MÉMOIRE

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS REMARQUABLES DES QUANTITÉS TRANSCENDENTES CIRCULAIRES ET LOGARITHMIQUES.

PAR M. LAMBERT. *)

§. 1.

Démontrer que le diametre du cercle n'eſt point à ſa circonférence comme un nombre entier à un nombre entier, c'eſt là une choſe, dont les géometres ne ſeront gueres ſurpris. On connoit les nombres de *Ludolph*, les rapports trouvés par *Archimede*, par *Metius* etc. de même qu'un grand nombre de ſuites infinies, qui toutes ſe rapportent à la quadrature du cercle. Et ſi la ſomme de ces ſuites eſt une quantité rationelle, on doit aſſez naturellement conclure, qu'elle ſera ou un nombre entier, ou une fraction très ſimple. Car, s'il y falloit une fraction fort compoſée, quelle raiſon y auroit-il, pourquoi plutôt telle que telle autre quelconque? C'eſt ainſi, par exemple, que la ſomme de la ſuite

$$\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \&c.$$

eſt égale à l'unité, qui de toutes les quantités rationelles eſt la plus ſimple. Mais, en omettant alternativement les 2, 4, 6, 8 &c. termes, la ſomme des autres

$\frac{2}{1.3}$

*) Lu en 1767.

$$\frac{2}{1.\,3} + \frac{2}{5.\,7} + \frac{2}{9.\,11} + \frac{2}{13.\,15} + \&c.$$

donne l'aire du cercle, lorsque le diametre eſt $= 1$. Il ſemble donc que, ſi cette ſomme étoit rationelle, elle devroit également pouvoir être exprimée par une fraction fort ſimple, telle que ſeroit $\frac{3}{4}$ ou $\frac{4}{5}$ &c. En effet, le diametre étant $= 1$, le rayon $= \frac{1}{2}$, le quarré du rayon $= \frac{1}{4}$, on voit bien que ces expreſſions étant auſi ſimples, elles n'y mettent point d'obſtacle. Et comme il s'agit de tout le cercle, qui fait une eſpece d'unité, & non de quelque Secteur, qui de ſa nature demanderoit des fractions fort grandes, on voit bien, qu'encore à cet égard on n'a point ſujet de s'attendre à une fraction fort compoſée. Mais comme, après la fraction $\frac{22}{7}$ trouvée par *Archimede*, qui ne donne qu'un à peu près, on paſſe à celle de *Metius*, $\frac{355}{113}$, qui n'eſt pas non plus exacte, & dont les nombres ſont conſidérablement plus grands, on doit être fort porté à conclure, que la ſomme de cette ſuite, bien loin d'être égale à une fraction ſimple, eſt une quantité irrationelle.

§. 2. Quelque vague que ſoit ce raiſonnement, il y a néanmoins des cas où on ne demande pas d'avantage. Mais ces cas ne ſont pas celui de la quadrature du cercle. La plûpart de ceux qui s'attachent à la chercher, le font avec une ardeur, qui les entraine quelque fois juſqu'à révoquer en doute les vérités les plus fondamentales & les mieux établies de la géométrie. Pourroit-on croire, qu'ils ſe trouveroient ſatisfaits par ce que je viens de dire? Il y faut toute autre choſe. Et s'agît-il de démontrer, qu'en effet le diametre n'eſt pas à la circonférence comme un nombre entier à un nombre entier, cette démonſtration doit être ſi rigide, qu'elle ne le cede à aucune démonſtration géométrique. Et avec tout cela je reviens à dire, que les géométres n'en ſeront point ſurpris. Ils doivent être accoutumés depuis longtems à ne s'attendre à autre choſe. Mais voici ce qui méritera plus d'attention, & ce qui fera une bonne partie de ce Mémoire. Il s'agit de faire voir, que *toutes les fois qu'un arc de cercle quelconque eſt commenſurable au rayon, la tangente de cet arc lui eſt in-*

com-

commensurable; & que réciproquement, *toute tangente commensurable n'est point celle d'un arc commensurable.* Voila de quoi être un peu plus ſurpris. Cet énoncé paroiſſoit devoir admettre une infinité d'exceptions, & il n'en admet aucune. Il fait encore voir juſqu'à quel point les quantités circulaires tranſcendentes ſont tranſcendentes, & reculées au delà de toute commenſurabilité. Comme la démonſtration que je vais donner exige toute la rigueur géométrique, & qu'en outre elle ſera un tiſſu de quelques autres theorémes, qui demandent d'être démontrés avec tout autant de rigueur, ces raiſons m'excuſeront, quand je ne me hâterai pas d'en venir à la fin, ou lorsque chemin faiſant je m'arrêterai à ce qui ſe préſentera de remarquable.

§. 3. Soit donc propoſé *un arc de cercle quelconque, mais commenſurable au rayon:* & il s'agit de trouver, *ſi cet arc de cercle ſera en même tems commenſurable à ſa tangente ou non?* Qu'on ſe figure pour cet effet une fraction telle, que ſon numérateur ſoit égal à l'arc de cercle propoſé, & que ſon dénominateur ſoit égal à la tangente de cet arc. Il eſt clair que, de quelque maniere que cet arc & ſa tangente ſoient exprimés, cette fraction doit être égale à une autre fraction, dont le numérateur & le dénominateur ſeront des nombres entiers, toutes les fois que l'arc de cercle propoſé ſe trouvera être commenſurable à ſa tangente. Il eſt clair auſſi que cette ſeconde fraction doit pouvoir être déduite de la premiere, par la même méthode, dont on ſe ſert en arithmétique pour réduire une fraction à ſon moindre dénominateur. Cette méthode étant connue depuis *Euclide*, qui en fait la 2me prop. de ſon 7me Livre, je ne m'arrêterai pas à la démontrer de nouveau. Mais il convient de remarquer que, tandis que *Euclide* ne l'applique qu'à des nombres entiers & rationels, il faudra que je m'en ſerve d'une autre façon, lorsqu'il s'agit d'en faire l'application à des quantités, dont on ignore encore ſi elles ſeront rationelles ou non? Voici donc le procédé qui conviendra au cas dont il eſt ici queſtion.

§. 4. Soit le rayon $= 1$, un arc de cercle propoſé quelconque $= v$. Et on aura les deux ſuites infinies fort connues

$$\sin v = v - \frac{1}{2.3} v^3 + \frac{1}{2.3.4.5} v^5 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7} v^7 + \&c.$$

$$\cos v = 1 - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2.3.4} v^4 - \frac{1}{2.3.4.5.6} v^6 + \&c.$$

Comme dans ce qui ſuivra je donnerai deux ſuites pour l'hyperbole qui ne différeront de ces deux qu'en ce que tous les ſignes ſont poſitifs, je différerai jusques-là de démontrer la loi de progreſſion de ces ſuites, & encore ne la démontrerai-je que pour ne rien omettre de tout ce que demande la rigueur géométrique. Il ſuffit donc d'en avoir averti les Lecteurs d'avance.

§. 5. Or comme il eſt

$$\text{tang } v = \frac{\sin v}{\cos v},$$

nous aurons, en ſubſtituant ces deux ſuites, la fraction

$$\text{tang } v = \frac{v - \frac{1}{2.3} v^3 + \frac{1}{2.3.4.5} v^5 - \&c.}{1 - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2.3.4} v^4 - \&c.}$$

Je la poſerai pour plus de briéveté

$$\text{tang } v = \frac{A}{B},$$

de ſorte qu'il ſoit

$$A = \sin v,$$
$$B = \cos v.$$

Voici maintenant le procédé que preſcrit *Euclide*.

§. 6. On diviſe B par A; ſoit le quotient $= Q'$, le réſidu $= R'$.
On diviſe A par R'; ſoit le quotient $= Q''$, le réſidu $= R''$.
On diviſe R' par R''; ſoit le quotient $= Q'''$, le réſidu $= R'''$.
On diviſe R'' par R'''; ſoit le quotient $= Q^{IV}$, le réſidu $= R^{IV}$. &c.

de

de ſorte qu'en continuant ces diviſions, on trouve ſucceſſivement

les quotiens $Q', Q'', Q''' \text{ - - - - - - - - } Q^n, Q^{n+1}, Q^{n+2} \text{ - - - - }$ &c.

les réſidus $R', R'', R''' \text{ - - - - - - - - } R^n, R^{n+1}, R^{n+2} \text{ - - - - }$ &c.

& il eſt clair ſans que j'en avertiſſe, que les expoſans n, $n+1$, $n+2$ &c. ne ſervent qu'à indiquer le quantieme quotient ou réſidu eſt celui où ils ſe trouvent marqués. Ce qui étant poſé, voici ce qu'il s'agit de démontrer.

§. 7. En premier lieu, *non ſeulement que la diviſion peut être continuée ſans fin, mais que les quotiens ſuivront une loi très ſimple en ce qu'il ſera*

$$Q' = +1 : v,$$
$$Q'' = -3 : v,$$
$$Q''' = +5 : v,$$
$$Q^{IV} = -7 : v, \text{ \&c.}$$

& en général

$$Q^n = \pm (2n - 1) : v,$$

où le ſigne $+$ *eſt pour l'expoſant* n *pair, le ſigne* $-$ *pour l'expoſant* n *impair, & que de la ſorte on aura pour la tangente exprimée par l'arc la fraction continue très ſimple*

$$\text{tang } v = \cfrac{1}{1:v - \cfrac{1}{3:v - \cfrac{1}{5:v - \cfrac{1}{7:v - \cfrac{1}{9:v - \text{\&c.}}}}}}$$

§. 8. En ſecond lieu, *que les réſidus* R', R'', R''' &c. *ſeront exprimés par les ſuites ſuivantes, dont les loix de progreſſion ſont également fort ſimples:*

 $R' =$

$$R' = -\frac{2}{2.\,3}v^2 + \frac{4}{2.\,3.\,4.\,5}v^4 - \frac{6}{2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7}v^6 + \&c.$$

$$R'' = -\frac{2.\,4}{2.\,3.\,4.\,5}v^3 + \frac{4.\,6}{2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7}v^5 - \frac{6.\,8}{2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9}v^7 + \&c.$$

$$R''' = +\frac{2.\,4.\,6}{2\cdots\cdot 7}v^4 - \frac{4.\,6.\,8}{2\cdots\cdots 9}v^6 + \frac{6.\,8.\,10}{2\cdots\cdots 11}v^8 - \&c.$$

$$R^{IV} = +\frac{2.\,4.\,6.\,8}{2\cdots 9}v^5 - \frac{4.\,6.\,8.\,10}{2\cdots\cdots 11}v^7 + \frac{6.\,8.\,10.\,12}{2\cdots\cdots 13}v^9 - \&c.$$

&c.

de sorte que les signes des premiers termes changent suivant l'ordre quaternaire — — + +, & qu'en général il sera

$$\pm R^n = -\frac{2^n\,(1.\,2\cdots\cdot n)}{1.\,2\cdots(2n+1)}v^{n+1} + \frac{2^{n+1}(1.\,2\cdots\cdot(n+1))}{1.\,2\cdots\cdots(2n+3)}v^{n+3} - \&c.$$

$$\pm R^{n+1} = -\frac{2^{n+1}(1.\,2\cdots(n+1))}{1.\,2\cdots\cdots(2n+3)}v^{n+2} + \frac{2^{n+2}(1.\,2\cdots(n+2))}{1.\,2\cdots\cdot(2n+5)}v^{n+4} - \&c.$$

$$\mp R^{n+2} = +\frac{2^{n+1}(1.\,2\cdots(n+2))}{1.\,2\cdots\cdot(2n+5)}v^{n+3} - \frac{2^{n+3}(1.\,2\cdots(n+3))}{1.\,2\cdots\cdot(2n+7)}v^{n+5} + \&c.$$

§. 9. Or pour donner à la démonſtration de ces théoremes toute la briéveté poſſible, conſidérons que chaque réſidu R^{n+2} ſe trouve en diviſant par le réſidu R^{n+1}, qui le précéde immédiatement, l'antepénultieme R^n. Cette conſidération fait, que la démonſtration, dont il s'agit peut être partagée en deux parties. Dans la premiere il faut faire voir que; *ſi deux réſidus* R^n, R^{n+1}, *qui ſe ſuccedent immediatement, ont la forme que je leur ai donnée, le réſidu* R^{n+2}, *qui ſuit immédiatement, aura la même forme.* Ce qui étant une fois démontré, il ne reſte plus que de faire voir, dans la ſeconde partie de la démonſtration, *que la forme des deux premiers réſidus eſt celle qu'ils doivent avoir.*

avoir. Car, de cette maniere, il eſt évident que la forme de tous les ſuivans s'établit comme d'elle-même.

§. 10. Commençons donc par diviſer le premier terme du réſidu R^n par le premier terme du réſidu R^{n+1}, afin d'avoir le quotient

$$Q^{n+2} = \frac{2^n(1.2.3\cdots n)}{1.2.3\cdots(2n+1)}v^{n+1} : \frac{2^{n+1}(1.2.3\cdots(n+1))}{1.2.3\cdots\cdots(2n+3)}v^{n+2}$$
$$= 1 : \frac{2(n+1)v}{(2n+2).(2n+3)} = (2n+3) : v.$$

Et il eſt clair que, le réſidu R^{n+1} étant multiplié par ce quotient

$$Q^{n+2} = (2n+3) : v,$$

& le produit étant ſouſtrait du réſidu R^n, il doit reſter le réſidu R^{n+2}.

