SUR LES IRRÉGULARITÉS du mouvement de Jupiter.

PAR M. LAMBERT.

I.

Après avoir fait des recherches sur les irrégularités du mouvement de Saturne, j'ai cru devoir en faire de semblables sur celles de Jupiter, en me servant de la même méthode. La différence qu'il y a, c'est que les irrégularités du mouvement de Jupiter ont déjà été examinées & calculées par feu M. *Mayer* de Göttingue. M. *Hell*, Astronome Impérial, en a inséré les Tables dans la collection de celles qu'il a publiées dans ses éphémérides, & au changement de quelques signes près je les retrouve dans les Tables que M. *de la Lande* a jointes à la seconde Édition de son Astronomie, ayant été assuré par M. *Wargentin* que ces corrections ne s'écartent jamais du ciel de plus de 3 minutes, tandis que les Tables de *Halley* s'en écartent quelquefois de plus du triple. A cet égard donc j'aurois pu renoncer à toute recherche ultérieure; mais j'ai trouvé dans tout cela même de nouveaux motifs de poursuivre. D'abord j'ignore si cet écart de 3 minutes n'a lieu que dans le cas où la faute peut ou doit en grande partie être rejetée sur les observations elles-mêmes. Ensuite ma méthode est vraisemblablement fort différente de celle que M. *Mayer* a employée, & qui paroit avoir été théorétique, tandis que je procede *a posteriori*, n'empruntant de la théorie que tout au plus la longueur des périodes qui peuvent avoir lieu dans l'action de Saturne sur Jupiter. Il s'agissoit donc de voir si je me rencontrerois avec M. *Mayer*, ou si je parviendrois à une plus grande précision.

II.

M. *Halley* a comparé ſes Tables des mouvemens de Jupiter avec toutes les oppoſitions obſervées depuis 1657 jusqu'en 1719, & il a donné une liſte des erreurs de ces Tables. J'ai commencé à rendre cette liſte plus complette, en y joignant les oppoſitions obſervées depuis 1719. M. *Schulze* s'eſt chargé de les calculer d'après les Tables de *Halley*. De cette maniere cette liſte s'étend à un intervalle de tems de plus d'un ſiecle, comprenant toutes les oppoſitions, à l'exception d'une ſeule, qui eſt celle de 1737. Il faut tout au moins une ſuite d'obſervations auſſi longue & auſſi peu interrompue pour s'aſſurer ſi tout ce qui y paroît périodique, l'eſt en effet.

III.

Tant que les irrégularités du mouvement de Saturne & de Jupiter proviennent de l'action mutuelle de ces deux planetes, elles ont à peu près les mêmes périodes, & toutes ces périodes dépendent principalement des anomalies moyennes & de la différence de leur longitude héliocentrique. J'en ai donné la liſte dans le Mémoire qui traite des irrégularités de Saturne. Cette liſte me ſervira encore ici, & j'emploierai les mêmes lettres pour les déſigner, en faiſant

$$\lambda = \text{long. } ♃ - \text{long. } ♄.$$
$$A = \text{anom. moyenne de } ♃.$$
$$a = \text{anom. moyenne de } ♄.$$

IV.

Pour faire voir d'un coup-d'œil en quoi conſiſtent les irrégularités du mouvement de Jupiter, ou bien les erreurs des Tables de *Halley*, je les repréſenterai d'abord par les ordonnées de la premiere courbe. On voit tout
Pl. VIII. au haut de la Planche la ſuite des années, & l'axe de cette courbe eſt diviſé ſuivant le nombre des oppoſitions. La courbe eſt tirée ſuivant la direction qu'indiquent les points dont la diſtance de l'axe exprime les erreurs des Tables de *Halley*, meſurées ſur l'échelle qui ſur le devant de la Planche traverſe perpendiculairement les axes de toutes les courbes & qui eſt diviſée en minutes de degré.

V.

Cette courbe paroît infiniment plus périodique que celle que me donnoient les perturbations de Saturne. On voit d'abord ſans peine qu'elle monte & deſcend aſſez régulierement de 10 en 10 ans, & que par-là elle indique comme d'elle-même la période 2λ. Cependant ce hauſſement & cet abaiſſement n'eſt pas partout égal. On voit hauſſer & baiſſer conſidérablement la courbe vers les années 1690 & 1700, auſſi bien qu'en 1750 & 1760, après un intervalle d'environ ſoixante ans. Cela indique quelque effet des périodes $2\lambda - A$, $\lambda - a$, qui ſont de $60\frac{3}{4}$ ans. D'ailleurs c'eſt auſſi à peu près l'intervalle de tems après lequel la plupart des irrégularités reviennent dans les mêmes combinaiſons. Obſervons encore que toute la courbe s'éleve peu à peu au deſſus de l'axe, & que cela arrive même toujours plus conſidérablement. Voilà donc ce que cette courbe nous fait voir en gros & comme du premier coup-d'œil.

