LES PROPRIETÉS REMARQUABLES DE LA ROUTE DE LA LUMIERE, PAR LES AIRS

ET EN GENERAL

PAR

PLUSIEURS MILIEUX REFRINGENS SPHERIQUES ET CONCENTRIQUES, AVEC LA SOLUTION

DES

PROBLÈMES,

QUI Y ONT DU RAPPORT, COMME SONT LES REFRACTIONS ASTRONOMIQUES ET TERRESTRES, ET CE QUI EN DEPEND.

PAR

J. H. LAMBERT.

A LA HAYE
Chez H. SCHEURLEER, F. Z. & Compagnie,
M. DCC. LVIII.

REMARQUES
SUR
L'OPTIQUE
SERVANT
D'AVANT-PROPOS.

L'Optique, prise dans toute son étenduë, comprend deux parties assez différentes l'une de l'autre. La premiere considere les routes de la lumiere & les phénomênes qui en dépendent. Elle embrasse l'Optique en particulier, la Catoptrique, la Dioptrique, & la Perspective. Ces Sciences ont eté portées à un si haut point de perfection, qu'on n'y trouve presque plus qu'à glaner. Les effets de la vuë etoient trop intéressants, pour qu'on ne s'appliquât à les examiner dès la naissance des Sciences. Fondées, comme elles sont, sur peu de principes également simples & universels, on ne pouvoit qu'y faire des progrès. La Géométrie & l'Analise fournirent abondamment les moïens nécessaires pour resoudre les questions, dès qu'on étoit parvenu à se les proposer.

Le seul cas, qui sembloit encore moins examiné, c'est celui, où la lumiere passe successivement par plusieurs milieux sphériques & concentriques. J'ai essaïé dans ce traité de suppléer à ce défaut. On y verra, que ce Cas n'est ni si compliqué, ni si difficile, qu'il paroit du premier abord, & qu'il y a moïen d'aller plus loin qu'on n'a eté. On ſait qu'il exiſte dans l'Athmoſphere, & que les refractions des Aſtres & des objets terreſtres en dépendent. Ce ſeul point ſuffit, pour le rendre intéreſſant & digne de la peine, que les plus grands Géometres ſe ſont donnée, pour le déterminer dans cette vuë. J'ai abandonné le chemin, qu'ils avoient battu, parceque je n'ai pas vu, qu'il les ait menés au but. Il me ſembloit qu'on ne pouvoit y parvenir, que par des détours. Je reculai donc, & m'arrêtois pour le découvrir.

On ne me reprochera pas, que j'aïe fait entierement abſtraction de la denſité de l'air. Tout ce que j'y aurois gagné, ce ſeroit d'avoir eu une equation différentielle pour une autre, ſans en avoir eté plus avancé. Par contre en l'omettant, mon traité eſt purement optique & mathématique, c'eſt à dire, démonſtratif. En admettant les denſités, il auroit tenu à des hypotheſes Phyſiques: la différence eſt ſenſible.

Voici tout ce que j'avois à dire préalablement ſur ce petit ouvrage. En y joignant ſa lecture, on ſe trouvera en état d'y ajouter le reſte.

L'autre partie de l'Optique, dont j'ai principalement deſſein de parler, c'eſt la *Photométrie*. Elle s'occupe de l'eclat de la lumiere, de ſa denſité, de ſa force illuminante, de ſes modifications dans les couleurs & dans l'ombre, de ſes degrés, des accroiſſemens & diminutions qu'elle ſouffre dans tous les cas. Si la pre-

premiere partie de l'optique a eté d'un ſecours infini, pour corriger les défauts de la vuë, pour rectifier les jugemens des yeux, pour démêler les aparences d'avec la vérité, pour nous faire connoitre des mondes, que la nature ſembloit avoir voulu nous cacher, en les eloignant au-delà de la portée de notre vuë, ou en les rendant imperceptibles par leur petiteſſe, il faut dire, que notre connoiſſance de la lumiere elle-même n'en a pas eté fort perfectionnée. La Photométrie y contribue infiniment plus. Qui veut imaginer une théorie de la lumiere, il ne lui ſuffira pas, de ſavoir qu'elle ſe reflechit & ſe briſe ſuivant une certaine loi: mais il lui importera, d'en pouvoir déduire la quantité de l'une & de l'autre conformement aux expériences.

La Photométrie n'eſt pas un païs entierement inculte. Des ſavans fort célebres y ont travaillé. Mr. Bouguer en a donné un tres bel Eſſai ſur la Gradation de la lumiere. Il la fait paſſer par pluſieurs vitres, par l'eau, par l'athmoſphere. Il en cherche l'affoibliſſement. Il s'en ſert pour la célebre expérience ſur la comparaiſon de la Clarté du Soleil & de la Pleine-Lune. Mr. Euler a encore donné nouvellement une Diſſertation ſur les différens degrés de la lumiere des Aſtres; & on trouve, dans pluſieurs Optiques, des recherches, qui ont du rapport à la Photométrie, & en particulier dans celle de Mrs. Smith & Kaeſtner.

Tous ces Eſſais ſont des parties détachées d'un tout, dont il paroit qu'on eſt encore fort eloigné. Auſſi n'en doit-on pas être ſurpris. Rien de plus difficile, que la meſure de la lumiere, lorſqu'on veut la pourſuivre dans toutes ſes modifications & dans tous les phénomênes qu'elle nous offre. Si les principes pour trouver les routes de la lumiere étoient aiſés & ſimples, ſi les bords de l'ombre, ou des raïons attenués, qui entroient dans une chambre obſcure, les marquoient viſiblement, il s'en faut de beaucoup, que ceux, dont on a beſoin pour la Photométrie le ſoient auſſi. Il arrive rarement ou jamais, qu'on les voïe ſeuls, & il faut nombre d'expériences, pour les dégager des circonſtances accidentelles, dans lesquelles ils ſont toujours envelopés.

Cette ſcience nous manquant donc preſque entierement, & etant d'ailleurs fort curieuſe, je me propoſe d'en donner un eſſai au public, lequel, ſans être complet, ne laiſſera pas d'être aſſez détaillé.

On y trouvera la ſuite d'expériences, qu'il m'avoit fallu faire pour déterminer la quantité de la lumiere reflechie & briſée ſur la ſurface extérieure & intérieure du verre, ſous chaque obliquité d'incidence. J'ai taché, d'un autre côté, d'y appliquer un Calcul, que les expériences ne démentiſſent point. On ſait que c'eſt juſtement ce qui reſtoit de plus inexplicable dans la théorie de la lumiere, & on pouvoit croire avec quelque droit qu'une théorie, qui expliqueroit ce phénomêne, & qui fourniroit les principes pour les calculs, ne pouvoit qu'être extrêmement aprochante de la véritable. J'applique ces mêmes Expépériences à plusieurs verres, & par-là j'obtiens, pour chaque angle d'incidence, ce que Mr. Bouguer avoit cherché pour les angles droits. Je traite de la diminution de la lumiere, qui passe par l'athmosphere, sans avoir besoin de quelque hypothese Physique. On y trouvera la théorie de l'intensité de la lumiere directe, & la clarté des objets illuminés, comparée à celle de la lumiere qui les illumine, la clarté des images dans les foïers d'un verre caustique comparée à celle des objets mêmes, par théorie & par expérience, en faisant entrer dans le calcul la quantité de lumiere que les surfaces du verre reflechissent. L'Illumination du systême planétaire, & la clarté des planêtes & de leurs phases vues de la terre, leur force illuminante, &c. Cette théorie n'est point du tout une copie de celle de Mr. Euler. Elle part de principes différens & plus détaillés, & répond parfaitement à l'expérience de Mr. Bouguer pour la Clarté de la Lune comparée à celle du Soleil, que le calcul de Mr. Euler donna plus petite contre son attente, & que Mr. Smith trouva plus grande par le sien. Les différens degrés de l'ombre, & leur mesure. Des instrumens pour déterminer le degré de la Clarté des couleurs & de leur mélange. La Clarté des objets en tant qu'elle dépend de la variation de l'ouverture de la pupille, &c.

Voici quelques sujets, que je traite dans ma Photométrie, simplement indiqués. Pour donner quelque idée du tout, je dirai que, quant aux matieres, que l'on trouve déja dans d'autres livres, ce que j'en dirai, en differera comme le present traité differe de ce que d'autres Auteurs ont trouvé fur les refractions astronomiques; & que pour celles, qui font toutes nouvelles, ne trouvant à les comparer qu'aux expériences, il suffira de dire qu'elles auront leur suffrage.

LES
PROPRIETES REMARQUABLES
DE LA ROUTE
DE LA LUMIERE.

SECTION I.

Les Propriétés générales de la route, que la lumiere prend, en passant par des milieux refringens, sphériques & concentriques.

EXPERIENCE I.

§. 1. Lorsque la lumiere passe d'un milieu dans un autre plus ou moins dense, elle se brise sur la surface, & le rapport des sinus de l'angle d'inclinaison & de l'angle brisé pour les mêmes milieux, est constant, quelque soit l'angle d'inclinaison.

EXPERIENCE II.

§. 2. Si la lumiere passe successivement par plusieurs milieux, dont les surfaces soient planes & paralleles, le rapport entre les sinus de l'angle d'inclinaison sur le premier milieu & de l'angle brisé à la derniere surface est le même, qui auroit lieu, si elle passoit immédiatement du premier milieu au dernier.

REMARQUE.

§. 3. Ces deux Expériences sont trop connues pour m'y arrêter plus long-tems. Je ne les allegue ici, que parcequ'elles serviront seules de base à ce qui sera démontré dans la suite.

La premiere en particulier est le fondement de toute la Dioptrique, & on n'a pas manqué d'en chercher plusieurs démonstrations. Je me suis borné à ne les exposer ici, que comme de simples expériences. La seconde paroit dépendre de la premiere, & quelque démonstration qu'on donne de celle-ci, on en déduira toujours l'autre aussi.

Théorême I.

Fig. 1. §. 4. *Si la lumiere passe successivement par plusieurs milieux refringens, le rapport entre le sinus du premier angle d'inclinaison & celui du dernier angle brisé est la somme des rapports des angles intermédiaires.*

Demonstration.

Soient BH, LJ, MK, NE les surfaces des milieux refringens planes & paralleles, ABCDEF un raïon de lumiere brisé successivement en B, C, D, E. Or pour ces quatre refractions on aura les quatre rapports suivans

fin. GBA : fin. CBL
fin. HCB : fin. DCM
fin. JDC : fin. EDN
fin. KED : fin. FEP

Dont la somme sera
(fin. GBA. fin. HCB. fin. JDC. fin. KED):
(fin. CBL. fin. DCM. fin. EDN. fin. FEP).
Mais à cause du parallelisme des surfaces, on aura

$$HCB = CBL$$
$$JDC = DCM$$
$$KED = EDN$$

donc en substituant ces Valeurs, la somme des rapports se change en (fin. GBA. fin. HCB. fin. JDC. fin. KED): (fin. HCB. fin. JDC. fin. KED. fin. FEP) & partant en fin. GBA: fin. FEP.

Co-

Corollaire.

§. 5. Par la seconde Expérience (§. 2.) le rapport sin. GBA : sin. FEP est le même, qui auroit lieu, si la lumiere passoit immédiatement du milieu A dans le milieu F. D'où il suit, que si la lumiere passe successivement par différens milieux refringens, dont les surfaces soient planes & paralleles entre elles, la somme des rapports entre les sinus des angles d'inclinaison & des angles brisés est égale au rapport des sinus des mêmes angles, lorsque la lumiere passe immédiatement du premier milieu dans le dernier.

Lemme I.

§. 6. *Soient* AB, BC, CD, DE, EF, FG *les côtés d'un poligone quelconque, dont les deux extrêmes* AB, GF *étant prolongés se rencontrent en* Q. *Soient tirées d'un point quelconque* H *les droites* HA, HB, HC, HD, HE, HF, HG, HQ: *je dis que le rapport du produit des sinus des angles extérieurs* HFG, HEF, HDE, HCD, HBC *au produit des sinus des angles intérieurs* HFE, HED, HDC, HCB, HBA *sera le même que le rapport du sinus de l'angle* HQG *au sinus de l'angle* HQA. Fig. 2.

Démonstration.

Prolongez les côtés jusqu'à ce qu'ils rencontrent les perpendiculaires, que vous y tirerez du point H, & posant le raion = 1, vous aurez

sin.

$$\left\{\begin{array}{l}\text{ſin. } HFG = \frac{HP}{HF}\\ \text{ſin. } HEF = \frac{HN}{HE}\\ \text{ſin. } HDE = \frac{HM}{HD}\\ \text{ſin. } HCD = \frac{HL}{HC}\\ \text{ſin. } HBD = \frac{HK}{HB}\end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l}\text{ſin. } HFE = \frac{HN}{HF}\\ \text{ſin. } HED = \frac{HM}{HE}\\ \text{ſin. } HDC = \frac{HL}{HD}\\ \text{ſin. } HCB = \frac{HK}{HC}\\ \text{ſin. } HBA = \frac{HJ}{HB}\end{array}\right\}$$

& partant le rapport du produit des premiers au produit des derniers ſera $= HP : HJ$: parceque non ſeulement les dénominateurs, mais auſſi les numérateurs intermédiaires s'entredétruiſent. Mais le rapport entre le ſin. de $HQG = \frac{HP}{HQ}$ & le ſin. de $HQA = \frac{HJ}{HQ}$ ſera de même $= HP : HJ$. par conſéquent il eſt egal à celui des produits.

Corollaire I.

§. 7. Le ſinus d'un angle quelconque etant auſſi le ſinus de ſon complement à deux droits, il s'enſuit, que le Lemme, que l'on vient de démontrer, auroit auſſi pu être enoncé de la maniere ſuivante.

Le produit des ſinus des angles ABH, BCH, CDH, DEH, EFH, *eſt au produit des angles* KBH, LCH, MDH, NEH, PFH, *comme le ſinus de l'angle* HQJ *au ſinus de l'angle* HQP, *ou ſimplement comme la droite* HJ *à la droite* HP.

Co-

COROLLAIRE II.

§. 8. Si l'on ſuppoſe, que tous les côtés du poligone ſoient infiniment petits, il ſe changera en une ligne courbe, dont PG, JA ſeront des tangentes, & HP, HJ des perpendiculaires à ces tangentes.

REMARQUE.

§. 9. Il ſeroit ſuperflu de démontrer, que l'angle PQJ eſt la ſomme de tous les angles PFE, NED, MDC, LCB, KBA & egal à l'angle JHP.

THÉORÊME II.

§. 10. *Si du point* H *comme d'un Centre on tire des arcs de Cercle par les points* A, B, C, D, E, F, G. *&* *qu'on ſuppoſe les eſpaces entre ces arcs remplis de matieres diaphanes & diverſement refringentes, & qu'un raïon de lumiere y paſſant de* G *en* A *ſoit ſucceſſivement briſé aux points* F, E, D, C, B. *je dis que le produit des ſinus de tous les angles d'inclinaiſon ſera au produit des ſinus de tous les angles briſés, comme* HP *à* HJ.

DEMONSTRATION.

Les angles d'inclinaiſon ſont egaux à leurs oppoſés PFH, NEH, MDH, LCH, KBH. & les angles briſés ſont EFH, DEH, CDH, BCH, ABH. Le reſte de la démonſtration n'eſt qu'une application du I. Coroll. du I. Lemme (§. 7.)

Co-

Corollaire.

§ 11. Donc la somme des rapports des sinus des angles d'inclinaison aux sinus des angles brisés, est la même que le rapport de HP à HJ, ou du sinus de l'angle HQP au sinus de l'angle HQJ.

Remarque.

§. 12. On sait assez que, pour additionner des rapports, il faut multiplier les termes, & prendre le rapport de leur produit, & que réciproquement la soustraction des rapports se fait par la division. C'est ce que j'observe ici, afin de faire entrevoir l'Identité de l'enoncé du Théorême & de son Corollaire, & pour le comparer au Corollaire du Théorême I. (§. 5)

Théorême III.

§. 13. *Le rapport du sinus de l'angle* HQP *au sinus de l'angle* HQI *est le même, qui est entre le sinus de l'angle d'inclinaison & celui de l'angle brisé, lorsque la lumiere passe immédiatement d'un milieu extrême dans l'autre, c'est à dire, du milieu* G *dans le milieu* A.

Démonstration.

Le rapport du sinus de l'angle HQP au sinus de l'angle HQI est egal à la somme des rapports des sinus de tous les angles d'inclinaison aux sinus des angles brisés sur les surfaces des milieux (§. 10.) Mais cette somme des rapports est egale au rapport des sinus de l'angle d'inclinaison & de l'angle brisé, lorsque la lumiere passe immédiatement du premier milieu dans le dernier (§. 5.) donc le rapport du sinus de l'angle HQP au sinus de de l'angle H Q J eſt le même, que celui entre le ſinus d'inclinaiſon & celui de l'angle briſé, lorſque la lumiere paſſe d'un milieu extrême dans l'autre.

Théorême IV.

