, B, D en C, & la verticale Cc déterminera ce même centre en c, pour le tems où ces trois corps sont aux profondeurs a, b, d. Ce qui étant fait, on aura Fig. 7.

$$Bb \, . \, B + Dd \, . \, D = Ee \, . \, (B + D).$$

Et tout de même

$$Mm \, . \, B + Nn \, . \, D = Ee \, . \, (B + D.).$$

Donc

$$Bb \, . \, B + Dd \, . \, D = Mm \, . \, B + Nn \, . \, D.$$

Ajoutant de part & d'autre $Aa \, . \, A$, on aura

$$Aa \, . \, A + Bb \, . \, B + Dd \, . \, D = Aa \, . \, A + Mm \, . \, B + Nn \, . \, D$$
$$= Aa \, . \, A + Ee \, . \, (B + D).$$

XXXIV.

Voilà le théoreme de *Huyguens* pour trois corps. S'il y en a un quatrieme, on déterminera la verticale du centre commun de gravité, & on se servira de l'expression $Cc \, . \, (A + B + D)$, comme dans le cas de trois corps on s'est servi de l'expression $Dd \, . \, (B + D)$. Mais pour

donner une démonstration vraiment générale, je vais prouver que *si ce théoreme a lieu à l'égard de* n *corps, il aura également lieu à l'égard de* n + 1 *corps.* J'entens que ces corps tombent librement chacun sur un plan incliné ou courbé quelconque, sans se rencontrer & sans rencontrer quelque autre obstacle. Soit donc un intervalle de tems quelconque. Que pour le commencement de ce tems τ on multiplie chaque masse des n corps par la hauteur due à leurs vîtesses. Soit $\int hm$ la somme de ces produits.
Fig. 7. Soit de plus $\int h'm$ cette même somme pour la fin du tems τ. Enfin soit Ee la descente du centre commun de gravité de ces n corps pendant le tems τ, & $\int m$ la somme de leurs masses. Nous aurons donc en vertu du théoreme

$$\int h'm = \int hm + Ee . \int m.$$

Qu'il y ait maintenant un corps de plus. Que ce corps ait la masse $= A$; qu'au commencement du tems τ il soit à la profondeur A & qu'il ait la vîtesse due à la hauteur αA. Qu'à la fin du tems τ il soit à la profondeur a, il aura la vîtesse due à la hauteur αa. Qu'on joigne les points A, E, de même que ae, par des droites, & que sur ces droites on prenne le centre commun de gravité C, c de sorte que

$$AC . A = CE . \int m$$
$$ac . A = ce . \int m.$$

Cc sera la descente du centre commun de gravité des $m + 1$ corps, & on aura par des *raisons purement statiques*

$$Aa . A + Ee . \int m = Cc . (A + \int m).$$

Ajoutant de part & d'autre le produit $\alpha A . A$, cette équation se change en

$$\text{(I).} \quad \alpha a . A + Ee . \int m = Cc . (A + \int m) + \alpha A . A.$$

Or l'équation pour n corps étant

$$\text{(II).} \quad \int h'm = Ee . \int m + \int hm,$$

on aura, en éliminant le produit $Ee . \int m$,

$$\alpha a . A + \int h'm = Cc\ (A + \int m) + \alpha A . A + \int hm,$$

ce qui veut dire

$$\text{(III).} \quad \int h'(m + 1) = Cc . \int (m + 1) + \int h\ (m + 1).$$

Or l'équation (I) étant vraie par elle-même, il eſt évident que ſi l'équation (II) eſt vraie, l'équation (III) l'eſt auſſi. Mais le théoreme (I) eſt vrai pour deux corps; donc il eſt vrai pour 3 corps; donc auſſi pour 4, 5, 6 &c., c'eſt à dire pour autant de corps qu'on voudra.

XXXV.

Tant que chacun des corps tombe librement dans des plans inclinés ou courbés quelconques, il eſt indifférent qu'ils ſoient élaſtiques ou non. Tout ce que nous venons de dire aura également lieu. Mais *dès que ces corps en tombant ſe choquent, ſoit entr'eux, ſoit contre des obſtacles immobiles, l'élaſticité entre néceſſairement en ligne de compte.* Car on ſait que ce qu'on nomme la *conſervation des forces vives* n'a lieu dans le choc que lorsque les corps ſont *parfaitement élaſtiques.* Or comme les particules de l'eau le ſont, il ſuffira que nous examinions les cas où les corps ſont élaſtiques.

XXXVI.

Si donc un des corps choque contre un obſtacle immobile, ſon élaſticité fait qu'il en réjaillit avec la même vîteſſe qu'il avoit avant le choc. La direction de ſon mouvement ſera néceſſairement changée. Mais comme ce changement ſe fait dans un point, *la profondeur pendant l'inſtant où ſe fait le choc, eſt cenſée reſter la même.* Donc la même vîteſſe continue d'être due à la même hauteur pendant l'inſtant que dure le choc, & cet inſtant ſera d'autant plus court, que le corps élaſtique ſera plus dur. Suppoſons que ce ſoit le corps A au tems où les trois corps ſont en A, B, D. Le changement de direction qui naît du choc, fait que lorsque les autres corps ſont parvenus aux profondeurs b, d, & par conſéquent leur centre commun de gravité à la profondeur e, le corps A n'eſt pas encore parvenu à la profondeur a. Suppoſons qu'il ne ſoit parvenu qu'à la profondeur a'. Il n'aura donc que la vîteſſe due à la hauteur $\alpha a'$. Et tirant la droite $a'c'e$, le centre commun de gravité ne ſera parvenu qu'à la profondeur c'. Cela fait qu'au lieu de l'équation précédente on aura la ſuivante

$$\alpha a'.A + \beta b.B + \delta d.D = Cc'.(A + B + D)$$
$$+ \alpha A.A + \beta B.B + \delta D.D.$$

Mais aussi ne veut-on pas savoir quelle équation on auroit sans le choc. Le choc s'étant fait, on veut connoître l'état du systeme tel qu'il est après ce changement. Et cette équation fait voir qu'on ne laisse pas de pouvoir le comparer avec l'état où il étoit avant le choc, parce que le choc ne change rien à la hauteur αa, & quant à la hauteur Aa', on la prend telle qu'elle est, de même que la hauteur Cc'.

XXXVII.

Mais quand les corps se choquent entr'eux, alors leurs vîtesses après le choc sont ordinairement différentes de celles qui avoient lieu avant le choc. Supposons que les deux corps B se choquent au moment qu'ils sont aux profondeurs B, D. Avant le choc leurs vîtesses étoient dues aux hauteurs $B\beta$, $D\delta$. Supposons qu'après le choc elles soient dues aux hauteurs $B\beta'$, $D\delta'$, & que dans le tems où le corps A parvient à la profondeur a, les corps B, D parviennent, non aux profondeurs b, d, où ils seroient parvenus sans le choc, mais aux profondeurs b', d'. Or on sait *que le choc ne change ni la direction ni la vîtesse du centre commun de gravité.* Donc les points E, e, C, c restent tels qu'ils sont. De plus on sait *que dans le choc des corps élastiques la somme des produits des masses par les quarrés de leurs vîtesses, ou, ce qui revient au même, par les hauteurs dues à ces vîtesses, est la même tant avant qu'après le choc.* On aura donc

$$\beta' B \,.\, B = \delta' D \,.\, D = \beta B \,.\, B + \delta D \,.\, D.$$

Et par une considération *purement statique* on a de plus

$$Bb' \,.\, B + Dd' \,.\, D = Ee \,.\, (B + D).$$

Ajoutant ensemble ces deux équations on aura

$$\beta' b' \,.\, B + \delta' d' \,.\, D = Ee \,.\, (B + D) + \beta B \,.\, B + \delta D \,.\, D.$$

Et de plus ajoutant encore l'équation

$$\alpha a \,.\, A = \alpha A \,.\, A + Aa \,.\, A$$

on aura

$$\alpha a \,.\, A + \beta' b' \,.\, B + \delta' d' \,.\, D = Ee\,(B + D)$$
$$+ Aa \,.\, A + \alpha A \,.\, A + \beta B \,.\, B + \delta D \,.\, D.$$

Mais par des raisons *purement statiques* on a

$$Ee\,(B + D) + Aa\,.\,A = Cc\,.\,(A + B + C).$$

Donc substituant cette valeur, on aura

$$\alpha a\,.\,A + \beta' b'\,.\,B + \delta' d'\,.\,D = Cc\,.\,(A + B + C)$$
$$+ \alpha A\,.\,A + \beta B\,.\,B + \delta D\,.\,D.$$

Voilà donc *l'état du systeme avant le choc comparé à celui qui a lieu lorsqu'après le choc il s'est écoulé un tems quelconque, si pendant ce tems les corps ont continué de tomber librement dans des plans inclinés ou courbés quelconques.* J'observe *que le corps* A *peut être regardé comme la masse réunie d'autant de corps qu'on voudra, si par* Aa *on entend la descente du centre commun de gravité de ces corps, & que par* αA . A *on entende la somme des produits des masses par les hauteurs dues aux vitesses, pendant que leur centre commun de gravité est à la profondeur* A.

XXXVIII.

Voici maintenant le résultat final de ces recherches.

Soit un nombre quelconque de corps élastiques, qui dans l'espace ayent pour un moment donné des vitesses & des directions quelconques données, qui de plus ne soient agitées par quelque autre force externe que par celle de la gravité supposée verticale & constante, & qu'enfin ces corps s'entrechoquent mutuellement, suivant qu'ils se rencontrent, ou qu'ils réjaillissent d'obstacles immobiles quelconques. Soient après un tems quelconque les vitesses de ces mêmes corps quelconques; substituant à ces vitesses les hauteurs qui leur sont dues, je dis: qu'en multipliant la masse de chaque corps par la hauteur due à sa vitesse initiale, & qu'en multipliant de plus la somme des masses par la descente verticale ou la partie verticale de la descente du centre commun de gravité pendant un tems quelconque τ, *la somme de tous ces produits sera la même que celle qu'on trouve en multipliant chaque masse par la hauteur due à sa vitesse à la fin du tems* τ, *& ajoutant ces produits ensemble.*

XXXIX.

Voilà le cas des fluides qui se meuvent par des canaux verticaux ou inclinés ou courbés d'une maniere quelconque, abstraction faite de la ténacité

& d'autres obſtacles acceſſoires. La vîteſſe naît de la gravité, dont l'action eſt verticale, & cette direction n'eſt changée que par le choc & la courbure ou l'inclinaiſon des canaux. Le rétréciſſement des canaux multiplie des chocs & contribue par-là à l'accélération qui en réſulte. Notre théoreme peut donc y être appliqué. Et il donne l'avantage, qu'il ſuffit de connoître *l'état initial* & la *deſcente du centre de gravité après un tems quelconque*, pour connoître le *même état tel qu'il eſt après ce tems.* J'entens ici par *état* la *ſomme des produits de chaque maſſe par la hauteur due à ſa vîteſſe.* Et pour *abréger le calcul* on ſubſtitue quelque *vîteſſe moyenne* aux *vîteſſes réelles*, en tant qu'elles ne different pas beaucoup l'une de l'autre, ou du moins pas en ſorte qu'il faille néceſſairement tenir compte de leur différence, comme cela eſt requis lorsque c'eſt le rétréciſſement du canal qui change les vîteſſes, quoiqu'encore à cet égard on ſe borne à tenir compte du changement qui en réſulte pour les *vîteſſes moyennes*, afin de rendre le calcul moins prolixe & moins embarraſſant. Du reſte on ne ſauroit diſconvenir que ces *abrégés du calcul* ne ſe faſſent *aux dépens de l'exactitude*, & il faudra ſavoir gré à qui fournira des principes ou des manieres d'appliquer les principes au calcul, qui joignent à l'avantage de la briéveté celui d'une plus grande exactitude. J'ai fait voir ci-deſſus que les défauts qui naiſſent de la *vîteſſe moyenne* compenſent du moins en partie ceux que la *ténacité* produit & dont on ne tient pas compte. Cela ne laiſſe pas de rendre l'uſage de ces abrégés plus tolérable. Donnons maintenant un exemple.

