MÉMOIRE

SUR

LA RÉSISTANCE DES FLUIDES AVEC LA SOLUTION DU PROBLEME BALISTIQUE.

PAR M. LAMBERT.

§. 1.

La théorie du mouvement des corps dans un milieu résistant est un de ces sujets, dont la physique nous présente un grand nombre. Elle est d'une utilité manifeste, puisque la perfection de l'art de jetter les bombes en dépend. Elle est compliquée dans ses principes, puisque les milieux étant supposés fluides, il faudroit avoir égard au mouvement de chaque particule du fluide, dont on cherche la résistance. Et si, en n'en considérant que la somme, on parvient à découvrir une loi, sinon exacte à toute rigueur, du moins tolérable en ce qu'elle ne s'écarte pas considérablement de l'expérience, on est encore bien éloigné du but auquel on se propose de parvenir. Il s'agit d'y appliquer le calcul, afin d'en tirer des formules simples & facilement applicables: difficulté, qu'il n'est pas si facile de surmonter. Et quand même on pourroit le faire, il s'agit encore de vérifier par des expériences les conséquences & les regles, que le calcul nous fournit. Car les principes employés pour cet effet, n'étant vrais qu'à peu près ou en gros, on court risque que ce qu'on en déduit par le calcul, s'éloigne encore d'avantage de la parfaite précision à laquelle il faudroit pouvoir parvenir.

§. 2. Je ne retracerai pas ici l'histoire de ce qu'on a fait à cet égard. On sait qu'un corps pesant étant projetté obliquement dans un espace vuide d'air avec une vitesse quelconque, parcourt une parabole,

bole, & qu'il affecte pour ainſi dire de parcourir cette courbe dans l'air même, dès qu'il ne ſe meut pas avec une très grande viteſſe, & que ſa gravité ſpécifique ſurpaſſe celle de l'air pluſieurs centaines de fois. En effet, la denſité de l'air étant ſi peu conſidérable, il eſt aiſé d'en conclure, que ſa réſiſtance ne ſauroit être fort grande. Mais, comme cette réſiſtance s'augmente en raiſon du quarré de la viteſſe, ou peut être encore plus fortement, elle devient très grande dans le cas où la viteſſe égale celle des bombes & des boulets de canon. De là vient que les regles qu'on donne pour les jets paraboliques, ne ſont d'aucun uſage pour l'artillerie, & que, ſi elles ont quelque élégance, on ne peut les conſidérer que comme des propriétés remarquables des paraboles. C'eſt dommage en effet qu'on ne puiſſe les y employer, & qu'il faille y ſubſtituer des formules, qui n'offrent que des quantités logarithmiques, circulaires ou tranſcendentes, de façon qu'il faut ſe contenter, quand on peut parvenir à les exprimer par des ſuites infinies, qui ſoient encore paſſablement convergentes. On peut juger des difficultés qui s'y rencontrent, dès qu'on ſait que *Newton*, après avoir donné les principes & les regles pour les cas les plus ſimples, abandonna la ſolution du probleme principal; que feu M. *Jean Bernoulli* ne la donna que ſous la condition de *conceſſis quadraturis;* & que M. *Euler*, au lieu de donner les formules intégrales, ſe contenta d'une approximation, en ſubſtituant des lignes droites aux petites parties de l'arc, que la bombe parcourt, & en ſubſtituant de la ſorte à la véritable courbe une eſpece de poligone, dont on pouvoit déterminer la longueur & la poſition de chaque côté, du moins à très peu près.

§. 3. A ces difficultés qu'offre le calcul, ſe joignent celles qu'on rencontre dans l'examen des principes & dans la maniere de les examiner par des expériences. On eſt aſſez généralement d'accord, que la réſiſtance eſt en raiſon du quarré des viteſſes, mais on ne ſe rencontre pas ſur la queſtion, s'il faut prendre ce quarré double ou ſimple, & ſi pour les grandes viteſſes il ne faut pas encore y joindre le rapport du cube, du biquarré, ou de quelques puiſſances plus éle-

vées

vées de la viteſſe. S'il étoit facile de faire & de varier les expériences de toutes les façons qu'on pourroit ſouhaiter, cette difficulté ſeroit bientôt levée. On n'auroit qu'à exprimer l'effet de la réſiſtance par une ſuite, qui procede ſuivant toutes les dimenſions ou puiſſances de la viteſſe, & en déterminer les coëfficiens, & par ce moyen on auroit cet effet tel qu'il eſt du à toutes les cauſes qui peuvent y influer. De la ſorte il ne reſteroit plus à ſurmonter que les difficultés & les embarras du calcul.

§. 4. Mais ces ſortes d'expériences ne ſont pas ſi faciles à faire. On laiſſa tomber des boules & des veſſies fort legeres du haut d'une tour, & on obſerva le tems de la chûte. Ce tems & la hauteur étant donnés, de même que le volume & le poids de la boule, on en déduiſit le coëfficient, qui diviſe ou multiplie le quarré de la viteſſe. Mais cette viteſſe n'étant pas fort grande, on reſte en doute, ſi pour des viteſſes plus conſidérables ce ſeul coëfficient ſuffit. Les expériences faites à Petersbourg ne décident point cette queſtion. On tira avec différentes charges un boulet d'un canon verticalement élevé, & on compta les ſecondes de tems, que le boulet employoit à monter & deſcendre. Ce tems ne pouvoit donner tout au plus que la viteſſe initiale; & pour la trouver, il falloit ſuppoſer, que la réſiſtance de l'air ſuit le quarré des viteſſes. Si on avoit pu obſerver ſéparément le tems de la montée, celui de la chûte, & la hauteur à laquelle le boulet parvint, il y auroit eu moyen d'examiner, ſi le quarré de la viteſſe ſuffit, ou bien s'il faut employer le cube, le biquarré &c. Peut-être pourroit-on refaire cette expérience, en élevant un mortier verticalement, & en ne le chargeant que d'un boulet dè bois ou d'une autre matiere fort legere, & ſur laquelle la réſiſtance de l'air ait plus de priſe. Mais l'expérience qui fut faite ici le 15 Juin de l'année paſſée a beaucoup plus d'avantages, ſi elle peut être faite avec plus de ſoin, & ſi on arrange d'avance les préparatifs, qu'elle exige. Comme par là on peut déterminer autant de points que l'on veut, de la courbe que la bombe parcourt, il ſera enſuite facile d'en déduire le tems & la viteſſe pour chaque point de la courbe. Il ſeroit même poſſible de faire

re

re en ſorte, qu'un certain nombre de ces expériences étant fait, on en puiſſe immédiatement déduire des tables pour l'uſage des bombardiers. Car chaque courbe déterminée de cette façon tient lieu de toutes celles où la bombe, ſous un moindre angle d'élévation, auroit eu un degré déterminé de viteſſe.

§. 5. Ces remarques préliminaires font voir, à peu près, où nous en ſommes, & qu'il n'eſt pas ſi hors de propos de reprendre depuis les premiers commencemens la théorie dont il eſt ici queſtion. Il s'y joint encore une autre raiſon, qui me détermine à en agir de la ſorte. Car, en employant les mêmes lettres dans tous les calculs que je vais expoſer, on ſe trouvera mieux en état de faire la comparaiſon des différens cas que cette théorie préſente, & de voir juſqu'où ceux qui ſont plus compliqués peuvent ſe réduire aux plus ſimples. Je tâcherai de rendre cette comparaiſon plus facile en ce que je ne me bornerai pas à ne donner que des formules algébriques, mais qu'après les avoir expoſées, je les traduirai dans le langage ordinaire, toutes les fois qu'elles auront quelque élégance ſuſceptible d'une ſemblable traduction, ou que je pourrai les raccourcir & les ſimplifier juſqu'à leur donner cette élégance.

§. 6. Soit donc AB une ligne droite dans laquelle ſe meuve un corps ſphérique. Que la viteſſe initiale en A ſoit $= G$, que le corps dans un tems $= \tau$ ſoit parvenu en P, & que la viteſſe qui lui reſte encore ſoit $= c$. Soit enfin l'eſpace parcouru AP $= x$. La viteſſe en P étant $= c$, le corps pourroit parcourir dans un tems infiniment petit $d\tau$, l'eſpace Pq. Mais, comme il eſt retardé par la réſiſtance du milieu, il ne parcourt en effet que l'eſpace Pp, qui ſera par conſéquent $= dx$. Or l'effet de la retardation, qui eſt $= pq = ddx$, eſt proportionel au quarré de la viteſſe. Car, pour aller du plus ſimple au plus compoſé, je m'en tiendrai à cette condition dans les premiers calculs que je vais propoſer. Nous aurons donc $-ddx \backsim cc$, & pour réduire cette analogie à l'égalité, nous introduirons un coëfficient a tel qu'il ſoit Planche III. Fig. 1.

$$-ddx = cc\,d\tau^2 : a.$$

 §. 7.

§. 7. Je remarquerai d'abord, que cette équation ſe réduit à des nombres abſolus, quand on fixe les unités auxquelles les lettres x, c, τ ſe rapportent. J'exprimerai donc les tems τ en minutes ſecondes, les eſpaces parcourus x en pieds du Rhin, & les viteſſes c par les eſpaces qu'un corps mu uniformément avec ces viteſſes pourroit parcourir en une minute ſeconde de tems. Ce qui étant établi, il s'enſuit que la lettre a exprime une ligne droite, & que par là même elle pourra être comparée avec le diametre du corps dont il s'agit de calculer le mouvement. La ſuite du calcul nous donnera lieu de la rendre intelligible encore de diverſes autres façons.

§. 8. Reprenant donc l'équation

$$- ddx = ccd\tau^2 : a,$$

nous pourrons exprimer l'eſpace ddx encore d'une autre maniere. Car il eſt

$$dx = cd\tau,$$

& partant

$$ddx = dcd\tau,$$

ce qui étant ſubſtitué nous donne

$$- dc.\, d\tau = cc\, d\tau^2 : a,$$

ou bien

$$- \frac{dc}{cc} = \frac{d\tau}{a},$$

d'où on tire l'intégrale

$$\frac{a}{c} - \frac{a}{G} = \tau.$$

La conſtante a: G eſt telle que τ ſoit $=$ o, lorsqu'il eſt $c = G$.

§. 9. Cette formule, qui exprime le rapport entre le tems & la viteſſe, nous fait voir que ce rapport eſt ſimplement réciproque, & que, quand même la viteſſe initiale G ſeroit infinie, il ne faudra

qu'un

qu'un tems fini $a : c = \tau$, pour qu'elle devienne aussi petite que l'on voudra. Le changement des grandes vitesses étant donc si rapide, il s'ensuit, comme nous l'avons remarqué ci-dessus, que la résistance du milieu n'est pas une chose dont on puisse faire abstraction, sans s'assurer préalablement de la quantité de son effet.

§. 10. L'équation trouvée

$$-\frac{dc}{cc} = \frac{d\tau}{a},$$

se change sans peine en

$$-\frac{dc}{c} = \frac{c\,d\tau}{a} = \frac{dx}{a},$$

ce qui donne l'intégrale

$$\log\frac{G}{c} = \frac{x}{a}.$$

Cette formule, qui exprime le rapport entre la vitesse & l'espace parcouru, fait voir que la vitesse décroît en progression géométrique tandis que l'espace parcouru croît en progression arithmétique. On auroit pu commencer le calcul par cette considération. Car le corps parcourant l'espace dx, rencontre le même nombre d'obstacles, quand on suppose cet espace partout égal ou constant, & chaque obstacle lui ôte d'autant plus de sa vitesse, plus cette vitesse est grande. On déduit cette proportion également des formules que l'on donne pour le choc des Corps, quand on considere le fluide ou le milieu résistant comme un assemblage de petits globules, comme l'a fait M. *Jean Bernoulli* dans sa *Dissertation sur le mouvement &c.*

§. 11. Il nous reste encore à trouver le rapport entre le tems & l'espace parcouru. Ce rapport se déduira aisément des deux formules intégrales trouvées

$$\frac{a}{c} - \frac{a}{G} = \tau,$$

$$\log\frac{G}{c} = \frac{x}{a}.$$

Car la premiere donne

$$\frac{G}{c} = \frac{G\tau}{a} + 1,$$

d'ou l'on tire

$$\frac{x}{a} = \log\left(\frac{\tau . G}{a} + 1\right),$$

$$\& \quad \frac{G\tau}{a} = e^{x:a} - 1,$$

en prenant $\log e = 1$.

§. 12. Il ſeroit à ſouhaiter qu'on pût imaginer des expériences, pour examiner les formules que nous venons de trouver. Elles ne renferment d'autre inconnue que la lettre a, qui diviſe le quarré des viteſſes dans les formules différentielles, & qui dans les formules intégrales devient encore ſignificative d'une autre façon. Car dans celle du §. 8.

$$\frac{a}{c} - \frac{a}{G} = \tau,$$

elle déſigne la viteſſe, que le corps, après avoir commencé à être mu avec une viteſſe infinie, a encore de reſte après la premiere ſeconde de tems. Au contraire dans la formule du §. 10.

$$\frac{x}{a} = \log\frac{G}{c},$$

la lettre a dénote la ſoutangente de la logarithmique, dont les ordonnées repréſentent la viteſſe du corps pour chaque point de l'eſpace parcouru. Dans ce cas cette lettre eſt la meſure abſolue de la force de la réſiſtance, puiſqu'elle dénote l'eſpace que le corps pourroit parcourir, ſi ſa viteſſe continuoit de décroître dans chaque petit eſpace dx de la même quantité, dont elle a diminué dans le premier eſpace dx.

§. 13.

§. 13. Mais, comme le mouvement horizontal rectiligne s'altere subitement par la pesanteur, il n'y a pas moyen d'en rester à ces formules; mais, en introduisant dans le calcul l'action de la gravité, il s'agit d'en trouver d'autres pour le cas où le corps monte ou tombe dans une ligne verticale. Ce cas est encore assez simple, puisque le mouvement restant droit, on évite l'embarras qui nait de la déviation, qui se rencontre & se change continuellement dans le mouvement oblique. Je vais donc examiner ce cas en sorte qu'on puisse parvenir à le comparer avec le précédent, & à définir la valeur de la lettre a par une espece de théorie aussi bien que par des expériences.

§. 14. Soit donc la verticale AB. Que le corps commence à tomber en A, & qu'après τ secondes de tems il se trouve en P, de sorte que l'espace parcouru soit $AP = x$. La vitesse en P soit $= c$. Cette vitesse croîtra par l'action de la gravité, & au contraire elle sera diminuée par la résistance du milieu. Il s'agit donc de voir, quel est l'un & l'autre de ces deux effets pendant le tems $d\tau$, dans lequel le corps continue de tomber par le petit espace $Pp = dx$. Je remarquerai en conséquence, que l'effet de la résistance se détermine par la formule du §. 10. Fig. 2.

$$-\frac{dc}{c} = \frac{dx}{a},$$

car il sera $= c\,dx : a$. Au contraire l'effet de la gravité se trouve, quand on cherche la hauteur ξ par laquelle un corps doit tomber dans le vuide pour acquérir la vitesse c. Nommant donc $\frac{1}{2}g$ l'espace de la chûte d'un corps, qui répond à une seconde de tems, la lettre g sera de $31\frac{1}{4}$ pieds du Rhin dans le vuide, mais dans un fluide il faudra la diminuer dans le même rapport que le poids du corps y diminue. Or les loix de la gravité nous fournissent la formule

$$c = \sqrt{(2g\xi)},$$

d'où l'on tire la différentielle

$$dc = g\,d\xi : \sqrt{(2g\xi)},$$

 ou

ou bien

$$dc = \frac{g\,d\xi}{c}.$$

Posant donc

$$d\xi = dx,$$

on aura l'effet ou l'accélération due à la gravité

$$= \frac{g\,dx}{c}.$$

Et, en soustraiant de cet effet celui qui est du à la résistance, on aura l'accroissement de la vitesse

$$dc = \frac{g\,dx}{c} - \frac{c\,dx}{a},$$

ce qui donne

$$\frac{c\,dc}{ga - cc} = \frac{dx}{a},$$

& partant l'intégrale

$$\frac{2x}{a} = \log \frac{ag}{ag - cc},$$

$$c = \sqrt{ag} \cdot \sqrt{(1 - e^{-2x:a})}.$$

D'où l'on voit, que c ne sauroit devenir plus grand que la racine quarrée de ag, & que par conséquent cette racine dénote la vitesse terminale, à laquelle le corps pourroit parvenir, si sa chûte se continuoit à l'infini. Nous nommerons cette vitesse C, & il paroit qu'elle est la moyenne proportionelle entre g & a.

§. 15. En reprenant l'équation

$$\frac{dx}{a} = \frac{c\,dc}{ag - cc},$$

nous

nous la transformerons en

$$\frac{dc}{ag - cc} = \frac{dx}{ac} = \frac{d\tau}{a},$$

ce qui donne l'intégrale

$$\frac{2\sqrt{g}}{\sqrt{a}} \cdot \tau = \log \frac{\sqrt{(ag)} + c}{\sqrt{(ag)} - c},$$

ou bien

$$\frac{2\,C}{a} \cdot \tau = \log \frac{C + c}{C - c},$$

d'où l'on tire réciproquement

$$c = C. \frac{e^{2\tau C : a} - 1}{e^{2\tau C : a} + 1}.$$

§. 16. Egalant enfin cette quantité à celle que nous avons trouvée ci-dessus (§. 14.)

$$c = C. \sqrt{(1 - e^{-x : a})},$$

nous en tirerons

$$e^{\tau C : a} = e^{x : a} + \sqrt{(e^{2x : a} - 1)},$$

& réciproquement

$$2\,e^{x : a} = e^{\tau C : a} + e^{-\tau C : a}.$$

§. 17. Voilà donc toutes les formules dont on pourra avoir besoin pour déterminer le tems, ou l'espace, ou la vitesse d'un corps, qui tombe dans un milieu résistant. Pour trouver des formules applicables aux cas où le corps est jetté verticalement en haut, il suffira de remarquer, que dans ces cas la gravité & la résistance contribuent l'une & l'autre à diminuer la vitesse. En revenant donc à ces deux effets

effets déterminés dans le §. 14. il suffira de les faire l'un & l'autre soustractifs, & nous aurons, en accentuant la lettre c,

$$-dc' = -\frac{g\,dx}{c'} - \frac{c'\,dx}{a}.$$

Mais, avant que de passer à l'intégration de cette équation, nous la comparerons à celle que nous avions trouvée pour la descente (§. 14.) & qui est

$$dc = \frac{g\,dx}{c} - \frac{c\,dx}{a}.$$

Ces deux équations se transforment facilement en les deux suivantes

$$ac\,dc = ag\,dx - cc\,dx$$
$$ac'dc' = ag\,dx + c'c'dx,$$

donc en soustraiant l'une de l'autre, on aura

$$ac'dc' - ac\,dc = (c'c' + cc)\,dx,$$

& partant

$$\frac{dx}{a} = \frac{c'dc' - c\,dc}{c'c' + cc},$$

équation, qui exprime la hauteur x par les deux vitesses c, c', qui lui répondent. Elle ne semble pas être intégrable. Mais nous allons d'abord voir, qu'on peut lui substituer la suivante

$$\frac{dx}{a} = \frac{c'dc'}{c'c'} - \frac{c\,dc}{cc}.$$

§. 18. Reprenons pour cet effet les deux équations

$$dc' = \frac{g\,dx}{c'} + \frac{c'dx}{a},$$

$$dc = \frac{g\,dx}{c} - \frac{c\,dx}{a},$$

&

& nous en tirerons

$$\frac{dx}{a} = \frac{cdc}{ag - cc} = \frac{c'dc'}{ag + c'c'}$$

& partant

$$agcdc + c'c'cdc = agc'dc' - cc\,c'dc'$$

ce qui donne

$$c'c'cdc + cc\,c'dc' = ag(c'dc' - cdc)$$

d'où l'on tire l'intégrale

$$c'c'cc = ag\,c'c' - ag\,cc$$

$$c'c' = \frac{agcc}{ag - cc}$$

$$cc = \frac{agc'c'}{ag + c'c'}.$$

Ces équations font voir, que la vitesse du corps en montant étant donnée, on en trouve immédiatement la vitesse qu'il a en retombant au même point de la hauteur P. Soit AD la vitesse terminale C (§. 14.) AB la vitesse en montant, la perpendiculaire AE du triangle Fig. 5. rectangle DAB sera la vitesse en descendant.