§. 14. *Si au lieu de tous les milieux* A B C D E F G *il n'y avoit que les deux extrêmes* A B *&* F G, *dont le premier ſeroit répandu par tout l'eſpace entre le cercle* A *& entre celui qu'on tirera du Centre* H *par le point* Q, *& que l'autre rempliroit l'eſpace entre le cercle décrit par le point* Q *& le cercle* G: *je dis*, *que la lumiere incidente en* G *ſuivant la direction* G Q *ſeroit briſée en* Q, *& qu'en continuant ſa route par* Q A *elle parviendroit en* A, *tout de même que lorſqu'elle paſſoit par les différens milieux* A B C D E F G, *ſuivant les directions* G F E D C B A.

Démonstration.

Car comme dans le cas de ce Théorême il n'y a que les milieux extrêmes, qui ſe touchent au cercle tiré par Q, il eſt evident que la Lumiere paſſera immédiatement d'un milieu extrême dans l'autre, & que les milieux etant d'une refrangibilité différente, il ſe fera une refraction en Q, où les ſurfaces ſe touchent. L'angle d'inclinaiſon ſera egal à ſon oppoſé P Q H, & le ſinus de l'angle briſé ſera au ſinus de l'angle P Q H comme le ſinus de l'angle J Q H au ſinus du même angle P Q H, (§. 12.) & partant l'angle J Q H ſera le même que l'angle briſé. Donc la Lumiere prendra la route Q J. Mais Q J eſt le côté A B. prolongé (§. 6.) par conſéquent la Lumiere paſſera par le point A, par lequel elle paſſa auſſi dans le cas, où elle parcouroit les différens milieux A B C D E F G. Donc &c.

Théo-

Théorème V.

§. 15. *La refraction dans l'un & l'autre Cas du Théorème précedent est la même.*

Démonstration.

La refraction est l'angle, que fait la direction de la lumiere incidente prolongée avec la direction de la lumiere brisée. Or dans l'un & l'autre cas la direction de la lumiere incidente est GQ prolongée en P, & celle de la lumiere brisée est QAJ, par conséquent la même, & la refraction sera l'angle PQA.

Remarque I.

§. 16. Moïennant ces deux derniers Théorèmes la somme de toutes les refractions, que la lumiere souffre aux surfaces F, E, D, C, B, est reduite à une seule refraction en Q, qui est telle, que 1°. le rapport des sinus de l'angle d'inclinaison & de l'angle brisé est le même, que celui qui a lieu, lorsque la lumiere passe d'un milieu extrème dans l'autre, qu'on peut supposer se toucher en Q. & 2°. l'angle de refraction est PQJ = JHP. Mais la distance HQ n'est pas la même, dès que la lumiere tombe dans les milieux sous un autre angle, ce qui rend la détermination des refractions plus difficile.

Remarque II.

§. 17. Comme le nombre des milieux, leur distance & leur refrangibilité ne changent rien à ces Théorèmes, il est clair, qu'ils s'appliqueront de même, lorsque la route de la lumiere est une ligne courbe, comme dans l'athmosphere de la terre, &

& qu'ils auront lieu, soit qu'on prenne toute la Courbe, ou qu'on n'en prenne qu'une partie quelconque.

Théorême VI.

§. 18. *Tous les sinus des angles, que la route de la lumiere* A B C D E F G *forme avec les droites* AH, BH, CH, DH, EH, FH, GH, *tirées du Centre* H *aux points de brisure, sont dans un rapport constant, quelle que soit l'obliquité d'incidence.*

Démonstration.

Les milieux etant circulaires & concentriques, il est evident, que les droites AH, BH, CH, DH, EH, FH, GH seront leurs raïons, & par conséquent constans. Mais les sinus des angles qui se forment dans une même couche, comme p. ex. des deux angles EDH & DEH sont en raison des côtés opposés EH, DH, par conséquent en raison des raïons des surfaces. Or cette raison est constante, donc aussi le rapport entre les sinus des angles, qui se forment dans une même couche.

De plus les sinus de chaque angle extérieur, comme p. ex. EDH est égal au sinus de son complément à deux droits MDH, & par conséquent au sinus de l'angle d'inclinaison. Mais l'angle contigu CDH est son angle brisé. Or par la Loi de refraction (§. 1.) la raison entre le sinus de l'angle d'inclinaison & le sinus de l'angle brisé est constante. Donc le rapport des sinus de deux angles contigus à une même surface comme EDH, CDH est aussi constant.

Par conséquent le rapport des sinus des angles dans une même couche comme DEH, EDH, & celui des angles d'une couche à l'autre comme EDH, CDH est constant, & partant les sinus de tous les angles, que la route de la lumiere forme avec les droites HA, HB, HC, HD, HE, HF, HG, tirées du centre H aux points de brisure font dans un rapport constant.

Corollaire.

§. 19. Donc le sinus de l'angle BAH sera à celui d'un autre angle p. ex. DEH, que la route de la lumiere forme à la surface E, comme les sinus des angles analogues, qu'elle formera aux mêmes surfaces A & E sous une autre obliquité d'incidence.

Théorême VII.

§. 20. *Les perpendiculaires* HJ, HK, HL, HM, HN, HP, *menées aux côtés prolongés* AB, BC, CD *&c. sont dans un rapport constant, quelle que soit l'obliquité d'incidence.*

Demonstration.

En considerant les droites HA, HB, HC, HD, HE, HF, HG, comme des raïons, les perpendiculaires HJ, HK, HL, HM, HN, HP feront les sinus des angles d'inclinaison & des angles brisés, & par conséquent dans un rapport constant (§. 1.)

Théorême VIII.

§. 21. *Aïant prolongé le côté* AB *jusqu'en* R, *où il rencontre la derniere surface refringente* RF, *tirez le raïon* HR, *& faites l'angle* SRH *egal à l'angle* PFH, *prolongez* SR *en* T: *je dis que, si l'espace entre les cercles* A *&* RF *étoit rempli du milieu, qui est entre* AB, *la lumiere incidente suivant la direction* TR *sur la surface* RF, *y sera bri-*

sée

fée en sorte qu'en continuant sa route par RA *elle parviendra dans le point* A, *tout de même que dans les deux Cas du Théorême IV. & que l'angle de refraction* SRA *joint à l'angle* RHF *sera égal à l'angle de refraction*, PQA *dans les deux Cas du Théorême cité.*

Demonstration.

I°. Comme les deux milieux extrêmes se joignent en FR, la refraction, que la Lumiere souffre en R est telle, que le rapport des sinus de l'angle d'inclinaison & de l'angle brisé est comme HP à HJ (§. 12.) or en menant la perpendiculaire HS à la droite SR, on aura HS = HP, à cause de HF = HR, PFH = SRH & des angles droits HPF = HSR. donc le rapport des sinus est aussi comme HS à HJ. Mais prenant HR pour le raion, HS sera egal au sinus de l'angle d'inclinaison, & HJ à celui de l'angle brisé, donc la lumiere après avoir eté brisée en R passera par RA & partant par le point A.

II°. Prolongez la droite FP jusqu'à ce qu'elle rencontre SR en V, vous aurez l'angle VOR egal à son opposé HOF, & l'angle VRH egal à l'angle PFH, & les deux triangles RVO & OHF seront semblables. Mais l'angle VQA est la somme des deux angles VRQ & RVQ, donc il sera aussi la somme des angles VRQ & RHF.

Remarque.

§. 22. Ce Théorême fait voir la différence entre la refraction rectiligne dans un milieu egalement dense, & la refraction, que la lumiere subit lorsqu'elle passe par différens milieux, où elle est brisée à reprise. Il paroit de-là, qu'après avoir trouvé l'angle de refraction pour le premier cas, qui est VRA, il faut encore y ajouter l'angle RHF, pour avoir la refraction dans le second cas, qui

Les cas de la refraction en Q et en R sont differens, parceque les angles d'incidence ne sont pas les mêmes.

eſt egale à l'angle P Q A. D'où il s'en ſuit encore, que plus la route de la Lumiere A B C D E F G dans le ſecond cas eſt courbe, plus auſſi la difference entre la refraction dans les deux cas ſera grande.

Théorème IX.

§. 23. *Faites la droite* H Z *egale à la quatrieme proportionelle des lignes* H P, H J *&* H F, *&* *aïant tiré l'arc de cercle* Z W, *qui entrecoupe la droite* A J *en* W, *menez une droite de* H *en* W, *je dis, que l'angle* J W H, *ſera egal à l'angle* P F H, *qui eſt l'oppoſé de l'angle d'inclinaiſon de la Lumiere incidente en* F.

Demonstration.

Car par la conſtruction on a la proportion ſuivante $HP : HJ = HF : HW$, d'où l'on tire $HP : HF = HJ : HW$, or les deux triangles H J W & H P F ſont droits, par conſéquent ils ſont ſemblables, & partant l'angle J W H eſt egal à l'angle P F H.

Corollaire I.

§. 24. Le rapport entre les perpendiculaires H J & H P pour les mêmes couches eſt conſtant, quelle que ſoit l'obliquité d'incidence (§. 19) or le raïon H F étant conſtant auſſi, il eſt clair que le raïon H W le ſera de même. D'où il ſuit, que quelle que ſoit l'obliquité d'incidence de la lumiere, la droite A W ſera toujours egalement inclinée au Cercle Z W comme la lumiere incidente en F eſt inclinée ſur la ſurface F.

Co-

Corollaire II.

§. 25. D'où on tire encore cette conséquence, que l'angle W H A fera la différence des deux angles P F H & W A H, & par conféquent la difference des deux angles d'inclinaifon extrêmes. Car il eft la différence des angles W A H & J W H, or l'angle J W H eft egal à l'angle P F H.

Théorême X.

§. 26. *Toutes les chofes etant les mêmes que dans le Théorême précedent, l'angle* W H F *fera egal à l'angle de refraction* P Q A.

Demonstration.

L'angle J W H etant egal à l'angle P F H, & l'angle H W A le complément de J W H, il eft clair, que la fomme des deux angles oppofés A W H & Q F H du quarré H W Q F eft egale à deux droits. Donc auffi la fomme des deux autres angles W Q F & W H F fera egale à deux droits, & partant l'angle W H F egal à l'angle P Q A, qui eft le complément de W Q F à deux droits.

Corollaire I.

§. 27. Les angles oppofés du quarré H W Q F etant egaux à deux droits, il s'en fuit, qu'il peut toujours être infcrit à un cercle, & par conféquent les quatre points H, W, Q, F feront dans la circonférence d'un cercle. D'où l'on tire, que fi de ces quatre points il y en a trois donnés de pofition, le cercle qui paffera par tous les quatre poura être décrit, & le quatrieme, de même que la refraction feront determinés.

COROLLAIRE II.

§. 28. On trouvera de même, que l'angle W H R eſt egal à l'angle de la refraction rectiligne S R A. (§. 21.) Car par le Théoreme que je viens de citer on a $SRA + RHF = PQA$, Mais l'angle PQA eſt egal à WHF (§. 26.) donc $SRA = WHF - RHF = WHR$.

REMARQUE.

§. 29. Voici les propriétés les plus ſimples & les plus remarquables, que j'aie pu découvrir de la route de la lumiere, qu'elle prend en paſſant par pluſieurs milieux ſphériques & concentriques. Il eſt evident, qu'elles s'appliqueront egalement à ces Cas, où la route eſt courviligne, & qu'elles donneront lieu à d'autres recherches, que nous ferons dans la ſuite. Elle en a cependant bien d'autres, mais la plûpart en ſont trop compliquées, quand on ſuppoſe, que les milieux ont une diſtance finie; & qui ſe ſimplifient davantage, quand on conſidere des milieux infiniment proches les uns des autres & differant infiniment peu à l'egard du degré de refrangibilité. C'eſt le Cas, que nous allons examiner. Il eſt clair qu'il exiſte dans l'athmoſphere de la terre, & qu'ainſi en le conſiderant, nous ne faiſons que nous aprocher du but principal.

Expoſition du Cas.

Fig. 3. §. 30. Soit C le centre commun des milieux refringens, dont les ſurfaces ſoient circulaires & infiniment proches l'une de l'autre, telles que repreſentent les cercles tirés par les points M & n. Soit la courbe A M n la route de la lumiere, qui paſſant par les mêmes points n, M, parvienne en A.

A. Tirez les droites AJ, MT, nt, qui touchent la courbe dans ces points, & du centre C menez-y les perpendiculaires CD, CT, Ct. l'angle infiniment petit TMt sera la refraction de la couche M, & la somme de toutes les refractions de la partie AM fera egale à l'angle TGA = DCT. (§. 14.) Soient MR, nR deux perpendiculaires aux tangentes TM, tn, qui concourent en R, la droite MR sera le raïon de courbure répondant au point de la courbe M, & l'angle MRn sera egal à l'angle tMT de la refraction.

Théorême XI.

§. 31. *Le raïon de courbure* MR *est à la petite portion de la courbe* Mm, *comme la tangente* MT *à la différence* ts *des deux perpendiculaires* CT, Ct.

De'monstration.

Cette analogie suit nécessairement de la ressemblance des deux triangles tnT & MRn, les angles en t & n etant droits, & les angles tnT, MRn egaux (§. 30.).

Corollaire.

§. 32. D'où il suit, que le raïon de courbure est en raison composée directe de la tangente MT & de l'element de la courbe Mn, & en raison reciproque de la différence des deux perpendiculaires CT, Ct.

THÉORÊME XII.

§. 33. *La différence* ts *des deux perpendiculaires* CT, Ct *eſt en raiſon conſtante du ſinus de l'angle* TMC. *pour les mêmes couches* M, n.

DEMONSTRATION.

Car toutes les perpendiculaires menées du centre C aux tangentes de la courbe ſont dans un rapport conſtant aux ſinus de tous les angles, que la courbe forme avec les droites qu'on y tire du centre C, ſi les diſtances des points d'atouchement & d'interſection du Centre C reſtent les mêmes pour chaque obliquité d'incidence (§. 17. 19.) Donc les diſtances des Couches CM, Cn etant ſuppoſées reſter les mêmes, les perpendiculaires CT, Ct, & partant auſſi leur différence ts ſeront en raiſon conſtante du ſinus de l'angle TMC, quelle que ſoit l'obliquité d'incidence.

THÉORÊME XIII.

§. 34. *Les diſtances des couches* M *&* n *du centre* C *reſtant les mêmes, l'element de la courbe* Mn *compris entre ces deux couches eſt en raiſon conſtante reciproque du coſinus de l'angle* TMC, *ou en raiſon directe de la ſécante du même angle.*

DEMONSTRATION.

Car conſiderant la diſtance des couches mn comme le raion, l'element de la courbe Mn repreſentera la ſécante de l'angle Mnm, qui eſt cenſé être egal à l'angle TMC, parcequ'il n'en differe, qu'infiniment peu. Or la diſtance mn etant conſtante, l'element Mn ſera ſimplement comme la ſécan-

ſécante de l'angle TMC, & par conſéquent en raiſon réciproque de ſon Coſinus.

Théorême XIV.

§. 35. *La tangente* MT *eſt en raiſon directe du coſinus de l'angle* TMC.

Démonstration.

En conſiderant la droite CM comme le raïon, la tangente MT, formant le troiſieme côté du triangle rectangle CMT, ſera le Coſinus de l'angle TMC. Or la droite CM eſt ſuppoſée être conſtante, donc TM ſera en raiſon conſtante du coſinus de l'angle CMT.

Remarque.

§. 36. On voit de ces trois derniers Théorêmes, que les trois quantités, par leſquelles nous avons déterminé le raïon de courbure (§. 30. 31.) ſont chacune dans un rapport conſtant au ſinus ou coſinus de l'angle TMC, de ſorte qu'en comparant les quatre derniers Théorêmes, on en tirera la propoſition ſuivante.

Théorême XV.

§. 37. *Le raïon de Courbure* MR *eſt en raiſon réciproque du ſinus de l'angle* TMC, *ou en raiſon directe de la ſécante de ſon complément.*

DÉMONSTRATION.

Par le Théorême XI. (§. 31.) on a

$$MR = Mn.\ MT : ts.$$

Mais Mn eſt réciproquement comme le coſinus de l'angle TMC (§. 34.) & MT eſt en la même raiſon directe (§. 35.) Or ces deux raiſons s'entredétruiſent, donc le raïon de courbure MR eſt réciproquement comme la différence des perpendiculaires ts, par conſéquent réciproquement comme le ſinus de l'angle TMC (§. 33.) ou directement comme la ſécante de ſon complément.

COROLLAIRE.

§. 38. L'angle RMT etant droit, l'angle CMR ſera le complément de l'angle CMT, donc le raïon de courbure ſera en raiſon directe de la ſécante de l'angle CMR.

THÉORÊME XVI.

§. 39. *Aïant prolongé la droite* MC *en* S, *menez-y la perpendiculaire* RS *de l'extrêmité du raïon de courbure, ou de ſon Centre, je dis que la lumiere paſſant par le point* M *ſous un angle d'incidence quelconque, le centre du raïon de courbure, qui répondra au point* M *ſe trouvera toujours dans la droite* SR *prolongée ſi le beſoin l'exige.*

DE'MONSTRATION.

Car le raïon de courbure etant en raison constante de la sécante de l'angle SMR, il est evident que la droite MS etant constante & supposée être le raïon, la droite MR ou le raïon de courbure representera cette sécante, & lui étant egale dans un cas le sera aussi dans tous les autres.

COROLLAIRE.