XL.

Fig. 8. Soit AB un réſervoir que je ſuppoſerai parallélipipede. Que l'eau en deſcendant & remontant par le canal cylindrique $CDEF$ jailliſſe par le petit tuyau FG. J'exprimerai par 1 l'aire de l'orifice G, par n l'amplitude du cylindre $CDEF$, & par m la baſe du réſervoir. Si donc pour un tems quelconque la hauteur due à la vîteſſe *moyenne* de l'eau du réſervoir eſt $= v$, la hauteur due à la vîteſſe *moyenne* de l'eau jailliſſante par G ſera $= mmv$, & la hauteur due à la vîteſſe *moyenne* de l'eau dans le canal $CDEF$ ſera $= mmv : nn$. Faiſant de plus

$$FG = h,$$

$$\begin{array}{llll} FG = h, & & AB = e \\ FE = a & & AP = x \\ ED = b & & \\ DC = b & & \end{array}$$

on aura les maſſes d'eau

$$\begin{array}{ll} \text{en } FG & = h \\ \text{en } CDEF & = n\,(a + b + c) \\ \text{en } PB & = m\,(a - x) \end{array}$$

& par conſéquent pour le tems τ la ſomme des produits, ou ſi l'on veut des forces vives,

$$h \,.\, mmv + n \,.\, (a + b + c)\, \frac{mmv}{nn} + m\,(e - x) \,.\, v.$$

XLI.

Pour connoître l'état de cette quantité d'eau au tems $\tau + \mathrm{d}\tau$, il faut d'abord trouver la deſcente du centre commun de gravité pendant le tems élémentaire $\mathrm{d}\tau$. Or pendant cet intervalle la ſurface de l'eau dans le réſervoir s'eſt abaiſſée de P en p de la quantité $Pp = \mathrm{d}x$. Le réſervoir a donc perdu la maſſe $m\,\mathrm{d}x$. En échange une maſſe égale eſt ſortie par G avec une vîteſſe due à la hauteur mmv. Par-là on trouve ſans peine que la deſcente du centre commun de gravité a été

$$\mathrm{d}y = \frac{m\,(c + e - x)\,\mathrm{d}x - m\,(a + h)\,\mathrm{d}x}{h + n\,(a + b + c) + (e - x)\,m}.$$

Cette deſcente étant multipliée par la maſſe totale donne

$$m\,(c + e - x)\,\mathrm{d}x - m\,(a + h)\,\mathrm{d}x,$$

quantité qui doit être ajoutée à la ſomme des produits trouvée dans l'article précédent, afin d'avoir une ſomme égale à celle des produits que nous allons trouver pour le tems $\tau + \mathrm{d}\tau$.

XLII.

Pour ce tems la vîteſſe de l'eau du réſervoir eſt due à la hauteur $v + \mathrm{d}v$, & celle des autres maſſes aux hauteurs $mm\,(v + \mathrm{d}v) : nn$ &

$mm(v + \mathrm{d}v)$. Or les maſſes étant multipliées par ces hauteurs donnent les produits

$$m\,(e - x - \mathrm{d}x)\,.\,(v + \mathrm{d}v)$$
$$n\,(a + b + c)\,.\,(v + \mathrm{d}v)\,\frac{mm}{nn}$$
$$(h + m\,\mathrm{d}x)\,.\,(v + \mathrm{d}v)\,mm.$$

Cette ſomme étant égale à la précédente donne

$$\begin{aligned}&(c + e - x - a - h)\,m\,\mathrm{d}x + hmmv\\&\quad + n(a + b + c)\,.\,\frac{mm}{nn}\,v + m\,.\,(e - x)\,v\\&= m(e - x - \mathrm{d}x)\,(v + \mathrm{d}v) + n(a + b + c)\\&(v + \mathrm{d}v)\,\frac{mm}{nn}\,v + (h + m\,\mathrm{d}x)\,(v + \mathrm{d}v)\,m^2\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}&(c + e - x - a - h)\,\mathrm{d}x = [e - x + hm + \tfrac{m}{n}\\&(a + b + c)]\,\mathrm{d}v + (mm - 1)\,v\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Et en faiſant pour plus de briéveté

$$e + hm + \frac{m}{n}\,(a + b + c) = B$$

& poſant $v = 0$, lorſque $x = 0$, on aura l'intégrale

$$\begin{aligned}v = {}& \frac{B - x}{mm - 2} + \frac{c - a - h - B - hm - \frac{m}{n}\,(a + b + c)}{mm - 1}\\&- \frac{B}{mm - 1}\,.\,\left(\frac{B}{B - x}\right)^{1 - mm}\\&- \frac{c - a - h - B - hm - \frac{m}{n}\,(a + b + c)\,.\,\left(\frac{B}{B - x}\right)^{1 - mm}}{mm - 1}\end{aligned}$$

XLIII.

Si le rapport m eſt fort grand, mm le ſera d'autant plus. Cela fait que, pour peu qu'il ſe ſoit écoulé d'eau, la valeur

$$\left(\frac{B}{B - x}\right)^{1 - mm}$$

devient ſi petite, qu'on peut l'omettre. Et poſant par la même raiſon mm au lieu de $mm - 1$, $mm - 2$, on aura ſimplement

$$vmm = c - e - x - a - h$$

ce qui veut dire qu'alors l'eau ſort par G avec la vîteſſe due à la hauteur NG, qui eſt celle du niveau de P au deſſus de l'ouverture G. C'eſt la regle qu'on a employée de tout tems. Ici nous voyons qu'elle admet des reſtrictions. Mais nous verrons bientôt qu'elle ſert de meſure lorsqu'il s'agit de déterminer la *réaction de l'eau qui naît de l'accélération due au rétréciſſement.*

XLIV.

Pour cet effet je reprens la formule différentielle en lui donnant cette forme

$$dv = \frac{[m(c + e - x - a - h) - (mm - 1)vm]\,dx}{m(e - x) + hmm + n(a + b + c)\frac{mm}{nn}}.$$

Je dis que c'eſt la forme qu'elle doit avoir lorsqu'on veut la comparer avec la loi fondamentale de la Dynamique, en ſorte qu'on tienne compte de la *force motrice*, de la *maſſe*, de l'*eſpace* & de la *vîteſſe*, ſans ſubſtituer à ces trois derniers articles quelque force motrice *purement idéale.* La loi fondamentale de la Dynamique donne

$$dv = \frac{P\,dx}{M}$$

où P eſt la force *motrice*, M la *maſſe*, dx l'élément de l'*eſpace*, dv l'élément de la hauteur due à la *vîteſſe*, & la formule

$$dv = \frac{P\,dx}{M}$$

donne le *rapport entre ces quatre quantités*, qui en elles-mêmes ſont très *hétérogenes*, de ſorte qu'en toute rigueur cette équation doit avoir la forme ſuivante

$$\frac{dv}{1} = \frac{P}{1} \cdot \frac{dx}{1} \cdot \frac{1}{M}$$

où chaque unité eſt *homogene* avec la quantité au deſſous ou au deſſus de laquelle elle ſe trouve. C'eſt donc une *métonymie* lorsqu'en faiſant

$$P = \frac{M\,dv}{dx}$$

on regarde $M\,dv : dx$ comme une *force motrice*, tandis que ce n'eſt qu'au moyen des *unités* & des *rapports* que je viens d'indiquer que c'eſt une *valeur égale* à celle de la *force motrice* P.

XLV.

Ce n'eſt pas qu'en prenant la formule

$$dv = \frac{P\,dx}{M}$$

telle qu'elle eſt & doit être, on puiſſe prendre pour P, M la *force motrice* & la *maſſe* ſimplement telles qu'elles ſont en elles-mêmes. Car

1°. la force motrice peut agir *obliquement*, & dans ce cas il eſt clair qu'elle doit être *réduite*.

2°. Elle peut agir *médiatement*, comme quand elle agit moyennant des rouages &c. Encore alors elle admet des *réductions* fondées ſur le principe du levier.

3°. Elle peut être *contrebalancée* ſoit par d'autres forces, ſoit par quelque réaction ou des obſtacles &c. Il eſt clair qu'en ces cas elle doit être *diminuée* pour autant qu'elle eſt *empêchée* de produire du mouvement.

4°. Tout de même les maſſes peuvent être diſpoſées en ſorte qu'elles n'acquierent pas la même *vîteſſe* & par conſéquent pas la même *accélération*. Cela fait qu'en retenant la vîteſſe de l'une de ces maſſes, toutes les autres maſſes doivent être réduites en raiſon réciproque du quarré des vîteſſes, ou bien en raiſon réciproque des hauteurs dues à ces vîteſſes.

Tout cela étant obſervé, le calcul ſe fait ſur les *forces motrices*, les *maſſes*, les *eſpaces* & les *vîteſſes*, ou les *hauteurs dues à ces vîteſſes*, réduites s'il le faut, mais ſans que pour cela les *expreſſions* changent de *ſignification*, comme cela arrive quand on regarde $M\,dv : dx$ comme une *force motrice*, tandis que les lettres M, v, x dénotent des *maſſes*, des *hauteurs* & des *eſpaces*. Cela choque quand on n'avertit pas que c'eſt une ſignification *empruntée*, mais que du reſte on étoit en droit d'emprunter, parce que par les *unités* & les *rapports* indiqués ci-deſſus on peut la rendre égale à la valeur d'une force motrice. On *emprunta* cette ſignification encore par la raiſon qu'on crut que les corps en mouvement avoient une force uniquement par ce qu'ils ſont en mouvement, force qui devoit être différente de celle de l'élaſticité ou de la gravité, force enfin dont on ne ſavoit pas trop bien ſi elle eſt le produit de la maſſe par la vîteſſe ou par ſon quarré.

XLVI.

Après ces remarques reprenons notre équation

$$dv = \frac{[m(c+e-x-a-h) - (mm-1)vm] \cdot dx}{m(e-x) + hmm + n(a+b+c) \cdot \frac{mm}{nn}}$$

& nous voyons bientôt que le dénominateur eſt la ſomme des différentes maſſes, c'eſt à dire celle du réſervoir $m(e-x)$ telle qu'elle eſt, & celles du canal $CDEF$, $n(a+b+c)$ multipliée par $\frac{mm}{nn}$, c'eſt à dire réduite au réſervoir, ou bien à la vîteſſe de celle du réſervoir, & enfin la maſſe du tuyau FG, h, multipliée par mm, c'eſt à dire réduite à la vîteſſe de celle du réſervoir.

XLVII.