§. 11. Mais afin de n'avoir pas beſoin de faire cette opération pour chaque terme ſéparément & de nous borner par là à une ſimple induction, prenons le terme général de chacune des ſuites qui expriment les réſidus R^n, R^{n+1}, R^{n+2}, de ſorte qu'en prenant le m^{tieme} terme des réſidus R^n, R^{n+1}, nous prenions le $(m-1)^{\text{tieme}}$ terme du réſidu R^{n+2}. Ce qui étant obſervé, ces termes ſeront

$$\pm r^n = -\frac{2^{n+m-1}(m\cdot(m+1).(m+2)\cdots\cdots(n+m-1)v^{n+2m-1}}{1.2.3.4\cdots\cdots\cdots(2n+2m-1)}$$

$$\pm r^{n+1} = -\frac{2^{n+m}.(m\cdot(m+1)(m+2)\cdots\cdots(n+m)v^{n+2m}}{1.2.3.4\cdots\cdots(2n+2m+1)}$$

$$\pm r^{n+2} = -\frac{2^{n+m}.((m-1)\cdot m\cdot(m+1)\cdots\cdots(n+m)\cdot v^{n+2m-1}}{1.2.3.4\cdots\cdots(2n+m+1)}$$

Or, puiſqu'il doit être

$$r^n - r^{n+1}.(2n+3):v = r^{n+2},$$

& qu'en effet il est

$$r^n - r^{n+1}(2n+3):v = -\frac{2^{n+m-1}.(m \cdots (n+m-1))\, v^{n+2m-1}}{1.2.3 \cdots (2n+2m-1)}$$

$$+ \frac{2^{n+m}.(m \cdots (n+m))\, v^{n+2m}}{1.2.3 \cdots (2n+2m+1)} . \frac{2n+3}{v}$$

$$= \frac{2^{n+m-1}.(m \cdots (n+m-1))}{1.2 \cdots (2m+2m-2)} v^{n+2m-1}.\left(-1 + \frac{2.(n+m).(2n+3)}{(2n+2m).(2n+2m+1)}\right)$$

$$= -\frac{2^{n+m-1}.(m \cdots (n+m-1))}{1.2 \cdots (2n+2m-2)} v^{n+2m-1} . \frac{(2m-2).(2n+2m)}{(2n+2m).(2n+m+1)}$$

$$= -\frac{2^{n+m}.((m-1).m(m+1) \cdots (n+m))\, v^{n+2m-1}}{1.2.3 \cdots (2n+m+1)},$$

& partant

$$= \pm r^{n+2}.$$

On voit, que les résidus R^n, R^{n+1} ayant la forme que je leur ai donnée, le résidu R^{n+2} aura la même forme. Il ne s'agira donc plus, que de s'assurer de la forme des deux premiers résidus R', R'', afin d'établir ce que cette premiere partie de notre démonstration avoit admis comme vrai en forme d'hypothese. Et c'est ce qui sera la seconde partie de la démonstration.

§. 12. Souvenons-nous pour cet effet, que le premier résidu R' est celui qui reste en divisant le

$$\cos v = 1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2.3.4}v^4 \cdots \frac{1}{1 \cdots m}v^m \cdots \text{\&c.}$$

par le

$$\sin v = v - \frac{1}{2.3}v^3 + \frac{1}{2.3.4.5}v^5 \cdots \frac{1}{1 \cdots (m+1)}v^{m+1} \cdots \text{\&c.}$$

Or le quotient qui résulte de la division du premier terme, étant $= 1 : v$, on voit qu'il sera

$$R' = \text{cos}\ v - \frac{1}{v} \cdot \sin v.$$

Multipliant donc le terme général du diviseur,

$$\pm \frac{1}{1.\ 2.\ \cdots\ (m+1)} v^{m+1},$$

par $1 : v$, & soustraïant le produit

$$\pm \frac{1}{1.\ 2\ \cdots\ (m+1)} \cdot v^m,$$

du terme général du dividende

$$\pm \frac{1}{1.\ 2\ \cdots\cdots\ m} \cdot v^m,$$

on aura le terme général du premier résidu R'

$$r' = \pm \frac{m \cdot v^m}{1\ \cdots\cdots\ (m+1)}.$$

Or $(m+1)$ étant toujours un nombre impair, m sera un nombre pair, & le premier résidu sera

$$R' = -\frac{2}{2.\ 3} v^2 + \frac{4}{2.\ 3.\ 4.\ 5} v^4 - \frac{6}{2\ \cdots\ 7} v^6 + \&c.$$

tel que nous l'avons supposé.

§. 13. Le second résidu R'' résulte de la division de

$$\sin v = v - \frac{1}{2.\ 3} v^3 + \frac{1}{2.\ 3.\ 4.\ 5} v^5 - \&c. \cdots \pm \frac{1}{1.2\ \cdots\ (m-1)} v^{m-1}$$

par le premier résidu que nous venons de trouver

$$R' = -\frac{2}{2.\ 3} v^2 + \frac{4}{2.3.4.5} v^4 - \frac{6}{2\cdots 7} v^7 + \cdots \mp \frac{m v^m}{1\ \cdots\ (m+1)}$$

Or

Or le quotient qui résulte de la division du premier terme, étant $= - 3 : v$, on voit qu'il sera

$$R'' = \sin v - \frac{3}{v} . R'.$$

Multipliant donc le terme général du diviseur

$$\mp \frac{m v^m}{1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (m+1)},$$

par $- 3 : v$, & soustraïant le produit

$$\pm \frac{3 m v^{m-1}}{1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (m+1)},$$

du terme général du dividende

$$\pm \frac{1}{1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (m-1)} v^{m-1},$$

le terme général du second résidu sera

$$r'' = \pm \frac{v^{m-1}}{1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (m-1)} \mp \frac{3 m v^{m-1}}{1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (m+1)}$$

$$= \pm \frac{(m-2) . m . v^{m-1}}{1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (m+1)}.$$

Substituant donc pour m les nombres pairs, nous aurons le second résidu

$$R'' = - \frac{2.\ 4}{2.3.4.5} v^3 + \frac{4.\ 6}{2 \cdot \cdot \cdot 7} v^5 - \frac{6.\ 8}{2 \cdot \cdot \cdot 9} v^7 + \&c.$$

encore tel que nous l'avons supposé. Ainsi la forme des deux premiers résidus étant démontrée, il s'ensuit, en vertu de la premiere partie de notre démonstration, que la forme de tous les résidus suivans l'est également.

§. 14. Maintenant il n'est plus nécessaire de démontrer séparément la loi de la progression des quotiens Q', Q'', Q''' &c. Car la loi des résidus étant démontrée, il est par là même démontré qu'un quotient quelconque sera (§. 10)

$\pm$

$$\pm Q^{n+1} = (2n + 3) : v,$$

ce qui, en vertu de la théorie des fractions continues, donne

$$\tan v = \cfrac{1}{1:v - \cfrac{1}{3:v - \cfrac{1}{5:v - \cfrac{1}{7:v - \cfrac{1}{9:v - \cfrac{1}{11:v - 1 \;\&c.}}}}}}$$

d'où l'on voit en même tems, que *toutes les fois que l'arc v sera égal à une partie aliquote du rayon, tous ces quotiens seront des nombres entiers croissans dans une progression arithmétique.*

Et voilà ce quil faut observer, parce que dans le théoreme d'*Euclide* cité cy-dessus (§. 3.) tous les quotiens sont supposés être des nombres entiers. Ainsi jusques là la méthode que prescrit *Euclide*, sera applicable à tous ces cas, où l'arc v est une partie aliquote du rayon. Mais, encore dans ces cas, il s'y joint une autre circonstance qu'il convient de faire remarquer.

§. 15. Le probleme que propose *Euclide*, c'est *de trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers, qui ne sont pas premiers entre eux.* Ce probleme est résoluble toutes les fois qu'un des résidus R', R'', R''' &c. - - - R^n devient $= 0$, sans que le résidu précédent R^{n-1} soit égal à l'unité, ce qui suivant, la 1re Prop. du même livre n'arrive que lorsque les deux nombres proposés sont premiers entre eux, bien entendu que tous les quotiens Q', Q'', Q''' &c. sont supposés être des nombres entiers. Or nous venons de voir, que cette derniere supposition a lieu dans le cas dont il s'agit ici, toutes les fois que $\frac{1}{v}$ est un nombre entier. Mais, quant aux résidus R', R'', R''' &c. il n'y en a aucun qui devienne $= 0$. Tout au contraire, en considé-

 rant

rant la loi de progreſſion des réſidus que nous venons de trouver, on voit, que non ſeulement ils décroiſſent ſans interruption, mais qu'ils décroiſſent même plus fortement qu'aucune progreſſion géométrique. Quoique donc cela continue à l'infini, nous pourrons néanmoins y appliquer la propoſition d'*Euclide*. Car, en vertu de cette propoſition, *le plus grand commun diviſeur de* A, B, *eſt en même tems le plus grand commun diviſeur de tous les réſidus* R, R′, R″ &c. Or ces réſidus décroiſſant en ſorte qu'enfin ils deviennent plus petits qu'aucune quantité aſſignable, il s'enſuit que *le plus grand commun diviſeur de* A, B, *eſt plus petit qu'aucune quantité aſſignable;* ce qui veut dire qu'il n'y en a point, & que par conſéquent A, B, étant des quantités incommenſurables, *la*

$$\text{tang } v = \frac{A}{B}$$

ſera une quantité irrationelle toutes les fois que l'arc v *ſera une partie aliquote du rayon.*

§. 16. Voilà donc à quoi ſe borne l'uſage qu'on peut faire de la propoſition d'*Euclide*. Il s'agit maintenant de l'étendre à tous les cas où l'arc v eſt commenſurable au rayon. Pour cet effet, & pour démontrer encore quelques autres théoremes, je vais reprendre la fraction continue

$$\text{tang } v = \cfrac{1}{1:v - \cfrac{1}{3:v - \cfrac{1}{5:v - \cfrac{1}{7:v - 1 \;\&c.}}}}$$

& en faiſant $1 : v = w$, je la transformerai en

$$\text{tang } v = \cfrac{1}{w - \cfrac{1}{3w - \cfrac{1}{5w - \cfrac{1}{7w - 1 \;\&c.}}}}$$

§. 17. *Or, en retenant des quotiens* w, 3w, 5w &c. *autant qu'on voudra on n'aura qu'à en faire la réduction, pour avoir des fractions qui exprimeront la tangente de* v *d'autant plus exactement qu'on aura retenu un plus grand nombre des quotiens.* C'est ainsi p. ex. qu'en retenant 1, 2, 3, 4 &c. quotiens, on trouve les fractions

$$\frac{1}{w},\ \frac{3w}{3w^2-1},\ \frac{15w^2-1}{15w^3-6w},\ \frac{105w^3-10w}{105w^4-45w^2+1},$$

§. 18. Mais, *pour faire toutes ces reductions en ordre, & pour démontrer en même tems la loi de progression que ces fractions observent*, nous poserons d'abord

$$\text{tang}\, v = \frac{1}{w-a} = \frac{1}{w-\cfrac{1}{3w-a'}} = \frac{1}{w-\cfrac{1}{3w-\cfrac{1}{5w-a''}}} = \&c.$$

en exprimant par $a, a', a'', a''' \ldots a^n, a^{n+1}, a^{n+2} \ldots$ &c. les quantités qui résultent des quotiens qu'on voudra omettre, de sorte que pour les omettre on n'aura qu'à faire $a, a', a'', \ldots a^n$ &c. $= 0$.

§. 19. Maintenant je dis, *qu'en faisant* $a^{n+1} = 0$, *la fraction qui résulte de la reduction des quotiens qu'on retient, aura la forme*

$$\text{tang}\ v = \frac{A - ma^n}{B - pa^n},$$

dans laquelle m, n, A, B *ne sont point affectées de* a^n. Supposons d'abord cette forme comme véritable, & on démontrera sans peine qu'en retenant encore un quotient deplus, la fraction qui résulte de la reduction, aura la même forme. Car comme il est

$$a^n = \frac{1}{(2n+1)\,w - a^{n+1}},$$

on n'aura qu'à substituer cette valeur dans la forme proposée, & elle se changera en

$$\text{tang } v = \frac{A\,(2n+1)\,w - m - A\,.\,a^{n+1}}{B\,(2n+1)\,w - m - B\,.\,a^{n+1}},$$

Comme cette forme eſt la même, il ſuffira de faire voir qu'elle eſt véritable pour le membre a', puiſqu'alors elle ſera véritable pour tous les membres ſuivans a'', a''', a^{IV} - - - &c. Or pour le membre a' il eſt

$$\text{tang } v = \cfrac{1}{w - \cfrac{1}{3w - a'}}$$

ce qui en faiſant la reduction donne

$$\text{tang } v = \frac{3w - a'}{3w^2 - 1 - wa'},$$

la forme telle que nous l'avons ſuppoſée.

§. 20. Ayant donc trouvé

$$\text{tang } v = \frac{A - ma^n}{B - pa^n}$$

$$\text{tang } v = \frac{A\,(2n+1)\,w - m - A\,.\,a^{n+1}}{B\,(2n+1)\,w - m - B\,.\,a^{n+1}},$$

ſubſtituons encore pour a^{n+1} ſa valeur

$$a^{n+1} = \frac{1}{(2n+3)\,w - a^{n+2}},$$

& nous aurons

$$\text{tang } v = \frac{[A(2n+1)w-m].(2n+3w) - A - [A(2n+1)w-m].a^{n+2}}{[B(2n+1)w-p].(2n+3w) - B - [B(2n+1)w-p].a^{n+2}}.$$

§. 21. Donc, en faiſant dans chacune de ces trois valeurs de tang v, égales à zéros, les membres a^n, a^{n+1}, a^{n+2}, nous aurons la forme générale des fractions, qu'il s'agit de trouver.

$$\frac{A}{B},$$

$$\frac{A\,(2n+1)\,w - m}{B\,(2n+1)\,w - p},$$

$$\frac{[A\,(2n+1)\,w - m]\,.\,(2n+3)\,w - A}{[B\,(2n+1)\,w - p]\,.\,(2n+3)\,w - B}.$$

Ces trois fractions étant pour l'omiſſion de a^n, a^{n+1}, a^{n+2}, elles ſe ſuivent immédiatement, & on voit ſans peine *que la troiſieme ſe trouve moyennant les deux précédentes, en ſorte que ſon numérateur & ſon dénominateur peut être calculé ſéparément.* Car le numérateur de la ſeconde fraction doit être multiplié par le quotient qui répond à a^{n+1}, & du produit on ſouſtrait le numérateur de la premiere fraction. Le reſte ſera le numérateur de la troiſieme fraction. Son dénominateur ſe trouve de la même maniere par les dénominateurs des deux fractions précédentes.