§. 40. Si donc la route de la lumiere est circulaire, il n'y aura rien de si facile, que de la décrire pour chaque obliquité d'incidence, parcequ'un seul centre etant donné, tous les autres le seront aussi.

THÉORÊME XVIII.

§. 41. *La droite* MS *est au raïon de la couche* CM *comme l'angle* MCn *à l'angle de refraction* tMT.

DE'MONSTRATION.

Par le Théorème XI. (§. 31.) on a

$$MR = Mn. MT : ts.$$

Mais par la Construction il est

$$Mm = CM. MCm.$$
$$Mn = CM. MCm : \text{sin. } TMC$$
$$MT = CM. \text{cosin. } TMC$$
$$ts = CM. \text{cos. } TMC. tMT.$$

donc

donc en substituant on aura

$$MR = \frac{CM.\ MCm}{tMT.\text{sin.}\ TMC}$$

Or par le Théorême précedent

$$MR = MS : \text{sin.}\ TMC$$

donc

$$MS = CM.\ MCm : tMT.$$

& partant

$$MS : CM = MCm : tMT.$$

Corollaire I.

§. 42. Toutes les fois donc que l'angle au centre MCm est plus grand que la refraction tMT, la droite MS sera aussi plus grande que le raïon CM, & réciproquement, & à plus forte raison tous les autres raïons de courbure MR seront plus grands que CM.

Corollaire II.

§. 43. Mais si $MCm < TMt$, il sera aussi $SM < CM$, & les autres raïons de courbure croissants à l'infini pouront être plus grands ou plus petits que CM.

REMARQUE.

§. 44. Le premier cas existe dans l'athmosphere, & nous verrons après que la droite MS est toujours 6 à 8 fois plus grande que le raïon MC. Nous nous y arrêterons donc d'avantage.

THÉORÊME XIX.

§. 45. *La somme des deux angles* tMT & TMC *est egale à la somme des deux angles* MCn *&* MnC.

DE'MONSTRATION.

Car MCn + MnC = tMC
or tMC = tMT + TMC
donc MCn + MnC = tMT + TMC

COROLLAIRE I.

§. 46. Si donc l'angle tMT est plus petit que l'angle MCn, l'angle tnC sera aussi plus petit que l'angle TMC & réciproquement.

COROLLAIRE II.

§. 47. Par conséquent si tnC < TMC il sera aussi CM < MS. & réciproquement.

COROL-

Corollaire III.

§. 48. D'où l'on tire que lorſque CM = MS, il ſera auſſi tMT = MCn & TMC = tnC.

Théorême XX.

§. 49. *Si l'angle de refraction* tMT *eſt continuellement plus grand que l'angle au centre* MCn, *le raïon* MA *s'approchera du centre* C *dans une ligne ſpirale.*

Démonstration.

Si tMT > MCn, il ſera auſſi tnC > TMC, donc la tangente TM ſera plus inclinée à ſon raïon MC, que n'eſt la tangente tn à ſon raïon nC. Or cette propriété ne convient qu'aux Spirales, dont le centre eſt C. Donc &c.

Remarque.

§. 50. Ce Théorême a encore lieu, lorſque les angles tMT ſont conſtamment egaux aux angles répondans Mcn. Car alors il eſt auſſi TMC = tnC. C'eſt à dire, la courbe, que le raïon décrira en ce cas eſt dans tous ſes points egalement inclinée aux raïons, qu'on y mêne du centre C. Cette qualité ne convient qu'aux ſpirales logarithmiques, lesquelles par conſéquent feront décrites en ce cas moïen par les raïons de lumiere. Et c'eſt le ſeul cas, où l'angle d'inclinaiſon de la courbe à ſes raïons peut être quelconque. Pour toutes les autres ſpirales, ou tMT > MCn, il ne ſauroit exceder une certaine grandeur, parceque la lumiere, au lieu de ſe briſer en remontant du centre, feroit

toute

toute réflechie. Ainsi la logarithmique spirale est le cas extrême de ceux, où les refractions sont possibles sous tous les angles d'incidence.

Théorême XXI.

§. 51. *Si l'angle* TMt *est constamment plus petit que l'angle au centre répondant* MCn, *la courbe que la lumiere décrira, aura un sommet, ce sommet sera plus proche du centre* C, *que tout autre point de la courbe, la droite qu'on y ménera du centre, en sera l'axe, & perpendiculaire à la courbe, & la courbe de l'un & de l'autre côté de cet axe se sera semblable.*

Démonstration.

Car l'angle TMt etant plus petit, que l'angle MCn, l'angle TMC sera plus grand que l'angle tnC. Donc l'angle TMC s'agrandira à mesure que la courbe approche du centre jusqu'à ce qu'il devienne droit. Ce qui arrivant, la route de la lumiere sera perpendiculaire au raïon, qu'on y ménera du centre, & la lumiere remontera par les couches supérieures. Or la refraction, en remontant par chaque couche, sera la même que lorsqu'elle descendit par la même couche. Donc &c.

Remarque.

§. 52. J'ai abregé cette démonstration, qui auroit été beaucoup plus longue, s'il avoit fallu démontrer chaque point du Théorême séparement. Je la crois cependant suffisamment dévelopée, pour que l'on en puisse comprendre les conséquences.

D'ail-

D'ailleurs ces deux derniers Théorêmes font voir la nature des courbes, que la lumiere peut décrire dans des milieux fphériques & concentriques, lorfque le rapport entre les degrés de réfrangibilité des différentes couches fuit une même loi par tout. Car ce feront ou des fpirales (§. 49.) fi la refraction eft affez forte pour que l'angle TMn foit plus grand que l'angle MCn; ou s'il eft plus petit, ce ne feront que des courbes femblables de l'un & de l'autre côté de l'axe, & leur pofition fera telle, que l'axe paffera toujours par le centre C. & dans ce dernier cas le raion de courbure, qui répond au fommet eft toujours plus grand, que la droite qu'on y mêne du centre C (§. 47.) De-là on exclut toutes les courbes qui n'ont qu'une feule afymtote, comme la logarithmique, toutes celles qui n'ont point les deux moities coupées par leur axe femblables, les courbes d'une dimenfion impaire &c. Par-contre on admettra les fections coniques, qui feront même les plus fimples, & qui ne laiffent pas d'avoir auffi, dans ce cas, des propriétés fort elégantes.

Théorême XXII.

§. 53. *Les milieux reftant les mêmes, toutes les routes, dont le fommet eft à une diftance egale du centre C, ne differeront que de pofition.*

Démonstration.

Car les couches des milieux etant fphériques & concentriques, il eft evident que de quelque côté que la lumiere y entre fous un même angle d'incidence, elle fubira les mêmes refractions & fe courbera dans tous les cas de la même maniere. Or comme la route de la lumiere dans le fommet de la courbe eft perpendiculaire au raïon, qu'on y mêne du centre C, il eft evident, que des que ce

fom-

fommet fe trouve dans la même diftance du centre, toutes les refractions feront les mêmes, & partant les routes ne differeront que de pofition; en forte que leurs axes fe croiferont dans le centre C.

Remarque.

§. 54. Il en eft tout autrement, lorfque les fommets feront à une diftance inégale du centre, ou qu'ils fe trouvent dans des couches différentes.

Corollaire I.

§. 55. Ainfi on déterminera toujours la même courbe, en quelque point d'une couche qu'on fuppofe fon fommet, pourvu que la couche foit la même.

Corollaire II.

§. 56. Aïant donc donné de pofition une partie d'une route AM, & le raïon de courbure qui répond à un de fes points M, on pourra fuppofer en M le fommet d'une autre route, dont MC fera l'axe, & la droite MS le raïon de courbure, qui répond à ce fommet (§. 39.)

Corollaire III.

§. 57. Si donc la conftruction de la route de la lumiere ne dépend que d'une feule conftante, comme lorfqu'elle eft un cercle ou une parabole, il eft evident, qu'une feule route etant conftruite, on en trouvera toutes les autres, parceque cette conftante entre feule dans la détermination du raïon de courbure à fon fommet.

Remarque.

§. 58. C'eſt ainſi que, ſi la route de la lumiere par les milieux eſt une parabole, on trouvera que la diſtance entre le centre des milieux C, & celui des raïons de courbure, qui répondent à leurs ſommets, eſt conſtante. D'où il ſuit, que le foïer des paraboles ne tombera ſur le centre des milieux C, que dans un ſeul cas. Mais ſi l'equation pour la trajectoire AM a pluſieurs coefficiens, on n'en déterminera qu'un ſeul par ce Théorême. Les autres ſe définiront par les Théorêmes VI & XVI. pour chaque obliquité d'incidence, dès qu'ils ſeront donnés pour une ſeule. Car les equations qu'on trouvera ne différeront que par les coefficiens, ce qui peut ſe prouver, en comparant l'expreſſion univerſelle du raïon de courbure que l'on donne dans l'Analiſe des courbes, avec celle que nous avons donnée pour ceux de nos trajectoires dans le Théorême XI. (§. 31.) Exprimons maintenant en termes analitiques les rapports de la courbe aux droites, qui y ſont appliquées.

Problême I.

§. 59. *Trouver l'equation différentielle pour les refractions.*

Solu-

SOLUTION.

Exprimant le raïon CA par l'unité, de sorte que $CA = 1$, soit la distance $CM = r$ l'angle $BAG = DAC = \gamma$, l'arc $AM = x$, $Mn = dx$

$$TMC = \omega,$$
$$ACM = s, \quad MCm = ds$$
$$TGA = z, \quad TMt = dz$$

& le raïon de courbure $MR = R$.
la perpendiculaire $CT = v$, $ts = dv$

On aura $DC = \text{sin. } \gamma$. $DA = \text{cos. } \gamma$
$TC = v = r.\text{sin.} \omega$, $TM = r.\text{cos.} \omega$
ou $TM = \sqrt{(rr - vv)}$

Or l'angle TMt etant la refraction differentielle, on aura

$$dz = dv : \sqrt{(rr - vv)}$$
$$\text{ou } dz = dv : r.\text{ cos. } \omega$$
$$\text{ou } dz = dv.\text{ tang. } \omega : v$$

Qui sont les equations, qu'il falloit trouver.

REMARQUE.

§. 60. Cependant ce ne font pas les feules, puifque, par ex. on peut encore exprimer la refraction différentielle par le raïon de courbure. Car l'angle MRn etant egal à l'angle de refraction TMt, (§. 30.) on aura

$$dz = Mn : MR$$

Mais puifque $Mn = Mm : \text{fin.}\ \omega$
& $Mm = MCm.\ MC = rds$

En fubftituant l'equation fe transformera en

$$dz = rds : R\ \text{fin.}\ \omega.$$

COROLLAIRE.

§. 61. D'où l'on déduit réciproquement le raïon de courbure $R = rds : dz\ \text{fin.}\ \omega$.

THÉORÊME XXIII.

§. 62. *Le raïon de courbure* MR *eft au raïon* CM *de la couche* M *comme la diftance des deux couches* mn *à la différence des deux perpendiculaires* ts.

Démonstration.

Par le Théorème XI. (§. 31.) on aura

$$R : dx = r. \cos. \omega : dv$$

d'où l'on tire

$$R = rdx. \cos \omega : dv$$

Mais

$$dx. \cos. \omega = dr$$

donc

$$R = rdr : dv.$$

& partant

$$R : r = dr : dv$$

Remarque.

§. 63. Cette Propriété du raïon de courbure est purement analitique, & a lieu à l'egard de chaque courbe rapportée à un point fixe C que l'on considere comme un centre. Elle devient plus particuliere, en considerant, que dans le cas present les perpendiculaires v sont en raison constante du sinus de l'angle TMC. Car on en deduit que pour la même couche le raïon de courbure R est réciproquement comme ce sinus. (§. 37.)

Théorême XXIV.

§. 64. *La longueur des perpendiculaires* CT, Ct *menées aux tangentes de la trajectoire* TM, tn *est en raison composée de la perpendiculaire* CD *menée à la droite, qui touche la trajectoire au point* A, *&* *du degré de refrangibilité des couches* M, n, *d'où les tangentes partent.*

Démonstration.

Car TC est à DC en raison des sinus de l'angle d'inclinaison & de l'angle brisé, lorsque la lumiere passe immédiatement du milieu, qui est en la couche M, dans le milieu, qui est en A. (§. 12. 19.) or les couches restant les mêmes, ce rapport est constant (§. 1.); donc en ce cas la perpendiculaire CT est en raison constante de DC. Mais ce même rapport variant d'une couche à l'autre suivant leur différent degré de refrangibilité, il est evident que les perpendiculaires CT, Ct seront en raison composée de DC & du degré de refrangibilité des couches M, n, d'où les tangentes TM, tn sont tirées.

Corollaire I.

§. 65. Puisque en rapportant les perpendiculaires CT, Ct à une même trajectoire, la droite CD est constante & $=$ sin. γ, il est clair que ces perpendiculaires dépendront chacune simplement du degré de refrangibilité de leurs couches respectives.

Corollaire II.

§. 66. Donc elles pouront être exprimées par une fonction des raions des couches auxquelles elles se rapportent.

Corollaire III.

§. 67. Et en général en les rapportant à différentes trajectoires, elles feront comme cette fonction multipliee par le sinus de l'angle DAC.

Remarque.

§. 68. Cette qualité des perpendiculaires menées aux tangentes des trajectoires deviendra plus intéressante dans la suite. Appliquons maintenant ce que nous avons démontré jusqu'ici au cas qui existe dans l'athmosphere de la terre.

SECTION II.

Des Refractions Astronomiques, de la maniere de les déterminer par approximation aussi exactement que l'on voudra, & de leur rapport à divers autres Problêmes.

Exposition du Cas.

§. 69. IL ne s'agit ici que d'appliquer la 3e. figure à notre terre & à son athmosphere. Soit donc C son centre & celui des couches de l'air: CA le demi-diametre, le cercle tiré par A sa surface, BM une couche de l'air, bn une autre, qui lui est infiniment proche; nMA un raïon de lumiere qui y passe, & qui tombe en A: AJ sa touchante en A, & JAB sa distance apparente du Zenith. Ceci posé, les autres lignes ont la même signification & dénomination, que nous leur avons données ci-dessus (§. 30. 58.) Ainsi l'angle TGA sera la refraction que la lumiere souffre en parcourant la partie MA de sa route par l'air, & si AM est la route entiere, cet angle sera la refraction totale.

Théorême XXV.

§. 70. *Si* Ab *represente toute la hauteur de l'athmosphere, le rapport entre les perpendiculaires* C t & CD *sera le même qui est entre les sinus de l'angle d'inclinaison & de l'angle brisé, lorsque la lumiere passe immédiatement du vuide dans l'air naturel, tel qu'il est à la surface de la terre.*

Démonstration.

Car T C est à D C en raison des sinus de l'angle d'incidence & de l'angle brisé, lorsque la lumiere passe immediatement du milieu qui est en n dans le milieu qui est en A (§. 12. 19.) or la surface b n etant à l'extrémité de l'air, il est evident qu'au-dessus de cette surface il n'y a d'autre milieu, que l'Ether, que l'on appelle vuide par rapport à un espace qui est rempli d'air. Et le milieu qui se trouve en A c'est l'air naturel, tel qu'il se trouve à la surface de la terre. Donc &c.

Remarque.

§. 71. Par les expériences, que Mr. Hawkbée a faites, & par ce que nous déduirons après cela des refractions astronomiques, on trouve, que ce rapport n'excede jamais celui de 3001 à 3000, & que par conséquent la plus grande différence entre les perpendiculaires extrêmes CD, Ct est toujours au-dessous de la $\frac{1}{3000}$ partie de CD. Or les refractions horisontales comme les plus grandes, n'etant gueres au-dessus d'un demi-degré, il est evident que si en négligeant cette différence, sa neglection influe proportionellement sur les refractions, l'erreur qui en résulteroit seroit toujours au-dessous d'une seconde. C'est ce qui nous fournit le suivant

Théorême XXVI.

§. 72. *La refraction est egale à une* $\frac{1}{6000}$ *partie de près à la différence de* DAM *&* *de* TM *divisée par* CD.

De'monstration.

Par le Problême I. (§. 59.) nous avons

$$dz = \frac{dv}{\sqrt{(rr - vv)}}$$

Multipliez l'un & l'autre membre par v, ce qui fera

$$vdz = \frac{vdv}{\sqrt{(rr - vv)}}$$

Soustraïez en de part & d'autre $rdr : \sqrt{(rr - vv)}$ & vous aurez

$$vdz - \frac{rdr}{\sqrt{(rr - vv)}} = \frac{vdv - rdr}{\sqrt{(rr - vv)}}$$

ou bien

$$vdz = \frac{rdr}{\sqrt{(rr - vv)}} - \frac{rdr - vdv}{\sqrt{(rr - vv)}}$$

Or

Or le membre $r\,d\,r : \sqrt{(rr - vv)}$ est égal à la différentielle de la trajectoire dx, donc

$$v\,dz = dx - \frac{rdr - vdv}{\sqrt{(rr - vv)}}$$

& en prenant l'intégrale il sera

$$\int v\,dz = x - \sqrt{(rr - vv)} + \text{const.}$$

La Constante se trouve de ce qu'en faisant $x = 0$, il doit être $\int v\,dz = 0$. Or en posant $x = 0$, il sera $r = 1$, $v = CD$, donc la constante $= \sqrt{1 - \overline{CD}^2} = DA$, & partant

$$\int v\,dz = AM + DA - MT$$

Mais comme la perpendiculaire v ne varie que d'une $\frac{1}{3000}$ partie, en la considerant comme constante & égale à DC, on aura enfin la refraction

$$z = \frac{AM + DA - MT}{DC} = \frac{DM - MT}{DC}$$

Or il est evident qu'au lieu de DC. z il auroit fallu substituer pour $\int v\,dz$ le produit de z multiplié avec quelque perpendiculaire intermédiaire entre DC & CT, qui approcheroit fort de la moïenne, & qui par conséquent ne l'excederoit pas de la $\frac{1}{6000}$ partie. Donc en faisant $z = (DT - MT) : DC$ l'erreur qui s'y commet est au-dessous de la $\frac{1}{6000}$ partie de la refraction.