VI.

L'inégalité des hauſſemens & des abaiſſemens provient de ce que la période 2λ ne les produit pas ſeule. Nous pourrons cependant en évaluer l'effet aſſez exactement en prenant le terme moyen de toutes ces inégalités. Le nombre en eſt aſſez grand pour que les effets des autres cauſes s'entredétruiſent, puiſque dans tout cet intervalle de tems ils ſont tout autant de fois poſitifs qu'ils ſont négatifs. Or je trouve la ſomme de 14 de ces hauſſemens & abaiſſemens $=$ 102 minutes. Ce nombre étant donc diviſé par 28 donne $3',6$ pour la moitié d'un hauſſement ou d'un abaiſſement, ce qui fait que l'équation qui dépend de la période 2λ, eſt

$$+\ 3',6 .\ \sin 2\lambda.$$

Car lorſque $2\lambda = 0$, la courbe paſſe l'axe en deſcendant. Alors les Tables de *Halley* commencent à être en défaut, & cela demande le ſigne $+$, ſi on veut les rapprocher des obſervations.

VII.

Nous voilà donc en état d'affranchir notre courbe d'une de ſes irrégularités périodiques. Il n'y a qu'à ſouſtraire de chacune de ſes ordonnées la quantité répondante $+ 3',6$ ſin 2λ. J'ai calculé cette quantité pour chaque oppoſition; je l'ai ſouſtraite des erreurs des Tables de *Halley*, & les erreurs réſidues m'ont donné la ſeconde courbe. On voit que par cette opération la premiere courbe n'a pas été fort ſimplifiée. Les hauſſemens & abaiſſemens ſont devenus beaucoup plus irréguliers, au point qu'il n'eſt pas même facile de voir laquelle des autres périodes y prédomine. J'ai cependant cru y entrevoir une période de 15 ans, & particulierement celle qui répond à l'argument $2\lambda - a$, plutôt que celle qui répond à l'argument $3\lambda - A$. Car l'un portant l'autre la ſeconde courbe paſſe l'axe environ vers les tems où ſin $(2\lambda - a) = 0$. D'ailleurs l'argument $3\lambda - A$ ne paroît pas devoir être d'un effet fort conſidérable. Prenant donc $2\frac{1}{2}$ minutes comme le terme moyen des moitiés des hauſſemens & des abaiſſemens, j'ai ſuppoſé l'équation

$$+ \; 2',5 \, . \, \text{ſin}\,(2\lambda - a)$$

comme répondant le mieux aux plus grandes inflexions de la ſeconde courbe, ſauf cependant les corrections que la ſuite des recherches à faire pourroient rendre néceſſaires, ſi le coëfficient $2',5$ ſe trouvoit trop grand ou trop petit.

VIII.

Souſtrayant donc cette équation des ordonnées de la ſeconde courbe, les réſidus m'ont donné la troiſieme courbe, qui n'eſt qu'un peu moins irréguliere que la ſeconde. Ses hauſſemens & ſes abaiſſemens paroiſſent aſſez régulierement revenir après un intervalle de 12 ans, qui répond aux périodes A, $\lambda + a$. Prenant donc l'équation

$$+ \; 1',5 \, . \, \text{ſin}\,(\lambda + a) \; - \; 2',3 \, . \, \text{ſin}\, A$$

il ne reſte d'autre doute que celui d'avoir pris les coëfficiens de ces termes trop grands ou trop petits. C'eſt ſur quoi la ſuite de mes recherches pourra nous donner plus de certitude.

IX.

En attendant j'ai ſouſtrait la partie $+ 1,5 \, . \, \text{ſin}\,(\lambda + a) - 2,3$ ſin A des ordonnées de la troiſieme courbe, & les réſidus m'ont donné la quatrieme. Les inflexions de cette courbe ſont aſſez ſingulieres & fort anomales.