§. 19. L'équation trouvée

$$c'c'\,cc = agc'c' - agcc$$

se change en

$$\frac{1}{ag} = \frac{1}{cc} - \frac{1}{c'c'}$$

d'où l'on tire la différentielle

$$\frac{dc}{ccc} = \frac{dc'}{c'c'c'}$$

ou bien

$$0 = \frac{c^2c'dc'}{c'c'} - \frac{c'c'cdc}{cc}.$$

 Or,

Or, en ajoutant de part & d'autre $c'dc' - cdc$, on obtient

$$c'dc' - cdc = c'dc' + \frac{c^2 c'dc'}{c'c'} - \frac{c'c' cdc}{cc} - cdc$$

ce qui donne

$$\frac{c'dc'}{c'c'} - \frac{cdc}{cc} = \frac{c'dc' - cdc}{c'c' - cc} = \frac{dx}{a} \quad (\S.\ 17.)$$

d'où l'on tire

$$\frac{dx}{a} = \frac{dc'}{c'} - \frac{dc}{c}$$

$$\frac{x}{a} = \log \frac{c'}{c}.$$

§. 20. Cette formule eſt aſſez remarquable en ce qu'elle nous met en état de comparer le mouvement vertical d'un corps avec
Fig. 2. ſon mouvement horizontal. Car la viteſſe initiale c eſt à la viteſſe qu'il a en retombant, dans le même rapport que ſi le corps dans le même milieu réſiſtant avoit parcouru la droite $AP = x$. (§. 10.) On en tire facilement la conſéquence, que, dans le cas où le corps monte & retombe, l'action de la gravité ne fait que redoubler le chemin parcouru, & changer la direction du mouvement.

§. 21. Mais revenons maintenant à l'équation différentielle

$$dc = \frac{g\,dx}{c} + \frac{c'\,dx}{a}$$

que nous avons trouvée (§. 17.) pour le cas, où le corps monte. Elle ſe transforme en

$$\frac{c'\,dc'}{ag + c'c'} = \frac{dx}{a}$$

d'où nous tirons l'intégrale

$$\frac{2x}{a} = \log \frac{ag + c'c'}{ag}$$

&

& rèciproquement

$$c' : C = \sqrt{(e^{2x:a} - 1)}$$

§. 22. Or nous avions (§. 14.) pour la chûte:

$$c : C = \sqrt{(1 - e^{-2x:a}}$$

donc il eſt

$$c' : c = e^{x:a}$$

$$x : a = \log \frac{c'}{c}.$$

tout comme dans le §. 19.

§. 23. La même équation

$$\frac{c'dc'}{ag + c'c'} = \frac{dx}{a}$$

nous donne

$$\frac{dc'}{ag + c'c'} = \frac{dx}{c'a} = \frac{d\tau}{a}$$

dont l'intégrale eſt

$$\frac{\tau C}{a} = \text{Arc. tang} \frac{c'}{C}$$

& réciproquement

$$\frac{c'}{C} = \text{tang Arc.} \frac{\tau C}{a}.$$

§. 24. Après avoir trouvé le tems de la montée & celui de la deſcente, nous tâcherons d'en exprimer la ſomme de la maniere la plus ſimple qu'il ſera poſſible, par la viteſſe c' avec laquelle le corps commence à monter. Faiſons d'abord la tangente

$$\frac{c'}{C} = \cot 2\omega, \quad \text{ou bien} \quad \frac{C}{c'} = \text{tang } 2\omega$$

& l'équation (§. 18.)

$$cc = \frac{CC\,c'c'}{CC + c'c'}$$

étant changée en

$$\frac{cc}{CC} = \frac{c'c' : CC}{1 + c'c' : CC}$$

ſe transformera en

$$\frac{cc}{CC} = \frac{\cot 2\omega^2}{\operatorname{coſec} 2\omega^2} = \operatorname{coſ} 2\omega^2$$

d'où l'on tire

$$\frac{c}{C} = \operatorname{coſ} 2\,\omega.$$

Mais le tems de la deſcente eſt (§. 15.)

$$\frac{2\tau C}{a} = \log \frac{1 + c : C}{1 - c : C}$$

ce qui donne

$$\frac{2\tau C}{a} = \log \frac{1 + \operatorname{coſ} 2\,\omega}{1 - \operatorname{coſ} 2\,\omega} = \log \cot \omega^2$$

& partant

$$\frac{\tau C}{a} = \log \cot \omega$$

Au contraire, le tems de la montée étant (§. 23.)

$$\frac{\tau C}{a} = \text{Arc. tang} \frac{c'}{C}$$

nous aurons, en poſant $\pi = 3,1415926 \ldots$ &c.

$$\frac{\tau C}{a} = \tfrac{1}{2}\pi - 2\,\omega$$

Par

Par conſéquent la ſomme de l'un & de l'autre tems étant exprimée par T, il ſera

$$T = (\tfrac{1}{2}\pi - 2\omega + \log \cot \omega)\,\frac{a}{C}$$

Il eſt presque ſuperflu d'avertir, que dans cette formule il faut entendre les logarithmes hyperboliques, & prendre le rayon du cercle égal à l'unité.

§. 25. Comparons encore le tems de la montée avec la hauteur à laquelle le corps parvient avant que de retomber. Pour cet effet nous avons (§. 23. 21.)

$$c' : C = \text{tang Arc.}\ \frac{\tau C}{a}$$

$$\frac{2x}{a} = \log\left(1 + \frac{c'c'}{CC}\right)$$

d'où nous tirons

$$\frac{x}{a} = \text{log. ſec. Arc.}\ \frac{\tau C}{a}.$$

Et puisqu'il eſt (§. 24. 23.)

$$\frac{c'}{C} = \cot 2\omega = \text{tang. Arc.}\ \frac{\tau C}{a}$$

il ſera

$$\frac{x}{a} = \text{log. coſec}\ 2\omega.$$

Donc le même arc 2ω, qui eſt tel que $\cot 2\omega = c' : C$, ſuffit pour trouver d'une maniere fort facile, & la hauteur x, & la ſomme du tems de la montée & de la deſcente, ou bien chacun ſéparément.

On trouvera facilement, que dans le triangle ADB cet arc 2ω eſt Fig. 3.
l'angle B, & que, tandis qu'il eſt

$$c' : C = \cot 2\omega,$$

 il

il ſera $c : c' = \sin 2\,\omega$ & $c : C = \cos 2\,\omega$

puisqu'en faiſant

$$AD = C$$
$$AB = c'$$

il eſt

$$AE = c \quad (\S.\ 18.)$$

§. 26. Nous allons maintenant déterminer la valeur de la lettre a, que nous avons employée dans tout ce calcul, & que nous employerons encore dans les ſuivants. La remarque que nous avons faite au §. 14. que la viteſſe terminale d'un corps tombant eſt la racine quarrée de ag, ou qu'il eſt

$$ag = CC,$$

nous met en état de comparer cette viteſſe & la réſiſtance qui lui eſt due avec l'action de la gravité, qu'exprime la lettre g, qui dénote la viteſſe qu'un corps tombant dans le vuide acquérroit dans la premiere ſeconde de tems, ſi ſa gravité étoit égale à celle qu'il a lorsqu'il eſt plongé dans le fluide. (§. 14.) Il eſt clair, que ſi la viteſſe terminale C pouvoit être trouvée immédiatement par des expériences, on n'auroit qu'à diviſer ſon quarré CC par g, & on trouveroit la valeur de la lettre a, ſans avoir beſoin d'entrer dans d'autres recherches. Mais, comme un corps tombant n'acquiert cette viteſſe que lorsqu'il tombe d'une hauteur infinie dans le même milieu, cette expérience n'eſt pas faiſable. Cependant, quand on connoit à peu près cette viteſſe, il ne ſeroit pas impoſſible de jetter le corps en bas avec une force qui lui donne d'abord une viteſſe approchante, & il eſt clair que le corps en continuant de tomber s'approchera d'avantage de la viteſſe C, que l'on cherche.

§. 27. Mais nous pourrons nous y prendre de diverſes autres manieres. Je remarque en conſéquence, que le tems & le lieu ne changeant rien dans les choſes, la réſiſtance & ſon effet reſtent les

mêmes,

mêmes, soit que le corps se meuve dans le milieu résistant, ou que ce milieu se meuve contre le corps reposant. Il est clair qu'en employant une certaine force, on pourra retenir ce corps en sorte que le mouvement du milieu ne l'entraine point, & qu'il y aura un équilibre tel que, pour peu qu'on relâche de cette force, le corps commence à être entrainé. Substituons à cette force un poids qui lui soit égal, & nous pourrons par là estimer l'effort du fluide par celui de la pesanteur.

§. 28. Afin de rendre cette comparaison moins compliquée, nous supposerons la vitesse du fluide, ou du milieu résistant, égale à celle que le corps acquerroit en tombant dans ce milieu d'une hauteur infinie. Cette vitesse est telle, que si le corps est poussé en bas avec une force qui la lui procure, elle n'est, ni augmentée par l'action de la gravité, ni diminuée par la résistance du milieu dans lequel le corps tombe, & que par conséquent l'action de la gravité est parfaitement égale à celle de la résistance.

§. 29. Soit maintenant CDE un tuyau recourbé, & ouvert en C & E, de sorte que l'une & l'autre ouverture soit égale. Que par le canal AB il tombe continuellement une colonne d'eau, ou du fluide résistant, sur l'ouverture C, on sait qu'elle remplira le tuyau CDE jusqu'à la hauteur E, qui est de niveau avec B. La colonne BC en tombant acquiert une vitesse, que nous appellerons C, & qui répond à la hauteur BC, en sorte que $BC = \frac{CC}{2g}$. Or, quel que soit l'effort dû à cette vitesse, il est clair que le simple poids de la colonne DE y maintient l'équilibre. Cet équilibre aura lieu de quelque maniere que ce poids soit appliqué. Il suffit que sa réaction soit directement opposée à l'action de la colonne BC, ou que, si elle ne l'est pas, ou pas tout à fait, on en tienne compte. Fig. 4.

§. 30. Supposons donc un levier horizontal appuyé sur A, & chargé des deux cylindres égaux C, D, ce levier restera en équilibre. Fig. 5.

bre. Qu'il tombe maintenant ſur C une colonne d'eau, ou du fluide réſiſtant, qui ne ſoit ni plus ni moins large que ne l'eſt le cylindre; il eſt clair que, pour ne point voir l'équilibre levé, il faudra contrebalancer l'action de cette colonne par un poids E, & ce poids ſera égal à celui de toute la colonne B, entant que ſa hauteur eſt CB, & la baſe égale à celle du cylindre C.

§. 31. Mais ſi, au lieu du cylindre C, on avoit placé en C une boule, l'action de la colonne BC y auroit eu moins de priſe, puisque la boule l'auroit fendue plus facilement. La théorie de la percuſſion oblique nous fait voir que, dans ce cas, le poids E qui contrebalance l'action de la colonne BC ſe réduit à la moitié, & que par conſéquent il eſt égal à celui de la colonne CF, dont la hauteur eſt $= \frac{1}{2}$ BC, & la baſe égale à la ſurface du plus grand cercle de la boule.

§. 32. Voilà donc l'action du fluide comparée à celle de la gravité. Nous avons vu ci-deſſus, que l'une & l'autre eſt égale dans le cas où la viteſſe du fluide en C eſt la même que celle que le corps acquerroit dans ce fluide en tombant d'une hauteur infinie, ſi ſon poids ou ſa gravité n'étoit point diminuée par celle du fluide. Si donc cette viteſſe eſt $= C$, & qu'on faſſe $\gamma = 31\frac{1}{4}$ pieds du Rhin, c'eſt à dire, égal à la gravité abſolue du corps, la hauteur de la colonne CB ſera $= \frac{CC}{2\gamma}$, & partant $CF = \frac{CC}{4\gamma} = \frac{a}{4}$. (§. 26.)
De la ſorte une colonne du fluide, dont la hauteur eſt $\frac{a}{4}$, & la baſe égale à la ſurface du plus grand cercle de la boule qui s'y meut, cette colonne, dis-je, eſt du même poids que la boule. Or, ce poids étant donné, nous pourrons nous en ſervir pour déterminer la valeur de a.

§. 33. Soit le poids de la boule $= P$, celui d'un globe du fluide d'un égal volume: ſoit $P:D$, la denſité ou la gravité ſpécifique du du globe étant posée D fois plus grande que celle du fluide. Soit le demi-diametre de la boule $= r$; & nous aurons le poids d'un cylindre du fluide circonscrit à la boule $= 3\,P : 2\,D$, le nombre de ces cylindres dans la colonne $\frac{1}{4}\,a$ sera $= a : 8\,r$; par conséquent leur poids $= 3\,P\,a : 16\,D\,r$. Or, ce poids étant égal à celui de la boule, nous aurons

$$3\,a\,P : 16\,r\,D = P$$

d'où l'on tire la valeur de la lettre

$$a = \tfrac{16}{3}\,r\,D.$$

Cette valeur se définit donc en chaque cas par le demi-diametre de la boule, & par le rapport de la gravité spécifique de la boule & du fluide.

§. 34. Il est cependant assez ordinaire, que l'on connoit plus aisément le poids de la boule que sa gravité spécifique, quoique celle-ci en puisse être trouvée, dès que l'on sait le diametre de la boule. Afin donc d'abréger ce calcul, nous déterminerons en nombres absolus le poids d'une boule d'eau du même diametre. Supposons qu'un pied cubique d'eau, mesure de Paris, pese 70 livres poids de marc, le pied cubique, mesure du Rhin, dont nous nous servirons dans ce discours, ne pesera que $63\frac{1}{2}$ ℔. Si donc nous mettons pour base une boule d'eau, dont le diametre est d'un pied de Rhin, ces $63\frac{1}{2}$ livres seront encore diminuées dans le rapport de 21 à 11. De là nous aurons le poids de cette boule $= \frac{11}{21} \cdot 63\frac{1}{2} = 33\frac{1}{4}$ livres, poids de marc. Si donc le poids & le diametre d'une boule quelconque est donné, on la réduira aisément à une boule, dont le diametre est un pied du Rhin, & on en trouvera le poids, en observant qu'il faut l'augmenter ou le diminuer en raison du cube des diametres. Ce poids étant trouvé, on le comparera avec les $33\frac{1}{4}$ livres, que pese une boule d'eau d'un diametre d'un pied du Rhin, & on trouvera par là le rapport entre la gravité spécifique de la boule & de l'eau. Or le rapport de la gravité de l'eau & de celle des autres fluides étant connu, on changera ce rapport de la boule à l'eau dans celui de la boule à tel fluide que l'on

 voudra

voudra. Nous pourrions trouver une même regle pour l'air, si sa densité n'étoit pas extrèmement variable. Communément on regarde l'air comme environ 850 fois plus leger que l'eau. Ce rapport réduiroit le poids d'une boule d'air, dont le diametre est d'un pied de Rhin, à $\frac{33\frac{1}{4}}{850}$ ℔ ou $\frac{2}{51}$ ℔. Il y a cependant des cas où l'air est plus pesant, comme il y en a nombre d'autres où il est plus leger, que ce rapport ne le donne. De la table des hauteurs barométriques répondantes aux élévations des endroits au dessus de la mer, que j'ai donnée dans le traité des *Propriétés remarquables de la route de la lumiere par les airs*, &c. & qui est tirée immédiatement des observations faites sur les Pyrénées, il résulte, que depuis la surface de la mer, où le barometre est de 28 pouces de Paris, il faut s'élever de $73\frac{1}{3}$ toises, pour que le barometre s'abaisse d'un demi-pouce. Or ces $73\frac{1}{3}$ toises font 10560 demi-pouces, & partant le vif argent est 10560 plus pesant que l'air. Divisant donc ce nombre par 14, nous aurons 754 pour le rapport entre la gravité spécifique de l'eau & celle de l'air; ce qui fait voir, que l'air est quelquefois plus dense que ne le donne le rapport dont nous avons parlé au commencement de ce paragraphe. Mais il pourra encore être plus pesant par une double raison. Car cette pesanteur répond à la hauteur du barometre de 28 pouces. Or cette hauteur peut aller jusqu'à 29 pouces, & même au delà. Ceci diminue encore le nombre 754 en raison de 29 à 28, de sorte que l'eau ne sera que 728 fois plus pesante que l'air comprimé par une colonne de 29 pouces de mercure. Ensuite je remarquerai que les observations dont je tire ce résultat, ont été faites aux mois de Fevrier & de Mars, & dans un climat qui approche de celui de l'Italie, de sorte que le Thermometre n'y aura été que fort peu au dessous de la température. Ce qui fait que, dans des climats plus froids, le nombre 728 devra encore être diminué d'une 12 ou 10 partie, & par là il sera réduit à 650, de sorte que dans les païs du Nord, à la surface de la mer, & le barometre étant à 29 pouces de Paris, comme cela arrive pendant les plus grands froids, la pesanteur de l'eau n'excédera que 650 fois celle de l'air.

§. 35.

§. 35. Au contraire, pendant l'été, & le barometre n'étant qu'à $27\frac{1}{2}$ pouces de hauteur, le nombre 754 devra être augmenté dans le rapport de $27\frac{1}{2}$ à 28, ce qui donne 782; & en outre d'une 10 partie par rapport à la chaleur, ce qui le change en 860. Nous voyons de là, que la variation de la densité de l'air peut aller depuis 650 jusqu'à 860. Il est clair que ce changement influera assez considérablement sur la résistance que l'air oppose à des corps mûs avec autant de vitesse, que les boulets de canon & les bombes en ont.

§. 36. Tout ceci ne regarde encore que l'air tel qu'il est à la surface de la mer, & même indépendamment des variations qui peuvent résulter de l'humidité & des vapeurs dont l'air est toujours plus ou moins chargé. Voyons ce qui en sera pour des endroits plus élevés; & pour avoir un nombre rond, prenons une élévation de 1000 toises au dessus de la mer, en supposant que le barometre à la mer reste à sa hauteur moyenne de 28 pouces, & que le thermometre se trouve à la température. A cette hauteur de 1000 toises, répond à une ligne du barometre, une élévation de $16\frac{2}{5}$ toises, ou de 14170 lignes, de sorte que l'air y est 14170 fois plus leger que le vif-argent, & par conséquent $\frac{14170}{14} = 1012$ fois plus leger que l'eau: au lieu que, sous les mêmes conditions, il n'étoit que 754 fois plus leger à la surface de la mer. On voit par là, que pour déterminer exactement la valeur de la lettre a, il faut avoir égard à toutes les circonstances dont nous venons d'indiquer l'effet & l'influence, & qu'il est à propos de peser l'air, dans les cas où l'on veut s'assurer à toute rigueur des effets de la résistance qu'il oppose aux corps qui s'y meuvent avec des vitesses considérables. Nous avons vu ci-dessus, que cette lettre dénote la soutangente de la logarithmique, dont les ordonnées représentent les vitesses & leur décroissement (§. 10. 19. 20.) & que par là elle est l'exposant de la progression géométrique suivant laquelle ces vitesses décroissent. Je remarquerai encore, comme en passant, que feu Mr. *Musschenbroek* a donné une table des différentes peſanteurs de l'air, telles qu'elles avoient été obſervées par divers Phyſiciens. On verra par ce que je viens de dire, comment il eſt poſſible qu'il s'y trouve des réſultats fort différens, & que quelques unes doivent être cenſées moins exactes que les autres.

§. 37. Je vais maintenant rapporter les expériences qui ont été faites à Londres ſur la Tour de l'Egliſe de *St. Paul.* Mr. *Hawksbée*, ayant fait faire des globes de verre creux & fort legers, les laiſſa tomber du haut de cette Tour, & fit obſerver le tems de la chûte. La hauteur étoit de 220 pieds de Londres, ce qui revient à 213,6 pieds du Rhin, le barometre ſe trouvoit à $29\frac{7}{10}$ de pouce, meſure de Londres, ce qui revient à 27 pouces $4\frac{1}{2}$ lignes meſure de Paris, & enfin le thermometre étoit 60 dégrés au deſſus du terme de congélation, ce qui marque généralement parlant une chaleur d'été ; & par l'une & l'autre raiſon nous pourrons nous en tenir au §. 35. & ſuppoſer que pendant ces expériences l'air a été à très peu près 850 fois plus leger que l'eau. Voici maintenant les expériences.

Poids grains.	Diametres pouces.	Temps ſecondes.
510	5, 1	$8\frac{1}{2}$
642	5, 2	8
599	5, 1	8
515	5, 0	$8\frac{1}{4}$
483	5, 0	$8\frac{1}{2}$
641	5, 2	8

Le poids eſt marqué en grains, dont une once peſe 480, ou une livre 7680. Et Mr. *Hawksbée* obſerve que le tems de la chûte eſt généralement trop grand d'environ $\frac{3}{10}$ de ſecondes, à cauſe d'un inconvénient qu'il y avoit en obſervant.

§. 38.