§. 22. *Pour avoir maintenant les fractions elles-mêmes*, on n'aura qu'à écrire en trois colonnes les quotiens, avec les numérateurs & les dénominateurs des deux premieres fractions (§. 17.) & les numérateurs & les dénominateurs ſuivans ſe trouveront par l'opération facile que nous venons d'indiquer. En voici le type

Quotiens	numérateurs	dénominateurs
	1	w
$5w$	$3w$	$3w^2 - 1$
$7w$	$15w^2 - 1$	$15w^3 - 6w$
$9w$	$105w^3 - 10w$	$105w^4 - 45w^2 + 1$
$11w$	$945w^4 - 105w^2 + 1$	$945w^5 - 420w^3 + 15w$
&c.	$10395w^5 - 1260w^3 + 21w$	$10395w^6 - 4725w^4 + 210w^2 - 1$
	&c.	&c.

Ce qui donne les fractions

$$\frac{1}{w},\ \frac{3w}{3w^2-1},\ \frac{15w^2-1}{15w^3-6w},\ \frac{105w^3-10w}{105w^4-45w^2+1}\ \text{\&c.}$$

dont chacune exprime plus exactement la tangente de v, que celles qui la précédent.

§. 23. Or, quoique moiennant la regle que nous venons de donner (§. 21.), chacune de ces fractions peut être trouvée par les deux qui la précédent immédiatement, *il conviendra, pour éviter encore ici une espece d'induction, d'en donner & d'en démontrer l'expression générale.* Commençons d'abord par remarquer, que les coëfficiens de chaque colonne verticale suivent une loi fort simple en ce que leurs facteurs sont en partie des nombres figurés & en partie des nombres impairs. Les voici résolus

Fraction	Quotient	Dénominateur
1re		w
2de	$5w$	$3.w^2 - 1.1$
3me	$7w$	$3.5.w^3 - 2.3w$
4me	$9w$	$3.5.7w^4 - 3.3.5w^2 + 1.1$
5me	$11w$	$3\cdots9w^5 - 4.3.5.7w^3 + 3.5w$
6me	$13w$	$3\cdots11w^6 - 5.3\cdots9w^4 + 6.5.7w^2 - 1.1$
7me	$15w$	$3\cdots13w^7 - 6.3\cdots11w^5 + 10.5.7.9w^3 - 4.7w$
&c.	&c.	&c.

Fraction	Quotient	Numérateur
1re		1
2de	$5w$	$3w$
3me	$7w$	$3.5w^2 - 1.1$
4me	$9w$	$3.5.7w^3 - 2.5w$
5me	$11w$	$3\cdots9w^4 - 3.5.7w^2 + 1.1$
6me	$13w$	$3\cdots11w^5 - 4.5.7.9w^3 + 3.7w$
7me	$15w$	$3\cdots13w^7 - 5.5\cdots11w^4 + 6.7.9w^2 - 1.1$
&c.	&c.	&c.

§. 24.

§. 24. *Cette observation nous facilite le moien de trouver pour une des fractions quelconque l'expression générale.* Soit proposée la n^{tieme} de ces fractions, & nous aurons son

Dénominateur

$$= w^n[1.3.5.7\cdots\cdots(2n-1)] - \frac{w^{n-2}}{2}.[(2n-2).1.3.5.7\cdots\cdots(2n-3)]$$

$$+ \frac{w^{n-4}}{2.3.4}.[(2n-4).(2n-6).1.3.5\cdots\cdots(2n-5)]$$

$$- \frac{w^{n-6}}{2.3.4.5.6}.[(2n-6).(2n-8).(2n-10).1.3.5\cdots(2n-7)]$$

$$+ \frac{w^{n-8}}{2.3.4.5.6.7.8}.[(2n-8).(2n-10)(2n-12)(2n-14).1.3.5.7\cdots\cdots(2n-9)]$$

$-$ &c.

Numérateur

$$= w^{n-1}.[1.3.5.7\cdots\cdots(2n-1)] - \frac{w^{n-3}}{2.3}.[(2n-4).1.3.5.7\cdots\cdots(2n-3)]$$

$$+ \frac{w^{n-5}}{2.3.4.5}.[(2n-6)(2n-8).1.3.5.7\cdots\cdots(2n-5)]$$

$$- \frac{w^{n-7}}{2.3.4.5.6.7}[(2n-8).(2n-10)(2n-12).1.3.5.7\cdots\cdots(2n-7)]$$

$$+ \frac{w^{n-9}}{2.3.4.5.6.7.8.9}.[(2n-10).(2n-12).(2n-14).(2n-16).1.3.5.7\cdots(2n-9)]$$

$-$ &c.

Il ne s'agit donc plus que d'en démontrer l'universalité.

§. 25. C'est ce qui se fera en sorte qu'en admettant cette forme pour la n^{tieme} fraction, on en déduit celle de la $(n-1)^{tieme}$ & de la $(n-2)^{tieme}$, en substituant $(n-1)$, $(n-2)$ au lieu de n. Ensuite on procede conformément à la regle du §. 21. en déduisant tant le dénominominateur que le numérateur de la n^{tieme} fraction, de ceux des deux fractions précédentes tels qu'on vient de les trouver par la premiere opération. Et par là on doit reproduire la forme de la n^{tieme} fraction, telle que nous venons de la donner. On voit bien que ce procédé aboutit à établir, que si deux fractions qui se suivent immédiatement ont cette forme, celle qui les suit, l'aura également, & que par conséquent, les fractions de la table précédente, qui sont les premieres, ayant cette forme, il s'ensuivra, que toutes les suivantes l'auront également.

§. 26. Si donc, pour abréger cette démonstration, nous voulons nous en tenir au terme général, il faudra néanmoins calculer séparément celui du numérateur & celui du dénominateur, ne fut-ce que pour simplifier le calcul. Car du reste l'un & l'autre se calculera suivant la même regle (§. 21.). Commençons par le *dénominateur*, & en prenant le m^{tieme} terme de son expression générale pour la n^{tieme} fraction, il faudra également prendre le m^{tieme} terme pour la $(n-1)^{tieme}$ fraction, mais on ne prendra que le $(m-1)^{tieme}$ terme pour la $(n-2)^{tieme}$ fraction. On voit qu'il faut en agir de la sorte par rapport aux dimensions ou aux exposans de la lettre w.

§. 27, Or le m^{tieme} terme de la n^{tieme} fraction pour le dénominateur est

$$M = \frac{w^{n-2m+2}.[(2n-2m+2).(2n-2m).(2n-2m-2) \text{-----} (2n-4m+6)].[1.3.5 \text{---} (2n-2m+1)]}{1.2.3.4.5 \text{-------} (2m-2)}$$

d'où, en substituant $(n-1)$ au lieu de n, on trouve le m^{tieme} terme de la $(n-1)^{tieme}$ fraction

$$M' = \frac{w^{n-2m+1}.[(2n-2m).(2n-2m-2) \text{------} (2n-4m+4)].[1.3.5 \text{-----} (2n-2m-1)]}{1.2.3.4.5 \text{-------} (2m-2)}$$

Et en substituant $(n-2)$ au lieu de n, & $(m-1)$ au lieu de m, on trouve le $(m-1)^{tieme}$ terme de la $(n-2)^{tieme}$ fraction.

M''

$$M'' = \frac{w^{n-2m+2}.[(2n-2m).(2n-2m-2)\text{------}(2n-4m+6)].[1.3.5\text{-----}(2n-2m-1)]}{1.2.3.4.5\text{-------}(2m-4)}$$

Or par la regle du §. 21. il doit être

$$M = (2n - 1)\,w\,.\,M' - M''$$

ce qui fait que nous pourrons débarrasser ces trois expressions de tous les facteurs, qui leur sont communs, en les posant $= P$. Par là nous aurons

$$+ M = \frac{P.\ w.\ (2n - 2m + 2)\,.\,(2n - 2m + 1)}{(2m - 2)\,.\,(2m - 3)}$$

$$+ M' = \frac{P\,.\,(2n - 4m + 4)}{(2m - 2)\,.\,(2m - 3)}$$

$$- M'' = P\,.\,w.$$

Ou en faisant

$$\frac{P}{(2m - 2)\,.\,(2m - 3)} = Q,$$

il sera

$$+ M = Qw\,.\,(2n - 2m + 2)\,.\,(2n - 2m + 1)$$

$$+ M' = Q\,.\,(2n - 4m + 2)$$

$$- M'' = Qw\,.\,(2m - 2)\,.\,(2m - 3).$$

De là, en multipliant actuellement, on aura

$$(2n-1)\,w\,M' = Qw\,.\,(4n^2 - 8mn + 6n + 4m - 4)$$

$$- M'' = Qw\,.\,(4m^2 - 10m + 6):$$

donc

$$(2n-1)\,w\,M' - M'' = Qw\,(4n^2 - 8nm + 6n + 4m^2 - 6m + 2).$$

Mais il est aussi

$$M = Qw\,.\,(2n-2m+2)(2n-2m+1) = Qw(4n^2 - 8nm + 6n + 4m^2 - 6m + 2).$$

Donc ces deux valeurs étant les mêmes, on voit qu'il est

$$M = (2n - 1)\,w\,.\,M' - M'',$$

 &

& que par conſéquent la forme, que nous avons donnée au terme général eſt telle qu'elle doit être.

§. 28. Paſſons maintenant au *numérateur*. Le m^{tieme} terme du numérateur de la n^{tieme} fraction doit être

$$+N = \frac{w^{n-2m+1}.[(2n-2m).(2n-2m-2)\ldots\ldots(2n-4m+4)].[1.3.5\ldots\ldots(2n-2m+1)]}{1.2.3.4.5\ \ldots\ldots\ldots\ (2m-1)}$$

d'où, en ſubſtituant $(n-1)$ au lieu de n, on aura le même m^{tieme} terme pour la $(n-1)^{tieme}$ fraction,

$$+N' = \frac{w^{n-2m}.[(2n-2m-2).(2n-2m-4)\ldots\ldots(2n-4m+2)].[1.3.5\ldots\ldots(2n-2m-1)]}{1.2.3.4.5\ \ldots\ldots\ldots\ (2m-1)}$$

Et en ſubſtituant $(n-2)$, $(m-1)$, au lieu de n, m, on aura le $(m-1)^{tieme}$ terme de la $(n-2)^{tieme}$ fraction,

$$-N'' = \frac{w^{n-2m+1}.[(2n-2m-2).(2n-2m-4)\ldots\ldots(2n-4m+4)].[1.3.5\ldots\ldots(2n-2m-1)]}{1.2.3.4.5\ \ldots\ldots\ldots\ (2m-3)}$$

Donc, en poſant les facteurs communs à ces trois expreſſions $= P$, nous aurons

$$+N = \frac{Pw.(2n-2m).(2n-2m+1)}{(2m-1).(2m-2)}$$

$$+N' = \frac{P.(2n-4m+2)}{(2m-1).(2m-2)}$$

$$-N'' = Pw,$$

ou en faiſant $P = Q.(2m-1).(2m-2)$, il ſera

$$+N = Qw.(2n-2m).(2n-2m+1)$$

$$+N' = Q.(2n-4m+2)$$

$$-N'' = Qw.(2m-1).(2m-2)$$

Mais il doit être

$$N = (2n-1)w.N' - N'',$$

donc

donc, en ſubſtituant les valeurs trouvées, on aura

$$(2n-1)w\ N' = Qw\,.\,(4nn - 8nm + 2n + 4m - 2)$$
$$-N'' = Qw\,(4m^2 - 6m + 2),$$

donc

$$(2n-1)w\,N' - N'' = Qw\,(4n^2 - 8nm + 2n + 4m^2 - 2m).$$

Or la même valeur réſulte de

$$N = (2n - m)\,.\,(2n - 2m + 1)\,.\,Qw.$$

Il s'enſuit donc de là, que la forme du terme général eſt telle qu'elle doit être.

§. 29. Reprenons donc les expreſſions générales que nous avons données au §. 24. & diviſons celle du dénominateur par ſon premier terme, & nous aurons la ſuite

$$1 - \frac{w^{\cdot 2}}{2}\cdot\frac{2n-2}{2n-1} + \frac{w^{\cdot 4}}{2.3.4}\cdot\frac{(2n-4).(2n-6)}{(2n-1).(2n-3)} - \frac{w^{\cdot 6}}{2.3.4.5.6}\cdot\frac{(2n-6).(2n-8)(2n-10)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}$$
$$+ \frac{w^{\cdot 8}}{2.3.4.5.6.7.8}\cdot\frac{(2n-8).(2n-10).(2n-12).(2n-14)}{(2n-1).(2n-3).(2n-5)(2n-7)} - \&c.$$

ce qui, en ſubſtituant $v = w^{\cdot 1}$, & en poſant $n = \infty$, donne

$$1 - \frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{2.3.4} - \frac{v^6}{2.3.4.5.6} + \&c.$$

qui eſt le coſinus de v, & par conſéquent le dénominateur dont nous nous ſommes ſervis (§. 5.) pour trouver les quotiens w, $3\ddot{w}$ &c.