Comme donc le dénominateur déſigne la *maſſe totale réduite au réſervoir*, & que dx eſt l'élément de l'*eſpace* par lequel la ſurface de l'eau du réſervoir s'abaiſſe pendant l'élément du tems $d\tau$, il s'enſuit que le numérateur déſigne la *force motrice* en tant qu'elle imprime à la maſſe réduite l'élément de la vîteſſe due à la hauteur v. Nous voyons que cette force motrice eſt *diminuée*. Car la vraie force motrice ſeroit $=$ $m(c+e-x-a-h)$. Mais il faut en ſouſtraire la partie $(mm-1)vm$, requiſe pour l'accélération due au rétréciſſement en C, & ſurtout en F. Pour interprêter cette partie ſouſtractive, obſervons que mvv déſigne la hauteur due à la vîteſſe de l'eau jailliſſante par G. Mais cette même eau ſans ce rétréciſſement a la vîteſſe due à la hauteur v. Donc ce qui eſt dû au rétréciſſement ne peut ſe rapporter qu'à la hauteur $(mm - 1)v$. Cette hauteur étant multipliée par la baſe m, donne une colonne d'eau dont le poids équivaut à la partie ſouſtractive de la force motrice.

XLVIII.

Cette interprétation nous fait voir que quand même la vîteſſe de l'eau jailliſſante par G n'eſt due à la *hauteur de la preſſion* NG que ſous certaines conditions (Art. XLIII.) toutefois *la réaction produite par le rétréciſſement ſe meſure par la hauteur due à cette vîteſſe*, c'eſt à dire par la hauteur mmv & qu'il ne faut ſouſtraire de cette hauteur la partie dv que parce que cette vîteſſe n'eſt pas due toute entiere au rétréciſſement. Nous voyons de plus *que cette réaction ſe répand ſur toute la ſurface* m, *ſans que par là ſon intenſité ſoit diminuée.* Car la hauteur $(mm - 1)v$ doit être multipliée par la baſe m toute entiere. Cette propoſition eſt l'inverſe du fameux paradoxe hydroſtatique qui dit, que le fond d'un vaſe étroit par en haut & rempli d'eau ſoutient une preſſion égale à celle qu'il ſoutiendroit ſi le vaſe avoit en toute ſa hauteur une amplitude égale à celle de ſon fond & qu'il fût rempli d'eau à la même hauteur (Art. VIII. X.). Ici c'eſt la ſurface P qui tient lieu de fond, la réaction agiſſant de bas en haut.

XLIX.

Voyons maintenant ce qu'il en eſt de la *ténacité*, des *forces de cohéſion* & du *frottement*. Ces trois effets ſe confondent à certains égards, mais à d'autres égards il faut du moins diſtinguer le dernier des deux premiers, en tant qu'ils doivent être calculés différemment. Je regarde donc les deux premiers effets & en partie auſſi le troiſieme comme tels, *que leur valeur eſt ſouſtractive de la force motrice.* Quant à l'autre partie du troiſieme effet, je la regarde *comme dépendante de la vîteſſe*, *en ſorte qu'elle croît en raiſon de la hauteur due à la vîteſſe.* Voici ſur quoi ces énoncés ſe fondent.

L.

Premiere Expérience.

On ſait qu'une aiguille, aſſez mince pour cet effet, nage ſur l'eau lorsqu'on l'y place doucement & ſans choc. Or j'ai trouvé qu'une aiguille longue de 17 lignes & pesant 3 grains nageoit, tandis qu'une autre de même longueur mais pesant 5 grains couloit à fond; quoique du reste je visse qu'il s'en falloit peu qu'elle ne restât sur l'eau, parce qu'elle s'enfonçoit avec quelque lenteur assez sensible. Elle avoit, pour ainsi dire, de la peine à se frayer le chemin. Mais dès qu'elle fut au dessous de la surface, elle alla bientôt à fond. J'en infere qu'une aiguille de la même longueur, mais tant soit peu moins pesante que 5 grains, seroit restée sur l'eau. Je regarderai donc ce poids de 5 grains & cette longueur de 17 lignes comme étant le dernier terme de la possibilité, du moins pour le degré de chaleur qu'avoit l'eau, qui ne surpassoit que peu celui de la température. Je dirai encore que les 17 lignes sont du pied de Rhin, que c'est la longueur des aiguilles supposées non-pointues, & que les grains sont des $\frac{1}{7680}$ parties de la livre, poids de Berlin.

LI.

Il est évident que ce qui fait nager l'aiguille sur l'eau est ce qu'on peut nommer la *ténacité* ou les *forces de cohésion*, & en partie aussi le *frottement*. Ces effets se confondent, mais il est également évident *que leur somme équivaut au poids de l'aiguille*, & que considérant ce poids comme *force motrice*, il faut en *soustraire* cette somme, qui pour être *égale* laisse un *reste* $= 0$.

LII.

Seconde Expérience.

Ayant suspendu verticalement un fil de fer de l'épaisseur de 1, 2 lignes, je trempai une plume dans l'eau, & touchant avec la pointe de la plume le fil de fer, pour laisser peu à peu découler l'eau vers le bout inférieur du fil, je vis qu'il s'y forma une goutte dont la hauteur depuis le fer jusqu'au bas de la goutte étoit de 2, 5 lignes, le plus grand diametre de 1, 6 lignes, & que ce plus grand diametre étoit à un tiers au dessous du fer. Cette goutte s'allongea très lentement & s'exténua près du fil de fer, en sorte qu'enfin elle tomba.

LIII.

Concevons un plan horizontal qui passe par la goutte là où elle se rompit, nous aurons une section circulaire d'environ une ligne de diametre. Et il est clair que les forces de cohésion de côté & d'autre de cette section équivalent au poids de la goutte. Je trouve que si l'aire de cette section circulaire est de trois lignes quarrées, ces forces de cohésion ou la ténacité équivalent au poids d'un grain. C'est la force absolue, en ce qu'elle agit dans la direction perpendiculaire au plan.

LIV.

Ces deux Expériences font voir que la ténacité fait équilibre à un poids, & qu'il y faut de la force pour la vaincre au point, qu'en augmentant la force il puisse en résulter du mouvement. Il est évident que le mouvement ne peut être dû qu'à ce surplus de force. Observons encore, à l'égard de la premiere Expérience, qu'il s'ensuit qu'à la surface de l'eau il doit y avoir des empêchemens qui n'ont pas lieu au dessous de la surface, parce que l'aiguille, après avoir percé la surface, coule fort vîte à fond.

LV.

Troisieme Expérience.

Si dans un tuyau recourbé l'eau fait des oscillations en s'élevant & s'abaissant alternativement, ces oscillations rappétissent au point de cesser entierement en fort peu de tems.

LVI.

Je ferai voir ci-après par le calcul: 1°. que les oscillations peuvent devenir plus petites lorsqu'il y a un obstacle qui croît avec la vîtesse; 2°. que cet obstacle tout seul n'empêcheroit pas les oscillations de continuer à l'infini, nonobstant qu'elles deviennent toujours plus petites, & que par conséquent il doit y avoir encore un obstacle qui rende la durée des oscillations finie, de sorte qu'après un tems fini elles cessent entierement; 3°. que la ténacité, en tant qu'elle fait équilibre à une partie de la force motrice, produit cet effet, mais en sorte que si c'étoit la seule cause, les oscillations dé-

croîtroient

croîtroient en progreſſion arithmétique; ce qui étant contraire à l'expérience, le premier obſtacle ne ſauroit être omis.

LVII.

Quatrieme Expérience.

En imprimant un degré quelconque de vîteſſe à un corps qui flotte ſur une eau ſtagnante, le mouvement qui en naît ſe rallentit au point d'être réduit à zéro en fort peu de tems, & le moment où cela arrive peut aſſez bien être apperçu.

LVIII.

Il y a dans cette Expérience une circonſtance de plus, c'eſt la *réſiſtance de l'eau.* Le corps qui ſe meut, choque les particules de l'eau, & par-là il perd néceſſairement de ſa vîteſſe. Et comme ſa maſſe peut être regardée comme infiniment plus grande que celle d'une particule d'eau, les loix du choc nous font voir que la perte de vîteſſe due au choc contre chaque particule eſt en raiſon de la vîteſſe elle-même. Or la ſomme de ces pertes pour un tems $d\tau$ croît néceſſairement en raiſon de l'eſpace parcouru dx. Soit donc la vîteſſe $= c$, on aura $-n\,dc = c\,dx$, & en multipliant par c on obtient $-nc\,dc = cc\,dx$. Si donc la hauteur due à la vîteſſe c eſt $= v$, cette équation ſe change en $-n\,dv = v\,dx$. Voilà la formule pour la réſiſtance de l'eau.

LIX.

Le frottement produit un effet ſemblable, en ce qu'il préſente également l'idée d'un choc. On ſait que cet effet du frottement ſe fait voir ſurtout aux côtés des canaux dans leſquels l'eau ſe meut, le mouvement y étant viſiblement plus lent. Le frottement ſuppoſe quelque aſpérité dans les ſurfaces. J'ignore ce qu'il en eſt à l'égard de la ſurface des particules d'eau elles-mêmes. S'il y a quelque aſpérité, elle diminue néceſſairement la vîteſſe des particules lorſqu'elles gliſſent les unes ſur les autres. On comprend auſſi que la ténacité, quand bien même elle eſt vaincue en ſorte que les particules ſe meuvent, influe néanmoins ſur leur vîteſſe en la diminuant. Elle fait que les particules qui s'entrechoquent ne réjailliſſent pas avec les vîteſſes qu'elles auroient ſans cet empêchement. Nous pourrons donc regarder la formule (Art. précéd.)

$$dv = \frac{v\,dx}{n}$$

comme comprenant tout ce qui regarde la diminution de la vîteſſe, qui dépend de la vîteſſe elle-même. Il ſuffit de déterminer le coëfficient n en conſéquence. Pour embraſſer en peu de mots ce que je viens de faire voir, je dirai qu'en général les obſtacles, tels que ſont la ténacité, le frottement & la réſiſtance, diminuent *immédiatement* 1°. la *force motrice*, & de là *naît* une vîteſſe moins grande; 2°. la *vîteſſe toute acquiſe*, & à cet égard la diminution de la vîteſſe eſt en raiſon de la vîteſſe elle-même & du chemin parcouru. Faiſons voir tout cela plus en détail, en appliquant le calcul à la quatrieme Expérience.

LX.

Pl. IX. Fig. 9. Sur une eau ſtagnante ſoit une barque A mue par un poids p, moyennant la corde pCB qui paſſe ſur la poulie C. Si d'abord la barque eſt en repos, le poids p doit avoir une certaine grandeur q, uniquement pour que le mouvement *puiſſe commencer*. Ce poids q eſt donc requis pour *faire équilibre* à la ténacité & à la partie du frottement qui ne dépend pas de la vîteſſe. Si donc le poids eſt $= p$, ſa force motrice à cet égard ſera $= p - q$. Soit Q la maſſe à mouvoir, & pour un tems τ quelconque ſoit v la hauteur due à la vîteſſe & x l'eſpace parcouru. Nous aurons par la loi fondamentale de la Dynamique

$$dv = \frac{p - q}{Q} \cdot dx.$$

Cette formule donneroit un *mouvement uniformément accéléré*. Mais il s'en faut de beaucoup que ce mouvement ait lieu. Car tant la réſiſtance de l'eau que le frottement s'y oppoſe, en ſorte qu'enfin la vîteſſe devient *conſtante*, atteignant ſon *maximum*. Soit V la hauteur due à cette vîteſſe terminale, & nous aurons

$$dv = \frac{p - q}{Q} \cdot dx - \frac{p - q}{Q} \cdot \frac{v}{V} \cdot dx.$$

Car l'effet de la résistance & du frottement croît en raison de la hauteur due à la vîtesse (Art. LIX.). Et de plus il faut que $dv = 0$, lorsque $v = V$. Observons encore que le rapport $(p - q) : V$ pour la même barque est constant. A cet égard il n'est pas nécessaire que $p - q$ soit la force motrice & V la hauteur due à la vîtesse terminale actuelle. Ainsi, au lieu de $p - q$, je poserai une force motrice arbitraire P, & je désignerai par V la hauteur due à la vîtesse, qui sera terminale lorsqu'en effet on emploie cette force P. La formule sera donc

$$dv = \frac{p - q}{Q} \cdot dx - \frac{Pv}{QV} \cdot dx$$

d'où en faisant $x = 0$, lorsque $v = 0$, & posant log. hyp. $e = 0$, on tire l'intégrale

$$v = \frac{p - q}{P} \cdot V \cdot (1 - e^{-Px : QV}).$$

LXI.