Co-

Corollaire I.

§. 73. Elle eſt donc au-deſſous d'une demi-ſeconde pour les refractions horiſontales, & deviendra tout à fait inſenſible pour celle des hauteurs plus élevées.

Corollaire II.

§. 74. Comme la courbure du raïon n'eſt que d'un demi-degré tout au plus, on peut le regarder comme une ligne droite, & il eſt viſible, que la refraction poura ſe trouver fort facilement par ce Théorème, dès que le point M ſera donné.

Remarque.

§. 75. Mais il faut qu'il ſoit donné exactement. Car la poſition de la droite reſtant la même, la perpendiculaire C T & partant auſſi la tangente T M ſera conſtante. De ſorte que la poſition du point M ſur la ſurface M B variant, il n'y aura que la longueur de l'arc A M qui variera, & comme la refraction eſt proportionnelle à la différence de D A M & de T M, il eſt manifeſte, que cette différence ſera plus ou moins grande, ſuivant que l'on changera la poſition de M. Au reſte ce Théorème comme divers autres, que nous expoſerons dans la ſuite, n'eſt que pour faire voir de combien de manieres on peut envîſager un même objet. Car dès que la poſition du point M pour chaque hauteur des aſtres eſt donnée, on n'aura pas beſoin de ce Théorème, qui ne donne qu'un à peu près, mais les refractions pouront être déterminées exactement

de

de plusieurs manieres, suivant ce que nous avons fait voir ci-dessus (§. 20. 21. 25. 26.)

Problême II.

§. 76. *Exprimer les refractions par une suite.*

Solution.

Par le Problême I. (§. 59.) on a

$$dz = dv : \sqrt{(rr - vv)}$$

Or en resolvant cette expression par la formule connue des binomes, on trouvera

$$dz = dv \left(\frac{1}{r} + \frac{1 \cdot v^2}{2 \cdot r^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot v^4}{2 \cdot 4 \cdot r^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5\, v^6}{2 \cdot 4 \cdot 6\, r^7} + \&c.\right)$$

Or la perpendiculaire v est en raison composée du sinus de l'angle DAC & d'une fonction de la hauteur CM (§. 67.) Faisant donc cette fonction $= P$, en sorte que $v = P.\ \text{sin}.\ \gamma$. on aura $dv = dP.\ \text{sinus}\ \gamma$, donc en substituant, la suite trouvée se transforme en

$$dz = \frac{dP}{r} . \text{sin}.\gamma + \frac{1 . P^2 dP}{2 . r^3} . \text{sin}.\gamma^3 + \frac{1 . 3 . P^4 dP}{2 . 4 . r^4} . \text{sin}.\gamma^5 + \&c.$$

& en prenant les intégrales

z = sin.

$$z = \text{ſin.}\,\gamma.\int\frac{dP}{r} + \frac{\text{ſin.}\ \gamma^3.}{2}\int\frac{P^2dP}{r^3} + \frac{1.3.}{2.4.}\,\text{ſin.}\,\gamma^5.\int\frac{P^4dP}{r^5} + \text{\&c.}$$

Or comme les intégrales de tous les termes de cette ſuite dépendent ſimplement de la hauteur de l'athmoſphere, & qu'elles ſont indépendantes de l'angle γ, il eſt evident qu'on peut les conſiderer comme des coefficiens, & que par conſéquent la conſtitution de l'athmoſphere reſtant la même, les refractions qui répondent à chaque diſtance des aſtres du Zenith, ſeront exprimées par la ſuite

$$z = A\ \text{ſin.}\ \gamma + \tfrac{1}{2}\ B.\ \text{ſin.}\,\gamma^3 + \frac{1.3}{2.4}\ C\ \text{ſin.}\,\gamma^5 + \text{\&c.}$$

dont les termes croiſſent ſuivant les puiſſances impaires du ſinus de la diſtance des aſtres du Zenith.

REMARQUE.

§. 77. Cette ſuite n'eſt pas fort convergente, & il faut pluſieurs termes, pour définir les refractions des hauteurs moins grandes.

Car la fonction P de même que le raïon r variant fort peu, toutes les intégrales ſeront aſſez peu différentes l'une de l'autre, de ſorte que la convergence des Coefficiens n'eſt gueres plus grande que celle de la ſuite $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1.3}{2.4.}$ &c.

Afin donc de transformer la ſuite trouvée en une autre, qui ſoit plus convergente, il faut exprimer les refractions par une ſuite dont les termes procedent par les puiſſances impaires des tangentes de l'angle γ. Ce qui peut toujours ſe faire. On trouvera donc

$z = A$

$$z = A\,\text{tang.}\,\gamma - \frac{1}{2} A\,\text{tang.}\,\gamma^3 + \frac{1.3}{2.4} A\,\text{tang.}\,\gamma^5 - \&c.$$
$$+ \frac{1}{2} B\,\text{tang.}\,\gamma^3 + \frac{3.2}{2.4} B\,\text{tang.}\,\gamma^5 + \&c.$$
$$+ \frac{1.3}{2.4} C\,\text{tang.}\,\gamma^5 - \&c.$$

Or si tous les coefficiens A, B, C, D, &c. etoient egaux entre eux, tous les termes de cette suite outre le premier s'anéantiroient, & on auroit

$$z = A.\ \text{tang.}\ \gamma.$$

Mais comme ces constantes A, B, C &c. ne different que tres peu entre elles, il s'en suit, que cette serie est infiniment plus convergente que la précedente, puisque le coefficient du premier terme est le même dans l'une & dans l'autre suite, & que les tangentes d'un angle croissent bien plus fortement que les sinus &c.

Corollaire.

§. 78. On poura donc exprimer les refractions par la suite

$$z = a\,\text{tang.}\,\gamma - b.\,\text{tang.}\,\gamma^3 + c.\,\text{tang.}\,\gamma^5 - \&c.$$

dont il faudra tres peu de termes, pour les definir, si on en excepte les plus horisontales, parceque la tangente de l'angle γ devenant alors fort grande, la suite deviendra divergente.

PROBLÊME III.

§. 79. *Quelques refractions etant données, trouver toutes les autres, qui ne sont pas les plus horizontales.*

SOLUTION.

Il ne faudra que se servir des refractions données, pour déterminer les coefficiens de la suite

$$z = a\ \text{tang.}\ \gamma - b.\ \text{tang.}\ \gamma^3 + c.\ \text{tang.}\ \gamma^5 - \&c.$$

ce que j'ai trouvé pouvoir se faire le plus commodement de la façon suivante.

1°. Egalez le premier terme a. tang. γ. à une refraction, qui réponde à un angle γ. d'environ 40 à 45. degrés, ce qui donnera le coefficient a, lequel etant substitué;

2°. Egalez les deux prèmiers termes à une refraction d'un angle γ plus grand, p. ex. d'environ 60 à 65 degrés, d'où vous définirez le second coefficient b. lequel etant aussi substitué:

3°. Egalez les trois premiers termes à la refraction d'un angle γ encore plus grand, comme d'environ 75 à 80 degrés, ce qui donnera le troisième coefficient, & de cette maniere vous continuerez à déterminer les coefficiens des termes suivans.

RE-

REMARQUE.

§. 80. La raison de cette opération consiste en ce que le coefficient de chaque terme suivant est trop petit pour qu'il puisse influer sensiblement dans la détermination des précedens, de sorte qu'en choisissant bien les refractions ils pouront toujours être omis. Je vais maintenant en donner un exemple. Mais comme les refractions, telles qu'on les trouve en plusieurs traités, ont eté observées à différentes reprises & par conséquent en différentes constitutions de l'athmosphere, j'ai jugé que je ferois mieux en me servant de la table de Mr. Dan. Bernoulli, qui se trouve dans son excellent traité de Hydrodynamique. Non, parcequ'elle réponde exactement aux observations, mais parcequ'elle est calculée sur une hypothese, qui suppose pour toutes les elévations des astres une même constitution de l'air, & que d'ailleurs elle ne laisse pas que d'approcher de la vérité. Car notre suite etant egalement applicable à tous les cas, il est assez indifférent duquel je me serve, dès qu'il a la condition que je viens de dire.

Voici la table, que Mr. Bernoulli donne.

γ	z	γ	z
90°	34′ : 53″	45	1′ : 3″
85	9 : 59	40	0 : 53
80	5 : 28	35	0 : $44\frac{1}{3}$
75	3 : 44	30	0 : $36\frac{1}{2}$
70	2 : 47	25	0 : $29\frac{1}{2}$
65	2 : 12	20	0 : 23
60	1 : 47	15	0 : 17
55	1 : 29	10	0 : $11\frac{1}{4}$
50	1 : 15	5	0 : $5\frac{1}{2}$
45	1 : 3	0	0 : 0

Exemple.

§. 81. Nous choisirons de cette table les trois refractions suivantes

γ	z
45°.	63″.
60.	107.
80.	328.

D'où l'on aura pour le premier coefficient

$$a.\ \text{tang.}\ 45°. = 63.$$
$$a = 63.$$

pour le second

$$63.\ \text{tang.}\ 60° - b(\text{tang.}\ 63°)^3 = 107$$

d'où

d'où l'on tire

$$b = 0{,}408.$$

& pour le troisieme

$$63\ (\text{tang. } 80^\circ) - 0{,}408\ (\text{tang. } 80^\circ)^3 + (\text{c. tang. } 80)^5 = 328.$$

d'où on aura

$$c = 0{,}011$$

& partant pour les refractions de tous les angles γ, qui sont au-dessous de 80 degrés

$$z = 63.\ \text{tang. } \gamma - 0{,}408\ \text{tang. } \gamma^3 + 0{,}011\ \text{tang. } \gamma^5.$$

Ainsi p. ex. pour l'angle, $\gamma = 70^\circ$, on trouvera

$$z = 173{,}1 + 1{,}7 - 8{,}4 = 166{,}''4$$

ou

$z = 2',46\frac{1}{2}''$ ce qui ne differe que d'une demie-seconde de la valeur $2',47''$ que la table donne pour cet angle.

Théorême XXVII.

§. 82. *En prenant une couche quelconque* BM *&* *sa distance* CM *du centre comme constante, la refraction astronomique poura être exprimée par une suite, dont les termes procedent suivant les dimensions impaires de l'angle* TMC *ou de son sinus ou de sa tangente, ou suivant les puissances paires de son cosinus ou de sa cotangente.*

DÉMONSTRATION.

La couche restant la même dans tous les cas le sinus de l'angle TMC sera dans un rapport constant au sinus γ de l'angle DAC (§. 17.) Faisant donc l'angle TMC = E, & m sin. E = sin. γ. Or en substituant m sin. E pour sin. γ dans la suite que nous avons trouvée (§. 74.) on aura

$$z = A\,m\,\text{fin. } E + \tfrac{1}{2} B\,\text{fin. } E^3 . m^3 + \&c.$$

D'où l'enoncé du Théorème est evident par rapport au sinus de l'angle E. On en trouvera de même la vérité pour la tangente, le cosinus &c. en exprimant leur valeur par sin. E suivant les principes de la Cyclometrie.

COROLLAIRE.

§. 83. De-là il suit que les series, que l'on trouve pour les refractions totales, ne different de celles pour les refractions partiales, qui se font entre deux couches quelconques, qu'à l'egard des coefficiens. Ainsi aïant pour les refractions totales la suite (§. 76.)

$$z = a \text{ tang. } \gamma - b \text{ tang. } \gamma^3 + c \text{ tang. } \gamma^5 - \&c.$$

On aura pareillement pour les refractions entre les deux couches A & M

$$z = \mu. \text{ tang. } \gamma - \nu. \text{ tang. } \gamma^3 + \pi. \text{ tang. } \gamma^5 - \&c.$$

& pour celles entre deux autres couches quelconques

$$z = m \text{ tang. } \gamma - n \text{ tang. } \gamma^3 + \&c.$$

RE-

REMARQUE.

§ 84. Le moïen, dont je me suis servi, pour trouver ces suites & pour les appliquer aux refractions d'une maniere universelle & indépendante de toute hipothese particuliere, consiste en ce que j'ai taché de séparer le sinus de l'angle γ, qui entre dans la différentielle $dv : \sqrt{(rr - vv)}$ & particulierement dans le signe radical, des autres quantités, qui dépendent uniquement de la hauteur des couches, & qui en font une fonction. De sorte que l'intégration ne pouvant s'absoudre universellement, le sin. γ en soit entierement séparé, & qu'on puisse traiter l'intégrale de constante. Il ne m'a pas eté possible de l'effectuer par une expression finie, ni même par une de celles, que l'on nomme imaginaires, & dont on a trouvé plusieurs pour la multisection des arcs circulaires, comme pour divers autres cas. Mais en recourant à des suites infinies on trouvera facilement encore plusieurs manieres de s'en servir pour exprimer les refractions.

PROBLÊME IV.

§. 85. *La position du point* G, *qui est celui de l'intersection des tangentes* AJ, TM, *& le rapport entre le sinus d'inclinaison & celui de l'angle brisé, lorsque la lumiere entre immédiatement de l'air qui est en* M *dans celui qui se trouve en* A, *etant donnés, trouver la refraction, que la lumiere souffre en parcourant la route* MA.

SOLUTION.

Le rapport entre le ſinus d'inclinaiſon & celui de l'angle briſé, lorſque la lumiere paſſe immediatement de l'air qui eſt dans la couche M, dans celui qui eſt en A, eſt egal au rapport entre les perpendiculaires CD, CT. (§. 12. 13. 14.) comme etant les ſinus des angles DGC, TGC, ſi l'on regarde la droite CG comme le raïon. Or la poſition du point G etant donnée, on aura l'angle AGC, dont le ſinus ſera au ſinus de l'angle TGC dans le rapport que nous venons de dire. Mais ce rapport etant donné auſſi, on en tirera le ſinus de l'angle TGC & partant l'angle TGC, dont on ſouſtraira l'angle DGC, & l'on aura la refraction TGD, qu'il falloit trouver.

COROLLAIRE.

§. 86. Si donc on ſuppoſe les deux couches A & M les mêmes, & que la poſition du point G eſt donnée pour chaque diſtance du Zenith, il ne faudra qu'une ſeule refraction, pour déterminer le rapport entre les perpendiculaires CD, CT. lequel etant conſtant pour tous les angles BAG (§. 19.) on en trouvera enſuite toutes les autres refractions.

REMARQUE I.

§. 87. Comme ce Problême & ſon Corollaire a lieu pour des couches quelconques, il eſt evident que le cas pour les deux extrêmes y eſt auſſi compris & que par ce moïen les refractions aſtronomiques ſe determineront pareillement, ſi la poſition des points G etoit donnée.

REMARQUE II.

§. 88. Nous avons déja obſervé (§. 16.) que les points G ne ſont pas egalement diſtans du centre C. Car ſi cela etoit, les refractions aſtronomiques pouroient être trouvées exactement dans l'hypotheſe de la refraction rectiligne. Comme cependant cette hypotheſe ſatisfait aſſez bien aux obſervations pour des hauteurs plus grandes, il s'en ſuit de-là, que les points G ſe trouvent ſur une courbe, qui ne laiſſe pas que d'être aſſez circulaire, & que la hauteur de l'athmoſphere, qu'on croioit avoir trouvée dans cette hypotheſe, n'eſt autre choſe que la diſtance du point G de la ſurface de la terre, qui eſt bien des fois plus petite, que ſa diſtance de l'extrêmité de l'air, puiſque la courbure de la trajectoire proche de la ſurface de la terre excede de beaucoup celle qu'elle a dans les couches ſupérieures de l'air.

Remarque III.

§. 89. Cette propriété du point G nous fournit encore un moïen d'examiner l'exactitude des refractions obſervées. Car aïant une refraction, qui réponde à un angle D A C quelconque, on fera l'angle D C T egal à cette refraction, & la proportion entre les perpendiculaires D C & T C connue & conſtante, donnera la diſtance C T, de laquelle il faut ſouſtraire C V = D C. ſec. z, pour avoir T V. Or faiſant T G = T V. cot. z ou bien V G = T V. coſec. z, on déterminera la poſition du point G. Si donc on la trouve auſſi pour les autres refractions obſervées, tous ces points doivent ſe trouver dans une ligne courbe, qui differe fort peu d'un arc de cercle, dont le centre eſt ſur la droite C A, Mais pour peu qu'il y ait de l'erreur dans les refractions, ces points G ſeront extrèmement eloignés de la courbe, dans laquelle ils devroient être, puiſque la diſtance T G varie en raiſon de la cotangente de l'angle de refraction, & par conſéquent fort rapidement, & d'autant plus, que la refraction, & par conſéquent la diſtance apparente du Zenith feront plus petites. Mais en invertant le cas, on poura déterminer fort exactement les refractions répondantes à des elevations des aſtres tant ſoit peu conſiderables, p. ex. d'au-deſſus de 10 ou 15 degrés, ſans qu'il ſoit néceſſaire de connoitre exactement la poſition des points G.