§. 38. Pour appliquer le calcul à ces expériences, déterminons d'abord la valeur de la lettre a par le poids & le diametre des boules. Soit le demi-diametre $= r$, le rapport du diametre à la circonférence $= 1 : \pi$, celui de la pesanteur de l'air à celle de l'eau $= 1 : 850$, & le poids d'un pied cubique d'eau, mesure du Rhin, $= 63\frac{1}{2}$ ℔, le poids d'un pied cubique d'air sera $= \frac{127}{1700}$ ℔, & le poids d'une boule d'air, dont le demi-diametre est d'un pied du Rhin, sera $= \frac{4.\ 127.\ \pi}{3.\ 1700} = 0,3130$ ℔, & le demi-diametre étant en général $= r$ pieds, le poids de la boule d'air sera $= 0,313.\ rrr$ livres.

§. 39. Or par le §. 33. le poids de la boule même étant P, celui de la boule d'air d'un même volume est $= P : D$, d'où nous aurons

$$P : D = 0,313.\, r^3$$

$$D = P : (0,313.\, r^3)$$

$$a = \tfrac{16}{3}\, rD = \frac{16.\ P}{0,939.\, rr} = 17,043.\ \frac{P}{rr}.$$

§. 40. Mais il est (§. 14.)

$$C\,C = a\,g$$

$$g = 31\tfrac{1}{4} \text{ pieds du Rhin}$$

donc il sera

$$CC = 532,605\ .\ \frac{P}{rr} = \frac{500}{3}\ .\ r\,D$$

d'où l'on voit, que la vitesse terminale est en raison réciproque du diametre de la boule, & en raison directe de la racine quarrée de son poids. Il convient de remarquer, qu'en faisant $g = 31\frac{1}{4}$ pieds, je laisse à cette lettre la valeur qu'elle auroit dans le vuide. Il auroit fallu la diminuer dans le rapport de $D : (D - 1)$. Mais les boules

 ayant

ayant été pesées dans l'air, & par conséquent dans le milieu résistant, cette diminution se trouve déjà dans la valeur de a, qui est $= 17,043\, P : rr$. Donc le produit $ag = CC$ est tel qu'il doit être. (§. 14. 26.) Du reste le rapport $D : (D - 1)$ ne différant que fort peu de l'unité, on voit bien que nous aurions pu en faire abstraction.

§. 41. Appliquons maintenant ces rapports trouvés à la troisieme expérience de Mr. *Hawksbée*, & nous aurons le poids de la boule $P = \frac{599}{7680}$ ℔ $= \frac{1}{12,8}$ ℔. Le diametre $2r = 5,1$ pouces de Londres $= \frac{5,1}{12}$ pieds du Rhin, enfin la hauteur de la chûte $x = 213,6$ pieds du Rhin. D'où nous trouvons

$$a = 17,043 \frac{P}{rr} = \frac{4.\ 144.\ 17,043}{25.\ 12,8} = 30,678 \text{ pieds}$$

$$CC = ag = 958,69 \text{ pieds quarrés}$$

$$C = 30,96.$$

§. 42. Ces données suffisent pour trouver le tems de la chûte par la formule du §. 16.

$$e^{\tau C : a} = e^{x : a} + \sqrt{(e^{2x : a} - 1)}$$

car il sera

$$\frac{x}{a} = \frac{213,6}{30,678} = 6,97$$

ce qui fait, que nous pourrons réduire cette équation à

$$e^{\tau C : a} = 2\, e^{x : a}$$

d'où nous aurons $\tau C : a = \log 2 + x : a$

$$\tau = \frac{a \log 2}{C} + \frac{x}{C}$$

mais

mais il eſt $\log 2 = 0,693$

d'où nous tirons $T = 7\frac{3}{4}$ ſecondes. Mais l'expérience donna ce tems $= 8 - \frac{3}{10} = 7\frac{7}{10}$ ſecondes. Donc la différence n'eſt que d'une $\frac{1}{20}$ de ſeconde, c'eſt à dire, ſi petite qu'elle n'a pu être obſervée.

§. 43. Cet exemple eſt le ſeul que j'aye calculé. Car on voit par la table du §. 37. que les autres 5 expériences ne ſauroient donner des différences plus notables. Toutes les boules étoient à peu près d'un même diametre, & la différence qui ſe trouvoit entre leur poids répond au plus ou moins de tems que les boules employoient à tomber, puisque ce tems ſuivoit à très peu près le rapport des racines quarrées du poids, en croiſſant ou décroiſſant en raiſon inverſe de ces racines.

§. 44. Mr. *Déſaguliers* a fait de ſemblables expériences ſur la même Tour, en laiſſant tomber de la hauteur de 272 pieds de Londres des veſſies de porc, des boules de papier & de verre, & en obſervant le tems de la chûte. Il répéta les expériences faites avec les mêmes veſſies & les boules de papier. En voici le réſultat

Diametres pouces.	Poids grains.	Temps ſecondes.	Expérienc. repetée ſecondes.	
5, 3	128	$19\frac{3}{8}''$	$19''$	Veſſies.
5, 193	156	$17\frac{1}{4}$	$18\frac{3}{8}$	
5, 33	$137\frac{1}{2}$	$18\frac{3}{4}$	$18\frac{3}{8}$	
5, 26	$97\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{8}$	24	
5, 2	$99\frac{1}{8}$	$21\frac{5}{8}$	$21\frac{1}{4}$	
5, 5	1800	$6\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{4}$	Boules de papier
5, 1	1320	$7\frac{1}{8}$	$6\frac{1}{2}$	
5, 1	1500	7	$6\frac{1}{2}$	
5, 42	2610	$6\frac{1}{4}$		Boules de verre.
5, 45	2910	6		

§. 45.

§. 45.· Je ne prendrai de ces expériences que la cinquieme, pour y appliquer le calcul. On voit que la durée de la chûte y étoit très conſidérable, & que l'expérience répétée s'accorde très bien avec la premiere, ce qui fait croire que la veſſie avoit été fort ronde & d'une figure réguliere. Nous avons donc

$$2r = \frac{5}{12} \text{ pieds du Rhin}$$

$$P = \frac{100}{7680} \text{ livres}$$

$$x = 262 \text{ pieds du Rhin}$$

D'où nous tirons

$$a = \frac{17,043 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 10}{25 \cdot 768} = 5,1123 \text{ pieds.}$$

$$x : a = 51,24$$

$$\tau \sqrt{\frac{g}{a}} = x : a + \log 2 = 51,24 + 0,69 = 51,93$$

$$\tau = 21''.$$

Ce qui s'accorde, à $\frac{1}{4}$ de ſeconde près, avec l'expérience répétée, qui donne ce tems de $21\frac{1}{4}''$. La premiere le donne de $21\frac{5}{8}$. Mais il ſemble que l'air a été plus peſant qu'il ne le fût dans les expériences de Mr. *Hawksbée*, qui les fit pendant l'été & lorsque le barometre étoit fort bas. J'ignore ſi Mr. *Déſaguliers* a obſervé le barometre & le thermometre. Mais je ſuis fort porté à croire, qu'il auroit trouvé l'état de l'air différent. En conſéquence j'ai encore calculé la ſeptieme de ces expériences, & je trouve le tems de la deſcente de $6\frac{7}{10}$ ſecondes. Mr. *Déſaguliers* l'a obſervé la premiere fois de $7\frac{1}{8}$, la ſeconde de $6\frac{1}{2}$ ſecondes. Le terme moyen eſt $6,8$ ſecondes, & ſurpaſſe le tems trouvé par le calcul d'une $\frac{1}{67}$ partie, au lieu que dans l'exemple précédent cette différence, qui eſt $= 21\frac{7}{10} - 21 = \frac{7}{10}$ eſt d'une $\frac{1}{48}$ partie. Quoiqu'il en ſoit, ces différences ſont ſi petites qu'il qu'il ne vaut pas la peine de s'y arrêter. Et nous avons tout lieu d'en conclure, que la maniere dont nous avons déterminé la valeur de la lettre a convient très exactement avec les expériences, & qu'il faudra la laisser passer, du moins pour toutes celles où la vitesse n'est pas fort considérable. Je vais en conséquence appliquer ce calcul à un cas qui arrive très souvent, & qui excite même la curiosité des personnes qui n'étudient ni la Physique ni ces sortes de calculs.

§. 46. On sait que la pluye tombe des nuées. Leur hauteur est assez variable, & les gouttes elles-mêmes sont d'une grosseur fort différente. Si donc on demande, quelle est leur vitesse en tombant, & combien de tems elles employent, cette question ne sauroit se décider généralement. Je vais donc prendre quelque terme moyen. Je ne donnerai à la hauteur des nuées que 5000 pieds. Elles sont quelquefois plus basses, & particulierement en hyver; mais aussi en revanche les trouve-t-on au dessus des plus hautes montagnes, & la neige permanente au haut des Cordelieres nous fait voir, que les nuées peuvent s'élever audelà de 20000 pieds au dessus de la mer. Quoiqu'il en soit, il y a encore une autre raison qui rend cette supposition superflue, c'est que le froid excessif qui regne dans ces grandes hauteurs, change toujours les nuées en flocons de neige, qui ne se fond que lorsqu'en tombant elle parvient dans un air, qui, par là qu'il est plus proche de la surface de la terre, en peut être assez échauffé pour fondre la neige. En gardant donc la hauteur de 5000 pieds, je supposerai le diametre d'une goutte de pluye égal à une ligne du pied du Rhin, & en prenant un terme moien, je garderai la densité de l'air 850 fois plus petite que celle de l'eau. De là nous aurons

$$r = \frac{1}{288} \qquad D = 850$$

$$a = \frac{16}{3} r\, D = \frac{850 \cdot 16}{288 \cdot 3} = 15{,}74$$

$$C = 22{,}18.$$

Ainsi

Ainſi la plus grande viteſſe que cette goutte peut acquérir en tombant, n'eſt que de $22\frac{1}{5}$ pieds par ſeconde, & ne s'aggrandit qu'en raiſon de la racine quarrée du diametre, de ſorte que ſi ce diametre n'eſt que d'un $\frac{1}{4}$ de ligne, cette viteſſe ſera encore de 11 pieds par ſecondes. Pour trouver maintenant le tems de la chûte, nous aurons

$$\tau \sqrt{\frac{g}{a}} = x : a + \log 2$$

ce qui donne

$$\tau = 229'', 4.$$

Ainſi une goutte de 1 ligne de diametre, en tombant de la hauteur de 5000 pieds, employera $3', 49''$ pour cette deſcente. En tombant uniformément avec la viteſſe terminale de 22, 18 pieds par ſeconde, elle employeroit 225,4 ſecondes de tems. Et ſans la réſiſtance de l'air, & tombant par la ſeule action de la gravité, elle feroit ce chemin en 18 ſecondes de tems.

§. 47. Appliquons le même calcul à une dragée de fer, dont le diametre eſt d'une ligne, meſure du Rhin. Le fer eſt 7, 645 fois plus peſant que l'eau. Mais la valeur de la lettre a croit en raiſon de la gravité ſpécifique. En multipliant donc les 15, 74 pieds que nous venons de trouver pour une goutte d'eau du même volume, avec 7,645, & nous aurons pour cette dragée de fer

$$a = 120, 41.$$

$$C = \sqrt{a g} = 61, 34.$$

La plus grande viteſſe que cette dragée peut acquérir en tombant dans un air 850 fois plus leger que l'eau, n'eſt donc que de $61\frac{1}{3}$ pieds du Rhin par ſeconde ; & quand même elle ſeroit jettée horizontalement avec une viteſſe infinie, cette viteſſe diminueroit ſi rapidement, qu'au bout de la premiere ſeconde de tems elle ne feroit plus que de $120\frac{2}{5}$ pieds par ſeconde, en continuant de décroître en raiſon réciproque du tems, de ſorte qu'au bout de la deuxieme ſeconde elle ſeroit réduite à la moitié, &c. (§. 9. 12.)

§. 48.

§. 48. Il ne ſera pas plus difficile d'appliquer ce calcul aux boules de ſavon. On ſait qu'elles ne tombent presque point du tout. Suppoſons p. ex. une goutte d'eau ſavonnée, dont le diametre eſt d'une ligne, étendue en une boule de deux pouces de diametre. Par là ſon volume devient $24^3 = 13824$ fois plus grand. Ce qui fait que l'air renfermé dans la boule peſera $\frac{13824}{850} = 16$ fois plus que l'eau. Donc la gravité ſpécifique de toute la boule ſera $D = \frac{17}{16}$. Et le diametre étant $2r = \frac{1}{6}$ pied, on aura $a = \frac{16}{3} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{1}{12} = \frac{17}{36}$. Et comme dans ce cas il eſt $g = \frac{D - 1}{D} \cdot 31\frac{1}{4} = \frac{125}{68}$, on aura $CC = \frac{17}{36} \cdot \frac{125}{68} = \frac{125}{144}$ ce qui donne à très peu près $C = \frac{11}{12} = 11$ pouces, qui eſt la plus grande viteſſe que la boule pourra acquérir en tombant.

§. 49. Après ces exemples, où la viteſſe des corps tombants eſt peu conſidérable, j'en vais rapporter quelques uns où elle eſt conſidérablement plus grande. Mr. *Sulzer* ayant vu les difficultés que Mrs. *Robins* & *Euler* oppoſoient à l'hypotheſe de la réſiſtance exactement proportionelle au quarré des viteſſes, entreprit d'examiner le réſultat que donnent les calculs de Mr. *Euler*, par des expériences ſimplifiées à un tel point qu'on puiſſe répondre de toutes les circonſtances qui y influent: prérogative, dont celles de Mr. *Robins* ne jouiſſent pas. Mais, ſans m'arrêter ici à cet examen, je me bornerai à rapporter les expériences de Mr. *Sulzer*, afin de pouvoir enſuite y appliquer le calcul, & faire voir, qu'on auroit pu en prédire l'effet, en admettant ſimplement le principe de la réſiſtance proportionnelle au quarré de la viteſſe.

§. 50. Mr. *Sulzer* ayant appliqué à la boëte d'un fuſil à vent un tuyau de verre de près de 12 pieds de longueur, le remplit de vif-argent, enſorte qu'en comprimant l'air enfermé dans la boëte, la hauteur de la colonne de mercure dans ce tuyau lui indiquât exactement

 le

le degré d'élaſticité de cet air comprimé. Il chargea enſuite le fuſil d'une boule de plomb, dont le diametre étoit $3\frac{2}{3}$ lignes pied du Rhin, & ayant donné au fuſil une poſition verticale il lâcha le coup, & obſerva le tems que la boule employoit à monter & à deſcendre. Cette expérience fut répétée cinq fois pour différens dégres d'élaſticité. En voici les réſultats tels qu'ils ont été obſervés :

Hauteur du mercure pieds du Rhin	Tems de la montée & de la deſcente
$f = 9,08$	$T = 12\frac{1}{2}$ ſecondes
8,75	12
6,54	11
4,71	10
2,36	$7\frac{1}{2}$

Je remarquerai d'abord, que pour avoir l'entier degré de l'élaſticité de l'air comprimé, il faut ajouter à ces colonnes de mercure le poids de l'atmoſphere, ou la hauteur du barometre, que nous pouvons ſuppoſer avoir été de 2,45 pieds du Rhin, parce que Mr. *Sulzer* me dit qu'il avoit fait ces expériences à Berlin au mois de Juin, & que ç'avoit été un des plus beaux jours d'été. J'ajoute ces circonſtances, parce qu'il en réſulte auſſi, que pour déterminer la réſiſtance de l'air, nous pourrons nous en tenir au §. 35. en donnant à cet air 850 fois moins de gravité ſpécifique qu'à l'eau.

§. 51. Pour tirer parti de ces expériences il s'agit avant toutes choſes de déterminer la viteſſe avec laquelle la boule a été tirée. Ce calcul demande encore d'autres données. Mr. *Sulzer* y a pourvu, en nous donnant exactement les meſures qu'il a priſes en conſéquence. Les voici toutes en pieds du Rhin & ſes parties décimales.

La capacité de la boëte	$= 0,00677$	pieds cub.	$= \alpha$
La baſe du canon . .	$= 0,000532$	pieds quarrés	$= \beta$
La longueur . . .	$= 2,5833$	pieds . .	$= \gamma$
Le diametre de la boule	$= 0,02546$	. . . .	$= \delta$
L'aire de ſon grand cercle	$= 0,000508$	pieds quarrés	$= \varepsilon$

Le

Le rapport de la gravité ſpécifique du mercure & du plomb $= 1{,}2378 = m$. Enfin je poſerai la hauteur du barometre de 2,45 pieds $= \lambda$.

§. 52. De là il ſuit que l'élaſticité de l'air comprimé dans la boëte eſt égale à une colonne de mercure haute de $f + \lambda$ pieds. Cette colonne étant changée en une colonne de plomb du même poids, la hauteur de celle-ci ſera $= (f + \lambda) m$ pieds, d'où il ſuit qu'elle ſurpaſſoit $\frac{3\,m}{2\,\delta}(f + \lambda)$ fois le poids de la boule de plomb dont le fuſil étoit chargé, & qu'elle mit en mouvement par ſa preſſion. Si donc la preſſion de la gravité eſt poſée $= 1$, la force accélératrice de l'air comprimé dans la boëte ſera $= \frac{3\,m}{2\,\delta}(f + \lambda)$.

§. 53. Cette force diminue en raiſon réciproque de l'eſpace. Suppoſons qu'elle ait pouſſé la boule dans le canon du fuſil jusqu'à la diſtance $= \xi$, la denſité de l'air comprimé dans la boëte ſera diminuée en raiſon $\frac{\alpha}{\alpha + \beta\,\xi}$, & ſa force accélératrice ſera donc réduite à

$$\frac{3\,m\,f\,\alpha}{2\,\delta\,(\alpha + \beta\,\xi)},$$

Or cette force doit non ſeulement pouſſer la boule, mais encore tout le poids de l'air extérieur, qui, étant égal à une colonne de mercure $= \lambda$, ſera $= \frac{3\,m\,\lambda}{2\,\delta}$, quantité conſtante dont la force accélératrice de l'air comprimé doit être, diminuée. Elle ne ſera donc efficace qu'avec la quantité, ou portion,

$$\frac{3\,m\,f\,\alpha}{2\,\delta\,(\alpha + \beta\,\xi)} - \frac{3\,m\,\lambda}{2\,\delta}.$$

§. 54. Soit maintenant v la hauteur, par laquelle un corps doit tomber dans le vuide pour acquérir la viteſſe que la boule a acquiert à la diſtance ξ, de ſorte que cette viteſſe ſoit $= \sqrt{v}$, & nous aurons par les loix de la mécanique

$$d\,v = \frac{3\,\alpha\,m\,(f + \lambda)\,d\,\xi}{2\,\alpha\,\delta + 2\,\beta\,\delta\,\xi} - \frac{3\,m\,\lambda\,d\,\xi}{2\,\delta}$$

d'où l'on tire l'intégrale pour toute la longueur du canon du fuſil

$$v = \frac{3\,\alpha\,m\,(f + \lambda)}{2\,\beta\,\delta}\log\left(1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha}\right) - \frac{3\,m\,\lambda\,\gamma}{2\,\delta}.$$

§. 55. Remarquons ici en paſſant, que la hauteur v auſſi bien que ſa différentielle dv peut devenir $= 0$. Dans ce dernier cas elle offre un *maximum*, qui aura lieu lorsque

$$\xi = \frac{\alpha\,(f + \lambda)}{\beta\,\lambda}$$

ce qui veut dire, que la viteſſe de la boule croîtra jusqu'à ce qu'on donne au canon du fuſil une longueur telle, que l'air comprimé de la boëte ſe dilatant dans toute la longueur du canon, ait alors une denſité égale à celle de l'air extérieur. On voit par cette équation que cette plus grande longueur du canon eſt en raiſon directe de l'élasticité de l'air comprimé dans la boëte, & en raiſon réciproque de l'élaſticité de l'air extérieur. Le premier cas, où la hauteur v devient $= 0$, a lieu, lorsque la compreſſion de l'air enfermé dans la boëte eſt ſi petite, que la force accélératrice qui en nait, ne ſauroit pouſſer la boule que jusqu'au bout du canon du fuſil. Car dans ce cas elle n'en ſortira pas, mais l'air extérieur gagnant le deſſus, de même que le propre poids de la boule, la feront rentrer, en lui faiſant faire des oſcillations diminuées jusqu'à ce qu'elle s'arrête là, où par ſon propre poids joint à celui de l'air extérieur elle tient en équilibre l'air qui reſte dans la boëte. Ceci arrive quand on ſuppoſe, que la boule remplit exactement le canon du fuſil. Car, lorsqu'elle eſt plus petite, elle retombe entierement, &c.

§. 56.