Supposons maintenant que la barque ayant acquis un certain degré de vîtesse qui soit dû à la hauteur $= h$, on coupe la corde, la barque continuera de se mouvoir. Qu'après un tems quelconque τ sa vîtesse soit due à la hauteur v, & que le chemin parcouru depuis que la corde a été coupée soit $= x$, on n'aura qu'à faire $p = 0$, & la formule différentielle sera

$$dv = -\frac{q}{Q}\, dx - \frac{Pv}{QV} \cdot dx$$

d'où l'on déduit l'intégrale

$$x = \frac{QV}{P} \cdot \log \frac{h + qV : P}{v + qV : P}.$$

Or le mouvement cessant, on a $v = 0$, ce qui donne l'espace parcouru total

$$X = \frac{QV}{P} \log \frac{h + qV : P}{qV : P}.$$

Ainſi ce chemin total eſt une *quantité finie.* Et le tems eſt également une *quantité finie.* Car faiſant $= g$ la chute dans une ſeconde, on aura en général

$$\tau = Q\sqrt{\frac{V}{gqP}} \cdot \left[\text{Arc fin} \cdot \left(\sqrt{\frac{qV:P}{qV:P+h}} \cdot e^{Px:2QV}\right) - \text{Arc fin} \cdot \sqrt{\frac{qV:P}{qV:P+h}}\right].$$

Or le ſinus ne pouvant être plus grand que le rayon, on aura pour le tems total

$$T = Q\sqrt{\frac{V}{gqP}} \cdot \left[\tfrac{1}{2}\pi - \text{Arc} \cdot \text{fin}\sqrt{\frac{qV:P}{qV:P+h}}\right]$$

où par π j'entens la demi-circonférence du cercle, le rayon étant $= 1$.

LXII.

Pour éclaircir l'uſage de ces formules par un exemple, ſuppoſons que la barque a été pouſſée en ſorte qu'au moment où elle a commencé à ſe mouvoir librement, ſa vîteſſe a été de 5 pieds de Rhin par ſeconde, ce qui donne la hauteur $h = 0,4$ pieds. Suppoſons de plus que ce mouvement s'eſt réduit à zéro dans une minute de tems & que le chemin parcouru a été de 100 pieds de Rhin. On aura donc $T = 60''$ & $X = 100$ pieds. Or x étant $= X$, on a

$$\frac{qV:P}{qV:P+h} = e^{-PX:QV}$$

& de plus

$$T = Q \cdot \sqrt{\frac{V}{gqP}} \cdot \left[\tfrac{1}{2}\pi - \text{Arc} \cdot \text{fin}\sqrt{\frac{qV:P}{qV:P+h}}\right].$$

Faiſons pour plus de briéveté

$$\sqrt{\frac{qV:P}{qV:P+h}} = \text{fin}\,\varepsilon.$$

Et ces équations ſe changent en

$$\text{fin}\,\varepsilon^2 = e^{-PX:QV}$$

$$T = Q \cdot \sqrt{\frac{V}{gqP}} \cdot [\tfrac{1}{2}\pi - \varepsilon].$$

De là on déduit

$$h = \frac{qV}{P} \cdot \cot \varepsilon^2$$

$$X = -\frac{2QV}{P} \cdot \log \sin \varepsilon.$$

& enfin

$$-\frac{V 4gh \cdot T}{X} = \frac{\frac{1}{2}\pi - \varepsilon}{\tang \varepsilon \cdot \log \sin \varepsilon}.$$

Équation par laquelle on trouvera l'angle ε, les valeurs de g, h, T, X étant données. Afin de trouver cet angle avec moins de tâtonnement, j'ai calculé la fonction

$$\frac{\varepsilon - \frac{1}{2}\pi}{\tang \varepsilon \cdot \log \cdot \sin \varepsilon}$$

pour plusieurs angles, ce qui m'a donné la Table suivante.

ε	$\frac{\varepsilon - \frac{1}{2}\pi}{t\varepsilon \cdot l s \varepsilon}$	ε	$\frac{\varepsilon - \frac{1}{2}\pi}{t\varepsilon \cdot l s \varepsilon}$
0°	infini	30	2, 61676
1		40	2, 35326
5	6, 94932	50	2, 19810
10	4, 52305	60	2, 10119
20	3, 12864	70	2, 04252
21	3, 07514	80	2, 01028
22	3, 01697	90	2, 00000

Cette Table fait voir que l'angle ε se trouve d'autant moins exactement qu'il approche plus d'un angle droit. Or nous avons la vitesse initiale $V 4gh = 5$ pieds, $T = 60''$, $X = 100$ pieds, & par conséquent

$$\frac{\varepsilon - \frac{1}{2}\pi}{\tang \varepsilon \cdot \log \sin \varepsilon} = \frac{5 \cdot 60}{100} = 3.$$

Cette valeur étant cherchée dans la Table fait voir que $\varepsilon = 22^\circ. 19'$. Donc log. hyperb. sin $\varepsilon = -0,96830$. Donc l'équation

$$X = -\frac{2QV}{P} \cdot \log \cdot \sin \varepsilon$$

donne

$$\frac{P}{V} = 0,019366 \,.\, Q.$$

& l'équation

$$h = \frac{qV}{P} \,.\, \cot \varepsilon^{\circ}$$

se change en

$$q = 0,067394 \,.\, \frac{P}{V}.$$

Substituant la valeur de $P : V$, on aura

$$q = \frac{Q}{766,2}.$$

Par là on voit que l'effet de la ténacité q équivaut à la $\frac{1}{766}^{me}$ partie du poids de la barque. Si donc le poids de la barque est de 766 livres, il faut une livre de force pour vaincre la ténacité. C'est peu de chose. Cependant ce peu de chose suffit pour faire cesser le mouvement en une minute de tems. Au reste, quoique je n'aye rapporté cet exemple que pour appliquer les formules à un cas particulier, les données que j'y suppose ne laissent pas d'être telles qu'elles puissent avoir lieu en effet, d'autant que j'ai laissé indécis quelle est la figure de la barque, de même que d'autres circonstances auxquelles il faut avoir égard quand on veut entrer dans un plus grand détail. Outre cela cet exemple peut être d'usage lorsqu'on veut déterminer les valeurs de h, X, T, $P : V$ par des expériences réelles & faites dans cette vue. Voici maintenant un autre exemple, qui se rapporte à la troisieme Expérience.

LXIII.

Pl. VIII. Fig. 10. Soit $AEDB$ un tuyau cylindrique recourbé, rempli d'eau dans la partie MGN, de sorte que si cette eau est en repos, ses surfaces soient au niveau de la droite MN. Si la ténacité ne faisoit point obstacle, ce niveau seroit toujours exact. Or cela n'a pas lieu. Aussi, quand le tuyau est étroit ou capillaire, s'en faut-il de plusieurs lignes, en sorte que p. ex. l'une des surfaces se soutiendra au dessus de M, tandis que l'autre sera au dessous de N. Supposons que l'eau ait été élevée dans la partie GA jusqu'en A, en ſorte que dans l'autre partie elle ſoit abaiſſée en Q. Si donc on la laiſſe deſcendre librement, elle fera des oſcillations qui en diminuant ſe réduiſent enfin à zéro, & même en fort peu de tems. Pour calculer ce cas, je déſignerai tant les poids que les maſſes des différentes parties de l'eau par les longueurs des colonnes, ces colonnes étant du même diametre, & n'y ayant d'abord à conſidérer que les rapports. Ainſi la longueur $MGN = AGD = PGQ = b$ déſignera la maſſe totale. Je ferai de plus $AM = DN = a$, $PM = NQ = x$, $FM = NL = c$, la plus grande différence du véritable niveau que la ténacité produit. Enfin je poſerai l'angle $AMH = \omega$, & l'angle $BNK = \phi$, & je déſignerai par v la hauteur due à la vîteſſe de l'eau lorſqu'elle eſt deſcendue en P.

LXIV.

Ce qui étant établi, la force motrice de l'eau eſt $= x\,(\text{ſin}\,\omega + \text{ſin}\,\phi)$. De cette force il faut ſouſtraire la partie $c\,(\text{ſin}\,\omega + \text{ſin}\,\phi)$ qui eſt deſtinée à vaincre la ténacité & la partie du frottement qui, ne dépendant pas de la vîteſſe, eſt conſtante. A cet égard donc on auroit

$$- \mathrm{d}v = \frac{(x - c) \cdot (\text{ſin}\,\omega + \text{ſin}\,\phi)}{b} \cdot \mathrm{d}x.$$

Je mets le ſigne — parce que $\mathrm{d}x$ eſt négative & que je conſidere v comme croiſſante, & par conſéquent $\mathrm{d}v$ comme poſitive. Cette équation, en faiſant $v = 0$ lorſque $x = a$, donne l'intégrale $2bv = (\text{ſ}\omega + \text{ſ}\phi) \cdot (aa - xx - 2ca + 2cx)$. Or à la fin de la deſcente on a pareillement $v = 0$. Soit donc alors $x = -f$, l'équation deviendra $f = a - 2c$, valeur qui doit être poſitive, ſans quoi l'eau ne remonte plus. Si donc $a > 2c$, l'eau remontera, en ſorte que mettant f à la place de a, & f' à la place de f, on aura tout de même $f = f' - 2c$. Cela fait voir que les oſcillations décroiſſent en progreſſion arithmétique. Ce qui n'ayant pas lieu, il faut recourir à l'autre partie du frottement qui dépend de la vîteſſe. Nous aurons donc en effet

$$- \mathrm{d}v = \left[\frac{x - c}{b} \cdot (\text{ſin}\,\omega + \text{ſin}\,\phi) - \frac{Pv}{Vb}\right] \mathrm{d}x.$$

J'entens, comme ci-deſſus (Art. LX.), par V la hauteur due à la vîteſſe que l'eau doit avoir pour que cette partie de l'effet du frottement faſſe équilibre à la force motrice P. Le rapport $P : V$ eſt conſtant relativement aux variables x, v; mais il varie relativement aux autres données.

LXV.