Re-

Remarque IV.

§. 90. Comme la Solution du Problême, aussi bien que l'examen des refractions observées dépend du rapport entre les perpendiculaires CD, CT. on poura le déterminer moïennant une refraction, qui réponde à une hauteur moïenne, c'est à dire, d'environ 45 degrés. Car puisque la distance du point G de la surface de la terre est tres petite, & que pour ces hauteurs il est indifférent de la prendre un peu plus ou moins grande, on poura supposer que le point G tombe en A, ce qui donne l'analogie suivante

$$CD : CT = \text{sin.}\ \gamma : \text{sin.}\ (\gamma + z)$$

ou

$$CD : CT = 1 : (\text{cos.}\ z + \text{cot.}\ \gamma .\ \text{sin.}\ z)$$

Problême V.

§. 91. *Le rapport entre les deux perpendiculaires extrêmes* CD, CT *& deux refractions peu eloignées des horisontales etant données, trouver toutes les autres.*

SOLUTION.

Comme la courbe, qui passe par tous les points G ne differe que fort peu d'un arc circulaire dont le centre se trouve sur la droite AC qui passe par le centre de la terre & par le lieu d'observation à sa surface ; il est evident qu'en substituant pour cette courbe un arc de cercle, il n'en faudra avoir que deux points donnés de position, pour pouvoir tracer cet arc de cercle. Or la proportion entre les perpendiculaires CT, CD & deux refractions etant données, on trouvera deux distances AG pour deux angles BAG, de la maniere que nous avons fait voir dans la troisieme Remarque jointe au Problème précedent (§. 89.)

Fig. 4. Soit donc A le lieu de l'observation, G, g les deux points donnés, QBgG le cercle qui passe par ces deux points, & dont le centre est sur la droite verticale AE en C.

Faisons

l'angle $BAg = \gamma$	la droite $Ag = a$
$BAG = \Gamma$	$AG = A$
	& $AC = x$

Prolongez les droites Ag, AG en q, Q, & menez-y les perpendiculaires Cp, CP. & vous aurez

$$AP = x.\ \mathrm{cos}.\ \Gamma$$
$$Ap = x.\ \mathrm{cos}.\ \gamma$$

d'où l'on tire

$$AQ = 2x.\ \mathrm{cos}.\ \Gamma + A$$
$$Aq = 2x.\ \mathrm{cos}.\ \gamma + a$$

or par la nature du cercle

$$AQ.\ AG = Ag.\ Aq.$$

donc

$$2x\,A\,\text{cof.}\,\varsigma + AA = 2x\,a.\text{cof.}\,\gamma + aa$$

& partant

$$x = \frac{AA - aa}{2\,(a.\text{cof.}\,\gamma - A.\text{cof.}\,\varsigma)}$$

Si l'angle ς eſt 90°, on aura

$$x = \frac{AA - aa}{2a.\text{cof.}\,\gamma} = \frac{(A+a).\ (A-a)}{2a.\text{cof.}\,\gamma}$$

Aïant donc trouvé la diſtance du centre C de la ſurface A, on poura tirer le cercle BG. Mais comme dans ce cas il faut préferer le calcul à la conſtruction, il faudra encore trouver la diſtance BA pour avoir le raïon BC.

Or par la nature du cercle on a

$$BA.\ AE = AQ.\ AG.$$

d'où l'on déduit

$$BA\,(2AC + BA) = AQ.\ AG$$

& par conſéquent

$$BA = -AC + \sqrt{(AC^2 + AG.AQ)}$$

&

$$CB = \sqrt{(AC^2 + AQ.\ AG)}$$

Ce

Ce qui etant trouvé, on trouvera après cela la diſtance Ag pour chaque angle γ. Car puiſque

$$Ag.\ Aq = AB.\ AE$$

&

$$Aq = Ag + 2AC.\,\text{coſ.}\,\gamma$$

on aura

$$Ag^2 + 2Ag.\ AC.\ \text{coſ.}\,\gamma = AB.\ AE$$

d'où l'on tire

$$Ag = -AC.\,\text{coſ.}\,\gamma + \sqrt{(AB.\,AE + AC^2.\,\text{coſ.}\,\gamma^2)}$$

Fig. 3. Or la diſtance AG etant connue, on aura

$$GD = AG + \text{coſ.}\,\gamma$$
$$DC = \text{ſin.}\,\gamma$$

&

$$CG = \sqrt{(AG^2 + 2AG.\,\text{coſ.}\,\gamma + 1)}$$

Et la refraction ſe trouvera par le Problème précedent.

Ou bien faiſant $\frac{CT - CD}{CD} = n$, on trouvera

$$z = \frac{DG - \sqrt{(DG^2 - 2n.\,DC^2)}}{DG}$$

Et pour les angles γ, qui ſont plus petits, il ſuffira de faire

$$z = \frac{n.\,DC}{DG}$$

R E-

REMARQUE.

§. 92. Le fondement de cette Solution consiste en ce que nous avons supposé, que la courbe, qui passe par les points G, ne differe presque point d'un arc circulaire, lequel par consequent pouroit lui être substitué. Mais comme la position des points G est assez arbitraire pour les angles γ, qui sont plus petits, il suffira de prendre un arc de cercle, qui passe par les points G répondans aux refractions, qui sont proches de l'horison. Nous eclaircirons maintenant cette méthode par un Exemple, en prenant derechef les refractions de la table de M. Bernoulli par la raison, que nous en avons alleguée ci-dessus (§. 80.)

EXEMPLE.

§. 93. Pour trouver premierement le rapport entre les perpendiculaires CD, CT, nous choisirons la refraction 63″, qui répond à l'angle $\gamma = 45°$. d'où nous tirerons (§. 90.)

$$CD : CT = 1 : (\text{cos. } 63'' + \text{sin. } 63'')$$

donc

$$CD : CT = 1 : 1{,}0003054$$

& partant $n = 0{,}0003054$.

Ce qui etant fait, nous prendrons de la table les deux refractions pour les angles

$$\gamma = 90° \qquad z = 34' : 53''$$
$$\gamma = 85 \qquad z = 9 : 59$$

detdesquelles, ſuivant la méthode donnée ci-deſſus (§. 89.) ou moïennant la formule

$$AG = (n.\text{coſec. } z + \text{tang. } \tfrac{1}{2} z)\, DC - AD$$

on aura pour le premier cas

Fig. 4. $$AG = 0{,}0351 = A.$$

pour le ſecond

$$Ag = 0{,}0191 = a$$

& partant

$$AC = x = \frac{(A+a).(A-a)}{2a.\ \text{coſ. } \gamma} = 0{,}2605$$

d'où nous voïons, que la diſtance AC eſt à peine la quatrieme partie du demi-diametre de la terre, & que par conſéquent l'arc BG n'eſt que de 8 degrés.

Or AC etant trouvé, on aura de même par la formule

$$BA = -AC + \sqrt{(AC^2 + AG^2)}$$

$$BA = 0{,}00235.$$
$$CB = 0{,}26285.$$
$$AE = 0{,}52335.$$

de ſorte que la hauteur BA eſt environ de deux lieuës d'Allemagne.

Ces quantités une fois déterminées ſerviront de données pour trouver telle refraction, que l'on voudra. Car moïennant la formule

$$Ag = -AC.\text{coſ. }\gamma + \sqrt{(AB.AE + AC^2 \text{coſ. } \gamma^2)}$$

en

en y fubftituant les valeurs trouvées, on aura pour chaque diftance Ag

$$Ag = -0{,}2605.\text{cof.}\gamma + \sqrt{(0{,}000123 + 0{,}06786.\text{cof.}\gamma^2)}$$

&

$$z = (DG - \sqrt{(DG^2 - 2\eta.DC^2)}) : DC$$

Par ex. pour l'angle $\gamma = 80^\circ$. on trouvera par la premiere de ces equations $Ag = 0{,}00133$.

& par la feconde $z = 0{,}00169$. Ce qui etant converti en minutes & en fecondes, donnera $5' : 28''$. pour la refraction, précifément comme on la trouve dans la table.

REMARQUE.

§. 94. Comme les refractions, que l'on met pour bafe en cette methode, doivent être fort exactes, il eft à propos de les examiner de la maniere que nous avons indiquée (§. 89.) avant que de s'en fervir pour trouver les autres.

Car par-là on s'appercevra tres facilement, fi elles font trop grandes ou trop petites & on fera en etat de les corriger affez exactement. Il faudra le faire de meme lorfqu'on voudra fe fervir des fuites, que nous avons trouvées. Au refte ces methodes etant fi exactes & applicables à tous les etats de l'athmofphere, il eft evident, que par ces moïens on poura porter les obfervations aftronomiques, qui dépendent des refractions, à une tres grande précifion.

Car il ne faudra qu'obferver quelques refractions dans le tems même qu'on les fait, pour en deduire celles que l'on cherche.

SEC-

SECTION III.

Des refractions circulaires, de leur ufage pour la détermination des refractions terreftres: & de divers autres Problêmes dépendans des Refractions tant aftronomiques que terreftres.

Problême VI.

§. 95. *Déterminer les refractions, dans l'hypothefe des trajectoires circulaires.*

Solution.

Fig. 5. Soient A J, BH deux couches d'un milieu dans lequel la lumiere eft brifée de la forte qu'elle y décrive des arcs de cercle. Soient AgG, AhH deux de ces arcs, qu'elle y décrit, E & F leurs centres. Joignez les points A,G,F, & A,H,E pour avoir les triangles AGF, & AHE, & par A & le centre C menez la Verticale BD. & par les centres F, E la droite FE prolongée jufqu'en D, & les lignes tirées auront entre elles les rapports fuivans.

1°. FD eft perpendiculaire à BD (§. 38. 39.)

2°. Les centres de tous les autres arcs, que la lumiere parcourt fe trouveront fur la droite FD.

3°. La

3°. La refraction en AhH sera $=$ AEH & pareillement celle en AgG $=$ AFG.

4°. Les raïons AE, AF seront en raison des cosécantes des distances du Zénith. (§. 38.)

5°. Donc les refractions seront en raison directe des arcs parcourus, & en raison réciproque de la cosécante des distances du Zénith, & par conséquent comme les sinus de cette distance multipliés par la route parcourue.

COROLLAIRE I.

§. 96. Si la courbure de la route est fort petite, comme elle l'est dans le cas où nous allons appliquer le Problême present, on poura lui substituer la chorde soutendante, & au lieu de l'angle gAB on prendra l'angle GAB.

COROLLAIRE II.

§. 97. Abaissant donc la perpendiculaire GK sur AB, on aura GK $=$ AG. sin. GAB, d'où il suit, que les refractions seront en raison constante des perpendiculaires

GK. (§. 95. n. 5.)

Remarque I.

§. 98. Comme les refractions dans l'hypothese de la trajectoire circulaire, sont en raison des arcs parcourus, multipliez par les sinus de la distance du Zénith (§. 95.) & l'expression différentielle des arcs en général etant $= dx = rdr : \sqrt{(rr - vv)}$, on aura pour les refractions circulaires

$$dz = m \text{ sin. } \gamma. \, rdr : \sqrt{(rr - vv)}$$

Mais il est en général (§. 59.)

$$dz = dv : \sqrt{(rr - vv)}$$

d'où l'on tire

$$m \text{ sin. } \gamma. \, rdr = dv$$

& en prenant les intégrales

$$\tfrac{1}{2} m \text{ sin. } \gamma \, rr = v$$

$$\tfrac{1}{2} m. \, rr = \frac{v}{\text{sin. } \gamma}$$

Fig. 3. Ce qui nous fait voir, que le rapport entre les perpendiculaires CD, CT croît en raison constante du quarré du raïon CM, & par conséquent assez uniformement pour des couches du milieu, qui ne sont pas fort eloignées l'une de l'autre.

REMARQUE II.

§. 99. En appliquant le fecond Corollaire aux refractions aftronomiques, j'ai trouvé qu'on peut les déterminer affez exactement, bien que la hauteur de l'athmofpere, que l'on trouve en ce cas, foit auffi peu la véritable, que celle qu'on trouve dans l'hypothefe des refractions rectilignes (§. 88.)

REMARQUE III.

§. 100. Comme les objets terreftres, fur lesquels on peut remarquer quelque refraction, font fort peu elevés, & que la diftance, dans laquelle on peut encore les voir, n'eft tout au plus que de deux ou trois degrés de la furface de la terre; il s'en fuit que la partie de la trajectoire pour les objets terreftres eft tres petite & que fans aucune erreur fenfible on poura lui fubftituer un arc de cercle, dont le raïon eft le raïon de courbure de la trajectoire, cet arc de cercle etant celui, qui approche le plus de tous de la veritable courbe. Mais pour faire voir, que cette hypothefe doit être néceffairement tolérable, il faut confiderer que la courbure de l'arc, qu'on fubftitue, egale toujours la refraction, laquelle n'etant pour les objets terreftres les plus eloignés, que tout au plus de 8 ou 10 minutes, il eft évident, que la déviation ne fauroit être plus grande, que celle du cercle ofculateur de la courbe à une diftance de 8 ou 10 minutes du point d'atouchement, de forte que fi cette déviation devoit être fenfible, il faudroit que la courbure de la trajectoire crût ou décrût avec une viteffe extrême, ce qui eft contre toute expérience. Ainfi nous fommes en droit de fuppofer que la route de la lumiere dans deux couches affez voifines, eft circulaire.

REMARQUE IV.

§. 101. Cette hypothefe etant une fois etablie comme infiniment approchante de la vérité, nous allons l'appliquer aux différens cas, qui dépendent des refractions terreftres. Il s'agit, avant toutes chofes, de déterminer la droite AC, que nous
Fig. 5. appellerons le *raïon horifontal*, lequel etant trouvé, tous les autres AE, AF le feront auffi. Car ils font comme les fecantes des elevations apparentes des objets au-deffus de l'horifon. Emploïons premierement les obfervations, qu'on peut faire fur les objets terreftres, & après nous nous fervirons auffi des refractions aftronomiques, pour le déterminer.

PROBLÊME VII.

Fig. 6. §. 102. *Soient* A, B *deux endroits, dont on connoit* BD *ou l'elevation de l'un au-deffus de l'autre, & les angles* GAH, FBC, *que les tangentes de la route de la lumiere à fes deux extrêmités forment avec les droites* CA, CB *tirées du centre de la Terre* C, *trouver le raïon horifontal, la refraction aux deux endroits, & leur diftance.*

SOLUTION.

La route de la lumiere pouvant être regardée comme circulaire (§. 100.) le Probléme se réduit au suivant, qui est purement géometrique.

Deux cercles AD, HB *etant donnés de position & concentriques, trouver un troisieme, qui les coupe sous des angles donnés.*

Que ce cercle soit AB, son centre R, tirez les raïons AR, BR, & du centre C menez-y des perpendiculaires CP, CQ. Ce qui etant fait soit

l'angle $GAH = \gamma$ le raïon $AC = 1$
$FBC = \omega$ $CR = r$
$AR = x = BR.$

d'où on aura

$CP = \text{cof. } \gamma.$ $CQ = r.\ \text{cof. } \omega$
$AP = \text{fin. } \gamma.$ $BQ = r.\ \text{fin. } \omega$
$PR = x - \text{fin. } \gamma$ $QR = x - r.\ \text{fin. } \omega.$

Joignez les centres C, R par la droite CR qui fera l'hypothenuse des deux triangles rectangles CPR, CQR, ce qui donne

$$CP^2 + PR^2 = CQ^2 + QR^2.$$

& en substituant les valeurs trouvées

$$\text{cof. } \gamma^2 + (x - \text{fin. } \gamma)^2 = r^2.\ \text{cof. } \omega^2 + (x - r.\ \text{fin. } \omega)^2$$

d'où l'on obtient

$$x = \frac{(r+1).(r-1)}{2(r.\ \text{fin. } \omega - \text{fin. } \gamma)}$$

 Cette

Cette equation détermine le raïon AR. Prolongez la verticale AC & abaissez-y la perpendiculaire RE, & AE sera le raïon horisontal (§. 38. 39.), qui soit $= R$, & on aura

$$R = x. \text{ fin. } \gamma. = \frac{(rr - 1)\text{ fin. } \gamma}{2(r \text{ fin. } \omega - \text{fin. } \gamma)}$$

De-là on trouvera de plus

$$CE = R - 1$$
$$ER = x. \text{ cof. } \gamma$$
$$CR = \sqrt{(xx - 2x. \text{ fin. } \gamma + 1)}$$

$$\text{cot. } ECR = EC : ER$$
$$\text{fin. } CBR = x. \text{cof. } \omega : \sqrt{(x^2 - 2x \text{ fin. } \gamma + 1)}$$

d'où enfin on aura l'angle ACB, qui donne la distance horisontale des deux endroits, & de-là l'angle AgF, qui est le double de chaque refraction terrestre.