§. 56. Mais revenons à notre calcul. Nous n'aurons pour cet effet qu'à ſubſtituer aux lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta, f, \lambda$ les valeurs, que nous donnent les expériences de Mr. *Sulzer*, & nous aurons

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha} = 0,2030$$

$$\log\left(1+\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right) = 0,18483$$

$$\frac{3\,m\,\lambda}{2\,\delta} = 461,56$$

$$\frac{3\,m\,\alpha}{2\,\delta\,\beta}\log\left(1+\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right) = 171,528$$

$$\frac{3\,m\,\alpha\,\lambda}{2\,\beta\,\delta}\log\left(1+\frac{\beta\gamma}{\alpha}\right) = 420,24$$

$$461,56 - 420,24 = 41,32$$

& enfin

$$v = 171,528\,f - 41,32$$

d'où l'on voit, que ſi f n'étoit que de $\frac{41,32}{171,528}$, ou environ $\frac{1}{4}$ pied, c'eſt à dire, ſi l'élaſticité de l'air comprimé dans la boëte n'excédoit celle de l'air extérieur que de 3 pouces de mercure, la balle ne ſortiroit point du fuſil, mais qu'elle retomberoit dans la boëte.

§. 57. Subſtituons maintenant dans la derniere de ces équations les valeurs de la lettre f (§. 50.) & nous aurons les hauteurs

$$\begin{aligned} v &= 1516 \text{ pieds} \\ &= 1460 \\ &= 1080 \\ &= 767 \\ &= 364. \end{aligned}$$

§. 58. Or, pour trouver la viteſſe initiale de la boule c', on n'aura qu'à multiplier ces valeurs de v par $2g = 62\frac{1}{2}$ pieds, & prendre les racines quarrées des produits. Mais, avant que de faire cela, nous chercherons encore la valeur de la lettre C, ou de la plus grande viteſſe que la boule peut acquérir en tombant par l'air, tel qu'il étoit dans ces expériences. Cet air étant 850 fois plus leger que l'eau, & l'eau 11, 3 fois plus legere que le plomb, il s'enſuit que la boule avoit $113 \cdot 85 = 9350$ fois plus de denſité que l'air. Il ſera donc $D = 9350$. Enſuite nous avons le demi-diametre de la boule $r = \frac{11}{864}$ pieds. Ces deux nombres étant ſubſtitués dans la formule du §. 33.

$$a = \frac{16}{3} r D$$

nous donnent

$$a = \frac{176 \cdot 9350}{2592} = 634{,}9$$

De là

$$\log a = 2{,}8026893$$
$$\log g = 1{,}4948500$$
$$\log ag = 4{,}2975393 = \log CC \text{ (§. 26.)}$$
$$\log C = 2{,}1487696 \qquad C = 140{,}85$$
$$\log \frac{a}{g} = 1{,}3078393$$
$$\log \sqrt{\frac{a}{g}} = 0{,}6539197 \quad \sqrt{\frac{a}{g}} = \frac{a}{C} = 4{,}507.$$

§. 59. De là nous aurons les nombres suivants (§. 24.)

v	$\log v g$	$\log \sqrt{2vg} = \log c'$	c'	$\log \frac{c'}{C} = \log \cot 2\omega$	2ω
1516	4, 6755492	2, 4882896	307, 8	0, 3395200	24°, 35′ +
1460	4, 6592028	2, 4801164	302, 1	0, 3313468	25 , 0
1080	4, 5282737	2, 4146518	259, 8	0, 2658822	28 , 28
767	4, 3796454	2, 3403377	218, 9	0, 1915681	32 , 45 +
364	4, 0559514	2, 1784907	150, 8	0, 0297211	43 , 2

Ce qui donne encore

$\frac{1}{2}\pi - 2\omega$	ω	log. cot ω	log. cos 2 ω
65°, 25′	12°, 18′	0, 6614733	0, 3808897
65 , 0	12 , 30	0, 6542448	0, 3740517
61 , 32	14 , 14	0, 5957514	0, 3218028
57 , 15	16 , 23	0, 5316127	0, 2668232
46 , 58	21 , 31	0, 4042321	0, 1659459

§. 60. Or ces logarithmes étant tabulaires, il faut les multiplier par log 10 = 2,30258 pour les changer en hyperboliques. Et par la même raison il faut multiplier les dégrés ($\frac{1}{2}\pi - 2\omega$) par la longueur d'un degré, qui est = 0,01745 &c. Mais les formules des §. 24. 25.

$$T = (\tfrac{1}{2}\pi - 2\omega + \log \cot \omega)\,\frac{a}{C}$$

$$x = a \log \operatorname{cosec.} 2\omega$$

demandent encore qu'on multiplie les log. cot ω par $\frac{a}{C}$, que nous avons trouvé être = 4,507 & les log. cosec 2 ω par $a = 634,9$. De là, en multipliant d'abord ces multiplicateurs, il suffira de multiplier les dégrés ($\frac{1}{2}\pi - 2\omega$) par 0,07864, & les log. cot ω par

par 10, 378, pour avoir les tems de la montée & de la descente, & partant les sommes, & enfin les log. cosec. 2ω par 1462, pour avoir les hauteurs x, ce qui donnera

Tems calculés montée	descente	somme	Tems observés	Difference	Hauteurs
5″, 15	6″, 87	12″, 02	12″ $\frac{1}{2}$	$+ \frac{1}{2}$″	567, 0
5, 11	6, 79	11, 90	12	$+ \frac{1}{10}$	546, 9
4, 84	6, 18	11, 02	11	0	470, 6
4, 50	5, 52	10, 02	10	0	390, 2
3, 69	4, 19	7, 88	7 $\frac{1}{2}$	$- \frac{2}{5}$	242, 6

§. 61. Je regarde ces différences des tems comme nulles. Car les dégrés d'élasticité de l'air comprimé dans la boëte différoient trop peu entre eux, pour qu'ils eussent du produire une différence d'une $\frac{1}{2}$ seconde dans le tems. Nous voyons que la seconde, la troisieme, & la quatrieme observation différent chacune d'une seconde entiere, & que pour produire cette différence, celle de l'élasticité a du être de près de 2 pieds de mercure. (§. 50.) Mais la premiere & la seconde expérience ne différoient que d'un $\frac{1}{3}$ de pied, ce qui ne pourra produire qu'une $\frac{1}{6}$ partie de seconde de différence dans le tems; minutie qui ne pouvoit être observée, quoiqu'elle ait pu porter l'observateur à compter pour la premiere observation une demi-seconde davantage. On peut juger de la même maniere des $\frac{2}{5}$ secondes, dont la derniere expérience différe du calcul. De la sorte ces expériences sont telles, qu'au lieu de changer la moindre chose au principe de la résistance proportionelle au quarré des vitesses, elles le confirment autant qu'on peut le souhaiter. Les vitesses, dans les deux premieres expériences surtout, étoient telles, que si la boule avoit été tirée horizontalement avec une vitesse infinie, elle auroit été réduite à cette vitesse après la deuxieme seconde de tems (§. 12. 9.) Mr. *Sulzer*, d'après les raisons assez plausibles que donne Mr. *Euler*, a joint au quarré des vitesses encore une petite fonction du biquarré. On peut voir dans son Mémoire, que les

deux

deux dernieres expériences se trouvant assez conformes aux résultats de son calcul, les deux premieres, dans lesquelles ce biquarré se trouve considérablement plus grand, différent au de là d'une seconde, & par conséquent de la 10 partie du tems entier.

§. 62. Déterminons encore pour la premiere de ces expériences le tems que la boule auroit employé à monter & à descendre dans le vuide, & dans un air dont la résistance auroit été double de ce qu'elle a été en effet. Le tems pour le vuide se trouve aisément. Car il est $= 2c' : g$ & par conséquent $= \frac{615,6}{31,25} = 19,7$ secondes. Au contraire dans un air, dont la résistance seroit double, la valeur de la lettre a se réduit à la moitié de ce que nous avons trouvé, ou à 317,4 pieds. Il sera donc

$$
\begin{array}{lll}
\log\ a & = 2,5016593 & \\
\log\ g & = 1,4948500 & \\
\hline
\log\ ag & = 3,9965093 & = \log\ CC \\
\log\ C & = 1,9982546 & \text{donc } C = 99,60 \text{ pieds} \\
\log\ a:g & = 1,0068093 & \\
\hline
\log \sqrt{\frac{a}{g}} & = 0,5034046 & \text{donc } \sqrt{\frac{a}{g}} = \frac{a}{C} = 3,187.
\end{array}
$$

De là nous aurons

$$
\begin{array}{lll}
\log\ C & = 1,9982562 & \\
\log\ c' & = 2,4882896 & \\
\hline
\log\ c' : C & = 0,4900334 & = \log \cot 2\,\omega \\
2\,\omega & = 17^\circ,\ 56' & \\
\omega & = 8,\ 58 & \\
\frac{1}{2}\pi - 2\,\omega & = 72,\ 4 & \\
\log.\ \cot\ \omega & = 0,8019258. &
\end{array}
$$

Ce logarithme étant changé en logarithme hyperbolique, est $= 1,8465$, & l'arc $(\frac{1}{2}\pi - 2\omega)$ étant converti en parties décimales du rayon eſt $= 1,2576$. Or l'un & l'autre de ces nombres doit encore être multiplié par $c' : C = 3,187$, pour avoir le tems

de la montée $= 4'', 01$
de la deſcente $= 5, 89$

Tems T . . . $= 9, 90$.

Nous voyons de là que tems décroît de maniere, que la denſité de l'air étant repréſentée par les abſciſſes, & le tems T par les ordonnées, cette courbe devient aſſymtotique, & que les tems décroiſſent plus lentement que ne croiſſent les denſités, &c. Car il eſt pour la

denſité $= 0$ . . . . T $= 19, 7$
$= 1$ . . . . . $= 12, 0$
$= 2$ . . . . . $= 9, 9$. &c.

La hauteur x différe également. Elle eſt $x = a$ log. coſec. 2ω (§. 25.) Or le logarithme tabulaire de coſec 2ω eſt $= 0,5119665$, qui étant multiplié par $2,30258\ a = 731$, donne $x = 384, 3$. de ſorte qu'il eſt pour la

denſité $= 0$ $x = 1516$
$= 1$ . . . $= 567$
$= 2$ . . . $= 384$ &c.

d'où il paroît, que les hauteurs décroiſſent plus vite que les tems.

§. 63. Jusqu'ici nous avons conſidéré le cas où le milieu réſiſtant eſt en repos. Il ne ſera pas inutile de donner encore quelque attention à ceux où il a quelque mouvement. Nous ſuppoſerons ce mouvement rectiligne & uniforme; & pour commencer par le cas le plus ſimple, nous le regarderons comme étant directement oppoſé à celui du corps qui s'y meut. Soit donc AB la droite, dans laquel-

Fig. 1.

laquelle un corps ſphérique ſe meuve de A vers B, de ſorte qu'après un tems $= \tau$ il ait parcouru l'eſpace $AP = x$. Que ſa viteſſe en P ſoit $= c$. Avec cette viteſſe le corps pourroit parcourir dans le tems $d\tau$ l'eſpace Pq, s'il n'étoit rétardé par la réſiſtance & par l'action du fluide. Le fluide ſe mouvant de B vers A, avec une viteſſe, que nous nommerons $= \gamma$, la viteſſe rélative du corps ſera $= \gamma + c$; & c'eſt du quarré de cette viteſſe que dépend l'effet de la réſiſtance, ou le retardement $pq = -ddx$. Nous aurons donc

$$-ddx = (c+\gamma)^2 d\tau^2 : a.$$

Mais il eſt

$$dx = c.\, d\tau$$
$$ddx = dc.\, d\tau.$$

Donc, en ſubſtituant cette valeur, nous aurons

$$-dc = (c+\gamma)^2 d\tau : a$$

$$-\frac{dc}{(c+\gamma)^2} = \frac{d\tau}{a}$$

& l'intégrale, en faiſant la viteſſe initiale $= G$, ſera

$$\frac{\tau}{a} = \frac{1}{c+\gamma} - \frac{1}{G+\gamma}$$

de ſorte que le tems eſt en raiſon réciproque de la viteſſe rélative $c+\gamma$.

§. 64. L'équation

$$-\frac{dc}{(c+\gamma)^2} = \frac{d\tau}{a}$$

ſe change en

$$-\frac{c\,dc}{(c+\gamma)^2} = \frac{c\,d\tau}{a} = \frac{dx}{a}$$

ce qui donne l'intégrale

$$\frac{x}{a} = \log \frac{G + \gamma}{c + \gamma} - \frac{\gamma}{c + \gamma} + \frac{\gamma}{\gamma + G}$$

Et, en exprimant la viteſſe c par la valeur du tems, il ſera

$$\frac{x}{a} = \log \left(\frac{\tau (G + \gamma)}{a} + 1 \right) - \frac{\gamma \tau}{a}$$

Dans cette formule $\gamma \tau$ eſt l'eſpace que le milieu parcourt dans le tems τ, & au contraire $a \log \left(\frac{\tau (G + \gamma)}{a} + 1 \right)$ eſt l'eſpace, que le corps auroit parcouru, ſi, en ſuppoſant le fluide en repos, le corps avoit eu la viteſſe initiale $G + \gamma$ (§. 11.) Ainſi l'eſpace x eſt la différence de ces deux eſpaces. Ou bien, en tranſpoſant les termes de cette équation, nous avons la ſuivante

$$x + \gamma \tau = a \log \left(\frac{\tau (G + \gamma)}{a} + 1 \right)$$

dont l'un & l'autre membre dénote l'eſpace rélatif, ou la diſtance de la boule d'une particule du fluide emportée par ce fluide.

§. 65. L'équation que nous venons de trouver pour l'eſpace parcouru, nous préſente un *maximum*. Ce qui fait voir qu'une boule pouſſée contre le torrent du fluide avec une viteſſe quelconque eſt rallentie, en ſorte qu'après avoir parcouru un certain eſpace, ſa viteſſe devient $= 0$, & qu'elle commence à être entrainée par le fluide. Pour en trouver le tems, nous n'aurons qu'à faire $c = 0$, dans l'équation

$$\frac{\tau}{a} = \frac{1}{c + \gamma} - \frac{1}{G + 1}.$$

& elle ſe change en

$$\frac{\tau}{a} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{G + \gamma}.$$

 Par

Par exemple, dans la premiere expérience de Mr. *Sulzer*, nous avions la viteſſe initiale de la boule $= 307,8$ pieds, & la valeur de la lettre $a = 634,9$, ce qui donne

$$\tau = \frac{634,9}{\gamma} - \frac{634,9}{307,8+\gamma}$$

Suppoſons la viteſſe du vent $= 60$ pieds par ſeconde, & il ſe trouvera que le tems τ n'eſt que de $8,85$ ſecondes, de ſorte que cette boule étant tirée horizontalement avec une viteſſe de $307,8$ pieds, & contre un vent dont la viteſſe eſt de 60 pieds, rebrouſſera chemin en moins de 9 ſecondes, & elle ne fera que 618 pieds de chemin.

§. 66. Pour accommoder les formules que nous venons de trouver, au cas où le mouvement du fluide ſuit la même direction que le corps qui s'y meut, nous n'aurons qu'à prendre la lettre γ, négative, ce qui donne

$$\frac{\tau}{a} = \frac{1}{c-\gamma} - \frac{1}{G-\gamma}$$

$$\frac{x}{a} = \log\frac{G-\gamma}{c-\gamma} + \frac{\gamma}{c-\gamma} - \frac{\gamma}{G-\gamma}$$

$$\frac{x}{a} = \log\left(\frac{\tau(G-\gamma)}{a} + 1\right) + \frac{\gamma\tau}{a}$$

Ces formules auront lieu, lorsque la viteſſe initiale du corps eſt plus grande que celle du fluide, dans lequel il ſe meut. Mais, ſi le fluide ſe meut plus vite, on aura les formules ſuivantes

$$\frac{\tau}{a} = \frac{1}{\gamma-c} - \frac{1}{\gamma-G}$$

$$\frac{x}{a} = -\log\frac{\gamma-G}{\gamma-c} + \frac{\gamma}{\gamma-c} - \frac{\gamma}{\gamma-G}$$

$$\frac{x}{a} = -\log\left(1 + \frac{\tau(\gamma-G)}{a}\right) + \frac{\gamma\tau}{a}.$$

§. 67.

§. 67. Ce qui donne pour le cas où le mouvement du corps commence par le repos

$$\frac{\tau}{a} = \frac{1}{\gamma - c} - \frac{1}{\gamma} = \frac{c}{\gamma - c}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{c}{\gamma - c} - \log \frac{\gamma}{\gamma - c}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{\gamma\tau}{a} - \log\left(1 + \frac{\tau\gamma}{a}\right).$$

Fig. 6. §. 68. Cette derniere formule se construit de la maniere suivante. Ayant tiré à angle droit les lignes AB, RT, on fait AB $=$ AT $= a$, & on tire par le point B une logarithmique EBM, dont la soutangente soit AT $= a$, l'axe RT. Après avoir ensuite tiré BT prolongée vers Q, & BP parallele à RT, on prend PM $= \tau\gamma$, & on aura MQ $= x$. Car il est

$$\mathrm{AR} = \mathrm{BP} = \mathrm{PQ} = a \log \frac{\mathrm{RM}}{\mathrm{AB}}$$

$$\mathrm{RM} = a + \tau\gamma$$

$$\mathrm{BP} = \mathrm{PQ} = a \log \frac{a + \tau\gamma}{a}$$

$$\mathrm{PM} = \tau\gamma;$$

$$\text{donc} \quad \mathrm{QM} = \tau\gamma - a \log\left(1 + \frac{\tau\gamma}{a}\right).$$

Si donc les tems croissent comme PM, les espaces croissent comme QM.

§. 69. L'équation

$$\frac{x}{a} = \frac{c}{\gamma - c} - \log \frac{\gamma}{\gamma - c}$$

étant

étant résolue en une suite, nous donne

$$x = \frac{acc}{2\gamma\gamma} + \frac{2ac^3}{3\gamma^3} + \frac{3ac^4}{4\gamma^4} + \&c.$$

Si donc la vitesse du fluide est incomparablement plus grande que celle du corps, & que le fluide soit fort rare, il suffira de garder le premier terme de cette suite, puisque les suivants s'évanouissent. Il sera donc

$$x = \frac{a}{2\gamma\gamma} \cdot cc$$

La lettre a dépend de la densité du fluide. Ainsi, si nous supposons que la pesanteur des corps dérive du mouvement d'un semblable fluide, le rapport $a : 2\gamma\gamma$ se définit par la loi de la chûte des corps. Car il est

$$x = \frac{cc}{2g}$$

d'où l'on tire

$$\frac{a}{2\gamma\gamma} = \frac{1}{2g}$$

$$ag = \gamma\gamma$$

$$g = \gamma\gamma : a = 31\tfrac{1}{4} \text{ pieds.}$$

§. 70. Mais, sans nous arrêter à ces recherches, nous passerons à considérer le mouvement d'un corps sphérique dans un milieu qui se meut dans une direction oblique, & qui par conséquent non seulement altere la vitesse du corps, mais qui en change en même tems la direction.

§. 71. Soit donc AB la direction du mouvement du fluide, de sorte qu'il se meuve de A vers B, & que sa vitesse soit $=$ AF. Soit AME la courbe que le corps parcourt, de sorte qu'en A sa direction soit perpendiculaire à celle du fluide. Supposons la vitesse Fig. 7.

ſe en $A = AG$, & achevant le rectangle $AFHG$, tirons la diagonale AH. Faiſons

$$AF = \gamma$$
$$AG = Q$$
$$HAG = \psi$$

Suppoſons maintenant qu'après un certain tems $= \tau$, le corps ſoit parvenu en M, & que dans ce point ſa viteſſe ſoit $= c$. Il s'agira de voir, de quelle maniere il change de viteſſe & de direction.

§. 72. La viteſſe du fluide étant ſuppoſée conſtante & parallele, nous transférerons AF en MN, & ayant tiré la tangente MQ, nous ferons $MQ = c$, de ſorte que les droites MM, MQ, expriment les directions & les viteſſes du fluide & du corps qui s'y meut. Comme l'effet reſte le même, ſoit que le fluide pouſſe de N vers M, ou que le corps ſoit pouſſé de M vers N, en achevant le parallélogramme NMQP, & tirant la diagonale MP, cette diagonale repréſentera la direction, & la viteſſe qui naît de la compoſition des deux mouvemens du corps, de même que la direction ſuivant laquelle le corps eſt détourné de ſa route. Soit Pp l'effet qui en réſulte pendant le tems $d\tau$, & nous n'aurons qu'à transférer Pp en Qq, en gardant la même direction. De cette maniere le corps, au lieu de ſe mouvoir ſuivant la direction tangentielle MQ, ſe meut en effet par le petit arc Mq.