En poſant $v = 0$, lorsque $x = a$, nous aurons l'intégrale

$$\frac{bv}{\text{ſ}\omega + \text{ſ}\phi} = \frac{(x-c)bV}{P} + \frac{b^2V^2}{P^2} - \frac{bV}{P}\left(\frac{bV}{P} + a - c\right)e^{-(a-x)P:bV}.$$

Cette équation n'a que deux racines. Ainſi elle ne ſert que pour la premiere deſcente, que je ſuppoſe ſe faire de A en R. A la fin de cette deſcente on a $v = 0$, le mouvement étant alors $= 0$. Faiſons pour ce cas $x = MR = -f$, & nous aurons

$$c + f = \frac{bV}{P} - \left(\frac{bV}{P} + a - c\right)e^{-(a+f)P:bV}$$

équation qui détermine le rapport entre a & f. On voit que ce rapport eſt indépendant des angles ϕ, ω. Or les valeurs de a ne peuvent pas être quelconques. Car il eſt clair que ſi on faiſoit $a < c$, il ne s'enſuivroit point de mouvement. Auſſi notre équation dans ce cas donne une valeur imaginaire. Pour prouver cet énoncé, donnons à l'équation la forme ſuivante:

$$\frac{c+f}{bV:P + a - c} = \frac{bV:P}{bV:P + a - c} - e^{-(a+f)P:bV}.$$

Fig. 11. Soit MA une logarithmique, BR ſon aſymptote, BA l'ordonnée qui fait avec la tangente TA un angle de 45 dégrés (*). Je poſerai cette ordon-

(*) Dans la Figure l'angle TAB eſt trop petit, & de là vient que NQ n'eſt pas $= NM$. Le Lecteur voudra bien ſuppléer à cette imperfection; j'aurois pu la lever en traçant une nouvelle Figure, mais l'art. LXVI. préſentoit encore de nouvelles difficultés, auxquelles je n'ai pu remédier; elles viennent de ce que l'Auteur a effacé près d'une page après l'art. LXV. & qu'en refaiſant le LXVI^e, il aura peut-être ébauché ſur quelque papier qui ſe ſera égaré, une nouvelle Figure 11^e; ainſi j'ai préféré de conſerver la Figure originale telle que je l'ai trouvée, pour ne pas courir le riſque de la gâter davantage en eſſayant de la faire accorder en tout point avec le texte. En général j'ai refait ſeulement les 8 premieres Figures, qui n'étoient qu'ébauchées ſur le *recto* & le *verſo* d'un même papier; j'ai pu arranger les Planches en conſervant les autres faites avec plus de ſoin. (*B.*)

ordonnée $= 1$. Tirant par A la droite AP parallele à l'asymptote, on fera

$$AP = BR = (a+f)P : bV$$

& on aura l'ordonnée

$$RM = e^{-(a+f)P : bV}.$$

Faisant de plus

$$RN = \frac{bV : P}{bV : P + a - c}$$

on aura

$$MN = \frac{bV : P}{bV : P + a - c} - e^{-(a+f)P : bV}.$$

Enfin menant par N la droite ND parallele à l'asymptote, & faisant

$$NQ = \frac{c+f}{bV : P + a - c}$$

on aura en vertu de l'équation,

$$NQ = MN$$

donc l'angle NQM sera également $= 45$ degrés. Or il est évident que la droite QM, parallele à la tangente TAD, ne sauroit couper la logarithmique, à moins que les valeurs a, b, c, P, V, f ne soient telles, que

$$NQ < ND.$$

Voilà donc ce qui limite le choix qu'on pourroit faire de ces valeurs. Or par la construction nous avons

$$CD = AC = NP = RN - 1.$$

Donc

$$CD = \frac{bV : P}{bV : P + a - c} - 1.$$

De plus

$$NC = AP = \frac{(a+f)P}{bV}.$$

Donc

$$ND = \frac{(a+f)P}{bV} + \frac{bV:P}{bV:P+a-c} - 1.$$

Donc

$$\frac{c+f}{bV:P+a-c} < \frac{(a+f)P}{bV} + \frac{bV:P}{bV:P+a-c} - 1,$$

ce qui, après les réductions faites, donne

$$0 < (a+f)(a-c) \cdot \frac{P}{bV}.$$

Donc

$$a > c.$$

Ainsi la formule donne exactement la condition que nous avons vu devoir limiter la possibilité des racines.

LXVI.

La formule que nous avons trouvée est pour les cas où la surface descend de A vers R. Voyons maintenant ce qui a lieu dans les cas où elle monte de R vers A. A cet égard il ne suffit pas de prendre a, f, x avec les signes opposés. Car si la surface A est au dessous du niveau MN, la surface D est tout autant au dessus; la force motrice reste positive, & la ténacité s'oppose, quelle que soit la direction du mouvement. La hauteur v étant en raison du quarré de la vîtesse, elle reste positive, quand même on voudroit regarder la vîtesse comme négative. Or nous réduirons sans peine les cas où le fluide remonte, à ceux où il descend. Car il est clair que si la surface A est en R au point de remonter, l'autre surface D est en A' au point de redescendre. Supposons qu'elle redescende jusqu'en R', nous n'aurons qu'à poser $NA' = a'$, & $NR' = f'$, & l'équation entre a', f' sera

$$c + f' = \frac{bV}{P} - \left(\frac{bV}{P} + a - c\right) e^{-(a'+f')P:bV}.$$

LXVII.

Si cette équation doit être pour la montée qui suit immédiatement la descente que représente l'équation précédente, on aura $f = a'$. Et pour mieux faire voir l'analogie qu'il y a entre les montées & les deſcentes, poſons $f' = a''$. Les deux équations réduites à une forme plus ſymmétrique ſeront

$$\left(1 - \frac{cP}{bV} + \frac{aP}{bV}\right) . e^{-aP:bV}$$
$$= \left(1 - \frac{cP}{bV} - \frac{a'P}{bV}\right) . e^{+a'P:bV}$$
$$\left(1 - \frac{cP}{bV} + \frac{a'P}{bV}\right) . e^{-a'P:bV}$$
$$= \left(1 - \frac{cP}{bV} - \frac{a''P}{bV}\right) . e^{+a''P:bV}.$$

On aura donc autant de ces équations qu'il y aura dans chaque cas particulier de deſcentes & de montées.

LXVIII.

Ces équations ont en général la forme

$$(\alpha + \xi)\, e^{-\xi} = (\alpha - \xi')\, e^{+\xi'}$$

& ſe conſtruiſent par l'interſection d'une logarithmique & d'une hyperbole conſtruite ſur la même aſymptote, & ayant les mêmes ordonnées $e^{-\xi}$, $e^{+\xi}$ répondantes aux mêmes abſciſſes $(\alpha + \xi)$, $(\alpha - \xi')$, ce qui ne peut avoir lieu à moins que la ſoutangente de l'hyperbole qui répond & qui en même tems eſt égale à l'abſciſſe $(\alpha + \xi)$, ne ſoit plus grande que la ſoutangente de la logarithmique, qui eſt $= 1$. Or $\alpha + \xi > 1$ veut dire $1 - \frac{cP}{bV} + \frac{aP}{bV} > 1$, ou bien $a > c$, comme nous avons trouvé ci-deſſus. (Art. LXV.).

LXIX.

En multipliant la forme générale de notre équation par $e^{-\alpha}$, elle ſe change en

$$(\alpha + \xi) . e^{-(\alpha + \xi)} = (\alpha - \xi') . e^{-(\alpha - \xi')}$$

c'eſt à dire en

$$\zeta . e^{-\zeta} = \zeta' . e^{-\zeta'}.$$

Voici une Table que j'ai calculée pour ces expreſſions.

ζ	$\zeta \,.\, e^{-\zeta}$	$\zeta' \,.\, e^{-\zeta'}$	ζ'
1, 0	0, 3679	0, 3679	1, 0
1, 1	0, 3662	0, 3659	0, 9
1, 2	0, 3614	0, 3595	0, 8
1, 3	0, 3543		
1, 4	0, 3452	0, 3476	0, 7
1, 5	0, 3347	0, 3293	0, 6
1, 6	0, 3230		
1, 7	0, 3106	0, 3033	0, 5
1, 8	0, 2975		
1, 9	0, 2842		
2, 0	0, 2707	0, 2681	0, 4
2, 1	0, 2572		
2, 2	0, 2438		
2, 3	0, 2306	0, 2222	0, 3
2, 4	0, 2177		
2, 5	0, 2052		
2, 6	0, 1931		
2, 7	0, 1815		
2, 8	0, 1596	0, 1637	0, 2
2, 9	0, 1494		
3, 0	0, 1397		
3, 1	0, 1304		
3, 2	0, 1217		
3, 3	0, 1135		
3, 4	0, 1057		
3, 5	0, 0984		
3, 6	0, 0915	0, 0905	0, 1
3, 7	0, 0850		

LXX.

Pl. IX. Fig. 12. D'après les nombres de cette Table j'ai conſtruit la courbe ADM, en ſorte qu'aux abſciſſes ζ, ζ' répondent les ordonnées $\zeta \,.\, e^{-\zeta}$, $\zeta' \,.\, e^{-\zeta'}$. Les abſciſſes ſe comptent de A vers P, & l'abſciſſe AB qui répond à la plus grande ordonnée BD, eſt $= 1$. Les ordonnées ſont priſes ſur une échelle plus grande, parce qu'il ne s'agit ici que de déterminer celles qui ſont égales. Soit donc une des abſciſſes plus grandes que AB,

$$AP = 1 - \frac{cP}{bV} + \frac{aP}{bV}$$

on aura

$$PM = \left(1 - \frac{cP}{bV} + \frac{aP}{bV}\right) \cdot e^{-(1 - cP : bV + aP : bV)}.$$

Or tirant MN parallele à AP, on aura

$$RN = \left(1 - \frac{cP}{bV} - \frac{a'P}{bV}\right) \cdot e^{-(1 - cP : bV - a'P : bV)}$$

& par conſéquent

$$AR = 1 - \frac{cP}{bV} - \frac{a'P}{bV}.$$

Soit maintenant

$$CB = \frac{cP}{bV}$$

on aura

$$CP = \frac{aP}{bV}$$

$$CR = \frac{a'P}{bV},$$

& la droite CE perpendiculaire à AP déſignera le niveau NM de la 10^{me} Figure, QM la hauteur initiale de l'eau au deſſus de ce niveau, & QN ſa deſcente finale au deſſous, de ſorte que MN eſt le chemin parcouru. Transférons CR de C en r, érigeons l'ordonnée rm, & tirons mn parallele à AP; cette droite mn ſera le chemin parcouru en remontant. Mais le point n tombant entre ED, on voit que l'eau s'arrête au deſſous du niveau, là où elle n'a plus aſſez de force pour vaincre la ténacité. Il ne s'eſt donc fait qu'une ſeule deſcente & une ſeule montée. Si la partie CB étoit plus petite, c'eſt à dire ſi la ténacité étoit moins grande relativement à la maſſe & au poids de l'eau, ce qui dépend beaucoup de l'amplitude du tuyau, on voit qu'il y auroit plus de deux oſcillations. Et le nombre ſeroit infini, ſi CB étoit $= 0$. On voit encore que, quelque grande que ſoit la premiere abſciſſe CP, c'eſt à dire la hauteur initiale de l'eau au deſſus de ſon véritable niveau, elle ne ſauroit s'abaiſſer au deſſous que tout au plus de la quantité CA. Ainſi les oſcillations rappetiſſent d'au- Pl. VIII.

tant plus qu'elles ſont plus grandes. Enfin on voit que la courbe ADM tient lieu d'échelle générale pour toutes ces oſcillations. Il ſuffit qu'au lieu des valeurs c, a, a', a'', &c. on prenne les valeurs

$$\frac{cP}{bV}, \quad \frac{aP}{bV}, \quad \frac{a'P}{bV}, \quad \frac{a''P}{bV} \quad \&c.$$

que je déſignerai pour plus de briéveté par

$$C, \quad A, \quad A', \quad A'' \quad \&c.$$

Si cependant on préfere le calcul numérique à la conſtruction, on pourra ſe ſervir de la Table ſuivante.