Exemple I.

§. 103. Mr. Cassini a observé au pied du clocher à Massanne la dépression apparente de la surface de la mer, & la trouva de 50′, 20″. & la hauteur de la Tour au-dessus du niveau de la mer de 408½ toises. D'où il a eté

$\gamma = 90°.$ $\quad AC = 1$

$\omega = 89, 9', 40''.$ $\quad CB = 1{,}000125 = r$

Ces valeurs etant substituées dans la formule

$$x = \frac{rr - 1}{2(r. \text{ fin. } \omega - \text{ fin. } \gamma)}$$

on

en trouve

$$x = 7{,}06 = R.$$

De forte que le raïon horifontal etoit fept-fois plus grand que celui de la terre.

Exemple II.

§. 104. Dans une autre obfervation, que Mrs. les Académiciens de Paris ont faite, A etoit la Tour à Aigues-mortes, B le fommet de la montagne les Houpies, & l'angle

$$\begin{aligned} \gamma &= 89^\circ,\ 15',\ 19'' \\ \omega &= 89,\ 19,\ 40. \\ ACB &= 0,\ 35,\ 36. \end{aligned}$$

donc

$$FgA = 0,\ 4,\ 57 = z.$$

Or dans cet exemple tous les angles font donnés, & le raïon AB etant fort horifontal, on trouvera

$$x = R = \frac{ACB}{FGA} = 7{,}02.$$

Ce qui ne differe que fort peu de la valeur trouvée du premier exemple, & fait voir que la conftitution de l'air etoit affez egale dans l'un & l'autre cas.

Remarque.

§. 105. On voit bien, qu'il y a encore plusieurs autres manieres de trouver le raïon horisontal, suivant les différentes combinaisons des parties, qui peuvent déterminer la position & le diamétre de l'arc circulaire AB. Mais comme on n'est pas toujours à même de faire les observations requises, il sera peut-être plus utile de se servir des refractions astronomiques, d'autant plus qu'on peut les observer beaucoup plus commodément, que celles qui ont lieu pour les objets terrestres.

Problême VIII.

§. 106. *Trouver le raïon horisontal moïennant les refractions astronomiques.*

Solution.

Fig. 7. Soit AH un raïon de lumiere, continué en h. AG un autre infiniment proche du premier, & pareillement continué en g. L'angle $hAC = \gamma$, l'angle $gAC = \gamma - d\gamma$. la refraction astronomique pour le raïon $AH = z$, celle pour le raïon $AG = z - dz$. Du centre de la terre C tirez la droite Cg en sorte que l'angle gCA soit $= d\gamma$. Cette droite coupera le raïon Ag sous le même angle, que la verticale AC coupe le raïon AH, & un spectateur, qui se trouveroit en g verroit un astre par le raïon gAG egalement distant de son Zénith, que le spectateur en A voit un autre par le raïon AH du sien. Soit le raïon de courbure $AE = gE$, & la refraction de la petite partie Ag de la trajectoire sera $= Ag : AE$,

donc

donc la refraction aftronomique de l'aftre G. vu en g fera $= z - dz + Ag : AE$. Mais l'elevation apparente des deux aftres aux deux endroits refpectifs etant la même, & les deux raions g G, h H n'etant eloignés l'un de l'autre qu'infiniment peu, il eft clair que les refractions refpectives aux deux endroits feront en raifon de la force refringente en A & g. Faifant donc celle en $A = 1$, celle en $g = 1 + dv$, on aura

$$(z - dz + \frac{Ag}{AE}) : z = (1 + dv) : j.$$

donc

$$z\,dv + dz = \frac{Ag}{AE}$$

Mais

$$AE = AD.\ \text{cofec.}\ \gamma.$$

&

$$AK = d\gamma + \frac{Ag}{AE}$$

Le calcul suivant à corriger. (V. Aftron. Jahrb. 1779, p. 187)

donc

$$Ag = d\gamma.\ \text{cofec.}\ \gamma$$

de-là en fubftituant

$$z\,dv + dz = d\gamma : AD.$$

or la différence Kg etant infiniment petite, dv fera proportionelle à Kg, faifant donc

$dv = m.Kg$, on aura, à caufe de $Kg = d\gamma.\ \text{cot.}\ \gamma$

$$d\gamma.\ m\,z\,\text{cot.}\ \gamma + dz = d\gamma : R$$

d'où l'on tire

$$R = \frac{d\gamma}{m\,z\,d\gamma.\ \text{cot.}\ \gamma + dz}$$

 Or

Or pour les refractions horifontales, comme les plus propres à ce fujet, on a $\gamma = 90°$, cot. $\gamma = 0$, & par conféquent

$$R = d\gamma : dz$$

Fig. 8. Conftruifez une courbe BM telle, que les abfciffes AP repréfentent les hauteurs apparentes des aftres, & les ordonnées PM les refractions répondantes. Tirez la touchante BT au point B, & le raïon horifontal fera à celui de la terre comme AT à AB. D'où l'on voit, que quelques refractions horifontales étant données, on poura conftruire le commencement de la courbe BM, qui fuffira, pour trouver la pofition de la tangente BT. Mais les refractions, dont on fe fervira, doivent être bien exactes.

Autrement.

Fig. 9. §. 107. Soit DB un cercle dont le centre eft C. Prenez fur la verticale BC un point A, tel qu'en faifant l'angle MAB $= \gamma$, & abaiffant la normale MQ fur CB, elle foit en raifon de la refraction, qui répond à l'angle γ. ce qui poura fe faire avec une exactitude fuffifante (§. 99.) d'autant qu'il ne faut accommoder le cas qu'aux refractions les plus horifontales. Erigez en A la perpendiculaire AD, qui fera en raifon de la refraction horifontale, de forte que AD $=$ nz. tirez une parallele PR infiniment proche de AD, & joignez A & P par la droite AP, de même que les points C, P, D par les droites PC, DC. Enfin abaiffez Pp fur AD perpendiculairement, & faites l'angle PAD $= d\gamma$, & vous aurez

$$PR = n(z - dz)$$
$$pD = ndz$$
$$CA : AD = pD : Pp$$

donc

donc

$$Pp = \frac{n^2 z dz}{CA}$$

Mais

$$Pp = AP.\ d\gamma = nzd\gamma$$

donc

$$nzd\gamma = n^2 z dz : CA$$

& partant

$$d\gamma : dz = n : AC$$

Mais par la Solution précedente $d\gamma : dz = R$
donc

$$R = n : AC$$

Or n & A C font donnés, & partant R auffi.

Théorême XXVIII.

§. 108. *La refraction terreftre eft à l'angle, que fait l'objet avec le lieu de l'obfervation au centre de la terre, comme le raïon de la terre au double raïon horifontal.*

De'monstration.

Soit A l'endroit de l'obfervation, B l'objet, AB la trajectoire de la lumiere, ou un arc de cercle, qu'on peut lui fubftituer, $AR = BR$ fon raïon, A E le raïon horifontal, & aiant tiré les tangentes AG, BF, qui fe coupent en g, l'angle FgA = ARB fera le double de la refraction terreftre en A ou B. Donc cette refraction fera $= \frac{1}{2} ARB = \frac{1}{2} AB : AR$. Mais faifant l'angle de la diftance apparente de l'objet du Zénith $= \gamma = GAH$, Fig. 6.

on

on aura $AR = AE. \text{cosec.}\ \gamma. = R. \text{cosec.}\ \gamma$, & la refraction $\zeta = \frac{1}{2}. AB : R. \text{cosec.}\ \gamma$. Mais la distance AB etant fort petite, il sera à tres peu pres $AB = AD. \text{cosec.}\ \gamma$. donc en substituant cette valeur, on trouvera $\zeta = \frac{1}{2}\ AD : R$, & partant

$$\zeta : ACD = 1 : 2\ R.$$

Corollaire.

§. 109. Ainsi le raïon horisontal etant $= 7$, la refraction terrestre sera la quatorzieme partie de l'angle ACD de la distance horisontale de l'objet B.

Théorême XXIX.

§. 110. *Tous les Objets, qui se trouvent sur une même verticale* DG *etant vus d'un même endroit* A, *paroissent plus elevés d'un même angle moïennant la refraction.*

Démonstration.

Car l'angle de refraction dépend uniquement de l'angle ACD, auquel elle est proportionelle (§. 108.) Or cet angle est le même pour tous les objets, qui sont sur la droite verticale DG. Donc &c.

Théorême XXX.

§. 111. *La grandeur apparente des objets, qui se trouvent sur une même verticale* B D, *&* *qui sont vus d'un même endroit* A *par des raïons visuels brisés, est la même, qu'elle seroit sans la refraction.*

Demonstration.

La grandeur apparente est la différence entre les elevations apparentes. Or la refraction augmentant ces elevations d'un même angle (§. 110.) il est evident, que leur différence sera toujours la même. Donc &c.

Théorême XXXI.

§. 112. *La refraction terrestre croît en même raison que la distance horisontale.*

Demonstration.

Elle n'est qu'une application du Théorême XXVIII.

Remarque I.

§. 113. Il faut bien observer, que c'est l'angle de refraction & non la distance G B, pour laquelle l'objet B paroit plus elevé. Car cette distance croît comme le quarré de la distance horisontale multiplié par la secante de l'elevation apparente au-dessus de l'horison.

Re-

Remarque II.

§. 114. La refraction terrestre n'etant qu'environ la quatorzieme partie de la courbure de la terre, ou de l'angle ACB, il est evident, qu'on ne sauroit faire abstraction de cette courbure lorsqu'on veut determiner les refractions terrestres & principalement les horisontales.

Problême IX.

§. 115. *La hauteur d'un objet par dessus la surface de la terre ou de la mer etant donnée, trouver la distance, à laquelle on peut encore le voir.*

Solution.

Soit A C le demi diamètre de la terre, A M sa
Fig. 10. surface, M o la hauteur de l'objet, A E le raïon horisontal, qui sera de même le raïon de la trajectoire o A qui touche la surface de la terre en A. Posant donc $AC = 1$, $oE = R$, $oM = y$, & considerant que les angles ACM, AEo, sont fort petits; on pourra faire l'analogie suivante. Aïant tiré la tangente AO, & prolongé CM en O, on aura à tres peu de près

$$Oo : OM = AC : AE$$

d'où l'on tire

$$y : OM = (R-1) : R$$
$$OM = Ry : (R-1)$$

CO

$$CO = 1 + \frac{Ry}{R-1} = \text{fec. } ACO.$$

Ce qui donne l'angle ACO, & l'arc AM fera $= \sqrt{\frac{2Ry}{R-1}} =$ exprimé en parties, dont le raïon de la terre eft l'unité.

Corollaire.

§. 116. La diftance, à laquelle on pouroit voir un objet fans la refraction eft $= \sqrt{2y}$, & par conféquent à la diftance trouvée $\sqrt{\frac{2Ry}{R-1}}$ comme $\sqrt{(R-1)}$ à $\sqrt{R}$, ou comme $\sqrt{(1-\frac{1}{R})}$ à 1; ce qui donne à tres peu près le rapport de $(2R-1)$ à $2R$. Ainfi le raïon horifontal etant $= 7$, ce rapport fera $= 13 : 14$; de forte que la refraction augmentera la diftance, à laquelle un objet peut encore être vu, de la treizieme partie.

Théorême XXXII.

§. 117. *L'etat de l'athmofphere reftant le même, la diftance, à laquelle un objet peut encore etre vu, croît en raifon de la racine quarrée de la hauteur de l'objet au-deffus de la furface de la terre ou de la mer.*

DÉMONSTRATION.

Car cette diſtance etant $= \sqrt{(\frac{2Ry}{R-1})}$ (§. 115.) elle ne dépend que du raïon horiſontal, & de la hauteur de l'objet. Mais dans l'hypotheſe du Théorème R eſt conſtant, donc la diſtance ſera comme $\sqrt{y}$, & partant en raiſon de la racine quarrée de la hauteur de l'objet au-deſſus de l'horiſon.

PROBLÊME X.

§. 118. *L'élevation d'un endroit au-deſſus de l'horiſon & le raïon horiſontal etant donnés, trouver la refraction, l'abaiſſement de l'horiſon véritable au-deſſous de l'apparent, & la diſtance de ſon extrémité apparente.*

SOLUTION.

Soit A M l'horiſon véritable, o un endroit elevé, o M ſa hauteur, o A le raïon de lumiere, qui touche l'horiſon en A, A ſera ſon extrémité apparente, A M la diſtance horiſontale. Soit A E le raïon horiſontal, & aïant joint les points E, o, par la droite E o, faites comme ci-deſſus, C A = 1, A E = R, M o = y, & vous aurez (§. 115.)

$$AM = \sqrt{\frac{2Ry}{R-1}} = ACM$$

Or

Or la refraction terrestre ζ est la $\frac{1}{2K}$ tieme partie de l'angle ACM, (§. 108.) donc

$$\zeta = \sqrt{\frac{y}{2R(R-1)}}$$

De plus l'abaissement apparent de l'horison est egal à l'angle CoE, mais les angles CEo, CoE etant fort petits, on aura

$$CoE : oCA = CE : Eo = (R-1) : R$$

d'où l'on tire

$$CoE = \frac{oCA.(R-1)}{R}$$

par conséquent l'abaissement apparent de l'horison marin est la $\frac{R-1}{R}$ tieme partie de la distance MCA de son extrêmité visible. Mais cette distance etant $= \sqrt{\frac{2yR}{R-1}}$, l'abaissement de l'horison sera $= \sqrt{\frac{2y(R-1)}{R}}$

Corollaire I.

§. 119. Ainsi l'Etat de l'air restant le même, la distance de l'extrêmité de l'horison, son abaissement, & sa refraction, feront dans un rapport constant de la racine quarrée de la hauteur de l'objet au-dessus de l'horison. Et si le raïon horisontal est $= 7$, ces trois quantités feront comme les nombres 14, 12, 1. ou en général comme $2R$, $(2R-2)$, 1.

Remarque.

§. 120. Mr. J. Caſſini, a obſervé l'abaiſſement apparent de l'horiſon de la mer ſur diverſes hauteurs, qu'il avoit méſurées géométriquement Ces obſervations ſe trouvent dans ſon *Traité ſur la Grandeur & la Figure de la Terre P. I. Ch.* 10. Nous verrons ci-deſſous, que la plûpart de ces hauteurs ſouffrent une correction conſiderable parcequ'elles ſont calculées ſans la refraction. Voici donc les hauteurs corrigées, & l'abaiſſement obſervé.

		y	CoE
à Collioure.	.	69 pieds.	0° : 8′ : 35″
à Perpignan.	.	216 .	0 : 15 : 0
à St. Elme.	.	609 .	0 : 26 : 20
à Tautavel.	.	1486 .	0 : 38 : 0
à Maſſanne.	.	2450 .	0 : 50 : 20

Or prenant les racines quarrées des hauteurs y, on trouvera qu'elles repreſenteront aſſez exactement l'abaiſſement répondant exprimé en minutes, & qu'il ne faudra que les augmenter environ d'une ſoixantieme partie, comme je l'ai trouvé par la formule du Problême IX. C'eſt ainſi qu'on aura

$\sqrt{69} = 8' : 18''$	au lieu de.		$8' : 35''$
$\sqrt{216} = 14 : 43.$	.	.	$15 : 0$
$\sqrt{609} = 24 : 36.$	.		$26 : 20$
$\sqrt{1486} = 38 : 33.$	.		$38 : 0$
$\sqrt{2450} = 49 : 30.$	.		$50 : 20$

Toutes ces obſervations ont eté faites aux mois de Janvier, de Fevrier & de Mars, & par conſéquent dans la ſaiſon de l'année où l'air eſt ſujet à de tres grandes variations. Néanmoins le calcul, dans

dans lequel on ſuppoſe l'etat de l'athmoſphere uniforme pour toutes, ne differe des obſervations que tout au plus d'une minute. Ainſi nous voïons, que par tout, où la différence d'une minute ne ſauroit être negligée, il ſera toujours néceſſaire de déterminer le raïon horiſontal exactement & par une obſervation immédiate, comme nous l'avons enſeigné aux Problêmes VII & VIII. Ce qui arrivera, lorſque de la hauteur d'un endroit y, on veut trouver une des trois quantités, que nous avons déterminées au Probl. X. Mais ſi par contre on cherche la hauteur d'une montagne par ſa diſtance & ſon elevation apparente, il ſuffira de ſuppoſer le raïon horiſontal $= 7$; particuliérement ſi la diſtance donnée n'eſt pas extrêmement grande, p. ex. au-deſſous de deux degrés de la terre.

Théorême XXXIII.

§. 121. *Dans le Nivellement l'abaiſſement* Oo, *d'un objet, que l'on voit en* A *ſur la ligne boriſontale apparente* AO, *eſt à la diſtance* oM *de cet objet de la ſurface ou de l'boriſon véritable* AM, *comme le raïon de la terre, à la différence entre ce raïon & le raïon boriſontal.*

DÉMONSTRATION.

Par le Problême IX. (§. 115.) nous avons

$$OM = \frac{Ry}{R-1}$$

or

$$oM = y$$

donc

$$oO = \frac{Ry}{R-1} - y = \frac{y}{R-1}$$

& partant

$$oO : oM = \frac{y}{R-1} : y = 1 : (R-1)$$

COROLLAIRE I.