§. 73. Cet effet ſe réſout facilement en deux autres, paralleles & perpendiculaires à la direction NM. Prolongeant PQ en r, & abaiſſant ſur Qr la perpendiculaire qr, tirons encore MS parallele, & Mm, rqs perpendiculaires à AB; & faiſons

$$Am = x$$
$$mM = y$$

& il ſera

$$MS = dx$$
$$Qr = + ddx$$
$$Sr = dy$$
$$rq = - ddy$$

Nom-

Nommons encore la viteſſe ſuivant $MS = k$, celle qui eſt ſuivant $SQ = q$, & ces quantités ſe réduiront à des équations de la maniere ſuivante.

§. 74. La diagonale MP exprimant la viteſſe, nous avons d'abord.

$$Pp = Qq = PM^2 : a$$

Cette équation ſe réſout dans les deux ſuivantes

$$Qr = \quad ddx = \frac{PM \cdot PR}{a}$$

$$rq = - ddy = \frac{PM \cdot MR}{a}$$

Or il eſt

$$MR = SQ = dy$$

$$PR = PQ - RQ = \gamma d\tau - dx.$$

Donc en ſubſtituant ces valeurs, on aura

$$\frac{PM}{a} = \frac{ddx}{\gamma d\tau - dx} = - \frac{ddy}{dy}.$$

Mais il eſt

$$dx = k d\tau \qquad ddx = dk d\tau$$

$$dy = q d\tau \qquad ddy = dq d\tau.$$

Donc en ſubſtituant de nouveau

$$\frac{dk}{\gamma - k} = - \frac{dq}{q}$$

dont l'intégrale eſt

$$- \log \frac{\gamma - k}{\gamma} = \log \frac{Q}{q},$$

& partant

$$\frac{q}{Q} = \frac{\gamma - k}{\gamma},$$

ce

ce qui veut dire

$$AG : HG = MR : RP$$

d'où il ſuit, que la direction de la diagonale MP, ou Qq D, qui eſt celle de la force compoſée, reſte par tout la même, ou qu'elle eſt par tout parallele à A H.

§. 75. Ayant donc trouvé

$$\frac{\gamma - k}{\gamma} = \frac{q}{Q}$$

cette équation étant multipliée par $d\tau$, ſe change en

$$d\tau - \frac{k\,d\tau}{\gamma} = \frac{q\,d\tau}{Q}$$

ce qui donne

$$d\tau - \frac{dx}{\gamma} = \frac{dy}{Q}$$

& partant l'intégrale

$$\tau - \frac{x}{\gamma} = \frac{y}{Q}$$

ou bien

$$\tau = \frac{x}{\gamma} + \frac{y}{Q}$$

c'eſt à dire le tems que le corps employe à parcourir l'arc AM eſt la ſomme du tems que le fluide employe pour parcourir l'abſciſſe A m, & de celui que le corps employeroit, ſi avec la viteſſe qu'il a en A, il avoit à parcourir l'ordonnée m M.

§. 76. Mais revenons à nos équations différentielles, & introduiſons-y l'angle HAG, dont nous venons de voir qu'il eſt conſtant. En conſéquence nous aurons pour les ordonnées

$$PM = MR.\ \text{ſec.}\,\psi = dy\ \text{ſec}\ \psi$$

&

& partant

$$-\,d\,d\,y = \frac{d\,y^2}{a\,\operatorname{cos}\psi}.$$

Mais il eſt

$$q\,d\tau = d\,y \qquad d\,q\,d\,\tau = d\,d\,y,$$

ce qui donne

$$-\,d\,q.\,d\,\tau = \frac{q^2\,d\,\tau^2}{a\,\operatorname{cos}\psi}$$

$$-\,\frac{d\,q}{q\,q} = \frac{d\tau}{a\,\operatorname{cos}\psi}$$

dont l'intégrale eſt

$$\frac{\tau}{a\,\operatorname{cos}\psi} = \frac{1}{q} - \frac{1}{Q} = \frac{Q - q}{Q\,q}.$$

Enſuite la même équation

$$-\,\frac{d\,q}{q\,q} = \frac{d\,\tau}{a\,\operatorname{cos}\psi}$$

nous donne

$$-\,\frac{d\,q}{q} = \frac{q\,d\,\tau}{a\,\operatorname{cos}\psi} = \frac{d\,y}{a\,\operatorname{cos}\psi}$$

dont l'intégrale eſt

$$\frac{y}{a\,\operatorname{cos}\psi} = \log\frac{Q}{q}$$

& de là, en exprimant Q par τ,

$$\frac{y}{a\,\operatorname{cos}\psi} = \log\left(1 + \frac{\tau\,Q}{a\,\operatorname{cos}\psi}\right)$$

$$\tau = \frac{a\,\operatorname{cos}\psi}{Q}\,\left(e^{y\,:\,a\,\operatorname{cos}\psi} - 1\right).$$

§. 77. De la même maniere nous avons pour les abſciſſes

$$\frac{ddx}{\gamma\, d\tau - dx} = \frac{\mathrm{PM}}{a} = \frac{(\gamma\, d\tau - dx)}{a \sin \psi}$$

mais il eſt

$$k\, d\tau = dx \qquad dk\, d\tau = ddx.$$

Ces valeurs étant ſubſtituées, il ſera

$$\frac{(\gamma - k)^2\, d\tau}{a. \sin\psi} = dk$$

$$\frac{d\tau}{a \sin\psi} = \frac{dk}{(\gamma - k)^2},$$

dont l'intégrale eſt

$$\frac{\tau}{a \sin\psi} = \frac{1}{\gamma - k} - \frac{1}{\gamma}.$$

§. 78. Enſuite l'équation

$$\frac{d\tau}{a \sin\psi} = \frac{dk}{(\gamma - k)^2}$$

ſe change en

$$\frac{k\, d\tau}{a \sin\psi} = \frac{k\, dk}{(\gamma - k)^2} = \frac{dx}{a \sin\psi}$$

d'où l'on tire l'intégrale

$$\frac{x}{a \sin\psi} = \log\left(\frac{\gamma - k}{\gamma}\right) + \frac{k}{\gamma - k}.$$

§. 79. Enfin nous avons (§. 75.)

$$\tau = \frac{x}{\gamma} + \frac{y}{Q}$$

ce qui donne

$$Q\tau = \frac{Qx}{\gamma} + y$$

ou bien

$$Q\tau = x \cot\psi + y = a \cos\psi\,(e^{y : a\cos\psi} - 1)\ (\S.\ 76.)$$

Donc il eſt

$$x = a \sin\psi\,(e^{y : a\cos\psi} - 1) - y.\ \tang\psi.$$

ou

$$\frac{x}{a\sin\psi} = e^{y : a\cos\psi} - 1 - \frac{y}{a\cos\psi}.$$

Faiſant $AT = AB = RP = 1,$ **Fig. 6.**

$$AR = BP = y : a\cos\psi$$

il ſera

$$QM = \frac{x}{a\sin\psi}.$$

Donc BP de même que BQ eſt proportionelle à y, & QM à x.

§. 80. Cette conſtruction fait voir, comment la courbe AME, ſe conſtruit aiſément moyennant une logarithmique. Il en réſulte pareillement, que la branche AME n'eſt point aſymtotique, mais bien celle qui s'étend de l'autre côté de la ligne AB, & qu'en général la courbe AME n'eſt autre choſe qu'une logarithmique placée obliquement. **Fig. 7.**

§. 81. Quoique, depuis le point A, le mouvement du fluide commence à accélérer celui du corps, l'effet de la réſiſtance ne laiſſe pas cependant de l'emporter encore, & le corps doit continuer de ſe mouvoir vers E, avant que ces deux effets ſe contrebalancent. L'équation (§. 75.)

$$\frac{\gamma - k}{\gamma} = \frac{q}{Q}$$

nous

nous conduit le plus facilement à trouver le point où cela arrive. Elle ſe change en

$$q = Q - k \cot \psi$$

d'où l'on obtient le quarré de la viteſſe tangentielle

$$c^2 = q^2 + k^2 = k^2 + Q^2 - 2 Qk \cot \psi + k^2 \cot \psi^2$$

& en prenant les différentielles

$$o = c\,d\,c = (k - Q \cot \psi + k \cot \psi^2):$$

ce qui donne

$$k = Q \sin \psi \ \cos \psi$$
$$q = Q \sin \psi^2$$
$$c = Q \sin \psi.$$

Donc

$$q = c \sin \psi$$
$$k = c \cos \psi.$$

Ainſi le point où la viteſſe tangentielle recommence à croître, ſe trouve là où la diagonale PM eſt perpendiculaire ſur la courbe. L'équation (§. 76.)

$$y = a \cos \psi . \log \frac{Q}{q}$$

nous fournit l'ordonnée repondante à ce point, ſi nous y ſubſtituons la valeur

$$\frac{Q}{q} = \operatorname{cosec} \psi^2$$

que nous venons de trouver. Cette ordonnée ſera donc

$$y = a \cos \psi . \ 2 \log . \operatorname{cosec} \psi.$$

§. 82. Après les deux cas, que nous venons de conſidérer, nous paſſerons à contempler quelques uns de ceux où il ſe trouve un équi-

équilibre entre l'action de la gravité & celle du fluide, dont le mouvement tend à entrainer un corps qui s'y trouve. A l'exception des fontaines faillantes, il n'y a gueres de cas où un fluide se meuve de bas en haut dans une direction opposée à celle de la pesanteur. Dans ces cas l'équilibre aura lieu, lorsqu'il sera

$$CC = ag,$$

c'est à dire, là où la vitesse du fluide est la même que celle que la boule acquerroit en tombant dans ce fluide d'une hauteur infinie. Si donc on met sur le tuyau d'une fontaine qui jette ces eaux verticalement, une boule dont la pesanteur spécifique surpasse celle de l'eau, & dont le diametre est plus petit, ou du moins pas plus grand que celui de l'ouverture du tuyau, cette boule sera toujours poussée à une certaine hauteur, où elle restera comme suspendue en équilibre, & ce point sera là où il est

$$CC = ag.$$

Il est cependant possible, que ce point ne se trouve pas, & cela arrive toutes les fois que la vitesse initiale du fil d'eau n'est pas si grande que la vitesse C, ou la racine quarrée de ag.

§. 83. Si le mouvement du fluide est horizontal suivant la direction AB, & qu'on y suspende une boule plus pesante, B, à un fil BC, l'action du fluide empêchera la boule d'être dans une position inclinée BC, dans laquelle la boule restera en équilibre. Il y a longtems qu'on s'est servi de ce moyen pour déterminer la vitesse du fluide. Ainsi je ne rapporterai ce cas ici, que pour en exprimer les formules par les mêmes lettres dont je me suis servi dans les calculs exposés ci-dessus. Soit donc la vitesse du fluide $= c$, son action sur la boule sera $= ccdr^2 : a =$ BM. Mais la boule ne pouvant se mouvoir que dans une direction perpendiculaire au fil BC, nous résoudrons cette action en MP & PB. Faisant donc l'angle BCA $= \phi$, nous aurons l'action suivant MP $= ccdr^2 \cos\phi : a$. Au contraire l'action de la gravité est $= gdr^2 =$ BG, & elle doit Fig. 8.

 pa-

pareillement être résolue en GQ & QB. Il sera donc $GQ = g\,d\tau^2 \sin\Phi$. De là nous aurons, en posant $CB = 1$,

$$\frac{cc\,d\tau^2 \cos\Phi}{a} - g\,d\tau^2 \sin\Phi = dd\Phi.$$

Or, dans le cas de l'équilibre, nous avons $dd\Phi = 0$; il sera donc

$$cc = ag \operatorname{tang}\Phi = CC \operatorname{tang}\Phi.$$

Ce qui fait voir que, toutes les fois que l'angle Φ est de 45 degrés, la vitesse c est $= C$, & par conséquent la même que celle que la boule acquiert en tombant dans ce fluide d'une hauteur infinie.

§. 84. Si on veut se servir de ce moyen pour déterminer la vitesse du vent, il sera bon d'avoir égard à différentes circonstances qui peuvent en assurer le succès. Je remarque d'abord que la lettre a est variable, puisqu'elle dépend de la densité de l'air, de sorte qu'il est (§. 33.)

$$a = \tfrac{16}{3} r D.$$

Nous avons déjà vu ci-dessus comment la densité de l'air varie, & de quelle maniere il faut l'estimer, en employant le barometre & le thermometre. Mais, comme la lettre a dépend encore du diametre de la boule & de sa gravité spécifique, il convient de déterminer ces deux points, de façon que les angles Φ ne soient ni trop grands ni trop petits. Supposons, par exemple, que l'angle $\Phi = 45$ degrés doive répondre à la vitesse du vent de 100 pieds du Rhin, par seconde, quand la densité de l'air est 850 fois moins grande que celle de l'eau. Nous aurons donc pour ce cas $C = 100$, & partant

$$CC = ag = 10000$$

$$a = \frac{10000}{31\frac{1}{4}} = 320 \text{ pieds.}$$

Donc

$$320 = \tfrac{16}{3} r D$$

$$rD = 60 \text{ pieds.}$$

Moyen-

Moyennant cette équation, la gravité ſpécifique de la boule étant donnée, on en trouve le demi-diametre r. Suppoſons, par exemple, que la boule ſoit d'un bois leger, dont la gravité ſpécifique ne ſurpaſſe celle de l'air que 600 fois; nous aurons $r = \frac{60}{600} = \frac{1}{10}$ pieds. On diminuera ce demi-diametre en prenant une boule plus peſante ſpécifiquement, ou en ſe contentant d'une viteſſe C moins grande. Car on voit qu'il eſt en général

$$r = \frac{3CC}{16D}.$$

§. 85. Si, au lieu de la boule, on ne ſuſpend qu'une regle, ou un corps parallelepipede, l'effet de l'action du fluide ſe calcule autrement. Que le poids en ſoit $= P$, le poids d'un volume égal du fluide $= P: D$, l'épaiſſeur $= h$, & nous aurons (§. 31. 32.)

$$\frac{aP}{2hD} = P$$

$$a = 2hD$$

$$CC = ag = 2ghD.$$

§. 86. Enſuite l'action abſolue du fluide eſt également

$$MB = \frac{cc}{a} d\tau^2,$$

mais le plan BC étant oblique, cette action ſera moindre en raiſon du ſinus d'incidence, puisque la quantité du fluide diminue dans ce rapport. Cette action eſt encore moindre à cauſe de l'obliquité d'incidence qui en diminue l'efficace, de ſorte que nous avons

$$MP = \frac{cc\,d\tau^2}{a} . \operatorname{coſ}\phi^2,$$

& partant

$$MP - QG = \frac{cc\,d\tau^2 \operatorname{coſ}\phi^2}{a} - g\,d\tau^2 \operatorname{ſin}\phi = dd\phi.$$

 Or,

Or, pour le cas de l'équilibre, il eſt $dd\phi = 0$, donc il ſera

$$\frac{cc}{a} \operatorname{cof}\phi^2 = g \sin\phi.$$

$$cc = \frac{ag \sin\phi}{\operatorname{cof}\phi^2} = CC \operatorname{tang}\phi . \sec\phi.$$

§. 87. Si ce plan n'eſt point ſuſpendu ou voluble autour d'un point fixe C, le calcul ſe fait encore d'une autre maniere.
Fig. 9. Que le plan ſoit CE, la direction du mouvement du fluide AB, ſa viteſſe $= c$. Soit BN l'action du fluide, qui réſulteroit ſi ſon mouvement étoit perpendiculaire au plan; & il ſera

$$BN = \frac{cc}{a} d\tau^2.$$

Mais cette action eſt diminuée en raiſon de BN à MB, puisqu'un plan oblique eſt expoſé à une moindre quantité du fluide. Elle eſt encore diminuée dans le rapport de MB à MP, parce que l'obliquité d'incidence en diminue la force. Enfin cette action MP ſe réſout en PR & PQ, de ſorte qu'il n'y a que cette derniere qui s'oppoſe à celle de la gravité. Faiſant donc l'angle EBF $= \phi$, nous aurons

$$PQ = \frac{cc d\tau^2}{a} . \operatorname{cof}\phi^2 . \sin\phi.$$

Soit donc l'action de la gravité $=$ BG $= g d\tau^2$, & il ſera

$$\frac{cc}{a} . d\tau^2 . \operatorname{cof}\phi^2 . \sin\phi - g d\tau^2 = ddx.$$

Et dans le cas de l'équilibre, il eſt $ddx = 0$; donc

$$cc = ag : \operatorname{cof}\phi^2 \sin\phi.$$

Si donc la viteſſe du fluide eſt telle que le demande cette équation, le plan EC ne montera ni ne tombera, mais il ſera mu horizontalement avec une viteſſe qui eſt due à la partie de l'action du fluide $=$ PR $=$

$$\frac{cc}{a} d\tau^2 . \sin\phi^3.$$

§. 88.

§. 88. Cette derniere équation nous offre un *maximum.* Car, la lettre a dépendant du poids du plan, on peut la considérer comme variable. Il s'agit donc de définir les angles Φ, où ce poids peut être le plus grand possible, en gardant la même vitesse du fluide. Il est donc

$$a = \frac{cc}{g} . \sin \Phi (1 - \sin \Phi^2)$$

$$da = 0 = \frac{cc}{g} (d \sin \Phi - 3 \sin \Phi^2 . d \sin \Phi)$$

$$\sin \Phi^2 = \tfrac{1}{3}.$$

Mais il est en général

$$1 - 2 \sin \Phi^2 = \cos 2 \Phi :$$

donc il sera

$$\cos 2 \Phi = \tfrac{1}{3};$$

ce qui donne l'angle $\Phi = 70°, 32'$. Si donc l'angle EBF est de $70\frac{1}{2}$ degrés, le plan EC pourra avoir le plus grand poids possible. Mais, si le poids est moins grand, il est clair qu'on aura le choix de faire l'angle Φ plus grand ou plus petit que $70\frac{1}{2}$ degrés, & qu'on trouvera toujours un angle tel que le plan ne pourra ni tomber ni descendre. On n'aura pour cet effet qu'à résoudre l'équation

$$\sin \Phi - \sin \Phi^3 = \frac{ag}{cc} = \frac{CC}{cc},$$

& n'en retenir que les racines positives. C'est à dire qu'on fera

$$- \frac{3 CC \sqrt{3}}{2 cc} = \cos w,$$

& on aura les trois racines

$$\sin \Phi = \sqrt{\tfrac{4}{3}} . \cos \tfrac{1}{3} w$$

$$\sin \Phi' = \sqrt{\tfrac{4}{3}} . \cos (\tfrac{1}{3} w \pm 120°).$$

Entre ces trois racines il y en a toujours une qui eſt plus grande que 1, & qui par là même ne ſauroit avoir lieu, puisque les ſinus ne ſont jamais plus grands que le rayon. Or l'angle w eſt toujours plus grand que 90 degrés; donc $\frac{1}{3}w > 30°$, & $\frac{1}{3}w + 120° > 150$, de la $\operatorname{coſ}(\frac{1}{3}w + 120) > \sqrt{\frac{3}{4}}$. Ainſi la valeur de $\sqrt{\frac{4}{3}}.\operatorname{coſ}(\frac{1}{3}w + 120°)$ eſt non ſeulement négative, mais en même tems auſſi plus grande que le rayon. Les deux racines ſeront donc $\sqrt{\frac{4}{3}}.\ \operatorname{coſ}\frac{1}{3}w$, & $\sqrt{\frac{4}{3}}\operatorname{coſ}(\frac{1}{3}w - 120°)$. Du reſte il convient de remarquer, que tout ceci n'a lieu, que lorsque le plan EC n'a point encore reçu de mouvement. Car, dès qu'il ſe meut le calcul doit être fait autrement puisqu'il faudra conſidérer ce qui s'y trouve de rélatif.