males. J'ai vu que pour la rapprocher de son axe, le meilleur moyen seroit d'en soustraire l'effet des deux périodes de $60\frac{3}{4}$ ans, qui s'appercevoit déjà dans la premiere courbe (§. 5.). Et comme les quatre premieres courbes s'écartent de plus en plus de l'axe, & que cela paroît indiquer une fonction qui croît comme le quarré du tems, il convenoit de voir ce qui en est. J'ai donc soustrait la quatrieme courbe d'elle-même, en prenant les ordonnées qui sont éloignées entr'elles d'un intervalle de $60\frac{3}{4}$ ans, c'est à dire j'ai cherché toutes les différences Δy répondantes à $\Delta x = 60\frac{3}{4}$ ans. Ces différences Δy sont représentées par les ordonnées de la cinquieme courbe, qui paroît avoir pour axe la droite ab, inclinée vers l'axe qui a servi pour la construire, de sorte que les différences Δy, outre les variations périodiques qu'elles peuvent avoir, vont encore en croissant comme le tems x. Cela fait que les ordonnées de la quatrieme courbe vont en augmentant en raison du quarré du tems. Je trouve qu'à commencer à l'année 1658 on peut poser cette augmentation ou plutôt la correction qu'elle demande

$$= -3',6 \cdot \frac{xx}{10000} \cdot$$

la lettre x dénotant le nombre des années depuis 1658. Ensuite nommant Φ la période de $60\frac{3}{4}$ ans, je trouve qu'il faut en poser l'effet

$$= -3,3 \cdot \sin \Phi$$

en faisant $\Phi = 8^{s}. 1^{\circ}$ au tems de l'opposition arrivée vers la fin de l'année 1657, ou bien en faisant

$$-3',3 \cdot \sin \Phi = -3',3 \sin (2\lambda - A) + 1',6 \cdot \sin (\lambda - a)$$

X.

Soustrayant donc la partie

$$-3',6 \frac{xx}{10000} - 3',3 \cdot \sin \Phi$$

des ordonnées de la quatrieme courbe, les résidus m'ont donné la sixieme courbe. On voit que la plupart des inflexions de cette courbe sont assez petites, mais qu'elle en a encore deux fort grandes vers les années 1668 & 1727, qui par conséquent sont éloignées l'une de l'autre d'un intervalle d'environ 59 ans. Il faut donc que cette courbe soit dûe à plusieurs petites irrégularités, qui ne s'accumulent qu'une seule fois pendant la grande période de 59 ans.

XI.

Afin de voir plus clair dans tout cela j'ai commencé par soustraire cette sixieme courbe d'elle-même, ou bien par chercher ses différences Δy répondantes à $\Delta x = 29\frac{1}{2}$ ans. Ces différences m'ont donné la septieme courbe, laquelle par-là même est affranchie des irrégularités qui reviennent une ou plus d'une fois dans un intervalle de $29\frac{1}{2}$ ans. Afin de la débarrasser encore des irrégularités qui peuvent être dûes à la période λ, je l'ai soustraite d'elle-même, ou bien j'ai pris les différences $\Delta(\Delta y)$ répondantes à $\Delta x = 20$ ans. Ces secondes différences m'ont donné la huitieme courbe, qui m'a fait entrevoir que je n'ai pas encore déterminé tout ce qui est dû aux périodes de $60\frac{3}{4}$ ans. Car cette courbe, outre ses petites inflexions, suit manifestement la grande inflexion de la courbe pointée cd. Posant donc $y = a. \sin \omega$, correction qui reste encore à faire relativement aux périodes de 60 ans, on aura pour la septieme courbe

Pl. IX.

$$\begin{aligned}\Delta y &= a. \sin(\omega + 180°) - a \sin \omega\\ &= 2a. \cos(\omega + 90°)\\ &= -2a. \sin \omega\end{aligned}$$

& pour la huitieme courbe ou bien pour la courbe cd

$$\begin{aligned}\Delta\Delta y &= -2a. \sin(\omega + 3^s. 27°. 47') + 2a. \sin \omega\\ &= -3{,}4244\, a. \cos(\omega + 58°. 53')\\ &= +3{,}4244\, a. \sin(\omega - 31°. 7').\end{aligned}$$

Or les plus grandes ordonnées de la courbe cd étant $= 6',3$, on aura

$$\begin{aligned}3{,}4244\, a &= 6',3\\ a &= 1',8.\end{aligned}$$

Et de la façon que j'ai cru devoir tirer cette courbe l'argument $\omega - 31°. 7'$ répondant à l'opposition de 1657 peut être posé $= 189\frac{1}{2}$ degrés. Ainsi en faisant

$$\omega - 31°. 7' = 189°. 28'$$

on trouve

$$\omega = 220°. 35'.$$

Et comme pour la même opposition on a

$$2\lambda - A = 8^s.\ 28^\circ.\ 43'$$
$$\lambda - a = 11.\ 17.\ 37$$

on en déduit d'abord l'équation

$$m.\ \sin(8^s.\ 28^\circ.\ 43') + n.\ \sin(11^s.\ 17^\circ.\ 37') = 1',8.\ \sin 220^\circ.\ 35.$$