§. 122. Si donc le raïon horifontal eft $= 7$, on trouvera oM fix-fois plus grande que oO, de forte que la Refraction eleve les objets vus fur l'horifon apparent AO, de la fixieme, ou en général de la $\frac{1}{R-1}$ tieme partie de leur diftance de la furface ou de l'horifon véritable.

COROL-

Corollaire II.

§. 123. Comme dans les tables du nivellement, on exprime ordinairement toute la hauteur O M, il eſt evident, qu'il faut la diminuer d'une ſeptieme partie, ſi le raïon horiſontal eſt $=7$, pour avoir la véritable hauteur M o, puiſque l'objet, qu'on croit voir en O, ſuivant la droite horiſontale, ſe trouve d'une ſeptieme, ou en général, d'une $\frac{1}{K}$ tieme partie de M O plus bas en o.

Remarque.

§. 124. En ſuppoſant le raïon horiſontal $=7$, j'ai calculé la table ſuivante, dont la premiere Colonne exprime la hauteur o O, de laquelle l'objet paroit plus elevé, & la ſeconde donne la diſtance A O ou A M, qui lui répond. En prenant quelque milieu entre le diametre de l'Equateur & l'axe de la terre, j'ai ſuppoſé que la diſtance A M etant de 10000 toiſes, la hauteur entiere O M ſoit de 15,311 toiſes, & par conſéquent o O de $\frac{15,311}{7}$ $=2,1873$ toiſes, d'où les nombres de la table ſe deduiſent, puiſque o O croît ou decroît comme le quarré de la diſtance A M. (§. 118.) L'uſage de cette table peut s'appliquer à tout ce que nous avons demontré ſur la fig. X. & à ce que nous en dirons encore. C'eſt ainſi qu'aïant trouvé o O, pour une diſtance quelconque A M, on aura o M en multipliant o O par 6, & en la multipliant par 7 on aura toute la hauteur O M, qui eſt independante des refractions, & dont on poura ensuite toujours deduire o O, ou o M pour un autre raïon horisontal plus grand ou plus petit que celui dont nous nous sommes servis pour la cônstruction de la table.

Il sera facile de trouver les hauteurs o O pour des distances plus grandes que celles, auxquelles la table s'etend, en considerant qu'à une distance double, la hauteur o O, est quatre-fois plus grande, & qu'en général il est o O $\backsim$ A M².

Table

Table des toifes, dont il faut diminuer la hauteur des endroits vus dans la ligne horifontale. Fig. X.

o O	A M	o O	A M	o O	A M.
1	6761	34	39427	67	55344
2	9562	35	40002	68	55758
3	11711	36	40570	69	56166
4	13523	37	41130	70	56571
5	15119	38	41680	71	56974
6	16562	39	42226	72	57374
7	17889	40	42764	73	57770
8	19124	41	43296	74	58165
9	20285	42	43820	75	58556
10	21388	43	44338	76	58940
11	22425	44	44851	77	59333
12	23422	45	45357	78	59719
13	24379	46	45860	79	60098
14	25300	47	46354	80	60477
15	26187	48	46845	81	60855
16	27046	49	47331	82	61230
17	27879	50	47812	83	61600
18	28687	51	48287	84	61970
19	29470	52	48758	85	62338
20	30238	53	49224	86	62705
21	30985	54	49687	87	63069
22	31715	55	50144	88	63430
23	32427	56	50599	89	63788
24	33125	57	51049	90	64146
25	33808	58	51495	91	64501
26	34478	59	51937	92	64854
27	35134	60	52375	93	65206
28	35778	61	52810	94	65556
29	36412	62	53240	95	65903
30	37035	63	53668	96	66250
31	37647	64	54092	97	66595
32	38249	65	54514	98	66937
33	38842	66	54931	99	67277
34	39427	67	55344	100	67615.

Remarque II.

§. 125. Puisque les objets terrestres assez eloignés pour que la refraction soit sensible, paroissent ordinairement fort peu elevés au-dessus de l'horison, de sorte que l'angle de leur hauteur apparente n'est que de quelques degrés, on peut supposer que la refraction les eleve de la même quantité de toises, qu'elle eleve l'objet o, lorsqu'il est à la même distance. Ainsi si l'on calcule leur hauteur sans retrancher premierement de l'angle de leur elevation apparente l'angle de la refraction, il faudra diminuer leur hauteur trouvée du nombre de toises, qu'on trouvera répondre dans la table precédente à la distance, à laquelle ils ont eté observés. Nous avons deja remarqué ci-dessus (§. 120.) que les hauteurs de presque toutes les montagnes mesurées en France de même que dans d'autres parties du monde ont besoin de cette correction, & nous en donnerons des exemples à la fin de ce traité.

Problême XI.

§. 126. *On observe le moment, auquel le Soleil couchant cesse d'eclairer une nuée verticalement au-dessus de l'endroit de l'observation, trouver la hauteur de cette nuée.*

Solu-

Solution.

Du moment donné cherchez la profondeur du Soleil au-deſſous de l'horiſon, & ſouſtraïez-en la refraction aſtronomique horiſontale, & vous aurez l'angle A C M, & partant l'arc A M, lequel etant converti en toiſes, vous donnera dans la table precédente la hauteur o O, & partant auſſi la hauteur o M de la nuée au-deſſus de l'horiſon A M.

Remarque.

§. 127. Ce Problême ne ſauroit s'appliquer avec quelque exactitude, qu'aux Cas, où les raïons du Soleil couchant touchent la ſurface de la mer, ou une plaine horiſontale & peu elevée par-deſſus le niveau de la mer. Car ſi un endroit plus elevé jettoit ſon ombre ſur la nuée, on ne trouveroit que tout au plus la hauteur de la nuée au-deſſus de cet endroit, & même fort inexactement, puiſque la refraction aſtronomique ſera différente de l'horiſontale.

Ainſi ce Problême etant de peu d'uſage, je ne m'arrêterai pas à l'appliquer aux cas, où la nuée n'eſt point verticale, d'autant qu'on a d'autres moïens de trouver leur hauteur.

Problême XII.

§. 128. *Une table des refractions astronomiques pour un endroit etant donnée, trouver une autre pour un endroit plus ou moins elevé, mais dont l'elevation soit donnée.*

Solution.

Fig. 6. Soit l'un des endroits A, l'autre plus elevé H. soit AB un raïon de lumiere, que l'on conçoive continué au-delà de B jusqu'à l'extrêmité de l'athmosphere. Faisons comme dans le Problême VII.

$$HAG = \gamma.$$
$$FBC = \omega.$$
$$AC = 1.$$
$$AE = R.$$
$$AH = y.$$

La refraction astronomique en A $= z$, celle en B $= \varphi$, il est evident que l'angle AgF sera la différence de ces refractions, & partant $= z - \varphi$.

Or cet angle AgF est double de la refraction terrestre en A & B, & par conséquent il sera la $\frac{1}{R}$ tieme partie de l'angle ACB, d'où l'on aura

$$\varphi = z - \frac{ACB}{R}$$

Or

Or la table des refractions pour l'endroit A etant donnée, on en trouvera le raion horifontal R, qui lui convient par le Probl. VIII. (§. 106.) Ainfi il ne s'agit que de chercher l'angle ACB répondant à chaque angle γ. ce qu'on fera le plus commodement de la maniere qui fuit.

1°. Les droites R & y etant données, faites $CG = 1 + \frac{R\,y}{R-1}$, qui fera la fécante de l'angle ACB lorfque γ eft $= 90°$. (§. 115.) d'où vous aurez l'angle ACB, & partant $GgB = FgA = \frac{ACB}{R}$, & $FBC = 90° - \frac{R-1}{R}$. $ACB = \omega$.

2°. Aïant trouvé l'angle ω répondant à l'angle $\gamma = 90°$, cherchez le rapport entre les finus de ces deux angles, parceque ce rapport etant conftant pour tous les angles γ, vous donnera les angles, ω, qui leur répondent.

3°. Or puifque

$$CAg + AgB + gBC + BCA = 360°,$$

&

$$\begin{aligned} CAg &= 180° - \gamma \\ gBC &= \omega \\ AgB &= 180 - AgF \\ ACB &= R.\ AgF \end{aligned}$$

en fubftituant ces valeurs, on aura

$$\gamma - \omega = (R-1).\ AgF.$$

& par-

& partant

$$A g F = \frac{\gamma - \omega}{R - 1}.$$

donc

$$\varphi = z - \frac{\gamma - \omega}{R - 1}$$

Ainsi de chaque refraction z répondante à un angle γ en A, vous en trouverez une autre φ, qui répondra à l'angle ω en B.

Remarque.

§. 129. En suivant cette méthode, & supposant le raion horisontal $= 7$, j'ai trouvé que si l'endroit B est de 1000 toises plus elevé, que l'endroit A, il faut diminuer les refractions répondantes aux mêmes distances du Zénith environ d'une sixieme partie.

Problême XIII.

Fig. 11. §. 130. *Un raion entrant dans l'athmosphere en* B *suivant la direction* LB *parallele à l'axe* DC, *&* *touchant la surface de la terre en* A, *trouver le point du concours avec l'axe en* F.

So-

Solution.

Aïant prolongé la droite LB, menez-y la perpendiculaire Ct, faites l'angle tCA = ACT egal à la refraction astronomique horisontale, CT = Ct, tirez TF perpendiculaire à CT, qui déterminera le point F. Or il est evident, que les droites Bt, TE, touchent la trajectoire BAC aux deux extrêmités en B & E, donc le rapport entre les perpendiculaires Ct ou CT & CA, est le même que le rapport entre les sinus de l'angle d'inclinaison & de l'angle brisé de la lumiere, qui entre du vuide dans l'air naturel (§. 70.) & par conséquent il est donné (§. 90.) de même que la refraction horisontale. Mais les droites LB, CD etant paralleles, & Ct perpendiculaire, l'angle tCF sera droit. D'où l'on trouve l'angle CFT egal à l'angle tCT, & par conséquent double de la refraction horisontale. Faisant donc

$$CA = 1,\ CT = v,\ tCA = z,$$

on trouvera

$$CF = v.\ \text{coséc.}\ 2z.$$

Corollaire.

§. 131. Si la direction de la lumiere n'eſt point paralléle à l'axe, mais qu'elle fait un angle D C d $= \epsilon$, le point du concours ſera en f.
Or l'angle T C f ſera $= 2z + \epsilon$, donc
$Cf = v.$ coſéc. $(2z + \epsilon)$.

Exemple.

§. 132. Que la droite C d joigne les centres du Soleil & de la Terre, le raïon L B ſoit ſuppoſé emanant du bord du Soleil, il eſt evident que C f ſera la longueur de l'ombre de la terre, & l'angle D C d ſera le demi-diametre apparent du Soleil.
Faiſons $\epsilon = 16'$. $z = 33'$. $v = 1{,}0003054$, & nous aurons

$$CF = v. \text{ coſéc. } 82' = 41{,}94$$

de ſorte que dans ce Cas la longueur de l'ombre de la terre ſera d'environ 42 de ſes demi-diametres, ce qui fait à peu près les deux tiers de la plus grande diſtance de la Lune. Du reſte il eſt clair que cette longueur varie en raiſon directe de la perpendiculaire C T $= v$, & en raiſon reciproque de la ſomme de la double refraction horiſontale & du demi-diametre apparent du Soleil.

REMARQUE I.

§. 133. Ce Problême & son Corollaire sont indépendans d'aucune hipothese particuliere, & les données qu'ils exigent se trouvent immédiatement des observations. On l'appliqueroit aussi facilement aux Crepuscules, s'il étoit démontré qu'ils ne dépendent que d'une simple reflexion de la lumiere, & que celle que les particules qui sont à l'extrémité de l'athmosphere reflechissent, est encore assez forte, pour que nous puissions nous en appercevoir, dès qu'elle paroit à l'horison. Car en supposant la dépression du Soleil au commencement du crepuscule de 19 degrés, on trouve que ces 19 degrés egalent la somme de la triple refraction horisontale & du double de l'angle BCt. Ainsi faisant la refraction horisontale $= 33'$, l'angle BCt sera $= \frac{19^\circ - 1^\circ, 39'}{2} = 8^\circ, 40', 30''$. Donc la hauteur de l'air sera $= v$. séc. $(8^\circ, 40', 30'')$. Soit v comme ci-dessus $= 1{,}0003054$, on aura

$$CB = 1{,}01158$$

de sorte que la hauteur de l'air, qui reflechit encore la lumiere seroit la $\frac{1}{86}$ me partie du demi-diametre de la terre.

RE-

REMARQUE II.

§. 134. On peut encore se servir de la position du point F pour trouver les refractions, en invertant le Problême. Pour cet effet on envisage l'athmosphere comme un milieu caustique, dont le foïer est en F. Il n'est pas besoin de considerer toute la courbure B A E, mais on n'en prendra que la moitié, ce qui eloignera d'avantage le foïer. Et comme les raïons, qui tombent dans l'athmosphere à différentes distances de l'axe D C, ont aussi des foïers inégalement eloignes du centre C, il sera facile d'en déterminer autant que l'on voudra moïennant les refractions données, & on trouvera les foiers intermédiaires, en considerant que ceux des raïons qui sont tres proches de l'axe D C s'approchent du centre C comme les cosinus des angles γ, ou comme les sinus des angles de l'incidence de la lumiere sur sa surface A. &c.

PROBLÊME XIV.

§. 135. *L'angle de l'elevation apparente d'une montagne & sa distance horisontale etant donnés, trouver sa hauteur.*

Solution.

Soit A l'endroit de l'obſervation, B le ſommet *Fig. 6.* de la montagne, on connoit l'angle HAG, qui eſt ſa diſtance apparente du Zenith, & l'angle ACB de ſon eloignement horiſontal, & le raïon horiſontal etant ſuppoſé = 7, on fera l'analogie ſuivante

$$BC : \text{ſin.}\,(CAG - \tfrac{1}{14}\,ACB) = AC : \text{ſin.}\,(FBC - \tfrac{1}{14}\,ACB)$$

ce qui donne

$$BC = \frac{AC.\ \text{ſin.}\,(CAG - \frac{1}{14}\,ACB)}{\text{ſin.}\,(FBC - \frac{1}{14}\,ACB)}$$

Autrement.

En cherchant la diſtance CG, qui ſera =

$AC.\ \frac{\text{ſin.}\ HAG}{\text{ſin.}\,(HAG - ACB)}$, il faudra en

ſouſtraire la diſtance GB, dont la montagne paroit plus elevée, que vous trouverez

$= \tfrac{1}{7}\,(\text{ſéc.}\ ACB - AC).\ \text{coſéc.}\ HAG.$
(§. 113. 115.)

Remarque I.

§. 136. La diſtance horiſontale etant exprimée en toiſes, la quantité ½ (ſec. ACB — AC) ſe trouvera dans la table, que nous avons donnée ci-deſſus. Et puiſque l'angle HAG ne differe la plus part que d'environ un ou deux degrés d'un angle droit, ſa coſecante poura être ſuppoſée = 1, de ſorte que la diſtance GB poura être poſée egale à ½ (ſec. ACB — AC), & ſe trouvera immédiatement de la Table. (§. 124.)

Remarque II.

§. 137. Moïennant la ſeconde Solution on poura corriger les hauteurs des montagnes, qu'on a meſurées jusqu'ici ſans avoir egard à la refraction, & il ne faudra que ſavoir la diſtance, à laquelle elles ont eté meſurées.

Je vais maintenant donner les exemples, en corrigeant la plûpart de celles, qui ſe trouvent dans le livre de Mr. Caſſini cité ci-deſſus. (§. 120.) Il importera de ſavoir leur hauteur plus exactement, parceque pluſieurs obſervations, qu'on y a faites ſur l'abaiſſement de l'horiſon marin & ſur les hauteurs Barométriques, en dépendent, & on verra pourquoi les hypotheſes ſur ces hauteurs du Barometre n'ont jamais voulu s'accorder avec les expériences, vu que diverſes de ces montagnes ont eté ſuppoſées de 40 jusqu'à 50. toiſes trop hautes, & d'autres preſque d'autant trop petites. Si donc les hauteurs Barométriques n'etoient pas même ſujettes à la moindre irrégularité, il auroit

roit toujours eté impoſſible de les faire quadrer aux hauteurs des endroits déterminées avec ſi peu d'exactitude.

Exemples.

§. 138. Je nommerai la diſtance horiſontale de la montagne de l'endroit de l'obſervation D, la hauteur de la montagne au-deſſus du niveau de cet endroit; telle que Mr. Caſſini l'a trouvée ſans la refraction A, la différence GB = R, & la hauteur véritable H = AH, de ſorte que

$$A - R = H.$$

Or la diſtance D etant donnée, on la cherchera dans la ſeconde colonne de la table du §. 124. & on trouvera dans la premiere colonne la différence R.