§. 30. Diviſons encore l'expreſſion générale du numérateur (§. 24.) par le même premier terme du dénominateur, & nous aurons la ſuite

$$w^{\cdot 1} - \frac{w^{\cdot 3}}{2.3}\cdot\frac{2n-4}{2n-1} + \frac{w^{\cdot 5}}{2.3.4.5}\cdot\frac{(2n-6).(2n-8)}{(2n-1).(2n-3)}$$
$$- \frac{w^{\cdot 7}}{2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{(2n-8).(2n-10).(2n-12)}{(2n-1).(2n-3).(2n-5)}$$
$$+ \&c.$$

 Ce

Ce qui encore donne pour $n = \infty$, la suite

$$v - \frac{1}{2.\,3}\, v^3 + \frac{1}{2.\,3.\,4.\,5}\, v^5 - \&c.$$

qui est $=$ sin v, & partant le numérateur, dont nous nous sommes servis §. 5.

§. 31. On voit encore par là, *que, quelque grand que puisse être le premier terme des deux formules générales* (§. 24.) *le second terme, & encore plus les suivans, seront non seulement plus petits, mais même plus petits que la* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2.\,3}$, $\frac{1}{2.\,3.\,4}$ *&c. partie du premier terme.* Mais, en substituant pour n successivement 1, 2, 3, 4 &c. à l'infini, *le premier terme*, comme étant le produit d'autant des nombres impairs 1. 3. 5. 7 &c. *croîtra plus fortement qu'aucune progression géométrique croissante;* on voit encore *que, quoique le* 2, 4, 6 *&c. terme soit soustractif, cela n'empêche pas que la somme des termes ne croisse plus fortement qu'aucune progression géométrique croissante.* Et c'est ce que j'observe ici, parce que j'en ferai usage dans la suite de ce Mémoire. En voici d'abord un, qui se présente.

§. 32. Il s'agit *de déterminer la loi, suivant laquelle les fractions*

$$\frac{1}{w},\ \frac{3w}{3w^2 - 1},\ \frac{15w^2 - 1}{15w^3 - 6w},\ \&c.$$

approchent de la valeur de la tangente? Pour cet effet, nous n'aurons qu'à soustraire chacune de celle qui la suit, & les résidus seront

$$\frac{1}{w.\,(3w^2 - 1)},\ \frac{1}{(3w^2 - 1).\,(15w^3 - 6w)},\ \&c.$$

Ces résidus font voir de combien chacune des fractions est plus grande que celle qui la précede. Mais faisons voir généralement *que tous les numérateurs sont* $= 1$, *& que tous les dénominateurs sont le produit de ceux des deux fractions dont ces résidus marquent la différence.*

§. 33.

§. 33. Pour cet effet, nous reprendrons les trois formules générales que nous avons données au §. 21. & qui sont

$$\frac{A}{B},$$

$$\frac{A\,(2n+1)\,w - m}{B\,(2n+1)\,w - p},$$

$$\frac{[A\,(2n+1)\,w - m]\,(2n+3)\,w - A}{[B\,(2n+1)\,w - p]\,(2n+3)\,w - B}.$$

Or, soustraiant la premiere de la seconde, le résidu sera

$$= \frac{Ap - Bm}{B.\,[B\,(2n+1)\,w - p]}.$$

Mais le numérateur de ce résidu est le même qui résulte de la soustraction

$$\frac{A}{B} - \frac{m}{p} = \frac{Ap - Bm}{B\,.\,p}.$$

Or $\frac{m}{p}$ étant la fraction qui précéde la fraction $\frac{A}{B}$, on voit que le numérateur de tous ces résidus est le même, & que le dénominateur est le produit de ceux des fractions, dont ces résidus marquent la différence. Donc, à commencer d'une des fractions $\frac{m}{p}$ quelconque, les résidus seront

$$\frac{1}{p\,.\,B},\quad \frac{1}{B\,[B\,(2n+1)\,w - p]}\ \&c.$$

§. 34. Observons maintenant, *que tous ces résidus étant ajoutés à la premiere fraction, qu'on met pour base, la somme exprimera toujours la tangente de v, de sorte qu'en général il sera*

tang

$$\text{tang}\, v = \frac{m}{p} + \frac{1}{p.\,B} + \frac{1}{B.[B(2n+1)w - p]} + \&c.$$

& par conſéquent

$$\text{tang}\, v = \frac{1}{w} + \frac{1}{w(3w^2-1)} + \frac{1}{(3w^2-1).(15w^3-6w)} + \&c.$$

$$\text{tang}\, v = \frac{3w}{3w^2-1} + \frac{1}{(3w^2-1)\ (15w^3-6w)} + \&c.$$

$$\text{tang}\, v = \frac{15w^2-1}{15w^3-6w} + \frac{1}{(15w^2-6w).(105w^4-45w^2+1)} + \&c.$$

&c.

On voit donc par ce que nous avons dit (§. 31.) *que toutes ces ſuites ſont plus convergentes, que ne l'eſt aucune progreſſion géométrique décroiſſante.* Soit p. ex. $v = w = 1$, & la tangente de cet arc ſera $= 1,5574077\dots$

$$= 1 + \frac{1}{1.\,2} + \frac{1}{2.\,7} + \frac{1}{7.\,33} + \frac{1}{33.\,191} + \frac{1}{191.\,1304} + \frac{1}{1304.\,10241} + \&c.$$

Et pour tout arc $v < 1$, on aura une ſuite encore plus convergente.

§. 35. Faiſons maintenant $w = \omega : \Phi$, $v = \Phi : \omega$, de ſorte que Φ, ω ſoient des nombres entiers quelconques, premiers entre eux. *Nous n'aurons qu'à ſubſtituer ces valeurs, & il ſera*

$$\text{tang}\left(\frac{\Phi}{\omega}\right) = \cfrac{\Phi}{\omega - \cfrac{\Phi\Phi}{3\omega - \cfrac{\Phi\Phi}{5\omega - \cfrac{\Phi\Phi}{7\omega - \cfrac{\Phi\Phi}{9\omega - \&c.}}}}}$$

§. 36.

§. 36. Enſuite *les fractions approchantes de la valeur de tang.* $\frac{\Phi}{\omega}$ *ſeront*

$$\frac{\Phi}{\omega},\ \frac{3\omega\Phi}{3\omega^2-\Phi^2},\ \frac{15\omega^2\Phi-\Phi^3}{15\omega^3-6\Phi^2\omega},\ \frac{105\omega^3\Phi-10\omega\Phi^3}{105\omega^4-45\omega^2\Phi^2+\Phi^4},\ \text{\&c.}$$

de ſorte que deux de ces fractions quelconques, qui ſe ſuivent immédiatement, étant

$$\frac{m}{p},$$
$$\frac{A}{B},$$

celle qui leur ſuccede ſera

$$\frac{A\,(2n+1)\,\omega-m\Phi^2}{B\,(2n+1)\,\omega-p\Phi^2}.$$

§. 37. Enfin *les différences de ces fractions ſeront*

$$\frac{\Phi^3}{\omega(3\omega^2-\Phi^2)},\ \frac{\Phi^5}{(3\omega^2-\Phi^2)\cdot(15\omega^3-6\omega\Phi^2)},\ \text{\&c.}$$

& la

$$\text{tang}\,\frac{\Phi}{\omega}=\frac{\Phi}{\omega}+\frac{\Phi^3}{\omega(3\omega^2-\Phi^2)}+\frac{\Phi^5}{(3\omega^2-\Phi^2)\cdot(15\omega^3-6\omega\Phi^2)}+\text{\&c.}$$

Or je dis que cette tangente ne ſera jamais commenſurable au rayon, quels que ſoient les nombres entiers ω, Φ.

§. 38. Pour démontrer ce théoreme, poſons

$$\text{tang}\,\frac{\Phi}{\omega}=\frac{M}{P},$$

de ſorte que M, P, ſoient des quantités exprimées d'une façon quelconque, même, ſi l'on veut par des ſuites décimales, ce qui pourra toujours ſe faire, encore que M, P, fuſſent des nombres entiers, car on n'auroit qu'à multiplier l'un & l'autre par quelque quantité irrationelle. On pourra encore, si l'on veut, supposer, $M = \sin \frac{\varphi}{\omega}$, $P = \cos \frac{\varphi}{\omega}$, comme nous l'avons fait ci-dessus (§. 5.). Et il est clair que, quand même la tang $\frac{\varphi}{\omega}$ seroit rationelle, il n'en seroit pas toujours de même du sin $\frac{\varphi}{\omega}$ & du cos $\frac{\varphi}{\omega}$.

§. 39. Or la fraction

$$\frac{M}{P}$$

exprimant exactement la tangente de $\frac{\varphi}{\omega}$, elle doit donner tous les quotiens w, $3w$, $5w$ &c. qui dans le cas présent sont

$$+\frac{\omega}{\varphi}, -\frac{3\omega}{\varphi}, +\frac{5\omega}{\varphi}, -\frac{7\omega}{\varphi}, + \text{\&c.}$$

§. 40. Ensuite, si la tang $\frac{\varphi}{\omega}$ est rationelle il est clair, que M sera à P comme un nombre entier μ à un nombre entier π, de sorte que si μ, π, sont premiers entre eux, il sera

$$M : \mu = P : \pi = D,$$

& D sera le plus grand commun diviseur de M, P. Et comme il est réciproquement

$$M : D = \mu,$$
$$P : D = \pi,$$

on voit que M, P étant supposées être des quantités irrationelles, leur plus grand commun diviseur sera pareillement une quantité irrationelle, d'autant plus petite, plus les quotiens μ, π, seront grands.

§. 41.

§. 41. Voilà donc *les deux ſuppoſitions dont il faudra faire voir l'incompatibilité.* Diviſons d'abord P par M, & le quotient doit être $= \omega : \phi$. Mais comme $\omega : \phi$ eſt un nombre rompu, diviſons ϕ P par M, & le quotient ω ſera ϕtuple de $\omega : \phi$. Il eſt clair qu'on pourra le diviſer par ϕ, quand on voudra. Ici nous n'en aurons pas beſoin, puiſqu'il nous ſuffit qu'il ſoit nombre entier. Aiant donc, en diviſant ϕP par M, obtenu le quotient ω, ſoit le réſidu $= R'$. Ce réſidu ſera pareillement ϕtuple de ce qu'il auroit été, & c'eſt dequoi nous tiendrons compte. Or, comme il eſt $P : D = \pi$, nombre entier, il ſera encore $\phi P : D = \phi\pi$, nombre entier. Enfin encore $R' : D$ ſera un nombre entier. Car, puiſque

$$\phi P = \omega M \mp R',$$

il ſera

$$\frac{\phi P}{D} = \frac{\omega M}{D} + \frac{R'}{D}.$$

Mais

$$\phi P : D = \phi\pi,$$
$$\omega M : D = \omega\mu,$$

donc

$$\phi\pi = \omega\mu + \frac{R'}{D},$$

ce qui donne

$$\frac{R'}{D} = \phi\pi - \omega\mu = \text{nombre entier},$$

que nous poſerons $= r'$, de ſorte que

$$\frac{R'}{D} = r'.$$

Donc le réſidu de la premiere diviſion aura encore le diviſeur D, qui eſt le plus grand commun diviſeur de M, P.

§. 42. Paſſons encore à la ſeconde diviſion. Le réſidu R' étant ϕtuple de ce qu'il ſeroit ſi on avoit diviſé P, au lieu de ϕP, par

 M,

M, il faudra dans cette ſeconde diviſion y avoir égard, en diviſant ΦM, au lieu de M, par R′, afin d'avoir le ſecond quotient, qui eſt $= 3\omega : \Phi$. Mais, pour éviter encore ici le quotient rompu, diviſons Φ^2M par R′, afin d'avoir le quotient 3ω, nombre entier. Soit le réſidu $=$ R″, & il ſera

$$\Phi^2 M = 3\omega R' + R'',$$

donc en diviſant par D,

$$\frac{\Phi^2 M}{D} = \frac{3\omega R'}{D} + \frac{R''}{D}.$$

Mais il eſt

$$\frac{\Phi^2 M}{D} = \Phi^2 m = \text{nombre entier},$$

$$\frac{3\omega R'}{D} = 3\omega r' = \text{nombre entier},$$

donc

$$\Phi^2 m = 3\omega r' + \frac{R''}{D},$$

ce qui donne

$$\frac{R''}{D} = \Phi^2 m - 3\omega r' = \text{nombre entier},$$

que nous poſerons $= r''$, de ſorte qu'il ſoit

$$\frac{R''}{D} = r''.$$

Donc le plus grand commun diviſeur de M, P, R′, l'eſt encore du ſecond réſidu R″.

§. 43. Soient les réſidus ſuivans --- R''', R^{IV} - - - - - - R^n, R^{n+1}, R^{n+2} - - -, qui répondent aux quotiens Φtuples - - 5ω, 7ω - - - $(2n-1)\omega$, $(2n+1)\omega$, $(2n+3)\omega$ - - -, & il s'agit de démontrer

trer généralement, que ſi deux réſidus quelconques R^n, R^{n+1}, qui ſe ſuivent immédiatement, ont encore D pour diviſeur, le réſidu ſuivant R^{n+2} l'aura également, de ſorte que ſi, en faiſant

$$R^n : D = r^n,$$
$$R^{n+1} : D = r^{n+1},$$

r^n, r^{n+1} ſont des nombres entiers, on aura encore

$$R^{n+2} : D = r^{n+1},$$

nombre entier. Voici la démonſtration.