Comme les périodes $2\lambda - A$, $\lambda - a$, sont les mêmes, on aura pour un autre tems quelconque

$$m.\ \sin(8^s.\ 28^\circ.\ 43' + x) + n.\ \sin(11^s.\ 17^\circ.\ 37' + x)$$
$$= 1',8.\ \sin(220^\circ.\ 35' + x).$$

Par-là on obtient

$$\alpha.\ \sin\omega = -1',4.\ \sin(\lambda - a) + 1',5.\ \sin(2\lambda - A).$$

Or nous avions déjà trouvé ci-dessus (§. 9.)

$$-3',3.\ \sin\phi = +1,6.\ \sin(\lambda - a) - 3',3.\ \sin(2\lambda - A).$$

Ainsi l'effet total des périodes de $60\frac{3}{4}$ ans se réduit à

$$+0',2.\ \sin(\lambda - a) - 1',8.\ \sin(2\lambda - A).$$

XI.

Regardant ensuite la courbe *cd* comme le véritable axe de l'autre courbe, celle-ci étant rapportée à un axe rectiligne, prend la forme de la neuvième courbe. Ses inflexions sont assez régulieres & paroissent revenir en 12 ans. J'ai cru pouvoir en déduire l'équation

$$-1,1.\ \sin\psi = +0',6.\ \sin(\lambda + a) + 0',8.\ \sin A$$

sans cependant être fort assuré de la vraie valeur des coëfficiens. Car il arrive ici que les petites irrégularités qu'il s'agit de chercher, sont assez égales. Et cela fait qu'il est plus difficile de les bien déméler.

XII.

Mais quoi qu'il en soit, je pouvois toujours à compte de ce que les recherches suivantes feront voir, soustraire des ordonnées de la 6me courbe les parties

$$-1',4\ \sin(\lambda - a) + 1',5.\ \sin(2\lambda - A)$$
$$+0,8\ \sin A \qquad + 0,6.\ \sin(\lambda + a).$$

Les résidus m'ont donné la 10me courbe, qui outre ses petites inflexions ne laisse pas d'en avoir encore deux grandes vers l'an 1668 & 1727. Afin de voir ſi la période λ de 20 ans peut y avoir quelque influence, je l'ai ſouſtraite d'elle-même, ou bien j'ai pris les différences Δy répondantes à $\Delta x = 10$ ans. Ces différences m'ont donné la 11^{me} courbe, qui eſt encore moins réguliere. Enfin la conſidération de l'une & de l'autre de ces deux courbes m'a enfin déterminé à établir l'équation

$$- 1',2 . \sin \lambda$$

comme le ſeul moyen qui reſtoit de rendre les inflexions de la dixieme courbe plus égales & plus régulieres.

XIII.

Ayant donc ſouſtrait cette partie $- 1',2 . \sin \lambda$ de la dixieme courbe, les réſidus m'ont donné la douzieme. Cette courbe m'a fait voir que nonobſtant ce que j'ai déjà fait pour écarter l'effet des périodes de 12 ans, il en reſtoit néanmoins une partie en arriere, de ſorte que je pouvois encore ſouſtraire

$$- 1',6 . \sin (\lambda + a)$$

de cette douzieme courbe. Les réſidus me donnerent la treizieme, & celle-ci étant encore diminuée de la partie

$$- 1',2 . \sin (2\lambda - a)$$

dont la période eſt de 15 ans, m'a enfin donné la quatorzieme courbe, dont les inflexions ſont déjà ſi petites qu'elles ſe confondent avec les erreurs auxquelles les obſervations elles-mêmes ſont ſujettes. Car on voit que les points qui dans toutes ces courbes marquent les réſidus comparés aux obſervations elles-mêmes, ſont en différens endroits placés aſſez irrégulierement pour laiſſer en doute de quelle maniere la courbe doit être tirée.

XIV.

Ainſi les erreurs des Tables de *Halley* pour Jupiter peuvent à peu de choſe près être exprimées par l'équation

$$\begin{aligned} &- 1,2 . \sin \lambda \quad + 0,2 . \sin (\lambda - a) \quad - \tfrac{3.6}{10000} . xx \\ &+ 3,6 . \sin 2\lambda - 1,8 . \sin (2\lambda - A) \\ &- 1,5 . \sin A \quad + 0,5 \quad \sin (\lambda + a) \\ &\qquad\qquad\quad + 1,3 . \sin (2\lambda - a) \end{aligned}$$