$A - C$ $A' - C$ $A'' - C$ &c.	$A' + C$ $A'' + C$ $A''' + C$ &c.	$A - C$ $A' - C$ $A'' - C$ &c.	$A' + C$ $A'' + C$ $A''' + C$ &c.
0, 000	0, 000	0, 500	0, 373
0, 050	0, 048	0, 550	0, 402
0, 100	0, 094	0, 600	0, 428
0, 150	0, 136	0, 650	0, 452
0, 200	0, 176	0. 700	0, 477
0, 250	0, 214	0, 750	0, 497
0, 300	0, 250	0, 800	0, 517
0, 350	0, 282	0, 850	0, 538
0, 400	0, 314	0, 900	0, 558
0, 450	0, 344	0, 950	0, 578
0, 500	0, 373	1, 000	0, 591

&c.

Ainſi p. ex. ſi $C = 0,030$, & qu'on prenne $A = 1,000$, on aura $A - C = 0,970$. Cette valeur étant cherchée dans la premiere colonne, donne dans la ſeconde - $A' + C = 0,586$;
donc $A' = 0,556$, $A' - C = 0,526$, & par là $A'' + C = 0,388$;
donc $A'' = 0,358$, $A'' - C = 0,328$, & par là $A''' + C = 0,268$;
donc $A''' = 0,238$, $A''' - C = 0,208$, & par là $A^{IV} + C = 0,178$;
donc $A^{IV} = 0,148$, $A^{IV} - C = 0,118$, & par là $A^{V} + C = 0,109$;
donc $A^{V} = 0,079$, $A^{V} - C = 0,049$, & par là $A^{VI} + C = 0,047$;
donc $A^{VI} = 0,017$. Et voilà la derniere oſcillation, parce que $A^{VI} - C$ devient négatif. Le mouvement de l'eau, à compter de ſon niveau, ſera donc

$+$ 1, 000.
$-$ 0, 556.
$+$ 0, 358.
$-$ 0, 238.
$+$ 0, 148.
$-$ 0, 078.
$+$ 0, 017.

On voit par là comment la valeur de C, encore qu'elle ſoit petite, met bientôt fin aux oſcillations, & comme *ex abrupto*. C'eſt que pour chaque oſcillation elle eſt doublement ſouſtractive. Pour faire voir la différence qu'il y a, poſons $C = 0$, & en commençant par $A = 1{,}000$, les valeurs A, A', A'' &c. ſeront $+ 1{,}000$; $- 0{,}591$; $+ 0{,}423$; $- 0{,}328$; $+ 0{,}268$; $- 0{,}227$; $+ 0{,}186$; $- 0{,}165$; $+ 0{,}148$; $- 0{,}134$; $+ 0{,}122$; $- 0{,}112$; $+ 0{,}104$; $- 0{,}097$; $+ 0{,}91$; $-$ &c. à l'infini. Ici donc les oſcillations deviennent plus égales à meſure qu'elles deviennent plus petites. Ce qui étant contraire à l'expérience, on voit que, quelque petite que puiſſe être la valeur de C, on ne ſauroit la faire $= 0$.

LXXI.

On peut ſe ſervir avec avantage de ces oſcillations, lorsqu'on veut déterminer les effets de la ténacité & du frottement par des expériences. On prendra des tuyaux de différente grandeur & on variera tant la quantité d'eau que les angles ω, Φ. Si la partie inférieure du tuyau eſt de fer blanc, les extrémités doivent être de verre, afin qu'on puiſſe voir & noter les montées & les deſcentes totales. Par là on aura les valeurs de a, a', a'' &c. de même que la longueur totale b. J'entens que l'amplitude intérieure ſoit partout la même, afin que l'application du calcul en devienne moins embarraſſante. Ce qui reſte donc à trouver c'eſt la quantité e & le rapport $P : V$, c'eſt à dire les deux effets du frottement & de la ténacité. Par là on connoîtra *a poſteriori* de quelle maniere ces effets varient, lorsque les valeurs de b, Φ, ω, de même que le diametre du tuyau & la matiere dont il eſt fait, ne ſont plus les mêmes. J'obſerve qu'il ſera bon que la longueur du tuyau foit de 6 & plus de pieds, afin que les ofcillations foient affez lentes pour qu'on ait le tems d'obferver & de noter les points jusqu'auxquels l'eau monte & defcend pendant chaque ofcillation. Si pour faire que l'eau dans une des branches du tuyau s'éleve au deffus de fon niveau, on incline le tuyau, il faut enfuite couvrir l'ouverture de la main, afin qu'en redreffant le tuyau l'eau foit empêchée de redefcendre. On notera le point où elle eft au moment qu'on leve la main, afin de pouvoir tenir compte de la premiere defcente, ce qui eft néceffaire furtout lorsque les ofcillations rappetiffent fort vîte. Je dirai encore que fi je me fuis borné dans le calcul précédent à comparer les variables v, x, fans tenir compte du tems, c'eft uniquement parce que l'équation différentielle qu'on trouve pour le tems, m'a paru être peu traitable. D'ailleurs dans les expériences qu'on pourra faire il n'y a gueres moyen de tenir compte exactement du tems, qui n'eft presque jamais que d'un petit nombre de fecondes. Paffons maintenant à d'autres cas & d'abord à celui de la 8me Figure.

LXXII.

Fig. 8. La formule que j'ai donnée pour ce cas, telle que je l'ai transformée (Art. XLIV.), eft

$$\mathrm{d}v = \frac{m(c + e - x - a - h) - (mm - 1)\,vm}{m(e - x) + kmm + n(a + b + c)\,mm : nn} \cdot \mathrm{d}x.$$

J'ai fait voir que le dénominateur défigne la maffe totale réduite au réfervoir, & que le numérateur défigne la force motrice diminuée de la quantité requife pour l'accélération due au rétréciffement. Or ayant égard à la ténacité & au frottement, cette force motrice fouffre encore différentes diminutions. D'abord la ténacité de l'eau doit être vaincue dans le réfervoir, dans le canal & dans le tuyau. Celle de l'eau dans le réfervoir décroît à mefure que la furface s'abaiffe. Je la défignerai par $\varkappa x m$, où $\varkappa$ eft un coëfficient. La ténacité de l'eau dans le canal refte conftante tant que l'eau du réfervoir ne baiffe pas au deffous du fond BC. On pourroit la défigner par $\lambda(a + b + c)\,n$, s'il ne falloit pas la réduire au réfervoir. Elle fera donc $= \lambda(a + b + c)\,m$. Et de la même maniere celle de l'eau l'eau dans le tuyau s'exprimera par $\mu h m$. Voilà donc les parties qui ne dépendent point des vîtesses. Celles qui dépendent des vîtesses seront $\frac{P}{V} \cdot v$; $\frac{P'}{V'} \frac{mm}{nn} v$; $\frac{P''}{V''} \cdot mmv$. Et en les réduisant au réservoir, elles deviennent

$$\frac{Pv}{V}; \quad \frac{P' m^3 v}{V' n^3}; \quad \frac{P'' m^3 v}{V''}.$$

J'entens par P la force motrice qui dans le tems $d\tau$ peut communiquer à l'eau du réservoir l'élément de vîtesse qui dans le même tems $d\tau$ se perd par le frottement, lorsque la vîtesse est due à la hauteur V. Les lettres P', P'', V', V'' ont des significations toutes semblables par rapport à l'eau du canal. Faisons pour plus de briéveté

$$\varkappa x m + \lambda (a + b + c) m + \mu h m = \beta x + \gamma$$
$$\frac{P}{V} + \frac{P' m^3}{V' n^3} + \frac{P'' m^3}{V''} = \delta$$

& nous aurons

$$dv = \frac{m(c + e - x - a - h) - (mm - 1) vm - \beta x - \gamma - \delta v}{m(e - x) + hmm + n(a + b + c) mm : nn} \cdot dx$$

équation qu'on traitera comme celle à laquelle nous venons de la substituer, la forme étant la même. Posant pour plus de briéveté

$$dv = \frac{A - Bx - Cv}{D - mx} \cdot dx$$

& faisant $v = 0$ lorsque $x = 0$, on aura l'intégrale

$$v = \frac{A}{C} - \frac{DB}{mC} - \frac{B(D - mx)}{mm(1 - C:m)}$$
$$- \left[\frac{A}{C} - \frac{DB}{mC} - \frac{BD}{mm(1 - C:m)}\right] \cdot \left(1 - \frac{mx}{D}\right)^{C:m}$$

d'où, pour le cas où m est fort grande & où la surface a déjà commencé à baisser, on trouve à très peu près

$$m^2 v = \frac{(c + e - a - h - x) - \varkappa x - \lambda(a + b + c) - \mu h}{1 + P' : V' n^3 + P'' : V''}.$$

Or, indépendamment de la ténacité & du frottement, nous avons trouvé ci-dessus (Art. XLIII.) pour le même cas

$$m^2 v = c + e - a - h - x.$$

Ainsi on voit que ces obstacles empêchent l'eau jaillissante par G d'atteindre à la hauteur de la pression NG, d'autant plus que les valeurs $\varkappa$, λ, μ, $P' : V'$, $P'' : V''$ sont plus grandes, & qu'on gagne en donnant plus d'amplitude au canal $CDEF$.

LXXIII.

Pl. IX. Fig. 13. Voici maintenant un autre cas. Soit un canal droit & d'une longueur indéfinie AB incliné sous le niveau AC d'un angle $CAB = \phi$. Qu'une masse d'eau ait commencé en A à découler par ce canal & qu'après un tems quelconque τ elle soit parvenue en PM, ayant parcouru le chemin $AP = x$. Que sa longueur PM soit $= a$, & qu'étant en PM sa vîtesse soit due à la hauteur v. Ce qui étant établi, nous aurons la formule

$$dv = \frac{a \sin \phi - c - Pv : V}{a} \, . \, dx.$$

Car la force motrice est $= a \sin \phi$. Elle doit être diminuée de la quantité c requise pour vaincre la ténacité, & de plus de la partie requise pour restituer la perte de la vîtesse que cause le frottement. J'exprime cette partie par $Pv : V$, les lettres P, V ayant la même signification que dans les calculs précédens. Or a étant la masse, qui dans ce cas n'a besoin d'aucune réduction, & dx étant l'élément de l'espace, il est clair que cette formule n'est qu'une application de la loi fondamentale de la Dynamique (Art. XLIV. XLV.). En faisant $v = 0$, lorsque $x = 0$, elle donne l'intégrale

$$v = \left(\sin \phi - \frac{c}{a}\right) . \frac{aV}{P} . \left(1 - e^{-xP : aV}\right)$$

d'où l'on voit que pour qu'il y ait du mouvement il faut que $\sin \phi > c : a$, & que v étant un quarré, c'est à dire celui de la vîtesse, la condition $\sin \phi < c : a$ rendroit le mouvement impossible. Enfin on voit que quand ſin $\Phi > c : a$, la vîteſſe ne va en croiſſant que jusqu'au degré dû à la hauteur $(a \sin \Phi - c) V : P$. On comprend par là d'où vient que dans les rivieres, & même dans celles dont le lit eſt droit & régulier, l'eau coule uniformément. Sa vîteſſe eſt toute acquiſe & par conſéquent *terminale.* Cela fait qu'à l'égard de cette vîteſſe terminale la partie PM peut être conſidérée comme partie d'une riviere, la valeur de c ſe réglant ſur la longueur a, toutes choſes d'ailleurs égales. Faiſant donc $c = na$, & $V = v$, on aura pour la vîteſſe terminale