§. 44. En diviſant $\Phi^2 R^n$ par R^{n+1}, le quotient ſera $(2n+1)\omega$ = nombre entier, & le réſidu étant $= R^{n+2}$, il ſera

$$\Phi^2 R^n = (2n+1)\,\omega \,.\, R^{n+1} + R^{n+2},$$

donc en diviſant par D,

$$\frac{\Phi^2 \,.\, R^n}{D} = \frac{(2n+1)\,\omega \,.\, R^{n+1}}{D} + \frac{R^{n+2}}{D}.$$

Mais il eſt

$$\frac{\Phi^2 R^n}{D} = \Phi^2 r^n = \text{nombre entier},$$

$$\frac{(2n+1)\,\omega \,.\, R^{n+1}}{D} = (2n+1)\,\omega\, r^{n+1} = \text{nombre entier},$$

donc

$$\Phi^2 r^n = (2n+1)\,\omega \,.\, r^{n+1} + \frac{R^{n+2}}{D},$$

ce qui donne

$$\frac{R^{n+2}}{D} = \Phi^2 \,.\, r^n - (2n+1)\,\omega \,.\, r^{n+1} = \text{nombre entier} = r^{n+2}.$$

Et c'eſt ce qu'il faloit démontrer.

 §. 45.

§. 45. Or nous avons vu que r', r'' ſont des nombres entiers (§. 41. 42.) donc auſſi r''', r^{IV}, ----- r^n ----- &c. à l'infini ſeront des nombres entiers. Donc indifféremment tous les réſidus R', R'', R''' ---- R^n --- &c. à l'infini auront D pour commun diviſeur. Trouvons encore la valeur de ces réſidus exprimée par M, P.

§. 46. Pour cet effet chaque diviſion nous fournit une équation, en ce qu'il eſt

$$\begin{aligned} R' &= \phi P - \omega M, \\ R'' &= \phi^2 M - 3\omega . R', \\ R''' &= \phi^2 R' - 5\omega . R'', \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

Mais obſervons que, dans le cas dont il s'agit, les quotiens ω, 3ω, 5ω &c. ſont alternativement poſitifs & négatifs, & que les ſignes des réſidus ſe ſuccedent dans l'ordre $-$ $-$ $+$ $+$. Par là ces équations ſe changent en

$$\begin{aligned} R' &= \omega M - \phi P, \\ R'' &= 3\omega R' - \phi^2 M, \\ R''' &= 5\omega R'' - \phi^2 R', \\ R^{IV} &= 7\omega R''' - \phi^2 R'', \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

Et en général

$$R^{n+2} = (2n-1)\omega . R^{n+1} - \phi^2 R^n.$$

D'où l'on voit que chaque réſidu ſe trouve, moiennant les deux précédens, de la même maniere que les numérateurs & les dénominateurs des fractions approchantes de la valeur de tang $\frac{\phi}{\omega}$. (§. 36.)

§. 47. Faiſant donc les ſubſtitutions que ces équations indiquent, afin d'exprimer tous ces réſidus par M, P, nous aurons

R'

$$R' = \omega M - \Phi P,$$
$$R'' = (3\omega^2 - \Phi^2)\ M - 3\omega\Phi . P,$$
$$R''' = (15\omega^3 - 6\omega\Phi^2)\ M - (15\omega^2\Phi - \Phi^3)\ P,$$
&c.

Et ces coëfficiens de M, P, étant les numérateurs & les dénominateurs des fractions trouvées ci-dessus pour la tang $\frac{\Phi}{\omega}$, (§. 36.) on voit encore qu'il sera

$$\frac{M}{P} - \frac{\Phi}{\omega} = \frac{R'}{\omega P},$$
$$\frac{M}{P} - \frac{3\omega\Phi}{3\omega^2 - \Phi^2} = \frac{R''}{(3\omega^2 - \Phi^2) . P},$$
$$\frac{M}{P} - \frac{15\omega^2\Phi - \Phi^3}{15\omega^3 - 6\omega\Phi^2} = \frac{R'''}{(15\omega^3 - 6\omega\Phi^2)\ P},$$
&c.

§. 48. Mais il est

$$\frac{M}{P} = \text{tang}\ \Phi.$$

Donc (§. 37. 34.)

$$\frac{M}{P} - \frac{\Phi}{\omega} = \frac{\Phi^3}{\omega(3\omega^2 - \Phi^2)} + \frac{\Phi^5}{(3\omega^2 - \Phi^2).(15\omega^3 - 6\omega\Phi^3)} + \&c.$$
$$\frac{M}{P} - \frac{3\omega\Phi}{3\omega^2 - \Phi^2} = \frac{\Phi^5}{(3\omega^2 - \Phi^2).(15\omega^3 - 6\omega\Phi^2)} + \&c.$$
&c.

Donc

$$\frac{R'}{\omega P} = \frac{\Phi^3}{\omega(3\omega^2 - \Phi^2)} + \frac{\Phi^5}{(3\omega^2 - \Phi^2).(15\omega^3 - 6\omega\Phi^2)} + \&c.$$

R''

$$\frac{R''}{(3\omega^2-\varphi^2)P}=\frac{\varphi^5}{(3\omega^2-\varphi^2)\,.\,(15\omega^3-6\omega\varphi^2)}+\&c.$$

$$\frac{R'''}{(15\omega^3-6\omega\varphi^2)P}=\frac{\varphi^7}{(15\omega^3-6\omega\varphi^2)\,.\,(105\omega^4-45\omega^2\varphi^2+\varphi^4)}+\&c.$$

&c.

Ainſi tous les réſidus ſe trouvent moiennant la ſuite des différences (§. 37.)

$$\text{tang}\,\frac{\varphi}{\omega}=\frac{\varphi}{\omega}+\frac{\varphi^3}{\omega(3\omega^2-\varphi^2)}+\frac{\varphi^5}{(3\omega^2-\varphi^2)(15\omega^3-6\omega\varphi^2)}$$
$$+\frac{\varphi^7}{(15\omega^3-6\omega\varphi^2)(105\omega^4-45\omega^2\varphi^2+\varphi^4)}$$
$$+\ \&c.$$

en omettant 1, 2, 3, 4 &c. des premiers termes, & en multipliant la ſomme des ſuivans par le premier facteur du dénominateur du premier terme qu'on retient, & par P.

§. 49. Or cette ſuite des différences eſt plus convergente que ne l'eſt aucune progreſſion géométrique décroiſſante (§. 34. 35.). Donc les réſidus R', R'', R''' &c. décroiſſent en ſorte qu'enfin ils deviennent plus petits qu'aucune quantité aſſignable. Et comme chacun de ces réſidus, aiant D pour commun diviſeur, eſt un multiple de D, il s'enſuit que ce diviſeur commun D eſt plus petit qu'aucune quantité aſſignable, ce qui fait $D = 0$, & emporte la conſéquence, que $(M:P)$ eſt une quantité incommenſurable à l'unité, ou irrationelle.

§. 50. Donc *toutes les fois qu'un arc de cercle* $= \frac{\varphi}{\omega}$ *ſera commenſurable au rayon* $= 1$, *ou rationelle, la tangente de cet arc ſera une quantité incommenſurable au rayon, ou irrationelle.* Et réciproquement *aucune tangente rationelle n'eſt celle d'un arc rationel.*

§. 51. Or la tangente de 45° étant rationelle, en ce qu'elle eſt égale au rayon, il s'enſuit que l'arc de 45° dégrés, & partant auſſi

auſſi l'arc de 90, 180, 360 dégrés, eſt incommenſurable au rayon. Donc *la circonference du cercle n'eſt point au diametre comme un nombre entier à un nombre entier.* Voilà donc ce théoreme en forme de corollaire d'un autre théoréme infiniment plus univerſel.

§. 52. En effet, c'eſt précisément cette abſolue univerſalité, dont on peut avoir lieu d'être ſurpris. Outre qu'elle nous fait connoitre combien les quantités circulaires ſont tranſcendentes, elle nous fait encore voir, *que les tangentes rationelles & les arcs rationels ne ſont pas diſtribués par toute la circonférence du cercle, de façon comme s'ils étoient jettés au hazard, mais qu'il faut qu'il s'y trouve un certain ordre, & que cet ordre les empêche de ſe rencontrer jamais.* Cet ordre mérite, ſans contredit, d'être connu plus en détail. Voions donc juſqu'où il ſera poſſible d'en déterminer les loix. C'eſt à quoi aboutiront les théoremes ſuivans.

53. D'abord on ſait que, *deux tangentes étant rationelles, la tangente de la ſomme & celle de la différence de leurs arcs ſont également rationelles.* Car il eſt

$$\text{tang } (\omega + \Phi) = \frac{t\omega + t\Phi}{1 - t\omega \,.\, t\Phi},$$

$$\text{tang } (\omega - \Phi) = \frac{t\omega - t\Phi}{1 + t\omega \,.\, t\Phi}.$$

§. 54. De là il ſuit, *qu'une tangente étant rationelle, la tangente d'un multiple quelconque de ſon arc ſera également rationelle.*

§. 55. Mais au contraire, *une tangente étant rationelle, aucune partie aliquote de ſon arc n'aura une tangente rationelle.* Car l'arc propoſé étant multiple de chacune de ſes parties aliquotes, il eſt clair que ſa tangente ſeroit rationelle, ſi celle d'une de ſes parties aliquotes étoit rationelle (§. 54.).

§. 56. *Si la tangente de chacun de deux arcs commenſurables entre eux eſt rationelle, la tangente de la plus grande commune meſure de* *ces deux arcs ſera également rationelle.* Soient ω, ϕ, les deux arcs propoſés. Or, étant commenſurables, il ſera ω à ϕ comme un nombre entier m à un nombre entier n. Soient ces nombres m, n, premiers entre eux, & l'unité ſera leur plus grande commune meſure. Faiſant donc

$$\omega = m\psi,$$
$$\phi = n\psi,$$

& l'arc ψ ſera la plus grande commune meſure des arcs ω, ϕ. Or je dis que la tang ψ ſera rationelle. Soit $m > n$, & en ſouſtrayant n de m autant de fois qu'il ſe pourra, ſoit le dernier reſte $= r$, toutes les tang $(m - n)\psi = t(\omega - \phi)$, tang $(m - 2n\psi) = t(\omega - 2\phi)$, &c. tang $r\psi$, ſeront rationelles (§. 53.). Souſtraïez r de n autant de fois qu'il ſe pourra, ſoit le dernier réſidu $= r'$. Souſtraïez encore r' de r autant de fois qu'il ſe pourra, ſoit le dernier réſidu r'' &c. Et en continuant de la ſorte, vous parviendrés à un réſidu $= 1$, les nombres m, n étant premiers entre eux. (*Euclid.* Pr. I. Livr. VII.) Mais par le §. 53. toutes les tangentes

$$\begin{array}{l}
t\,(m - n)\,\psi,\ t\,(m - 2n)\,\psi\ \ -\ -\ -\ -\ \ t\,r\,\psi,\\
t\,(n - r)\,\psi,\ t\,(n - 2r)\,\psi\ \ -\ -\ -\ -\ \ t\,r'\,\psi,\\
t\,(r - r')\,\psi,\ t\,(n - 2r')\,\psi\ \ -\ -\ -\ -\ \ t\,r''\,\psi,\\
\quad \&c.\\
-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ \ t\,\psi,
\end{array}$$

ſeront rationelles. Donc &c.

§. 57. Toutes ces tangentes pouvant être trouvées par les tang ω, tang ϕ, ſans qu'on en connoiſſe les arcs (§. 53.) il eſt clair que de cette maniere deux tangentes rationelles quelconques étant données, on trouvera ſi leurs arcs ſont commenſurables entre eux? Mais ſi les arcs ne le ſont point, le travail ſeroit ſans fin.

§. 58. *Deux parties aliquotes d'un arc quelconque aiant des tangentes rationelles, je dis que la tangente de la plus grande commune meſure de ces deux parties aliquotes ſera pareillement rationelle.* Ce théoreme

reme ſuit immédiatement du précédent (§. 56.). On n'a qu'à ſe ſouvenir, que deux arcs ω, ϕ, qui ſont des parties aliquotes d'un arc A, ſont commenſurables entre eux.

§. 59. De la même maniere, *ſi autant de parties aliquotes d'un arc A, que l'on voudra, ont des tangentes rationelles, la tangente de l'arc, qui eſt la plus grande commune meſure de ces parties aliquotes, ſera égalment rationelle.* Qu'on prenne deux de ces parties aliquotes ω, ϕ, & ſoit leur plus grande commune meſure $= \psi$, & la tang ψ ſera rationelle (§. 56. 58.). Mais ψ étant partie aliquote des arcs ω, ϕ, qui ſont parties aliquotes de l'arc A, il eſt clair que ψ ſera partie aliquote de l'arc A, & qu'au lieu des arcs ω, ϕ, on peut ſubſtituer ψ, en comparant ψ avec une des autres parties aliquotes de l'arc A propoſées. On continuera de trouver leur plus grande commune meſure, dont la tangente ſera également rationelle. &c.

§. 60. Nommons *tangente premiere* toute tangente rationelle, qui ſoit celle d'un arc, dont aucune partie aliquote n'ait une tangente rationelle.