Planche IV. Fig. 10. §. 89. Paſſons maintenant à conſidérer le cas où une boule, jettée obliquement dans un milieu réſiſtant, eſt expoſée en même tems à la réſiſtance du milieu & à l'action de la gravité. Soit CAB la courbe qu'elle parcourt, AD la droite verticale qui paſſe par le ſommet de cette courbe, EAQ la droite horizontale qui paſſe par le même ſommet A. Que la boule, après avoir paſſé par A, parvienne au point M, & que ſa viteſſe en M ſoit $= c$, de ſorte qu'avec cette viteſſe elle pourroit parcourir l'eſpace Mq dans le tems $d\tau$. Mais la réſiſtance la retardant, elle ne parvient qu'en π, & l'action de la gravité fait que réellement elle ſe trouve en m. Nommons

$$AP = x \qquad PQ = NM = dx$$
$$MP = y \qquad Nq = dy$$
$$\text{l'arc } AM = v \qquad Mm = dv$$
$$\text{l'angle } PMT = \Phi,$$

Faiſons encore la viteſſe horizontale $= k$, la viteſſe verticale $= q$, de ſorte qu'il ſoit

$$c\,d\tau = dv$$
$$k\,d\tau = dx$$
$$q\,d\tau = dy,$$

&

& il ſera

$$k^2 + q^2 = c^2$$
$$k = c \sin \phi$$
$$q = c \cos \phi.$$

§. 90. Ce qui étant poſé, il s'agit de déterminer la diminution des viteſſes c, k, q. Je remarque en conſéquence, que la viteſſe tangentielle c s'altere par la réſiſtance auſſi bien que par la gravité. Le premier effet ſera $= \frac{c\,dv}{a}$, parce qu'il eſt en raiſon de la viteſſe même & en celle de l'eſpace parcouru. Cet effet influe proportionellement ſur les viteſſes horizontale & verticale, de ſorte qu'il ſera pour la verticale $= \frac{q\,dv}{a} = \frac{c\,dy}{a}$, pour l'horizontale $= \frac{k\,dv}{a} = \frac{c\,dx}{a}$. Or la gravité agiſſant verticalement, elle n'altere point la viteſſe horizontale. Nous aurons donc

$$\frac{c\,dx}{a} = \frac{k\,dv}{a} = -\,dk.$$

ce qui donne

$$\frac{dv}{a} = -\,\frac{dk}{k}.$$

Nommant donc la viteſſe au ſommet A $=$ G, nous aurons l'intégrale

$$-\log \frac{k}{G} = \frac{v}{u}.$$

Si donc les parties de l'arc croiſſent en progreſſion arithmétique, les viteſſes horizontales décroiſſent en progreſſion géometrique, ou bien le logarithme de la viteſſe horizontale eſt toujours en raiſon de l'arc parcouru par la boule. Cette propoſition eſt fort analogue à celles que nous avons trouvées pour le mouvement horizontal & pour la chûte des corps dans un milieu réſiſtant (§. 10. 19. 20.)

§. 91.

§. 91. La gravité agiſſant verticalement, elle augmente la viteſſe verticale d'une partie $= g\,d\tau = g\,dy : q$. Il ſera donc

$$\frac{g\,dy}{q} - \frac{c\,dy}{a} = dq.$$

§. 92. Enfin, cet effet de la gravité étant $= \pi m$, il n'augmente l'arc parcouru que de la partie $\mu m = \pi m \cos\Phi$. Il ſera donc

$$\frac{g\,dy.\cos\Phi}{q} - \frac{c\,dv}{a} = dc.$$

§. 93. Mais il eſt

$$dy : q = dv : c;$$

donc en ſubſtituant il ſera

$$\frac{g\,dv}{c}\cos\Phi - \frac{c\,dv}{a} = dc,$$

& partant

$$\frac{dv}{ac} = \frac{d\tau}{a} = \frac{dc}{ag\cos\Phi - cc}.$$

§. 94. La formule du §. 91.

$$\frac{g\,dy}{q} - \frac{c\,dy}{a} = dq$$

donne pareillement

$$\frac{dy}{aq} = \frac{d\tau}{a} = \frac{dq}{ag - cq} = \frac{dq}{ag - cc\cos q}.$$

§. 95. Enfin nous aurons auſſi (§. 90.)

$$\frac{dv}{ac} = \frac{d\tau}{a} = -\frac{dk}{ck}.$$

de

de forte que le tems $d\tau$ s'exprime par les viteſſes de trois manieres différentes, en ce qu'il eſt

$$\frac{d\tau}{a} = -\frac{dk}{kc} = \frac{dc}{ag\,\mathrm{coſ}\,\phi - cc} = \frac{dq}{ag - cc\,.\,\mathrm{coſ}\,\phi}.$$

En comparant ces formules avec celles que nous avons trouvées pour le mouvement horizontal & pour la chûte des corps dans des milieux réſiſtans (§. 8. 15.) on trouvera aiſément de quelle maniere elles en différent. Elles ſont d'une même forme, mais plus embaraſſantes, puisqu'il s'y trouve, ou l'angle ϕ, ou deux des viteſſes c, k, q, à la fois; & c'eſt l'unique cauſe, qui les rend plus intraitables.

§. 96. Reprenons cependant l'équation

$$\frac{dc}{ag\,\mathrm{coſ}\,\phi - cc} = \frac{dq}{ag - cc\,.\,\mathrm{coſ}\,\phi},$$

& elle ſe transformera en

$$\frac{c\,dc}{ag\,\mathrm{coſ}\,\phi\,.\,c - c^3} = \frac{dq}{ag - cc\,\mathrm{coſ}\,\phi}.$$

Mais il eſt

$$c\,\mathrm{coſ}\,\phi = q;$$

donc il ſera

$$\frac{c\,dc}{agq - c^3} = \frac{dq}{ag - cq},$$

ce qui donne

$$ag\,(c\,dc - q\,dq) = qc^2\,dc - c^3 q.$$

Mais il eſt

$$c\,dc - q\,dq = k\,dk;$$

donc il ſera

$$agk\,dk = (q\,dc - c\,dq)\,cc,$$

ou bien

$$\frac{ag\,k\,dk}{ccqq} = \frac{q\,dc - c\,dq}{qq} = d\left(\frac{c}{q}\right).$$

 Mais

Mais il eſt

$$c : q = 1 : \operatorname{cof} \phi$$
$$1 : c = \operatorname{fin} \phi : k$$
$$1 : q = \operatorname{tang} \phi : k;$$

donc en ſubſtituant il ſera

$$\frac{ag\, k dk.\, \operatorname{fin} \phi^2 .\, \operatorname{tang} \phi^2}{k^4} = d\left(\frac{1}{\operatorname{cof} \phi}\right),$$

& partant

$$\frac{ag\, dk}{k^3} = \frac{\operatorname{cof} \phi^2}{\operatorname{fin} \phi^4}\, d\, \frac{1}{\operatorname{cof} \phi} = -\frac{d \operatorname{cof} \phi}{\operatorname{fin} \phi^4} = \frac{d\phi}{\operatorname{fin} \phi^3}$$
$$-\frac{ag dk}{k^3} = -\frac{d\phi}{\operatorname{fin} \phi^3},$$

dont l'intégrale eſt

$$\frac{ag}{kk} = \frac{\operatorname{cof} \phi}{\operatorname{fin} \phi^2} - \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \phi + \operatorname{conſt}.$$

La conſtante eſt $= ag : GG$, donc il ſera

$$\frac{k}{G} = \frac{C}{\sqrt{(C^2 + G^2 (\operatorname{cof} \phi : \operatorname{fin} \phi^2 - \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \phi))}},$$

ou bien

$$\frac{k}{G} = \frac{C : G}{\sqrt{(C^2 : G^2 + \operatorname{cof} \phi : \operatorname{fin} \phi^2 - \log.\, \operatorname{tang} \frac{1}{2} \phi)}}.$$

§. 97. Or la quantité $\operatorname{cof} \phi : \operatorname{fin} \phi^2 - \log. \operatorname{tang} \frac{1}{2} \phi$ eſt la longueur d'un arc parabolique, depuis le ſommet de la parabole jusqu'au point où elle s'incline vers ſon axe ſous un angle $= \phi$, & le parametre de cette parabole doit être pris $= 4$. Si on prend ſur cette parabole, de l'autre côté du ſommet, un arc $= C^2 : G^2$, on déterminera le point où l'inclinaiſon de la parabole vers ſon axe eſt la même que celle de l'aſymtote EF vers la verticale FAD, de ſorte qu'en qu'en comptant l'arc parabolique depuis ce point, & sa longueur jusqu'au point où son inclinaison est $= \Phi$, étant posée $= p$, on aura

$$\frac{k}{G} = C : G\sqrt{p}.$$

§. 98. Mais nous avons vu (§. 90.) qu'il est

$$-\log\frac{k}{G} = \frac{v}{a};$$

Donc, en substituant la valeur de k, il sera

$$\frac{v}{a} = \log\frac{G}{C} + \tfrac{1}{2}\log p.$$

Ayant construit une parabole cab, dont le parametre soit $= 4$, & dont l'axe ad soit parallele à AD, tirez une tangente fe parallele à l'asymtote FE, & une autre mt parallele à la tangente MT, & vous aurez

$$\frac{AM}{a} = \frac{v}{a} = \log.\text{arc.}\, eam - \log.\text{arc.}\, am = \log\frac{\text{arc.}\, eam}{\text{arc.}\, am}.$$

$$\frac{k}{G} = \frac{\sqrt{\text{arc.}\, am}}{\sqrt{\text{arc.}\, eam}}.$$

§. 99. Nous avons trouvé, qu'il est (§. 90. 96.)

$$\frac{c\,dx}{a} = -dk$$

$$\frac{ag\,dk}{k^3} = \frac{d\Phi}{\sin\Phi^3};$$

d'où il suit

$$\frac{gc\,dx}{k^3} = -\frac{d\Phi}{\sin\Phi^3}.$$

Mais il eſt

$$c = k : \text{ſin}\,\phi;$$

donc en ſubſtituant, il ſera

$$\frac{g\,dx}{k^2} = -\frac{d\phi}{\text{ſin}\,\phi^2} = d\cot\phi$$

$$g\,dx = k^2 . d\cot\phi.$$

Et de là

$$g\,dy = k^2 . \cot\phi . d\cot\phi$$

$$g\,dv = k^2 . \text{coſec}\,\phi . d\cot\phi$$

$$\frac{g\,dx}{k} = g\,d\tau = k . d\cot\phi.$$

Or la viteſſe horizontale étant donnée par une fonction de l'angle ϕ (§. 96.) on n'aura qu'à la ſubſtituer dans ces formules, pour avoir des équations différentielles entre x, y, τ & ϕ.

§. 100. Mais ces équations étant peu traitables, nous remarquerons que le parametre de la parabole cam étant poſé $= 4$, & l'angle $qmt = \phi$, il ſera

$$\tfrac{1}{2}\,ns = d\cot\phi$$

$$\tfrac{1}{2}\,mn = \cot\phi . d\cot\phi.$$

Nous avons de plus (§. 98.)

$$k = G\sqrt{\left(\frac{am}{eam}\right)}.$$

Donc, en ſubſtituant ces valeurs dans les formules du §. 99. il ſera

$$2g\,dx = G^2 . \frac{am}{eam} . ns$$

$$2g\,d\tau = G . \sqrt{\left(\frac{am}{eam}\right)} . ns$$

$$2g\,dy = G^2 . \frac{am}{eam} . mn$$

Et

Et par ces formules il ſera facile de conſtruire des lignes courbes, dont les eſpaces repréſentent les valeurs x, y, τ. Car les arcs am, eam, ſe déterminant par les angles ϕ, on n'aura qu'à faire les ordonnées

$$qi = G^2 . \frac{am}{eam}$$

$$qh = G\sqrt{\frac{am}{eam}}$$

$$\lambda l = G^2 . \frac{am}{eam},$$

& on aura les eſpaces des courbes conſtruites de cette façon

$$aIiq = 2gx$$
$$aHhq = 2g\tau$$
$$aLl\lambda = 2gy.$$

Ces trois courbes approchent d'autant plus des lignes droites paralleles à aq & $a\lambda$, moins la réſiſtance eſt grande; & ſi elle eſt $= 0$, on aura au lieu de ces courbes des droites paralleles à aq, $a\lambda$, dont par conſéquent les eſpaces ſont proportionels aux ordonnées & aux abſciſſes de la parabole eam, ce qui veut dire que la route de la boule ſera parabolique.

§. 101. Lorsque l'abſciſſe $a\lambda$ commence à être extrémement grande, la longueur de l'arc am ne différera plus beaucoup de $a\lambda$, & par conſéquent il croîtra à très peu près en raiſon du quarré de l'ordonnée $\lambda m = aq$. Ainſi l'ordonnée qi decroît encore plus fortement qu'en raiſon réciproque de l'abſciſſe aq. Il s'enſuit que l'eſpace $aIiq$, que nous avons trouvé être égal à $2gx$ a une grandeur finie, quand même on prend l'abſciſſe aq infinie. Nous pouvons conclure de là, que la courbe CAM a non ſeulement l'aſymtote oblique EF, mais que ſon autre branche AB a encore une asymtote, dont la position est verticale. Car x ne devient pas un *maximum* à moins qu'il ne soit $\phi = 0$.

§. 102. N'y ayant pas moyen de trouver des formules intégrales finies pour les quantités x, y, t, j'ai essayé de les exprimer par des suites infinies, dont du moins chaque terme pourroit être exprimé par des logarithmes ou par des fonctions circulaires. Je n'ai pu réussir que pour les abscisses x. Voici de quelle façon je m'y suis pris.

§. 103. Nommons la cotangente de l'angle $\phi = z$, & nous aurons

$$\text{cotang}\,\phi = z$$

$$-d\phi = \frac{dz}{1 + zz}$$

$$\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{(1 + zz)}},$$

& partant (§. 96.)

$$-\frac{ag\,dk}{k^3} = -\frac{d\phi}{\sin\phi^3} = dz.\sqrt{(1 + zz)}$$

$$\frac{ag}{k^2} = 2\int dz\sqrt{(1 + zz)} + \text{const.}$$

ce qui donne (§. 96.)

$$\frac{k}{G} = \frac{C : G}{\sqrt{(C^2 : G^2 + 2\int dz\sqrt{(1 + zz)})}}.$$

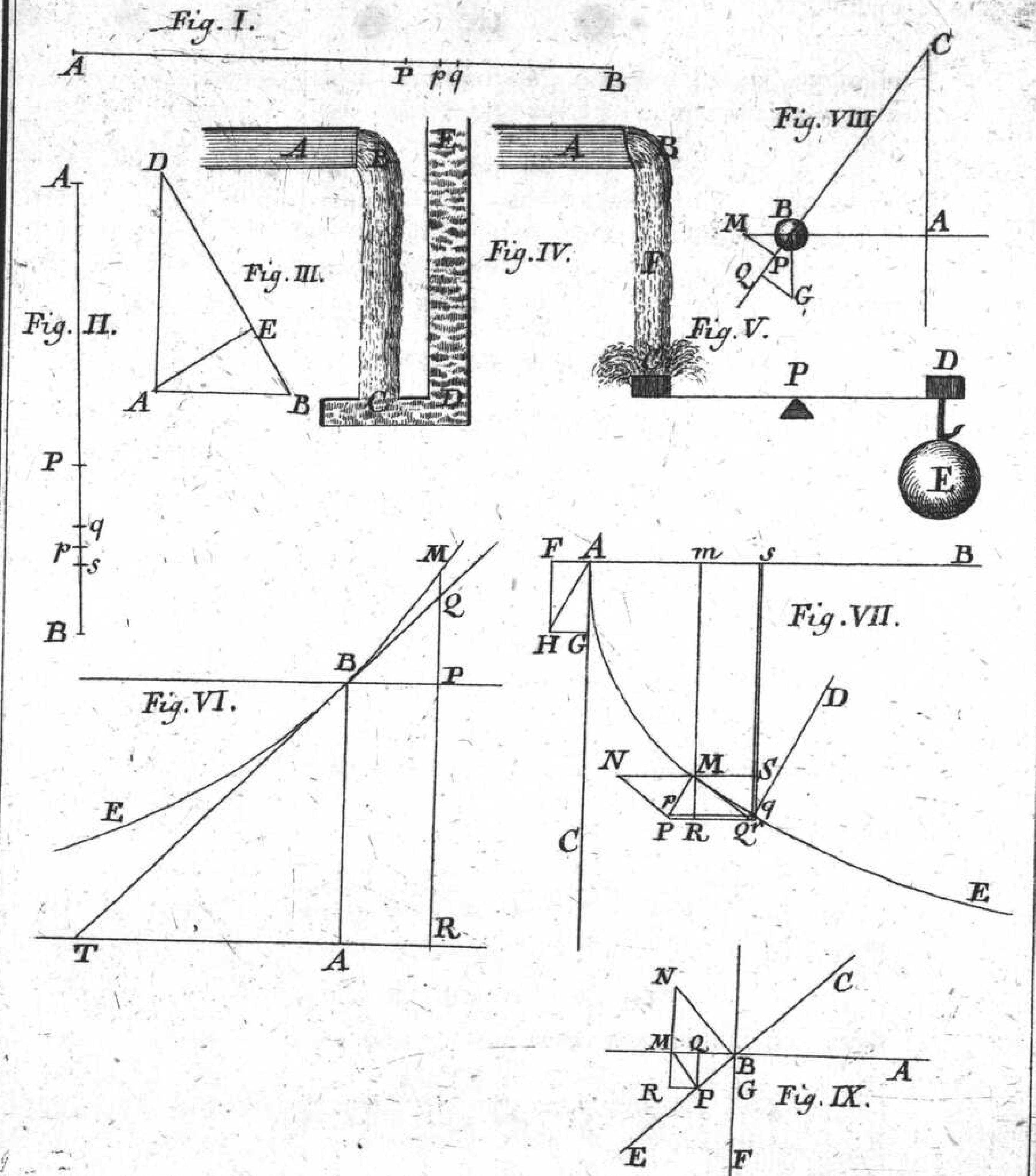
Mais il est (§. 99.)

$$g\,dx = k^2\,d\cot\phi = k^2\,dz;$$

donc, en substituant la valeur de k, il sera

$$g\,dx = \frac{CC\,dz}{C^2 : G^2 + 2\int dz\sqrt{(1 + zz)}}.$$

Cette



Mem. de l'Acad. Tome XXI. 1765. Pl. III pag. 166.

Cette fraction étant résolue en une série, on aura

$$\frac{g\,dx}{GG} = dz - \frac{2G^2}{C^2}\,dz\int dz\sqrt{(1+zz)} + \frac{4G^4}{C^4}\,dz\left(\int dz\sqrt{(1+zz)}\right)^2$$
$$- \frac{8G^6}{C^6}\,dz\left(\int dz\sqrt{(1+zz)}\right)^3 + \&c.$$

Or nommant les intégrales de chaque terme P, Q, R, S, &c. & faisant $\int dz\sqrt{(1+zz)} = r$, & $\sqrt{(1+zz)} = s$, on aura

$$P = z$$
$$Q = zr - \tfrac{1}{3}s^3$$
$$R = zr^2 - \tfrac{2}{3}s^3r + \tfrac{2}{3}z + \tfrac{4}{9}z^3 + \tfrac{2}{15}z^5$$
$$S = zr^3 - \tfrac{3}{3}s^3r^2 + 2\left(z + \tfrac{2}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5\right)r - \left(\tfrac{16}{45}s^3 + \tfrac{8}{75}s^5 + \tfrac{2}{35}s^7\right)$$
$$T = zr^4 - \tfrac{4}{3}s^3r^3 + 4\left(z + \tfrac{2}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5\right)r^2 - \left(\tfrac{64}{45}s^3 + \tfrac{32}{75}s^5 + \tfrac{8}{35}s^7\right)r$$
$$+ 8\left(\tfrac{103}{525}z + \tfrac{992}{4725}z^3 + \tfrac{802}{7875}z^5 + \tfrac{88}{3675}z^7 + \tfrac{1}{315}z^9\right).$$

Et il sera

$$\text{Conſt.} + \frac{gx}{GG} = P - \frac{2G^2}{C^2}.Q + \frac{4G^4}{C^4}.R - \frac{8G^6}{C^6}.S + \frac{16.G^8}{C^8}\,T - \&c.$$

Dans cette ſuite les lettres P, Q, R, S, T, &c. dépendent uniquement de l'angle ϕ, & par conſéquent elles ſont tout à fait indépendantes des viteſſes & de la réſiſtance du milieu. Nous voyons de là, que les abſciſſes x s'expriment par une ſuite qui procede ſuivant les dimenſions paires des viteſſes. Il faut encore remarquer, que lorsqu'on veut avoir les abſciſſes x pour la branche AC, il faut prendre tous les termes de cette ſuite négatifs. Enfin, ſi on compte les abſciſſes depuis le ſommet A, il faut que x devienne $= 0$, lorsque $z = 0$, & par là on détermine la conſtante, qui ſera donc

$$\text{conſt.} = \frac{2G^2}{3C^2} + \frac{8.326}{525}\cdot\frac{G^6}{C^6} + \&c.$$

Du

Du reste, la suite que nous venons de trouver n'est convergente, qu'à moins que l'angle ϕ soit plus grand que l'angle AFE.