$$\frac{P}{a} + n = \sin \Phi.$$

Ici P ſignifie donc la force motrice requiſe pour imprimer à la maſſe a les élémens de vîteſſe qu'elle perd en chaque moment par le frottement, lorsqu'elle a la vîteſſe due à la hauteur $V = v$. Et à cet égard le rapport $P : a$ eſt conſtant. Ce rapport déſigne donc la force retardatrice du frottement & n la force retardatrice de la ténacité. Ainſi la ſomme de ces deux forces eſt à la force abſolue de la gravité comme ſin Φ à 1. Elle n'en eſt donc que la $\frac{1}{400}$ partie, lorsque le canal ſur 400 pieds de longueur n'a qu'un pied de pente. Mais comme il n'y a non plus que la $\frac{1}{400}$ partie de la force abſolue de la gravité qui agiſſe, il s'enſuit que cette partie de la gravité eſt égale à la ſomme des deux forces retardatrices, ce qui du reſte eſt évident par ſoi-même. Car ſans cette égalité l'état de permanence, & par conſéquent la vîteſſe terminale, ne ſauroit avoir lieu. On inférera donc pour des rivieres quelconques que *tant que la vîteſſe de l'eau dans un même endroit reſte la même, les forces retardatrices de la ténacité & du frottement ſont égales à la force accélératrice de la gravité,* je veux dire *à la partie requiſe pour vaincre ces obſtacles.* Car ſi la pente, de même que la ſection du canal, n'eſt pas partout égale, une partie de la gravité ſera requiſe pour produire les vîteſſes différentes qui en réſultent. Au reſte dans tous ces calculs j'ai fait abſtraction d'un autre effet de la ténacité, qui eſt que l'eau découlant, comme p. ex. la maſſe PM, perd de ſa maſſe tout ce qui reſte attaché au canal, dont elle mouille toujours de nouvelles parties de ſa ſurface. C'eſt de quoi il faut tenir compte lorsque la maſſe eſt petite. Il eſt clair que quelques gouttes d'eau ne coulent pas fort loin. Paſſons à des conſidérations plus générales.

LXXIV.

Fig. 14. Soit $ADHC$ la ſection ou le profil d'un canal dont le fond AD ſoit plan & incliné, & dont les côtés ſoient des plans verticaux & parallèles. Que ce canal ſoit ouvert par en haut, & que l'eau qui y coule ſoit dans ſon état de permanence, en ſorte que par une de ſes ſections quelconque ML il paſſe dans des tems égaux des quantités égales d'eau, ce qui arrive lorsqu'on ſuppoſe en $RACB$ un réſervoir ou un étang fort vaſte. Tirons par B une droite horizontale BN, & érigeant d'un point quelconque M la verticale MN, il eſt clair que, ſans la ténacité & le frottement, MN ſeroit la hauteur due à la vîteſſe moyenne en M. Mais *à cauſe de ces obſtacles cette vîteſſe ſera due à une hauteur moins grande* MQ. Tirons encore une verticale mn, & l'horizontale Qk. Il eſt également clair que ſi ces obſtacles ceſſoient en M, la vîteſſe en m ſeroit due à la hauteur mk, tandis que, ces obſtacles ne ceſſant pas, cette vîteſſe ſera due à une hauteur moins grande mr. Tirant enfin Qs parallele à Mm, il eſt encore clair que l'accélération de l'eau qui paſſe de ML en $m\lambda$, au lieu d'être $= ks$ ſans ces obſtacles, n'eſt que $= rs$. Donc la partie kr eſt celle qui ſe perd. On voit encore que la vîteſſe allant en augmentant, les ſections AC, ML, DH diminuent en raiſon réciproque des vîteſſes.

LXXV.

Je dois avertir ici qu'à proprement parler les hauteurs AB, MQ &c. dues aux *vîteſſes moyennes* ne devroient pas être comptées depuis le fond du canal, mais depuis la ligne qui paſſe par les centres de gravité des ſections AC, ML &c., je veux dire depuis la *ligne centrique*. Si donc on les prend depuis le fond, on a des *vîteſſes moyennes* trop grandes; ce qui cependant par les raiſons rapportées ci-deſſus (Art. XVI-XIX) ſe trouve compenſé, du moins en partie, parce qu'au lieu du quarré de la vîteſſe moyenne, il faudroit prendre le terme moyen des quarrés des vîteſſes. D'ailleurs, comme je n'ai égard ici qu'à la brièveté du calcul, rien n'empêche de ſuppoſer le fond de la riviere tel, que la droite AD, au lieu d'être le fond, ſoit la ligne centrique.

LXXVI.

Pour voir maintenant comment la partie kr de l'accélération ks ſe perd par la ténacité & le frottement, je poſerai l'angle kQs, qui eſt celui de l'inclinaiſon, $= \Phi$. Je ferai de plus $BM = x$, Mm infiniment petite $= dx$, $ML = y$, la largeur du canal $= 1$, $MQ = v$, $rs = dv$. Comme donc $ks = dx . \sin \Phi$, on aura

$$kr = dx . \sin \Phi - dv.$$

Concevons à préſent un canal horizontal de la même largeur, $efgh$. Que la hauteur de l'eau ſoit $fe = gh = ML = y$. Prenons-en une longueur quelconque donnée $fg = a$. Par là nous aurons la maſſe d'eau donnée $efgh = ay$. La ténacité de cette eau fait que pour la vaincre il faut une force motrice p, de ſorte que faiſant $fi = p$, cette force ſoit égale au poids de la maſſe d'eau $idef = py$. Je regarde le rapport $if : fg$ comme conſtant, parce qu'il eſt évident que la ténacité de la maſſe $efhg$ croît en raiſon de ſa longueur. Il ſuit de là que la ténacité de la maſſe $ML\lambda m$ eſt $= pyy\,dx : ay = py\,dx : a$. Cette force étant diviſée par la maſſe $y\,dx$, donne la force retardatrice $p : a$. Et c'eſt la premiere partie qu'il s'agiſſoit de trouver.

LXXVII.

L'autre partie dépend de la vîteſſe. Soit V la hauteur due à la vîteſſe avec laquelle la même maſſe $efgh$ eſt ſuppoſée ſe mouvoir. Cette vîteſſe peut être quelle que ce ſoit; il ſuffit de la regarder comme donnée. La maſſe perdra dans le tems $d\tau$ une partie infiniment petite de ſa vîteſſe. Je poſe donc que s'il s'agit de la lui rendre dans le même tems $d\tau$, il y faille une force motrice $= Py = abef$. Cette force eſt en raiſon de la hauteur V. Donc pour la hauteur v elle ſera $= Pyv : V$. De plus cette même force eſt en raiſon de la maſſe ay. Donc pour la maſſe $y\,dx$

& la hauteur v, elle ſera $= Pyvy\,dx : Vay = Pyv\,dx : Va$. Donc diviſant cette force par la maſſe $y\,dx$, on a la force retardatrice $Pv : Va$. Et c'eſt la ſeconde partie qu'il s'agiſſoit de trouver.

LXXVIII.

Ainſi nous aurons

$$dx \,.\, \text{ſin}\,\Phi - dv = \frac{p}{a}\,dx + \frac{Pv\,dx}{aV},$$

d'où ſuit l'intégrale

$$v = \left(\text{ſin}\,\Phi - \frac{p}{a}\right) . \frac{aV}{P} . \left(1 - e^{-xP:aV - bP:aV.(\Phi)}\right)$$

qui donne $v = 0$ lorsque $x = 0$. La courbe BQE eſt donc une logarithmique dont l'aſymptote eſt GF parallele à AD, & par conſéquent inclinée à l'égard des ordonnées. Si donc le canal eſt d'une longueur indéfinie, la vîteſſe terminale de l'eau ſera conſtante & due à la hauteur $MG = (\text{ſin}\,\Phi - p : a) . aV : P$. Mais ſi le canal en M changeoit d'inclinaiſon, la logarithmique BQ en Q ſe changeroit en une autre. On comprend par là comment le calcul change lorsque la ligne centrique MD eſt une ligne courbe. L'angle Φ ſera variable & l'élément dx ſera celui de la courbe elle-même ou de l'arc qu'elle forme. Il ſuffira donc que ſin Φ ſoit donné par x, pour pouvoir achever l'intégration de la formule

$$v = \left[A - \frac{pV}{P} . e^{-Px:aV} + \int e^{Px:aV}\,\text{ſin}\,\Phi . dx\right] . e^{-Px:aV}$$

dans laquelle A dénote la conſtante qu'il faut ajouter après l'intégration.

LXXIX.

J'ai dit auparavant que j'ai ſimplifié ces conſidérations pour abréger le calcul. Il convient donc de dire ce qu'il y a à remarquer de plus. D'abord il eſt évident que les ſections AC, ML, DH allant en diminuant & la ſurface CH s'abaiſſant d'avantage que le fond AD, les particules d'eau gliſſent les unes ſur les autres & l'accroiſſement de la vîteſſe fait que chaque particule cherche à ſe détacher de celles qui la ſuivent. Par là l'eau ſouffre une extenſion, comme feroit une corde tendue. Or la ténacité de l'eau, tout de même que celle de la corde, s'y oppoſe au point de faire équilibre à la force tendante, jusqu'à ce que la force ſoit aſſez grande pour cauſer une rupture. Or à l'égard de l'eau la force tendante eſt la gravité, en ce qu'elle accélere les particules en m plus qu'elle n'accélere les particules en M. A cet égard donc l'effet de la ténacité croît avec l'accélération. Et il eſt clair que cet effet ceſſe dès que la vîteſſe eſt terminale, c'eſt à dire conſtante. Ainſi poſant que cet effet ſoit en raiſon de $\mathrm{d}v$, nous aurons

$$\mathrm{d}x \,.\, \sin\phi - \mathrm{d}v = \frac{p}{a}\,\mathrm{d}x + \frac{P\,v}{a\,V}\,\mathrm{d}x + \frac{q}{a}\,\mathrm{d}v$$

où q dénote la force tendante, lorsque l'extenſion pour toutes les particules en $efgh$ eſt la même que celle des particules en $ML\lambda m$. On aura donc l'intégrale

$$v = \frac{a\sin\phi - p}{a + q} \,.\, \frac{V}{P} \,.\, \left(1 - e^{-xP:V(a+q)}\right)$$

qui donne $v = 0$, lorsque $x = 0$. Comme elle eſt de la même forme que la précédente, elle mene à des conſéquences toutes ſemblables.

LXXX.

Si le canal n'eſt pas également large, il en réſulte un changement de vîteſſe qui fait que quand il n'y auroit ni ténacité ni frottement, la ligne BN ne ſauroit être droite. Et tout de même la ligne Qk, qui pour un canal également large eſt horizontale, doit être inclinée, dès que la largeur du canal eſt inégale. Si donc la largeur en M eſt $= \lambda$, & en $m = \lambda + \mathrm{d}\lambda$, la hauteur mk doit être diminuée dans le rapport de $(\lambda + \mathrm{d}\lambda)^2$ à $\lambda^2 = 1 : (1 - 2\,\mathrm{d}\lambda : \lambda)$. On aura donc cette hauteur diminuée

$$mw = (v + \mathrm{d}x \,.\, \mathrm{f}\phi)\left(1 - \frac{2\,\mathrm{d}\lambda}{\lambda}\right) = v + \mathrm{d}x\,\mathrm{f}\phi - \frac{2\,v\,\mathrm{d}\lambda}{\lambda}.$$

Et par conſéquent

$$wr = dx \sin\Phi - \frac{2v\,d\lambda}{\lambda} - dv$$

ce qui donne (art. précéd.)

$$dx \sin\Phi - \frac{2v\,d\lambda}{\lambda} - dv = \frac{p}{a}\,dx - \frac{Pv}{aV}dx - \frac{q}{a}\,dx$$

où il ne s'agit plus que de déterminer par x tant la largeur λ que $\sin\Phi$, ſi le fond du canal eſt courbé. On verra enſuite à quel point la formule ſera intégrable.