§. 61. Telle eſt p. ex. la tangente de 45°. Car, ſoit n un nombre entier quelconque, toute tang $(45 : n)^\circ$ ſera une des racines de l'équation

$$o = 1 - nx - n.\frac{n-1}{2}x^2 + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}x^3 + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.x^4$$
$$- n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.\frac{n-4}{5}x^5 - \&c.$$

dont les coëfficiens ſont les mêmes que ceux de la formule binomiale de *Newton*, & dont les ſignes changent ſuivant l'ordre $- - + +$. Mais, pour tout n nombre entier, tous ces coëfficiens ſont des nombres entiers, & toute

$$\text{tang}\left(\frac{45^\circ}{n}\right) < 1.$$

Donc

Donc, si une ou plus d'une des tang $(45^\circ : n)$ étoit rationelle, elle seroit une *fraction* rationelle < 1, & si cela étoit, tous les coëfficiens ne sauroient être des nombres entiers. Mais ils le sont. Donc &c.

§. 62. *Une tangente premiere quelconque étant proposée, il n'y a que les multiples de son arc qui ayent des tangentes rationelles, à l'exclusion de tous les autres arcs qui lui sont commensurables.* Soit tang ω premiere, & m, n, étant des nombres entiers premiers entre eux, supposons que la tang $\left(\frac{m}{n}\omega\right)$ puisse être rationelle. Or l'arc $\left(\frac{\omega}{n}\right)$ étant la plus grande commune mesure des arcs ω, & $\left(\frac{m\,\omega}{n}\right)$, la tangente de $\frac{\omega}{n}$ sera rationelle (§. 56.). Mais $\frac{\omega}{n}$ étant une partie aliquote de ω, la tang ω ne seroit point premiere. Ce qui étant contre l'hypothese, on voit qu'aucune tang $\left(\frac{m}{n}\omega\right)$ ne sauroit être rationelle. Donc il ne reste que les multiples de ω, dont les tangentes seront rationelles (§. 54.). Voilà donc la raison, pourquoi ces sortes de tangentes méritent le nom de premieres. Elles ressemblent en quelque façon aux nombres premiers, en ce qu'il n'y a que leurs multiples qui soient des nombres entiers, &c.

§. 63. *Deux tangentes premieres étant proposées, je dis que leurs arcs sont incommensurables entre eux.* Car soient tang ω, tang Φ premieres, & supposons que les arcs ω, Φ puissent être commensurables entre eux. Ils seront donc comme un nombre entier m à un nombre entier n. Donc

$$\Phi = \frac{m\,\omega}{n}.$$

Donc (§. 62.) $\frac{\omega}{n}$, partie aliquote de ω, aura une tangente rationelle

de

de même que $\frac{\phi}{m}$ partie aliquote de ϕ. Donc $t\phi$, $t\omega$, ne feront point premieres. Ce qui étant contre l'hypothese, il est clair que les arcs ω, ϕ, ne sauroient être commensurables entre eux.

§. 64. *Ainsi tous les arcs des tangentes premieres sont incommensurables entre eux.* Car, par le théoreme précédent, ils le sont deux à deux, combinés d'une façon quelconque.

§. 65. *Une tangente rationelle quelconque, qui ne soit pas premiere, étant proposée, je dis que son arc sera un multiple de celui d'une tangente premiere.* Car cette tangente, toute rationelle qu'elle est, n'étant point premiere, ce ne peut être que parce qu'il y a des parties aliquotes de son arc, dont les tangentes soient rationelles. Soient ces parties aliquotes $\frac{\omega}{m}$, $\frac{\omega}{n}$, $\frac{\omega}{p}$, $\frac{\omega}{q}$ &c. dont le nombre est posé comme étant fini. Or, comme nous les prenons toutes, il faut que celle qui est la commune mesure de toutes les autres s'y trouve aussi, tandis que par le §. 59. sa tangente est pareillement rationelle. Qu'elle soit $\frac{\omega}{r}$, je dis que tang $\frac{\omega}{r}$ est premiere. Car, si elle n'étoit pas premiere, les tangentes de quelques unes des parties aliquotes de $\left(\frac{\omega}{r}\right)$ seroient rationelles. Or ces parties aliquotes de $\left(\frac{\omega}{r}\right)$ étant également parties aliquotes de l'arc proposé ω, il est clair qu'elles seroient déjà comprises dans les parties aliquotes $\frac{\omega}{m}$, $\frac{\omega}{n}$, $\frac{\omega}{p}$ - - - - $\frac{\omega}{r}$, & que par conséquent $\frac{\omega}{r}$ seroit pareillement leur plus grande commune mesure. Ainsi $\frac{\omega}{r}$ seroit mesure de ses parties aliquotes. Ce

 qui

qui étant abſurde, on voit que tang $\frac{\omega}{r}$ eſt premiere. Or ω eſt un multiple de $\frac{\omega}{r}$. Donc &c.

§. 67. Voilà donc *toutes les tangentes rationelles rangées en certaines claſſes*. Elles ſont ou premieres elles-mêmes, ou elles deſcendent, pour ainſi dire, en droite ligne d'une tangente premiere, parce qu'il n'y a que les multiples des arcs des tangentes premieres qui aient des tangentes rationelles (§. 62.). Or, s'il n'y avoit qu'une ſeule tangente premiere, toutes les tangentes rationelles en dériveroient, & tous leurs arcs ſeroient commenſurables entre eux. Mais il s'en faut de beaucoup, qu'il n'y ait qu'une ſeule tangente premiere. Car elle devroit être plus petite qu'aucune quantité aſſignable. Donnons lui, pour démontrer cela, une grandeur finie $=$ tang Φ. Et il eſt clair qu'il y aura des tangentes rationelles plus petites que tang Φ. Si ces tangentes ſont premieres, tang Φ ne ſera pas la ſeule qui ſoit premiere. Si elles ne ſont point premieres, elles dérivent d'une ou de pluſieurs tangentes premieres, en ce que leurs arcs ſeront des multiples de ceux de ces tangentes premieres (§. 65.). Ainſi il y a plus d'une, plus de 2, 3, 4 &c. tangentes premieres. Et auſſi longtems qu'on en ſuppoſe le nombre fini, on trouvera de la même maniere qu'il y en a davantage. Voici encore une autre maniere d'en trouver un nombre infini.

§. 67. Soient deux tangentes premieres $t\,\omega$, $t\,\Phi$. D'abord elles ſeront rationelles, & leurs arcs ſeront incommenſurables entre eux (§. 64.). Soient m, n, des nombres quelconques premiers entre eux, & $(m\omega + n\Phi)$ ſera un arc incommenſurable tant à ω qu'à Φ. Mais ſa tangente ſera rationelle (§. 62. 53.). Or l'arc $(m\omega + n\Phi)$ n'étant point multiple, ni de ω ni de Φ, la tang $(m\omega + n\Phi)$ ſera ou premiere elle même, ou elle dérivera d'une tangente premiere, néceſſairement différente de $t\,\omega$, $t\,\Phi$. Or, en variant les nombres m, n, de toutes les façons poſſibles, de ſorte qu'ils ſoient toujours premiers entre eux, on trouvera autant d'arcs $(m\omega + n\Phi)$ incommenſurables

tant

tant entre eux qu'aux arcs ω, ϕ, & qui par conſéquent ne ſont ni multiples les uns des autres, ni de ω, ϕ. Donc leurs tangentes, qui toutes ſont rationelles, dériveront d'autant de tangentes premieres, différentes les unes des autres.

§. 68. Voilà donc ce qui reſtreint infiniment la poſſibilité de trouver un arc rationel, dont la tangente ſoit également rationelle. Car les arcs de toutes les tangentes premieres étant incommenſurables entre eux, il s'enſuit que, quand il ſeroit poſſible de trouver une tangente premiere, dont l'arc fut commenſurable au rayon, ce ſeroit la ſeule, puisque les arcs de toutes les autres tangentes premieres ſeroient néceſſairement incommenſurables au rayon. Mais, par ce que nous avons vu ci-deſſus, encore cette ſeule eſt exclue de la poſſibilité d'avoir ſon arc rationel.

§. 69. La tangente de l'angle de 45° étant premiere (§. 61.) & ſe trouvant dans les tables trigonométriques, je remarquerai encore en forme de corollaire, que c'eſt la ſeule tangente premiere, & en même tems la ſeule tangente rationelle qui s'y trouve. La raiſon en eſt, que tous les arcs dont les tangentes ſont marquées dans ces tables, ſont commenſurables entre eux, ſans qu'il s'y trouve d'autre multiple de 45°, que l'angle de 90°, dont la tangente eſt infinie.

§. 70. J'obſerverai encore, que le coſinus d'un angle ω quelconque étant rationel, le coſinus d'un multiple quelconque eſt pareillement rationel. Cette circonſtance fait, que le même raiſonnement que nous avons expoſé à l'égard des tangentes, pourra, à quelque changement près, être appliqué aux coſinus. On trouvera des *coſinus premiers* comme nous avons trouvé des *tangentes premieres*, & les arcs des coſinus premiers ſeront pareillement incommenſurables entre eux; de ſorte que, quand il ſeroit poſſible de trouver un coſinus premier dont l'arc fut rationel, ce ne ſeroit encore que le ſeul qu'on pût trouver, vu que par là même les arcs de tous les autres coſinus premiers ſeroient irrationels.

§. 71.

§. 71. Il n'en est pas de même des sinus, parce qu'un sin ω quelconque étant rationel, il n'y a en général que les $f\,3\,\omega$, $f\,5\,\omega$, $f\,7\,\omega$ &c. qui soient rationels; mais les sin $2\,\omega$, $f\,4\,\omega$, $f\,6\,\omega$ &c. ne le sont pas toujours, à moins que cos ω ne soit aussi rationel, de sorte que si on veut encore ici trouver des *sinus premiers*, il faudra s'y prendre d'une autre façon, que nous ne l'avons fait à l'égard des tangentes.

§. 72. Mais, sans m'y arrêter, je retournerai à la fraction continue, trouvée ci-dessus

$$\text{tang}\, v = \cfrac{1}{w - \cfrac{1}{3w - \cfrac{1}{5w - \cfrac{1}{7w - \cfrac{1}{9w - 1 \ \&c.}}}}}$$

Nous avons vu que toutes les fractions

$$\frac{1}{w},\ \frac{3w}{3w^2 - 1},\ \frac{15w^2 - 1}{15w^3 - 6w},\ \&c.$$

qu'elle donne, n'approchent de la valeur de la tangente de v, que par défaut en ce qu'elles sont toutes plus petites que cette tangente. Mais, comme il doit être possible de trouver des fractions semblables, qui, quoique approchantes de la valeur de tang v, manquent par excès, je me suis mis à en faire la recherche. Je me bornerai ici à donner encore la fraction continue, qui renferme alternativement & les unes & les autres. La voici

tang

$$\text{tang } v = \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{(w\text{-}1) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(3w\text{-}2) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(5w\text{-}2) + \cfrac{1}{1 + \&c.}}}}}}}$$

Cette fraction continue à l'infini, en sorte que les quotiens sont

$$0,\ (w-1),\ 1,\ (3w-2),\ 1,\ (5w-2),\ 1,\ (7w-2),\ 1,\ (9w-2)$$
$$- \ - \ - \ - \ - \quad 1,\ ((2n+1)\,w-2),\ 1\ \&c.$$

Et les fractions approchantes de la valeur de tang v, sont

$$\frac{1}{w-1},\ \frac{1}{w},\ \frac{3w-1}{3w^2-w-1},\ \frac{3w}{3w^2-1},\ \frac{15w^2-3w-1}{15w^3-3w^2-6w+1},$$
$$\frac{15w^2-1}{15w^3-6w},\ \&c.$$

La premiere, 3me, 5me, 7me &c. sont plus grandes que tang v, & la 2de, 4me, 6me &c, sont plus petites, & les mêmes que celles que nous avons trouvées ci-dessus (§. 22.). Je ne m'arrêterai pas à en donner la démonstration, vu que cette fraction continue peut être trouvée de la même maniere, que nous avons trouvé celle dont nous nous sommes servi jusqu'à présent, & qui est beaucoup plus simple. Je remarquerai donc seulement, que le premier quotient étant ici $= 0$, on n'aura, pour l'abolir, qu'à tourner la fraction en sorte qu'elle exprime la cotangente de v, puisqu'il est

$$\cot v = \frac{1}{\text{tang } v}.$$

Ainsi nous aurons

$$\cot v = \cfrac{1}{(w-1) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(3w-2) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(5w-2) + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{(7w-2) + \cfrac{1}{1 + \&c.}}}}}}}}$$

§. 73. Comparons maintenant *les quantités transcendentes circulaires aux quantités logarithmiques* qui leur ſont analogues. Soit e le nombre, dont le logarithme hyperbolique eſt $= 1$. Et on ſait, que ſi dans les deux ſuites dont nous nous ſommes ſervi ci deſſus (§. 4.)

$$\sin v = v - \frac{1}{2.3} v^3 + \frac{1}{2.3.4.5} v^5 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7} v^7 + \&c.$$

$$\cos v = 1 - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2.3.4} v^4 - \frac{1}{2.3.4.5.6} v^6 + \&c.$$

tous les ſignes ſont pris poſitifs, elles ſe changent en

$$\frac{e^v - e^{-v}}{2} = v + \frac{1}{2.3} v^3 + \frac{1}{2.3.4.5} v^5 + \frac{1}{2.3.4.5.6.7} v^7 + \&c.$$

$$\frac{e^v + e^{-v}}{2} = 1 + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2.3.4} v^4 + \frac{1}{2.3.4.5.6} v^6 + \&c.$$