I^re. *Observation au signe Septentrional.*

Le Canigou. . .	A	=	1441,0 toises
D = 28767. . .	R	=	18,0
Le Canigou au-dessus de la mer	H	=	1423,0
Le Mousset. . .	A	=	1253,0
D = 35145. . .	R	=	27,0
	H	=	1226,0

II. *Observation à Collioure.*

Matelotte.	D = 2228	H = 336,4
Massanne	D = 3046	H = 408,3
St. Elme.	D = 675	H = 101,5

III. *Observation à St. Elme.*

Le Canigou.	A	=	1442,0
D = 26912.	R	=	16,0
	H	=	1426,0
Mais de la premiere observation		=	1423,0
Donc la Hauteur moïenne.		=	1424,5

Le

Le Puy de Bugarac.	A	=	650,5
D = 35936.	R	=	28,3
	H	=	622,2
La Matelotte. D = 1800	H	=	334,5
Dans la 2e. Observation	H	=	336,4
Hauteur moïenne de la Matelotte.			335,4

IV. *Observation à Perpignan sur la Tour de St. Jaques.*

Le Canigou.	A	=	1398,0
D = 21445.	R	=	10,0
	H	=	1388,0
La hauteur du Canigou sur la Mer		=	1424,5
Donc la tour de St. Jaques.		=	36,5
Le Puy de Bugarac.	A	=	610,6
D = 23946.	R	=	12,5
	H	=	598,1
St. Jaques au-dessus de la Mer		=	36,5
Bugarac sur la Mer.		=	634,6
Mais dans la 3e. Observation.		=	622,2
Hauteur moïenne de Bugarac.		=	628,4

V. *Observation à Tautavel.*

Le Canigou. .	A	=	1184,0
D = 20812. .	R	=	9,6
	H	=	1174,4
La Canigou au-dessus de la Mer.		=	1424,5
Tautavel au-dessus de la Mer.		=	250,1
Le Mouffet. .	A	=	994,0
D = 24600.	R	=	13,2
	H	=	980,8
Le Mouffet au-dessus de la Mer.		=	1226,0
Tautavel. .		=	245,2
Hauteur moïenne de Tautavel.		=	247,6.
Ou reciproquement la Hauteur moïenne du Mouffet.		=	1228,0.

VI. *Observation à Magrin.*

Le Canigou	A	=	1364,0
D = 66700.	R	=	97,2
	H	=	1266,8
Le Canigou au-dessus de la Mer.		=	1424,5
Magrin au-dessus de la Mer.		=	157,7
Le Puy Laurent.	A	=	20,0
D = 4530.	R	=	0,5
	H	=	19,5
La Hauteur de Magrin.		=	157,7
Celle du Puy-Laurent.		=	177,2

VII. *Observation sur le Puy-Laurent.*

Rupeyroux.	A	=	310,5
D = 43521.	R	=	41,4
	H	=	269,1
La Hauteur du Puy-Laurent.		=	177,2
Celle de Rupeyroux.		=	446,3

VIII. *Observation à Rupeyroux.*

Le Plomb de Cantal.	A	=	585,5
D = 47665.	R	=	49,6
	H	=	535,9
La Hauteur de Rupeyroux.		=	446,3
Celle du Plomb de Cantal.		=	982,2
Le Puy de Violent.	A	=	452,5
D = 48785.	R	=	52,0
	H	=	400,5
La Hauteur de Rupeyroux.		=	446,3
Celle du Puy de Violent.		=	846,8

IX. *Observation à Rodes.*

Rupeyroux.	A	=	89,0
D = 14228.	R	=	4,5
	H	=	84,5
La Hauteur de Rupeyroux.		=	446,3
Celle de Rodes.		=	361,8

X. *Observation à Bastide.*

Cantal.	A	=	562,0
D = 28954.	R	=	18,4
	H	=	543,6
La Hauteur du Cantal.		=	982,2
Celle de la Bastide.		=	438,6
La Courlande.	A	=	415,0
D = 47580.	R	=	49,4
	H	=	365,6
La Hauteur de la Bastide.		=	435,7
La Courlande.		=	801,3

La Coste.	A	=	428,0
D = 51637.	R	=	56,3
	H	=	371,7
La Hauteur de la Bastide.		=	435,7
Celle de la Coste.	.	=	807,4
Le Mont d'or.	A	=	617,0
D = 48588.	R	=	51,6
	H	=	565,4
La Hauteur de la Bastide.		=	435,7
Celle du Mont d'or.		=	1001,1

XI. *Obſervation ſur le Lage-Chevalier.*

Le Mont d'or.	A	=	716,0
D = 49228.	R	=	53,0
	H	=	663,0
La Hauteur du Mont d'or.		=	1001,1
Celle du Lage-Chevalier.		=	338,1
Le Puy de Dome.	A	=	485,0
D = 39556.	R	=	34,2
	H	=	450,8
La Hauteur du Lage-Chevalier.		=	338,1
Celle du Puy de Dome.		=	788,9

Il faut remarquer que dans les trois premieres Obſervations les Lettres A & H ſignifient les hauteurs abſolues des endroits ſur la Mer, mais dans toutes les ſuivantes elles ont la ſignification que je leur ai donnée au commencement de ce §.

Remarque.

§. 139. La Montagne de St. Barthelemi dont j'ai fait entierement abstraction dans le calcul précedent, a eté obſervée en quatre endroits, au ſigne Septentrional, à Rupoyroux, à Magrin & ſur le Puy-Laurent. Mais il ſemble qu'il s'y eſt gliſſé quelque erreur.

Apparemment n'a-t-on pas meſuré le même ſommet de cette Montagne aux deux premiers endroits, & aux deux derniers, parceque ces obſervations different d'environ 100 toiſes, & que la montagne eſt fort grande & a pluſieurs ſommets, comme il paroit de la figure que Mr. Caſſini en donne dans ſon Livre *P. I. Ch. VII. S.* 3.

Voici le Calcul.

I. *Obſervation au ſigne Septentrional.*

Le St. Barthelemi.	.	= 1184,5
D = 52420.	R	= 60,0
La Hauteur. .	H	= 1124,5

II. *Observation à Rupeyroux.*

Le St. Barthelemi.	A	= 846,8
D = 87740.	R	= 168,4
	H	= 678,4
La Hauteur de Rupeyroux.		= 446,3
Celle du St. Barthelemi.		= 1124,7
Ainsi la Hauteur moïenne trouvée de ces deux Observations sera.		= 1124,6.

III. *Observation à Magrin.*

Le St. Barthelemi.	A	= 1107,5
D = 46264.	R	= 46,8
	H	= 1060,7
La Hauteur de Magrin.		= 157,7
Celle du Barthelemi.		= 1218,4

IV. *Ob-*

IV. *Observation sur le Puy-Laurent.*

Barthelemi.	A	= 1098,0
D = 44233.	R	= 42,8
	H	= 1055,2
La Hauteur du Puy-Laurent.		= 177,2
Celle du Barthelemi.		= 1232,4
Ainsi la Hauteur moïenne de la Montagne St. Barthelemi tirée de ces deux Observations sera		= 1225,4

Voici

Voici donc les Hauteurs de toutesces montagnes dans une tabelle, avec la Hauteur du Barométre, telle qu'on l'a obfervée, reduite à la Hauteur moïenne, en fuppofant celle au niveau de la mer de 28. pouces.

Noms des Montagnes.	Hauteur fuivant Mr. Caffini en toifes.	Hauteur corrigee en toifes.	Hauteur du Barométre.	
			″ ‴	
Le Canigou.	1441,5	1424,5	20 : 0½	
Le Mouffet.	1253,0	1228,0	20 : 10⅔	incertain
La Matelotte.	335,5	335,4		
La Maffanne.	408,5	408,3	25 : 4	
St. Elme.	101,5	101,5		
Puy de Bugarac.	650,5	628,4	24 : 1½	
St. Jaques à Perpignan.	41,5	36,5		
Tautavel.	258,0	245,2		
Magrin.	77,0	157,7		
Puy-Laurent.	97,0	177,2		
Rupeyroux.	407,5	446,3	25 : 1½	
Plomb de Cantal.	993,0	982,2		
Puy de Violent.	860,0	846,8		
Rodes.	318,5	361,8	25 : 8	
La Baftide.	431,5	438,6		
La Courlande.	846,0	801,3	23 : 2	
La Cofte.	859,0	807,4	23 : 2	
Le Mont d'or.	1048,0	1001,3		
Le Lage-Chevalier.	332,0	338,3		
Le Puy de Dome.	817,0	789,1	23 : 2½	
Le St. Barthelemi.	1189,2	1225,4	21 : 0½	incertain

RE-

REMARQUE.

§. 140. En comparant ces hauteurs, on voit que plusieurs, comme la Matelotte, la Massanne, St. Elme, Tautavel &c. ne different pas beaucoup, mais que par contre celles de Magrin & du Puy-Laurent sont de 80 toises plus grandes, que ne les donne Mr. Cassini, & que par contre la Courlande, la Coste, le Mont d'or, doivent être diminués de 30 à 40 toises, pour que de la hauteur que Mr. Cassini a trouvée, on en puisse avoir la véritable. Mais il y a un autre point, qui m'a extrêmement surpris, c'est que les hauteurs Barométriques s'accordent parfaitement bien avec les hauteurs des endroits corrigées.

Car en representant les premieres par les abscisses, & appliquant les dernieres comme des ordonnées, on déterminera autant de points d'une ligne courbe.

J'ai trouvé qu'en tirant cette Courbe, par ces points déterminés, elle est si réguliere, comme si ces points avoient eté placés exprès aux endroits, par où la courbe devoit passer, & qu'ils ne s'en ecartent que de quelques toises tout au plus. Cet accord inopiné m'a engagé à y appliquer une formule, par laquelle j'ai calculé une table pour les hauteurs des endroits au-dessus de la mer, & celles du Barométre, qui leur répondent, dans son etat moïen. Je donnerai une autre fois la formule & la maniere, dont je me suis servi pour la trouver, & me contenterai de donner ici la table, & d'en faire voir l'accord avec les expériences rapportées dans le §. précédent. Bien qu'on ait encore des Observations Barométriques faites sur d'autres Montagnes, comme sur le Clairet en Provence, sur Notre-Dame

Dame de la Garde, & d'autres : mais n'aiant pas à present l'occasion de corriger les hauteurs de ces Montagnes, je me suis borné à rapporter celles, où j'ai pu trouver toutes les circonstances. Au reste en faisant de semblables observations Barométriques, il est à propos de choisir des jours, où l'air est calme, & que le Barometre est à sa hauteur moïenne sans avoir varié depuis un jour ou deux. Ces circonstances seront les plus opportunes, pour trouver exactement la descente du mercure dans le Barometre.

Table des Hauteurs Barométriques répondantes aux élevations des endroits au-dessus de la Mer.

Hauteur du Baromètre.	Elevation des endroits.	Baromètre.	Elevation des endroits.	Baromètre.	Elevation des endroits.
27 : 11	12,0	24 : 8	529,3	21 : 5	1136,4
- - 10	24,1	- - 7	544,4	- - 4	1153,2
- - 9	36,3	- - 6	558,8	- - 3	1170,1
- - 8	48,6	- - 5	573,4	- - 2	1187,1
- - 7	60,9	- - 4	588,0	- - 1	1204,1
- - 6	73,3	- - 3	602,7	21 : 0	1221,2
- - 5	85,7	- - 2	617,3	20 : 11	1238,4
- - 4	98,2	- - 1	632,1	- - 10	1255,6
- - 3	110,8	24 : 0	647,9	- - 9	1272,9
- - 2	123,3	23 : 11	661,8	- - 8	1290,3
- - 1	136,0	- - 10	676.8	- - 7	1307,7
27 : 0	148,7	- - 9	691,8	- - 6	1325,3
26 : 11	161,4	- - 8	706,8	- - 5	1342,7
- - 10	174,4	- - 7	721,9	- - 4	1360,4
- - 9	187,4	- - 6	737,1	- - 3	1378,1
- - 8	200,4	- - 5	752,5	- - 2	1396,1
- - 7	213,4	- - 4	766,6	- - 1	1413,9
- - 6	226,5	- - 3	783,0	20 : 0	1431,8
- - 5	239,7	- - 2	798,4	19 : 11	1449,8
- - 4	252,9	- - 1	813,9	- - 10	1467,9
- - 3	266,2	23 : 0	829,5	- - 9	1486,1
- - 2	279,6	22 : 11	845,0	- - 8	1504,4
- - 1	239,1	- - 10	860,7	- - 7	1522,8
26 : 0	306,6	- - 9	876,4	- - 6	1541,2
25 : 11	320,1	- - 8	892,2	- - 5	1559,7
- - 10	333,7	- - 7	908,0	- - 4	1578,3
- - 9	347,3	- - 6	924,0	- - 3	1597,0
- - 8	361,1	- - 5	940,0	- - 2	1615,7
- - 7	374,8	- - 4	956,1	- - 1	1634,5
- - 6	383,7	- - 3	972,2	19 : 0	1652,5
- - 5	402,5	- - 2	988,3	18 : 6	1768,0
- - 4	416,5	- - 1	1004.4	18 : 0	1887,4
- - 3	430,5	22 : 0	1020,8	17 : 6	2009,3
- - 2	444,6	21 : 11	1037,1	17 : 0	2134,8
- - 1	458,7	- - 10	1053,5	16 : 6	2264,0
25 : 0	472,8	- - 9	1069,9	16 : 0	2397 3
24 : 11	487,0	- - 8	1086,4	15 : 6	2534,9
- - 10	501,2	- - 7	1103,0	15 : 0	2677,0
- - 9	515,5	21 : 6	1119,7	14 : 6	2824,0
				14 : 0	2976,0

Voici maintenant comme le calcul s'accorde avec les obſervations.

Noms des endroits.	Hauteur moïenne du baro-métre.	Hauteur calculée en toiſes.	Hauteur meſurée en toiſes.	Diffe-rence.
Rodes.	25″: 8‴	361,1	361,8	— 0,7
Maſſanne.	25 : 4	416,5	408,3	+ 8,2
Rupeyroux.	25 : $1\frac{1}{2}$	451,5	446,3	+ 5,2
Bugarac.	24 : $1\frac{1}{2}$	624,7	628,4	— 3,7
Puy de Dôme.	23 : $2\frac{1}{2}$	790,7	789,1	+ 1,6
La Coſte.	23 : 2	798,4	807,4	— 9,0
La Courlande.	23 : 2	798,4	801,3	— 2,9
St.Barthelemi	21 : $0\frac{1}{2}$	1212,6	1225,4	— 12,8
Mouſſet.	20 : $10\frac{2}{3}$	1244,8	1228,0	+ 16,8
Le Canigou.	20 : $0\frac{1}{2}$	1422,9	1424,5	— 1,6

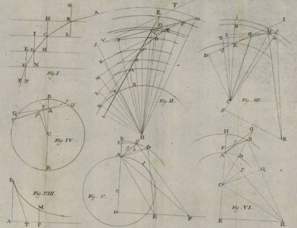
De-là on voit que la différence eſt toujours au-deſſous d'une ligne. Mais il faut encore remarquer, que les Hauteurs barométriques pour les deux-montagnes le Mouſſet & le St. Barthelemi, qui different le plus, ſont incertaines, en ce que je n'ai pu trouver quelle etoit la Hauteur du barométre à la ſurface de la mer ou à Paris, du tems que ces obſervations etoient faites.

On trouva la Hauteur du Barométre ſur le Pic de Teneriffe de 125 lignes plus bas, qu'au bord de la mer. Ainſi la Hauteur moïenne etant de 17″, 7‴, j'ai trouvé la Hauteur du Pic de 1989,2 toiſes, & je ne doute pas qu'elle ne differe gueres de la véritable. Car bien que le P. Feuillée la meſura & la trouva de 13158 pieds ou 2193 toiſes, il paroit cependant, que non ſeulement il n'a pas eu egard à la refraction, mais il y a apparence qu'il s'eſt ſervi de deux ſtations, ce qui doubleroit l'erreur, qui nait de la refraction. Mr. Bouguer donne la Hauteur du Pic de 12318, ou de 12258 pieds. Je ne sais pas de quelle maniere ces deux hauteurs ont eté trouvées: mais il est vraisemblable, que la mesure en ait eté faite aux deux extrémites d'un triangle, qui devoit determiner la distance de la montagne & dont les côtés etoient inegalement eloignés. La mesure, qui resulte du plus petit côté etant de 12258 pieds, ou de 2043 toises, ne differe de notre calcul que de 54 toises, effet qui peut tres bien provenir de la refraction, parcequ'il n'exige qu'une distance d'environ 50000 toises; & il la faudra tout au moins aussi grande, pour qu'on puisse voir le sommet de la montagne.

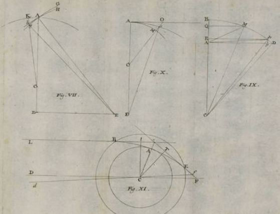
F I N.

Fautes à corriger.

Page.	*Ligne.*	*Au lieu de*	*Lisez*
41.	9.	TC	tC
43.	21.	DT	DM
51.	4.	(c. tang. 80)	c(tang. 80)
60.	18.	$\frac{DG-\sqrt{(DG^2-2n.DC^2)}}{DG}$	$\frac{DG-\sqrt{(DG^2-2n.DC^2)}}{DC}$
68.	6.	AS	AD
71.	18.	$\frac{ACB}{FGA}$	$\frac{ACB}{FgA}$
93.	7.	BAC	BAE
94.	5.	TC*f*	T*f*C



Route de la Lumière. Tab. I.



Routes de la Lumière. Tab. II.