Voilà donc le commencement de la vraie théorie du cours des fleuves. Pour la pourſuivre il ne reſte qu'à faire des expériences pour déterminer les valeurs numériques des rapports $P : a$, $p : a$, $q : a$ &c. ſurtout auſſi relativement aux différentes manieres dont on peut conſidérer le mouvement de l'eau. Les Expériences propoſées ci-deſſus (Art. LX - LXXI.) feront d'un très bon uſage.

Fautes à corriger p. 297. & 298. dans l'*Avertiſſement de M. Jean Bernoulli.*

XLVI.	- *liſez*	XLVII.
§. XXXIX.	*l.*	XL.
§. XLIII.	- *l.*	XLIV.
§. XLVI.	- *l.*	XLVII.

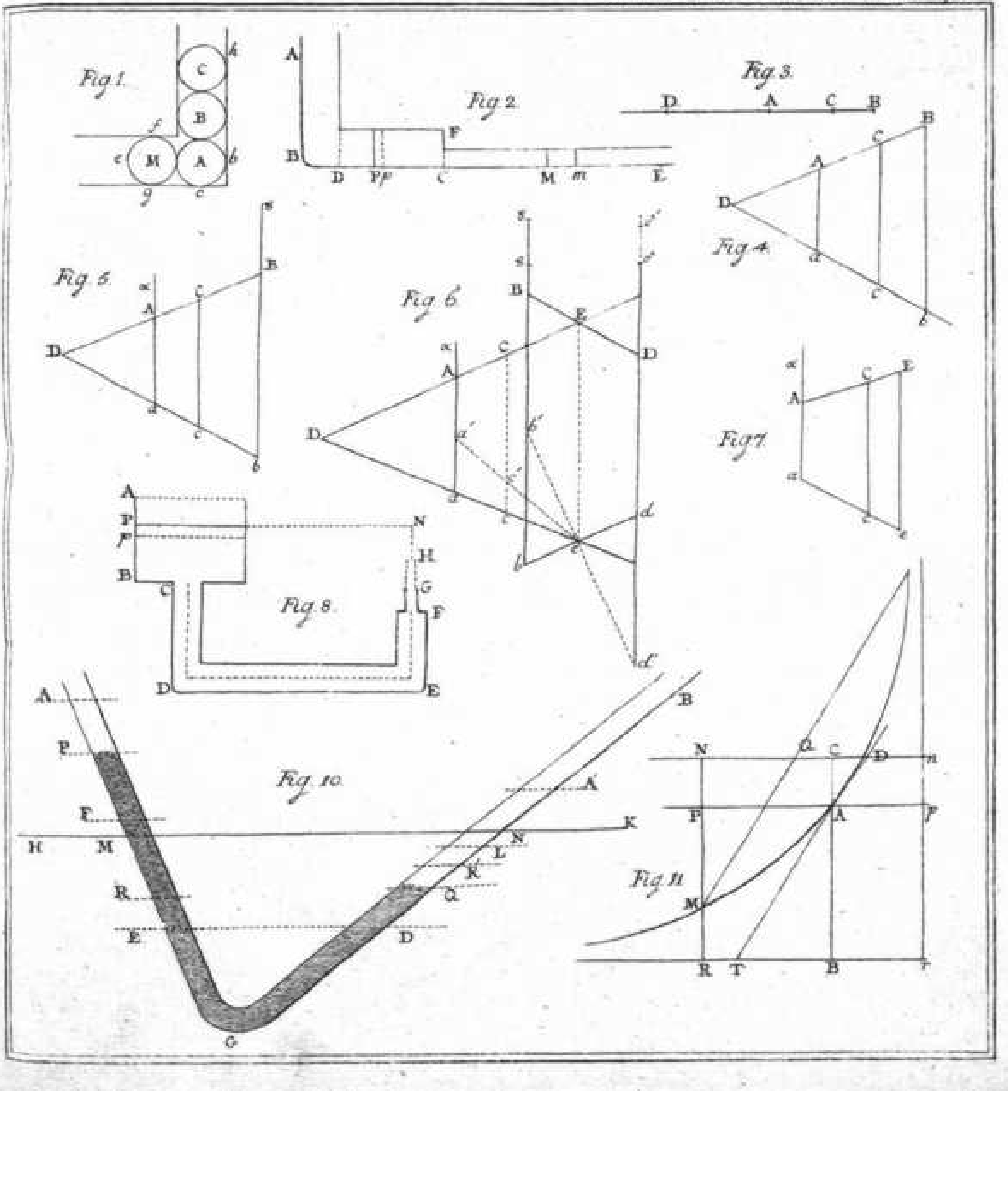


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 10.
Fig. 11.

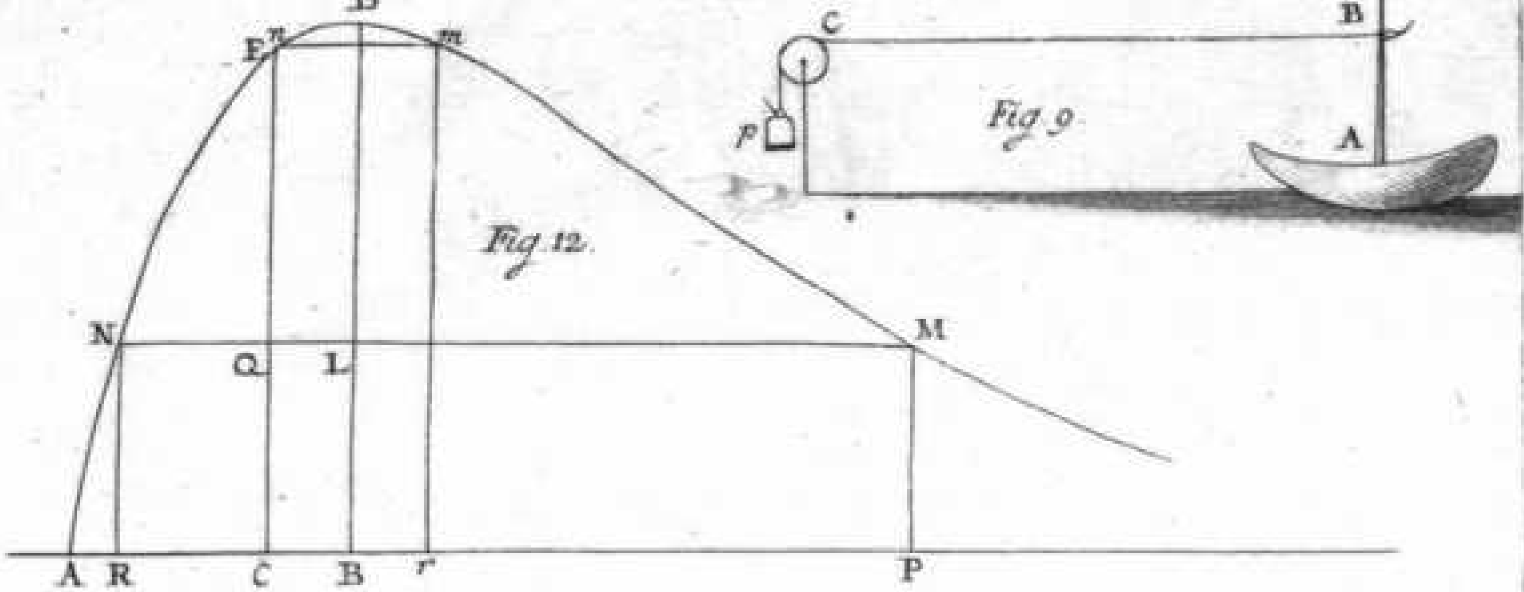


Fig. 12.

Fig. 9.

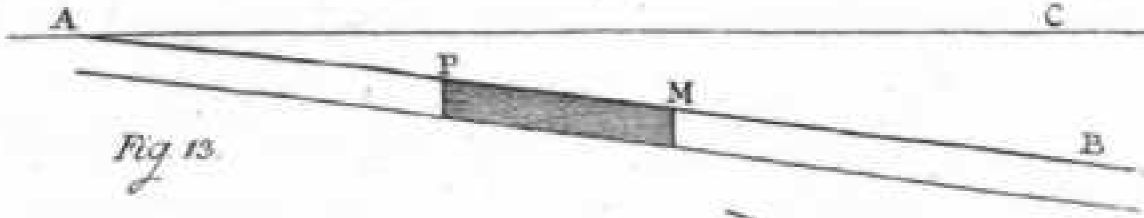


Fig. 13.

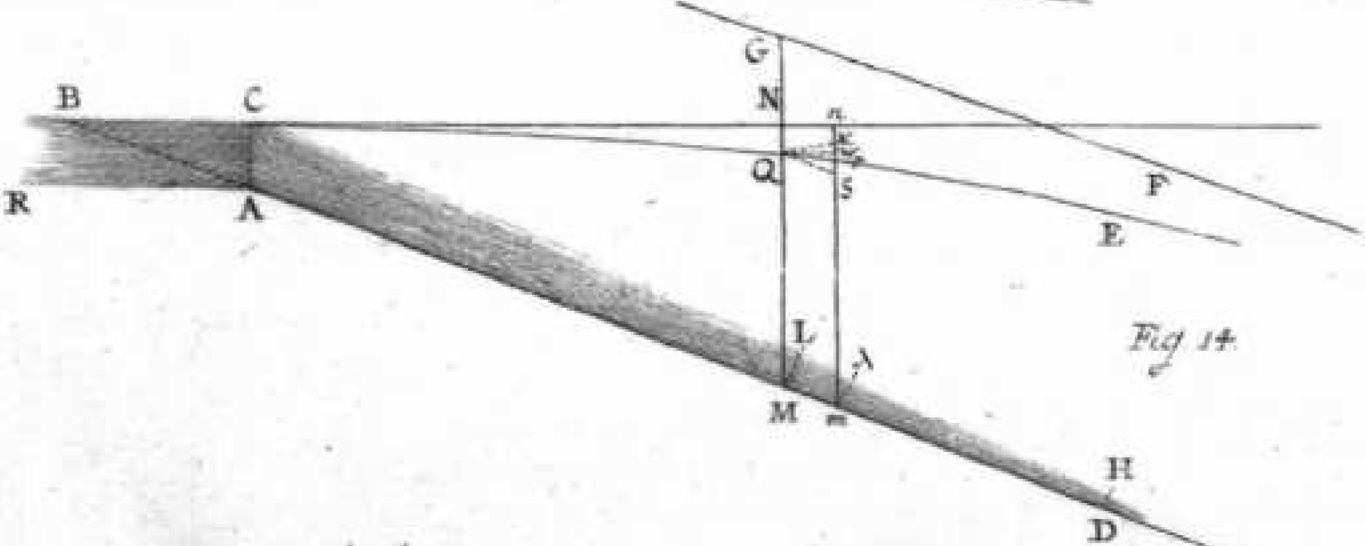


Fig. 14.