Or, en traitant ces deux dernieres ſuites de la même maniere que nous avons traité les deux premieres (§. 4. & ſuiv.) l'opération ne différera que dans les ſignes, qui pour le cas préſent ſeront tous poſitifs. Comme on peut s'en convaincre ſans peine, je n'en rapporterai point le détail. Il ſera donc

$$\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} = \cfrac{1}{1:v + \cfrac{1}{3:v + \cfrac{1}{5:v + \cfrac{1}{7:v + \cfrac{1}{9:v + \cfrac{1}{11:v + \cfrac{1}{13:v + \&c.}}}}}}}$$

§. 74. Et comme il est

$$\frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} = \frac{e^{2v} - 1}{e^{2v} + 1},$$

on voit qu'en faisant $2v = x$, on aura

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \cfrac{1}{2:x + \cfrac{1}{6:x + \cfrac{1}{10:x + \cfrac{1}{14:x + \cfrac{1}{18:x + \&c.}}}}}$$

d'où l'on tire

$$\frac{e^x + 1}{2} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2:x + \cfrac{1}{6:x + \cfrac{1}{10:x + \cfrac{1}{14:x + \&c.}}}}}$$

ou bien

$$\frac{e^x - 1}{2} = \cfrac{1}{(2:x)\,1 + \cfrac{1}{6:x + \cfrac{1}{10:x + \cfrac{1}{14:x + \cfrac{1}{18:x + \&c.}}}}}$$

On voit bien que ces expreſſions offrent des conſéquences ſemblables à celles que nous avons déduites ci-deſſus de la formule

$$\operatorname{tang} v = \cfrac{1}{w - \cfrac{1}{3w - \cfrac{1}{5w - \&c.}}}$$

On trouvera encore ici que v & e^v, de même que x & e^x ne feront jamais des quantités rationelles en même tems. Ainſi je ne m'arrêterai pas à en faire une déduction reiterée. Il s'agit plutôt d'interpréter les formules que nous venons d'expoſer. J'obſerve donc, qu'elles doivent avoir, à l'égard de l'hyperbole équilaterale, une ſignification tout à fait analogue à celle qu'avoit la fraction

$$\operatorname{tang} v = \cfrac{1}{w - \cfrac{1}{3w - \&c.}}$$

par rapport au cercle. Car, outre qu'on ſait que les expreſſions

$$e^u + e^{-u},$$
$$e^u - e^{-u},$$

en faiſant $u = v\sqrt{-1}$, donnent les quantités circulaires

$$e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}} = 2 \operatorname{cof} v,$$
$$e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}} = 2 \operatorname{ſin} v . \sqrt{-1}.$$

Mr.

Mr. *de Foncenex* a encore fait voir d'une maniere très ſimple & très directe, comment cette affinité ſe trouve en comparant enſemble le cercle & l'hyperbole équilaterale qui ont un même centre & un même diametre. Voiez *Miſcell. Societ. Taurin.* Tom. I. p. 128. ſuiv.

§. 75. Mais ici il s'agit de voir juſqu'où cette affinité peut être pouſſée indépendamment des quantites imaginaires. Soit donc C le centre, CH l'axe, CA le demi-diametre de l'hyperpole équilaterale AMG & du cercle AND, CF l'aſymptote, AB perpendiculaire à l'axe, & en même tems la tangente commune au cercle & à l'hyperbole. Soient tirées du centre C les deux droites CM, C*m*, infiniment proches l'une de l'autre, & des points d'interſection M, *m*, N, *n*, ſoient abaiſſées ſur l'axe les ordonnées MP, *mp*, NQ, *nq*. Enfin ſoit le rayon AC $=1$. Faiſons l'angle MCA $=\Phi$, & ſoit Planche X.

pour l'hyperbole	pour le cercle
l'abſciſſe CP $=\xi$	CQ $=x$
l'ordonnée PM $=\eta$	QN $=y$,
le ſegment AMCA $=u:2$	ANCA $=v:2$

& il ſera

$\text{tang}\,\Phi=\dfrac{\eta}{\xi}$	$\text{tang}\,\Phi=\dfrac{y}{x}$,
$1+\eta\eta=\xi\xi=\eta\eta.\cot\Phi^2$	$1-yy=xx=yy.\cot\Phi^2$,
$\xi\xi-1=\eta\eta=\xi\xi.\text{tang}\,\Phi^2$	$1-xx=yy=xx\,\text{tang}\,\Phi^2$,
$CM^2=\xi^2+\eta^2=\xi^2(1+\text{tang}\,\Phi^2)$ $=\dfrac{1+t\Phi^2}{1-t\Phi^2}$	$CN^2=x^2+y^2=x^2(1+t\Phi^2)$, $=\dfrac{1+t\Phi^2}{1+t\Phi^2}=1$.

Donc

$+du=d\Phi.\left(\dfrac{1+t\Phi^2}{1-t\Phi^2}\right)=\dfrac{dt\Phi}{1-t\Phi^2}$	$+dv=d\Phi=\dfrac{dt\Phi}{1+t\Phi^2}$,
$+d\xi=\dfrac{t\Phi.dt\Phi}{(1-t\Phi^2)^{3:2}}$	$-dx=\dfrac{t\Phi.dt\Phi}{(1+t\Phi)^{3:2}}$,
$+d\eta=\dfrac{dt\Phi}{(1-t\Phi^2)^{3:2}}$	$+dy=\dfrac{dt\Phi}{(1+t\Phi)^{3:2}}$,

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{(1 - t\Phi^2)}} \quad \cdots \quad x = \frac{1}{\sqrt{(1 + t\Phi^2)}},$$

$$\eta = \frac{t\Phi}{\sqrt{(1 - t\Phi^2)}} \quad \cdots \quad y = \frac{t\Phi}{\sqrt{(1 + t\Phi^2)}},$$

Donc

$$+ d\xi : du = \eta \quad \cdots \quad - dx : dv = y,$$

$$+ d\eta : du = \xi \quad \cdots \quad + dy : dv = x,$$

$$+ d\xi = d\eta \,.\, \text{tang}\, \Phi \quad \cdots \quad - dx : dy = \text{tang}\, \Phi.$$

§. 76. Comme l'angle Φ eſt le même pour l'hyperbole & pour le cercle, il ſuit des deux dernieres équations qu'il eſt

$$\text{tang}\, \Phi = d\xi : d\eta = - dx : dy = \eta : \xi = y : x.$$

Ainſi les angles Mmp, Nnq, ſont égaux. Ce qui donne

$$Mm : Nn = d\xi : - dx = d\eta : dy.$$

Et les triangles caractériſtiques $Mm\mu$, $Nn\nu$, ſont ſemblables. Enfin, comme il eſt $Cnq = Cmp$, & $Nnq = Mmp$, il ſera $Cnq + Nnq = Cmp + Mmp = 90°$. Tirant donc la normale mV, il ſera $Vmq + Mmq = 90°$, donc $Vmq = Cmq$. Ainſi la normale mV prolongée juſqu'à l'axe AC, eſt égale à Cm, tout comme dans le cercle la normale Cn eſt égale à Cn. Voilà donc ſurquoi ſe fonde tout ce qu'il y a de réel dans les comparaiſons qu'on a faites entre le cercle & l'hyperbole.

§. 77. Enſuite, ſi pour l'hyperbole on veut exprimer ξ, η, par u, on trouvera aiſément, qu'en emploiant des ſuites infinies leur forme doit être

$$\xi = 1 + Au^2 + Bu^4 + Cu^6 + \&c.$$

$$\eta = au + bu^3 + cu^5 + du^7 + \&c.$$

Car, en faiſant $u = 0$, on a $\xi = 1$, $\eta = 0$. De plus, en prenant u infiniment petite, ξ croîtra comme u^2, & η croîtra comme u, parceque l'angle en A eſt droit, & le rayon oſculateur de l'hyperbole en

A

A eſt $=$ AC. Enfin, en prenant u négative, toutes les valeurs de ξ ſeront les mêmes que pour les u poſitives, d'où il ſuit, que l'abſciſſe ξ doit être exprimée par des dimenſions paires de u. Et en prenant u négative, les valeurs de η ſeront les mêmes, mais négatives. Donc η doit être exprimée par des dimenſions impaires de u. Il ne reſte donc plus que de déterminer les coëfficiens. C'eſt à quoi nous ſerviront les deux formules trouvées ci-deſſus

$$d\xi : du = \eta,$$
$$d\eta : du = \xi.$$

On aura donc, en différentiant la premiere ſuite

$$d\xi : du = 2Au + 4Bu^3 + 6Cu^5 + \cdots\cdots + \mu . Mu^{\mu-1}$$

qui doit être $= \eta$, donc

$$d\xi : du = au + bu^3 + cu^5 + \cdots\cdots + m . u^{\mu-1}$$

Donc, en comparant les termes

$$2A = a,$$
$$4B = b,$$
$$6C = c,$$
&c.
$$\mu M = m.$$

Mais, en différentiant η, il doit encore être $d\eta : du = \xi$, donc

$$d\eta : du = a + 3bu^2 + 5cu^4 + \cdots\cdots (\mu-1) . mu^{\mu-2}$$
$$= 1 + Au^2 + Bu^4 + \cdots\cdots L . u^{\mu-2}$$

Donc, en comparant les termes

$$a = 1,$$
$$3b = A,$$
$$5c = B,$$
&c.
$$(\mu - 1)\, m = L.$$

Moien-

Moyennant ces équations on aura

$$a = 1,$$

$$A = \tfrac{1}{2}a = \frac{1}{2},$$

$$b = \tfrac{1}{3}A = \frac{1}{2.\ 3},$$

$$B = \tfrac{1}{4}b = \frac{1}{2.\ 3.\ 4},$$

$$c = \tfrac{1}{5}B = \frac{1}{2.3.4.5},$$

$$C = \tfrac{1}{6}c = \frac{1}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6},$$

&c.

$$m = \frac{1}{(\mu - 1)}\quad L = \frac{1}{2.\ 3.\ 4 \cdot\cdot\cdot\cdot (\mu - 1)},$$

$$M = \frac{1}{\mu}.m = \frac{1}{2.\ 3.\ 4 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \mu}.$$

Ainsi il sera

$$\xi = 1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2.\ 3.\ 4}u^4 + \frac{1}{2.3.4.5.6}u^6 + \&c.$$

$$\eta = u + \frac{1}{2.\ 3}u^3 + \frac{1}{2.3.4.5}u^5 + \frac{1}{2.3.4.5.6.7}u^7 + \&c.$$

Voilà donc l'abscisse ξ, & l'ordonnée η, exprimées par la lettre u, qui est le double de l'aire du segment hyperbolique AMCA. Or on sçait que si au lieu de u, on prend v, qui est le double du segment circulaire ANCA, l'abscisse x, & l'ordonnée y, circulaires l'une & l'autre, sont

$$x = 1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2.\ 3.\ 4}v^4 - \frac{1}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}v^6 + \&c.$$

$$y = v - \frac{1}{2.3}v^3 + \frac{1}{2.3.4.5}v^5 - \frac{1}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.7}v^6 + \&c.$$

deux

deux ſuites, qui pour la forme ne different des deux précédentes que par le changement alternatif des ſignes.

§. 78. Et comme il eſt (§. 73.)

$$\frac{e^u + e^{-u}}{2} = 1 + \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2.\,3.\,4} u^4 + \&c.$$

$$\frac{e^u - e^{-u}}{2} = u + \frac{1}{2.\,3} u^3 + \frac{1}{2.\,3.\,4.\,5} u^5 + \&c.$$

on voit qu'il ſera

$$\xi = \frac{e^u + e^{-u}}{2},$$

$$\eta = \frac{e^u - e^{-u}}{2},$$

& que par conſéquent ces quantités expriment l'abſciſſe $\xi = CP$, & l'ordonnée $\eta = PM$ de l'hyperbole.

§. 79. Et comme il eſt $\eta : \xi = \text{tang}\ \Phi$, on voit encore qu'il ſera

$$\text{tang}\ \Phi = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}},$$

donc par le §. 81.

$$\text{tang}\ \Phi = \cfrac{1}{1:u + \cfrac{1}{3:u + \cfrac{1}{5:u + \cfrac{1}{7:u + \cfrac{1}{9:u + \&c.}}}}}$$

Et comme la même tangente eſt auſſi

$$\text{tang}\, v = \text{tang}\, \phi = \cfrac{1}{1:v - \cfrac{1}{3:v - \cfrac{1}{5:v - \cfrac{1}{7:v - \cfrac{1}{9:v - \&c.}}}}}$$

on voit qu'on trouve cette tangente par ces doux fractions continues, qui pour la forme ne différent que dans les fignes : il ne s'agit que d'employer $u = 2\,AMCA$, quand on fe fert de la premiere, au lieu qu'il faut employer $v = 2\,ANCA$, pour avoir la même tangente moyennant la feconde. Voilà donc l'analogie qu'il faloit trouver indépendamment des quantités imaginaires, & fans les y mêler.