§. 104. On trouvera de la même maniere une suite assez semblable pour le tems τ. Car il est (§. 99. 103.)

$$g\,d\tau = k\,d\cot\phi = k\,dz$$

$$\frac{k}{G} = \frac{C : G}{\sqrt{(C^2 : G^2 + 2\int dz \sqrt{(1+zz)})}}.$$

Donc, en substituant cette valeur de k, on aura

$$\frac{g\,d\tau}{G} = \frac{C\,dz : G}{\sqrt{(C^2 : G^2 + 2\int dz \sqrt{(1+zz)})}}.$$

Cette formule étant résolue en une suite donnera

$$\frac{g\,d\tau}{G} = dz - \frac{2\,G^2}{2\,C^2}\,dz\int dz \sqrt{(1+zz)} + \frac{4.3\,G^4}{2.4\,C^4}.\,dz\left[\int dz \sqrt{(1+zz)}\right]^2$$
$$- \frac{8.3.5.G^6}{2.4.6\,C^6}.\,dz\left[\int dz \sqrt{(1+zz)}\right]^3 + \&c.$$

dont l'intégrale est

$$\text{Const.} + \frac{g\tau}{G} = P - \frac{2\,G^2}{2\,C^2}.Q + \frac{4.3.G^4}{2.4\,C^4}.R - \frac{8.3.5.G^6}{2.4.6.C^6}.S$$
$$+ \frac{16.3.5.7.G^8}{2.4.6.8.C^8}.T - \&c.$$

On peut faire sur cette série les mêmes remarques comme sur celle qui exprime les abscisses x. Les Lettres P, Q, R, S, T, &c. ont la même valeur, la constante se détermine de la même maniere, & elle est convergente sous la même condition &c. Mais, en comparant l'une & l'autre suite, on voit que si la fraction G : C est si petite, que

que l'on puiſſe omettre le troiſieme terme & les ſuivans, on aura à très peu près

$$\frac{g\tau}{G} + \frac{gx}{GG} = \frac{G^2}{2C^2} \cdot Q.$$

Mais x: G exprime le tems dans lequel l'eſpace x pourroit être parcouru avec la viteſſe G. Faiſant donc ce tems $= t$, on aura

$$\frac{g}{G}(\tau - t) = \frac{G^2}{2C^2} \cdot Q.$$

§. 105. La ſuite différentielle qu'on pourroit trouver de la même maniere pour l'élément dy, puisqu'il eſt

$$dy = z\,dx$$

n'offre point de termes intégrables. Et comme en général ces ſuites ne ſont convergentes que pour de certains cas, je ne m'y arrêterai pas plus longtems, d'autant qu'elles n'expriment les quantités x, τ, y, que par l'angle Φ ou par ſes fonctions, & qu'elles ne pourroient conduire que d'une maniere extrémement prolixe & indirecte, à déterminer le rapport entre les ordonnées y & les abſciſſes x, qu'il s'agit de chercher.

§. 106. Nous avons trouvé (§. 99.)

$$g\,dv = k^2 . \operatorname{coſec}\Phi . d\cot\Phi.$$

Mais il eſt

$$-d\cot\Phi = d\Phi . \operatorname{coſec}\Phi^2.$$

Donc il ſera

$$-g\,dv = k^2 . \operatorname{coſec}\Phi^3 . d\Phi,$$

& partant

$$-\frac{dv}{d\Phi} = \frac{k^2 \operatorname{coſec}\Phi^3}{g}.$$

Mais

Mais $dv : d\Phi$ eſt le rayon de courbure, que nous nommerons R. Il ſera donc

$$R = \frac{k^2 \operatorname{cosec} \Phi^3}{g} = \frac{c^2 . \operatorname{cosec} \Phi}{g} = \frac{CC . \operatorname{cosec} \Phi^3}{g . eam} = \frac{GG e^{-2v:a}}{g . \sin \Phi^3}.$$

Et nommant le rayon de courbure de la parabole eam au point m, $= \varrho$, nous aurons

$$R = \frac{CC}{2g} . \frac{\varrho}{eam}.$$

Car le parametre de cette parabole étant $= 4$, & l'angle $qmt = \Phi$, le rayon de courbure répondant au petit arc ms ſera $= 2 \operatorname{cosec} \Phi^3$. Et ſi la viteſſe au point m eſt $= c$, ce rayon de courbure ſera pareillement $= \frac{c^2 \operatorname{cosec} \Phi}{g}$. Ainſi le rayon de courbure au point M ne dépend que de la viteſſe c & de l'angle Φ, & par conſéquent il eſt le même, quelle que ſoit la réſiſtance du milieu. J'en conclus, que la courbe CAM peut être conſidérée comme compoſée de petits arcs de paraboles, dont le parametre change continuellement. Cette circonſtance fait voir, qu'on peut exprimer les ordonnées y par une ſuite qui procede ſuivant les dimenſions des abſciſſes. Voyons donc de quelle maniere nous la déterminerons.

§. 107. En ſuppoſant les différentielles des abſciſſes dx conſtantes, les différentielles dy croîtront d'une quantité qui eſt due à l'action de la gravité, de ſorte qu'il ſera

$$ddy = g d\tau^2.$$

Mais il eſt

$$dx^2 = k^2 d\tau^2 :$$

donc nous aurons

$$dx^2 : ddy = k^2 : g,$$

&

& partant

$$-\frac{d^3y}{d^2y}=\frac{2\,dk}{k}=-\frac{2\,dv}{a}.$$

§. 108. Soit donc la suite

$$y=\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\mu x^5+\varrho x^6+\sigma x^7+\upsilon x^8+\&c.$$

& nous aurons

$$dy=(2\gamma x+3\delta x^2+4\varepsilon x^3+5\mu x^4+6\varrho x^5+7\sigma x^6+8\upsilon x^7+\&c.)\,dx$$

$$ddy=(2\gamma+6\delta x+12\varepsilon x^2+20\mu x^3+30\varrho x^4+42\sigma x^5+56\upsilon x^6+\&c.)\,dx^2$$

$$dddy=\quad(6\delta+24\varepsilon x+60\mu x^2+120\varrho x^3+210\sigma x^4+336\upsilon x^5+\&c.)\,dx^2$$

$$\begin{aligned}\frac{dv^2}{dx^2}=1+4\gamma^2x^2+12\gamma\delta x^3&+16\varepsilon\gamma x^4+20\mu\gamma x^5+24\varrho\gamma x^6+28\sigma\gamma x^7+\&c.\\ &+9\delta\delta\,..+24\delta\varepsilon\,..+30\delta\mu\,..+36\delta\varrho\,..\\ &\qquad\qquad+16\varepsilon\varepsilon\,..+40\varepsilon\mu\,..\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dx}=1+2\gamma^2x^2+6\gamma\delta x^3&+8\gamma\varepsilon x^4+10\gamma\mu x^5+12\gamma\varrho x^6+\&c.\\ &+\tfrac{9}{2}\delta\delta\,..+12\delta\varepsilon\,..+15\delta\mu\,..\\ &-2\gamma^4\,..-12\gamma^3\delta\,..+8\varepsilon\varepsilon\,..\\ &\qquad\qquad\qquad-27\gamma^2\delta^2\,..\\ &\qquad\qquad\qquad-16\gamma^3\varepsilon\,..\\ &\qquad\qquad\qquad+4\gamma^6\,..\end{aligned}$$

Mais il eſt (§. 107.)

$$\tfrac{1}{2}a\,d^3y=ddy.\;dv.$$

Donc,

Donc, en multipliant les deux ſuites trouvées pour ddy & dv, & égalant le produit à la ſuite $\frac{1}{2} a d^3 y$, on aura

$$\left\{\begin{array}{llllllll}
= & 3\delta a & +12\varepsilon ax & +30\mu ax^2 & +60\varrho ax^3 & +105\sigma ax^4 & +168\upsilon ax^5 & +252\eta ax^6 \\
= & 2\gamma & +6\delta\,.. & +12\varepsilon\,.. & +20\mu & +30\varrho\,.. & +42\sigma\,.. & +56\upsilon\,.. \\
 & & & +4\gamma^3\,.. & +12\gamma^2\delta\,.. & +24\gamma^2\varepsilon\,.. & +40\gamma^2\mu\,.. & +60\gamma^2\varrho\,.. \\
 & & & & & +36\gamma\delta^2\,.. & +72\gamma\delta\varepsilon\,.. & +120\gamma\delta\mu\,.. \\
 & & & & & +16\gamma^2\varepsilon\,.. & +48\gamma\delta\varepsilon\,.. & +96\gamma\varepsilon^2\,.. \\
 & & & & & +9\gamma\delta^2\,.. & +27\delta^3\,.. & +54\varepsilon\delta^2\,.. \\
 & & & & & -4\gamma^5\,.. & -12\gamma^4\delta\,.. & -24\gamma^4\varepsilon\,.. \\
 & & & & & & +20\gamma^2\mu\,.. & +60\gamma\mu\delta\,.. \\
 & & & & & & +24\gamma\delta\varepsilon\,.. & +72\varepsilon\delta^2\,.. \\
 & & & & & & -24\gamma^4\delta\,.. & -72\gamma^3\delta^2\,.. \\
 & & & & & & & +24\gamma^2\varrho\,.. \\
 & & & & & & & +30\gamma\delta\mu\,.. \\
 & & & & & & & +16\gamma\varepsilon^2\,.. \\
 & & & & & & & -54\gamma^3\delta^2\,.. \\
 & & & & & & & -32\gamma^4\varepsilon\,.. \\
 & & & & & & & +8\gamma^7\,..
\end{array}\right.$$

§. 109.

§. 109. En comparant donc les termes, on aura

$$\delta = \frac{2\gamma}{3a}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2a} = \frac{\gamma}{3a^2}$$

$$\mu = \frac{2\varepsilon}{5a} + \frac{2\gamma^3}{15a} = \frac{2\gamma}{15a^3} + \frac{2\gamma^3}{15a}$$

$$\varrho = \frac{\mu}{3a} + \frac{2\gamma^2\delta}{5a} = \frac{2\gamma}{45a^4} + \frac{14\gamma^3}{45a^2}$$

$$\sigma = \frac{2\varrho}{7a} + \frac{8\gamma^2\varepsilon}{21a} + \frac{3\gamma\delta^2}{7a} - \frac{4\gamma^5}{105a} = \frac{4\gamma}{315a^5} + \frac{128\gamma^3}{315a^3} - \frac{4\gamma^5}{105a}$$

$$\upsilon = \frac{\sigma}{4a} + \frac{5\gamma^2\mu}{14a} + \frac{6\gamma\delta\varepsilon}{7a} + \frac{9\delta^3}{56a} - \frac{3\gamma^4\delta}{14a} = \frac{\gamma}{315a^6} + \frac{122\gamma^3}{315a^4} - \frac{11\gamma^5}{105a^2}$$

$$\eta = \frac{2\upsilon}{9a} + \frac{\gamma^2\varrho}{3a} + \frac{5\gamma\delta\mu}{6a} + \frac{4\gamma\varepsilon^2}{9a} + \frac{\varepsilon\delta^2}{2a} - \frac{2\gamma^4\varepsilon}{9a} - \frac{\gamma^3\delta^2}{2a} + \frac{2\gamma^7}{63a}$$

$$= \frac{2\gamma}{9.315.a^7} + \frac{11.32.\gamma^3}{945.a^5} - \frac{134\gamma^5}{945a^3} + \frac{2\gamma^7}{63a}.$$

&c.

§. 110. Le coëfficient γ, qui entre dans toutes les valeurs des autres, se détermine par les deux équations (§. 107.)

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{g}{k^2}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = 2\gamma + 6\delta x + 12\varepsilon x^2 + 20\mu x^3 + \text{\&c.}$$

 Car,

Car, en poſant $x = 0$, il doit être $k = G$: donc il ſera

$$g : GG = 2\gamma$$
$$\gamma = \frac{g}{2GG}.$$

§. 111. En conſidérant ces coëfficiens tels que nous venons de les déterminer, on voit qu'ils procédent ſuivant les dimenſions impaires de γ & ſuivant les dimenſions alternativement paires & impaires de a. Cette circonſtance fait, que nous pourrons les exprimer d'une maniere plus conciſe, en y ſubſtituant d'autres lettres. Faiſons pour cet effet

$$2x : a = \xi$$
$$2y : a = \eta$$
$$\gamma = m : a$$

de ſorte qu'il ſoit

$$2m = \frac{ag}{GG} = \frac{CC}{GG}.$$

Et toutes les ſubſtitutions & réductions faites, nous aurons la ſuite

$$\eta = \frac{m\xi^2}{2} + \frac{m}{2.3}\xi^3 + \frac{m}{2.3.4}\xi^4 + \frac{m}{2.3.4.5}\xi^5 + \frac{m.\ \xi^6}{2.3.4.5.6}$$
$$+ \frac{m^3}{2.3.4.5}\xi^5 + \frac{7m^3.\ \xi^6}{2.3.4.5.6}$$
$$+ \frac{m\ \xi^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{m\ \xi^8}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{m.\ \xi^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} + \&c.$$
$$+ \frac{4.8.m^3.\xi^7}{2.3.4.5.6.7} + \frac{2.61.m^3\ \xi^8}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{11.24.m^3.\xi^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} + \&c.$$
$$- \frac{3.m^5\ \xi^7}{2.3.4.5.6.7} - \frac{3.11.m^5\ \xi^8}{2.3.4.5.6.7.8} - \frac{3.67.m^5.\xi^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} + \&c.$$
$$+ \frac{5.9.m^7.\xi^9}{2.3.4.5.6.7.8.9} + \&c.$$

§. 112.

§. 112. Cette ſuite eſt aſſez remarquable. Nous voyons que la premiere ligne, qui n'eſt affectée que de m, eſt la même ſuite que celle qui exprime le nombre par ſon logarithme, & que pour la completter, on n'a qu'à y joindre les deux premiers termes. Nous aurons donc, en faiſant

$$Y = \eta + m + m\xi,$$

$$Y = me^{\xi} + \left(\frac{m^3\,\xi^5}{2.3.4.5} + \frac{7.m^3.\xi^6}{2.3.4.5.6} + \frac{4.8.m^3.\xi^7}{2.3.4.5.6.7} + \&c.\right)$$

$$- \frac{3.m^5.\xi^7}{2.3.4.5.6.7} + \&c.\Big)$$

§. 113. Or, en faiſant $\xi = 0$, il eſt $\eta = 0$, & partant $Y = m$. Enſuite le terme ξ étant également multiplié par m, il s'enſuit que m eſt la tangente d'un angle, & nommément de celui d'une aſymtote logarithmique dont l'équation eſt

$$s = me^{\xi},$$

& qui par conſéquent a une poſition oblique, de ſorte qu'elle reſſemble à la courbe AE de la ſeptieme figure, que nous avons déterminée ci-deſſus (§. 80.). Mais cette aſymtote n'eſt pas celle de la courbe CAB. Car puisqu'il eſt (§. 111.)

$$2m = \frac{CC}{GG},$$

& que, l'angle AFE étant fait $= \psi$, il doit être (§. 96.)

$$\frac{CC}{GG} - \cos\psi : \sin\psi^2 - \log.\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\psi = 0,$$

il s'enſuit, qu'il eſt

$$2m = \frac{\cos\psi}{\sin\psi^2} - \log.\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\psi,$$

&

& que partant le parametre de la parabole cab reſtant $= 4$, (§. 97.) il eſt

$$2m = \text{arc. } ae.$$

Mais l'arc $\frac{1}{2}ae$ n'eſt égal à la tangente de l'angle fep que dans un ſeul cas; donc ce n'eſt auſſi que dans un ſeul cas que l'aſymtote FE a la même poſition, ou la même inclinaiſon que l'aſymtote de la logarithmique, qu'exprime l'équation $s = me^x$.

§. 114. La ſuite que nous venons de trouver, ne commence à différer d'une ſuite logarithmique que dans la cinquieme dimenſion de l'abſciſſe ξ, où il s'y joint encore un *appendix*, dont on ne connoit point la loi de la progreſſion des coëfficiens. On y voit les multiplicateurs 61, 67, &c. qui ſont nombres premiers, & par là même les plus intraitables de tous. Mais, quoiqu'il en ſoit, c'eſt un avantage pour la pratique que cet *appendix* ne commence que dans la cinquieme dimenſion de ξ. Car l'équation

$$\xi = 2x : a$$

nous fait voir, que ξ eſt preſque toujours une fraction aſſez petite, à moins qu'on ne veuille déterminer des points de la courbe CAB, qui ſont très proches des aſymtotes. Cette opportunité fait, qu'on peut preſque toujours omettre les termes ξ^5, & les ſuivants, d'autant que leurs diviſeurs ſont conſidérablement grands.

§. 115. Je remarquerai encore, que la ſuite telle que nous venons de la trouver eſt pour la branche de la courbe par laquelle le corps deſcend. Pour l'appliquer à l'autre branche, par laquelle le corps monte, on n'a qu'à prendre l'abſciſſe ξ négative.

§. 116. Mais, comme il eſt aſſez ordinaire, qu'on ne calcule que ces cas où le corps retombe au niveau de l'endroit d'où il a été jetté, il ſera plus convenable d'exprimer les abſciſſes ξ par les ordonnées η. Faiſons pour cet effet

$$2\eta : m = i^2 = 4y : am.$$

Et

Et prenons la ſuite

$$\xi = i + ai^2 + bi^3 + ci^4 + di^5 + ei^6 + \&c.$$

les coëfficiens a, b, c, d, &c. ſe déterminent en ſubſtituant cette valeur de ξ dans la ſuite du §. 111. & en égalant les termes. Par là on trouvera

$$a = -\tfrac{1}{6}$$
$$b = +\tfrac{1}{36}$$
$$c = -\tfrac{1}{270} - \frac{m^2}{120}$$
$$d = +\tfrac{1}{4320}$$
$$e = +\tfrac{1}{17010} + \frac{m^2}{7560} + \frac{m^4}{1680}$$
&c.

& partant

$$\xi = i - \tfrac{1}{6}i^2 + \tfrac{1}{36}i^3 - \tfrac{1}{270}i^4 + \tfrac{1}{4320}i^5 + \tfrac{1}{17010}i^6 + \&c.$$
$$- \frac{mm}{120}i^4 \qquad\qquad + \frac{m^2}{7560}i^6$$
$$+ \frac{m^4}{1680}i^6$$

§. 117. Cette ſuite eſt pareillement fort convergente. Elle donne la valeur de ξ pour la branche par laquelle le corps deſcend, & pour l'autre branche il faut prendre i négative, ce qui peut ſe faire, parce que i eſt la racine quarrée de $4y : am$. On aura donc

$$\xi' = -i - \tfrac{1}{6}i^2 - \tfrac{1}{36}i^3 - \tfrac{1}{270}i^4 - \&c.$$
$$- \frac{mm}{120}i^4$$

Car cette abſciſſe ſe comptant en arriere, elle eſt par elle-même négative.

§. 118. Quand on ne cherche que le jet horizontal, ou la ſomme des deux abſciſſes ξ, ξ', la ſuite ſe réduit à la moitié des termes, & nous aurons

$$\xi + \xi' = 2i + \tfrac{1}{18} i^3 + \tfrac{1}{2160} i^5 + \&c.$$

§. 119. Mais, quelque convergentes que ſoient ces ſuites, elles ne ſervent que d'une maniere fort vague à calculer le jet horizontal, ſans nous indiquer directement les angles que fait la courbe avec les droites verticales ou horizontales. Je vais donc en chercher une autre, qui dépende de l'angle d'élevation ſous lequel le corps eſt jetté.