§. 80. Maintenant nous pourrons tirer en termes très clairs la conféquence, que *l'aire du fecteur hyperbolique* AMCA, *tout de même que celle du fecteur circulaire* ANCA *répondant*, *fera une quantité irrationelle ou incommenfurable au quarré du rayon* AC, *toutes les fois que l'angle* ϕ, *qui eft celui que l'un & l'autre de ces deux fecteurs forme au centre* C, *aura une tangente rationelle*, & que réciproquement *cette tangente fera irrationelle toutes les fois que l'un de ces deux fecteurs fera une quantité rationelle.*

§. 81. Il y a une conféquence tout à fait femblable à faire à l'égard de la fraction continue (§. 74.)

$$\frac{e^u + 1}{2} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2:u + \cfrac{1}{6:u + \cfrac{1}{10:u + \cfrac{1}{14:u + \cfrac{1}{18:u + \&c.}}}}}}$$

qui fe transforme en

$e^u +$

$$\frac{e^u + 1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{-2:u + \cfrac{1}{-6:u + \cfrac{1}{-10:u + \&c.}}}}$$

& d'où l'on tire pour u négatif

$$\frac{e^{-u} + 1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2:u + \cfrac{1}{6:u + \cfrac{1}{10:u + \cfrac{1}{14:u + \&c.}}}}}$$

Ces fractions nous font connoître *à quel point l'irrationalité du nombre* e $= 2,718281828459045235360 28$ - - - - *est transcendente, en ce qu'aucune de ses dignités ni aucune de ses racines n'est rationelle.* Car u & e^u ne sauroit être en même tems une quantité rationelle. Or u étant le logarithme hyperbolique de e^u, il s'ensuit, que *tout logarithme hyperbolique rationel est celui d'un nombre irrationel*, & que réciproquement *tout nombre rationel a un logarithme hyperbolique irrationel.*

§. 82. Mais voyons encore ce que e^u & e^{-u}, signifient dans la figure. Retournons pour cet effet au §. 78. où nous trouverons les deux formules

$$\xi = \frac{e^u + e^{-u}}{2},$$

$$\eta = \frac{e^u - e^{-u}}{2},$$

donc en prenant la somme & la différence, il sera

$$e^u = \xi + \eta,$$

$$e^{-u} = \xi - \eta.$$

Mais

Mais les asymtotes CF, CS, formant entre elles un angle droit, que l'axe CH coupe en deux parties égales, il sera

$$\xi = CP = PS = PR,$$
$$\eta = PM,$$

donc

$$\xi + \eta = SM,$$
$$\xi - \eta = MR,$$

& partant

$$e^{u} = SM,$$
$$e^{-u} = MR,$$

d'où l'on voit en même tems qu'il est

$$e^{u} \,.\, e^{-u} = SM \,.\, MR = 1.$$

On voit de plus, que tandis qu'il est

$$e^{u} = SM,$$
$$e^{-u} = MR,$$
$$AB = 1,$$

il sera, en prenant les logarithmes,

$$u = \log \frac{SM}{AB} = \log \frac{AB}{MR}.$$

Et comme u, e^{u}, ne sauroient être rationelles en même tems, on voit qu'il en est de même à l'égard de l'aire du secteur AMCA $= \frac{1}{2} u$, & des ordonnées SM, MR.

§. 83. Nous avons encore (§. 75.) la différentielle

$$du = \frac{d \text{ tang } \Phi}{1 - t\,\Phi^2},$$

dont l'intégrale se trouve être

$$2u = \log \frac{1 + t\phi}{1 - t\phi} = \text{log. tang. } (45^\circ + \phi) = \text{l. tang } SCM,$$

ou bien

$$2u = -\log \frac{1 - t\phi}{1 + t\phi} = -\text{ l. tang } (45^\circ - \phi) = -\text{ l. tang } RCM.$$

Retenons la premiere de ces formules

$$2u = \log \left(\frac{1 + t\phi}{1 - t\phi}\right),$$

& elle nous mettra en état de retrouver encore à l'égard des ſecteurs hyperboliques ce que nous avons vu être *tangente premiere* à l'égard des ſecteurs circulaires. Voici comment.

§. 84. Conſidérons d'abord que le ſecteur hyperbolique AMCA croît avec l'angle $\phi = MCA$, de ſorte qu'il devient infini, lorsque $\phi = 45^\circ$. Il eſt donc clair qu'un de ces ſecteurs étant donné, on peut trouver d'autres, qui en ſoient des multiples quelconques, & des parties quelconques, ou qui le ſurpaſſent d'une quantité quelconque. Or à chacun de ces ſecteurs il répond un angle MCP, par lequel il eſt formé, & la tangente de cet angle étant $= \phi$, le ſecteur $= \frac{1}{2}u$, nous venons de voir qu'il eſt

$$2u = \log \frac{1 + t\phi}{1 - t\phi}.$$

§. 85. Soient donc trois ſecteurs $\frac{1}{2}u$, $\frac{1}{2}u'$, $\frac{1}{2}u''$, tels que le troiſieme ſoit la ſomme des deux premiers. Soient de plus les angles répondans ϕ, ϕ', ϕ''. Et il ſera

$$2u = \log \frac{1 + t\phi}{1 - t\phi},$$

$$2u' = \log \frac{1 + t\phi'}{1 - t\phi'},$$

$$2u'' = \log \frac{1 + t\phi''}{1 - t\phi''}.$$

Comme donc il doit être

$$\tfrac{1}{2}u'' = \tfrac{1}{2}u' + \tfrac{1}{2}u,$$

il ſera également

$$\log \frac{1 + t\Phi''}{1 - t\Phi''} = \log \frac{1 + t\Phi'}{1 - t\Phi'} + \log \frac{1 + t\Phi}{1 + t\Phi},$$

ce qui donne

$$\frac{1 + t\Phi''}{1 - t\Phi''} = \frac{1 + t\Phi'}{1 - t\Phi'} \cdot \frac{1 + t\Phi}{1 - t\Phi},$$

d'où il ſuit

$$t\Phi'' = \frac{t\Phi + t\Phi'}{1 + t\Phi \cdot t\Phi'},$$

& réciproquement pour la différence

$$t\Phi' = \frac{t\Phi'' - t\Phi}{1 - t\Phi \cdot t\Phi''}.$$

Ces deux formules ne différent qu'à l'égard des ſignes de celles qu'on trouve pour les ſecteurs, ou les arcs circulaires, & elles nous laiſſent également conclure, que *ſi les tangentes qui répondent à deux ſecteurs hyperboliques, ſont rationelles, les tangentes qui répondent au ſecteur égal à la ſomme & la différence de ces deux ſecteurs ſeront pareillement rationelles.*

§. 86. Cette ſeule propoſition ſuffit pour faire voir que tout ce que nous avons dit ci-deſſus (§. 52 - - - 71.) à l'égard du cercle, s'appliquera également à l'hyperbole. On n'a qu'à ſe ſervir d'une façon abrégée de parler, en nommant *tangente d'un ſecteur hyperbolique* quelconque ACMA, la tangente de l'angle ACM, qui eſt = AT, le rayon AC étant poſé = 1. Enſuite il faut obſerver que tous les ſecteurs dont il s'agit ici, doivent avoir l'axe AC pour leur commun commencement, comme l'ont les ſecteurs MCAM, mCAm. Ainſi p. ex. le ſecteur mCM ne touchant point à l'axe, il faut lui en ſub-

ſubſtituer un autre qui lui ſoit égal, & qui ſoit contigu à l'axe AC, lorsqu'on veut avoir l'angle Φ & la tangente qui lui répond. On voit bien que cette remarque n'étoit point néceſſaire lorsqu'il s'agiſſoit du cercle, parce que chaque diametre du cercle peut être regardé comme axe.

§. 87. C'eſt donc dans ce ſens, que je dirai que *l'hyperbole a une infinité de tangentes premieres*, que *les ſecteurs de toutes ces tangentes premieres ſont incommenſurables entre eux & à l'unité*, que *la tangente d'un ſecteur étant premiere, il n'y a que les tangentes des multiples de ce ſecteur qui ſoient rationelles :* Que *toute tangente rationelle eſt ou premiere elle-même, ou ſon ſecteur eſt un multiple d'un ſecteur dont la tangente eſt premiere.* &c. Comme la démonſtration de ces théoremes ne feroit qu'une repetition de celles que j'ai données pour le cercle, je les omettrai d'autant plus que je ne rapporte ces théoremes, que pour faire voir encore en ce point l'analogie qu'il y a entre le cercle & l'hyperbole équilaterale.

§. 88. Comparons encore enſemble le ſecteur circulaire ANCA, & le ſecteur hyperbolique AMCA. Mr. *de Foncenex*, dans le Mémoire cité ci-deſſus (§. 74.) a fait voir, qu'en employant les quantités imaginaires, ces deux ſecteurs ſe trouvent être dans le rapport de 1 à $\sqrt{-1}$, qui eſt purement imaginaire. Or voions quel ſera le rapport réel? C'eſt ce que nous trouverons en exprimant l'un de ces ſecteurs par l'autre. Pour cet effet nous employerons les deux ſuites

$$v = t\Phi - \tfrac{1}{3}t\Phi^3 + \tfrac{1}{5}t\Phi^5 - \tfrac{1}{7}t\Phi^7 + \&c.$$

$$t\Phi = v - \tfrac{1}{3}u^3 + \tfrac{2}{15}u^5 - \tfrac{17}{315}u^7 + \&c.$$

qu'on trouve facilement moyennant les formules différentielles données ci-deſſus (§. 75.). Subſtituant donc la valeur de la ſeconde de ces ſuites dans la premiere, on aura, toute réduction faite,

$$v = u - \tfrac{2}{3}u^3 + \tfrac{2}{3}u^5 - \tfrac{244}{315}u^7 + \&c.$$

&

& réciproquement

$$u = v + \tfrac{2}{3}v^3 + \tfrac{2}{3}v^5 + \tfrac{2\,4\,4}{3\,4\,5}v^7 + \&c.$$

Ces deux ſuites ne different que par rapport aux ſignes, les coëfficiens & les expoſans étant les mêmes. Si dans la premiere de ces ſuites on poſe

$$u = v\sqrt{-1},$$

on trouve

$$v = \sqrt{-1}\,.\,(v + \tfrac{2}{3}v^3 + \tfrac{2}{3}v^5 + \tfrac{2\,4\,4}{3\,4\,5}v^7 + \&c.)$$

ce qui veut dire

$$v = u\sqrt{-1}.$$

Donc, moyennant un ſecteur hyperbolique imaginaire, on trouve un ſecteur circulaire imaginaire, & réciproquement.

§. 89. Tout ce que je viens de faire voir ſur les quantités tranſcendentes circulaires & logarithmiques, paroit être fondé ſur des principes beaucoup plus univerſels, mais qui ne ſont pas encore aſſez développés. Voici cependant ce qui pourra ſervir à en donner quelque idée. Il ne ſuffit pas d'avoir trouvé que ces quantités tranſcendentes ſont irrationelles, c'eſt à dire incommenſurables à l'unité. Cette propriété ne leur eſt pas unique. Car, outre qu'il y a des quantités irrationelles qu'on pourra former au hazard, & qui par là même ne ſont gueres du reſſort de l'analyſe, il y en a encore une infinité d'autres qu'on nomme *algébriques:* & telles ſont toutes les *quantités irrationelles radicales*, comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$ &c. $\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ &c. & toutes les *racines irrationelles des équations algébriques*, comme p. ex. celles des équations

$$0 = xx - 4x + 1,$$
$$0 = x^3 - 5x + 1,$$
&c.

Je

Je nommerai les unes & les autres *quantités irrationelles radicales*, & voici le théoreme, que je crois pouvoir être démontré.

§. 90. Je dis donc *qu'aucune quantité tranſcendente circulaire & logarithmique ne ſauroit être exprimée par quelque quantité irrationelle radicale, qui ſe rapporte à la même unité, & dans laquelle il n'entre aucune quantité tranſcendente.* Ce théoreme ſemble devoir être démontré de ce que les quantités tranſcendentes dépendent de

$$e^x,$$

où l'expoſant eſt variable, au lieu que les quantités radicales ſuppoſent des expoſans conſtans. Ainſi p. ex. un arc de cercle étant rationel ou commenſurable au rayon, ſa tangente, que nous avons vu être irrationelle, ne ſauroit être une racine quarrée de quelque quantité rationelle. Car ſoit l'arc propoſé $= \omega$, & faiſons tang $\omega = \sqrt{a}$, nous aurons

$$t\,\omega^2 = \frac{\int \omega^2}{\text{coſ}\,\omega^2} = \frac{1 - \text{coſ}\,2\,\omega}{1 + \text{coſ}\,2\,\omega} = a,$$

d'où il ſuit

$$\text{coſ}\;2\,\omega = \frac{1 - a}{1 + a}:$$

or cette quantité étant rationelle, il s'enſuit que l'arc $2\,\omega$ eſt irrationel, ce qui étant contre l'hypotheſe, il eſt clair qu'en faiſant tang $\omega = \sqrt{a}$, la quantité a ne ſauroit être rationelle, & que partant la tangente d'un arc rationel quelconque n'eſt point une racine quarrée de quelque quantité rationelle.

§. 91. Ce théoreme étant une fois démontré dans toute ſon univerſalité, il s'enſuivra que la circonférence du cercle ne pouvant être exprimée par quelque quantité radicale, ni par quelque quantité rationelle, il n'y aura pas moien de la déterminer par quelque conſtruction géométrique. Car tout ce qu'on peut conſtruire géométriquement revient aux quantités rationelles & radicales; & il s'en faut même de beaucoup que ces dernieres puissent indifféremment être construites. On voit bien qu'il en sera de même de tous les arcs de cercles dont la longueur ou les deux points extremes sont donnés, soit par des quantités rationelles, soit par des quantités radicales. Car, si la longueur de l'arc est donnée, il faudra trouver ses deux points extremes, en y employant la corde, le sinus, la tangente, ou quelque autre ligne droite qui, pour pouvoir être construite, sera toujours dépendante ou réduisible à une des lignes que je viens de nommer. Mais la longueur de l'arc étant donnée par des quantités rationelles ou radicales, ces lignes seront transcendentes, & par là même irréductibles à quelque quantité rationelle ou radicale. Il en sera de même si les deux points extremes de l'arc sont donnés, j'entens par des quantités rationelles ou radicales. Car, dans ce cas, la longueur de l'arc sera une quantité transcendente: ce qui veut dire irréductible à quelque quantité rationelle ou radicale, & par là elle n'admet aucune construction géométrique.

MÉ-