Fig. 11. §. 120. Soit cet angle QAP, la ligne horizontale AB, la courbe que le mobile parcourt AMB. Tirons une ordonnée verticale quelconque QMP, & nommons

$$\mathrm{AP} = x$$
$$\mathrm{PM} = y.$$

Exprimons le rapport entre x & y par la ſuite

$$y = \beta x - \gamma x^2 - \delta x^3 - \varepsilon x^4 - \mu x^5 - \&c.$$

les deux premiers coëfficiens ſe détermineront aiſément. Car β ſera la tangente de l'angle d'élévation QAP, de ſorte qu'il ſera

$$\beta = \text{tang QAP}.$$

Et γ ſe définit par la viteſſe horizontale en A, que nous nommerons K Car ſi l'on prend l'abſciſſe x infiniment petite, la quantité $x : \mathrm{K}$ dénotera le petit tems que le mobile employeroit à la parcourir, & le ſecond terme $\gamma x x$ marquera l'eſpace par lequel le corps tomberoit dans le même tems. Nous aurons donc, conformément aux loix de la peſanteur,

$$15\tfrac{5}{8} \cdot \frac{xx}{\mathrm{KK}} = \gamma x x,$$

&

& partant

$$\gamma = \frac{1000}{64\,KK} = \frac{g}{2\,KK} \quad (\S.\ 14.)$$

§. 121. Ces deux coëfficiens devoient être déterminés d'avance parce que tous les autres en dépendent. Afin donc de les déterminer, nous nous ſervirons de l'équation trouvée ci-deſſus (§. 107.)

$$\frac{d^3 y}{2\,d^2 y} = \frac{dv}{a}.$$

Car il ſera, en prenant les différentielles, & en poſant dx conſtante:

$$\begin{aligned}
dy &= dx(\beta - 2\gamma x - 3\delta x^2 - 4\varepsilon x^3 - 5\mu x^4 - \&c.)\\
-\,ddy &= dx^2(2\gamma + 6\delta x + 12\varepsilon x^2 + 20\mu x^3 + \&c.)\\
-\,d^3 y &= dx^3(6\delta + 24\varepsilon x + 60\mu x^2 + \&c.)
\end{aligned}$$

D'où l'on aura

$$\begin{aligned}
\frac{d^3 y}{2\,d^2 y} = dx\Big(\frac{3\delta}{2\gamma} &+ \frac{6\varepsilon}{\gamma}.\,x + \frac{15\mu}{\gamma}\,x^2 + \frac{30\,\rho}{\gamma}\,x^3 + \&c.\Big)\\
&- \frac{9\,\delta\delta}{2\gamma\gamma}\,.. + \frac{27\,\delta\varepsilon}{\gamma\gamma}\,.. - \frac{90\,\mu\delta}{\gamma\gamma}\,..\\
&\qquad\qquad + \frac{27\,\delta^3}{2\gamma^3}\,.. - \frac{36.\,\varepsilon\varepsilon}{\gamma\gamma}\,..\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{108.\,\varepsilon\delta\delta}{\gamma^3}\,..\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{81.\,\delta^4}{\gamma^4}\,..
\end{aligned}$$

Et en posant $1 + \beta\beta = \alpha\alpha$, il sera $\alpha = \sec QAP$, &

$$\frac{dv}{a} = dx\left(\frac{\alpha}{a} - \frac{2\gamma\beta}{\alpha a}x - \frac{3\beta\delta}{\alpha a}x^2 - \frac{4\beta\varepsilon}{\alpha a}x^3 - \&c.\right)$$

$$+ \frac{2\gamma\gamma}{\alpha a}\ldots + \frac{6\gamma\delta}{\alpha a}\ldots$$

$$- \frac{2\gamma^2\beta^2}{\alpha^3 a}\ldots + \frac{6\gamma\beta^2\delta}{\alpha^3 a}\ldots$$

$$+ \frac{4\gamma^3\beta}{\alpha^3 a}\ldots$$

$$- \frac{4\gamma^3\beta^3}{\alpha^5 a}\ldots$$

Egalant donc les termes de ces deux suites, on aura

$\frac{\alpha}{a} = \frac{3\delta}{2\gamma}$ ce qui donne $\delta = \frac{2\alpha\gamma}{3a}$.

$-\frac{2\gamma\beta}{\alpha a} = \frac{6\varepsilon}{\gamma} - \frac{9\delta\delta}{2\gamma\gamma}$ ce qui donne $\varepsilon = \frac{\alpha\alpha\gamma}{3aa} - \frac{\gamma\gamma\beta}{3\alpha a}$.

$\mu = \frac{2\alpha^3\gamma}{15a^3} - \frac{8.\gamma\gamma\beta}{15.aa} + \frac{2\gamma^3}{15\alpha a} - \frac{2\gamma^3\beta^2}{15a\alpha^3}$.

&c.

§. 122. Ces valeurs étant ſubſtituées, nous aurons

$$\begin{array}{rl} y = \beta x - \gamma x^2 - \dfrac{2\alpha\gamma}{3a}x^3 - \dfrac{\alpha\alpha\gamma}{3aa}x^4 & - \dfrac{2\alpha^3\gamma}{15a^3}x^5 - \&c. \\ + \dfrac{\gamma^2\beta}{3.a\alpha} \dots & + \dfrac{8\gamma\gamma\beta}{15aa} \dots \\ & - \dfrac{2\gamma^3}{15\alpha a} \dots \\ & + \dfrac{2\gamma^3\beta^2}{15a\alpha^3} \dots \end{array}$$

Dans cette ſuite il eſt (§. 120. 121.)

$$\beta = \text{tang}\, QAP$$
$$\alpha = \text{ſec.}\, QAP$$
$$\gamma = \frac{1000}{64.\,KK}.$$

Et par là on voit, que le premier terme de cette ſuite ne dépend que de l'angle d'élévation QAP, le ſecond de la viteſſe horizontale en A & de la gravité, & que les autres dépendent des deux premiers & de la réſiſtance du milieu, puisque la lettre a entre dans la détermination des coëfficiens.

§. 123. Nommons maintenant la viteſſe tangentielle en A $=$ V, l'abſciſſe AQ $= w$, l'angle d'élévation QAP $= \omega$, & nous aurons

$$x = w.\,\text{coſin}\,\omega$$
$$K = V.\,\text{coſin}\,\omega$$
$$\gamma = \frac{1000.\,\text{ſec}\,\omega^2}{64.\,VV} = \frac{g\,\text{ſec}\,\omega^2}{2\,VV}$$
$$\beta x = w.\,\text{ſin}\,\omega.$$

 Donc,

Donc, en ſubſtituant ces valeurs, il ſera

$$y = w.\,\text{ſin}\,\omega - \frac{g.\,w^2}{2\,V^2} - \frac{w^3 g}{3\,aV^2} - \frac{g\,w^4}{6\,a^2\,V^2} - \frac{g\,w^5}{15\,V^2\,a^3} - \&c.$$
$$- \frac{g^2\,w^4\,\text{ſin}\,\omega}{12\,a\,V^4} + \frac{2\,gg\,w^5\,\text{ſin}\,\omega}{15\,V^4\,a^2}$$
$$- \frac{g^3\,w^5\,\text{coſ}\,\omega^2}{60\,a\,V^6}$$

Voilà donc la ſuite qu'il s'agiſſoit de trouver, & qui exprime l'ordonnée PM par l'abſciſſe AQ, la viteſſe initiale V, l'angle d'élévation ω, la gravité g & l'effet de la réſiſtance a.

§. 124. Mais, pour comparer cette ſuite à celle que nous avions trouvée ci-deſſus (§. 111.) nous ferons des ſubſtitutions tout à fait analogues. Nommons donc

$$\frac{2\,w}{a} = \xi$$

$$\frac{2\,y}{a} = \eta$$

$$\frac{g}{VV} = \frac{2\,m}{a}.$$

Ces valeurs étant ſubſtituées, nous aurons

$$\eta = \xi\,\text{ſin}\,\omega - \frac{m\,\xi^2}{2} - \frac{m.\,\xi^3}{2.3} - \frac{m\,\xi^4}{2.3.4} - \frac{m\,\xi^5}{2.3.4.5} - \&c.$$
$$+ \frac{m^2.\,\xi^4\,\text{ſin}\,\omega}{2.3.4} + \frac{2.\text{ſin}\,\omega.m^2\,\xi^5}{2.3.4.5}$$
$$- \frac{\text{coſ}.\omega^2.\,m^3\,\xi^5}{2.3.4.5}$$

D'où

D'où l'on voit qu'on n'aura qu'à faire $\omega = 0$, pour que cette ſuite ſe change en celle du §. 111, & que ce n'eſt que cet angle qui la rend plus compliquée. En effet on voit ici, que cet *appendix* dont nous avons parlé au §. 114. commence à la quatrieme dimenſion de ξ, mais qu'il en diſparoit, dès qu'on fait $\omega = 0$.

§. 125. Cherchons maintenant la corde horizontale AB. L'ordonnée au point B étant $= 0$, nous aurons

$$0 = \sin\omega - \frac{m\xi}{2} - \frac{m\xi^2}{2.3} - \frac{m\xi^3}{2.3.4} - \frac{m\xi^4}{2.3.4.5} - \&c.$$
$$+ \frac{m^2 \sin\omega\, \xi^3}{2.3.4} + \frac{2\sin\omega . m^2 \xi^4}{2.3.4.5}$$
$$- \frac{\cos\omega^2 . m^3 \xi^4}{2.3.4.5}$$

De là en faiſant

$$\frac{2\sin\omega}{m} = \zeta,$$

il ſera

$$\zeta = \xi + \frac{\xi^2}{3} + \frac{\xi^3}{3.4} + \frac{\xi^4}{3.4.5} + \&c.$$
$$- \frac{m . \sin\omega . \xi^3}{3.4} - \frac{2\sin\omega . m\xi^4}{3.4.5}$$
$$+ \frac{\cos\omega^2 . m^2 \xi^4}{3.4.5}.$$

Soit donc la ſuite

$$\xi = \zeta + a\zeta^2 + b\zeta^3 + c\zeta^4 + \&c.;$$

&

& en ſubſtituant cette valeur dans la ſuite précédente, il ſera

$$
\begin{array}{llllll}
\zeta = \zeta & + a\zeta^2 & + b\zeta^3 & + c\zeta^4 & + & \&c. \\
 & + \frac{1}{3}\zeta^2 & + \frac{2}{3}a\zeta^3 & + \frac{2}{3}b\zeta^4 & & \\
 & & & + \frac{1}{3}a^2\zeta^4 & & \\
 & & + \frac{1}{12}\zeta^3 & + \frac{1}{4}a\zeta^4 & & \\
 & & - \frac{m \sin \omega . \zeta^3}{12} & - \frac{m\, a \sin \omega\, \zeta^4}{4} & & \\
 & & & + \frac{1}{60} . \zeta^4 & & \\
 & & & - \frac{1}{30} . m \sin \omega . \zeta^4 & & \\
 & & & + \frac{1}{60} . m^2 \cos \omega^2 . \zeta^4 & &
\end{array}
$$

Or les termes étant égaux à zéro, il ſera

$$o = a + \tfrac{1}{3}, \text{ ce qui donne } a = -\tfrac{1}{3},$$

$$b = \tfrac{2}{9} - \tfrac{1}{12} + \frac{m \sin \omega}{12} = \tfrac{5}{36} + \tfrac{1}{12} m \sin \omega$$

$$c = \tfrac{17}{270} - \tfrac{19}{180} m \sin \omega - \tfrac{1}{60} m^2 . \cos \omega^2 .$$

&c.

& partant

$$
\begin{array}{lllll}
\xi = \zeta - \frac{1}{3}\zeta^2 & + \frac{5}{36}\zeta^3 & + \frac{17}{270} . \zeta^4 & - \&c. \\
 & + \frac{1}{12} m \sin \omega . \zeta^3 & - \frac{19}{180} m \sin \omega\, \zeta^4 & \\
 & & - \frac{1}{60} m^2 \cos \omega^2\, \zeta^4 &
\end{array}
$$

Cette ſuite eſt fort peu convergente. Car, puiſqu'il eſt

$$\zeta = \frac{2 \sin \omega}{m} = \frac{4VV. \sin \omega}{ag} = \frac{4VV \sin \omega}{CC},$$

il

il faut que la viteſſe initiale V ſoit conſidérablement plus petite que C, ou que l'angle d'élévation ne ſoit que de quelques degrés. Elle ſera donc principalement applicable aux coups de canon, qui ſe tirent presque horizontalement. Mais, ſi le canon eſt abſolument horizontal, cette ſuite donne $\xi = 0$, puisqu'en effet alors la corde AB eſt $= 0$.

§. 126. Lorsqu'il ne s'agit que de conſtruire la courbe, ou d'en calculer autant de points qu'il en faut pour une conſtruction fort exacte, la ſuite trouvée au §. 124. pourra être employée de maniere qu'elle ſera très convergente en tous les cas. On prendra d'abord une abſciſſe initiale $AQ = \xi$, qui ſoit aſſez petite pour qu'on n'ait beſoin que des premiers termes de la ſuite du §. 124. Or, l'angle $QAP = \omega$ étant donné, on trouvera l'ordonnée $PM = \eta$. Enſuite on prendra une ſeconde abſciſſe ſur la tangente qM, & il eſt clair qu'on trouvera également l'ordonnée mp, en employant l'angle qMp, & la viteſſe de la boule en M. Cet angle ſe trouve en ce qu'il eſt

$$d\eta : d(\xi . \cos\omega) = \text{tang.}\ qMp.$$

En prenant donc les différences, il ſera

$$\text{tang}\,qMp = \frac{d\eta}{d\xi . \cos\omega} = \text{tang}\,\omega - \frac{m\xi}{\cos\omega} - \frac{m\xi^2}{2\cos\omega} - \frac{m\xi^3}{2.3.\cos\omega} - \frac{m\xi^4}{2.3.4.\cos\omega} - \&c.$$
$$+ \frac{m^2\xi^3\,\text{tang}\,\omega}{2.3} + \frac{2m^2\xi^4\,\text{tang}\,\omega}{2.3.4}$$
$$- \frac{m^3.\cos\omega.\xi^4}{2.3.4}.$$

On appliquera pareillement en m une nouvelle tangente, & ayant trouvé l'angle qu'elle fait avec l'horizon, on déterminera un troiſieme point de cette courbe. On voit aiſément qu'il convient de prendre toutes les abſciſſes égales, puisque de cette maniere on n'aura d'autres ſubſtitutions à faire que celles des angles, & des valeurs de m.

§. 127. Comme dans cette façon de procéder on à le choix de prendre les abſciſſes auſſi petites que l'on voudra, il ſera bon de les prendre aſſez petites pour que dans les deux ſuites qu'il faut employer (§. 124. 126.) les termes multipliés par m^2, m^3, &c. puiſſent être omis, de ſorte qu'on puiſſe faire

$$\eta = \xi . \sin\omega - \frac{m\xi^2}{2} - \frac{m\xi^3}{2.3} - \frac{m\xi^4}{2.3.4} - \&c.$$

$$\operatorname{tang} qMp = \operatorname{tang}\omega - \frac{m}{\cos\omega}\left(\xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{2.3} + \&c.\right)$$

Car de cette maniere, en faiſant $\log e = 1$, nous aurons

$$\eta = \xi \sin\omega + m + m\xi - m e^{\xi}.$$

$$\operatorname{tang} qMp = \operatorname{tang}\omega + \frac{m}{\cos\omega} - \frac{m}{\cos\omega} . e^{\xi} = \operatorname{tang}\omega + \sec\omega . m(1 - e^{\xi}).$$

§. 128. La valeur de m étant (§. 124.)

$$m = \frac{ag}{2VV} = \frac{CC}{2VV}.$$

on voit qu'elle dépend des viteſſes, & que par conſéquent elle varie d'un point de la courbe à l'autre. Mais elle ſe trouve aiſément par les angles, moyennant la derniere équation du §. 96. Car, faiſant l'arc parabolique

$$p = \frac{\cos\Phi}{\sin\Phi^2} - \log.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\Phi = \operatorname{tang}\omega . \sec\omega + \log.\operatorname{tang}(45° + \tfrac{1}{2}\omega),$$

on

on aura pour la branche AG, par laquelle le corps monte

$$\frac{K}{G} = \frac{C : G}{\sqrt{(C^2 : G^2 - p)}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{C^2}{K^2} = \frac{C^2}{G^2} - p.$$

Mais il eſt

$$K = V. \operatorname{coſ} \omega.$$

Donc, en ſubſtituant

$$\frac{C^2}{V^2}. \operatorname{ſec} \omega^2 = \frac{C^2}{G^2} - p,$$

& partant

$$m = \frac{\operatorname{coſ} \omega^2}{2} \left(\frac{C^2}{G^2} - p\right),$$

de ſorte que la viteſſe G étant donnée, ou trouvée par la viteſſe initiale, on trouvera la lettre m moyennant les angles.

§. 129. Sous la même condition on trouvera facilement le tems que le corps a employé pour parcourir chacun de ces petits arcs. Car il eſt en général

$$-ddy = g d\tau^2.$$

Or nous avons (§. 127. 124.)

$$\eta = \frac{2y}{a} = m + (\operatorname{ſin} \omega + m)\xi - m e^{\xi};$$

donc

$$\frac{2dy}{a} = (\operatorname{ſin} \omega + m) d\xi - m e^{\xi} d\xi$$

$$\frac{2ddy}{a} = - m e^{\xi} d\xi^2 = - \frac{2 g d\tau^2}{a},$$

& en prenant les racines quarrées,

$$d\tau = V\left(\frac{ma}{2g}\right) . e^{\xi:2} d\xi$$

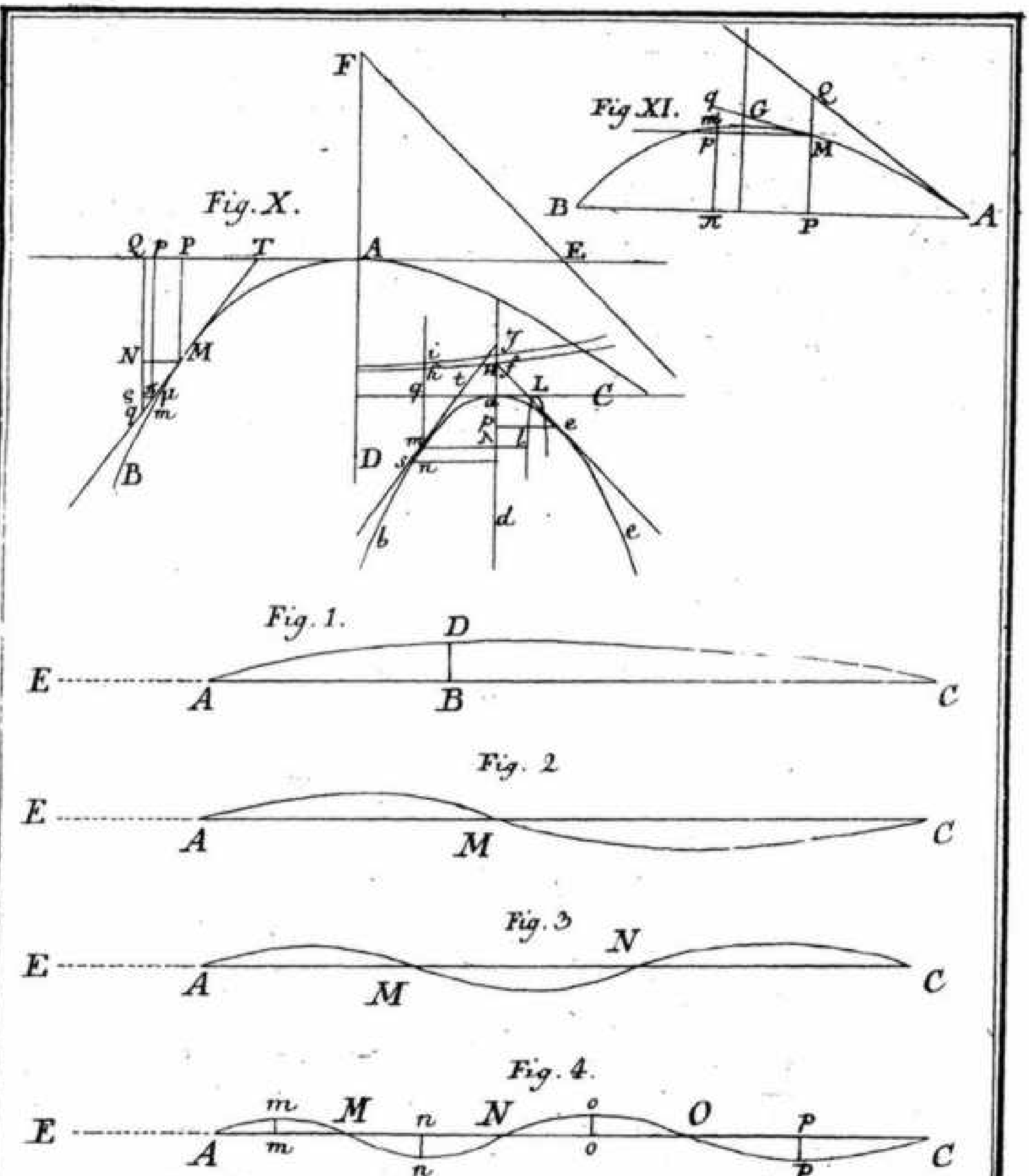
dont l'intégrale eſt

$$\tau = V\frac{2ma}{g} . (e^{\xi:2} - 1) = \frac{a}{V}(e^{\xi:2} - 1).$$

§. 130. Mais, ſi ſans omettre les termes multipliés par m (§. 127.) on veut employer l'expreſſion générale du tems τ, on trouvera de la même maniere, qu'il eſt

$$\tau = \frac{a}{2V}\left(\xi + \frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^3}{24} + \frac{\xi^4}{192} + \&c.\right.$$
$$+ \frac{m \text{ ſin } \omega . \xi^3}{12} - \frac{m \text{ ſin } \omega . \xi^4}{96}$$
$$\left. + \frac{m^2 \text{ coſ } \omega^2 \xi^4}{48}\right).$$

MÉMOI-



Mem. de l'Acad. Tome XXI. 1765 Pl. IV pag. 306.